Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El Teorema de Keller y la clasificación de conjuntos convexos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Matemática

PRESENTA:

Ananda López Poo Cabrera

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Natalia Jonard Pérez

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.,

2018

1. Datos del alumno
López Poo
Cabrera
Ananda
55349376
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311622070

2. Datos del tutor
Dra.
Natalia
Jonard
Pérez

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Carmen
Martínez Adame
Isais

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Francisco Javier
Torres
Ayala

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Pierre Michel
Bayard

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Luis
Montejano
Peimbert

7. Datos del trabajo escrito
El Teorema de Keller y la clasificación de conjuntos convexos
109 p.
2018

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi mamá, sobre todo. Por todo su apoyo en cada ámbito y momento de mi vida, en las cosas pequeñas de cada día y en las importantes. Por sus consejos, enseñanzas y sacrificios. Por escuchar tan atentamente, por vivir mis logros y experiencias conmigo. Por su interés, por saber tanto de mis clases y de cómo me va y de lo que hago. Por todas las veces que se me olvidó darle las gracias.

A mi papá, por el tiempo que tuvimos. Por los libros, películas y canciones, por compartirme su forma de ver la vida y por tener un papel tan importante en la persona que soy ahora. Porque me hubiera gustado que pudiera leer esto con la diligencia y atención que ponía a mis ensayos de la escuela.

A mi familia. A mi abuela Martha, por preocuparse por mí y decirme que ya descansara cada vez que me vio escribiendo este trabajo o haciendo tarea. A mi buen juicio por casi no hacerle caso. A mi abuela Carmela, por su cariño y por estar desde lejos. A mis tíos y primos, por creer en mí y preguntarme cada domingo que cómo iba con la tesis.

A mis amigos, de prepa y de la facultad, por los momentos, los recuerdos y por coincidir en la vida. A Yadira, por ser mi amiga constante desde el primer semestre de la carrera y aprender matemáticas conmigo. Por las risas y las anécdotas y las conversaciones.

Finalmente, agradezco enormemente a Natalia, por dirigir esta tesis, por revisarla tan detenidamente y por sus sugerencias sobre mi camino académico. Por inspirarme con todas las cosas que logra hacer al mismo tiempo y de manera excelente, también. A mis sinodales, por leer y ayudarme a mejorar este trabajo.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104816 *Acciones de grupos en variedades de dimensión infinita*. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción

Un *espacio de Keller* es un subconjunto convexo de un espacio topológico vectorial que es afínmente homeomorfo a un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita del espacio de sucesiones ℓ_2. En 1931, Keller probó en [5] que todo espacio de Keller es homeomorfo al cubo de Hilbert. Este importante resultado de topología de dimensión infinita se conoce como el Teorema de Keller.

En 1955, Klee usó el Teorema de Keller para dar una clasificación topológica de los subconjuntos convexos, cerrados y localmente compactos de un espacio de Banach. Demostró en [6] que cada uno de dichos subconjuntos debe ser homeomorfo a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+$, para ciertos números cardinales $0 \leq n < \aleph_0$ y $0 \leq m \leq \aleph_0$. Nos referiremos a este resultado como el Teorema de Klee.

Si A es un subconjunto convexo de un espacio vectorial, llamaremos *cono característico de* A al conjunto

$$\operatorname{cc} A = \left\{ y \in X \mid \text{existe } x \in X \text{ tal que } x + \mathbb{R}^+ y \subseteq A \right\}.$$

En 1964, Bessaga y Klee describieron las posibilidades topológicas para un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial arbitrario. En [7], demostraron que cada cuerpo convexo cerrado U en un espacio X debe ser homeomorfo a $\operatorname{cc} U \times \mathbb{I}^m$, para cierto $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o a un semiespacio cerrado de X.

El propósito del presente trabajo es dar una demostración detallada de estos resultados concernientes a la estructura topológica de conjuntos convexos; es decir, los teoremas de Keller y Klee y la clasificación de Bessaga y Klee.

En el capítulo 1 se recuerdan algunos conceptos y resultados básicos de análisis funcional y topología. Se introducen las nociones de funciones soporte y cono característico, que se usarán en el resto del texto, y de convexidad elíptica, necesaria para la demostración del Teorema de Keller. Se desarrollan algunas propiedades de la funcional de Minkowski y de pseudonormas, las cuales se utilizarán más adelante para el estudio de la clasificación de Bessaga y Klee.

El capítulo 2 se dedica a la demostración del Teorema de Keller.

En el capítulo 3 se desarrolla la clasificación topológica de Bessaga y Klee. Las proposiciones en este capítulo tienen demostraciones muy largas, por lo que al final de éste se incluye un resumen para enfatizar los resultados obtenidos.

El capítulo 4 se dedica al Teorema de Klee. En la primera sección se prueba que los casos indicados en el teorema son topológicamente distintos, para cada par de números cardinales $0 \leq n < \aleph_0$ y $0 \leq m \leq \aleph_0$.

Posteriormente, para la demostración del Teorema de Klee se consideran dos casos: los subconjuntos que tienen dimensión finita y los que tienen dimensión infinita. Los primeros resultan ser cuerpos convexos cerrados en cierto espacio topológico vectorial, por lo que la clasificación de Bessaga y Klee del capítulo 3 proporciona los resultados necesarios para la prueba de este caso. En la segunda sección del capítulo 4 se demuestran las proposiciones requeridas para el caso en el que los subconjuntos tienen dimensión infinita.

Finalmente, en la tercera sección del capítulo 4 se recapitulan los resultados obtenidos en el capítulo 3 y en la sección 4.2, y se demuestra el Teorema de Klee.

Como varias de las demostraciones en este trabajo son muy extensas, se omitieron algunas cuentas de ellas para facilitar su lectura. Estas cuentas se incluyen en un apéndice al final del texto.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar los resultados y nociones preliminares que se utilizarán a lo largo de esta tesis. Comenzaremos introduciendo la notación que se usará.

Si X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, denotaremos como $\overline{A}$, $\operatorname{int} A$ y ∂A a la cerradura, el interior y la frontera de A en X, respectivamente.

Todos los espacios vectoriales que consideraremos serán sobre el campo $\mathbb{R}$. Dados un espacio vectorial X y $A \subseteq X$, denotaremos como $\operatorname{span} A$ al subespacio de X generado por A. Además, dados puntos x, y en un espacio vectorial escribiremos

$$[x;\, y] = \{sx + ty \mid s, t \in [0,1]\,, s + t = 1\}\,,$$

$$(x;\, y) = \{sx + ty \mid s, t \in (0,1)\,, s + t = 1\}\,.$$

Todos los espacios topológicos vectoriales que consideraremos serán espacios de Hausdorff.

Si (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos por $B_\varepsilon(x)$ y $\overline{B}_\varepsilon(x)$ a las bolas abierta y cerrada, respectivamente, con centro en x y radio ε. Es decir,

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad \overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}\,.$$

Finalmente, usaremos el símbolo $\mathbb{R}^+$ para denotar el conjunto

$$\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}\,.$$

1.1. Resultados básicos

Definición 1.1.1. Sea C un subconjunto de un espacio vectorial. Diremos que C es convexo si $sx + ty \in C$ para cada $x, y \in C$ y $s, t \geq 0$ tales que $s + t = 1$.

A continuación recordaremos algunas nociones y resultados clásicos de análisis funcional. Las demostraciones de éstos pueden consultarse en [3].

Definición 1.1.2. Sea X un espacio topológico vectorial. Se dice que una funcional $f : X \to \mathbb{R}$ es sublineal si

1. $f(tx) = tf(x)$ para $x \in X$, $t \in \mathbb{R}^+$,
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para $x, y \in X$.

Teorema 1.1.3 (Hahn-Banach)**.** *Sean M un subespacio de un espacio topológico vectorial X, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineal y $f : M \to \mathbb{R}$ lineal tales que $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Entonces, existe una funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F \restriction_M = f$ y*

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x) \text{ para cada } x \in X.$$

El siguiente teorema de separación es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.1.4 (Teorema de separación de Hahn-Banach)**.** *Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio topológico vectorial X.*

(i) Si A es abierto en X, entonces existen $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $t \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) < t \leq f(b)$ para cada $a \in A$, $b \in B$.

(ii) Si A es compacto, B es cerrado en X y X es localmente convexo, entonces existen $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $t, s \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) < t < s < f(b)$ para cada $a \in A$, $b \in B$.

Definición 1.1.5. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si es completo.

Teorema 1.1.6 (Teorema de la función abierta)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal, continua y suprayectiva. Entonces, T es abierta.*

Teorema 1.1.7 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal. Si $\{(x, T(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$, entonces T es continua.*

Teorema 1.1.8 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo no vacío y $f : X \to X$ una contracción estricta. Es decir, existe $k \in (0,1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$ para cada $x, y \in X$. Entonces, hay un único $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Corolario 1.1.8.1. *Si X es un espacio de Banach y $f : X \to X$ es una contracción estricta, entonces $F : X \to X$ definida por $F(x) = x + f(x)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Para cada $y \in X$ sea $f_y : X \to X$ dada por $f_y(x) = y - f(x)$. Como f es una contracción estricta, cada f_y también lo es, pues $\|f_y(x) - f_y(z)\| = \|f(x) - f(z)\|$ para $x, z \in X$.

Así, debido al Teorema 1.1.8 podemos definir $G : X \to X$ de manera que $G(y)$ es el único punto fijo de f_y para cada $y \in X$.

Tomemos $x \in X$. Entonces $f_{x+f(x)}(x) = x + f(x) - f(x) = x$, por lo que x es el único punto fijo de $f_{x+f(x)}$. Esto implica que

$$x = G(x + f(x)) = G(F(x)).$$

Por otra parte, ya que $G(x)$ es un punto fijo de f_x, se tiene que $x - f(G(x)) = G(x)$. Así, $x = G(x) + f(G(x)) = F(G(x))$.

De lo anterior concluimos que G es la función inversa de F. Además, para cada $x_1, x_2 \in X$, $G(x_1)$ y $G(x_2)$ son puntos fijos de f_{x_1} y f_{x_2}, respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|G(x_1) - G(x_2)\| &= \|x_1 - f(G(x_1)) - x_2 + f(G(x_2))\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \|f(G(x_1)) - f(G(x_2))\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + k\|G(x_1) - G(x_2)\| \end{aligned}$$

para algún $k \in (0,1)$, pues f es una contracción estricta. Entonces, tenemos que $\|G(x_1) - G(x_2)\| \leq \frac{1}{1-k}\|x_1 - x_2\|$ para cada $x_1, x_2 \in X$, por lo que G satisface la condición de Lipschitz y por lo tanto es continua.

Así, se tiene que F tiene una función inversa y continua. Como además F es continua (pues f lo es, porque es una contracción estricta), F es un homeomorfismo. □

Definición 1.1.9. Un espacio topológico vectorial es un espacio de Fréchet si es localmente convexo y existe una métrica completa e invariante bajo traslaciones que induce su topología.

Teorema 1.1.10. *Sea X un espacio topológico vectorial localmente convexo. Si X tiene una base numerable, entonces existe una métrica d en X que induce su topología, es invariante bajo traslaciones y todas las bolas abiertas en (X, d) son convexas.*

Lema 1.1.11. *Si X es un espacio de Fréchet separable, existe un conjunto $\{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ de funcionales lineales y continuas que separa los puntos de X.*

Demostración. Como X es metrizable y separable, X es segundo numerable. Así, ya que además X es localmente convexo, debido al Teorema 1.1.10 existe una métrica d en X que induce su topología y tal que las bolas abiertas en (X, d) son convexas.

Entonces, como (X, d) es separable, tiene una base numerable $\mathcal{B}$ formada por bolas abiertas, y por lo tanto convexas. Consideremos

$$\mathcal{A} = \{(A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid A \cap B = \emptyset\}.$$

$\mathcal{A}$ es numerable, por lo que $\mathcal{A} = \{(A_n, B_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, A_n y B_n son no vacíos, ajenos, convexos y abiertos en X. Así, por el Teorema 1.1.4, existen $f_n : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $t \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) < t \leq f(b)$ para cada $a \in A_n$, $b \in B_n$.

El conjunto $\{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de X, pues si $x, y \in X$ y $x \neq y$, existen $U, V \in \mathcal{B}$ ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Entonces, $(U, V) = (A_k, B_k)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, y $f_k(x) < f_k(y)$. □

Definición 1.1.12. Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Hilbert si existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ para cada $x \in X$.

Proposición 1.1.13. *Sea X un espacio de Hilbert separable. Entonces, todo subconjunto ortonormal de X es numerable.*

Demostración. Sea B un subconjunto ortonormal de X. Entonces, para cada $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \neq b_2$ se tiene que

$$\|b_1 - b_2\|^2 = \langle b_1 - b_2, b_1 - b_2 \rangle = \langle b_1, b_1 \rangle + \langle b_2, b_2 \rangle = \|b_1\|^2 + \|b_2\|^2 = 2,$$

y por lo tanto $\|b_1 - b_2\| = \sqrt{2}$.

Sean $D = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso en X, y $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Así, si $i \in \mathbb{N}$ y $b_1, b_2 \in B \cap B_\varepsilon(d_i)$, entonces $\|b_1 - b_2\| < 2\varepsilon = \sqrt{2}$, y esto implica que $b_1 = b_2$. Por lo tanto, puede definirse $f : \{d_i \in D \mid B \cap B_\varepsilon(d_i) \neq \emptyset\} \to B$, donde $f(d_i)$ es el único elemento en $B \cap B_\varepsilon(d_i)$.

Ya que D es denso en X, para cada $b \in B$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\|b - d_i\| < \varepsilon$, y de esto se sigue que f es suprayectiva. Entonces, como D es numerable, B también lo es. $\square$

Lema 1.1.14. *Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ convexo y simétrico con respecto al origen. Si $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\lambda_j \neq 0$, entonces*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \in A.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k < 0$, para $0 \leq k \leq n$. Entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} = \frac{-\lambda_1(-x_1) - \ldots - \lambda_k(-x_k) + \lambda_{k+1}x_{k+1} + \ldots + \lambda_n x_n}{-\lambda_1 - \ldots - \lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n}.$$

Como A es simétrico con respecto al origen, se tiene que

$$-x_1, \ldots, -x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n \in A.$$

Por lo tanto, ya que A es convexo, $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \geq 0$ y

$$\frac{-\lambda_1 - \ldots - \lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n}{-\lambda_1 - \ldots - \lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_n} = 1,$$

entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \in A.$$

$\square$

Proposición 1.1.15. *Sean X un espacio de Hilbert separable y $A \subseteq X$ convexo y simétrico con respecto al origen. Supongamos que* span$A$ *tiene dimensión algebraica infinita. Entonces, existe un subconjunto M de A que es infinito numerable y ortogonal maximal. Es decir,*

(i) $\langle x, y\rangle = 0$ *para cada* $x, y \in M$, $x \neq y$,

(ii) Si $x \in A$ es tal que $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in M$, entonces $x = 0$.

Demostración. Existe $a \in A$, pues span$A$ tiene dimensión infinita. Como A es simétrico con respecto al origen, se tiene que $-a \in A$; y ya que A es convexo, entonces $0 \in A$. Esto implica que existe un subconjunto de A que es ortogonal.

Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq A \mid B \text{ es ortogonal}\}.$$

Tenemos que $\mathcal{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado por la contención, y es no vacío porque A tiene un subconjunto ortogonal. Sea $\mathcal{C} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una cadena en $\mathcal{F}$. Entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es una cota superior de $\mathcal{C}$. Además, como $B_\lambda \subseteq A$ para cada $\lambda \in \Lambda$, se cumple que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \subseteq A.$$

Por otro lado, si $x, y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, entonces $x, y \in B_\lambda$ para alguna $\lambda \in \Lambda$, pues $\mathcal{C}$ es una cadena. Como B_λ es ortogonal, $\langle x, y\rangle = 0$. Por lo tanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ es ortogonal.

Así, toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene una cota superior perteneciente a $\mathcal{F}$ y, por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal, digamos M. Notemos que debe ocurrir que $0 \in M$, pues $0 \in A$ y $M \cup \{0\}$ es ortogonal.

Ahora, como M es ortogonal, se cumple que $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $x, y \in M$, $x \neq y$. Además, si $x \in A$ es tal que $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in M$, entonces $M \cup \{x\} \in \mathcal{F}$. Esto implica que $x \in M$, pues M es un elemento maximal. Por lo tanto, en particular $\langle x, x\rangle = 0$, y entonces $x = 0$. De esta manera, se cumplen las condiciones (i) y (ii), y así M es un subconjunto ortogonal maximal de A.

Además, de la Proposición 1.1.13 se sigue que

$$M' = \left\{\frac{m}{\|m\|} \mid m \in M\setminus\{0\}\right\}$$

es numerable. Como $M\setminus\{0\}$ es ortogonal, es linealmente independiente. Entonces $|M\setminus\{0\}| = |M'|$, y por lo tanto M es numerable.

Por otra parte, si M fuera finito, digamos $M = \{0, m_1, \ldots, m_n\}$, el hecho de que span A tiene dimensión algebraica infinita implica que $M\setminus\{0\}$ no podría ser una base para span A, por lo que existiría $m_{n+1} \in A$ tal que

$\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}$ fuera linealmente independiente. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, se tendría un conjunto ortogonal y linealmente independiente $\left\{m_1, \ldots, m_n, m'_{n+1}\right\}$, donde

$$m'_{n+1} = m_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle m_{n+1}, m_i \rangle}{\langle m_i, m_i \rangle} m_i \in \operatorname{span}\{m_1, \ldots, m_{n+1}\}.$$

Es decir, $m'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i m_i$ para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Sea

$$m''_{n+1} = \frac{m'_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|}.$$

Como $\left\{m_1, \ldots, m_n, m'_{n+1}\right\}$ es ortogonal y m''_{n+1} es un múltiplo escalar de m'_{n+1}, entonces

$$M \cup \left\{m''_{n+1}\right\} = \left\{0, m_1, \ldots, m_n, m''_{n+1}\right\}$$

es ortogonal. Además, ya que A es convexo y simétrico y $m_1, \ldots, m_{n+1} \in A$, por el Lema 1.1.14 tenemos que $m''_{n+1} \in A$. Por lo tanto, $M \cup \left\{m''_{n+1}\right\} \in \mathcal{F}$, y la maximalidad de M implica que $m''_{n+1} \in M$. Pero esto es una contradicción, por la definición de m''_{n+1} y porque $\left\{m_1, \ldots, m_n, m'_{n+1}\right\}$ es linealmente independiente.

Así, M es infinito numerable, y es un subconjunto ortogonal maximal de A. □

Definición 1.1.16. Sean A y B subconjuntos convexos de los espacios vectoriales topológicos X y Y, respectivamente. Una función $g : A \to B$ es una transformación afín si preserva combinaciones convexas. Es decir, si $x_1, \ldots, x_n \in A$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, entonces

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i).$$

Si además g es un homeomorfismo, se dice que A y B son afínmente homeomorfos (en este caso g^{-1} también es una transformación afín).

Teorema 1.1.17. *Sea A un subconjunto convexo y compacto de un espacio topológico vectorial X. Supongamos que existe un conjunto $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de funcionales lineales y continuas definidas en X que separa los puntos de A. Entonces, A es afínmente homeomorfo a un subconjunto convexo y compacto de ℓ_2.*

Demostración. Como A es compacto y cada funcional f_n es continua, $a_n = \sup\{|f_n(x)| \mid x \in A\} < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $g_n : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_n = \frac{f_n}{n(a_n + 1)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sup\{|g_n(x)| \mid x \in A\} \leq \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, cada g_n es lineal y continua y $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de A.

Sea $h : A \to \ell_2$ dada por $h(x) = (g_n(x))$. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \text{ para cada } x \in A,$$

h está bien definida. Debido a que cada g_n es lineal, h también lo es, y en particular es una transformación afín. Así, como A es convexo, $h(A)$ es convexo.

Sea $x \in A$. Dada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Además, ya que cada g_n es continua en A, existe $U \subseteq A$ abierto tal que $x \in U$ y, si $u \in U$, entonces

$$|g_i(x-u)| = |g_i(x) - g_i(u)| < \frac{\varepsilon}{(2N)^{\frac{1}{2}}}, \text{ para cada } i = 1, \ldots, N.$$

Por lo tanto, si $u \in U$, como $\sup\{|g_n(z)| \mid z \in A\} \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $|g_n(x-u)| = |g_n(x) - g_n(u)| \leq \frac{2}{n}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x-u)|^2 &= \sum_{n=1}^{N} |g_n(x-u)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |g_n(x-u)|^2 \\ &< \frac{\varepsilon^2}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2,\end{aligned}$$

y así

$$\|h(x) - h(u)\| = \|(g_n(x-u))\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x-u)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

De lo anterior concluimos que h es continua. Además, ya que $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de A, h es inyectiva. Por lo tanto, como A es compacto y ℓ_2 es un espacio de Hausdorff, $h : A \to h(A)$ es un homeomorfismo, y $h(A)$ es compacto y convexo. $\square$

El siguiente teorema nos permitirá establecer que, si $n \in \mathbb{N}$, la topología usual de $\mathbb{R}^n$ es la única que un espacio topológico vectorial de dimensión n puede tener. En [3, Teorema 1.21] puede encontrarse la demostración de este teorema para el caso en el que se tiene un espacio complejo, y la prueba para el caso real es idéntica.

Teorema 1.1.18. *Sean X un espacio topológico vectorial y Y un subespacio de X de dimensión algebraica $n \geq 1$. Entonces todo isomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to Y$ es un homeomorfismo.*

Notemos que si X es un espacio topológico vectorial de dimensión algebraica $n \geq 1$ y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de X, por el teorema anterior se tiene que $h : \mathbb{R}^n \to X$, definida como $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, es un homeomorfismo. Entonces, $X \cong \mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.19. Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X. El casco convexo de A, que denotaremos por $\operatorname{conv} A$, se define como

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Definición 1.1.20. Si X es un espacio vectorial y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$, diremos que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son afínmente independientes si para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$$

se cumple que $\alpha_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Recordemos que los vectores $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es un espacio vectorial X son afínmente independientes si y sólo si $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ son linealmente independientes.

Proposición 1.1.21. *Sea X un espacio topológico vectorial de dimensión algebraica finita $n \geq 1$. Si $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ son afínmente independientes, entonces* $\operatorname{int}(\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) \neq \emptyset$.

Demostración. Como $x_1 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}$ son linealmente independientes y X tiene dimensión algebraica n, $\{x_1 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1}\}$ es una base para X. Así, $h : \mathbb{R}^n \to X$, definida como $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 (x_1 - x_{n+1}) + \ldots + \alpha_n (x_n - x_{n+1})$, es un homeomorfismo.

Entonces, $f : \mathbb{R}^n \to X$, dada por

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + (1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n) x_{n+1},$$

es un homeomorfismo, pues es la composición de h con una traslación en X. Observemos que $f(0) = x_{n+1}$ y $f(e_i) = x_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Así, ya que f es lineal, tenemos que $f(\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_n, 0\}) = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.

Sea

$$A = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1 \right\}.$$

Como cada proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ es continua, y por lo tanto la función $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ es continua, A es abierto en $\mathbb{R}^n$, pues es la intersección de la imágenes inversas de $(0, \infty)$ y $(-\infty, 1)$ bajo funciones continuas.

Entonces, ya que A es no vacío y abierto en $\mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_n, 0\}$, $\operatorname{int}(\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_n, 0\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\operatorname{int}(\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}) \neq \emptyset$, pues $\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_n, 0\} \cong \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. $\square$

1.2. Dimensión de un espacio topológico

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico normal y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Denotaremos la dimensión de X como $\dim X$. Diremos que $\dim X \leq n$ si para todo $A \subseteq X$ cerrado y toda función continua $f : A \to \mathbb{S}^n$ existe una extensión continua $g : X \to \mathbb{S}^n$.

Definimos $\dim X = -1$ si $X = \emptyset$, $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y no se cumple que $\dim X \leq n - 1$, y $\dim X = \infty$ si para toda $m \in \mathbb{N}$ no se cumple que $\dim X \leq m$.

Se cumple que:

1. La dimensión es invariante bajo homeomorfismos.
2. $\dim \mathbb{R}^n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
3. Si X es un espacio topológico normal y A es un subconjunto F_σ de X, entonces $\dim A \leq \dim X$.

Las demostraciones de las propiedades anteriores no se incluirán, pues rebasan los alcances de esta tesis. Pueden consultarse en [4].

Notemos que $\mathbb{B}^n$, la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, tiene dimensión n para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y es un subconjunto F_σ de $\mathbb{B}^n$.

Teorema 1.2.2. *Sea X un espacio topológico vectorial.*

(i) Si Y es un subespacio vectorial de X de dimensión algebraica n, entonces $\dim Y = n$.

(ii) Si $A \subseteq X$ es convexo y normal, $0 \in A$ y A tiene dimensión finita, entonces $\operatorname{span} A$ tiene dimensión algebraica finita.

Demostración. (i) Como $Y \cong \mathbb{R}^n$, $\dim Y = n$.

(ii) Supongamos que $\dim A = n$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$. Si $\operatorname{span} A$ tiene dimensión algebraica infinita, existen vectores $x_1, \ldots, x_m \in A$ linealmente independientes. Entonces $x_1, \ldots, x_m, 0$ son afínmente independientes y, como $0 \in A$ y A es convexo, $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m, 0\} \subseteq A$.

De la demostración de la Proposición 1.1.21 se tiene que, si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m, 0\} \cong \operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_m, 0\}$ e $\operatorname{int}(\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_m, 0\}) \neq \emptyset$. Esto implica que la bola unitaria $\mathbb{B}^m$ puede encajarse en $\operatorname{conv}\{e_1, \ldots, e_m, 0\}$, y por lo tanto en $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m, 0\} \subseteq A$. Así, si $h : \mathbb{B}^m \to A$ es un encaje, $h(\mathbb{B}^m)$ es compacto, y entonces es cerrado en A. En particular es un subconjunto F_σ, por lo que $m = \dim \mathbb{B}^m \leq \dim A = n$. Esto es una contradicción, pues $m > n$. Concluimos así que $\operatorname{span} A$ tiene dimensión algebraica finita. □

1.3. Funciones soporte

Definición 1.3.1. Sean A un subconjunto de un espacio topológico vectorial X, y $x_0 \in A$. Diremos que una funcional $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua soporta a A en x_0 si

$$\inf_{x \in A} f(x) < \sup_{x \in A} f(x) = f(x_0).$$

Diremos que x_0 es un punto soporte de A si existe dicha funcional, y el conjunto $\{x \in X \mid f(x) = f(x_0)\}$ será llamado el hiperplano soporte para A en el punto x_0.

Denotaremos como $\operatorname{Supp} A$ al conjunto de todos los puntos soporte de A.

Proposición 1.3.2. *Si A es un subconjunto convexo, completo y separable de un espacio normado, entonces A admite un punto que no es soporte.*

Demostración. Notemos que si $f : X \to \mathbb{R}$ soporta a A en un punto x, entonces, para cada $a \in A$, f soporta a $A - a$ en $x - a$. Por lo tanto, podemos suponer que $0 \in A$.

Como A es separable, podemos encontrar una sucesión (x_n) en A tal que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$t_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } \|x_n\| \leq 1, \\ \frac{1}{2^n \|x_n\|} & \text{si } \|x_n\| > 1. \end{cases}$$

Entonces, $0 < t_n \leq \frac{1}{2^n}$ y $|t_n| \|x_n\| = t_n \|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Así, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ converge absolutamente y, ya que A es completo, converge a un punto en A ($t_n x_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pues A es convexo y $0 \in A$). Por lo tanto, $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in A$.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ cualquier función lineal y continua tal que $f(x_0) = \sup_{x \in A} f(x)$. Entonces $f(x_n) \leq f(x_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1$, tenemos que

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n f(x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n f(x_0) \leq f(x_0).$$

Así, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n f(x_0)$ y, como $t_n f(x_n) \leq t_n f(x_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, también se cumple que $t_n f(x_n) = t_n f(x_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f(x_n) = f(x_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pues cada t_n es positivo. Así, como $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es denso en A, tenemos que f es constante en A. Concluimos que toda funcional lineal y continua f tal que $f(x_0) = \sup_{x \in A} f(x)$ es constante en A, y por lo tanto x_0 no es un punto soporte de A. $\square$

1.4. Conjuntos elípticamente convexos

Definición 1.4.1. Sea A un subconjunto de un espacio topológico vectorial X. Diremos que A es elípticamente convexo si para cada $x, y \in A$, $x \neq y$, se cumple que $(x;\, y) \subseteq A \backslash \operatorname{Supp} A$.

Definición 1.4.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Diremos que la norma $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa si para cada $x, y \in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ se cumple que x y y son linealmente dependientes.

Ejemplo 1.4.3. *La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ es estrictamente convexa.*

Ejemplo 1.4.4. *La norma usual en ℓ_2, dada por $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ para cada $x = (x_n) \in \ell_2$, es estrictamente convexa.*

Demostración. Sean $x, y \in \ell_2$, y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

y por lo tanto

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

y esto implica que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|\,\|y\|.$$

Entonces, se da la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, y por lo tanto x y y son linealmente dependientes. $\square$

Teorema 1.4.5. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, donde la norma $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa. Sean A un subconjunto convexo de X tal que $0 \in A \backslash \mathrm{Supp} A$, y $F : X \to X$ definida como*

$$F(x) = \frac{x}{1 + \| x\|}.$$

Entonces, $F(A)$ es elípticamente convexo.

Demostración. Veamos primero que $0 \notin \mathrm{Supp}\, F(A)$. Como $0 \in A$, $0 = F(0) \in F(A)$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es lineal y continua y soporta a $F(A)$ en 0, entonces

$$\inf_{v \in A} f\left(\frac{v}{1 + \| v\|}\right) < \sup_{v \in A} f\left(\frac{v}{1 + \| v\|}\right) = f(0) = 0. \tag{1.1}$$

Como f es lineal y $\frac{1}{1+\| v\|} > 0$ para cada $v \in A$, de la desigualdad (1.1) inferimos que

$$\inf_{v \in A} f(v) < \sup_{v \in A} f(v) = 0 = f(0)$$

y, así, f soporta a A en 0. Pero $0 \notin \mathrm{Supp}\, A$, por lo que $0 \notin \mathrm{Supp}\, F(A)$.

Ahora, sean $z \in F(A)$ y $s \in (0, 1)$. Supongamos por contradicción que existe $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua que soporta a $F(A)$ en sz. Entonces, como $0, z \in F(A)$,

$$sf(z) = f(sz) \geq f(0) = 0 \text{ y } sf(z) = f(sz) \geq f(z).$$

Ya que $sf(z) \geq 0$ y $s > 0$, $f(z) \geq 0$. Y debido a que $sf(z) \geq f(z)$ y $s < 1$, $f(z) = 0$. Por lo tanto, $f(sz) = 0 = f(0)$, y así, como f soporta a $F(A)$ en sz, también soporta a $F(A)$ en 0. Esto contradice el hecho de que $0 \notin \mathrm{Supp}\, F(A)$, con lo cual concluimos que $sz \notin \mathrm{Supp}\, F(A)$ para cada $s \in (0, 1)$ y $z \in F(A)$. Equivalentemente,

$$(0;\, z) \subseteq F(A) \backslash \mathrm{Supp}\, F(A) \text{ si } z \in F(A). \tag{1.2}$$

Sean $x, y \in A$ y $t, t' \in (0, 1)$ tales que $t + t' = 1$ y $F(x) \neq F(y)$. Definamos los siguientes valores:

$$a = \frac{t}{(1 + \|x\|)\left(1 - \left\|\frac{tx}{1+\|x\|} + \frac{t'y}{1+\|y\|}\right\|\right)},$$

$$b = \frac{t'}{(1 + \|y\|)\left(1 - \left\|\frac{tx}{1+\|x\|} + \frac{t'y}{1+\|y\|}\right\|\right)}.$$

Ya que

$$\left\|\frac{tx}{1 + \|x\|} + \frac{t'y}{1 + \|y\|}\right\| \leq t\frac{\|x\|}{1 + \|x\|} + t'\frac{\|y\|}{1 + \|y\|} < t + t' = 1,$$

se cumple que $a, b > 0$. Además,

$$\begin{aligned}1 - \left\|\frac{tx}{1 + \|x\|} + \frac{t'y}{1 + \|y\|}\right\| &\geq 1 - t\frac{\|x\|}{1 + \|x\|} - t'\frac{\|y\|}{1 + \|y\|} \\ &= t\frac{1 + \|x\|}{1 + \|x\|} + t'\frac{1 + \|y\|}{1 + \|y\|} - t\frac{\|x\|}{1 + \|x\|} - t'\frac{\|y\|}{1 + \|y\|} \\ &= \frac{t}{1 + \|x\|} + \frac{t'}{1 + \|y\|},\end{aligned} \tag{1.3}$$

y esto implica que $a + b \leq 1$. Por lo tanto, ya que A es convexo y $0 \in A$, $ax + by = ax + by + (1 - a - b)\, 0 \in A$. Entonces, $F(ax + by) \in F(A)$.

Es fácil ver que $tF(x) + t'F(y) = F(ax + by)$ y, así, se tiene que $tF(x) + t'F(y) \in F(A)$ y $F(A)$ es convexo.

Veamos que $tF(x) + t'F(y) \notin \operatorname{Supp} F(A)$. Ya que $0 \notin \operatorname{Supp} F(A)$, podemos suponer que $tF(x) + t'F(y) \neq 0$. Y por (1.2), basta ver que $tF(x) + t'F(y) \in (0; z)$ par algún $z \in F(A)$.

Si x y y son linealmente independientes, entonces, como $t, t' > 0$,

$$\frac{tx}{1 + \|x\|} \text{ y } \frac{t'y}{1 + \|y\|}$$

son linealmente independientes. Por lo tanto, la desigualdad en la ecuación (1.3) es estricta, debido a que la norma es estrictamente convexa. Así, $a+b < 1$.

Además, como $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, por la convexidad de A se cumple que $\frac{ax+by}{a+b} \in A$. Entonces,

$$z = F\left(\frac{ax + by}{a + b}\right) = \frac{ax + by}{a + b + \|ax + by\|} \in F(A).$$

Y ya que $a+b<1$,

$$F(ax+by)=\frac{ax+by}{1+\|ax+by\|}=\frac{a+b+\|ax+by\|}{1+\|ax+by\|}z\in(0;\,z)\,.$$

De esta manera, como teníamos que $tF(x)+t'F(y)=F(ax+by)$, $tF(x)+t'F(y)\in(0;\,z)$, con $z\in F(A)$.

Por otra parte, si x y y son linealmente dependientes, ya que $F(x)$ y $F(y)$ son múltiplos escalares de x y y, respectivamente, entonces también son linealmente dependientes. Así, sin pérdida de generalidad $F(x)=cF(y)$, para algún $c\in\mathbb{R}$. $c\neq 1$, pues $F(x)\neq F(y)$.

Por lo tanto, si $tc+t'\in(0,1)$,

$$tF(x)+t'F(y)=(tc+t')\,F(y)\in(0;\,F(y))\,.$$

Y si $tc+t'\notin(0,1)$, entonces $c\neq 0$ y $t+\frac{t'}{c}\in(0,1)$, ya que $tF(x)+t'F(y)\neq 0$ y $c\neq 1$. Así,

$$tF(x)+t'F(y)=\left(t+\frac{t'}{c}\right)F(x)\in(0;\,F(x))\,.$$

De esta manera, en cualquier caso $tF(x)+t'F(y)\in(0;\,z)$, para algún $z\in F(A)$. □

Corolario 1.4.5.1. *Todo subconjunto convexo y cerrado de ℓ_2 es homeomorfo a un subconjunto elípticamente convexo de ℓ_2.*

Demostración. Sea A un subconjunto convexo y cerrado de ℓ_2. Entonces, ya que ℓ_2 es completo y separable, A es completo y separable. Así, debido a la Proposición 1.3.2 existe $a\in A\backslash\operatorname{Supp}A$. Por lo tanto $0\in A-a\backslash\operatorname{Supp}(A-a)$ y, por el Teorema 1.4.5, $F(A-a)$ es elípticamente convexo, donde $F:\ell_2\to\ell_2$ está definida como

$$F(x)=\frac{x}{1+\|\,x\|}.$$

Notemos que $\|y\|<1$ para cada $y\in F(\ell_2)$, por lo que podemos definir $F^{-1}:F(\ell_2)\to\ell_2$ como

$$F^{-1}(y)=\frac{y}{1-\|\,y\|}.$$

F^{-1} es la inversa de $F:\ell_2\to F(\ell_2)$. Ya que ambas funciones son continuas, tenemos que $F:\ell_2\to F(\ell_2)$ es un homeomorfismo, y así $A-a$ es homeomorfo a $F(A-a)$. Por lo tanto, A también es homeomorfo a $F(A-a)$, el cual es un subconjunto elípticamente convexo de ℓ_2. □

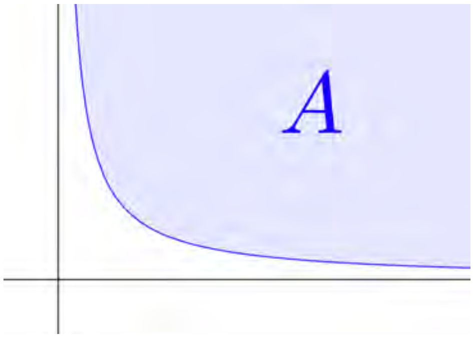


Figura 1.1: A

Figura 1.2: cc A

1.5. Cono característico

Definición 1.5.1. Sea A un subconjunto convexo de un espacio topológico vectorial X. Se define el cono característico de A como

$$\operatorname{cc} A = \left\{ y \in X \mid \text{existe } x \in X \text{ tal que } x + \mathbb{R}^+ y \subseteq A \right\}.$$

Ejemplo 1.5.2. *Consideremos el conjunto* $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq \frac{1}{x}\right\}$.

Si $(x_1, y_1) \in cc\,A$*, se cumple que*

$$(x_2, y_2) + \mathbb{R}^+ (x_1, y_1) \subseteq A$$

para cierto punto $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$*. Esto implica que* $x_1, y_1 \geq 0$.

Por otra parte, para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $x_0, y_0 \geq 0$ *se tiene que* $(1, 1) + \mathbb{R}^+ (x_0, y_0) \subseteq A$.

De esto inferimos que el cono característico de A *es*

$$cc\,A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\right\}.$$

Proposición 1.5.3. *Sea* U *un subconjunto convexo de un espacio topológico vectorial* X*. Si* U *es cerrado en* X*, entonces para cada* $u \in U$ *se tiene que* $\mathrm{cc}U = \{y \in X \mid u + \mathbb{R}^+ y \subseteq U\}$*. En particular, si* $0 \in U$ *entones* $\mathrm{cc}U \subseteq U$*.*

Demostración. Sea $u \in U$. Claramente $\{y \in X \mid u + \mathbb{R}^+ y \subseteq U\} \subseteq \operatorname{cc} U$.

Sea $z \in \operatorname{cc} U$. Entonces, existe $x \in X$ tal que $x + \mathbb{R}^+ z \subseteq U$. Así, $x + sz \in U$ para cada $s \in \mathbb{R}^+$ y, ya que U es convexo,

$$(1 - t)\, u + t\,(x + sz) \in U \text{ para cada } t \in [0, 1]\,, s \in \mathbb{R}^+.$$

Sea $r \in \mathbb{R}^+$. Debido a lo anterior,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) u + \frac{1}{n}\,(x + nrz) \in U \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) u + \frac{1}{n}\,(x + nrz) \to u + rz \text{ cuando } n \to \infty$$

y como U es cerrado en X, concluimos que $u + rz \in U$.

Por lo tanto, $u + \mathbb{R}^+ z \subseteq U$, y $z \in \{y \in X \mid u + \mathbb{R}^+ y \subseteq U\}$. $\square$

Proposición 1.5.4. *Sea U un subconjunto convexo y cerrado de un espacio topológico vectorial X. Si $a, b \in cc\,U$, entonces*

(i) $a + b \in cc\,U$,

(ii) $ta \in cc\,U$ *para toda* $t \geq 0$.

Demostración. El resultado es cierto si U es vacío. Supongamos que existe $u \in U$. Ya que U es cerrado en X y $u \in U$, por la Proposición 1.5.3 tenemos que $\mathrm{cc}\,U = \{y \in X \mid u + \mathbb{R}^+ y \subseteq U\}$.

Así, si $a, b \in \mathrm{cc}\,U$, entonces $u + \mathbb{R}^+ a \subseteq U$ y $u + \mathbb{R}^+ b \subseteq U$. Por lo tanto, debido a la convexidad de U,

$$u + t\,(a + b) = \frac{1}{2}\,(u + 2ta) + \frac{1}{2}\,(u + 2tb) \in U \text{ para cada } t \in \mathbb{R}^+.$$

Esto implica que $u + \mathbb{R}^+\,(a + b) \subseteq U$, y así $a + b \in \mathrm{cc}\,U$.

Por otra parte, si $a \in \mathrm{cc}\,U$ y $t \geq 0$, entonces $u + \mathbb{R}^+ a \subseteq U$.

$$u + \mathbb{R}^+\,(ta) = u + \mathbb{R}^+ a \subseteq U \text{ si } t > 0, \text{ y } u + \mathbb{R}^+\,(ta) = \{u\} \subseteq U \text{ si } t = 0.$$

En cualquier caso, $ta \in \mathrm{cc}\,U$. $\square$

Lema 1.5.5. *Sea U un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de un espacio topológico vectorial X. Si $\mathrm{cc}U$ no es un subespacio vectorial de X y $u \in U$, entonces existe $z \in \mathrm{cc}U$ tal que $u - z \in \partial U$.*

Demostración. Por la Proposición 1.5.4, tenemos que $\mathrm{cc}\,U$ es cerrado bajo suma y producto por escalares no negativos. Como además $0 \in \mathrm{cc}\,U$, ya que U es no vacío, el hecho de que $\mathrm{cc}\,U$ no es un subespacio vectorial de X implica que existen $y \in \mathrm{cc}\,U$ y $t < 0$ tales que $ty \notin \mathrm{cc}\,U$. Entonces, $u + \mathbb{R}^+(-y) = u + \mathbb{R}^+(ty) \not\subseteq U$. Sean

$$s_0 = \text{ínf}\,\{s \geq 0 \mid u + s\,(-y) \notin U\}$$

y $z = s_0 y$. Ya que $s_0 \geq 0$ y $y \in \mathrm{cc}\,U$, también se tiene que $z \in \mathrm{cc}\,U$. Veamos que $u - z \in \partial U$.

Si $s_0 = 0$, $u - z = u \in U$. Si $s_0 > 0$, existe una sucesión (s_n) en $\mathbb{R}$ convergente a s_0 y tal que $0 \leq s_n < s_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la definición de s_0, $u + s_n(-y) \in U$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, ya que U es cerrado en X, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} u + s_n\,(-y) = u + s_0\,(-y) = u - z \in U.$$

Por otra parte, existe una sucesión (t_n) en $\{s \geq 0 \mid u + s\,(-y) \notin U\}$ convergente a s_0, ya que s_0 es el ínfimo del conjunto. Entonces, la sucesión $(u + t_n(-y))$ converge a $u - z$ y está contenida en $X \backslash U$. Por lo tanto, como ya sabíamos que $u - z \in U$, podemos concluir que $u - z \in \partial U$. $\square$

Lema 1.5.6. *Sea U un subconjunto convexo y cerrado en un espacio topológico vectorial X. Supongamos que $\mathrm{cc}U$ es un subespacio vectorial de X, y que $X = \mathrm{cc}U \oplus L$ para algún subespacio L. Si $h : \mathrm{cc}U \oplus L \to \mathrm{cc}U \times L$ está definida por $h\,(y + l) = (y, l)$, entonces $h\,(U) = \mathrm{cc}U \times (U \cap L)$.*

Demostración. Sea $x \in U$. Entonces $x = y + l$ para algunos $y \in \mathrm{cc}\,U$, $l \in L$. Como $y \in \mathrm{cc}\,U$ y $\mathrm{cc}\,U$ es un subespacio vectorial de X, $-y \in \mathrm{cc}\,U$. Y debido a que $x \in U$ y U es cerrado en X, por la Proposición 1.5.3 se tiene que

$$\mathrm{cc}\,U = \left\{w \in X \mid x + \mathbb{R}^+ w \subseteq U\right\}.$$

Entonces, $x + \mathbb{R}^+(-y) \subseteq U$, y en particular $x - y = l \in U$. Por lo tanto, $l \in U \cap L$ y $h\,(x) = (y, l) \in \mathrm{cc}\,U \times U \cap L$. Así, tenemos que $h\,(U) \subseteq \mathrm{cc}\,U \times (U \cap L)$.

Ahora, sea $(y, l) \in \mathrm{cc}\,U \times (U \cap L)$. Como $l \in U$,

$$\mathrm{cc}\,U = \left\{w \in X \mid l + \mathbb{R}^+ w \subseteq U\right\}.$$

Entonces, $l + \mathbb{R}^+ y \subseteq U$, y en particular $h^{-1}(y, l) = y + l \in U$. De esto concluimos que $h\,(U) = \mathrm{cc}\,U \times (U \cap L)$. $\square$

1.6. Funcional de Minkowski

Diremos que un subconjunto U de un espacio topológico vectorial X es absorbente si $\mathbb{R}^{+}U = X$.

Definición 1.6.1. Sea X un espacio topológico vectorial y U un subconjunto absorbente. La funcional de Minkowski para U, que denotaremos como w_U, se define como $w_U(x) = \operatorname{ínf}\left\{t > 0 \mid \frac{1}{t}x \in U\right\}$ para $x \in X$.

Definición 1.6.2. Sea U un subconjunto de un espacio topológico vectorial X. Se dice que U es un cuerpo convexo en X si U es convexo y tiene interior no vacío.

Sea X un espacio topológico vectorial. Recordemos que si U es un cuerpo convexo en X tal que $0 \in \operatorname{int} U$, entonces la funcional de Minkowski para U cumple

1. w_U es continua en X,
2. $w_U(x+y) \leq w_U(x) + w_U(y)$ para $x, y \in X$,
3. $w_U(tx) = tw_U(x)$ para $x \in X$ y $t \geq 0$.

Este resultado puede consultarse en [1].

Proposición 1.6.3. *Sea U un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial X tal que $0 \in \operatorname{int}U$. Entonces $\operatorname{cc}U = w_U^{-1}(0)$.*

Demostración. Supongamos que $x \in w_U^{-1}(0)$. Sea $t_0 > 0$. Como

$$\operatorname{ínf}\left\{t > 0 \mid \frac{1}{t}x \in U\right\} = 0,$$

existe $s \in \left\{t > 0 \mid \frac{1}{t}x \in U\right\}$ tal que $s < \frac{1}{t_0}$. Entonces $\frac{1}{s}x \in U$ y $t_0 < \frac{1}{s}$. Ya que U es convexo y $0 \in U$, se tiene que $t_0 x \in U$. Así, $tx \in U$ para cada $t > 0$, y por lo tanto $x \in \operatorname{cc} U$.

Ahora, sea $x \in \operatorname{cc} U$. Por la Proposición 1.5.3, $\operatorname{cc} U = \{y \in X \mid \mathbb{R}^{+}y \subseteq U\}$. Entonces, $\mathbb{R}^{+}x \subseteq U$. Así, $\frac{1}{t}x \in U$ para cada $t > 0$, y

$$w_U(x) = \operatorname{ínf}\left\{t > 0 \mid \frac{1}{t}x \in U\right\} = 0.$$

Por lo tanto, $x \in w_U^{-1}(0)$. □

Lema 1.6.4. *Sea U un subconjunto convexo de un espacio topológico vectorial X tal que $0 \in \mathrm{int}U$. Si $v \in X$, $t > 1$ y $tv \in U$, entonces $v \in \mathrm{int}U$.*

Demostración. Sean $v \in X$ y $t > 1$ tales que $tv \in U$. Como $\frac{1}{t} \in [0,1]$, U es convexo y $tv \in U$, entonces $\frac{1}{t}tv + \left(1 - \frac{1}{t}\right) x \in U$ para cada $x \in \mathrm{int}\, U$. Por lo tanto,

$$v + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \mathrm{int}\, U = \frac{1}{t}tv + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \mathrm{int}\, U \subseteq U.$$

$1 - \frac{1}{t} \neq 0$ porque $t > 1$, y entonces $V = v + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \mathrm{int}\, U$ es abierto en X. Así, como $0 \in \mathrm{int}\, U$, concluimos que $v \in V \subseteq \mathrm{int}\, U$. $\square$

Lema 1.6.5. *Sean U un subconjunto convexo de un espacio topológico vectorial X y $x \in \mathrm{int}U$. Si $v \in X$, $t > 1$ y $x + tv \in U$, entonces $x + v \in \mathrm{int}U$.*

Demostración. Se tiene que $0 = x - x \in \mathrm{int}\, U - x = \mathrm{int}\,(U - x)$ y $tv \in U - x$. Se sigue del lema anterior que $v \in \mathrm{int}\,(U - x) = \mathrm{int}\, U - x$, y así $x + v \in \mathrm{int}\, U$. $\square$

Proposición 1.6.6. *Sea X un espacio topológico vectorial. Si U es un cuerpo convexo cerrado en X, entonces $\mathrm{Supp}U = \partial U$.*

Demostración. Ya que U es un cuerpo convexo en X, existe $y_0 \in \mathrm{int}\, U$. Debido a que $\mathrm{Supp}\,(U - y_0) = \mathrm{Supp}\, U - y_0$ y $\partial\,(U - y_0) = \partial U - y_0$, podemos suponer que $0 \in \mathrm{int}\, U$.

Sean $x_0 \in \partial U$, y $Y = \mathrm{span}\,\{x_0\}$. Definimos $g : Y \to \mathbb{R}$ por $g\,(tx_0) = t$.

Como $x_0 \in \partial U$, por el Lema 1.6.4 tenemos que $tx_0 \notin U$ para toda $t > 1$. Sea $r \in \mathbb{R}$, y $s > 0$ tal que $\frac{1}{s}rx_0 \in U$. Debido a lo anterior, $\frac{r}{s} \leq 1$ y, así, $r \leq s$. Por lo tanto,

$$g\,(rx_0) = r \leq \inf \left\{ s > 0 \mid \frac{1}{s}rx_0 \in U \right\} = w_U\,(rx_0)\,,$$

y entonces se tiene que $g\,(y) \leq w_U\,(y)$ para cada $y \in Y$.

Así, por el Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.3), existe $f : X \to \mathbb{R}$ lineal tal que f es una extensión de g y $f\,(x) \leq w_U\,(x)$ para cada $x \in X$.

Sabemos que w_U es continua en X, ya que $0 \in \mathrm{int}\, U$. Sea $\varepsilon > 0$. Como w_U es continua en 0, existe $V \subseteq X$ abierto tal que $0 \in V$ y $|w_U\,(v)| = w_U\,(v) < \varepsilon$ para cada $v \in V$. Consideremos $B = V \cap (-V)$. Entonces B es abierto en X, $0 \in V$, para cada $b \in B$ se tiene que $-b \in B$ y

$$|f\,(b)| = f\,(b) \leq w_U\,(b) < \varepsilon \text{ ó } |f\,(b)| = -f\,(b) = f\,(-b) \leq w_U\,(-b) < \varepsilon.$$

Esto implica que f es continua en 0 y, como f es lineal, es continua en todo X.

Además, para cada $u \in U$ se cumple que $f(u) \leq w_U(u) \leq 1 = f(x_0)$, ya que f extiende a g. Por lo tanto, como f no es constante en U (pues $0, x_0 \in U$), f soporta a U en x_0. Así, concluimos que $x_0 \in \operatorname{Supp} U$.

Ahora, sea $x_0 \in \operatorname{Supp} U$. Entonces, existe $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que

$$\inf_{u \in U} f(u) < \sup_{u \in U} f(u) = f(x_0).$$

Como f no es constante en U, existe $v \in U$ tal que $f(v) \neq 0$. Y ya que $0 \in \operatorname{int} U$ y la función $h : \mathbb{R} \times \{v\} \to X$ definida por $h(t, v) = tv$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$(-\delta, \delta) v = \{tv \mid t \in (-\delta, \delta)\} \subseteq \operatorname{int} U.$$

Además, $f\left(\frac{\delta}{2} v\right) > 0$ ó $f\left(-\frac{\delta}{2} v\right) > 0$, pues $f(v) \neq 0$ y f es lineal.

Por lo tanto, existe $v_0 \in U$ tal que $f(v_0) > 0$ y, debido a que $f(x_0)$ es el valor máximo de f en U, concluimos que $f(x_0) > 0$. Así, tenemos que $f(tx_0) > f(x_0)$ para cada $t > 1$, y entonces $tx_0 \notin U$ para cada $t > 1$. Esto implica que $x_0 \in \partial U$, ya que $x_0 \in U$. $\square$

1.7. Pseudonormas

Definición 1.7.1. Sea X un espacio topológico vectorial. Una función $w : X \to \mathbb{R}^+$ es una pseudonorma en X si es continua, y para cada $x, y \in X$ y $t \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $w(x + y) \leq w(x) + w(y)$,
2. $w(tx) = |t| w(x)$.

Notemos que si U es un cuerpo convexo en un espacio topológico vectorial X, $0 \in \operatorname{int} U$ y U es simétrico con respecto al origen, entonces la funcional de Minkowski w_U es una pseudonorma en X.

Sean w una pseudonorma es un espacio topológico vectorial X, K un subconjunto no vacío de X y $x \in X$. La distancia de x a K respecto a la pseudonorma w es el valor

$$d_w(x, K) = \inf\{w(x - y) \mid y \in K\}.$$

Definición 1.7.2. Sea w una pseudonorma en un espacio topológico vectorial X. $K \subseteq X$ es completo con respecto a w si para cada sucesión (x_n) en K tal que

$$\lim_{n,m\to\infty} w\left(x_n - x_m\right) = 0$$

existe $x \in K$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} w\left(x_n - x\right) = 0.$$

Decimos que w es no completa si X no es completo con respecto a w.

Definición 1.7.3. Sea w una pseudonorma es un espacio topológico vectorial X. $K \subseteq X$ es cerrado con respecto a w si para cada sucesión (x_n) en K y $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} w\left(x_n - x\right) = 0 \text{ implica que } x \in K.$$

Observemos que la definición anterior implica que si $K \neq \emptyset$ es cerrado con respecto a w y $d_w\left(x, K\right) = 0$, entonces $x \in K$.

Dada w una pseudonorma en un espacio topológico vectorial X, consideremos el espacio vectorial $\{[x] \mid x \in X\}$, donde

$$[x] = \{y \in X \mid w\left(y - x\right) = 0\} \text{ para cada } x \in X$$

y $[a] + [b] = [a + b]$, $t\,[a] = [ta]$ para $a, b \in X$, $t \in \mathbb{R}$.

Entonces, se tiene que la función $\|\cdot\| : \{[x] \mid x \in X\} \to \mathbb{R}^+$, definida por $\|[x]\| = w\left(x\right)$, es una norma en $\{[x] \mid x \in X\}$. Denotaremos este espacio normado como X_w.

Observemos que $f : X \to X_w$, dada por $f\left(x\right) = [x]$, es lineal. Y ya que w es continua, pues es una pseudonorma en X, para cada $\varepsilon > 0$

$$f^{-1}\left(B_\varepsilon\left(0\right)\right) = \{x \in X \mid w\left(x\right) < \varepsilon\}$$

es abierto en X. Esto implica que f es continua en 0, y por lo tanto es continua en X.

Por otra parte, si $\emptyset \neq K \subseteq X$, para cada $x, y \in X$ se tiene que

$$\left|d_w\left(x, K\right) - d_w\left(y, K\right)\right| \leq w\left(x - y\right) = \|[x] - [y]\| = \|f\left(x\right) - f\left(y\right)\|,$$

por lo que de la continuidad de f se sigue que la función $d_w\left(\cdot, K\right) : X \to \mathbb{R}^+$ es también continua.

Teorema 1.7.4. *Sea w una pseudonorma no completa en un espacio topológico vectorial X. Si $K \subseteq X$ es completo y cerrado con respecto a w, entonces existe un homeomorfismo h de $X \backslash K$ a X tal que $h(x) = x$ si $d_w(x, K) \geq 1$.*

Demostración. Consideremos el espacio normado $(X_w, \|\cdot\|)$. Ya que la pseudonorma w es no completa, $(X_w, \|\cdot\|)$ no es un espacio completo. Sea $(\widehat{X_w}, \|\cdot\|)$ su completación. Entonces, existe una isometría $f : X_w \to \widehat{X_w}$ tal que $f(X_w)$ es un subespacio denso de $\widehat{X_w}$. Sea $j : X \to \widehat{X_w}$ definida por $j(x) = f([x])$. Notemos que j es lineal y continua, pues es composición de funciones lineales y continuas.

Como $f(X_w)$ es un subespacio propio de $\widehat{X_w}$, existe $z_0 \in \widehat{X_w} \backslash f(X_w)$. Definamos $y_0 = \frac{z_0}{8\|z_0\|}$, entonces, $y_0 \in \widehat{X_w} \backslash f(X_w)$ y $\|y_0\| < \frac{1}{4}$. Además, $f(X_w)$ es denso en $\widehat{X_w}$, por lo que existen $[x_i] \in X_w$, con $i \in \mathbb{N}$, tales que

$$f([x_i]) \in B_{\frac{1}{2^{i+3}}}(y_0) \text{ para cada } i > 1 \text{ y } f([x_1]) \in B_{\frac{1}{2^4}}(y_0) \cap B_{\frac{1}{4}}(0).$$

Así, tenemos que $f([x_i]), f([x_{i+1}]) \in B_{\frac{1}{2^{i+3}}}(y_0)$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto

$$\|j(x_{i+1}) - j(x_i)\| = \|f([x_{i+1}]) - f([x_i])\| < \frac{2}{2^{i+3}} = \frac{1}{2^{i+2}} \text{ para toda } i \in \mathbb{N}.$$

Definamos $q : \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \to X$ como

$$q(t) = \begin{cases} (2^{i+1}t - 1)\, x_i + (2 - 2^{i+1}t)\, x_{i+1} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}\right],\ i \in \mathbb{N}, \\ (2 - 2t)\, x_1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $q \restriction_{\left[\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i}\right]}$ parametriza el segmento $[x_i; x_{i+1}]$, y $q \restriction_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}$ parametriza el segmento $[0; x_1]$.

Ahora, sea $h : X \backslash K \to X$ dada por $h(x) = x + q(d_w(x, K))$. Ya que K es cerrado con respecto a w, $d_w(x, K) > 0$ para cada $x \in X \backslash K$, por lo que h está bien definida. Además, claramente h cumple que $h(x) = x$ si $d_w(x, K) \geq 1$.

Veamos que h es un homeomorfismo. Ya que $d_w(\cdot, K)$ y q son funciones continuas, h es continua.

Definamos $\hat{q} : \mathbb{R}^+ \to \widehat{X_w}$ como

$$\hat{q}(t) = \begin{cases} j(q(t)) & \text{si } t > 0, \\ y_0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Como teníamos que $\|j(x_{i+1}) - j(x_i)\| < \frac{1}{2^{i+2}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\|\hat{q}(t_1) - \hat{q}(t_2)\| \leq \frac{1}{2}|t_1 - t_2| \text{ para } t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+. \qquad \text{(Apéndice i.i)}$$

Entonces, $\hat{q}$ satisface la condición de Lipschitz.

Sea $\hat{h} : \widehat{X_w} \to \widehat{X_w}$ definida como $\hat{h}(x) = x + \hat{q}(d(x, j(K)))$, donde, para cada $x \in \widehat{X_w}$, $d(x, j(K))$ es la distancia de x al conjunto $j(K)$ en $(\widehat{X_w}, \|\cdot\|)$. Es decir, $d(x, j(K)) = \text{ínf}\{\|x - j(k)\| \mid k \in K\}$.

Para cada $x, y \in \widehat{X_w}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{q}(d(x, j(K))) - \hat{q}(d(y, j(K)))\| &\leq \frac{1}{2}|d(x, j(K)) - d(y, j(K))| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - y\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto la función $x \to \hat{q}(d(x, j(K)))$ es una contracción estricta. Así, debido al Corolario 1.1.8.1, $\hat{h}$ es un homeomorfismo. Consideremos $\hat{h}^{-1} : \widehat{X_w} \to \widehat{X_w}$, la inversa de $\hat{h}$.

Notemos que si $x \in X$ y $\hat{h}^{-1}(j(x)) = j(k)$ para algún $k \in K$, entonces $j(x) = \hat{h}(j(k)) = j(k) + y_0$, por la definición de $\hat{h}$. Así, $y_0 = j(x) - j(k) = f([x - k])$, pero esto contradice que $y_0 \notin f(X_w)$. Por lo tanto,

$$\hat{h}^{-1}(j(x)) \notin j(K) \text{ para toda } x \in X. \tag{1.4}$$

Definamos $g : X \to X$ como

$$g(x) = x - q\left(d\left(\hat{h}^{-1}(j(x)), j(K)\right)\right).$$

Ya que K es completo con respecto a w, $\{[x] \mid x \in K\} \subseteq (X_w, \|\cdot\|)$ es completo. Así, como f es una isometría, $f(\{[x] \mid x \in K\}) = j(K)$ es completo. Esto implica que $j(K)$ es cerrado en $\widehat{X_w}$, y por lo tanto, debido a (1.4), $d(\hat{h}^{-1}(j(x)), j(K)) > 0$ para cada $x \in X$. Entonces, g está bien definida. Además, tenemos que g es continua, pues j, $\hat{h}^{-1}$, $d(\cdot, j(K))$ y q son funciones continuas.

Por otra parte, ya que $\|j(x) - j(y)\| = \|f([x]) - f([y])\| = \|[x] - [y]\| = w(x - y)$ para cada $x, y \in X$ (pues f es una isometría), se tiene que

$$d(j(x), j(K)) = d_w(x, K) \text{ para cada } x \in X. \tag{1.5}$$

Esto y el hecho de que j es lineal y $\hat{q}\restriction_{\mathbb{R}^+} = j \circ q$ implican que

$$\begin{aligned} j\left(h\left(x\right)\right) &= \hat{h}\left(j\left(x\right)\right) \text{ para cada } x \in X \backslash K \text{ y} \\ j\left(g\left(x\right)\right) &= \hat{h}^{-1}\left(j\left(x\right)\right) \text{ para cada } x \in X. \end{aligned} \tag{Apéndice i.ii}$$

Por lo tanto, debido a (1.4), $j\left(g\left(x\right)\right) \notin j\left(K\right)$ para cada $x \in X$, y así $g\left(X\right) \subseteq X \backslash K$. Por (1.5) y las igualdades anteriores, es fácil ver que $g : X \to X \backslash K$ es la función inversa de $h : X \backslash K \to X$. Entonces, concluimos que h es un homeomorfismo. □

Teorema 1.7.5. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach separable de dimensión algebraica infinita, existe una norma w en X tal que $w : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}^+$ es continua, $(X, w(\cdot))$ no es completo y $w(x) \leq \|x\|$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Por el Lema 1.1.11, existe un conjunto $\{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ de funcionales lineales y continuas que separa los puntos de X. Además podemos suponer que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\|x\|$ para toda $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ (pues, como cada f_n es lineal y continua, existen $M_n > 0$ tales que $|f_n(x)| \leq M_n \|x\|$ para toda $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Así, el conjunto de funcionales lineales y continuas $\left\{\frac{1}{nM_n} f_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ separa los puntos de X).

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \text{ para cada } x \in X,$$

y así podemos definir $T : X \to \ell_2$ como $T(x) = (f_n(x))$. Notemos que T es lineal, ya que cada funcional f_n es lineal, y es inyectiva, pues el conjunto $\{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de X. Además, el hecho de que

$$\|T(x)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \text{ para cada } x \in X, \tag{1.6}$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en ℓ_2, implica que T es continua.

Veamos que $A = T(\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\})$ es un conjunto totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Consideremos

$$B = \{(f_1(x), \ldots, f_N(x)) \mid x \in X, \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Sea $\|\cdot\|_1$ la norma usual en $\mathbb{R}^N$. Si $x \in X$ y $\|x\| \leq 1$, tenemos que

$$\|(f_1(x), \ldots, f_N(x))\|_1 = \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

por lo que B es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^N$, y por lo tanto es totalmente acotado. Así, existen $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^N$ tales que $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$.

Entonces, $\{(x_i, 0, 0, \ldots) \in \ell_2 \mid i = 1, \ldots, m\}$ es una ε-red para A, ya que teníamos que $\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Concluimos que A es totalmente acotado.

Ahora, supongamos por contradicción que $T^{-1} : T(X) \to X$ es continua. Como T^{-1} es lineal, existe $L > 0$ tal que $\|T^{-1}(y)\| \leq L \|y\|_2$ para cada $y \in T(X)$, y por lo tanto $\|x\| \leq L \|T(x)\|_2$ para cada $x \in X$. Entonces, del hecho de que A es totalmente acotado se sigue que $T^{-1}(A) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ es también totalmente acotado. Y como además $\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ es completo (pues es cerrado en el espacio de Banach X), es compacto. Así, la bola unitaria cerrada en X es compacta, pero esto contradice que X tiene dimensión algebraica infinita.

Por lo tanto, $T^{-1} : T(X) \to X$ no es continua. Como X es de Banach, T^{-1} es lineal y

$$\left\{\left(y, T^{-1}(y)\right) \in T(X) \times X \mid y \in T(X)\right\} = \{(T(x), x) \mid x \in X\}$$

es cerrado en $T(X) \times X$ (pues T es continua), el Teorema de la gráfica cerrada (Teorema 1.1.7) implica que $T(X)$ no puede ser completo. Así, existe una sucesión (x_n) en X tal que $(T(x_n))$ es de Cauchy y no converge en $T(X)$.

Sea $M = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Debido a (1.6), se tiene que $\|T(x)\|_2 \leq M \|x\|$ para cada $x \in X$. Definimos $w : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}^+$ como $w(x) = \frac{\|T(x)\|_2}{M}$. Entonces w es continua, y es una norma en X tal que $w(x) \leq \|x\|$ para cada $x \in X$. Además, en el espacio normado $(X, w(\cdot))$, (x_n) es de Cauchy y no es convergente. Por lo tanto, $(X, w(\cdot))$ no es completo. □

Corolario 1.7.5.1. *Sea w_1 una pseudonorma en un espacio topológico vectorial X. Si X_w es separable y tiene dimensión algebraica infinita, entonces existe una pseudonorma no completa w en X tal que $w(x) \leq w_1(x)$ para cada $x \in X$ y $\{x \in X \mid w(x) = 0\} = \{x \in X \mid w_1(x) = 0\}$.*

Demostración. Si w_1 es no completa, no hay nada que probar. Entonces, supongamos que X es completo con respecto a w_1. Esto implica que $(X_{w_1}, \|\cdot\|)$

es completo, donde $\|\cdot\|$ es la norma en X_{w_1} definida como $\|[x]\| = w_1(x)$. Así, debido al teorema anterior, existe una norma w_2 en X_{w_1} tal que $w_2 : (X_{w_1}, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}^+$ es continua, $(X_{w_1}, w_2(\ ))$ no es completo y $w_2([x]) \leq \|[x]\| = w_1(x)$ para cada $x \in X$.

Definimos $w : X \to \mathbb{R}^+$ como $w(x) = w_2([x])$. Entonces w es continua, pues es composición de funciones continuas. Y ya que $x \to [x]$ es lineal y w_2 es una norma, tenemos que w es una pseudonorma.

Además, como $(X_{w_1}, w_2(\ ))$ no es completo, existe una sucesión (x_n) en X tal que $([x_n])$ es de Cauchy y no converge en $(X_{w_1}, w_2(\ ))$. Es decir,

$$\lim_{n,m\to\infty} w_2([x_n] - [x_m]) = 0 \text{ y, para cada } x \in X, \ \lim_{n\to\infty} w_2([x_n] - [x]) \neq 0.$$

Lo anterior implica que X no es completo con respecto a w (porque $x \to [x]$ es lineal), y así w es no completa.

Finalmente, si $x \in X$ es tal que $w(x) = 0$, entonces $w_2([x]) = 0$ y $[x] = [0]$, pues w_2 es una norma en X_{w_1}. Así, $x \in [0]$ y $w_1(x) = 0$. Por lo tanto, como además $w(x) = w_2([x]) \leq w_1(x)$ para cada $x \in X$, se tiene que $\{x \in X \mid w(x) = 0\} = \{x \in X \mid w_1(x) = 0\}$. $\square$

Capítulo 2

El Teorema de Keller

2.1. Espacios de Keller

Definición 2.1.1. Un subconjunto convexo K de un espacio topológico vectorial es un *espacio de Keller* si K es afínmente homeomorfo a un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de ℓ_2.

Consideremos el espacio $\mathbb{I} = [-1, 1]$ con la topología relativa a la usual en $\mathbb{R}$. Se define el cubo de Hilbert como $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, el producto infinito numerable de $\mathbb{I}$, con la topología producto. Lo denotaremos como Q.

Q es compacto y tiene dimensión infinita, y podemos verlo como un subconjunto convexo del espacio de Fréchet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Además, Q es un espacio de Keller, pues el encaje $h : Q \to \ell_2$ dado por $(t_n) \to \left(\frac{t_n}{n}\right)$ es una transformación afín. Entonces, Q es afínmente homeomorfo al subconjunto de ℓ_2

$$h\,(Q) = \left\{ (x_n) \in \ell_2 \mid |x_n| \leq \frac{1}{n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como generalización de este ejemplo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.2. *Todo subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de un espacio de Fréchet es un espacio de Keller.*

Demostración. Sea K un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de un espacio de Fréchet X. K es separable porque es compacto, y entonces existe un subconjunto $D \subseteq K$ numerable y denso en K, $D = \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Consideremos

$$A = \{q_1 d_{n_1} + \ldots + q_k d_{n_k} \mid k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N},\ q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{Q}\} \subseteq \operatorname{span} K.$$

A es numerable y denso en $\operatorname{span} K$, y por lo tanto es denso en $\overline{\operatorname{span} K}$. Entonces, $\overline{\operatorname{span} K}$ es separable y, como es un subespacio vectorial cerrado de X, es también un espacio de Fréchet. Así, debido al Lema 1.1.11, existe un conjunto $\left\{f_n : \overline{\operatorname{span} K} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ de funcionales lineales y continuas que separa los puntos de $\overline{\operatorname{span} K}$.

Luego, $\left\{f_n : \overline{\operatorname{span} K} \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ separa los puntos de K y, por el Teorema 1.1.17, K es afínmente homeomorfo a un subconjunto convexo y compacto C de ℓ_2. Por ser homeomorfo a K, C tiene dimensión infinita. Entonces, K es un espacio de Keller. □

El propósito de este capítulo será probar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.3 (Keller)**.** *Todo espacio de Keller es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Ya que Q es un espacio de Keller, para demostrar el Teorema 2.1.3 basta ver que todos los espacios de Keller son homeomorfos a un mismo espacio. Este espacio común lo definiremos en la siguiente sección.

2.2. El espacio T

Consideremos el conjunto

$$T = \{-1,1\} \ \cup \ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-1,1)^n\right) \times \{-1,1\} \ \cup \ \prod_{n=1}^{\infty} (-1,1)\,.$$

Observemos que los elementos de T son sucesiones $x = (x(n))$ que son infinitas y tienen todas sus coordenadas en $(-1,1)$, o bien son finitas y tienen su última coordenada en $\{-1,1\}$ y sus coordenadas anteriores en $(-1,1)$.

Definimos el orden de un elemento $y \in T$ como el número de coordenadas de y si y es una sucesión finita, y como ∞ si y es una sucesión infinita. Escribimos $\operatorname{ord}(y)$ para denotar el orden de y.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_n : T \to [-1,1]$ como

$$\varphi_1(x) = x(1)\,,$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} x(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) & \text{si } n \le \operatorname{ord}(x), \\ 0 & \text{si } n > \operatorname{ord}(x), \end{cases} \quad \text{para } n \ge 2.$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\varphi_n(T) \subseteq [-1,1]$. En efecto, si $n \geq 2$, $x \in T$ y $n > \text{ord}(x)$, entonces $\varphi_n(x) = 0 \in [-1,1]$. Si $n \leq \text{ord}(x)$, entonces $i < \text{ord}(x)$ para toda $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Por lo tanto, $x(i) \in (-1,1)$ para toda $i \in \{1,\dots,n-1\}$, y

$$\prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) \in (0,1].$$

Así,

$$\varphi_n(x) = x(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) \in [-1,1].$$

Observación 2.2.1. Si $x \in T$ y $2 \leq n \leq \text{ord}(x)$, entonces $\prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) \in (0,1]$, y en particular $\prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) \neq 0$.

Notemos que, como $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in T$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \infty \text{ para cada } x, y \in T.$$

Proposición 2.2.2. *La función $d : T \times T \to [0,\infty)$ definida como*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|$$

es una métrica en T.

Demostración. Sean $x, y \in T$. Si $x = y$, entonces $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Si $d(x,y) = 0$, entonces $\frac{1}{2^n} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| = 0$ y $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos por inducción que $x(n) = y(n)$ para toda $n \leq \text{mín}\{\text{ord}(x), \text{ord}(y)\}$.

Si $n = 1$, $x(1) = \varphi_1(x) = \varphi_1(y) = y(1)$.

Sea $n \leq \text{mín}\{\text{ord}(x), \text{ord}(y)\}$, $n > 1$ y supongamos que $x(i) = y(i)$ para cada $i < n$. Como $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$, usando la hipótesis de inducción inferimos que

$$x(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|) = y(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |y(i)|) = y(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x(i)|).$$

Se cumple que $\prod_{i=1}^{n-1}(1-|x(i)|)\neq 0$ por la Observación 2.2.1, y entonces $x(n)=y(n)$. Así, $x(n)=y(n)$ para toda $n\leq \min\{\mathrm{ord}(x),\mathrm{ord}(y)\}$.

Si $\mathrm{ord}(x)=\mathrm{ord}(y)=\infty$, entonces $x(n)=y(n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $x=y$.

Si $\min\{\mathrm{ord}(x),\mathrm{ord}(y)\}=m<\infty$, entonces $x(m)=y(m)=\pm 1$, y por lo tanto $\mathrm{ord}(x)=m=\mathrm{ord}(y)$. Esto implica que $x=y$.

Claramente $d(x,y)=d(y,x)$ para cada $x,y\in T$. La desigualdad del triángulo se sigue de la desigualdad del triángulo del valor absoluto. □

Proposición 2.2.3. *Sean (x_k) una sucesión en T y $x_0\in T$. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$$

si y sólo si

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_n(x_k)=\varphi_n(x_0)\ \textit{ para toda } n\in\mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Entonces,

$$d(x_k,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\varphi_n(x_k)-\varphi_n(x_0)|\to 0 \text{ cuando } k\to\infty.$$

Sea $m\in\mathbb{N}$. Para toda $k\in\mathbb{N}$

$$|\varphi_m(x_k)-\varphi_m(x_0)|=\frac{\frac{1}{2^m}|\varphi_m(x_k)-\varphi_m(x_0)|}{\frac{1}{2^m}}\leq\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\varphi_n(x_k)-\varphi_n(x_0)|}{\frac{1}{2^m}}.$$

Entonces,

$$\lim_{k\to\infty}|\varphi_m(x_k)-\varphi_m(x_0)|\leq\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\varphi_n(x_k)-\varphi_n(x_0)|}{\frac{1}{2^m}}=0.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi_m(x_k)-\varphi_m(x_0)|=0$, lo cual implica que

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_n(x_k)=\varphi_n(x_0)\ \text{ para toda } n\in\mathbb{N}.$$

Ahora, supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_n(x_k)=\varphi_n(x_0)$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Sean $\varepsilon>0$ y $K\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=K}^{\infty}\frac{2}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Por hipótesis, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x_0)$ para toda $n < K$, y entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_0)| = 0 \text{ para toda } n < K.$$

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^n} |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ si } k \geq N \text{ y } n < K.$$

Así, si $k \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_k, x_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_0)| \\ &= \sum_{n=1}^{K-1} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_0)| + \sum_{n=K}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon(K-1)}{2K} + \sum_{n=K}^{\infty} \frac{2}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $d(x_k, x_0) \to 0$ cuando $k \to \infty$, y por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. $\square$

Proposición 2.2.4. *Sean (x_k) una sucesión en T y $x_0 \in T$. Supongamos que para cada $n \leq \operatorname{ord}(x_0)$ existe $K_n \in \mathbb{N}$ tal que x_k tiene n-ésima coordenada si $k \geq K_n$. Entonces,*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$$

si y sólo si

$$\lim_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n) \text{ para cada } n \leq \operatorname{ord}(x_0).$$

Demostración. Supongamos primero que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Entonces, por la Proposición 2.2.3 tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Veamos por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \leq \operatorname{ord}(x_0)$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n)$.

Como $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_1(x_k) = \varphi_1(x_0)$, $\varphi_1(x_0) = x_0(1)$ y $\varphi_1(x_k) = x_k(1)$ para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(1) = x_0(1)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq \operatorname{ord}(x_0)$, $m > 1$. Entonces $n < \operatorname{ord}(x_0)$ para toda $n < m$, y, por hipótesis de inducción, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n)$ para toda $n < m$. Por lo tanto, $\lim\limits_{k\to\infty} (1 - |x_k(n)|) = 1 - |x_0(n)|$ para toda $n < m$, y entonces

$$\prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_k(i)|) \to \prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_0(i)|) \text{ cuando } k \to \infty. \tag{2.1}$$

Teníamos que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que en particular $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_k) = \varphi_m(x_0)$. Ahora, como $m \leq \operatorname{ord}(x_0)$,

$$\varphi_m(x_0) = x_0(m) \prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_0(i)|).$$

Y como x_k tiene m-ésima coordenada si $k \geq K_m$, $m \leq \operatorname{ord}(x_k)$ para toda $k \geq K_m$. Entonces,

$$\varphi_m(x_k) = x_k(m) \prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_k(i)|) \text{ para toda } k \geq K_m.$$

Esto y el hecho de que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_k) = \varphi_m(x_0)$ implican que

$$x_k(m) \prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_k(i)|) \to x_0(m) \prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_0(i)|) \text{ cuando } k \to \infty. \tag{2.2}$$

Como $m \leq \operatorname{ord}(x_0)$ y $m \leq \operatorname{ord}(x_k)$ para toda $k \geq K_m$,

$$\prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_0(i)|) \neq 0 \text{ y } \prod_{i=1}^{m-1} (1 - |x_k(i)|) \neq 0 \text{ para toda } k \geq K_m.$$

Entonces, de (2.1) y (2.2) se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(m) = x_0(m)$.

Esto concluye el paso inductivo, y por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n)$ para cada $n \leq \operatorname{ord}(x_0)$.

Supongamos ahora que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n)$ para cada $n \leq \operatorname{ord}(x_0)$. Por la Proposición 2.2.3, basta demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Comencemos por el caso en el que $n \leq \operatorname{ord}(x_0)$. Entonces $i \leq \operatorname{ord}(x_0)$ para cada $i \leq n$, por lo que, por hipótesis, $\lim_{k\to\infty} x_k(i) = x_0(i)$ para cada $i \leq n$. Por lo tanto, como $\lim_{k\to\infty} (1 - |x_k(i)|) = 1 - |x_0(i)|$ para toda $i < n$,

$$x_k(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x_k(i)|) \to x_0(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x_0(i)|) \text{ cuando } k \to \infty. \tag{2.3}$$

Como $n \leq \operatorname{ord}(x_0)$ y $n \leq \operatorname{ord}(x_k)$ para toda $k \geq K_n$,

$$\varphi_n(x_0) = x_0(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x_0(i)|) \text{ y } \varphi_n(x_k) = x_k(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x_k(i)|)$$

para toda $k \geq K_n$. Esto y (2.3) implican que $\lim_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x_0)$.

Ahora, consideremos el caso en el que $\operatorname{ord}(x_0) < n$. Entonces $\operatorname{ord}(x_0) < \infty$, y por lo tanto $x_0(\operatorname{ord}(x_0)) = \pm 1$.

Dado que, por hipótesis, $\lim_{k\to\infty} x_k(\operatorname{ord}(x_0)) = x_0(\operatorname{ord}(x_0)) = \pm 1$, entonces $\lim_{k\to\infty} (1 - |x_k(\operatorname{ord}(x_0)|) = 0$. Por lo tanto, como $1 \leq \operatorname{ord}(x_0) \leq n-1$,

$$x_k(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x_k(i)|) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty. \tag{2.4}$$

Ya que $\varphi_n(x_k) = x_k(n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - |x_k(i)|)$ o $\varphi_n(x_k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces de (2.4) concluimos que $\lim_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = 0$. Como $n > \operatorname{ord}(x_0)$, entonces $\varphi_n(x_0) = 0$, y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x_0)$. $\square$

Proposición 2.2.5. (T, d) *es un espacio compacto.*

Demostración. Como (T, d) es un espacio métrico, basta probar que es secuencialmente compacto. Sea (x_k) una sucesión en T.

Consideremos primero el caso en el que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a 1 ó a -1. Sea m el mínimo natural con esta propiedad. Entonces, existe $\mathcal{S}$ subsucesión de $\mathbb{N}$ tal que $(x_k(m))_{k\in\mathcal{S}}$ converge a 1 ó a -1. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(x_k(m))_{k\in\mathcal{S}}$ converge a 1.

Para toda $i < m$, $(x_k(i))_{k\in\mathcal{S}}$ es una sucesión en $[-1,1]$. Como $[-1,1]$ es compacto, podemos suponer sin perder la generalidad que $(x_k(i))_{k\in\mathcal{S}}$ es convergente en $[-1,1]$ para toda $i < m$. Sea $t_i \in [-1,1]$ el límite de $(x_k(i))_{k\in\mathcal{S}}$, $i < m$. Como $(x_k(i))_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes a 1 ó a -1 si $i < m$, $t_i \in (-1,1)$ para toda $i < m$. Por lo tanto, $(t_1,\ldots,t_{m-1},1) \in T$.

Además, ya que $x_k(m)$ es la m-ésima coordenada de x_k para cada $k \in \mathcal{S}$, se tiene que x_k tiene i-ésima coordenada si $i \leq m$, para cada $k \in \mathcal{S}$. Así, la sucesión $(x_k)_{k\in\mathcal{S}}$ y el punto $x_0 = (t_1,\ldots,t_{m-1},1)$ cumplen la hipótesis de la Proposición 2.2.4; es decir, para cada $i \leq \operatorname{ord}(x_0) = m$ existe $K_i \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $k \in \mathcal{S}$, x_k tiene i-ésima coordenada si $k \geq K_i$ (en este caso, $K_i = 1$ para cada i). Entonces, por la Proposición 2.2.4 se tiene que $(x_k)_{k\in\mathcal{S}}$ converge a $(t_1,\ldots,t_{m-1},1)$.

Ahora, consideremos el caso en el que $(x_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes a 1 ó a -1 para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Como todos los elementos de T tienen primera coordenada, $(x_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[-1,1]$, y por lo tanto tiene una subsucesión convergente. Entonces, existe $\mathcal{S}_1$ subsucesión de $\mathbb{N}$ tal que $(x_k(1))_{k\in\mathcal{S}_1}$ converge a $t_1 \in [-1,1]$. Como $(x_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes a 1 ó a -1, $t_1 \in (-1,1)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_{m-1}$ subsucesiones de $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{S}_{i+1}$ es subsucesión de $\mathcal{S}_i$ para cada $1 \leq i \leq m-2$ y $(x_k(i))_{k\in\mathcal{S}_i}$ converge a algún $t_i \in (-1,1)$ para cada $1 \leq i \leq m-1$. Afirmamos que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que x_k tiene m-ésima coordenada si $k \geq K$. En efecto, si $\{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{ord}(x_k) < m\}$ es infinito, entonces $\{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{ord}(x_k) = j\}$ es infinito para alguna $j < m$. Por lo tanto, como $x_{k_0}(j) = \pm 1$ para cada $k_0 \in \{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{ord}(x_k) = j\}$, se cumple que $(x_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a 1 ó a -1, pero en este caso esto no puede ocurrir.

Entonces, en particular, x_k tiene m-ésima coordenada para toda $k \in \mathcal{S}_{m-1}$ tal que $k \geq K$. Como $(x_k(m))_{k\in\mathcal{S}_{m-1}}$ es una sucesión en $[-1,1]$, existe $\mathcal{S}_m$ subsucesión de $\mathcal{S}_{m-1}$ tal que $(x_k(m))_{k\in\mathcal{S}_m}$ converge a algún $t_m \in (-1,1)$.

De esta manera, podemos construir subsucesiones $\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2,\ldots$ de $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{S}_{i+1}$ es subsucesión de $\mathcal{S}_i$ y $(x_k(i))_{k\in\mathcal{S}_i}$ converge a algún $t_i \in (-1,1)$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Sea $\mathcal{R} = (s_n)$, donde s_n es el n-ésimo término de $\mathcal{S}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que como $\mathcal{S}_{i+1}$ es subsucesión de $\mathcal{S}_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_i = (s_n)_{n\geq i}$ es subsucesión de $\mathcal{S}_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Esto implica que $(x_k(i))_{k\in\mathcal{R}_i}$ converge a t_i para cada $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $(x_k(i))_{k\in\mathcal{R}}$ converge a t_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Como cada $t_i \in (-1,1)$, entonces $(t_1,t_2,t_3,\ldots) \in T$ y, debido a la

Proposición 2.2.4, $(x_k)_{k\in\mathcal{R}}$ converge a $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$.

Por lo tanto, en cualquier caso (x_k) tiene una subsucesión convergente. Concluimos que T es secuencialmente compacto, y entonces también es compacto. □

2.3. Demostración del Teorema de Keller

Proposición 2.3.1. *Sea K un subconjunto compacto y elípticamente convexo de ℓ_2. Supongamos que $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal y continua, $c \in \mathbb{R}$ y se cumple que*

$$\inf_{x\in K} f(x) < c < \sup_{x\in K} f(x). \tag{2.5}$$

Sea $K_c = \{x \in K \mid f(x) = c\}$. Entonces, $\mathrm{Supp}K_c = K_c \cap \mathrm{Supp}K$ *y, por lo tanto, K_c es elípticamente convexo.*

Demostración. Sea $x_0 \in K_c \cap \mathrm{Supp}\,K$. Existe $g : \ell_2 \to \mathbb{R}$ lineal y continua que soporta a K en x_0. Entonces

$$\inf_{x\in K} g(x) < \sup_{x\in K} g(x) = g(x_0)$$

y, por lo tanto, existe $a \in K$ tal que $g(a) < g(x_0)$. Si $a \in K_c$, tenemos que

$$\inf_{x\in K_c} g(x) < \sup_{x\in K_c} g(x) = g(x_0),$$

ya que $K_c \subseteq K$. Así, g soporta a K_c en x_0.

Si $a \notin K_c$, entonces $f(a) \neq c$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(a) < c$. Por (2.5), existe $b \in K$ tal que $c < f(b)$. Y como $f(a) < c < f(b)$, existe $t \in (0,1)$ tal que $tf(a) + (1-t) f(b) = c$. Ya que $ta + (1-t)b \in K$ (porque K es convexo) y $f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t) f(b) = c$, concluimos que

$$ta + (1-t)b \in K_c. \tag{2.6}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g(ta + (1-t)b) &= tg(a) + (1-t) g(b) \\ &< tg(x_0) + (1-t) g(x_0) \\ &= g(x_0), \end{aligned} \tag{2.7}$$

como teníamos que $g(a) < g(x_0)$, y $g(x_0) = \sup_{x\in K} g(x)$. De (2.6) y (2.7), se sigue que

$$\inf_{x\in K_c} g(x) < \sup_{x\in K_c} g(x) = g(x_0),$$

y entonces g soporta a K_c en x_0.

Por lo tanto, $x_0 \in \operatorname{Supp} K_c$, y $K_c \cap \operatorname{Supp} K \subseteq \operatorname{Supp} K_c$.

Ahora, sea $x_0 \in \operatorname{Supp} K_c$. K es conexo porque es convexo, y entonces $f(K)$ es conexo. Esto y (2.5) implican que $K_c \neq \emptyset$. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c = 0$ (si $c \neq 0$, tomemos $y \in K_c$ y apliquemos el lema al conjunto $K_c - y$, la funcional f y $c' = 0$, considerando que $\operatorname{Supp}(K_c - y) = \operatorname{Supp} K_c - y$).

Como $x_0 \in \operatorname{Supp} K_0$, existe $g : \ell_2 \to \mathbb{R}$ lineal y continua que soporta a K_0 en x_0. Entonces,

$$\inf_{x\in K_0} g(x) < \sup_{x\in K_0} g(x) = g(x_0). \tag{2.8}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ sea $g_t = g + tf$. Entonces, cada g_t es una funcional lineal y continua, y como $f(x) = 0$ si $x \in K_0$, $g_t(x) = g(x)$ si $x \in K_0$.

Definimos

$$K^- = \{x \in K \mid f(x) < 0\}, \quad K^+ = \{x \in K \mid f(x) > 0\},$$

$$A = \left\{t \in \mathbb{R} \mid \sup_{x\in K^-} g_t(x) > g(x_0)\right\}, \quad B = \left\{t \in \mathbb{R} \mid \sup_{x\in K^+} g_t(x) > g(x_0)\right\}.$$

Afirmamos que A y B son abiertos en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $t_0 \in A$. Entonces

$$\sup_{x\in K^-} g_{t_0}(x) > g(x_0),$$

y por lo tanto existe $y \in K^-$ tal que $g(y) + t_0 f(y) = g_{t_0}(y) > g(x_0)$. Así, $t_0 f(y) > g(x_0) - g(y)$; y como la función $t \to tf(y)$ es continua en $\mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in \mathbb{R}$ y $|t - t_0| < \delta$, entonces $tf(y) > g(x_0) - g(y)$.

Si $t \in \mathbb{R}$ y $tf(y) > g(x_0) - g(y)$, entonces $g_t(y) > g(x_0)$. Esto implica que

$$\sup_{x\in K^-} g_t(x) > g(x_0)$$

y $t \in A$. Por lo tanto, si $t \in \mathbb{R}$ y $|t - t_0| < \delta$, entonces $t \in A$. Concluimos que t_0 es punto interior de A y que A es abierto en $\mathbb{R}$. Análogamente se prueba que B es abierto en $\mathbb{R}$.

Ahora, por (2.5) existe $k \in K$ tal que $f(k) < c = 0$, es decir, $k \in K^-$. Entonces $-f(k) > 0$, y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(-f(k)) > g(x_0) - g(k)$. Así, $g_{-n}(k) > g(x_0)$, y por lo tanto $-n \in A$. Entonces A es no vacío, y análogamente B es no vacío.

Por otra parte, si existiera $t \in A \cap B$, entonces

$$\sup_{x \in K^-} g_t(x) > g(x_0) \text{ y } \sup_{x \in K^+} g_t(x) > g(x_0),$$

y por lo tanto existirían $k_1 \in K^-$ y $k_2 \in K^+$ tales que $g_t(k_1) > g(x_0)$ y $g_t(k_2) > g(x_0)$.

Como $f(k_1) < 0 < f(k_2)$, también existiría $s \in (0,1)$ tal que $sf(k_1) + (1-s) f(k_2) = 0$. Así, $sk_1 + (1-s) k_2 \in K_0$ y

$$\begin{aligned} g(sk_1 + (1-s) k_2) &= g_t(sk_1 + (1-s) k_2) \\ &= sg_t(k_1) + (1-s) g_t(k_2) \\ &> sg(x_0) + (1-s) g(x_0) = g(x_0), \end{aligned}$$

pero esto contradice (2.8). Por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$.

Tenemos entonces que A y B son no vacíos, abiertos en $\mathbb{R}$ y $A \cap B = \emptyset$. De la conexidad de $\mathbb{R}$ se sigue que existe $r \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$. Como $g_r \restriction_{K_0} = g \restriction_{K_0}$ y g no es constante en K_0 (porque g soporta a K_0 en x_0), entonces g_r no es constante en K_0, y por lo tanto no es constante en K.

Además, debido a que $x_0 \in \operatorname{Supp} K_c \subseteq K_c = K_0$,

$$\sup_{x \in K_0} g_r(x) = \sup_{x \in K_0} g(x) = g(x_0) = g_r(x_0), \tag{2.9}$$

y como $r \notin A \cup B$,

$$\sup_{x \in K^-} g_r(x) \leq g(x_0) = g_r(x_0) \text{ y } \sup_{x \in K^+} g_r(x) \leq g(x_0) = g_r(x_0). \tag{2.10}$$

De (2.9), (2.10) y el hecho de que g_r no es constante en K se sigue que g_r soporta a K en x_0, y esto implica que $x_0 \in \operatorname{Supp} K$. Entonces $x_0 \in K_c \cap \operatorname{Supp} K$ y, por lo tanto, $\operatorname{Supp} K_c \subseteq K_c \cap \operatorname{Supp} K$.

Así, concluimos que $\operatorname{Supp} K_c = K_c \cap \operatorname{Supp} K$. Finalmente, veamos que K_c es elípticamente convexo. Sean $x_1, x_2 \in K_c$ y $t_1, t_2 \in (0,1)$ tales que $t_1 + t_2 = 1$. Como K es elípticamente convexo se tiene que

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 \in K \setminus \operatorname{Supp} K \subseteq K \setminus \operatorname{Supp} K_c.$$

Además, ya que $x_1, x_2 \in K_c$, entonces

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2) = t_1c + t_2c = (t_1 + t_2)c = c.$$

Por lo tanto, $t_1x_1 + t_2x_2 \in K_c \backslash \mathrm{Supp}K_c$. $\square$

Notemos que cada espacio de Keller es homeomorfo a un subconjunto convexo y cerrado de ℓ_2, ya que ℓ_2 es un espacio de Hausdorff y sus suconjuntos compactos son cerrados. Entonces, del Corolario 1.4.5.1 concluimos que si K es un espacio de Keller, K es homeomorfo a un subconjunto elípticamente convexo de ℓ_2 (que es compacto y de dimensión infinita, por ser homeomorfo a K). Por lo tanto, para probar el Teorema de Keller basta demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *Sea K un subconjunto compacto, elípticamente convexo y de dimensión infinita de ℓ_2. Entonces K es homeomorfo a T.*

Consideremos un subconjunto K compacto, elípticamente convexo y de dimensión infinita de ℓ_2. A partir de este punto y hasta el final de este capítulo, K será un conjunto fijo.

Entonces, $K - K$ es un subconjunto convexo y simétrico con respecto al origen de ℓ_2. Además, $K - K$ también tiene dimensión infinita, pues contiene a $K - k$ para cada $k \in K$ (que es homeomorfo a K), y así span $(K - K)$ tiene dimensión algebraica infinita. Por lo tanto, por la Proposición 1.1.15, existe un subconjunto $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (donde $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$) ortogonal maximal de $K - K$.

Ahora, definimos $g_n : \ell_2 \to \mathbb{R}$ como $g_n(x) = \langle x, v_n \rangle$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Y para cada $x \in K$ denotemos

$$K_0(x) = K,$$

$$K_n(x) = \{y \in K_{n-1}(x) \mid g_n(y) = g_n(x)\} \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Observación 2.3.3. Si $x, y \in K$,

(i) $x \in K_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

(ii) si $n \in \mathbb{N}$, son equivalentes

a) $g_i(x) = g_i(y)$ para cada $i \leq n$,

b) $K_i(x) = K_i(y)$ para cada $i \leq n$, *c*) $K_n(x) = K_n(y)$,

d) $x \in K_n(y)$.

Además, dada $x \in K$, observemos que $K_n(x) \subseteq K_{n-1}(x)$ y $K_n(x) = K_{n-1}(x) \cap g_n^{-1}(g_n(x))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como cada funcional g_n es continua, $K_n(x)$ es cerrado en $K_{n-1}(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, el hecho de que $K = K_0(x)$ es compacto implica, por inducción, que $K_n(x)$ es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, ya que cada g_n es continua, podemos definir $a_n : K \to \mathbb{R}$ y $b_n : K \to \mathbb{R}$ como

$$a_n(x) = \min \{g_n(y) \mid y \in K_{n-1}(x)\}, \quad b_n(x) = \max \{g_n(y) \mid y \in K_{n-1}(x)\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.4. *$K_n(x)$ es elípticamente convexo para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in K$.*

Demostración. Sea $x \in K$. La demostración será por inducción sobre n. $K_0(x) = K$ es elípticamente convexo.

Sea $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que $K_{n-1}(x)$ es elípticamente convexo. Si $a_n(x) < g_n(x) < b_n(x)$, entonces $K_n(x)$ es elípticamente convexo por la Proposición 2.3.1.

Si $a_n(x) = g_n(x) = b_n(x)$, entonces $g_n(k) = g_n(x)$ para cada $k \in K_{n-1}(x)$. Por lo tanto, $K_n(x) = K_{n-1}(x)$ y $K_n(x)$ es elípticamente convexo.

Finalmente, si $a_n(x) < g_n(x) = b_n(x)$ (o $a_n(x) = g_n(x) < b_n(x)$), entonces g_n soporta a $K_{n-1}(x)$ en x (o $-g_n$ soporta a $K_{n-1}(x)$ en x). Sin pérdida de generalidad supongamos que g_n soporta a $K_{n-1}(x)$ en x.

Tomemos $y \in K_n(x)$. Entonces $y \in K_{n-1}(x)$ y $g_n(y) = g_n(x)$ y, por lo tanto,

$$g_n(sx + ty) = sg_n(x) + tg_n(y) = (s + t)\, g_n(x) = g_n(x)$$

para cada $s, t \in [0, 1]$ tales que $s + t = 1$. Esto implica que g_n soporta a K_{n-1} en $sx + ty$ para cada $sx + ty \in [x; y]$, y por lo tanto $[x; y] \subseteq \operatorname{Supp} K_{n-1}(x)$. Así, del hecho de que $K_{n-1}(x)$ es elípticamente convexo concluimos que $x = y$. Entonces $K_n(x) = \{x\}$, y $K_n(x)$ es elípticamente convexo. $\square$

Observación 2.3.5. De la demostración del lema anterior podemos concluir que si $A \subseteq \ell_2$ es elípticamente convexo, $x, y \in A$ y $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$ soporta a A en x y en y, entonces $x = y$.

Por otra parte, dada $x \in K$, notemos que, debido a que cada $K_{n-1}(x)$ es elípticamente convexo, $K_{n-1}(x)$ es conexo y entonces $g_n(K_{n-1}(x)) = [a_n(x), b_n(x)]$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.6. *El conjunto de funcionales* $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *separa los puntos de* K*, y para cada* $x \in K$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple*

(i) si $a_j(x) < b_j(x)$ *para* $1 \leq j \leq n$*, entonces* $a_j(x) < g_j(x) < b_j(x)$ *para* $1 \leq j \leq n-1$*,*

(ii) si $a_j(x) < b_j(x)$ *para* $1 \leq j \leq n-2$ *y* $a_{n-1}(x) < g_{n-1}(x) < b_{n-1}(x)$*, entonces* $a_n(x) < b_n(x)$ *y para cada* $i \geq n$ *existe* $c_i \in (0,1]$ *tal que* $c_i v_i \in K_{n-1}(x) - K_{n-1}(x)$*.*

Demostración. Si $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no separara los puntos de K, existirían $x, y \in K$, $x \neq y$, tales que $g_n(x) = g_n(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\langle x - y, v_n \rangle = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pero, ya que $x - y \neq 0$, esto contradice el hecho de que $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortogonal maximal de $K - K$.

(i) Sean $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $a_j(x) < b_j(x)$ para $1 \leq j \leq n$.

Sea $1 \leq i \leq n-1$. Entonces, tenemos que $a_i(x) < b_i(x)$. Supongamos que

$$a_i(x) < g_i(x) = b_i(x) \text{ o } a_i(x) = g_i(x) < b_i(x).$$

Así, g_i soporta a $K_{i-1}(x)$ en x o $-g_i$ soporta a $K_{i-1}(x)$ en x.

Sea $y \in K_i(x)$. Entonces $g_i(y) = g_i(x)$, y g_i soporta a $K_{i-1}(x)$ en y o $-g_i$ soporta a $K_{i-1}(x)$ en y. Esto implica que $x = y$, ya que $K_{i-1}(x)$ es elípticamente convexo. Por lo tanto, $K_i(x) = \{x\}$. De esto se sigue que $a_{i+1}(x) = b_{i+1}(x)$, lo cual contradice que $a_j(x) < b_j(x)$ para cada $1 \leq j \leq n$. Entonces,

$$a_i(x) < g_i(x) < b_i(x) \text{ para cada } 1 \leq i \leq n-1.$$

(ii) Sea $x \in K$. Haremos la demostración por inducción sobre n. Ya que $v_1 \in K - K$ y $v_1 \neq 0$, se tiene que $v_1 = k_1 - k_2$ para ciertos $k_1, k_2 \in K$ y

$$g_1(k_1 - k_2) = g_1(v_1) = \langle v_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 > 0.$$

Entonces $g_1(k_1) > g_1(k_2)$, lo cual prueba que g_1 no es constante en K. Esto implica que $a_1(x) < b_1(x)$. Además, como $v_i \in K - K = K_0(x) - K_0(x)$ para toda $i \geq 1$, (ii) es verdadero para $n = 1$.

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y supongamos que (ii) se cumple para $n-1$ y que

$$a_j(x) < b_j(x) \text{ para } 1 \leq j \leq n-2 \text{ y } a_{n-1}(x) < g_{n-1}(x) < b_{n-1}(x).$$

Así, debido al inciso (i) tenemos que $a_{n-2}(x) < g_{n-2}(x) < b_{n-2}(x)$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción, para cada $i \geq n-1$ existe $c_i \in (0,1]$ tal que $c_i v_i \in K_{n-2}(x) - K_{n-2}(x)$. Entonces, para cada $i \geq n$ existen $y_i, z_i \in K_{n-2}(x)$ tales que

$$c_i v_i = y_i - z_i. \tag{2.11}$$

Como $a_{n-1}(x) < g_{n-1}(x) < b_{n-1}(x)$, para cada $i \geq n$ hay dos posibilidades:

a) Si $g_{n-1}(y_i) \leq g_{n-1}(x) < b_{n-1}(x)$, definimos

$$c_i' = \frac{b_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)}{b_{n-1}(x) - g_{n-1}(y_i)} \in (0,1],$$

y tomamos $u_i \in K_{n-2}(x)$ tal que $g_{n-1}(u_i) = \max g_{n-1}(K_{n-2}(x)) = b_{n-1}(x)$.

b) Si $a_{n-1}(x) < g_{n-1}(x) \leq g_{n-1}(y_i)$, definimos

$$c_i' = \frac{g_{n-1}(x) - a_{n-1}(x)}{g_{n-1}(y_i) - a_{n-1}(x)} \in (0,1],$$

y tomamos $u_i \in K_{n-2}(x)$ tal que $g_{n-1}(u_i) = \min g_{n-1}(K_{n-2}(x)) = a_{n-1}(x)$.

Entonces, ya que $c_i' \in (0,1]$ para cada $i \geq n$, por la convexidad de $K_{n-2}(x)$ se tiene que

$$(1-c_i')\,u_i + c_i' y_i,\ \ (1-c_i')\,u_i + c_i' z_i \in K_{n-2}(x). \tag{2.12}$$

Sea $i \geq n$. Si para i pasa el caso a), entonces, debido a que $g_{n-1}(u_i) = b_{n-1}(x)$ y a la definición de c_i',

$$\begin{aligned} g_{n-1}((1-c_i')\,u_i + c_i' y_i) &= g_{n-1}(u_i) + c_i'(g_{n-1}(y_i) - g_{n-1}(u_i)) \\ &= b_{n-1}(x) + c_i'(g_{n-1}(y_i) - b_{n-1}(x)) \\ &= g_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Como $i \geq n$, se tiene que $i \neq n-1$. Así, v_i y v_{n-1} son vectores ortogonales y por (2.11) tenemos que $g_{n-1}(y_i) - g_{n-1}(z_i) = c_i g_{n-1}(v_i) = c_i \langle v_i, v_{n-1} \rangle = 0$, entonces $g_{n-1}(y_i) = g_{n-1}(z_i)$. Por lo tanto,

$$g_{n-1}((1-c_i')\,u_i + c_i' z_i) = g_{n-1}(u_i) + c_i'(g_{n-1}(y_i) - g_{n-1}(u_i)) = g_{n-1}(x).$$

Por otra parte, si para i pasa el caso b), siguiendo un razonamiento análogo concluimos que $g_{n-1}\left(\left(1-c_i'\right)u_i+c_i'y_i\right)=g_{n-1}\left(x\right)$ y $g_{n-1}\left(\left(1-c_i'\right)u_i+c_i'z_i\right)=g_{n-1}\left(x\right)$. Así, para cada $i\geq n$ se cumple que

$$g_{n-1}\left(\left(1-c_i'\right)u_i+c_i'y_i\right)=g_{n-1}\left(x\right)\ \text{ y }\ g_{n-1}\left(\left(1-c_i'\right)u_i+c_i'z_i\right)=g_{n-1}\left(x\right).$$

Esto implica, debido a (2.12), que

$$\left(1-c_i'\right)u_i+c_i'y_i,\ \left(1-c_i'\right)u_i+c_i'z_i\in K_{n-1}\left(x\right)\ \text{ para cada } i\geq n.$$

Por lo tanto, para cada $i\geq n$

$$\begin{aligned} c_i'c_iv_i &= c_i'\left(y_i-z_i\right) \\ &= \left(1-c_i'\right)u_i+c_i'y_i-\left(\left(1-c_i'\right)u_i+c_i'z_i\right)\in K_{n-1}\left(x\right)-K_{n-1}\left(x\right). \end{aligned}$$

Sea $c_i''=c_i'c_i$ para cada $i\geq n$. Entonces, $c_i''\in(0,1]$ y $c_i''v_i\in K_{n-1}\left(x\right)-K_{n-1}\left(x\right)$ para cada $i\geq n$.

Finalmente, tenemos que $c_n''v_n\in K_{n-1}\left(x\right)-K_{n-1}\left(x\right)$, por lo que $c_n''v_n=y-z$ para algunos $y,z\in K_{n-1}\left(x\right)$. Por lo tanto, ya que $v_n\neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &< c_n''\left\|v_n\right\|^2=c_n''\langle v_n,v_n\rangle=g_n\left(c_n''v_n\right)=g_n\left(y\right)-g_n\left(z\right) \\ &\leq \text{máx}\, g_n\left(K_{n-1}\left(x\right)\right)-\text{mín}\, g_n\left(K_{n-1}\left(x\right)\right)=b_n\left(x\right)-a_n\left(x\right). \end{aligned}$$

Entonces, $a_n\left(x\right)<b_n\left(x\right)$. □

Ahora, definamos $f_n:\{x\in K\mid a_n\left(x\right)<b_n\left(x\right)\}\to[-1,1]$ como

$$f_n\left(x\right)=\frac{2g_n\left(x\right)-b_n\left(x\right)-a_n\left(x\right)}{b_n\left(x\right)-a_n\left(x\right)} \tag{2.13}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Notemos que para cada $x\in K$ tal que $a_n\left(x\right)<b_n\left(x\right)$, $f_n\left(x\right)$ es la evaluación en el punto $g_n\left(x\right)$ del homeomorfismo afín entre los intervalos $\left[a_n\left(x\right),b_n\left(x\right)\right]$ y $[-1,1]$.

Además, ya que $a_1\left(x\right)<b_1\left(x\right)$ para toda $x\in K$, se tiene que f_1 está definida en x para toda $x\in K$.

Sea $F:K\to T$ definida como

$$F\left(x\right)=\begin{cases}\left(f_1\left(x\right),\ldots,f_k\left(x\right)\right) & \text{si } k+1=\text{mín}\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\left(x\right)=b_n\left(x\right)\right\},\\ \left(f_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} & \text{si } a_n\left(x\right)<b_n\left(x\right)\ \text{ para toda } n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{2.14}$$

Sea $x \in K$. Si $a_n(x) < b_n(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces, debido al inciso (i) del Lema 2.3.6,

$$a_n(x) < g_n(x) < b_n(x) \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $f_n(x) \in (-1,1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y esto implica que $F(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in T$.

Por otra parte, si $k+1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid a_n(x) = b_n(x)\}$, debido al inciso (i) del Lema 2.3.6 tenemos que

$$a_j(x) < g_j(x) < b_j(x) \text{ para } 1 \leq j \leq k-1;$$

y, por el inciso (ii),

$$g_k(x) = a_k(x) \text{ ó } g_k(x) = b_k(x).$$

Por lo tanto, $f_j(x) \in (-1,1)$ para $1 \leq j \leq k-1$ y $f_k(x) \in \{-1,1\}$, y entonces $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in T$.

Así, concluimos que F está bien definida.

Proposición 2.3.7. *$F : K \to T$ es una función biyectiva.*

Demostración. (a) F es inyectiva.

Sean $x, y \in K$, y supongamos que $F(x) = F(y)$. Veamos por inducción que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \leq \text{ord}(F(x)), \text{ entonces } g_n(x) = g_n(y). \tag{2.15}$$

El hecho de que $F(x) = F(y)$ implica que $f_1(x) = f_1(y)$. Y dado que

$$a_1(x) = \text{mín}\, g_1(K) = a_1(y) \text{ y } b_1(x) = \text{máx}\, g_1(K) = b_1(y),$$

por la definición de f_1 tenemos que $g_1(x) = g_1(y)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tal que $n \leq \text{ord}(F(x))$. Como $F(x) = F(y)$, entonces $f_n(x) = f_n(y)$. Por hipótesis de inducción, $g_i(x) = g_i(y)$ para cada $i < n$, y esto implica que $K_{n-1}(x) = K_{n-1}(y)$. Así,

$$a_n(x) = \text{mín}\, g_n(K_{n-1}(x)) = \text{mín}\, g_n(K_{n-1}(y)) = a_n(y),$$

$$b_n(x) = \text{máx}\, g_n(K_{n-1}(x)) = \text{máx}\, g_n(K_{n-1}(y)) = b_n(y).$$

Por lo tanto, por la definición de f_n tenemos que $g_n(x) = g_n(y)$, y esto concluye el paso inductivo.

Ahora, si $\operatorname{ord}(F(x)) = \infty$, por (2.15) $g_n(x) = g_n(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de K, concluimos que $x = y$.

Por otra parte, si $\operatorname{ord}(F(x)) < \infty$, de (2.15) se sigue que $g_m(x) = g_m(y)$, donde $m = \operatorname{ord}(F(x))$. Así, $f_m(x) = f_m(y)$ es la última coordenada de $F(x) = F(y)$, por lo que $f_m(x) = \pm 1$. Entonces,

$$g_m(x) = g_m(y) = a_m(x) \text{ ó } g_m(x) = g_m(y) = b_m(x). \tag{2.16}$$

Como f_m está definida en x, $a_m(x) < b_m(x)$. Por lo tanto, g_m no es constante en $K_{m-1}(x)$. Debido a esto y a (2.16), g_m ó $-g_m$ soporta a $K_{m-1}(x)$ en x y en y. De esto y del hecho de que $K_{m-1}(x)$ es elípticamente convexo se sigue que $x = y$.

(b) F es suprayectiva.

Sea $y \in T$. Veamos por inducción que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } n \leq \operatorname{ord}(y), \text{ existe } x \in K \text{ tal que } f_i(x) = y(i) \text{ para } i \leq n. \tag{2.17}$$

Ya que g_1 no es constante en K, $\min g_1(K) < \max g_1(K)$. Entonces, existe un homeomorfismo

$$h : [-1, 1] \to g_1(K) = [\min g_1(K), \max g_1(K)].$$

Sea $x \in K$ tal que $h(y(1)) = g_1(x)$. Por lo tanto, $f_1(x) = y(1)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tal que $n \leq \operatorname{ord}(y)$. Por hipótesis de inducción, existe $x_1 \in K$ tal que $f_i(x_1) = y(i)$ para $i \leq n-1$. Entonces,

$$f_{n-1}(x_1) = y(n-1) \in (-1, 1),$$

ya que $n - 1 < \operatorname{ord}(y)$. Por lo tanto, $g_{n-1}(x_1) \in (a_{n-1}(x_1), b_{n-1}(x_1))$. Como además $a_j(x_1) < b_j(x_1)$ para $1 \leq j \leq n-2$ (porque f_j está definida en x_1 para cada $1 \leq j \leq n-2$), tenemos que, por el inciso (*ii*) del Lema 2.3.6, $a_n(x_1) < b_n(x_1)$. Esto implica que existe un homeomorfismo

$$h' : [-1, 1] \to g_n(K_{n-1}(x_1)) = [a_n(x_1), b_n(x_1)].$$

Sea $x_2 \in K_{n-1}(x_1)$ tal que $h'(y(n)) = g_n(x_2)$. Entonces, $f_n(x_2) = y(n)$. Por otra parte, como $x_2 \in K_{n-1}(x_1)$, $g_i(x_1) = g_i(x_2)$ y $K_{n-1}(x_1) = K_{n-1}(x_2)$ para toda $i \leq n-1$. Por lo tanto,

$$f_i(x_2) = f_i(x_1) = y(i) \text{ para } i \leq n-1$$

y, así, $f_i(x_2) = y(i)$ para $i \leq n$. Esto concluye el paso inductivo.

Si $\operatorname{ord}(y) < \infty$, por (2.17) existe $x \in K$ tal que $f_i(x) = y(i)$ para $i \leq \operatorname{ord}(y)$. Como

$$f_i(x) = y(i) \in (-1,1) \text{ para } i < \operatorname{ord}(y) \text{ y } f_{\operatorname{ord}(y)}(x) = y(\operatorname{ord}(y)) = \pm 1,$$

$F(x)$ tiene exactamente $\operatorname{ord}(y)$ coordenadas, y entonces $F(x) = y$.

Por otra parte, si $\operatorname{ord}(y) = \infty$, por (2.17) para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K$ tal que $f_i(x_n) = y(i)$ para $i \leq n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$f_i(x_n) = y(i) = f_i(x_{n+1}) \text{ para } i \leq n,$$

y, por inducción, esto implica que $g_i(x_n) = g_i(x_{n+1})$ para $i \leq n$. Así, si $k \in K_{n+1}(x_{n+1})$, entonces $g_i(k) = g_i(x_{n+1})$ para $i \leq n+1$, y por lo tanto $g_i(k) = g_i(x_n)$ para $i \leq n$. Concluimos que $k \in K_n(x_n)$, y $K_{n+1}(x_{n+1}) \subseteq K_n(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Así, $(K_n(x_n))$ es una sucesión anidada de subconjuntos compactos y no vacíos de ℓ_2, por lo que existe $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_n(x_n)$.

Sea $i \in \mathbb{N}$. Ya que $x \in K_i(x_i)$, se cumple que $g_j(x) = g_j(x_i)$ y $K_j(x) = K_j(x_i)$ para $j \leq i$. Entonces, como $K_{i-1}(x) = K_{i-1}(x_i)$, se sigue que $a_i(x) = a_i(x_i)$ y $b_i(x) = b_i(x_i)$. También $a_i(x_i) < b_i(x_i)$, ya que f_i está definida en x_i. Por lo tanto, $a_i(x) < b_i(x)$ y f_i está definida en x. Además, debido a que $g_i(x) = g_i(x_i)$, $a_i(x) = a_i(x_i)$ y $b_i(x) = b_i(x_i)$, tenemos que

$$f_i(x) = f_i(x_i) = y(i).$$

Así, $a_i(x) < b_i(x)$ y $f_i(x) = y(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $F(x) = (f_i(x)) = y$.

Concluimos que F es biyectiva. $\square$

Recordemos que $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortogonal maximal de $K - K$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $Y = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un subespacio de ℓ_2 de dimensión algebraica finita, Y es cerrado en ℓ_2. Por lo tanto, $\ell_2 = Y \oplus Y^{\perp}$ y podemos considerar la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre Y.

Lema 2.3.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $Y = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $P : \ell_2 \to Y$ es la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre Y, entonces $P(K)$ es un cuerpo convexo cerrado en Y.*

Demostración. Dado que K es convexo y la proyección P es lineal, $P(K)$ es un subconjunto convexo de Y. Como K es compacto y P es continua, $P(K)$ es compacto, y entonces es cerrado en Y. Por lo tanto, falta probar que $\operatorname{int}_Y(P(K))$, el interior de $P(K)$ con respecto a Y, es no vacío.

Tomemos $y \in P(K)$ fijo. Como $v_1 \in Y$, porque $n \geq 1$, entonces $P(v_1) = v_1 \neq 0$. Tenemos que $v_1 = k_1 - k_2$ para algunos $k_1, k_2 \in K$, ya que $v_1 \in K - K$. Así,

$$P(k_1) - P(k_2) = P(v_1) \neq 0,$$

y $P(k_1) \neq P(k_2)$. Por lo tanto, $|P(K)| > 1$ y $|P(K) - y| > 1$.

Supongamos por contradicción que cada $n+1$ vectores en $P(K)$ son afínmente dependientes. Entonces, cada n vectores en $P(K) - y$ son linealmente dependientes.

Sea k el mínimo número natural tal que cada k vectores en $P(K) - y$ son linealmente dependientes. Así, $k \leq n$, ya que n cumple esta condición. Por otra parte, como $|P(K) - y| > 1$, existe $z \in P(K) - y$ tal que $z \neq 0$. Entonces $\{z\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto $k > 1$.

Así, $1 \leq k - 1$. Debido a que k es el mínimo natural con la propiedad anterior, existen $y_1, \ldots, y_{k-1} \in P(K) - y$ linealmente independientes. Sea $w \in P(K) - y$. Entonces $y_1, \ldots, y_{k-1}, w$ son linealmente dependientes, ya que cualesquiera k vectores en $P(K) - y$ lo son. Esto implica que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, no todos cero, tales que

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{k-1} y_{k-1} + \alpha_k w = 0,$$

y de la independencia lineal de $y_1, \ldots, y_{k-1}$ se sigue que $\alpha_k \neq 0$. Por lo tanto,

$$w = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} y_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} y_{k-1} \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{k-1}\},$$

y entonces $P(K) - y \subseteq \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$.

Sea $\{h_1, \ldots, h_{k-1}\}$ una base ortogonal de $\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$. Ésta puede completarse a una base ortogonal $\{h_1, \ldots, h_n\}$ de Y. Como $k - 1 < n$, $h_n \notin \{h_1, \ldots, h_{k-1}\}$, y entonces $\langle h_n, h_i \rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, k-1$. Así, debido a que

$$P(K) - y \subseteq \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{k-1}\} = \operatorname{span}\{h_1, \ldots, h_{k-1}\},$$

tenemos que $\langle h_n, x \rangle = 0$ para cada $x \in P(K) - y$.

Lo anterior implica que, para cada $v \in P(K)$,

$$\langle h_n, v \rangle = \langle h_n, v - y \rangle + \langle h_n, y \rangle = \langle h_n, y \rangle.$$

Es decir, la funcional $\langle h_n, \cdot\rangle : \ell_2 \to \mathbb{R}$ es constante en $P(K)$.

Por otra parte, como $h_n \in Y = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, $h_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. También, $\lambda_j \neq 0$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, pues $h_n \neq 0$.

Ya que $v_j \in K - K$, $v_j = l_1 - l_2$, con $l_1, l_2 \in K$. Además, $P(v_j) = v_j$, pues $v_j \in Y$. Así, como $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto ortogonal,

$$\begin{aligned}\langle h_n, P(l_1) - P(l_2)\rangle = \langle h_n, P(v_j)\rangle &= \langle h_n, v_j\rangle \\ &= \langle \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, v_j\rangle \\ &= \lambda_j \|v_j\| \neq 0,\end{aligned}$$

pues teníamos que $\lambda_j \neq 0$. Por lo tanto $\langle h_n, P(l_1)\rangle \neq \langle h_n, P(l_2)\rangle$, pero esto contradice el hecho de que $\langle h_n, \cdot\rangle$ es constante en $P(K)$.

Entonces, concluimos que existen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in P(K)$ vectores afínmente independientes. Debido a la Proposición 1.1.21, tenemos que el interior de $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ con respecto a Y es no vacío. Como $P(K)$ es convexo, $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq P(K)$, y por lo tanto $\operatorname{int}_Y(P(K)) \neq \emptyset$. □

Lema 2.3.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x_0 \in K$, $y_0 \in K_n(x_0)$ y (x_j) es una sucesión en K tal que $\lim_{j\to\infty} x_j = x_0$. Entonces, existe una sucesión (y_j) tal que $y_j \in K_n(x_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\lim_{j\to\infty} y_j = y_0$.*

Demostración. Sea $Y = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, y consideremos la proyección ortogonal P de ℓ_2 sobre Y. Del Lema 2.3.8 se sigue que $P(K)$ es un cuerpo convexo cerrado en Y.

Sea $x \in K_n(x_0)$. Entonces $g_i(x) = g_i(x_0)$ para cada $i \leq n$; es decir, $\langle x, v_i\rangle = \langle x_0, v_i\rangle$ para cada $i \leq n$. Esto implica que $\langle x, y\rangle = \langle x_0, y\rangle$ para cada $y \in Y$, y por lo tanto $x - x_0 \in Y^\perp = \ker P$. Así, tenemos que $P(x) = P(x_0)$, y concluimos que

$$P(K_n(x_0)) = \{P(x_0)\}. \tag{2.18}$$

Ahora, existen los siguientes dos casos.

(a) $P(y_0) \in \partial_Y(P(K))$. Como $P(K)$ es un cuerpo convexo cerrado en Y, de la Proposición 1.6.6 se sigue que

$$\partial_Y(P(K)) = \operatorname{Supp}_Y(P(K)).$$

Por lo tanto, existe una funcional $f : Y \to \mathbb{R}$ lineal y continua que soporta a $P(K)$ en $P(y_0)$. Es decir,

$$\inf_{y\in P(K)} f(y) < \sup_{y\in P(K)} f(y) = f(P(y_0)).$$

Sea $a \in K_n(x_0)$. Como $y_0 \in K_n(x_0)$, por (2.18) tenemos que $P(a) = P(y_0)$. Entonces,

$$\inf_{x\in K} f(P(x)) < \sup_{x\in K} f(P(x)) = f(P(y_0)) = f(P(a)).$$

Lo anterior implica que la funcional $f \circ P : \ell_2 \to \mathbb{R}$, que es lineal y continua porque f y P lo son, soporta a K en a, y por lo tanto $a \in \operatorname{Supp} K$. Así, $K_n(x_0) \subseteq \operatorname{Supp} K$.

Finalmente, ya que K es elípticamente convexo, concluimos que $K_n(x_0) = \{x_0\}$, y por lo tanto $y_0 = x_0$. En este caso definimos $y_j = x_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y claramente la sucesión (y_j) cumple lo requerido.

(b) $P(y_0) \in \operatorname{int}_Y(P(K))$. Sea $j \in \mathbb{N}$. Se tiene que $[P(y_0); P(x_j)] \subseteq P(K)$, pues $P(K)$ es convexo. Sean

$$s = \inf\{t > 0 \mid P(y_0) + t(P(x_j) - P(y_0)) \notin P(K)\}$$

$$\text{y } z_j' = P(y_0) + s(P(x_j) - P(y_0))$$

(si este ínfimo no existe, $w_n = P(y_0) + n(P(x_j) - P(y_0)) \in P(K)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual es imposible ya que la sucesión (w_n) no tiene subsucesiones convergentes y $P(K)$ es compacto).

Como $[P(y_0); P(x_j)] \subseteq P(K)$, $s \geq 1$. Y ya que para toda $t < s$ tal que $t > 0$ se cumple que $P(y_0) + t(P(x_j) - P(y_0)) \in P(K)$, entonces $z_j' \in \overline{P(K)} = P(K)$. Además, como $P(K)$ es convexo se sigue que $P(y_0) + t(P(x_j) - P(y_0)) \notin P(K)$ para cada $t > s$, por lo que $z_j' \in \overline{Y \backslash P(K)}$. Así, $z_j' \in \partial_Y(P(K))$.

Ahora, debido a que $[P(y_0); P(x_j)] \subseteq \left[P(y_0); z_j'\right]$ (porque $s \geq 1$), se tiene que

$$P(x_j) = t_1 P(y_0) + t_2 z_j' \text{ para algunos } t_1, t_2 \in [0,1] \text{ con } t_1 + t_2 = 1. \quad (2.19)$$

Como $z_j' \in P(K)$, existe $z_j \in K$ tal que $P(z_j) = z_j'$. Entonces, ya que P es la proyección ortogonal de $Y \oplus Y^\perp$ sobre Y, $z_j = a + z_j'$ para algún $a \in Y^\perp$. De igual forma, $y_0 = b + P(y_0)$ y $x_j = c + P(x_j)$ para algunos $b, c \in Y^\perp$.

Definimos

$$y_j = t_1 y_0 + t_2 z_j = t_1 b + t_2 a + t_1 P(y_0) + t_2 z_j' = t_1 b + t_2 a + P(x_j). \quad (2.20)$$

Por la primera igualdad, $y_j \in [y_0; z_j] \subseteq K$, pues K es convexo. Además, si $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, tenemos que $\langle t_1 b + t_2 a, v_i \rangle = \langle c, v_i \rangle = 0$, pues $v_i \in Y$ y

$a, b, c \in Y^{\perp}$. Así,

$$\begin{aligned} g_i(y_j) = \langle y_j, v_i \rangle = \langle t_1 b + t_2 a, v_i \rangle + \langle P(x_j), v_i \rangle \\ = \langle c, v_i \rangle + \langle P(x_j), v_i \rangle = \langle x_j, v_i \rangle = g_i(x_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_i(y_j) = g_i(x_j)$ para cada $i \leq n$, y esto implica que $y_j \in K_n(x_j)$.

Por otra parte, como $t_1 b + t_2 a \in Y^{\perp}$, se tiene que $P(y_j) = P(x_j)$. Así,debido a (2.19) y (2.20),

$$\|y_0 - y_j\| = \|(1 - t_1) y_0 - t_2 z_j\| = t_2 \|y_0 - z_j\| \text{ y}$$

$$\|P(y_0) - P(y_j)\| = \|P(y_0) - P(x_j)\| = t_2 \left\|P(y_0) - z_j'\right\|.$$

Entonces,

$$\|y_0 - y_j\| = \frac{\|P(y_0) - P(y_j)\| \, \|y_0 - z_j\|}{\left\|P(y_0) - z_j'\right\|}.$$

Se cumple que $\left\|P(y_0) - z_j'\right\| \neq 0$, porque $P(y_0) \in \operatorname{int}_Y(P(K))$ y $z_j' \in \partial_Y(P(K))$.

Como P es una proyección ortogonal, $\|v\| \geq \|P(v)\|$ para cada $v \in \ell_2$. También, por (2.18) se tiene que $P(y_0) = P(x_0)$. Así,

$$\|P(y_0) - P(y_j)\| = \|P(x_0) - P(x_j)\| \leq \|x_0 - x_j\|.$$

Además, $\|y_0 - z_j\| \leq \operatorname{diám} K$ y, como $z_j' \in \partial_Y(P(K))$, $\left\|P(y_0) - z_j'\right\| \geq d(P(y_0), Y \backslash P(K)) = r$. Observemos que $r > 0$ ya que $P(y_0) \in \operatorname{int}_Y(P(K))$. Por lo tanto,

$$\|y_0 - y_j\| \leq \frac{\|x_0 - x_j\| \operatorname{diám} K}{r}. \tag{2.21}$$

De esta manera, se tiene que la sucesión (y_j) cumple $y_j \in K_n(x_j)$ y (2.21) para cada $j \in \mathbb{N}$. Entonces, como $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$, concluimos que $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = y_0$. □

Proposición 2.3.10. *La función* $f_n : \{x \in K \mid a_n(x) < b_n(x)\} \to [-1, 1]$, *definida en* (2.13), *es continua para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Primero, veamos que la función $b_n : K \to \mathbb{R}$ es continua. Sea (x_j) una sucesión en K tal que

$$\lim_{j\to\infty} x_j = x_0 \tag{2.22}$$

para algún $x_0 \in K$. Basta probar que existe una subsucesión (x_{j_k}) de (x_j) tal que $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{j_k}) = f(x_0)$.

Para cada $j \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, sea $z_j \in K_{n-1}(x_j)$ tal que $b_n(x_j) = g_n(z_j)$. Entonces (z_j) es una sucesión en K, y del hecho de que K es compacto se sigue que existen una subsucesión (z_{j_k}) de (z_j) y $u_0 \in K$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} z_{j_k} = u_0. \tag{2.23}$$

Ahora, como cada $z_j \in K_{n-1}(x_j)$, $g_i(z_j) = g_i(x_j)$ para toda $i \leq n-1$ y toda $j \in \mathbb{N}$. Entonces, debido a (2.22) y (2.23) y a que cada g_i es continua, inferimos que

$$g_i(u_0) = \lim_{k\to\infty} g_i(z_{j_k}) = \lim_{k\to\infty} g_i(x_{j_k}) = g_i(x_0) \text{ para toda } i \leq n-1.$$

Lo anterior implica que $u_0 \in K_{n-1}(x_0)$, y por lo tanto

$$b_n(x_0) = \max g_n(K_{n-1}(x_0)) \geq g_n(u_0).$$

Como g_n es continua, entonces $g_n(u_0) = \lim\limits_{k\to\infty} g_n(z_{j_k})$, y ya que $b_n(x_j) = g_n(z_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} g_n(z_{j_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} b_n(x_{j_k})$. Así,

$$b_n(x_0) \geq g_n(u_0) = \lim_{k\to\infty} b_n(x_{j_k}). \tag{2.24}$$

Afirmamos que existe una sucesión (y_j) tal que

$$\lim_{j\to\infty} y_j = z_0 \tag{2.25}$$

y $y_j \in K_{n-1}(x_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. En efecto, si $n-1 \geq 1$, como $z_0 \in K_{n-1}(x_0)$, la sucesión está garantizada por el Lema 2.3.9. Si $n-1 = 0$, entonces $K_{n-1}(x_j) = K$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y podemos tomar $y_j = z_0$ para toda j. En ambos casos la sucesión (y_j) cumple lo requerido.

Cada $y_j \in K_{n-1}(x_j)$, de modo que $K_{n-1}(y_j) = K_{n-1}(x_j)$ y por lo tanto $b_n(y_j) = b_n(x_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Esto y el hecho de que $g_n(y_j) \leq b_n(y_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ implican que

$$\lim_{k\to\infty} g_n(y_{j_k}) \leq \lim_{k\to\infty} b_n(y_{j_k}) = \lim_{k\to\infty} b_n(x_{j_k}).$$

Además, habíamos tomado z_0 tal que $b_n(x_0) = g_n(z_0)$. Así, por (2.25),

$$b_n(x_0) = g_n(z_0) = \lim_{k\to\infty} g_n(y_{j_k}) \leq \lim_{k\to\infty} b_n(x_{j_k}).$$

Debido a esto y a (2.24), concluimos que $b_n(x_0) = \lim_{k\to\infty} b_n(x_{j_k})$.

Entonces, b_n es continua en K, y análogamente a_n es continua en K. Así, como g_n es continua en ℓ_2, se sigue de la definición de f_n que dicha función es continua en su dominio. □

Proposición 2.3.11. *$F : K \to T$, definida en* (2.14)*, es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.7 tenemos que F es biyectiva. Como K es compacto y T es un espacio de Hausdorff (ya que es métrico), sólo falta probar que F es continua.

Sean (x_j) una sucesión en K tal que

$$\lim_{j\to\infty} x_j = x_0$$

para algún $x_0 \in K$, y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq \mathrm{ord}(F(x_0))$.

Sea $i \leq n$. Entonces $i \leq \mathrm{ord}(F(x_0))$ y $F(x_0)$ tiene i-ésima coordenada. Por lo tanto, f_i está definida en x_0 y $a_i(x_0) < b_i(x_0)$. Así, existen A_i y B_i ajenos y abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $a_i(x_0) \in A_i$ y $b_i(x_0) \in B_i$. Y como tenemos que a_i y b_i son continuas, existen U_i y V_i abiertos en K tales que $x_0 \in U_i \cap V_i$, $a_i(U_i) \subseteq A_i$ y $b_i(V_i) \subseteq B_i$.

Sean

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \quad \text{y} \quad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Entonces $x_0 \in U \cap V$, y $U \cap V$ es abierto en K. Como

$$\lim_{j\to\infty} x_j = x_0,$$

existe $K_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in U \cap V$ si $j \geq K_n$. De esta manera, si $j \geq K_n$, $a_i(x_j) \in A_i$ y $b_i(x_j) \in B_i$ para cada $i \leq n$. Por lo tanto, $a_i(x_j) < b_i(x_j)$ para cada $i \leq n$. Esto implica que $F(x_j)$ tiene n-ésima coordenada.

Así, tenemos que para cada $n \leq \mathrm{ord}(F(x_0))$ existe $K_n \in \mathbb{N}$ tal que $F(x_j)$ tiene n-ésima coordenada si $j \geq K_n$. Además, por la Proposición 2.3.10 cada f_n es continua, y por lo tanto

$$\lim_{j\to\infty} f_n(x_j) = f_n(x_0) \ \text{ para cada } n \leq \mathrm{ord}(F(x_0))$$

(notemos que cada f_n está definida en x_0 porque $n \leq \mathrm{ord}(F(x_0))$, y está definida en x_j para $j \geq K_n$).

Lo anterior en combinación con la Proposición 2.2.4 implica que

$$\lim_{j\to\infty} F\left(x_j\right) = F\left(x_0\right).$$

Por lo tanto, F es continua. $\square$

Finalmente, de la proposición anterior podemos concluir que todo subconjunto K compacto, elípticamente convexo y de dimensión infinita de ℓ_2 es homeomorfo a T. Así, tenemos la Proposición 2.3.2, y esto termina la prueba del Teorema de Keller.

Capítulo 3

Cuerpos convexos cerrados

El propósito de este capítulo será dar una clasificación de los cuerpos convexos cerrados de un espacio topológico vectorial arbitrario.

En el capítulo 4 estudiaremos subconjuntos no vacíos, convexos, cerrados y localmente compactos de un espacio de Banach. Veremos que si K es un conjunto con estas características y además tiene dimensión finita y cardinalidad mayor a 1, entonces se cumple que K es un cuerpo convexo cerrado en cierto espacio topológico vectorial. Por esta razón, los resultados de este capítulo serán de utilidad más adelante.

Dados X y Y espacios vectoriales topológicos y A y B subconjuntos de X y Y, respectivamente, escribiremos $(X, A) \cong (Y, B)$ si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h(A) = B$.

Proposición 3.0.1. *Sean U_1 y U_2 cuerpos convexos cerrados en un espacio topológico vectorial X. Si $\mathrm{cc}U_1 = \mathrm{cc}U_2$, entonces $(X, U_1) \cong (X, U_2)$.*

Demostración. Como U_1 y U_2 son cuerpos convexos en X, sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in \operatorname{int} U_i$, para $i = 1, 2$.

Sea $V = \frac{1}{2}(U_1 \cap U_2)$. Observemos que entonces V es un cuerpo convexo cerrado en X, y $0 \in \operatorname{int} V$. Además, si $v \in V$, se tiene que $2v \in U_1 \cap U_2$. Así, por el Lema 1.6.4, $v \in \operatorname{int} U_1 \cap \operatorname{int} U_2$. Por lo tanto, $V \subseteq \operatorname{int} U_i$ para $i = 1, 2$, y de esto se sigue que

$$w_{U_i}(x) < w_V(x) \text{ para cada } x \in X \text{ y } i = 1, 2. \tag{3.1}$$

Sea $i \in \{1, 2\}$. Ya que $U_1 \cap U_2$ es convexo y $0 \in U_1 \cap U_2$, concluimos que $V \subseteq U_i$. Entonces $\mathrm{cc}\, V \subseteq \mathrm{cc}\, U_i$. Recíprocamente, si $x \in \mathrm{cc}\, U_i$, entonces

$x \in \operatorname{cc} U_1 = \operatorname{cc} U_2$, y por lo tanto, por la Proposición 1.5.3, $\mathbb{R}^+x \subseteq U_1 \cap U_2$. Así,

$$\mathbb{R}^+x = \frac{1}{2}\mathbb{R}^+x \subseteq \frac{1}{2}(U_1 \cap U_2) = V$$

y entonces $x \in \operatorname{cc} V$. De esta manera, inferimos que $\operatorname{cc} V = \operatorname{cc} U_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{cc} V$, entonces $\mathbb{R}^+x \subseteq V$. Por el Lema 1.6.4, $x \in \operatorname{int} V$, y por lo tanto $\operatorname{cc} V \subseteq \operatorname{int} V$.

Sean $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Definimos $h_{ij} : X \to X$ como

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in V, \\ \left(\frac{1}{w_V(x)} + \frac{\frac{1}{w_{U_j}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}} \left(1 - \frac{1}{w_V(x)}\right) \right) x & \text{si } x \in \overline{X \backslash V}. \end{cases}$$

Notemos que h_{ij} está bien defnida. Debido a la Proposición 1.6.3, tenemos que $\operatorname{cc} V = w_V^{-1}(0)$. Así, como $\operatorname{cc} V \subseteq \operatorname{int} V$, entonces

$$\overline{X \backslash V} \subseteq X \backslash \operatorname{int} V \subseteq X \backslash \operatorname{cc} V = X \backslash w_V^{-1}(0).$$

Por lo tanto, $w_V(x) \neq 0$ para cada $x \in \overline{X \backslash V}$. Como $\operatorname{cc} V = \operatorname{cc} U_i = w_{U_i}^{-1}(0)$ y $\operatorname{cc} V = \operatorname{cc} U_j = w_{U_j}^{-1}(0)$, entonces $w_{U_i}(x) \neq 0$ y $w_{U_j}(x) \neq 0$ para cada $x \in \overline{X \backslash V}$. Finalmente, de (3.1) se sigue que $\frac{1}{w_{U_i}(x)} - \frac{1}{w_V(x)} > 0$ para cada $x \in \overline{X \backslash V}$.

Por otra parte, si $x \in V \cap \overline{X \backslash V} = \partial V$, entonces $w_V(x) = 1$ y $1 - \frac{1}{w_V(x)} = 0$. Así,

$$\left(\frac{1}{w_V(x)} + \frac{\frac{1}{w_{U_j}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}} \left(1 - \frac{1}{w_V(x)}\right) \right) x = \frac{1}{w_V(x)} x = x.$$

Ahora, tenemos que

$$h_{ji}(h_{ij}(x)) = x \text{ para toda } x \in X. \qquad \text{(Apéndice iii.i)}$$

Entonces $h_{ij}^{-1} = h_{ji}$ y por lo tanto h_{ij} es biyectiva. Como $0 \in \operatorname{int} U_1 \cap \operatorname{int} U_2 \cap \operatorname{int} V$, w_{U_1}, w_{U_2} y w_V son continuas en X. De esto y del Lema del pegado se sigue que h_{ij} y h_{ji} son continuas en X, y por lo tanto $h_{ij} : X \to X$ es un homeomorfismo.

Finalmente,

$$h_{ij}(U_i) = U_j, \qquad \text{(Apéndice iii.ii)}$$

y con esto tenemos que $(X, U_1) \cong (X, U_2)$. $\square$

Proposición 3.0.2. *Sea U un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial X. Entonces $(X\backslash \mathrm{cc}U, U\backslash \mathrm{cc}U) \cong (\partial U \times \mathbb{R}, \partial U \times \mathbb{R}^{+})$.*

Demostración. Como U es un cuerpo convexo en X, sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in \operatorname{int} U$.

Definimos $h : X\backslash \mathrm{cc}\, U \to \partial U \times (0, \infty)$ como

$$h(x) = \left(\frac{x}{w_U(x)}, w_U(x) \right).$$

Por la Proposición 1.6.3, $\mathrm{cc}\, U = w_U^{-1}(0)$, y entonces $w_U(x) > 0$ si $x \in X\backslash \mathrm{cc}\, U$.

Consideremos $h^{-1} : \partial U \times (0, \infty) \to X\backslash \mathrm{cc}\, U$ definida como

$$h^{-1}(x, t) = tx.$$

La función h^{-1} está bien definida, ya que si $(x, t) \in \partial U \times (0, \infty)$, entonces, por el Lema 1.6.4, $sx \notin U$ para toda $s > 1$. Así, $h^{-1}(x, t) = tx \notin \mathrm{cc}\, U$ (si $tx \in \mathrm{cc}\, U$ entonces $\mathbb{R}^{+}x = \mathbb{R}^{+}tx \subseteq U$).

Ahora, sea $x \in X\backslash \mathrm{cc}\, U$. Entonces

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}\left(\frac{x}{w_U(x)}, w_U(x) \right) = w_U(x) \frac{x}{w_U(x)} = x.$$

Sea $(x, t) \in \partial U \times (0, \infty)$. Como $x \in \partial U$, $w_U(x) = 1$. Entonces,

$$h\left(h^{-1}(x, t)\right) = h(tx) = \left(\frac{tx}{tw_U(x)}, tw_U(x) \right) = (x, t).$$

Por lo tanto, h^{-1} es la función inversa de h y h es biyectiva. Observemos que h^{-1} es continua en $\partial U \times (0, \infty)$. Y como w_U es continua en X, ya que $0 \in \operatorname{int} U$, h es continua en $X\backslash \mathrm{cc}\, U$.

También, si $x \in U$, entonces $w_U(x) \leq 1$. Esto implica que $h(U\backslash \mathrm{cc}\, U) \subseteq \partial U \times (0, 1]$. Recíprocamente, si $(x, t) \in \partial U \times (0, 1]$, entonces $h^{-1}(x, t) = tx \in X\backslash \mathrm{cc}\, U$. Además $x \in \partial U \subseteq U$ (porque U es cerrado en X), y como $t \in (0, 1]$ y U es un convexo que contiene a 0, inferimos que $h^{-1}(x, t) = tx \in U$. Por lo tanto, $h(U\backslash \mathrm{cc}\, U) = \partial U \times (0, 1]$.

Así, concluimos que

$$(X\backslash \mathrm{cc}\, U, U\backslash \mathrm{cc}\, U) \cong (\partial U \times (0, \infty), \partial U \times (0, 1]).$$

Por otra parte, bajo el homeomorfismo $\mathrm{Id} \times -\log : \partial U \times (0, \infty) \to \partial U \times \mathbb{R}$ tenemos que

$$(\partial U \times (0, \infty), \partial U \times (0, 1]) \cong (\partial U \times \mathbb{R}, \partial U \times \mathbb{R}^+),$$

por lo que

$$(X \backslash \mathrm{cc}\, U, U \backslash \mathrm{cc}\, U) \cong (\partial U \times \mathbb{R}, \partial U \times \mathbb{R}^+).$$

□

Recordemos que, dado un subespacio Y en un espacio vectorial X, la codimensión de Y se define como la dimensión del espacio cociente X/Y.

Proposición 3.0.3. *Sea U un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial X. Si existe un natural m tal que $\mathrm{cc}U$ es un subespacio vectorial de X de codimensión m, entonces $(X, U) \cong (\mathrm{cc}U \times \mathbb{R}^m, \mathrm{cc}U \times \mathbb{I}^m)$.*

Demostración. Como U es un cuerpo convexo en X, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $0 \in \mathrm{int}\, U$. Supongamos que $\mathrm{cc}\, U$ es un subespacio de X de codimensión m, para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe un subespacio L de dimensión algebraica m de X tal que $X = \mathrm{cc}\, U \oplus L$. A saber, $L = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_m\}$, donde $\{x_1 + \mathrm{cc}\, U, \ldots, x_m + \mathrm{cc}\, U\}$ es una base de $X/\mathrm{cc}\, U$, cumple lo requerido.

Si $x \in X$, $x + \mathrm{cc}\, U \in X/\mathrm{cc}\, U$, por lo que existen $\alpha_1^x, \ldots, \alpha_m^x \in \mathbb{R}$ tales que

$$x + \mathrm{cc}\, U = \alpha_1^x x_1 + \ldots + \alpha_m^x x_m + \mathrm{cc}\, U.$$

Entonces, $x - (\alpha_1^x x_1 + \ldots + \alpha_m^x x_m) \in \mathrm{cc}\, U$ para cada $x \in X$, y las proyecciones de $X = \mathrm{cc}\, U \oplus L$ sobre los subespacios $\mathrm{cc}\, U$ y L están dadas por

$$x \to x - (\alpha_1^x x_1 + \ldots + \alpha_m^x x_m) \text{ y } x \to \alpha_1^x x_1 + \ldots + \alpha_m^x x_m,$$

respectivamente.

La proyección $x \to \alpha_1^x x_1 + \ldots + \alpha_m^x x_m$ es continua en X, pues es la composición de la función continua $f : X \to X/\mathrm{cc}\, U$, definida por

$$f(x) = x + \mathrm{cc}\, U,$$

con el homeomorfismo $g : X/\mathrm{cc}\, U \to L$ dado por

$$g(\alpha_1(x_1 + \mathrm{cc}\, U) + \ldots + \alpha_m(x_m + \mathrm{cc}\, U)) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m.$$

Por lo tanto, $x \to x - (\alpha_1^x x_1 + \ldots + \alpha_m^x x_m)$ también es continua en X.

Como las proyecciones de X sobre $\operatorname{cc} U$ y L son continuas, la función $h : \operatorname{cc} U \oplus L \to \operatorname{cc} U \times L$ definida por

$$h\,(y + l) = (y, l)$$

es un homeomorfismo.

También, por el Lema 1.5.6 tenemos que

$$h\,(U) = \operatorname{cc} U \times (U \cap L)\,. \tag{3.2}$$

Como L es un subespacio de X, $\operatorname{cc} L = L$. Por lo tanto,

$$\operatorname{cc}(U \cap L) \subseteq \operatorname{cc} U \cap \operatorname{cc} L = \operatorname{cc} U \cap L = \{0\}\,,$$

ya que $X = \operatorname{cc} U \oplus L$. Entonces, $\operatorname{cc}(U \cap L) = \{0\}$. Consideremos el cono característico de $U \cap L$ en L, $\operatorname{cc}_L(U \cap L)$. Como $\operatorname{cc}_L(U \cap L) \subseteq \operatorname{cc}(U \cap L)$, $\operatorname{cc}_L(U \cap L) = \{0\}$.

Por otra parte, como U y L son convexos y U es cerrado en X, $U \cap L$ es convexo y cerrado en L. Y ya que $0 \in \operatorname{int} U \cap L \subseteq U \cap L$ e $\operatorname{int} U \cap L$ es abierto en L, $0 \in \operatorname{int}_L(U \cap L)$. Por lo tanto $\operatorname{int}_L(U \cap L) \neq \emptyset$, y $U \cap L$ es un cuerpo convexo cerrado en L.

Así, tenemos que $U \cap L$ e $\mathbb{I}^m$ son cuerpos convexos cerrados en L y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Además, $\operatorname{cc}_L(U \cap L) = \{0\}$ y $\operatorname{cc}(\mathbb{I}^m) = \{0\}$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces, de la Proposición 3.0.1 se sigue que $(L, U \cap L) \cong (\mathbb{R}^m, \mathbb{I}^m)$.

Finalmente, por (3.2) tenemos que

$$(X, U) \cong (\operatorname{cc} U \times L, \operatorname{cc} U \times (U \cap L)).$$

Entonces, $(X, U) \cong (\operatorname{cc} U \times \mathbb{R}^m, \operatorname{cc} U \times \mathbb{I}^m)$. $\square$

Definición 3.0.4. Sean f una funcional lineal, continua y no constante definida en un espacio topológico vectorial X, y $c \in \mathbb{R}$. El conjunto

$$\{x \in X \mid f\,(x) \geq c\}$$

será llamado un semiespacio cerrado de X.

Lema 3.0.5. *Sean f una funcional lineal, continua y no constante definida en un espacio topológico vectorial X, $c \in \mathbb{R}$ y M el semiespacio cerrado $\{x \in X \mid f\,(x) \geq c\}$. Entonces, $M \cong \ker f \times \mathbb{R}^+$.*

Demostración. Ya que f no es constante en X, existe $y_0 \in X$ tal que $f(y_0) \neq 0$. Entonces, si denotamos $y = \frac{y_0}{f(y_0)}$, se tiene que $f(y) = 1$.

Definimos $h : M \to \ker f \times \mathbb{R}^+$ como $f(x) = (x - f(x)\, y, f(x) - c)$. Así, h está bien definida, porque f es lineal y $f(y) = 1$. Además, h es continua.

Por último, notemos que $h^{-1} : \ker f \times \mathbb{R}^+ \to M$, definida como $h^{-1}(z,t) = z + (c+t)\, y$, es la función inversa de h y es continua. Así, concluimos que h es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 3.0.6. *Sea U un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial separable X. Si $\mathrm{cc}U$ es un subespacio vectorial de X de codimensión ∞, entonces existe un semiespacio cerrado X^+ de X tal que $(X,U) \cong (X, X^+)$.*

Demostración. Como U es un cuerpo convexo en X, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in \operatorname{int} U$.

Paso 1. Existe Y un subespacio vectorial de codimensión 1 de X tal que $\mathrm{cc}\, U \subseteq Y$.

Sea B una base para $\mathrm{cc}\, U$. Ésta puede completarse a una base B_1 de X. Ya que $\mathrm{cc}\, U$ tiene codimensión ∞, $\mathrm{cc}\, U \subsetneq X$. Así, existe $b \in B_1 \setminus B$. Definamos $Y = \operatorname{span}(B_1 \setminus \{b\})$. Entonces $\mathrm{cc}\, U \subseteq Y$ y Y tiene codimensión 1, ya que $\{b + Y\}$ es una base para X/Y.

Paso 2. Existe una pseudonorma no completa w en Y.

Sea $A = Y \cap U \cap (-U)$. Como U es convexo y Y es un subespacio de X, A es convexo. Además, ya que $0 \in \operatorname{int} U$, entonces $0 \in \operatorname{int}(-U)$, y por lo tanto 0 está en el interior de A con respecto a Y. Así, como A es simétrico con respecto al origen, la funcional de Minkoswki w_A es una pseudonorma en Y.

Sea $f : Y_{w_A} \to Y/\mathrm{cc}\, U$ definida por $f([x]) = x + \mathrm{cc}\, U$, donde Y_{w_A} es el espacio definido en la sección 1.7. Debido a que $X/\mathrm{cc}\, U$ tiene dimensión algebraica ∞ y X/Y tiene dimensión algebraica 1, $Y/\mathrm{cc}\, U$ tiene dimensión algebraica ∞. Entonces, ya que f es un isomorfismo de espacios vectoriales (Apéndice iii.iii), Y_{w_A} tiene dimensión algebraica ∞. Además, Y es separable, pues X lo es, y teníamos que la función de Y en Y_{w_A}, dada por $x \to [x]$, es continua y suprayectiva. Por lo tanto, Y_{w_A} es separable y, por el Corolario 1.7.5.1, existe una pseudonorma no completa w en Y tal que

$$\{x \in Y \mid w(x) = 0\} = \{x \in Y \mid w_A(x) = 0\}.$$

Paso 3. $\mathrm{cc}\, U = \{x \in Y \mid w(x) = 0\}$.

Sea $x \in \operatorname{cc} U \subseteq Y$. Entonces $\mathbb{R}^+ x \subseteq U$, debido a la Proposición 1.5.3 y a que $0 \in U$. Además, ya que $\operatorname{cc} U$ es un subespacio, $-x \in \operatorname{cc} U$ y $\mathbb{R}^+ x \subseteq -U$. Así, $\mathbb{R}^+ x \subseteq A$ y esto implica que $w_A(x) = 0$. Recíprocamente, si $w_A(x) = 0$, entonces $\mathbb{R}^+ x \subseteq A$, porque A es convexo. Como $A \subseteq U$, $\mathbb{R}^+ x \subseteq U$, y así $x \in \operatorname{cc} U$. Por lo tanto, $\operatorname{cc} U = \{x \in Y \mid w_A(x) = 0\}$, y concluimos que

$$\operatorname{cc} U = \{x \in Y \mid w(x) = 0\}. \tag{3.3}$$

Paso 4. Existe un homeomorfismo $h : X \to Y \times \mathbb{R}$.

Consideremos $\{b + Y\}$ una base para X/Y. Sea $x \in X$. Entonces

$$x + Y = \alpha_x b + Y \text{ para algún } \alpha_x \in \mathbb{R} \text{ único}, \tag{3.4}$$

y así $x - \alpha_x b \in Y$. Definamos $h : X \to Y \times \mathbb{R}$ como $h(x) = (x - \alpha_x b, \alpha_x)$. De esta manera, h es continua, y ya que su función inversa $h^{-1} : Y \times \mathbb{R} \to X$, definida como $h^{-1}(y,t) = y + tb$, también es continua, se concluye que h es un homeomorfismo.

Paso 5. El conjunto $V = \{(y,t) \in Y \times \mathbb{R} \mid w(y) + |t| \leq 1\}$ cumple que $(Y \times \mathbb{R}, V) \cong (X, U)$.

Denotemos los conjuntos

$$V_1 = \{x \in Y \mid w(x) \leq 1\}, \quad V = \{(y,t) \in Y \times \mathbb{R} \mid w(y) + |t| \leq 1\},$$

$$\partial^+ V = \{(y,t) \in \partial V \mid t \geq 0\}, \quad \partial^- V = \{(y,t) \in \partial V \mid t \leq 0\},$$

donde ∂V es la frontera de V en $Y \times \mathbb{R}$. Notemos que V es cerrado en $Y \times \mathbb{R}$, ya que es la imagen inversa de $(-\infty, 1] \subseteq \mathbb{R}$ bajo una función continua. Entonces $\partial V \subseteq V$.

Sea $g : \partial V \to V_1$ definida por $g(y,t) = y$. Observemos que g está bien definida ya que, si $(y,t) \in \partial V \subseteq V$, entonces $w(y) + |t| \leq 1$, por lo que $w(y) \leq 1$ y $y \in V_1$. Denotemos $g_1 = g \restriction_{\partial^+ V}$.

Tenemos que $g_1 : \partial^+ V \to V_1$ es continua, porque es restricción de la proyección de $Y \times \mathbb{R}$ sobre Y. Sea $g_1^{-1} : V_1 \to \partial^+ V$ dada por $g_1^{-1}(x) = (x, 1 - w(x))$. Entonces

$$g_1^{-1} \text{ está bien definida y es la inversa de } g_1. \qquad \text{(Apéndice iii.iv)}$$

g_1^{-1} es continua, y así $g_1 : \partial^+ V \to V_1$ es un homeomorfismo.

Por otra parte, V es convexo y tiene interior no vacío en $Y \times \mathbb{R}$, ya que $\{(y,t) \in Y \times \mathbb{R} \mid w(y) + |t| < 1\}$ es abierto en $Y \times \mathbb{R}$. Entonces, V es un cuerpo convexo cerrado en $Y \times \mathbb{R}$, y ya que U es un cuerpo convexo cerrado en X y

$$\operatorname{cc} V = h(\operatorname{cc} U), \qquad \text{(Apéndice iii.v)}$$

por la Proposición 3.0.1 tenemos que

$$(Y \times \mathbb{R}, V) \cong (X, U). \tag{3.5}$$

Paso 6. La función w_V es una pseudonorma no completa en $Y \times \mathbb{R}$.

Como V es simétrico con respecto al origen, w_V es una pseudonorma en $Y \times \mathbb{R}$. Notemos que para cada $(y, s) \in Y \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} w_V(y, s) &= \text{ínf}\left\{t > 0 \mid \frac{1}{t}(y, s) \in V\right\} = \text{ínf}\left\{t > 0 \mid \frac{1}{t} w(y) + \frac{1}{t}|s| \leq 1\right\} \\ &= \text{ínf}\{t > 0 \mid w(y) + |s| \leq t\} = w(y) + |s|. \end{aligned}$$

Así, como w es una pseudonorma no completa, existe una sucesión (y_n) en Y tal que

$$\lim_{n,m\to\infty} w(y_n - y_m) = 0 \text{ y, para cada } y \in Y, \lim_{n\to\infty} w(y_n - y) \neq 0.$$

Entonces, la sucesión $((y_n, 0))$ en $Y \times \mathbb{R}$ cumple que

$$\lim_{n,m\to\infty} w_V((y_n, 0) - (y_m, 0)) = 0 \text{ y,}$$

$$\text{para cada } (y, t) \in Y \times \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} w_V((y_n, 0) - (y, t)) \neq 0.$$

De este modo, w_V es no completa.

Paso 7. Existen homeomorfismos

$$\boldsymbol{f_1 : Y \setminus \operatorname{cc} U \to Y \text{ y } f_2 : (Y \times \mathbb{R}) \setminus h(\operatorname{cc} U) \to Y \times \mathbb{R}.}$$

De (3.3) se tiene que $w(x) = 0$ para cada $x \in \operatorname{cc} U$. Así, $\operatorname{cc} U$ es completo con respecto a w, pues $\lim_{n\to\infty} w(x_n - x) = 0$ para toda sucesión (x_n) en $\operatorname{cc} U$ y $x \in \operatorname{cc} U$. Y ya que $\operatorname{cc} U \subseteq Y$,

$$h(\operatorname{cc} U) = \{(x, 0) \in Y \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{cc} U\}. \tag{3.6}$$

Entonces $w_V(x,0) = w(x) = 0$ para cada $(x,0) \in h(\operatorname{cc} U)$, y $h(\operatorname{cc} U)$ es completo con respecto a w_V. Además, tenemos que

$$\operatorname{cc} U \text{ y } h(\operatorname{cc} U) \text{ son cerrados con respecto a } w \text{ y } w_V, \qquad \text{(Apéndice iii.vi)}$$

respectivamente. Por lo tanto, debido al Teorema 1.7.4, existen homeomorfismos $f_1 : Y \backslash \operatorname{cc} U \to Y$ y $f_2 : (Y \times \mathbb{R}) \backslash h(\operatorname{cc} U) \to Y \times \mathbb{R}$ tales que

$$f_1(y) = y \text{ si } d_w(y, \operatorname{cc} U) \geq 1, \quad f_2(y,t) = (y,t) \text{ si } d_{w_V}((y,t), h(\operatorname{cc} U)) \geq 1.$$

Por otra parte

$$f_2(V \backslash h(\operatorname{cc} U)) = V, \qquad \text{(Apéndice iii.vii)}$$

y así

$$((Y \times \mathbb{R}) \backslash h(\operatorname{cc} U), V \backslash h(\operatorname{cc} U)) \cong (Y \times \mathbb{R}, V). \tag{3.7}$$

Paso 8. Existen homeomorfismos

$$\boldsymbol{f_3 : \partial V \backslash (z_0 + h(\operatorname{cc} U)) \to Y,\ f_4 : \partial V \backslash (z_0 + h(\operatorname{cc} U)) \to \partial V}$$

$$\textbf{y} \quad \boldsymbol{f_5 : \partial V \to Y}.$$

Consideremos $z_0 = (0,1) \in Y \times \mathbb{R}$ y $f_3 : \partial V \backslash (z_0 + h(\operatorname{cc} U)) \to Y$ definida como

$$f_3(y,t) = \begin{cases} \frac{g(y,t)}{w(g(y,t))^2} & \text{si } (y,t) \in \partial^+ V, \\ g(y,t) & \text{si } (y,t) \in \partial^- V. \end{cases}$$

Como $\operatorname{cc} U = \{x \in Y \mid w(x) = 0\}$, si $y \in \operatorname{cc} U \subseteq V_1$ entonces

$$g_1^{-1}(y) = (y, 1 - w(y)) = (y,1) \in z_0 + h(\operatorname{cc} U),$$

debido a la ecuación (3.6). Así, para cada $(y,t) \in \partial^+ V \backslash (z_0 + h(\operatorname{cc} U))$ se tiene que $g(y,t) = g_1(y,t) = y \notin \operatorname{cc} U$, y así $w(g(y,t)) \neq 0$. Entonces, como además f_3 se pega bien, está bien definida.

Asimismo, es fácil ver que $f_3^{-1} : Y \to \partial V \backslash (z_0 + h(\operatorname{cc} U))$ dada por

$$f_3^{-1}(y) = \begin{cases} (y, w(y) - 1) & \text{si } w(y) \leq 1, \\ \left(\frac{y}{w(y)^2}, 1 - \frac{w(y)}{w(y)^2}\right) & \text{si } w(y) \geq 1 \end{cases}$$

está bien definida y es la función inversa de f_3. Por el Lema del pegado f_3 y f_3^{-1} son continuas, por lo que f_3 es un homeomorfismo.

Ahora, definamos $f_4 : \partial V \setminus (z_0 + h(\mathrm{cc}\, U)) \to \partial V$ como

$$f_4(y,t) = \begin{cases} g_1^{-1}(f_1(g_1(y,t))) & \text{si } (y,t) \in \partial^+ V, \\ (y,t) & \text{si } (y,t) \in \partial^- V. \end{cases}$$

Como $g_1 : \partial^+ V \to V_1$ es un homeomorfismo y $f_1(y) = y$ para todo y con $d_w(y, \mathrm{cc}\, U) \geq 1$, es fácil concluir que f_4 está bien definida y es un homeomorfismo.

Por lo tanto, $f_5 : \partial V \to Y$ definida como la composición $f_5 = f_3 \circ f_4^{-1}$ es también un homeomorfismo.

Paso 9. Existe un semiespacio cerrado $\boldsymbol{X^+}$ de $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{(X,U) \cong (X,X^+)}$.

Por la Proposición 3.0.2 tenemos que

$$((Y \times \mathbb{R}) \setminus \mathrm{cc}\, V, V \setminus \mathrm{cc}\, V) \cong (\partial V \times \mathbb{R}, \partial V \times \mathbb{R}^+).$$

Entonces, debido a (3.5) y (3.7) y a que $h(\mathrm{cc}\, U) = \mathrm{cc}\, V$, concluimos que

$$\begin{aligned}(X,U) \cong (Y \times \mathbb{R}, V) &\cong ((Y \times \mathbb{R}) \setminus h(\mathrm{cc}\, U), V \setminus h(\mathrm{cc}\, U)) \\ &= ((Y \times \mathbb{R}) \setminus \mathrm{cc}\, V, V \setminus \mathrm{cc}\, V) \\ &\cong (\partial V \times \mathbb{R}, \partial V \times \mathbb{R}^+),\end{aligned}$$

y como $f_5 : \partial V \to Y$ y $h : X \to Y \times \mathbb{R}$ son homeomorfismos,

$$(\partial V \times \mathbb{R}, \partial V \times \mathbb{R}^+) \cong (Y \times \mathbb{R}, Y \times \mathbb{R}^+) \cong (X, h^{-1}\left(Y \times \mathbb{R}^+\right)).$$

Así, $(X,U) \cong (X, h^{-1}(Y \times \mathbb{R}^+))$, y

$$h^{-1}\left(Y \times \mathbb{R}^+\right) = \left\{y + tb \mid (y,t) \in Y \times \mathbb{R}^+\right\} = Y + \mathbb{R}^+ b$$

es el semiespacio cerrado $\{x \in X \mid j(x) \geq 0\}$, donde $j : X \to \mathbb{R}$ está definida por $j(x) = \alpha_x$. Recordemos que, para cada $x \in X$, α_x es el único escalar que satisface (3.4). $\square$

Lema 3.0.7. *Sea U un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial X. La función $f : \mathrm{int} U \times X \to \mathbb{R}$ definida como $f(u,x) = w_{U-u}(x)$ es continua.*

Demostración. Notemos que para cada $u \in \mathrm{int}\, U$,

$$0 = u - u \in \mathrm{int}\, U - u = \mathrm{int}\,(U - u).$$

Además, $U-u$ es un cuerpo convexo cerrado en X.

Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Veamos que los conjuntos

$$A=\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid w_{U-u}(x)<a\}\quad\text{y}$$

$$B=\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid w_{U-u}(x)>b\}$$

son abiertos en $\operatorname{int}U\times X$.

Si $a\le 0$, $A=\emptyset$. Si $a>0$, como $0\in\operatorname{int}(U-u)$ y $U-u$ es convexo y cerrado para cada $u\in\operatorname{int}U$, se tiene que

$$\begin{aligned}A&=\left\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid w_{U-u}\left(\frac{1}{a}x\right)<1\right\}\\&=\left\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid \frac{1}{a}x\in\operatorname{int}(U-u)\right\}\\&=\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid x+au\in\operatorname{int}(aU)\}\,.\end{aligned}$$

Así, A es abierto en $\operatorname{int}U\times X$, pues la función $(u,x)\to x+au$ es continua e $\operatorname{int}(aU)$ es abierto en X.

Por otra parte, si $b<0$, $B=\operatorname{int}U\times X$. Supongamos que $b=0$. Se cumple que $\operatorname{cc}U$ es cerrado en X, ya que U es cerrado en X. Y como se tiene $\operatorname{cc}(U-u)=\operatorname{cc}U$ para toda $u\in\operatorname{int}U$, entonces, por la Proposición 1.6.3, $B=\operatorname{int}U\times X\backslash\operatorname{cc}U$, que es abierto en $\operatorname{int}U\times X$. Por último, si $b>0$,

$$\begin{aligned}B&=\left\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid w_{U-u}\left(\frac{1}{b}x\right)>1\right\}\\&=\left\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid \frac{1}{b}x\notin U-u\right\}\\&=\{(u,x)\in\operatorname{int}U\times X\mid x+bu\in X\backslash bU\}\,.\end{aligned}$$

Así, en cualquier caso B es abierto en $\operatorname{int}U\times X$.

Por lo tanto, $f^{-1}((b,a))=A\cap B$ es abierto en $\operatorname{int}U\times X$, y concluimos que f es continua. □

Proposición 3.0.8. *Sea U un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial X. Si $\operatorname{cc}U$ no es un subespacio vectorial de X, entonces existe un semiespacio cerrado X^+ de X tal que $(X,U)\cong(X,X^+)$.*

Demostración. **Paso 1. Existen $y\in\operatorname{cc}U$ tal que $(-1,\infty)\,y\subseteq\operatorname{int}U$ y $g:X\to\mathbb{R}$ tal que $g(-y)\le g(x)$ para cada $x\in U$.**

U es un cuerpo convexo en X, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in \operatorname{int} U$. Ya que $\operatorname{cc} U$ no es un subespacio vectorial de X, por el Lema 1.5.5 existe $y \in \operatorname{cc} U$ tal que $-y \in \partial U$. Y como $0 \in U$ y $y \in \operatorname{cc} U$, debido a la Proposición 1.5.3 tenemos que $\mathbb{R}^+ y \subseteq U$. Así, por el Lema 1.6.4, $(-1, \infty)\, y \subseteq \operatorname{int} U$.

Además, de que U es un cuerpo convexo cerrado en X se sigue que $\partial U = \operatorname{Supp} U$, por lo que existe $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua que soporta a U en $-y$. Como $0 \in \operatorname{int} U$, $0 \notin \operatorname{Supp} U$ y entonces $0 = f(0) < f(-y)$. Por lo tanto, podemos suponer que $f(-y) = 1$ (en otro caso, multiplicamos a f por $\frac{1}{f(-y)}$). Consideremos la funcional $g = -f$. Así, g es lineal y continua y cumple que $-1 = g(-y) \leq g(x)$ para cada $x \in U$. Sea $Z = \{x \in X \mid g(x) = -1\}$.

Paso 2. Definiciones de los conjuntos V, W y R_z y de las funciones w_W y c.

Sea $V = \frac{1}{2} U$. Notemos que entonces V es convexo y cerrado en X y el Lema 1.6.4 implica que $V \subseteq \operatorname{int} U$. Además, $0 = \frac{1}{2} 0 \in \frac{1}{2} \operatorname{int} U = \operatorname{int} V$, y así V es un cuerpo convexo cerrado en X. Esto implica que $W = V \cap (-V) \cap \ker g$ es un cuerpo convexo cerrado en $\ker g$ tal que $0 \in \operatorname{int}_{\ker g} W$ y, por lo tanto, la funcional de Minkowski $w_W : \ker g \to \mathbb{R}^+$ es continua.

Definimos $c : Z \to \mathbb{R}^+ y$ como $c(z) = w_W(z + y)\, y$. Si $z \in Z$, $g(z + y) = -1 + 1 = 0$, por lo que $z + y \in \ker g$ y c está bien definida. Además, c es continua y $c(Z) \subseteq \operatorname{int} V$, pues ya teníamos que $(-1, \infty)\, y \subseteq \operatorname{int} U$ y $\mathbb{R}^+ y = \frac{1}{2} \mathbb{R}^+ y \subseteq \frac{1}{2} \operatorname{int} U = \operatorname{int} V$.

Para cada $z \in Z$, sea $R_z = c(z) + (0, \infty)(z - c(z))$.

Paso 3. Los rayos R_z, con $z \in Z$, son ajenos dos a dos.

Sea $x \in X$. Queremos ver bajo qué condiciones el punto x pertenece a R_z para alguna $z \in Z$. Supongamos que $z \in Z$ y $t \in (0, \infty)$ son tales que $x = c(z) + t(z - c(z))$. Entonces, $x = tz + (1 - t)\, c(z)$ y

$$\begin{aligned} x - g(x)\, y + g(x)\, y &= tz + (1 - t)\, w_W(z + y)\, y \\ &= t(z + y) + ((1 - t)\, w_W(z + y) - t)\, y. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ya que $z + y \in \ker g$ y $g(y) = 1$, aplicando g a la ecuación anterior se tiene que

$$g(x) = (1 - t)\, w_W(z + y) - t, \tag{3.9}$$

y de esto y (3.8) se sigue que

$$x - g(x)\, y = t(z + y). \tag{3.10}$$

Así, $z + y = \frac{1}{t}\left(x - g\left(x\right)y\right)$ y, sustituyendo en (3.9),

$$g\left(x\right) = \left(\frac{1}{t} - 1\right) w_W\left(x - g\left(x\right)y\right) - t.$$

Entonces, tenemos que

$$t^2 + t\left(g\left(x\right) + w_W\left(x - g\left(x\right)y\right)\right) - w_W\left(x - g\left(x\right)y\right) = 0. \tag{3.11}$$

Por lo tanto, si $t \in (0, \infty)$ es tal que $x = c\left(z\right) + t\left(z - c\left(z\right)\right) \in R_z$ para alguna $z \in Z$, t es una raíz de la ecuación cuadrática (3.11) (la cual no depende de z).

Si $w_W\left(x - g\left(x\right)y\right) > 0$, se tiene que el término independiente de (3.11) es negativo y su coeficiente cuadrático es 1. Esto implica que tiene dos soluciones reales, una negativa y una positiva. Si $w_W\left(x - g\left(x\right)y\right) = 0$ y $g\left(x\right) < 0$, las soluciones de (3.11) son 0 y $-g\left(x\right) > 0$. Finalmente, si $w_W\left(x - g\left(x\right)y\right) = 0$ y $g\left(x\right) \geq 0$, las soluciones de (3.11) son 0 y $-g\left(x\right) \leq 0$, y entonces no tiene raíces positivas. Notemos que en este caso $x - g\left(x\right)y \in \operatorname{cc} W$ (debido a la Proposición 1.6.3), y $x \in \operatorname{cc} W + g\left(x\right)y \subseteq \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$.

De esta manera, la ecuación (3.11) tiene exactamente una raíz positiva, o no tiene raíces positivas y $x \in \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$. Así, si $x \in R_{z_1} \cap R_{z_2}$ para algunos $z_1, z_2 \in Z$, entonces

$$x = c\left(z_1\right) + t_1\left(z_1 - c\left(z_1\right)\right) = c\left(z_2\right) + t_2\left(z_2 - c\left(z_2\right)\right)$$

para algunos $t_1, t_2 \in (0, \infty)$. Por lo anterior, se tiene que t_1 y t_2 son ambos raíces positivas de (3.11), y por lo tanto $t_1 = t_2$. Esto implica que $x - g\left(x\right)y = t_1\left(z_1 + y\right) = t_1\left(z_2 + y\right)$ (debido a la ecuación (3.10)), y así $z_1 = z_2$ y $R_{z_1} = R_{z_2}$. Concluimos que los rayos R_z, con $z \in Z$, son ajenos dos a dos.

Paso 4. Definición de las funciones $\tilde{z}$ y $\tilde{t}$.

De lo anterior se sigue que podemos definir las funciones $\tilde{z} : \bigcup_{z \in Z} R_z \to Z$ y $\tilde{t} : \bigcup_{z \in Z} R_z \to (0, \infty)$ como

$$\tilde{z}\left(x\right) = z \quad \text{y} \quad \tilde{t}\left(x\right) = t \quad \text{si} \quad x = c\left(z\right) + t\left(z - c\left(z\right)\right).$$

Además, ya que para cada $x \in \bigcup_{z \in Z} R_z$ se tiene que $\tilde{t}\left(x\right)$ es una solución de la ecuación cuadrática (3.11), $\tilde{t}$ puede escribirse en términos de las funciones continuas g y w_W, y así $\tilde{t}$ es continua. De igual forma, $\tilde{z}$ puede escribirse en términos de g, w_W y $\tilde{t}$ (debido a (3.10)), por lo que es también continua.

Paso 5. $\boldsymbol{X \setminus \bigcup_{z \in Z} R_z = \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y}$.

Si $x \in X \backslash \bigcup_{z \in Z} R_z$, la ecuación (3.11) no tiene soluciones positivas (si tuviera una solución $t_0 \in (0, \infty)$, se tiene que $z_0 = \frac{1}{t_0}(x - g(x)\, y) - y \in Z$, pues cumple que $g(z_0) = -1$, y debido a que t_0 satisface (3.11) y a las cuentas anteriores, $x = c(z_0) + t_0(z_0 - c(z_0)) \in R_{z_0}$). Entonces, $x \in \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$, $x - ry \in \operatorname{cc} W$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$. Ya que $\operatorname{cc} W \subseteq \ker g$ (pues $W \subseteq \ker g$), $0 = g(x - ry) = g(x) - r$. Así, $r = g(x)$ y $x - g(x)\, y \in \operatorname{cc} W$. Por lo tanto, por la Proposición 1.6.3, $w_W(x - g(x)\, y) = 0$. Esto y el hecho de que $g(x) = r \geq 0$ implican que (3.11) no tiene soluciones positivas, y entonces $x \notin \bigcup_{z \in Z} R_z$. Así, concluimos que

$$X \backslash \bigcup_{z \in Z} R_z = \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y.$$

Paso 6. Definición de las funciones u y v.

Para $z \in Z$, definimos

$$u(z) = c(z) + \frac{1}{w_{U - c(z)}(z - c(z))}(z - c(z))$$

$$\text{y} \quad v(z) = c(z) + \frac{1}{w_{V - c(z)}(z - c(z))}(z - c(z)).$$

Si $z \in Z$, teníamos que $c(z) \in \operatorname{int} V \subseteq \operatorname{int} U$. Entonces, $0 \in \operatorname{int}(V - c(z)) \subseteq \operatorname{int}(U - c(z))$, y $V - c(z)$ y $U - c(z)$ son cuerpos convexos cerrados en X. Además, si $z \notin U$, se tiene que $z \notin \operatorname{int} U$. Y si $z \in U$, como $f(z) = f(-y)$ y f soporta a U en $-y$, $z \in \operatorname{Supp} U = \partial U$. En cualquier caso, $z \notin \operatorname{int} U$, y así $z - c(z) \notin \operatorname{int}(U - c(z))$. Por lo tanto, $z - c(z) \notin \operatorname{int}(V - c(z))$. Esto y el Lema 1.6.4 implican que

$$\mathbb{R}^+(z - c(z)) \nsubseteq U - c(z) \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^+(z - c(z)) \nsubseteq V - c(z).$$

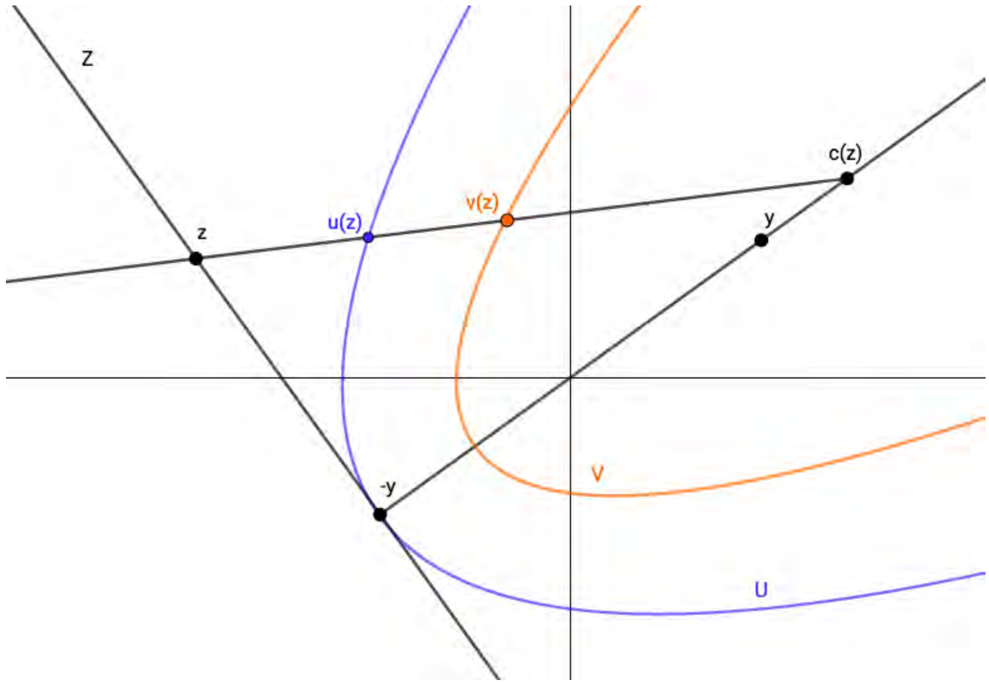
Así, usando la Proposición 1.6.3, tenemos que $w_{U - c(z)}(z - c(z)) > 0$ y $w_{V - c(z)}(z - c(z)) > 0$, por lo que u y v están bien definidas.

Notemos que, para cada $z \in Z$,

$$v(z) - c(z) \in \partial(V - c(z)) \quad \text{y} \quad u(z) - c(z) \in \partial(U - c(z)).$$

Entonces, $v(z) \in \partial V \subseteq V$ y $u(z) \in \partial U \subseteq U$, y de que $V = \frac{1}{2} U$ y el Lema 1.6.5 se sigue que

$$(c(z); v(z)] \subseteq (c(z); u(z)] \subseteq (c(z); z] \subseteq R_z,$$



$$R_z \backslash (c(z)\,;\, v(z)] \subseteq X \backslash V \quad \text{y} \quad R_z \backslash (c(z)\,;\, u(z)] \subseteq X \backslash U.$$

Es decir, $v(z)$ y $u(z)$ son los "últimos" puntos en el rayo R_z que pertenecen a V y U, respectivamente.

Paso 7. Definición de las funciones j, G y H.

Sean $M = \{(a,b,c,d) \in (0,\infty)^4 \mid b < c\}$ y $F : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(a,b,c,d) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b, \\ b + \frac{d-b}{c-b}(a-b) & \text{si } b \leq a \leq c, \\ a + d - c & \text{si } c \leq a. \end{cases}$$

Tenemos que F se pega bien, cada una de las tres funciones es continua en su dominio, y estos dominios son cerrados en M. Por el Lema del pegado, F es continua.

Sea $j : \bigcup_{z \in Z} R_z \to M$ definida por

$$j(x) = \left(\tilde{t}(x)\,, \frac{1}{w_{V-c(\tilde{z}(x))}\left(\tilde{z}(x) - c(\tilde{z}(x))\right)}, \frac{1}{w_{U-c(\tilde{z}(x))}\left(\tilde{z}(x) - c(\tilde{z}(x))\right)}, 1\right).$$

La continuidad de j se sigue de que c, $\tilde{t}$ y $\tilde{z}$ son continuas y del Lema 3.0.7, ya que $c(\tilde{z}(x)) \in \operatorname{int} V \subseteq \operatorname{int} U$ para cada $x \in \bigcup_{z \in Z} R_z$.

Ahora definimos la función $G : \bigcup_{z\in Z} R_z \to \bigcup_{z\in Z} R_z$ de tal forma que, en cada rayo R_z, G es la identidad en $(c(z); v(z)]$, en $[v(z); u(z)]$ es el homeomorfismo afín que manda este segmento a $[v(z); z]$, y en $u(z) + (0,\infty)(z - c(z))$ es la traslación que suma $z - u(z)$ a cada elemento. Es decir,

$$G(x) = c(\tilde{z}(x)) + F(j(x))(\tilde{z}(x) - c(\tilde{z}(x))).$$

Notemos que entonces G es continua, pues c, $\tilde{z}$, F y j lo son. Además, como $V \cap R_z \subseteq (c(z); v(z)]$ para cada $z \in Z$, tenemos que G es la identidad en $V \cap \left(\bigcup_{z\in Z} R_z\right)$.

Sea $H : X \to X$ definida como

$$H(x) = \begin{cases} G(x) & \text{si } x \in \bigcup_{z\in Z} R_z, \\ x & \text{si } x \in \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y. \end{cases}$$

Ya que $X \backslash \bigcup_{z\in Z} R_z = \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$, H está bien definida. Y como G es la identidad en $V \cap \left(\bigcup_{z\in Z} R_z\right)$, H es la identidad en V.

Paso 8. La función H es continua en X.

Si $x \in \operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$, entonces $x = w + ry$ para algunos $w \in \operatorname{cc} W$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Sea $s \in \mathbb{R}^+$. De la Proposición 1.5.3 se tiene que

$$sx \in sw + \mathbb{R}^+ y \subseteq W + \mathbb{R}^+ y \subseteq V,$$

pues $w \in \operatorname{cc} W$, $y \in \operatorname{cc} V$ y $W \subseteq V$. Así, $\mathbb{R}^+ x \subseteq V$ y, por el Lema 1.6.4, esto implica que $x \in \operatorname{int} V$. Concluimos que $\operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y \subseteq \operatorname{int} V$.

Por lo tanto, H es continua en $\operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y$, ya que este conjunto está contenido en el interior de V y H es la identidad en V. Y como G es continua, H es continua en $\operatorname{int}\left(\bigcup_{z\in Z} R_z\right)$.

Sea $x \in \bigcup_{z\in Z} R_z \backslash \operatorname{int}\left(\bigcup_{z\in Z} R_z\right)$. Entonces $x \in \overline{\operatorname{cc} W + \mathbb{R}^+ y} \subseteq \overline{V} = V$, y esto implica que $H(x) = G(x) = x$. Sea A un abierto en X tal que $x \in A$. Como G es continua, existe un abierto B de X tal que $x \in B$ y

$$G\left(B \cap \left(\bigcup_{z\in Z} R_z\right)\right) \subseteq A.$$

Por lo tanto, $x \in A \cap B$ y $H(A \cap B) \subseteq A$, y así se tiene que H es continua en x. Concluimos que H es continua en X.

Paso 9. La función H es un homeomorfismo y $H(U)$ es un semiespacio cerrado.

Es claro que H es biyectiva; H^{-1} se define como la identidad en $\mathrm{cc}\, W + \mathbb{R}^+ y$ y, en cada rayo R_z, es la identidad en $(c(z); v(z)]$, en $[v(z); z]$ es el homeomorfismo afín que manda este segmento a $[v(z); u(z)]$, y en $z + (0,\infty)(z - c(z))$ es la traslación que suma $u(z) - z$ a cada elemento. Por el paso anterior H es continua, y análogamente se tiene que H^{-1} es continua. Así, H es un homeomorfismo, y $(X, U) \cong (X, H(U))$.

Por último, ya que $c(Z) \subseteq \mathbb{R}^+ y$, entonces $g(c(Z)) \subseteq \mathbb{R}^+ g(y) = \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, debido a que $g(Z) = \{-1\}$,

$$g((c(z); z]) \subseteq [-1, \infty) \quad \text{y} \quad g(z + (0,\infty)(z - c(z))) \subseteq (-\infty, -1).$$

Esto implica que $H(U)$ es el semiespacio cerrado $\{x \in X \mid g(x) \geq -1\}$, pues teníamos que $g(x) \geq -1$ para cada $x \in U$. $\square$

3.1. Resumen del capítulo

Concluimos de las Proposiciones 3.0.3, 3.0.6 y 3.0.8 de esta sección que si U es un cuerpo convexo cerrado en un espacio topológico vectorial X, entonces:

1. Si existe m natural tal que $\mathrm{cc}\, U$ es un subespacio vectorial de X de codimensión m, entonces $(X, U) \cong (\mathrm{cc}\, U \times \mathbb{R}^m, \mathrm{cc}\, U \times \mathbb{I}^m)$.

2. Si X es separable y $\mathrm{cc}\, U$ es un subespacio vectorial de X de codimensión ∞, entonces existe un semiespacio cerrado X^+ de X tal que $(X, U) \cong (X, X^+)$.

3. Si $\mathrm{cc}\, U$ no es un subespacio vectorial de X, entonces existe un semiespacio cerrado X^+ de X tal que $(X, U) \cong (X, X^+)$.

El punto 2 se cumple aun cuando el espacio X no es separable. La demostración de este hecho excede los propósitos de esta tesis, puede consultarse en [1].

Capítulo 4

El Teorema de Klee

El propósito de este capítulo será probar el siguiente teorema de Klee.

Teorema 4.0.1. *Sea K un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y localmente compacto de un espacio de Banach X. Entonces existen números cardinales $0 \leq n < \aleph_0$ y $0 \leq m \leq \aleph_0$ tales que K es homeomorfo a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ o a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+$.*

4.1. Distinción topológica de los casos

En esta sección veremos que las posibilidades indicadas en el Teorema 4.0.1 son en efecto topológicamente distintas.

Proposición 4.1.1. *Sean n y m números cardinales tales que $0 < n < \aleph_0$ y $0 \leq m \leq \aleph_0$, y K_0 la compactación de Alexandroff de $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$. Entonces, toda función continua de $\mathbb{S}^k$ a K_0 es nulhomotópica si $k \in \mathbb{N}$ y $k < n$, pero existe una función continua de $\mathbb{S}^n$ a K_0 que no es nulhomotópica.*

Demostración. Existen un encaje denso $f : \mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n \to K_0$ y $p \in K_0$ tales que $K_0 \backslash f\left(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n\right) = \{p\}$.

Sea $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Entonces, $\mathbb{S}^n \backslash \{x_0\} \cong \mathbb{R}^n$. Sea $h : \mathbb{S}^n \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo.

Definimos $j : K_0 \to \mathbb{S}^n$ como

$$j(x) = \begin{cases} h^{-1}(x_2) & \text{si } x = f(x_1, x_2) \in f\left(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n\right), \\ x_0 & \text{si } x = p. \end{cases}$$

Ya que $f^{-1} : f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ y h^{-1} son continuas y $f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)$ es abierto en K_0 (pues $\{p\}$ es cerrado porque K_0 es un espacio de Hausdorff), j es continua en $f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)$. Sea U un abierto en $\mathbb{S}^n$ tal que $j(p) = x_0 \in U$. $\mathbb{S}^n \backslash U$ es cerrado en $\mathbb{S}^n$ y por lo tanto compacto. Como h y f son continuas, $f(\mathbb{I}^m \times h(\mathbb{S}^n \backslash U))$ es compacto, y así $V = K_0 \backslash f(\mathbb{I}^m \times h(\mathbb{S}^n \backslash U))$ es abierto en K_0. Además, $p \in V$ y $j(V) \subseteq U$. De esto concluimos que j es continua en p, y entonces es continua en todo K_0.

Sea $g : \mathbb{S}^n \to K_0$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(0, h(x)) & \text{si } x \in \mathbb{S}^n \backslash \{x_0\}, \\ p & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Notemos que $g(\mathbb{S}^n) = f(\{0\} \times \mathbb{R}^n) \cup \{p\}$ es cerrado en K_0 (debido a que $K_0 \backslash g(\mathbb{S}^n) = f((\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n) \backslash (\{0\} \times \mathbb{R}^n))$ es abierto en $f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)$, que es abierto en K_0) y por lo tanto es compacto. Además, $j \restriction_{g(\mathbb{S}^n)}$ es la función inversa de $g : \mathbb{S}^n \to g(\mathbb{S}^n)$. Así, ya que j es continua, $g(\mathbb{S}^n)$ es compacto y $\mathbb{S}^n$ es un espacio de Hausdorff, $j : g(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{S}^n$ es un homeomorfismo. Esto implica que g es continua.

Supongamos que g es nulhomotópica. Existe una homotopía $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to K_0$ entre g y una función constante c. Entonces, como j es continua, $j \circ H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$ es una homotopía entre la función identidad $\mathrm{Id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ y la función constante $j \circ c$. Pero esto contradice el hecho de que $\mathbb{S}^n$ no es contráctil. Por lo tanto, tenemos que $g : \mathbb{S}^n \to K_0$ es continua y no es nulhomotópica.

Ahora, sean $k \in \mathbb{N}$, $k < n$ y $q : \mathbb{S}^k \to K_0$ continua. Si ocurre que $q(\mathbb{S}^k) \subseteq f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)$, tenemos que $q(\mathbb{S}^k)$ es contráctil en $f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n) \subseteq K_0$, ya que $f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)$ es contráctil porque f es un encaje. De esto se sigue que q es nulhomotópica. Supongamos entonces que $p \in q(\mathbb{S}^k)$.

Como $j \circ q : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ es continua y $k < n$, $j \circ q$ no es suprayectiva. Así, debido a que $x_0 = j(p) \in j \circ q(\mathbb{S}^k)$, existe $y \in \mathbb{S}^n \backslash \{x_0\}$ tal que $y \notin j \circ q(\mathbb{S}^k)$. Por lo tanto, por la definición de j, $q(\mathbb{S}^k) \subseteq f(\mathbb{I}^m \times (\mathbb{R}^n \backslash \{z\})) \cup \{p\}$, donde $z = h(y) \in \mathbb{R}^n$.

Sea $J : S^k \times \mathbb{I} \to K_0$ definida como

$$J(x,t) = \begin{cases} f\left(x_1, x_2 + \frac{t}{1-t}(x_2 - z)\right) & \text{si } q(x) = f(x_1, x_2) \in f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n), \\ & \text{ y } t < 1, \\ p & \text{si } q(x) = p \text{ ó } t = 1. \end{cases}.$$

Ya que q y $f^{-1} : f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ son continuas, y además $A = q^{-1}(f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)) \times [0,1)$ es abierto en $S^k \times \mathbb{I}$, J es continua en A.

Sean $(x,t) \in \left(S^k \times \mathbb{I}\right) \setminus A$ y $((x_n,t_n))$ una sucesión en $S^k \times \mathbb{I}$ convergente a (x,t). Entonces, $q(x) = p$ ó $t = 1$. Para ver que J es continua en (x,t), basta encontrar una subsucesión de $((x_n,t_n))$ cuya imagen bajo J converja a $J(x,t) = p$. Por lo tanto, podemos suponer que $(x_n,t_n) \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $q(x_n) = f(x_1^n, x_2^n) \in f(\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Si $q(x) = p$, entonces $q(x_n) = f(x_1^n, x_2^n)$ converge a p en K_0, pues q es continua. Esto implica que $((x_1^n, x_2^n))$ no tiene subsucesiones convergentes en $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ (porque f es un encaje) y, así, ya que $\mathbb{I}^m$ es compacto, (x_2^n) no tiene subsucesiones convergentes en $\mathbb{R}^n$. De esto se sigue que la sucesión (y_n), donde $y_n = x_2^n + \frac{t_n}{1-t_n}(x_2^n - z)$ para $n \in \mathbb{N}$, tampoco tiene subsucesiones convergentes (si tuviera una subsucesión convergente (y_{n_k}), ésta sería acotada pero, como se tiene que $\|x_2^n - z\| \leq \|y_n - z\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_2^{n_k})$ sería también acotada y tendría una subsucesión convergente). Así, ya que la sucesión $(J(x_n,t_n)) = (f(x_1^n, y_n))$ tiene una subsucesión convergente (porque K_0 es compacto), el límite de esta subsucesión debe ser p.

Por otra parte, si $q(x) \neq p$ y $t = 1$, entonces t_n converge a 1 y tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{1-t_n} = \infty$. Además, $x_2^n \neq z$ para toda $n \in \mathbb{N}$ porque $q\left(\mathbb{S}^k\right) \subseteq f(\mathbb{I}^m \times (\mathbb{R}^n \setminus \{z\})) \cup \{p\}$. Y como $q\left(\mathbb{S}^k\right)$ es compacto (pues q es continua) y cerrado en K_0, $(q(x_n)) = (f(x_1^n, x_2^n))$ no tiene subsucesiones convergentes a algún elemento de $f(\mathbb{I}^m \times \{z\})$. Así, (x_2^n) no tiene subsucesiones convergentes a z. Esto y el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{1-t_n} = \infty$ implican que y_n no tiene subsucesiones convergentes. Por lo tanto, como en el caso anterior, $(J(x_n,t_n))$ tiene una subsucesión convergente a p.

De esta manera, se tiene que J es continua, y entonces es una homotopía entre q y la función c_p tal que $c_p(x) = p$ para cada $x \in \mathbb{S}^k$. Concluimos que q es nulhomotópica. □

Proposición 4.1.2. *Sean m un número cardinal tal que $0 \leq m \leq \aleph_0$ y K_0 la compactación de Alexandroff de $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+$. Entonces, K_0 es contráctil.*

Demostración. Sean $\mathrm{Cono}(\mathbb{I}^m)$ el cono de $\mathbb{I}^m$, es decir, el espacio cociente $\mathbb{I}^m \times \mathbb{I}/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $\mathbb{I}^m \times \mathbb{I}$ inducida por la partición $\{\mathbb{I}^m \times \{1\}\} \cup \{\{(x,t)\} \mid t \in [0,1)\}$, y $q : \mathbb{I}^m \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cono}(\mathbb{I}^m)$ la función cociente.

Se tiene que $\mathrm{Cono}(\mathbb{I}^m)$ es contráctil, ya que $H : \mathrm{Cono}(\mathbb{I}^m) \times \mathbb{I} \to \mathrm{Cono}(\mathbb{I}^m)$ definida por

$$H(q(x,t), s) = q(x, (1-s)t + s)$$

es una homotopía entre $\mathrm{Id} : \mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m) \to \mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m)$ y $c : \mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m) \to \mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m)$, donde $c\,(x) = \mathbb{I}^m \times \{1\}$ para cada $x \in \mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m)$.

Además, $\mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m)$ es un espacio compacto (porque q es continua) y de Hausdorff tal que $q \restriction_{\mathbb{I}^m \times [0,1)}$ es un encaje denso en $\mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m)$ y

$$\mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m) \setminus q\,(\mathbb{I}^m \times [0,1)) = \{\mathbb{I}^m \times \{1\}\}\,.$$

Esto implica que $\mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m)$ es la compactación de Alexandroff de $\mathbb{I}^m \times [0,1) \cong \mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+$, y por lo tanto $\mathrm{Cono}\,(\mathbb{I}^m) \cong K_0$. Así, K_0 es contráctil. □

4.1.1. Resumen de la sección

Sea K un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y localmente compacto de un espacio de Banach X. Supongamos que K satisface alguna de las siguientes posibilidades:

1. K es homeomorfo a $\mathbb{I}^m$ para algún número cardinal $0 \leq m \leq \aleph_0$.
2. K es homeomorfo a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+$ para algún número cardinal $0 \leq m \leq \aleph_0$.
3. K es homeomorfo a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ para algunos números cardinales $0 \leq m \leq \aleph_0$ y $0 < n < \aleph_0$.

Notemos que, en el primer caso, K es compacto. En el segundo caso, K no es compacto y K_0, su compactación de Alexandroff, es contráctil. En el tercer caso, K no es compacto y K_0 no es contráctil. Entonces, los tres casos son topológicamente distintos.

Además, en el primer caso K tiene dimensión m. En el segundo caso K tiene dimensión $m+1$. En el tercer caso, K tiene dimensión $m+n$ y toda función continua de $\mathbb{S}^k$ a K_0 es nulhomotópica si $k \in \mathbb{N}$ y $k < n$, pero existe una función continua de $\mathbb{S}^n$ a K_0 que no es nulhomotópica. Esto implica que las infinitas posibilidades en cada uno de los tres casos son distintas entre sí.

Todo lo anterior se resume en el siguiente corolario:

Corolario 4.1.2.1. *Sean $0 < n, n' < \aleph_0$ y $0 \leq m, m' \leq \aleph_0$.*

(i) $\mathbb{I}^m \cong \mathbb{I}^{m'}$ *si y sólo si* $m = m'$.

(ii) $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{I}^{m'} \times \mathbb{R}^+$ *si y sólo si* $m = m'$.

(iii) $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{I}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}$ *si y sólo si* $(n, m) = (n', m')$.

Además:

(i) $\mathbb{I}^m \ncong \mathbb{I}^{m'} \times \mathbb{R}^+$.

(ii) $\mathbb{I}^m \ncong \mathbb{I}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}$.

(iii) $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^+ \ncong \mathbb{I}^{m'} \times \mathbb{R}^{n'}$.

4.2. Subconjuntos de dimensión infinita

El estudio de los cuerpos convexos cerrados del capítulo 3 permitirá clasificar los subconjuntos no vacíos, convexos, cerrados y localmente compactos de un espacio de Banach que tienen dimensión finita. En esta sección analizaremos los que tienen dimensión infinita.

Proposición 4.2.1. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach X. Si $\mathrm{cc}K = \{0\}$, entonces $K \cong Q$.*

Demostración. Podemos suponer que $0 \in K$. Como K es localmente compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(0) \cap K}^K$ es compacto.

Ya que X es un espacio normado, $\overline{B_\varepsilon(0)} = \overline{B}_\varepsilon(0)$. Se cumple que

$$\overline{B_\varepsilon(0) \cap K}^K = \overline{B}_\varepsilon(0) \cap K, \qquad \text{(Apéndice iv.i)}$$

por lo que $\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K$ es compacto.

Ahora, si $0 < t < \varepsilon$, entonces $\overline{B}_t(0) \cap K \subseteq \overline{B}_\varepsilon(0) \cap K$. Como $\overline{B}_t(0) \cap K$ es cerrado en $\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K$, ya que es cerrado en X, $\overline{B}_t(0) \cap K$ también es compacto.

Por otra parte, si $t > \varepsilon$, consideremos $x \in \overline{B}_t(0) \cap K$. Entonces, $\frac{\varepsilon}{t} < 1$ y, ya que K es convexo y $0 \in K$, $\frac{\varepsilon}{t}x \in K$. Además $\|x\| \leq t$, porque $x \in \overline{B}_t(0)$. Así,

$$\left\|\frac{\varepsilon}{t}x\right\| \leq \frac{\varepsilon}{t}t = \varepsilon \ \text{ y } \ \frac{\varepsilon}{t}x \in \overline{B}_\varepsilon(0).$$

Por lo tanto, $\frac{\varepsilon}{t}x \in \overline{B}_\varepsilon(0) \cap K$ y

$$x = \frac{t}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{t}x \in \frac{t}{\varepsilon}\left(\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K\right).$$

Entonces, tenemos que $\overline{B}_t(0) \cap K \subseteq \frac{t}{\varepsilon}\left(\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K\right)$. Debido a que $\frac{t}{\varepsilon} > 0$, $\frac{t}{\varepsilon}\left(\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K\right) \cong \left(\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K\right)$. De esta manera, $\frac{t}{\varepsilon}\left(\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K\right)$ también es compacto, y esto implica que $\overline{B}_t(0) \cap K$ es compacto, pues es cerrado en $\frac{t}{\varepsilon}\left(\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K\right)$.

Por lo tanto, concluimos que $\overline{B}_t(0) \cap K$ es compacto para cada $t > 0$. Supongamos por contradicción que K no es compacto. Así, lo anterior implica que $K \not\subseteq \overline{B}_t(0)$ para cada $t > 0$. Sea $x_n \in K \backslash \overline{B}_n(0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty \tag{4.1}$$

y, como $\frac{1}{\|x_n\|} < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de que K es convexo y $0 \in K$ se sigue que $\frac{x_n}{\|x_n\|} \in K \cap \overline{B}_1(0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, ya que $K \cap \overline{B}_1(0)$ es compacto, podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = x_0 \text{ para algún } x_0 \in K \cap \overline{B}_1(0). \tag{4.2}$$

Sea $t \in \mathbb{R}^+$. De (4.1) se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| \geq t$ si $n \geq N$. Entonces, $\frac{t}{\|x_n\|} \leq 1$ y, debido a la convexidad de K, se cumple que $\frac{t}{\|x_n\|}x_n \in K$ si $n \geq N$. De esta manera, como K es cerrado en X,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{\|x_n\|} x_n \in K.$$

Por (4.2) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{\|x_n\|} x_n = t \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = tx_0,$$

lo cual nos permite concluir que $tx_0 \in K$.

Entonces, $\mathbb{R}^+ x_0 \subseteq K$, y así $x_0 \in \operatorname{cc} K$. Pero, por (4.2), $\|x_0\| = 1$ y por lo tanto $x_0 \neq 0$, lo cual contradice el hecho de que $\operatorname{cc} K = \{0\}$. De aquí concluimos que K es compacto.

Finalmente, ya que K es un subconjunto convexo, compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach, de la Proposición 2.1.2 se tiene que K es un espacio de Keller. Entonces, debido al Teorema de Keller (Teorema 2.1.3), $K \cong Q$. □

Proposición 4.2.2. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach X. Si $\operatorname{cc}K$ es un subespacio vectorial de X de dimensión algebraica n, entonces $K \cong Q \times \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Como $\operatorname{cc} K$ tiene dimensión algebraica finita, existe Y subespacio cerrado de X tal que $X = \operatorname{cc} K \oplus Y$ (véase [3, Lema 4.21]). Entonces, la función $f : \operatorname{cc} K \to X/Y$, donde

$$f(x) = x + Y,$$

es un isomorfismo continuo, pues es la restricción de la función cociente $g : X \to X/Y$.

Además, ya que X es un espacio de Banach y Y es cerrado en X, Y también es un espacio de Banach. Entonces, X/Y es un espacio de Banach. Y como $\operatorname{cc} K$ tiene dimensión algebraica finita, es cerrado en X y por lo tanto también es un espacio de Banach.

De esta manera, debido al Teorema de la función abierta (Teorema 1.1.6), f es un homeomorfismo. Entonces, la proyección h_1 de $X = \operatorname{cc} K \oplus Y$ sobre $\operatorname{cc} K$ es continua, pues es la composición de $g : X \to X/Y$ con $f^{-1} : X/Y \to \operatorname{cc} K$. Así, la proyección h_2 de $X = \operatorname{cc} K \oplus Y$ sobre Y también es continua, ya que $h_2 = \mathrm{Id}_X - h_1$.

Por lo tanto, como las proyecciones de $X = \operatorname{cc} K \oplus Y$ sobre $\operatorname{cc} K$ y Y son continuas, $h : X \to \operatorname{cc} K \times Y$, definida como

$$h(x + y) = (x, y),$$

es un homeomorfismo. Y, debido al Lema 1.5.6, tenemos que $h(K) = \operatorname{cc} K \times (K \cap Y)$, así que

$$K \cong \operatorname{cc} K \times (K \cap Y). \tag{4.3}$$

Por otra parte, como $\operatorname{cc} K$ tiene dimensión algebraica n, entonces $\operatorname{cc} K \cong \mathbb{R}^n$.

Asimismo, K es convexo y cerrado en X y Y es un subespacio vectorial cerrado de X, por lo que $K \cap Y$ es convexo y cerrado en X. Y ya que $K \cap Y$ es cerrado en K y K es localmente compacto, $K \cap Y$ es también localmente compacto. Además, como K tiene dimensión infinita y $\operatorname{cc} K$ tiene dimensión n (porque tiene dimensión algebraica n), por (4.3) se tiene que $K \cap Y$ tiene dimensión infinita. Finalmente, debido a la Proposición 1.5.3, $\operatorname{cc} Y \subseteq Y$. Así,

$$\operatorname{cc}(K \cap Y) \subseteq \operatorname{cc} K \cap \operatorname{cc} Y \subseteq \operatorname{cc} K \cap Y = \{0\},$$

ya que $X = \operatorname{cc} K \oplus Y$. Por lo tanto, tenemos que $\operatorname{cc}(K \cap Y) = 0$ y $K \cap Y$ es un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita X. Entonces, por la Proposición 4.2.1, $K \cap Y \cong Q$.

De esta manera, debido a (4.3), $K \cong \mathbb{R}^n \times Q$. $\square$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y $F : X \to X$ dada por

$$F(x) = \frac{x}{1 + \| x\|}.$$

Recordemos que F es la función definida en el Teorema 1.4.5, y cumple que si $A \subseteq X$, A es convexo y $0 \in A$, entonces $F(A)$ es convexo. Además, $F(X) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$, $F : X \to F(X)$ es un homeomorfismo y $F^{-1} : F(X) \to X$, dada por

$$F^{-1}(y) = \frac{y}{1 - \|y\|},$$

es su función inversa.

Lema 4.2.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $F : X \to X$ dada por*

$$F(x) = \frac{x}{1 + \|x\|},$$

y $C \subseteq X$ cerrado y convexo tal que $0 \in C$. Si $y \in \overline{F(C)} \backslash F(X)$, entonces $\mathbb{R}^{+} y \subseteq C$ y $\|y\| = 1$.

Demostración. Sea $y \in \overline{F(C)} \backslash F(X)$. Entonces, existe una sucesión (c_n) en C tal que $\lim\limits_{n\to\infty} F(c_n) = y$. Ya que

$$F(c_n) \in F(X) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

$\|y\| \leq 1$. Y como $y \notin F(X)$, tenemos que $\|y\| = 1$. Así, debido a que $(F(c_n))$ converge a y, podemos suponer que $F(c_n) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $c_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $t \in \mathbb{R}^{+}$. Definimos $x_n = t\frac{c_n}{\|c_n\|}$ para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\frac{x}{\|x\|} = \frac{F(x)}{\|F(x)\|}$ para toda $x \in X \backslash \{0\}$, y así

$$x_n = t\frac{F(c_n)}{\|F(c_n)\|} \to t\frac{y}{\|y\|} = ty \text{ cuando } n \to \infty. \tag{4.4}$$

Por otra parte, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \|F(c_n)\| = \|y\| = 1$,

$$\left|\|F(c_n)\| - 1\right| = \left|\frac{\|c_n\|}{1 + \|c_n\|} - 1\right| = \frac{1}{1 + \|c_n\|} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

y esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \|c_n\| > t + 1$ si $n \geq N$. Entonces, $\frac{t}{\|c_n\|} < 1$ si $n \geq N$, y por lo tanto, como C es convexo y $0 \in C$, $x_n \in C$ si $n \geq N$. Así, de (4.4) y del hecho de que C es cerrado en X se sigue que $ty \in C$. De esta manera, concluimos que $\mathbb{R}^{+} y \subseteq C$. □

Proposición 4.2.4. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach X. Supongamos que Y es un espacio de Banach tal que $X = Y \times \mathbb{R}$. Si*

$$\{0\} \times \mathbb{R}^+ \subseteq K \subseteq Y \times \mathbb{R}^+,$$

entonces $K \cong Q \setminus \{0\}$.

Demostración. **Paso 1. Existe un encaje $h : Y \times \mathbb{R}^+ \to Y \times [-1, \infty)$.**
Definimos $h : Y \times \mathbb{R}^+ \to Y \times [-1, \infty)$ como

$$h(y,t) = \left(y, (t + \|y\|)^2 - 1\right).$$

Así, para cada $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}^+$ se tiene que, si $s \geq t$, entonces $h(y,s) \in \{y\} \times \left[(t + \|y\|)^2 - 1, \infty\right)$. Por otra parte, si $s \in \left[(t + \|y\|)^2 - 1, \infty\right)$,

$$(s+1)^{\frac{1}{2}} - \|y\| \in [t, \infty) \quad \text{y} \quad h\left(y, (s+1)^{\frac{1}{2}} - \|y\|\right) = (y,s).$$

Por lo tanto,

$$h(\{y\} \times [t, \infty)) = \{y\} \times \left[(t + \|y\|)^2 - 1, \infty\right) \text{ si } (y,t) \in Y \times \mathbb{R}^+. \tag{4.5}$$

Lo anterior implica que $h^{-1} : h(Y \times \mathbb{R}^+) \to Y \times \mathbb{R}^+$, dada por

$$h^{-1}(y,t) = \left(y, (t+1)^{\frac{1}{2}} - \|y\|\right),$$

está bien definida y es la inversa de $h : Y \times \mathbb{R}^+ \to h(Y \times \mathbb{R}^+)$, y así, como ambas funciones son continuas, h es un encaje.

Paso 2. El conjunto $h(K)$ es convexo.
Ya que $\{0\} \times \mathbb{R}^+ \subseteq K$, entonces $\mathbb{R}^+(0,1) \subseteq K$ y $(0,1) \in \operatorname{cc} K$. Por lo tanto, por la Proposición 1.5.3,

$$k + \mathbb{R}^+(0,1) \subseteq K \text{ para cada } k \in K. \tag{4.6}$$

Veamos que $h(K)$ es convexo. Sean $(y_1, t_1), (y_2, t_2) \in K$, y $r, s \in [0,1]$ tales que $r + s = 1$. Tenemos que $t_1, t_2 \geq 0$, pues $K \subseteq Y \times \mathbb{R}^+$. Además,

$$\begin{aligned} r\left((t_1 + \|y_1\|)^2 - 1\right) + s\left((t_2 + \|y_2\|)^2 - 1\right) \\ \geq (rt_1 + st_2 + \|ry_1 + sy_2\|)^2 - 1, \end{aligned} \quad \text{(Apéndice iv.ii)}$$

y por lo tanto

$$rh\left(y_1,t_1\right)+rh\left(y_2,t_2\right)\in\{ry_1+sy_2\}\times\left[\left(rt_1+st_2+\|ry_1+sy_2\|\right)^2-1,\infty\right).$$

Así, debido a (4.5), $rh\left(y_1,t_1\right)+rh\left(y_2,t_2\right)\in h\left(\{ry_1+sy_2\}\times[rt_1+st_2,\infty)\right)$. También, de (4.6) inferimos que

$$\{ry_1+sy_2\}\times[rt_1+st_2,\infty)=(ry_1+sy_2,rt_1+st_2)+\mathbb{R}^+\left(0,1\right)\subseteq K.$$

Entonces $rh\left(y_1,t_1\right)+rh\left(y_2,t_2\right)\in h\left(K\right)$. De esto concluimos que $h\left(K\right)$ es convexo.

Paso 3. El conjunto $h\left(K\right)$ es cerrado en $Y\times\mathbb{R}$.

Ya que $Y\times\mathbb{R}^+=\bigcup_{y\in Y}\left(\{y\}\times\mathbb{R}^+\right)$, de (4.5) se sigue que

$$h\left(Y\times\mathbb{R}^+\right)=\bigcup_{y\in Y}\left(\{y\}\times\left[\|y\|^2-1,\infty\right)\right)=\left\{(y,t)\in Y\times\mathbb{R}\mid t\geq\|y\|^2-1\right\}$$

y por lo tanto $h\left(Y\times\mathbb{R}^+\right)$ es cerrado en $Y\times\mathbb{R}$. Así, como $h\left(K\right)$ es cerrado en $h\left(Y\times\mathbb{R}^+\right)$ (pues K es cerrado en $Y\times\mathbb{R}^+$ y h es un encaje), $h\left(K\right)$ es cerrado en $Y\times\mathbb{R}$.

Paso 4. Existe un encaje $F:Y\times\mathbb{R}\to Y\times\mathbb{R}$ tal que $F\left(h\left(K\right)\right)$ es convexo y cerrado en $F\left(Y\times\mathbb{R}\right)$.

Consideremos la norma $\|\cdot\|_1$ en $Y\times\mathbb{R}$ tal que $\|(y,t)\|_1=\|y\|+|t|$ para cada $(y,t)\in Y\times\mathbb{R}$ (la cual induce la topología producto en $Y\times\mathbb{R}$), y sea $F:Y\times\mathbb{R}\to Y\times\mathbb{R}$ a función definida en el Teorema 1.4.5, dada por

$$F\left(y,t\right)=\frac{(y,t)}{1+\|(y,t)\|_1}.$$

Teníamos que $F:Y\times\mathbb{R}\to F\left(Y\times\mathbb{R}\right)=\{(y,t)\in Y\times\mathbb{R}\mid\|(y,t)\|_1<1\}$ es un homeomorfismo, y F cumple que $F\left(A\right)$ es convexo si $A\subseteq Y\times\mathbb{R}$ es convexo y $(0,0)\in A$.

Entonces, ya que $h\left(K\right)$ es convexo y $(0,0)\in h\left(K\right)$ (pues $\{0\}\times\mathbb{R}^+\subseteq K$ y $h\left(\{0\}\times\mathbb{R}^+\right)=\{0\}\times[-1,\infty)$), concluimos que $F\left(h\left(K\right)\right)$ es convexo.

Además, como $h\left(K\right)$ es cerrado en $Y\times\mathbb{R}$,

$$F\left(h\left(K\right)\right)\text{ es cerrado en }F\left(Y\times\mathbb{R}\right).\tag{4.7}$$

Paso 5. El conjunto $C=F\left(h\left(K\right)\right)\cup\{(0,1)\}$ es cerrado en $Y\times\mathbb{R}$.

Sea $(y,t) \in \overline{C}$, y veamos que $(y,t) \in C$. Como

$$\overline{C} = \overline{F(h(K))} \cup \{(0,1)\}$$

y $(0,1) \in C$, basta suponer que $(y,t) \in \overline{F(h(K))}$.

Si $(y,t) \in F(Y \times \mathbb{R})$, entonces $(y,t) \in \overline{F(h(K))} \cap F(Y \times \mathbb{R})$ y, por (4.7), esto implica que $(y,t) \in F(h(K)) \subseteq C$.

Si $(y,t) \notin F(Y \times \mathbb{R})$, entonces $(y,t) \in \overline{F(h(K))} \backslash F(Y \times \mathbb{R})$ y, debido al Lema 4.2.3, se tiene que $\|(y,t)\|_1 = 1$ y $\mathbb{R}^+(y,t) \subseteq h(K)$. De esto se sigue que $t \geq 0$, pues la imagen de h está contenida en $Y \times [-1,\infty)$. Supongamos por contradicción que $y \neq 0$. Así, $\|y\|^2 > 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\|y\|^2 > t+1$. Por lo tanto, como $n \geq 1$, $t < n\|y\|^2 - 1 \leq n\|y\|^2 - \frac{1}{n}$, y esto implica que $nt < \|ny\|^2 - 1$. Entonces

$$n(y,t) \notin \left\{(y,t) \in Y \times \mathbb{R} \mid t \geq \|y\|^2 - 1\right\} = h\left(Y \times \mathbb{R}^+\right),$$

pero esto contradice el hecho de que $\mathbb{R}^+(y,t) \subseteq h(K)$. De esta manera, tenemos que $y = 0$. Como además $\|(y,t)\|_1 = \|y\| + |t| = 1$ y $t \geq 0$, concluimos que $(y,t) = (0,1) \in C$. Así, C es cerrado en $Y \times \mathbb{R}$.

Paso 6. $\boldsymbol{C}$ es convexo.

Notemos que si $0 \leq t < 1$, entonces

$$F^{-1}(0,t) = \frac{(0,t)}{1 - \|(0,t)\|} \in \{0\} \times [0,\infty),$$

y por lo tanto $\{0\} \times [0,1) \subseteq F(\{0\} \times [0,\infty))$. Esto implica que $\{0\} \times [0,1) \subseteq F(h(K))$, pues teníamos que $\{0\} \times [-1,\infty) \subseteq h(K)$.

Veamos que C es convexo. Sea $(y_1,t_1) \in F(h(K))$. Ya que $F(h(K))$ es convexo, basta probar que el segmento de (y_1,t_1) a $(0,1)$ está contenido en C. Sean $r,s \in [0,1]$ tales que $r+s=1$. Como $\{0\} \times [0,1) \subseteq F(h(K))$,

$$r(y_1,t_1) + s(0,t) \in F(h(K)) \subseteq C \text{ para cada } 0 \leq t < 1,$$

y de que C es cerrado en $Y \times \mathbb{R}$ se sigue que $r(y_1,t_1) + s(0,1) \in C$.

Paso 7. $\boldsymbol{K \cong Q \backslash \{0\}}$.

Finalmente, debido a que $h(K)$ es convexo, $(0,0) \in h(K)$ y

$$\frac{1}{1 + \|(y,t)\|_1} \leq 1 \text{ para cada } (y,t) \in h(K),$$

$F(h(K)) \subseteq h(K)$. Además, $(0,1) \in h(K)$, por lo que $C \subseteq h(K)$. Entonces, C es cerrado en un espacio localmente compacto (pues K es localmente compacto y h es un encaje), y esto implica que C es localmente compacto.

De esta manera, tenemos que C es un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita (ya que K tiene dimensión infinita y h y F son encajes) de $Y \times \mathbb{R}$. También, C es acotado, pues

$$F(h(K)) \subseteq F(Y \times \mathbb{R}) = \{(y,t) \in Y \times \mathbb{R} \mid \|(y,t)\|_1 < 1\},$$

y de esto se sigue que $\operatorname{cc} C = \{0\}$. Por lo tanto, por la Proposición 4.2.1, $C \cong Q$. Entonces, $K \cong F(h(K)) = C \setminus \{(0,1)\} \cong Q \setminus \{x\}$, para algún $x \in Q$. Así, como Q es homogéneo (lo cual puede consultarse en [1, Teorema 4.1]), $K \cong Q \setminus \{0\}$. □

Lema 4.2.5. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado y localmente compacto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Entonces, para cada $t > 0$*

$$K + \overline{B}_t(0) = \{x \in X \mid d(x,K) \leq t\}.$$

Demostración. Sea $t > 0$. Si $k \in K$ y $y \in \overline{B}_t(0)$, entonces

$$d(k+y, K) \leq \|k + y - k\| = \|y\| \leq t$$

y, por lo tanto, tenemos que $K + \overline{B}_t(0) \subseteq \{x \in X \mid d(x,K) \leq t\}$.

Ya que la métrica en X es inducida por una norma, es invariante bajo traslaciones. Entonces, $d(x,K) = d(x-k, K-k)$ para cada $k \in K$ y $x \in X$, y así podemos suponer que $0 \in K$. Por lo tanto, como $0 \in K$ y K es convexo y localmente compacto, de manera análoga a la demostración de la Proposición 4.2.1 se tiene que

$$\overline{B}_s(0) \cap K \text{ es compacto para cada } s > 0. \tag{4.8}$$

Sea $x \in \{z \in X \mid d(z,K) \leq t\}$. Ya que $d(x,K) = \inf\{\|x - k\| \mid k \in K\}$, existe una sucesión (k_n) en K tal que

$$\|x - k_n\| \to d(x,K) \text{ cuando } n \to \infty. \tag{4.9}$$

Además, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}_{t+1}(x) \subseteq \overline{B}_r(0)$. Como $d(x,K) \leq t$, entonces $d(x,K) < t+1$. Así, debido a (4.9), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - k_n\| < t+1$ si $n \geq N$. Por lo tanto,

$$k_n \in \overline{B}_{t+1}(x) \subseteq \overline{B}_r(0) \text{ si } n \geq N.$$

De esta manera, $(k_n)_{n\geq N}$ es una sucesión en $\overline{B}_r(0)\cap K$, que, por (4.8), es compacto. Entonces, podemos suponer que (k_n) converge a $k\in\overline{B}_r(0)\cap K$. Así, $\|x-k_n\|\to\|x-k\|$ cuando $n\to\infty$ y, debido a (4.9), $\|x-k\| = d(x,K)\leq t$. Esto implica que

$$x\in\overline{B}_t(k) = k+\overline{B}_t(0)\subseteq K+\overline{B}_t(0).$$

Por lo tanto, $\{x\in X \mid d(x,K)\leq t\}\subseteq K+\overline{B}_t(0)$. □

Proposición 4.2.6. *Sea K un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach X. Si* cc$K$ *no es un subespacio vectorial de X, entonces $K\cong Q\backslash\{0\}$.*

Demostración. Ya que K es no vacío, pues tiene dimensión infinita, consideremos $k\in K$. Como $\operatorname{cc}K$ no es un subespacio vectorial de X, debido al Lema 1.5.5 tenemos que existe $y\in\operatorname{cc}K$ tal que $k-s_0y\in\partial K$, donde

$$s_0 = \operatorname{ínf}\{s\geq 0 \mid k-sy\notin K\}.$$

Sea $x_0 = k-s_0y$. Entonces,

$$x_0+\mathbb{R}^+y\subseteq K \;\text{ y }\; x_0-ly\notin K \text{ para toda } l>0. \qquad \text{(Apéndice iv.iii)}$$

En particular, $z = x_0-y\notin K$ y, ya que K es cerrado en X, $d(z,K)>0$. Denotemos $t = d(z,K)$.

Debido a que, por el Lema 4.2.5,

$$K+\overline{B}_t(0) = \{x\in X \mid d(x,K)\leq t\}$$

y $\{x\in X \mid d(x,K)\leq t\}$ es la imagen inversa de $(-\infty,t]\subseteq\mathbb{R}$ bajo la función continua $d(\cdot,K): X\to\mathbb{R}$, se tiene que $K+\overline{B}_t(0)$ es cerrado en X. Y ya que $x+B_t(0)$ es abierto en X para cada $x\in K$, entonces $K\subseteq\operatorname{int}\left(K+\overline{B}_t(0)\right)$.

Por lo tanto, como además K y $\overline{B}_t(0)$ son conjuntos convexos, $K+\overline{B}_t(0)$ es un cuerpo convexo cerrado en X. Así, de la Proposición 1.6.6 se sigue que $\partial\left(K+\overline{B}_t(0)\right) = \operatorname{Supp}\left(K+\overline{B}_t(0)\right)$ y, debido a que

$$z\in\partial\left(K+\overline{B}_t(0)\right), \qquad \text{(Apéndice iv.iv)}$$

entonces $z\in\operatorname{Supp}\left(K+\overline{B}_t(0)\right)$. De esta manera, existe una funcional $f: X\to\mathbb{R}$ lineal y continua que soporta a $K+\overline{B}_t(0)$ en z. Por lo tanto, $f(a)\leq f(z)$ para cada $a\in K+\overline{B}_t(0)$.

Como $x_0 \in \partial K \subseteq K \subseteq \operatorname{int}\left(K + \overline{B}_t(0)\right)$, notemos que

$$x_0 \notin \partial\left(K + \overline{B}_t(0)\right) = \operatorname{Supp}\left(K + \overline{B}_t(0)\right),$$

y entonces $f(x_0) < f(z)$. Así, ya que $z = x_0 - y$, $f(y) = f(x_0) - f(z) < 0$ y

$$y \notin Y = \{x \in X \mid f(x) = 0\}.$$

Por otro lado, como $x - \frac{f(x)}{f(y)}y \in Y$ para cada $x \in X$, entonces $x = x - \frac{f(x)}{f(y)}y + \frac{f(x)}{f(y)}y \in Y + \mathbb{R}y$ para cada $x \in X$. Además $Y \cap \mathbb{R}y = \{0\}$, pues $f(y) \neq 0$. Esto nos permite concluir que $X = Y \oplus \mathbb{R}y$.

Consideremos $h : X \to Y \times \mathbb{R}$ definida por $h(x + ty) = (x, t)$. La función h es biyectiva, y h^{-1} es continua y lineal. Así, ya que X y $Y \times \mathbb{R}$ son espacios de Banach (pues Y es cerrado en X, por ser la imagen inversa de $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ bajo la función continua f), por el Teorema de la función abierta (Teorema 1.1.6) tenemos que h es un homeomorfismo.

Además, ya que $z \in K + \overline{B}_t(0)$, $z = a + b$ para algunos $a \in K$, $b \in \overline{B}_t(0)$. Sea $x \in K$. Entonces, $x + b \in K + \overline{B}_t(0)$ y, por lo tanto, como f soporta a $K + \overline{B}_t(0)$ en z, $f(x + b) \leq f(z) = f(a + b)$. Así, debido a que f es lineal, $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in K$.

De esta manera, $f(w) \leq 0$ para cada $w \in K - a$, y como $f(y) < 0$, entonces $\frac{f(w)}{f(y)} \in \mathbb{R}^+$ para cada $w \in K - a$. Por lo tanto, $K - a \subseteq Y + \mathbb{R}^+ y$ y

$$h(K - a) \subseteq h\left(Y + \mathbb{R}^+ y\right) = Y \times \mathbb{R}^+. \tag{4.10}$$

Por otra parte, como $y \in \operatorname{cc} K$ y $a \in K$, por la Proposición 1.5.3 $a + \mathbb{R}^+ y \subseteq K$. Así, $\mathbb{R}^+ y \subseteq K - a$, y

$$\{0\} \times \mathbb{R}^+ = h\left(\mathbb{R}^+ y\right) \subseteq h(K - a). \tag{4.11}$$

Finalmente, como h es un homeomorfismo lineal, $h(K - a)$ es un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de $Y \times \mathbb{R}$. Por (4.10) y (4.11) se tiene que $\{0\} \times \mathbb{R}^+ \subseteq h(K - a) \subseteq Y \times \mathbb{R}^+$, y entonces de la Proposición 4.2.4 se sigue que $h(K - a) \cong Q \setminus \{0\}$. Por lo tanto $K \cong Q \setminus \{0\}$, ya que $K \cong h(K - a)$. $\square$

4.3. Demostración del Teorema de Klee

4.3.1. Dimensión finita

Consideremos un subconjunto no vacío K convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión finita de un espacio de Banach X. Supongamos además que K tiene dimensión finita y $|K| > 1$. Así, existe $k \in K$ y $K - k$ tiene dimensión finita, pues es homeomorfo a K. Por lo tanto, $\operatorname{span}(K - k)$ tiene dimensión algebraica finita, digamos p ($p \geq 1$, ya que $|K - k| > 1$).

Sea $\{x_1, \ldots, x_p\}$ una base de $\operatorname{span}(K - k)$ contenida en $K - k$. Entonces, se tiene que $0, x_1, \ldots, x_p$ son afínmente independientes y, por la Proposición 1.1.21, el interior de $\operatorname{conv}\{0, x_1, \ldots, x_p\}$ con respecto a $\operatorname{span}(K - k)$ es no vacío. Además, $K - k$ es convexo y cerrado en X, pues K lo es. Así, $\operatorname{conv}\{0, x_1, \ldots, x_p\} \subseteq K - k$ (ya que $0, x_1, \ldots, x_p \in K - k$), y concluimos que $K - k$ es un cuerpo convexo cerrado en el subespacio $Y = \operatorname{span}(K - k)$ de X.

Entonces, de la Proposición 3.0.3 se tiene que $K - k \cong \operatorname{cc}_Y(K - k) \times \mathbb{I}^m$ si $\operatorname{cc}_Y(K - k)$ es un subespacio vectorial de Y de codimensión finita m; y de las Proposición 3.0.8 se sigue que existe un semiespacio cerrado M de Y tal que $K - k \cong M$ si $\operatorname{cc}_Y(K - k)$ no es un subespacio vectorial de Y. Éstos son los casos posibles, pues, como Y tiene dimensión algebraica finita, ningún subespacio de Y tiene codimensión ∞.

Notemos que en el caso en el que $\operatorname{cc}_Y(K - k)$ es un subespacio vectorial de Y, $\operatorname{cc}_Y(K - k)$ debe tener también dimensión algebraica finita. Entonces, $\operatorname{cc}_Y(K - k) \cong \mathbb{R}^n$ para alguna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Además, si M es un semiespacio cerrado de Y, existen una funcional f lineal, continua y no constante definida en Y y un número real c tales que $M = \{y \in Y \mid f(y) \geq c\}$. Y, debido al Lema 3.0.5, $M \cong \ker f \times \mathbb{R}^+$. Ya que $\ker f$ es un subespacio de Y, se tiene que $\ker f \cong \mathbb{R}^l$ para alguna $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por lo tanto, podemos concluir que para todo subconjunto K no vacío, convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión finita de un espacio de Banach se cumple que si $k \in K$ y $Y = \operatorname{span}(K - k)$, entonces:

1. K es homeomorfo a $\mathbb{I}^0 \times \mathbb{R}^0$ si $|K| = 1$.

2. K es homeomorfo a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ para algunos $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si $|K| > 1$ y $\operatorname{cc}_Y(K - k)$ es un subespacio vectorial de Y de codimensión m.

   2.1. En particular, si K es compacto, entonces $\operatorname{cc}_Y(K - k) = \{0\}$ y K es homeomorfo a $\mathbb{I}^m$.

3. K es homeomorfo a $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^+$ para algún $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si $|K| > 1$ y $\operatorname{cc}_Y(K - k)$ no es un subespacio vectorial de Y.

Y éstos son los únicos casos posibles para K.

Por lo anterior, para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el subconjunto $\mathbb{I}^j \times \mathbb{R}^+$ del espacio de Banach $\mathbb{R}^{j+1}$ es homeomorfo a $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ para algunos $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o es homeomorfo a $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^+$ para algún $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pero de lo visto en la sección 4.1 se sigue que la compactación de Alexandroff de $\mathbb{I}^j \times \mathbb{R}^+$ es contráctil y la de $\mathbb{I}^m \times \mathbb{R}^n$ no lo es. Así, no son homeomorfos, y por lo tanto $\mathbb{I}^j \times \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^+$. Como la dimensiones de estos espacios son $j+1$ y $l+1$, respectivamente, se tiene que $j = l$. Entonces, $\mathbb{I}^j \times \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^+$ para toda $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y el tercer caso puede escribirse como:

3. K es homeomorfo a $\mathbb{I}^l \times \mathbb{R}^+$ para algún $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si $|K| > 1$ y $\operatorname{cc}_Y (K - k)$ no es un subespacio vectorial de Y.

Esto concluye la prueba del Teorema 4.0.1 para conjuntos de dimensión finita.

4.3.2. Dimensión infinita

Ahora, sea K un subconjunto convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach X. Ya que K es cerrado en X, $\operatorname{cc} K$ es cerrado en X. Sea $k \in K$. Entonces, $0 \in K - k$ y, por la Proposición 1.5.3, $\operatorname{cc} K = \operatorname{cc}(K - k) \subseteq K - k$. Así, $\operatorname{cc} K$ es cerrado en $K - k$, que es localmente compacto, y esto implica que $\operatorname{cc} K$ es localmente compacto.

Por la Proposición 4.2.2 se tiene que $K \cong Q \times \mathbb{R}^n$ si $\operatorname{cc} K$ es un subespacio vectorial de X de dimensión algebraica n; y de la Proposición 4.2.6 se sigue que $K \cong Q \setminus \{0\}$ si $\operatorname{cc} K$ no es un subespacio vectorial de X. Éstos son los únicos casos posibles pues, como $\operatorname{cc} K$ es localmente compacto, no puede ser un subespacio vectorial de dimensión algebraica infinita (si lo fuera, ninguna bola cerrada en $\operatorname{cc} K$ sería compacta).

Consideremos el encaje $h : Q \times \mathbb{R}^+ \to \ell_2 \times \mathbb{R}$ dado por $h((t_n), s) = \left(\left(\frac{t_n}{n}\right), s\right)$. Ya que $Q \times \mathbb{R}^+$ es localmente compacto, $h(Q \times \mathbb{R}^+)$ es localmente compacto, y además es un subconjunto convexo, cerrado y de dimensión infinita del espacio de Banach $\ell_2 \times \mathbb{R}$. Debido a lo anterior, se tiene que $Q \times \mathbb{R}^+ \cong h(Q \times \mathbb{R}^+)$ es homeomorfo a $Q \times \mathbb{R}^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ o es homeomorfo a $Q \setminus \{0\}$. Pero la compactación de Alexandroff de $Q \times \mathbb{R}^+$ es contráctil y la de $Q \times \mathbb{R}^n$ no lo es. Así, $Q \times \mathbb{R}^+ \cong Q \setminus \{0\}$.

Por lo tanto, podemos concluir que para todo subconjunto K convexo, cerrado, localmente compacto y de dimensión infinita de un espacio de Banach X se cumple que:

1. K es homeomorfo a $Q \times \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si $\operatorname{cc} K$ es un subespacio vectorial de X de dimensión algebraica n.

2. K es homeomorfo a $Q \times \mathbb{R}^+$ si $\operatorname{cc} K$ no es un subespacio vectorial de X.

Y éstos son los únicos casos posibles para K.

Esto concluye la prueba del Teorema 4.0.1.

Apéndice A

Cuentas omitidas

(i.i)

Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, $t_1 < t_2$. Tenemos los siguientes casos:

(a) $t_1, t_2 \in (0, 1]$. Entonces, existen $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $t_1 \in \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$, $t_2 \in \left[\frac{1}{2^{l+1}}, \frac{1}{2^l}\right]$.

Si $k = l$, $t_1, t_2 \in \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ y existen $r, s \in [0, 1]$ tales que

$$t_1 = r\frac{1}{2^{k+1}} + (1-r)\frac{1}{2^k} \quad \text{y} \quad t_2 = s\frac{1}{2^{k+1}} + (1-s)\frac{1}{2^k}.$$

Ya que $h_k : \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right] \to [0, 1]$, definida por $h_k(t) = 2^{k+1}t - 1$, es un homeomorfismo afín y $q(t) = h_k(t)\, x_k + (1 - h_k(t))\, x_{k+1}$ para cada $t \in \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ (donde $x_k = 0$ si $k = 0$), entonces $q \restriction_{\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]}$ es afín. Por lo tanto, como $q\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = x_{k+1}$, $q\left(\frac{1}{2^k}\right) = x_k$ y j es lineal,

$$\begin{aligned}
\|\hat{q}(t_1) - \hat{q}(t_2)\| &= \|j(q(t_1)) - j(q(t_2))\| \\
&= \|j(rx_{k+1} + (1-r)\,x_k) - j(sx_{k+1} + (1-s)\,x_k)\| \\
&= \|(r-s)\,j(x_{k+1}) + (1 - r - (1-s))\,j(x_k)\| \\
&= |r-s|\,\|j(x_{k+1}) - j(x_k)\| \\
&< |r-s|\frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2}\frac{|r-s|}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}|t_1 - t_2|,
\end{aligned}$$

pues teníamos que $\|j(x_{i+1}) - j(x_i)\| < \frac{1}{2^{i+2}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, si $k < l$,

$$\begin{aligned}\|\hat{q}(t_1)-\hat{q}(t_2)\| &\le \left\|\hat{q}(t_1)-\hat{q}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right\| + \left\|\hat{q}\left(\frac{1}{2^k}\right)-\hat{q}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right\| \\ &+ \ldots + \left\|\hat{q}\left(\frac{1}{2^{l+2}}\right)-\hat{q}\left(\frac{1}{2^{l+1}}\right)\right\| + \left\|\hat{q}\left(\frac{1}{2^{l+1}}\right)-\hat{q}(t_2)\right\| \\ &< \frac{1}{2}\left|t_1-\frac{1}{2^k}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\right| \\ &+ \ldots + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2^{l+2}}-\frac{1}{2^{l+1}}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2^{l+1}}-t_2\right| = \frac{1}{2}|t_1-t_2|.\end{aligned}$$

(b) $t_1 \in (0,1]$, $t_2 > 1$. Entonces $\hat{q}(t_2) = \hat{q}(1)$, pues $q(t_2) = 0 = q(1)$. Así, por el caso (a),

$$\|\hat{q}(t_1)-\hat{q}(t_2)\| = \|\hat{q}(t_1)-\hat{q}(1)\| < \frac{1}{2}|t_1-1| < \frac{1}{2}|t_1-t_2|,$$

ya que $t_2 > 1$.

(c) $t_1, t_2 > 1$. En este caso $\hat{q}(t_1) = \hat{q}(t_2)$, y $\|\hat{q}(t_1)-\hat{q}(t_2)\| = 0 < \frac{1}{2}|t_1-t_2|$.

(d) $t_1 = 0$, $t_2 \in (0,1]$. Entonces $\hat{q}(t_1) = y_0$ y $t_2 \in \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ para algún $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Esto implica que $q(t_2) \in [x_k, x_{k+1}]$ y, como j es lineal,

$$\hat{q}(t_2) = j(q(t_2)) \in [j(x_k), j(x_{k+1})] = [f([x_k]), f([x_{k+1}])] \subseteq B_{\frac{1}{2^{k+3}}}(y_0),$$

pues teníamos que $f([x_i]), f([x_{i+1}]) \in B_{\frac{1}{2^{i+3}}}(y_0)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y la bola $B_{\frac{1}{2^{k+3}}}(y_0)$ es convexa (porque $\widehat{X_w}$ es un espacio normado).

Así,

$$\|\hat{q}(t_1)-\hat{q}(t_2)\| = \|y_0-\hat{q}(t_2)\| < \frac{1}{2^{k+3}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) < \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2}|t_1-t_2|,$$

ya que $t_2 \in \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$ y $t_1 = 0$.

(e) $t_1 = 0$, $t_2 > 1$. Entonces $\hat{q}(t_1) = y_0$ y $\hat{q}(t_2) = j(q(t_2)) = j(0) = 0$ y, como teníamos que $\|y_0\| < \frac{1}{4}$,

$$\|\hat{q}(t_1)-\hat{q}(t_2)\| = \|y_0\| < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2}|t_1-t_2|.$$

(i.ii)

Sea $x \in X \backslash K$. Entonces,

$$j(h(x)) = j(x) + j(q(d_w(x,K))) = j(x) + \hat{q}(d(j(x), j(K))) = \hat{h}(j(x)).$$

Por otra parte, si $x \in X$, $j(x) \in \widehat{X_w}$ y

$$j(x) = \hat{h}\left(\hat{h}^{-1}(j(x))\right) = \hat{h}^{-1}(j(x)) + \hat{q}\left(d\left(\hat{h}^{-1}((x)), j(K)\right)\right).$$

Así,

$$\begin{aligned}\hat{h}^{-1}(j(x)) &= j(x) - \hat{q}\left(d\left(\hat{h}^{-1}(j(x)), j(K)\right)\right)\\ &= j(x) - j\left(q\left(d\left(\hat{h}^{-1}(j(x)), j(K)\right)\right)\right) = j(g(x)).\end{aligned}$$

(iii.i)

Sea $x \in X$. Si $x \in V$, $h_{ji}(h_{ij}(x)) = h_{ji}(x) = x$.

Si $x \in X \backslash V$, entonces $1 - \frac{1}{w_V(x)} > 0$. Sea

$$s = \frac{1}{w_V(x)} + \frac{\frac{1}{w_{U_j}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}\left(1 - \frac{1}{w_V(x)}\right).$$

Como $w_{U_i}(x) < w_V(x)$ para cada $i = 1, 2$, tenemos que

$$\frac{\frac{1}{w_{U_j}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}} > 0,$$

y entonces $s > \frac{1}{w_V(x)}$. Por lo tanto, $sx \notin V$, y así

$$\begin{aligned}h_{ji}(h_{ij}(x)) = h_{ji}(sx) &= \left(\frac{1}{sw_V(x)} + \frac{\frac{1}{sw_{U_i}(x)} - \frac{1}{sw_V(x)}}{\frac{1}{sw_{U_j}(x)} - \frac{1}{sw_V(x)}}\left(1 - \frac{1}{sw_V(x)}\right)\right) sx\\ &= \left(\frac{1}{w_V(x)} + \frac{\frac{1}{w_{U_i}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_j}(x)} - \frac{1}{w_V(x)}}\left(s - \frac{1}{w_V(x)}\right)\right) x\\ &= \left(\frac{1}{w_V(x)} + 1 - \frac{1}{w_V(x)}\right) x = x.\end{aligned}$$

Entonces, $h_{ji}\left(h_{ij}\left(x\right)\right)=x$ para cada $x\in X$.

(iii.ii)

Sea $x\in U_i$. Si $x\in V$, $h_{ij}\left(x\right)=x\in V\subseteq U_1\cap U_2\subseteq U_j$.
Si $x\notin V$, entonces

$$h_{ij}\left(x\right)=\left(\frac{1}{w_V\left(x\right)}+\frac{\frac{1}{w_{U_j}(x)}-\frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)}-\frac{1}{w_V(x)}}\left(1-\frac{1}{w_V\left(x\right)}\right)\right)x.$$

Sea

$$r=\frac{1}{w_V\left(x\right)}+\frac{\frac{1}{w_{U_j}(x)}-\frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)}-\frac{1}{w_V(x)}}\left(1-\frac{1}{w_V\left(x\right)}\right).$$

Como $x\in U_i$, $w_{U_i}\left(x\right)\leq 1$, y entonces

$$\frac{1-\frac{1}{w_V(x)}}{\frac{1}{w_{U_i}(x)}-\frac{1}{w_V(x)}}\leq 1.$$

Así,

$$r\leq\frac{1}{w_V\left(x\right)}+\frac{1}{w_{U_j}\left(x\right)}-\frac{1}{w_V\left(x\right)}=\frac{1}{w_{U_j}\left(x\right)}.$$

Por lo tanto $h_{ij}\left(x\right)=rx\in U_j$, ya que $0\in U_j$ y U_j es convexo.

Entonces, tenemos que $h_{ij}\left(U_i\right)\subseteq U_j$. Análogamente, $h_{ij}^{-1}\left(U_j\right)=h_{ji}\left(U_j\right)\subseteq U_i$, por lo que $h_{ij}\left(U_i\right)=U_j$.

(iii.iii)

Sean $\left[x\right],\left[y\right]\in Y_{w_A}$ y supongamos que $x+\operatorname{cc}U=y+\operatorname{cc}U$. Entonces $x-y\in\operatorname{cc}U$, por lo que, debido a la Proposición 1.5.3, $\mathbb{R}^+\left(x-y\right)\subseteq U$. Como además $y-x\in\operatorname{cc}U$, pues $\operatorname{cc}U$ es un subespacio de X, $\mathbb{R}^+\left(x-y\right)\subseteq -U$. Y ya que $x,y\in Y$ y Y es un subespacio de X, también $\mathbb{R}^+\left(x-y\right)\subseteq Y$. Entonces, $\mathbb{R}^+\left(x-y\right)\subseteq A$, y así $w_A\left(x-y\right)=0$. Esto implica que $[x]=[y]$, y por lo tanto f es inyectiva.

Por otra parte, f es claramente suprayectiva, y es lineal por la definición de las operaciones en Y_{w_A} y $Y/\operatorname{cc}U$. Entonces es un isomorfismo.

(iii.iv)

Sea $y \in V_1$. Entonces $y \in Y$ y $w(y) \leq 1$. Por lo tanto, ya que $w(y) \geq 0$, $0 \leq 1 - w(y) \leq 1$, y así $w(y) + |1 - w(y)| = 1$. Esto implica que $g_1^{-1}(y) = (y, 1 - w(y)) \in V$.

Por otra parte, sea (t_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $t_n > 1 - w(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t_n \to 1 - w(y)$ cuando $n \to \infty$. Así,

$$w(y) + |t_n| = w(y) + t_n > 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $(y, t_n) \notin V$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como además $(y, t_n) \to (y, 1 - w(y))$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$g_1^{-1}(y) = (y, 1 - w(y)) \in \overline{(Y \times \mathbb{R}) \setminus V}.$$

Así, $g_1^{-1}(y) \in \partial V$, y además $g_1^{-1}(y) \in \partial^+ V$ porque $1 - w(y) \geq 0$. De esta manera, g_1^{-1} está bien definida.

Notemos que si $(y, t_1), (y, t_2) \in \partial^+ V$, entonces $t_1 = t_2$. Supongamos que $t_1 < t_2$. Esto implica que

$$w(y) + |t_1| < w(y) + |t_2|,$$

ya que $t_1, t_2 \geq 0$ porque $(y, t_1), (y, t_2) \in \partial^+ V$. Así, como $w(y) + |t_2| \leq 1$, pues $(y, t_2) \in \partial^+ V \subseteq V$, se obtiene la desigualdad $w(y) + |t_1| < 1$.

Tenemos que la función $(x, t) \to w(x) + |t|$ es continua, por lo que existe $U \subseteq Y \times \mathbb{R}$ abierto tal que $(y, t_1) \in U$ y $w(x) + |t| < 1$ para cada $(x, t) \in U$. Entonces $U \subseteq V$, pero esto contradice el hecho de que $(y, t_1) \in \partial V$. Por lo tanto, $t_1 = t_2$.

Ahora, si $(y, t) \in \partial^+ V$, entonces $g_1^{-1}(g_1(y, t)) = g_1^{-1}(y) = (y, 1 - w(y))$. Ya que $(y, 1 - w(y)) \in g_1^{-1}(V_1) \subseteq \partial^+ V$, por lo anterior tenemos que $t = 1 - w(y)$, y así $g_1^{-1}(g_1(y, t)) = (y, t)$.

Además, si $y \in V_1$, entonces $g_1\left(g_1^{-1}(y)\right) = g_1(y, 1 - w(y)) = y$. Por lo tanto, g_1^{-1} es la inversa de g_1.

(iii.v)

Por la definición de h, como $\operatorname{cc} U \subseteq Y$ entonces

$$h(\operatorname{cc} U) = \{(x, 0) \in Y \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{cc} U\}.$$

Y, debido a la Proposición 1.5.3,

$$\operatorname{cc} V = \left\{(y, t) \in Y \times \mathbb{R} \mid \mathbb{R}^+(y, t) \subseteq V\right\},$$

ya que $(0,0) \in V$ y V es cerrado en $Y \times \mathbb{R}$.

Sea $(y,t) \in \operatorname{cc} V$. Supongamos que $t \neq 0$. Entonces $|t| > 0$, y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n|t| > 1$. Así, $w(ny) + |nt| > 1$, y por lo tanto $n(y,t) \notin V$. De esta manera, $\mathbb{R}^+ (y,t) \nsubseteq V$, pero esto contradice que $(y,t) \in \operatorname{cc} V$. Entonces, $t = 0$.

Análogamente, si $w(y) > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nw(y) > 1$, y $n(y,t) \notin V$. Por lo tanto $w(y) = 0$ y $y \in \operatorname{cc} U$, ya que teníamos que

$$\operatorname{cc} U = \{x \in Y \mid w(x) = 0\}.$$

Por consiguiente, $(y,t) = (y,0) \in h(\operatorname{cc} U)$.

Ahora, sean $(x,0) \in h(\operatorname{cc} U)$ y $t \in \mathbb{R}^+$. Entonces $x \in \operatorname{cc} U$, y como $\operatorname{cc} U$ es un subespacio de X, $tx \in \operatorname{cc} U$. Así, $w(tx) = 0$, y por lo tanto $w(tx) + |t0| = 0$ y $t(x,0) \in V$. De aquí concluimos que $\mathbb{R}^+ (x,0) \subseteq V$ y $(x,0) \in \operatorname{cc} V$.

(iii.vi)

Sean (x_n) una sucesión en $\operatorname{cc} U$ y $x \in X$ tales que $\lim_{n\to\infty} w(x_n - x) = 0$. Ya que $\operatorname{cc} U = \{x \in Y \mid w(x) = 0\}$, $w(x_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$w(x) \leq w(x - x_n) + w(x_n) = w(x - x_n) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Así, $w(x) \leq \lim_{n\to\infty} w(x - x_n) = 0$, y por lo tanto $w(x) = 0$ y $x \in \operatorname{cc} U$. De esta manera, $\operatorname{cc} U$ es cerrado con respecto a w.

Ahora, sean $((x_n, 0))$ una sucesión en $h(\operatorname{cc} U)$ y $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n\to\infty} w_V((x_n,0) - (y,t)) = 0$. Entonces $x_n \in \operatorname{cc} U$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $h(\operatorname{cc} U) = \{(x,0) \in Y \times \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{cc} U\}$. Y como

$$0 = \lim_{n\to\infty} w_V((x_n,0) - (y,t)) = \lim_{n\to\infty} (w(x_n - y) + |t|) = \lim_{n\to\infty} w(x_n - y) + |t|$$

y $\lim_{n\to\infty} w(x_n - y) \geq 0$ y $|t| \geq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} w(x_n - y) = 0 = |t|$. Así, $t = 0$, y debido a que $\operatorname{cc} U$ es cerrado con respecto a w, inferimos que $y \in \operatorname{cc} U$. Por lo tanto, $(y,t) \in h(\operatorname{cc} U)$ y concluimos que $h(\operatorname{cc} U)$ es cerrado con respecto a w_V.

(iii.vii)

Para cada $(y,t) \in Y \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d_{w_V}((y,t), h(\operatorname{cc} U)) &= \inf\{w_V((y,t) - (x,0)) \mid (x,0) \in h(\operatorname{cc} U)\} \\ &= \inf\{w(y - x) + |t| \mid x \in \operatorname{cc} U\} \\ &= w(y) + |t|, \end{aligned}$$

ya que $0 \in \operatorname{cc} U$, y como $w(x) = 0$ para cada $x \in \operatorname{cc} U$, se concluye que $w(y) + |t| \leq w(y-x) + w(x) + |t| = w(y-x) + |t|$ para cada $x \in \operatorname{cc} U$.

Así, para cada $(y,t) \in (Y \times \mathbb{R}) \backslash h(\operatorname{cc} U)$ tenemos que $f_2(y,t) = (y,t)$ si $w(y) + |t| \geq 1$.

Sea $(y,t) \in V$. Entonces $f_2^{-1}(y,t) \in (Y \times \mathbb{R}) \backslash h(\operatorname{cc} U)$. Supongamos que $f_2^{-1}(y,t) = (y_1, t_1) \notin V$. Esto implica que $w(y_1) + |t_1| > 1$, y por lo tanto $f_2(y_1,t_1) = (y_1,t_1)$. Así,

$$(y,t) = f_2\left(f_2^{-1}(y,t)\right) = f_2(y_1,t_1) = (y_1,t_1) \notin V.$$

Pero $(y,t) \in V$. De esta manera, $f_2^{-1}(y,t) \in V$ y así $f_2^{-1}(V) \subseteq V \backslash h(\operatorname{cc} U)$. Entonces, $V \subseteq f_2(V \backslash h(\operatorname{cc} U))$.

Ahora, sea $(y,t) \in V \backslash h(\operatorname{cc} U)$. Supongamos que $f_2(y,t) = (y_1,t_1) \notin V$. Así, $w(y_1) + |t_1| > 1$, y entonces $f_2(y_1,t_1) = (y_1,t_1)$ (notemos que, como $(y_1,t_1) \notin V$ y $h(\operatorname{cc} U) \subseteq V$, (y_1,t_1) sí está en $(Y \times \mathbb{R}) \backslash h(\operatorname{cc} U)$, el dominio de f_2).

Por lo tanto, $f_2(y,t) = (y_1,t_1) = f_2(y_1,t_1)$ y, como f_2 es inyectiva, ya que es un homeomorfismo, entonces $(y,t) = (y_1,t_1) \notin V$. Pero $(y,t) \in V$. Así, concluimos que $f_2(y,t) \in V$, y $f_2(V \backslash h(\operatorname{cc} U)) \subseteq V$. Por lo tanto, $f_2(V \backslash h(\operatorname{cc} U)) = V$.

(iv.i)

Por una parte,

$$\overline{B_\varepsilon(0) \cap K}^K = \overline{B_\varepsilon(0) \cap K} \cap K \subseteq \overline{B_\varepsilon(0)} \cap K = \overline{B}_\varepsilon(0) \cap K.$$

Recíprocamente, si $x \in \overline{B}_\varepsilon(0) \cap K$, entonces $\|x\| \leq \varepsilon$ y $[0;x) \subseteq B_\varepsilon(0)$. Como además K es convexo y $0 \in K$, $[0;x) \subseteq B_\varepsilon(0) \cap K$. De esta manera, $x \in \overline{[0;x)} \subseteq \overline{B_\varepsilon(0) \cap K}$, y así, ya que $x \in K$,

$$x \in \overline{B_\varepsilon(0) \cap K} \cap K = \overline{B_\varepsilon(0) \cap K}^K.$$

Entonces $\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K \subseteq \overline{B_\varepsilon(0) \cap K}^K$, y por lo tanto $\overline{B}_\varepsilon(0) \cap K = \overline{B_\varepsilon(0) \cap K}^K$.

(iv.ii)

Sean $a = t_1 + \|y_1\|$ y $b = t_2 + \|y_2\|$. Como $r + s = 1$, entonces $r - r^2 = r(1-r) = rs = (1-s)s = s - s^2$. Y ya que $rs(a-b)^2 \geq 0$,

$$\left(r - r^2\right)a^2 - 2rsab + \left(s - s^2\right)b^2 \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r\left(a^2-1\right)+s\left(b^2-1\right) &= ra^2+sb^2-1 \\ &\geq r^2a^2+2rsab+s^2b^2-1=(ra+sb)^2-1 \\ &= (rt_1+st_2+r\left\|y_1\right\|+s\left\|y_2\right\|)^2-1 \\ &\geq (rt_1+st_2+\left\|ry_1+sy_2\right\|)^2-1. \end{aligned}$$

(iv.iii)

Ya que $y \in \operatorname{cc} K$, K es cerrado en X y $x_0 \in \partial K \subseteq K$, por la Proposición 1.5.3 se tiene que $x_0+\mathbb{R}^+y \subseteq K$.

Por otra parte, sea $l>0$. Como

$$s_0+l>s_0=\operatorname{ínf}\left\{s\geq 0 \mid k-sy\notin K\right\},$$

existe $t\in\{s\geq 0 \mid k-sy\notin K\}$ tal que $t<s_0+l$. Entonces $k-ty\notin K$ y

$$k-ty=\left(1-\frac{t}{s_0+l}\right)k+\frac{t}{s_0+l}\left(k-\left(s_0+l\right)y\right)\in\left[k;\,k-\left(s_0+l\right)y\right].$$

Por lo tanto, $[k;\,k-(s_0+l)\,y]\nsubseteq K$. Debido a la convexidad de K, esto implica que $k-(s_0+l)\,y\notin K$, ya que $k\in K$. Así, tenemos que $x_0-ly=k-(s_0+l)\,y\notin K$ para toda $l>0$.

(iv.iv)

Como $d\left(z,K\right)=t$, entonces $z\in\{x\in X \mid d\left(x,K\right)\leq t\}=K+\overline{B}_t\left(0\right)$.

Sea $s>1$. Supongamos por contradicción que $x_0-sy\in K+\overline{B}_t\left(0\right)$. Así $x_0-sy=x_1+x_2$, para algunos $x_1\in K$ y $x_2\in\overline{B}_t\left(0\right)$.

Ya que $\frac{1}{s}<1$ y $x_0,x_1\in K$,

$$k_0=\frac{1}{s}x_1+\left(1-\frac{1}{s}\right)x_0\in K,$$

pues K es convexo. Entonces, como $z=x_0-y=\frac{1}{s}\left(x_0-sy\right)+\left(1-\frac{1}{s}\right)x_0$,

$$\begin{aligned} t=d\left(z,K\right) &\leq \left\|z-k_0\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{s}\left(x_0-sy\right)+\left(1-\frac{1}{s}\right)x_0-\frac{1}{s}x_1-\left(1-\frac{1}{s}\right)x_0\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{s}\left(x_0-sy\right)-\frac{1}{s}x_1\right\| \\ &= \frac{1}{s}\left\|x_0-sy-x_1\right\|=\frac{1}{s}\left\|x_2\right\|\leq\frac{1}{s}t, \end{aligned}$$

ya que $x_2 \in \overline{B}_t\,(0)$. Así, $t \leq \frac{1}{s}t$, pero $t > 0$ y $s > 1$.

Por lo tanto, $x_0 - sy \notin K + \overline{B}_t\,(0)$ para cada $s > 1$. Esto y el hecho de que $z = x_0 - y \in K + \overline{B}_t\,(0)$ implican que $z \in \partial\left(K + \overline{B}_t\,(0)\right)$.

Bibliografía

[1] C. Bessaga y A. Pelczynski. *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*. Polish Scientific Publishers, Varsovia, 1975.

[2] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1989.

[3] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Singapur, 1991.

[4] A. R. Pears. *Dimension Theory of General Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[5] O. H. Keller. *Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen in Hilbertschen Raum*. Math. Ann. 105 (1931), pp. 748-758.

[6] V. L. Klee. *Some Topological Properties of Convex Sets*. Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 30-45.

[7] C. Bessaga y V. L. Klee. *Two Topological Properties of Topological Linear Spaces*. Israel J. Math. 2 (1964), pp. 211-220.

[8] M. Cuth y O. F. K. Kalenda. *Note on Bessaga-Klee Classification*. Colloquium Mathematicum 140 (2013).