UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TEORÍA ESPECTRAL Y PERTURBATIVA DE RELACIONES DISIPATIVAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSUÉ IVAN RIOS CANGAS

TUTOR PRINCIPAL:
DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA
INSTITUTO DE NVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS - UNAM
COMITÉ:
DR. RAFAEL RENÉ DEL RIO CASTILLO
INSTITUTO DE NVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS - UNAM
DR. JULIO HUGO TOLOZA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN INFORMÁTICA PARA LA INGENIERÍA - UTN FRC

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, JULIO DE 2018

A Caleb, a Zuriel y a Neria

... cuán bueno y cuán delicioso
es Habitar la familia igualmente en uno!

"El más dulce de los placeres...

RESUMEN

John von Neumann es el precursor de la teoría de relaciones lineales. Su trabajo en esta dirección fue motivado por la necesidad de considerar el adjunto de un operador lineal diferencial con dominio no denso en el espacio.

El trabajo que aquí presentamos, aborda las teorías espectral y de perturbación de relaciones lineales en espacios de Hilbert. También desarrollamos la teoría de extensiones disipativas mediante la trasformada de Cayley y la teoría de los tripletes de frontera. Además estudiamos la teoría de perturbaciones en el contexto de relaciones lineales y extendemos la teoría clásica de Weyl para relaciones. Como ilustración de la teoría desarrollada, discutimos las caracterizaciones espectrales de las extensiones disipativas del operador de multiplicación en espacios de de Branges.

Abstract

John von Neumann is the precursor of the theory of linear relations. His work in this direction was motivated by the necessity of considering the adjoint operator of a nondensely defined linear differential operator.

The work presented here, deals with the spectral and perturbation theories of linear relations in Hilbert spaces. It is also devoted to the theory of dissipative extensions obtained by means of the Cayley transform and the boundary triplets theory. In addition to this, perturbation theory is considered in the context of linear relations and the classical Weyl theory is extended. As an illustration of the theory developed in this work, a spectral characterization of the dissipative extensions of the multiplication operator in de Branges spaces is obtained.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En los albores de la teoría de los operadores lineales (en particular en el álgebra lineal que comprende desde los sistemas de ecuaciones lineales iniciados por Leibniz en 1678, hasta el concepto de espacio lineal), Peano da el concepto abstracto de espacio lineal real, esto sobre el cuerpo de los números reales. Posteriormente, en la obra literaria “Calcolo geometrico secondo” de H. Grassmann, se introducen los conceptos de sistema lineal, dimensión, elementos dependientes o independientes, base, operadores lineales sobre un espacio lineal, suma y producto de operadores lineales [57, 90].

David Hilbert generaliza aún más esto y su interés por la física lo condujo a contribuir con el nacimiento de las dos grandes teorías físicas del siglo XX, la Física Cuántica y la Mecánica Relativista [27]. Los desarrollos teóricos de Hilbert han tenido un fuerte impacto en la teoría espectral de operadores, así como sus aplicaciones en la mecánica, desde la clásica hasta la cuántica relativista.

En esta tesis trabajamos en espacios de Hilbert, recalcando que algunos resultados de este trabajo podemos generalizarlos a otros espacios lineales (ver por ejemplo [4, 19]). Aunque al inicio incluimos un capítulo sobre la teoría de operadores lineales, nuestro enfoque va dirigido hacia las relaciones lineales. Nuestro objetivo general es extender la teoría espectral de operadores lineales a relaciones lineales. Un operador lineal es un caso particular de relaciones lineales, cuando este lo identificamos con su gráfica. De hecho, una relación lineal resulta ser un operador lineal si y solo si su multivaluado es trivial (Observación 2.2).

Parece increíble que von Neumann no solo fue el pionero en la teoría de extensiones de operadores, sino también en la teoría de relaciones lineales. Ciertamente, la noción moderna de relaciones lineales surge en [84], por la necesidad de trabajar con la adjunta de un operador no densamente definido. La teoría de relaciones lineales fue desarrollada posteriormente en [4, 16, 25]. Citas más recientes las podemos encontrar en [19, 36].

Nuestra motivación de estudiar relaciones y sus extensiones, viene de su uso en la teoría de tripletes fronterizos (ver [22–24, 33, 39]) y en la teoría de cuasi tripletes fronterizos (ver [9, 10]), para extensiones de operadores; una revisión general sobre la teoría de tripletes la podemos ver en [72, Cap. 14]). La teoría de relaciones lineales la usamos también en el estudio de extensiones de operadores simétricos con dominio no denso en el espacio [17, 45]. Cabe remarcar que los ejemplos dados en el Capítulo 6, están relacionados a este tipo de aplicaciones. Las relaciones lineales son cruciales en otros contextos; por ejemplo en la teoría de sistemas canónicos [38, 40].

Los operadores simétricos tienen gran importancia en aplicaciones debido a que están relacionados con los sistemas conservativos. Una generalización de estos sistemas son aquellos en los cuales la energía no necesariamente se conserva en el tiempo. Los sistemas disipativos son aquellos para los cuales la energía no aumenta y para tratarlos es importante la teoría de operadores disipativos [65]. Los operadores disipativos extienden el concepto de los operadores simétricos y tienen sus raíces en la teoría de contracciones para las cuales un trabajo fructífero es [80]. Las contracciones y los operadores disipativos están relacionados a través de la trasformada de Cayley [81, Cap. 4, Sec. 4]. Uno de los primeros trabajos sobre operadores disipativos es debido a Philips [65]. El desarrollo de la teoría de Sz. Nagy y Foiaş para operadores disipativos fue realizado en [63, 64] y posteriormente generalizado en [60–62]. La teoría de extensiones disipativas de operadores simétricos fue formulada en [65].

Uno de los pioneros de las relaciones simétricas fue sin duda R. Arens [4], mientras que la teoría de extensiones simétricas de relaciones simétricas, la cual puede verse como una generalización de la teoría clásica de von Neumann sobre extensiones simétricas de operadores simétricos [83], fue primeramente desarrollada en [25] (*cf.* [1, 30]). Aspectos importantes de la teoría de relaciones simétricas fueron estudiados en [19, 54]. La teoría de relaciones disipativas fue introducida por M. G. Krein y H. Langer en [51]. Aquí estudiamos y presentamos la teoría de extensiones disipativas de relaciones disipativas en tres direcciones, por medio de la trasformada de Cayley, mediante la teoría de perturbación y por último, con la utilización de tripletes fronterizos. Este estudio no solo abarca todos los resultados que se han obtenido sobre la teoría de extensiones simétricas, sino también resalta las peculiaridades de relaciones disipativas que pueden ser importantes en investigaciones futuras y aplicaciones (por ejemplo, en el contexto de tripletes fronterizos para ecuaciones diferenciales parciales donde los índices de deficiencia son infinitos). Las relaciones disipativas aparecen en aplicaciones en [22, 24] y son estudiadas en [6, 25].

Es importante señalar que el desarrollo teórico que presentamos en esta tesis, tiene aplicaciones significativas en la teoría espectral de operadores, tanto en el estudio de extensiones de operadores no densamente definidos [17], como de extensiones en espacios de Hilbert extendidos [3, Apéndice I]. De la misma manera, se presentan aplicaciones a sistemas canónicos en [38, 40], en donde se encuentran sistemas que son simétricos, cerrados, con índices $(1, 1)$ y parte multivaluada no trivial.

A continuación explicamos como organizamos temáticamente esta investigación. Hacemos mención que en el cuerpo de la tesis, al final de cada capítulo, situamos un apartado de los resultados originales que obtuvimos y son descritos alusivamente a como se desarrollaron en la investigación.

El Capítulo 1 presenta un marco general sobre la teoría de operadores en espacios de Hilbert, por lo que es importante mencionar que debemos estar familiarizados con las propiedades geométricas de la teoría de dichos espacios y de operadores lineales continuos. Primeramente damos una breve introducción y posteriormente algunos conceptos generales sobre estos espacios. Continuamos con sistemas ortonormales, bases y el teorema de proyección para proseguir con el estudio de operadores lineales y sus tipos de convergencia. Finalizamos con la gráfica de un operador lineal y así dar la pauta a la teoría de relaciones lineales. Debido a que el objetivo de este capítulo es dar un repaso general sobre la teoría de operadores en espacios de Hilbert, no mostramos resultados nuevos en este capítulo.

El Capítulo 2 es referente a la teoría general de relaciones lineales en espacios de Hilbert. Iniciamos este capítulo con algunos conceptos técnicos y algunos resultados sobre relaciones lineales. La adjunta y sus propiedades de una relación lineal que abordamos en este capítulo, extiende la teoría usual de la adjunta de operadores lineales en espacios de Hilbert. Continuamos con el espectro de una relación lineal, que se estudia de manera paralela al espectro de operadores vista en [12]. La exposición del espectro de una relación lineal que vemos, la podemos encontrar explicada de manera similar en [19]. Introducimos la resolvente para relaciones lineales, así como su primera y segunda identidad, y mostramos que es analítica sobre el conjunto resolvente. Proseguimos con una breve teoría de subespacios invariantes y reductores para relaciones lineales, los cuales juegan un papel fundamental en el Capítulo 4. Esto amplía los conceptos de subespacios invariantes y reductores para operadores que se estudian en [3, 12, 44]. Finalizamos este capítulo con la sección 2.5, donde introducimos los conceptos de relativamente acotado y relativamente compacto en el contexto de relaciones lineales, además de que damos algunos resultados referentes a estos conceptos, los cuales nos serán de utilidad en resultados posteriores.

La mayor parte del Capítulo 3 está dedicada a la teoría de relaciones disipativas y obtenemos nuevos resultados, para los cuales, según nuestro entender, no hay pruebas en la literatura anterior a este trabajo. También vale la pena señalar que las pruebas de algunos resultados clásicos sobre operadores disipativos, así como sus casos particulares: operadores simétricos y autoadjuntos, son simplificados cuando los consideramos en el ámbito de relaciones disipativas. En las dos primeras secciones de este capítulo, vemos una serie de conceptos y resultados de relaciones disipativas, en primera instancia las relaciones disipativas y después nos restringimos a relaciones simétricas. Incluimos una sección de contracciones debido a que esta clase de operadores ha sido ampliamente estudiada y algunas generalizaciones las podemos encontrar en [18, 28]. Una motivación para estudiar contracciones proviene del problema del subespacio invariante [35, 68, 81]. La clase de contracciones nos será de gran utilidad en el desarrollo de la teoría de descomposición canónica y de la teoría de extensiones de relaciones disipativas (Secciones 4.3 y 5.1). Aunque las contracciones son operadores, las pruebas que incluimos referentes a contracciones están basadas en la teoría de relaciones, es decir, utilizando el formalismo de gráfica. Concluimos este capítulo con la trasformada de Krein para relaciones lineales, la cual mapea relaciones positivas a contracciones simétricas. Esta transformada es importante en el estudio de extensiones positivas.

Damos en el Capítulo 4, una descomposición ortogonal de una relación disipativa en su parte autoadjunta y su parte completamente no autoadjunta. Para ello estudiamos, de manera similar a [25], la trasformada y anti-trasformada de Cayley. Esta trasformada juega un papel muy importante en la correspondencia unívoca entre las relaciones disipativas y las contracciones. La trasformada de Cayley puede hacerse idempotente si se multiplica por cierto escalar [30, 71]. Procedemos con dos descomposiciones canónicas de contracciones, la descomposición de von Neumann-Wold y la descomposición de Sz. Nagy-Foiaş-Langer [52, 81] (ver [79] para una estructura más general de estas descomposiciones). Generalizamos esta última descomposición a contracciones cerradas no necesariamente maximales. Concluimos con las descomposiciones canónicas de relaciones disipativas correspondientes a las de contracciones.

La teoría de extensiones disipativas que vemos en el Capítulo 5, consta de cuatro secciones. En la sección 5.1 damos una caracterización de las extensiones disipativas de relaciones disipativas, como resultado de describir las extensiones contractivas y la aplicación de la trasformada de Cayley. Esto extiende la teoría de von Neumann sobre extensiones simétricas y va paralelamente a los textos clásicos sobre dicha teoría [3, Cap. 7], [12, Cap. 4] [85, Cap. 8], pero en términos más generales. La sección 5.2 presenta las extensiones disipativas de una relación simétrica mediante perturbaciones de una de sus extensiones autoadjuntas. Procedemos a la Sección 5.3, en donde mostramos propiedades espectrales de las extensiones disipativas de una relación simétrica, mediante la teoría de perturbación. En esta sección, aunque existen varias definiciones del espectro esencial [12, 19, 29, 44, 53, 72] relacionadas entre si, utilizamos la análoga a la que se muestra en [44]. Algunos de los resultados que mostramos en esta sección se tienen para operadores [12, 77]. Otros trabajos relacionados con la teoría de perturbación los podemos encontrar en [7, 20, 37, 87]. Es importante mencionar que H. Weyl demostró que los puntos límite del espectro (es decir, todos los puntos del espectro, excepto los autovalores aislados de multiplicidad finita) de una transformación simétrica acotada en un espacio de Hilbert, son invariantes bajo perturbaciones por operadores simétricos compactos [86]. R. Cross en [19] mostró algunos resultados de estabilidad del espectro esencial de relaciones lineales en espacios de Banach. De hecho demostró que el espectro esencial de una relación lineal es invariante bajo perturbaciones por relaciones lineales cerradas relativamente compactas, con parte multivaluada finita. Años más tarde, D. Wilcox en [87], presentó un resultado similar bajo la condición de que la parte multivaluada de la perturbación compacta esté contenido en la parte multivaluada de la relación original, esto aplicando la teoría de Fredholm y generalizando las definiciones correspondientes a la teoría de relaciones lineales, dadas en [29]. Concluimos este capítulo con la Sección 5.4, en donde presentamos la teoría de tripletes fronterizos para la adjunta de una relación simétrica la cual la exponemos de manera paralela a [72, Sec. 14.2].

Una parte sustancial de esta tesis son las aplicaciones que vemos en el Capítulo 6, en donde mostramos tres aplicaciones. La Sección 6.1 concierne a trabajar en la teoría de espacios de de Branges, la cual ha sido aplicada a problemas inversos espectrales para operadores de Schrödinger (*cf.* [69, 70]) y pueden aplicarse a otros operadores que tienen relevancia en la física matemática. Damos una caracterización de todas las extensiones disipativas maximales, así como la de sus espectros, del operador de multiplicación por la variable independiente en estos espacios, en un entorno general que incluye el caso cuando el operador de multiplicación no está densamente definido. Esto generaliza la caracterización de las extensiones autoadjuntas del operador de multiplicación que se estudia en [74, Prop. 3.8].

Es importante mencionar que cualquier operador n-enteros estudiado en [75], es unitariamente equivalente al operador de multiplicación en cierto espacio de de Branges (*cf.* [59]). La teoría de operadores n-enteros desarrolla y extiende el concepto de Krein sobre operadores enteros [32, 46–50]. En esta teoría confluyen varias áreas del análisis funcional y la teoría de funciones, la teoría espectral de operadores, la teoría analítica de muestreo [73], el problema de momentos [2], entre otras. Un ingrediente esencial de la teoría de operadores n-enteros son los modelos funcionales de operadores [78], que permiten el estudio de operadores (por ejemplo diferenciales o en diferencias) a través del operador de multiplicación por la variable independiente en espacios de funciones. En [76], para ciertos $n \in \mathbb{N}$, se tienen ejemplos de operadores n-enteros, que aparecen en física matemática.

En la Sección 6.2 damos una caracterización de todas las extensiones disipativas de un operador de Jacobi no densamente definido con índices $(1, 1)$. La teoría de operadores de Jacobi desprende una amplia gama de aplicaciones y podemos verlos como el análogo discreto a los operadores de Sturm-Liouville. Las teorías espectral y espectral inversa para los operadores de Jacobi desempeñan un papel fundamental en la investigación de redes no lineales completamente integrables [82]. Culminamos con la Sección 6.3, en donde aplicamos los tripletes fronterizos al operador regular de Schrödinger en una dimensión, caracterizando todas sus extensiones disipativas maximales. Es interesante indicar que, bajo ciertas condiciones, el operador de Jacobi es unitariamente equivalente al operador de multiplicación en cierto espacio de de Branges [77]. Esto mismo ocurre con el operador de Schrödinger [69].

Anexamos al final de esta tesis un apartado de investigación subsecuente, en donde exponemos distintos temas a investigar. Esto como objeto de seguir desarrollando teoría sobre la misma línea a este trabajo y, posiblemente, a distintas ramas de la ciencia. También anexamos un apéndice en donde mostramos artículos de investigación que están en proceso de arbitraje. Este apéndice lo incluimos debido a que, con intención de simplificar la redacción en algunas demostraciones de los artículos, la pruebas de los artículos son diferentes a las que encontramos en la tesis.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Espacios de Hilbert

Los espacios con producto interno son probablemente la más natural generalización del espacio euclidiano. En esta sección vemos conceptos generales sobre la teoría de espacios de Hilbert, para ello es necesario estar familiarizados con las propiedades geométricas de dicha teoría.

Iniciamos con espacios lineales donde definimos un producto interno e iremos construyendo gradualmente los espacios de Hilbert. Los resultados que mostramos en esta sección, son resultados clásicos de en espacios de Hilbert que podemos encontrar en [12, 44, 72].

Definición 1.1. Consideremos un espacio lineal $\mathcal{L}$ sobre un campo $\mathbb{K}$. Decimos que una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathbb{K}$ es un producto interno si para cada $f, g, h \in \mathcal{L}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ lo siguiente se cumple:

$$\begin{aligned} \langle f, \alpha g + \beta h\rangle &= \alpha\langle f,g\rangle + \beta\langle f,h\rangle, && \text{(lineal en la segunda componente)} \\ \langle f,g\rangle &= \overline{\langle g,f\rangle}, && \text{(hermitiana)} \\ \langle f,f\rangle &> 0,\ f \neq 0. && \text{(positiva definida)} \end{aligned}$$

Muchos autores consideran al producto interno como lineal en la primera componente. Para efectos prácticos lo consideramos lineal en la segunda componente, mencionando que los resultados que obtenemos son totalmente equivalentes.

Un espacio lineal con producto interno $(\mathcal{L}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se llama pre-Hilbert. El producto interno induce la norma

$$\|f\| := \langle f,f\rangle^{1/2} \quad f \in \mathcal{L}. \tag{1.1}$$

La introducción de esta norma nos permite aplicar la noción y hechos de la teoría de espacios normados a espacios pre-Hilbert. El espacio $(\mathcal{L}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio normado, la norma y las operaciones algebraicas en $\mathcal{L}$ son continuas.

Definición 1.2. Decimos que un espacio pre-Hilbert es un espacio de Hilbert si el espacio es completo con respecto a la norma (1.1).

Denotamos a los espacios de Hilbert con $\mathcal{H}$ y tomamos dichos espacios sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Además, al hablar de subespacios nos estamos refiriendo a un subconjunto lineal cerrado y cada subespacio de un espacio de Hilbert puede ser considerado como un espacio de Hilbert, con respecto al producto interno heredado.

Definición 1.3. Decimos que dos elementos f,g en $\mathcal{H}$ son ortogonales, denotado por $f \perp g$, si $\langle f,g\rangle = 0$. Para $\mathcal{F},\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ escribimos $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$ si $\langle f,g\rangle = 0$, para cada $f \in \mathcal{F}$ y $g \in \mathcal{G}$.

Recordemos que, dado un subconjunto $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, el conjunto generado por $\mathcal{G}$, denotado como span $\mathcal{G}$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos en $\mathcal{G}$. La cerradura de un conjunto lineal $\mathcal{G}$ la denotamos como $\overline{\mathcal{G}}$, sin caer en ambigüedad con el conjugado de un número complejo.

Proposición 1.4. *Si $h \perp \mathcal{G}$ entonces $h \perp \overline{\operatorname{span} \mathcal{G}}$. En particular, si $\overline{\operatorname{span} \mathcal{G}} = \mathcal{H}$ y $h \perp \mathcal{G}$ entonces $h = 0$.*

Demostración. Claramente $h \perp \operatorname{span} \mathcal{G}$. Sea $f \in \overline{\operatorname{span} \mathcal{G}}$, entonces existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en span $\mathcal{G}$ tales que $f_n \to f$. Como $\langle h, f_n\rangle = 0$ y debido a la continuidad del producto interno se cumple que $\langle h, f\rangle = 0$. Ahora bien, si $\overline{\operatorname{span} \mathcal{G}} = \mathcal{H}$, entonces al poner $f = h$ obtenemos $h = 0$. $\square$

Para f,g en $\mathcal{H}$ se cumple que

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f,g\rangle + \|g\|^2. \tag{1.2}$$

Entonces mediante inducción en (1.2), para n elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ortogonales a pares en $\mathcal{H}$, se cumple ("Teorema de Pitágoras")

$$\|\sum_{k=1}^{n} f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2. \tag{1.3}$$

Esta igualdad se extiende al caso infinito de la siguiente manera.

Proposición 1.5. *Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores ortogonales a pares en $\mathcal{H}$. Entonces la serie $\sum_k f_k$ converge si y solo si $\sum_k \|f_k\|^2 < \infty$. Más aún,*

$$\|\sum_{k} f_k\|^2 = \sum_{k} \|f_k\|^2. \tag{1.4}$$

Demostración. La convergencia de $\sum_k f_k$ implica la existencia del límite de la suma parcial $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ y de (1.3) se sigue que

$$\|g_{n+p} - g_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|^2 .$$

Entonces $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy si y solo si la serie del lado derecho de (1.4) es convergente, y debido a la completez de $\mathcal{H}$, esto es equivalente al hecho de que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente. La igualdad (1.4) se obtiene usando (1.3) y la continuidad de la norma. □

Como una consecuencia de (1.2), se tiene la siguiente identidad

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2), \quad \forall f,\ g \in \mathcal{H} .$$

Esta identidad es conocida como la "identidad del paralelogramo".

Definición 1.6 (Convergencia Débil)**.** Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ converge débilmente a $f \in \mathcal{H}$, si para cada $h \in \mathcal{H}$, la sucesión $\{\langle f_n, h\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\langle f, h\rangle$. En este caso escribimos $f_n \xrightarrow{w} f$.

Definición 1.7. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy, si para cada $h \in \mathcal{H}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|\langle f_n - f_m, h\rangle| < \varepsilon$.

1.2

Sistemas ortonormales y teorema de proyección

La teoría de las expansiones ortogonales o sistemas ortogonales es bien conocida en el análisis y física matemática y conlleva a grandes aplicaciones. Un sistema ortonormal completo juega el papel de base en un espacio de Hilbert.

Definición 1.8. Decimos que un subconjunto de un espacio de Hilbert es un sistema ortonormal (abreviamos s.o.n.), si sus elementos son de norma uno y cualesquiera dos de sus elementos distintos son ortogonales.

Recordemos que un espacio es separable si contiene un conjunto denso numerable. Cada s.o.n. en un espacio de Hilbert separable es a lo más numerable, con base en esto, a partir de aquí, trabajamos en espacios de Hilbert separables.

Proposición 1.9. *Todo s.o.n. en $\mathcal{H}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un s.o.n. en $\mathcal{H}$ y tomemos $\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\nu_k = 0$. Entonces

$$0 = \|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\nu_k\|^2 = \sum_{k=1}^{N}|\alpha_k|^2 .$$

La última igualdad implica que $\alpha_k = 0$, para $k = 1,2,...,N$. □

Para $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}$, denotemos el complemento ortogonal de $\mathcal{G}$ como

$$\mathcal{G}^{\perp} := \{h\in\mathcal{H} \ : \ h\perp g,\ \forall g\in\mathcal{G}\} .$$

Notemos que $\mathcal{G}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. Además $(\mathcal{G}^{\perp})^{\perp} = \overline{\text{span}\ \mathcal{G}}$.

Definición 1.10. Decimos que un s.o.n. $\mathcal{V}$ en $\mathcal{H}$ es completo si $\mathcal{V}^{\perp} = \{0\}$.

Los s.o.n. completos son maximales en el sentido de que si $\mathcal{V}$ es un s.o.n. completo y si $\mathcal{W}$ es otro s.o.n. tal que $\mathcal{V}\subset\mathcal{W}$, entonces $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Corolario 1.11. *Un s.o.n. $\mathcal{V}$ es completo en $\mathcal{H}$ si y solo si $\overline{\text{span}\ \mathcal{V}} = \mathcal{H}$.*

Demostración. Si $\mathcal{V}$ es completo entonces

$$\begin{aligned}\overline{\text{span}\ \mathcal{V}} &= (\mathcal{V}^{\perp})^{\perp}\\ &= (\{0\})^{\perp} = \mathcal{H} .\end{aligned}$$

Inversamente, si $\mathcal{V}$ no es completo entonces existe $h\neq 0$ en $\mathcal{H}$ tal que $\langle h,\nu\rangle = 0$ para todo $\nu\in\mathcal{V}$. Entonces $h\perp\overline{\text{span}\ \mathcal{V}}$, lo que implica que $\overline{\text{span}\ \mathcal{V}}\neq\mathcal{H}$. □

Definición 1.12. En vista del resultado anterior, decimos que una base ortonormal (escribimos b.o.n.) de un espacio de Hilbert es un s.o.n. completo.

Cualquier b.o.n. en un espacio de Hilbert tiene la misma cardinalidad. Entonces la dimensión de un espacio de Hilbert es la cardinalidad de cualquier b.o.n. en el espacio. La existencia de una base numerable implica la separabilidad del espacio de Hilbert. Inversamente, todo espacio de Hilbert separable tiene una b.o.n. numerable, esto lo obtenemos aplicando un proceso de ortogonalización y un proceso de zornificación.

Considera $\{\nu_k\}$ una b.o.n. en $\mathcal{H}$; para cualquier elemento $h\in\mathcal{H}$, existen $\alpha_k\in\mathbb{C}$ tales que $h = \sum_k\alpha_k\nu_k$, donde sus términos son mutuamente ortogonales. De esto obtenemos que

$$\|h\|^2 = \sum_k|\alpha_k|^2 .$$

Además, debido a la continuidad del producto interno, los coeficientes α_j pueden ser expresados en términos de h como

$$\langle\nu_j,h\rangle = \sum_k\alpha_k\langle\nu_j,\nu_k\rangle = \alpha_j . \tag{1.5}$$

Definición 1.13. Decimos que dos conjuntos lineales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son linealmente independientes si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}$.

Introducimos la siguiente notación la cual será de gran utilidad en resultados posteriores. Para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ subconjuntos lineales en $\mathcal{H}$ denotamos como:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \dot{+} \mathcal{G} := \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G} \text{ y } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}\}. \\ &\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} := \mathcal{F} \dot{+} \mathcal{G} \text{ tal que } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}^{\perp}. \\ &\mathcal{F} \ominus \mathcal{G} := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^{\perp}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

De esto verificamos que $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}$.

Las notaciones $\dot{+}, \oplus$ y $\ominus$, representan la suma directa, la suma ortogonal y la diferencia ortogonal, respectivamente. Además podemos utilizar la suma directa entre conjuntos lineales, siempre que los conjuntos sean linealmente independientes.

Proposición 1.14. *(Teorema de proyección). Sea $\mathcal{F}$ un subespacio de $\mathcal{H}$. Entonces para cada $h \in \mathcal{H}$, existe una única representación $h = f + g$, donde $f \in \mathcal{F}$ y $g \in \mathcal{F}^{\perp}$, y con esto se cumple que*

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}.$$

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert, entonces existe una base ortonormal $\{\phi_k\}$ en $\mathcal{F}$. Para $h \in \mathcal{H}$, tomemos la serie $f = \sum_k \alpha_k \phi_k$, con $\alpha_k = \langle \phi_k, h \rangle$. La serie es convergente y $\langle \phi_k, f \rangle = \alpha_k$. Consideremos $g = h - f$, entonces para cada ϕ_k tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_k, g \rangle &= \langle \phi_k, h - f \rangle \\ &= \langle \phi_k, h \rangle - \langle \phi_k, \sum_j \langle \phi_j, h \rangle \phi_j \rangle \\ &= \langle \phi_k, h \rangle - \sum_j \langle \phi_j, h \rangle \langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $g \perp \mathcal{F}$. Para la unicidad, suponemos que existe otra representación $h = \hat{f} + \hat{g}$ con las propiedades requeridas. Entonces

$$0 = \|f + g - (f_1 + g_1)\|^2 = \|f - f_1\|^2 + \|g - g_1\|^2,$$

es decir $f_1 = f$ y $g_1 = g$. □

1.3 Operadores lineales

En esta sección solamente vemos conceptos sobre operadores lineales en espacios de Hilbert, los cuales tendrán dominio y rango en el mismo espacio. Para un operador T denotamos su dominio como dom T, su rango como ran T y su núcleo o kernel como ker T. Por simplificación estándar, escribimos Tf en vez de $T(f)$.

Definición 1.15. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Decimos que una aplicación

$$T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

es un operador lineal si para cada $f,\ g \in \text{dom } T$ y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ se satisface

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g\,.$$

Observemos que dom T, ran T y ker T son conjuntos lineales. A través de este trabajo, a los operadores lineales simplemente los llamamos operadores. Para $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ escribimos $T_{|\mathcal{G}}$, como el operador T cuyo dominio restringimos al conjunto $\mathcal{G}$. Estrictamente sería $T_{|\mathcal{G}\cap \text{dom } T}$.

Definición 1.16. Sean T y S dos operadores y $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. El operador $\alpha T + \beta S$ tiene dominio

$$\text{dom }(\alpha T + \beta S) = \text{dom } T \cap \text{dom } S\,,$$

con $(\alpha T + \beta S) f = \alpha T f + \beta S f$.

El operador TS tiene dominio

$$\text{dom }(TS) = \{ f \in \text{dom } S \ :\ S f \in \text{dom } T \}\,,$$

con $TSf = T(TSf)$.

Decimos que T es extensión de S, denotado por $S \subset T$, si dom $S \subset$ dom T y para todo $f \in$ dom S se cumple $Tf = Sf$.

Definición 1.17. Decimos que un operador T es cerrado (escribimos $T = \overline{T}$), si para cualquier sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en el dominio de T tales que $f_n \to f$, $Tf_n \to g$, implica $f \in$ dom T y $Tf = g$.

El operador identidad I en $\mathcal{H}$ tiene como dominio y rango a $\mathcal{H}$, y cumple que $If = f$, para cada $f \in \mathcal{H}$. Además I es cerrado.

Definición 1.18. Decimos que un operador T es acotado si existe $C > 0$ tal que para todo $f \in$ dom T, se cumple que $\|Tf\| \leq C\,\|f\|$. La norma de T viene dada por

$$\|T\| := \sup_{\substack{f\, \in \text{ dom } T,\\ f \neq 0}} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}\,.$$

La norma operador cumple las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\substack{f\, \in \text{ dom } T,\\ \|f\| < 1}} \|Tf\| \\ &= \sup_{\substack{f\, \in \text{ dom } T,\\ \|f\| \leq 1}} \|Tf\| \\ &= \sup_{\substack{f\, \in \text{ dom } T,\\ \|f\| = 1}} \|Tf\|\,. \end{aligned}$$

Observación 1.19. Es fácil ver que un operador es acotado si y solo si es continuo. Además si un operador es acotado, entonces su dominio es cerrado si y solo si el operador es cerrado.

Denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de todos los operadores acotados tal que su domino es todo $\mathcal{H}$. Notemos que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un espacio lineal normado y definimos tres tipos de convergencia en este espacio.

Definición 1.20. Sean $T,\ T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces decimos que:

- $\{T_n\}$ converge uniformemente a T denotado por $T_n \xrightarrow{u} T$ o por

$$u\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T\,,$$

  si $\|T - T_n\| \to 0$.

- $\{T_n\}$ converge fuertemente a T denotado por $T_n \xrightarrow{s} T$ o por

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T\,,$$

  si para cada f en $\mathcal{H}$, se cumple que $\|Tf - T_n f\| \to 0\,.$

- $\{T_n\}$ converge débilmente a T denotado por $T_n \xrightarrow{w} T$ o por

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T\,,$$

  si para cada f y g en $\mathcal{H}$ se cumple que $\langle g, Tf - T_n f\rangle \to 0\,.$

Observemos que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte y la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

1.4

La gráfica de un operador

En lo siguiente tratamos conceptos y resultados sobre la gráfica de un operador lineal. Estos servirán como pauta a la teoría de relaciones lineales. La exposición de la siguiente sección es cercana a [12, Cap. 3].

Definición 1.21. Para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ y $(\mathcal{K}\,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ dos espacios de Hilbert, definimos

$$\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K} := \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \;:\; f_1 \in \mathcal{H} \text{ y } f_2 \in \mathcal{K} \right\}. \tag{1.7}$$

Este espacio lineal representa la suma ortogonal de $\mathcal{H}$ con $\mathcal{K}$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$, tenemos las operaciones

$$f + g = \begin{pmatrix} f_1 + g_1 \\ f_2 + g_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha f = \begin{pmatrix} \alpha f_1 \\ \alpha f_2 \end{pmatrix},$$

por lo que $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$ resulta ser un espacio lineal. También consideremos la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K} \times \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathcal{K}}. \tag{1.8}$$

Observemos que (1.8) resulta un producto interno el cual induce la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f_2\|_{\mathcal{K}}^2. \tag{1.9}$$

La norma (1.9) es equivalente a la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\| = \|f_1\|_{\mathcal{H}} + \|f_2\|_{\mathcal{K}}.$$

Es fácil demostrar que $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$ es completo con respecto a la norma (1.9) y por lo tanto $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert.

Observación 1.22. La convergencia en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

A partir de aquí trabajamos en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, aunque algunas veces usamos (1.7) para subespacios lineales en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$.

Definición 1.23. Definimos la gráfica de un operador lineal T como el conjunto lineal $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{G}(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} \ : \ f \in \operatorname{dom} T \right\}.$$

Notemos que cada gráfica de un operador es conjunto lineal de $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$. Sin embargo, no todo conjunto lineal en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ es gráfica de algún operador, para ello es necesaria la siguiente condición.

Teorema 1.24. *Un conjunto lineal $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ es gráfica de un operador si y solo si*

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ \hat{f} \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \ : \ f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1.10}$$

Demostración. Suponemos que (1.10) se cumple. Consideremos las aplicaciones lineales $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\rho : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ dadas por

$$\pi\begin{pmatrix} f \\ \hat{f} \end{pmatrix} = f; \quad \rho\begin{pmatrix} f \\ \hat{f} \end{pmatrix} = \hat{f}\,.$$

Se sigue que $\ker \pi = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ y entonces $T = \rho\pi^{-1}$ es un operador lineal con $\operatorname{dom} T = \pi\mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}$. La prueba contraria se sigue directamente. □

Permítanos introducir los mapeos U, $\mathsf{W} : \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ actuando como

$$\mathsf{U}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}; \ \mathsf{W}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Observemos que, para cada elemento en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, los mapeos U y W satisfacen

$$\mathsf{U}^2 = I = -\mathsf{W}^2, \ \mathsf{UW} = -\mathsf{WU}\,.$$

Si T es un operador invertible entonces $\mathcal{G}(T^{-1}) = \mathsf{U}\mathcal{G}(T)$. Para un conjunto lineal $\mathcal{G} \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ denotemos por

$$-\mathcal{G} := \left\{\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\right\},$$

el cual resulta un conjunto lineal en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$.

Proposición 1.25. *Para un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, lo siguiente se cumple:*

(a) $(\mathsf{W}\mathcal{G})^{\perp} = \mathsf{W}(\mathcal{G}^{\perp})$.

(b) $\overline{\mathsf{W}\mathcal{G}} = \mathsf{W}\overline{\mathcal{G}}$.

(c) $(\mathsf{U}\mathcal{G})^{\perp} = \mathsf{U}(\mathcal{G}^{\perp})$.

(d) $\overline{\mathsf{U}\mathcal{G}} = \mathsf{U}\overline{\mathcal{G}}$.

(e) $\mathsf{U}^2\mathcal{G} = \mathsf{W}^2\mathcal{G} = \mathcal{G}$.

(f) $\mathsf{UW}\mathcal{G} = \mathsf{WU}\mathcal{G} = -\mathcal{G}$.

Demostración. (a) Verifiquemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (\mathsf{W}\mathcal{G})^{\perp} &\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathsf{W}\mathcal{G}, \ \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \in \mathcal{G}, \ \left\langle \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix} \in (\mathcal{G})^{\perp} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathsf{W}(\mathcal{G}^{\perp})\,.
\end{aligned}$$

(b) Tenemos que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \overline{\mathsf{W}\mathcal{G}}$ si y solo si existe $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{W}\mathcal{G}$ que converge a $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, esto es $\left\{\begin{pmatrix} g_n \\ -f_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ y converge a $\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}$ si y solo si $\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{G}}$, es decir, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathsf{W}\overline{\mathcal{G}}$.

Para mostrar los incisos (c) y (d), solo quitemos el signo negativo en la pruebas anteriores. Los incisos (e) y (f) se siguen directamente de la definición y notando que $\mathcal{G}$ es lineal. $\square$

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE RELACIONES LINEALES

2.1 Relaciones lineales

En la sección anterior vimos que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y además, un subconjunto lineal en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ resulta ser gráfica de un operador si el conjunto cumple las condiciones dadas en el Teorema 1.24. A partir de aquí trabajamos con subconjuntos lineales en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, que no necesariamente son gráficas de operadores lineales. Parte de los siguientes resultados los podemos encontrar en [4, 25].

Definición 2.1. A un subconjunto lineal T en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ lo llamamos relación lineal o simplemente relación. Además, denotamos como

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} & \operatorname{ran} T &:= \left\{ g \in \mathcal{H} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \\ \ker T &:= \left\{ f \in \mathcal{H} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T \right\} & \operatorname{mul} T &:= \left\{ g \in \mathcal{H} \ : \ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Más aún, usamos la notación vista en (1.6) en relaciones lineales.

La notación (2.1) es habitual en el caso de operadores a excepción de $\operatorname{mul} T$, que representa el multivaluado de T. Una relación T es cerrada si $T = \overline{T}$ y resulta ser un subespacio en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Observación 2.2. Como un resultado del Teorema 1.24, una relación T es gráfica de un operador si y solo si $\operatorname{mul} T = \{0\}$. En el contexto de relaciones vamos a identificar a cada operador con su gráfica.

Definición 2.3. Definimos la inversa de una relación T como

$$T^{-1} := \mathsf{U}T\,,$$

con U como en (1.11).

La inversa de una relación resulta ser una relación lineal. Además, para T y S dos relaciones tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (T \dotplus S)^{-1} &= T^{-1} \dotplus S^{-1}; \\ (T \oplus S)^{-1} &= T^{-1} \oplus S^{-1}; \\ (T \ominus S)^{-1} &= T^{-1} \ominus S^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De manera directa de la Definición 2.1 se sigue

$$\begin{aligned} &\mathrm{dom}\ T^{-1} = \mathrm{ran}\ T\,, \quad \ker T^{-1} = \mathrm{mul}\ T\,, \\ &\mathrm{ran}\ T^{-1} = \mathrm{dom}\ T\,, \quad \mathrm{mul}\ T^{-1} = \ker T\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si T es un operador con núcleo no trivial, entonces T^{-1} es un ejemplo de una relación que no es operador.

Observación 2.4. Si T y S son relaciones cerradas, entonces $T \ominus S$ es una relación cerrada. Además, si las relaciones cerradas son ortogonales, entonces $T \oplus S$ es una relación cerrada.

Proposición 2.5. *El núcleo y el multivaluado de una relación cerrada son subespacios.*

Demostración. Sea T una relación cerrada y consideremos $f \in \overline{\ker T}$. Entonces existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ker T$ tal que f_n converge a f. Se sigue que $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ y $\begin{pmatrix} f_n \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$. Como T es cerrada, $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T$ y por lo tanto $\ker T$ es cerrado.

Por otra parte la cerradura de T implica la cerradura de T^{-1}. Entonces $\ker T^{-1}$ es cerrado y por lo tanto $\mathrm{mul}\ T$ es cerrado. □

Definición 2.6. Para dos relaciones T y S y $\alpha \in \mathbb{C}$, denotamos las relaciones:

$$\begin{aligned} T + S &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g+h \end{pmatrix} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T, \quad \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in S \right\}. \\ \alpha T &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \alpha g \end{pmatrix} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}. \\ TS &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \ : \ \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in T, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S \right\}. \end{aligned}$$

La suma de relaciones es conmutativa, pero la composición en general no lo es.

También consideramos la relación identidad y la relación cero en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, estas vienen dadas por

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \; : \; f \in \mathcal{H} \right\}; \quad O = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; f \in \mathcal{H} \right\}, \tag{2.4}$$

las cuales son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Notemos que $O = \mathcal{H} \bigoplus \{0\}$.

Observación 2.7. Para una relación cerrada T con dominio todo el espacio $\mathcal{H}$ se cumple que $I \subset T^{-1}T$ y $O \subset T - T$, donde la contención puede ser propia. Sin embargo, podemos verificar que, para un operador S, se cumple que $SS^{-1} = I_{|\text{ran } S}$.

La siguiente afirmación se sigue directamente.

Proposición 2.8. *Sean A, B y S tres relaciones tales que $A \subset B$. Entonces*

$$A + S \subset B + S.$$

En general las relaciones no tienen la propiedad distributiva en la composición. Por ejemplo, si B tiene dominio no denso en $\mathcal{H}$, entonces $\text{dom } BI = \text{dom } B$. Se sigue que $\text{dom } (BI - BI) = \text{dom } B$, mientras que $\text{dom } [B(I - I)] = \mathcal{H}$. Por lo tanto

$$B(I - I) \neq BI - BI.$$

Sin embargo las relaciones satisfacen lo siguiente.

Lema 2.9. *Sean T, A y B tres relaciones, entonces*

$$\begin{aligned} (A + B)T &\subset AT + BT, \\ TA + TB &\subset T(A + B). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (A + B)T$, entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in A + B$. Luego existen $\begin{pmatrix} h \\ g_1 \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} h \\ g_2 \end{pmatrix} \in B$, tales que $g = g_1 + g_2$. Así, $\begin{pmatrix} f \\ g_1 \end{pmatrix} \in AT$ y $\begin{pmatrix} f \\ g_2 \end{pmatrix} \in BT$, es decir, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix} \in AT + BT$.

Por otra parte si $\begin{pmatrix} f \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix} \in TA + TB$, con $\begin{pmatrix} f \\ g_1 \end{pmatrix} \in TA$ y $\begin{pmatrix} f \\ g_2 \end{pmatrix} \in TB$, entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} h \\ g_1 \end{pmatrix} \in T$, $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in B$ y $\begin{pmatrix} k \\ g_2 \end{pmatrix} \in T$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ h + k \end{pmatrix} \in A + B$ y $\begin{pmatrix} h + k \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix} \in T$ lo que implica $\begin{pmatrix} f \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix} \in T(A + B)$. $\square$

Con lo siguiente n podemos tener la igualdad en (2.5).

Teorema 2.10. *Sea T un operador y sean A, B dos relaciones. Entonces*

$$(A+B)T = AT+BT\,.$$

Además, si $\operatorname{ran} A \cup \operatorname{ran} B \subset \operatorname{dom} T$ *entonces* $TA+TB = T(A+B)$.

Demostración. Es suficiente mostrar las contenciones contrarias de (2.5).

Sea $\begin{pmatrix} f \\ g_1+g_2 \end{pmatrix} \in AT+BT$ con $\begin{pmatrix} f \\ g_1 \end{pmatrix} \in AT$ y $\begin{pmatrix} f \\ g_2 \end{pmatrix} \in BT$, entonces existen elementos $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$, $\begin{pmatrix} h \\ g_1 \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} k \\ g_2 \end{pmatrix} \in B$. Dado que T es operador $h=k$ y así $\begin{pmatrix} h \\ g_1+g_2 \end{pmatrix} \in A+B$ lo que implica $\begin{pmatrix} f \\ g_1+g_2 \end{pmatrix} \in (A+B)T$.

Ahora bien, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T(A+B)$, entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A+B$ y $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in T$. También existen $\begin{pmatrix} f \\ h_1 \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} f \\ h_2 \end{pmatrix} \in B$, con $h = h_1+h_2$. Como $\operatorname{ran} A \cup \operatorname{ran} B \subset \operatorname{dom} T$, entonces tenemos $\begin{pmatrix} h_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \in T$, es decir $\begin{pmatrix} h \\ t_1+t_2 \end{pmatrix} \in T$. Dado que T es operador, $t_1+t_2 = g$ y notemos que $\begin{pmatrix} f \\ t_1 \end{pmatrix} \in TA$, $\begin{pmatrix} f \\ t_2 \end{pmatrix} \in TB$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ t_1+t_2 \end{pmatrix} \in TA+TB$. □

La inversa de la composición de relaciones se distribuye de la siguiente manera.

Proposición 2.11. *Si T y S son dos relaciones, entonces $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.*

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in (TS)^{-1}$, entonces existen $\begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \in S$ y $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \in T$. De esto tenemos que $\begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in S^{-1}$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T^{-1}$. Así $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in S^{-1}T^{-1}$ y

$$(TS)^{-1} \subset S^{-1}T^{-1}\,. \tag{2.6}$$

Para la otra contención, usando (2.6) se sigue que

$$(S^{-1}T^{-1})^{-1} \subset (T^{-1})^{-1}(S^{-1})^{-1} = TS\,.$$

Por lo tanto $S^{-1}T^{-1} \subset (TS)^{-1}$. □

Del teorema anterior se sigue que $\mathsf{U}(TS) = (\mathsf{U}S)(\mathsf{U}T)$.

Teorema 2.12. *Sea T una relación cerrada en y $\hat{T}$ un operador cerrado y acotado. Entonces $T+\hat{T}$ es una relación cerrada.*

Demostración. Verificamos por simple inspección que $T+\hat{T}$ es relación lineal. Ahora si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \overline{T+\hat{T}}$, entonces existe $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T+\hat{T}$, tal que $\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}$ converge a $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos elementos $\begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} f_n \\ \hat{T} f_n \end{pmatrix}$, con $h_n + \hat{T} f_n = g_n$. Como la convergencia en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ es equivalente a la convergencia de cada una de sus entradas y $\hat{T}$ es cerrado y acotado entonces se sigue que $\begin{pmatrix} f_n \\ \hat{T} f_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f \\ \hat{T} f \end{pmatrix}$. Ahora bien, definamos $k = g - \hat{T} f$ entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \right\| &= \|f_n - f\| + \|h_n - k\| = \|f_n - f\| + \|h_n - g + \hat{T} f\| \\
&= \|f_n - f\| + \|h_n + \hat{T} f_n - g + \hat{T} f - \hat{T} f_n\| \\
&\le \|f_n - f\| + \|h_n + \hat{T} f_n - g\| + \|\hat{T} f - \hat{T} f_n\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} f_n \\ h_n + \hat{T} f_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| + \|\hat{T}(f - f_n)\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| + C\|(f_n - f)\| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ k + \hat{T} f \end{pmatrix} \in T + \hat{T}$. □

2.2

La adjunta de una relación

La necesidad de considerar el adjunto de operadores lineales diferenciales con dominio no denso, fue la motivación de J. von Neumann para introducir las relaciones lineales en el análisis funcional [84]. Esto debido a que el adjunto de un operador lineal no densamente definido no tiene sentido, es decir, no es un operador lineal, sino una relación lineal con multivaluado no trivial.

Definición 2.13. Definimos la adjunta de una relación T como

$$T^* := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} \ : \ \langle k, f \rangle = \langle h, g \rangle, \ \ \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}.$$

La adjunta de una relación T es una relación lineal y es cerrada debido a la primera propiedad del siguiente teorema, incluso cuando T no lo es.

Teorema 2.14. *La adjunta de una relación satisface las siguientes propiedades:*

1. $T^* = (\mathbf{W}T)^{\perp}$.
2. $T^{**} = \overline{T}$.
3. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
4. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$, *con* $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

5. $S \subset T$ *implica que* $T^* \subset S^*$. *6.* $\ker T^* = (\text{ran } T)^\perp$.

Demostración. Consideramos T y S relaciones lineales y $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

1. Tenemos que $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T^*$ si y solo si $\langle k, f\rangle = \langle h, g\rangle$, para todo $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$, es decir
$$\left\langle \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \text{para todo } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,$$
esto si y solo si $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (\mathbf{W}T)^\perp$.

2. Del inciso anterior y de la Proposición 1.25 tenemos
$$T^{**} = ((\mathbf{W}^2 T)^\perp)^\perp = (T^\perp)^\perp = \overline{T}.$$

3. $(T^*)^{-1} = \mathbf{U}(\mathbf{W}T)^\perp = (\mathbf{W}\mathbf{U}T)^\perp = (T^{-1})^*$

4. Para $\alpha \neq 0$
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (\alpha T)^* &\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T, \langle g, h\rangle = \langle f, \alpha k\rangle \\ &\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T, \langle \frac{1}{\overline{\alpha}} g, h\rangle = \langle f, k\rangle \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \\ \frac{1}{\overline{\alpha}} g \end{pmatrix} \in T^*, \text{ es decir } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \overline{\alpha} T^*. \end{aligned}$$

5. Dado que $S \subset T$, tenemos que $\mathbf{W}S \subset \mathbf{W}T$. Entonces $(\mathbf{W}T)^\perp \subset (\mathbf{W}S)^\perp$. Por lo tanto $T^* \subset S^*$.

6. Un elemento $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T^*$ si y solo si $\langle f, k\rangle = \langle 0, h\rangle = 0$ para todo $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T$, si y solo si $f \in (\text{ran } T)^\perp$.

□

La propiedad (4) del resultado anterior no siempre es correcta cuando $\alpha = 0$. Por ejemplo, es sencillo verificar que $0(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ es el operador cero y es igual a su adjunto. Así
$$[0(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})]^* = O \neq 0 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 0(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^*.$$

Por otra parte, del punto (6) conseguimos la siguiente descomposición:
$$\mathcal{H} = \overline{\text{ran } T} \oplus \ker T^*. \tag{2.7}$$

Teorema 2.15. *Para una relación cerrada T se cumple que*
$$\text{mul } T = (\text{dom } T^*)^\perp. \tag{2.8}$$

Demostración. Se sigue de (2.3) y del Teorema 2.14 que

$$\text{mul } T = \ker T^{-1} = \ker\,[(T^*)^{-1}]^* = [\text{ran }(T^*)^{-1}]^{\perp} = (\text{dom } T^*)^{\perp}.$$

□

Intercambiando T por T^* en (2.8) y tomando el complemento ortogonal, conseguimos que

$$\overline{\text{dom } T} = (\text{mul } T^*)^{\perp}. \tag{2.9}$$

Teorema 2.16. *El rango de $\overline{T}$ es cerrado si y solo si el rango de T^* es cerrado.*

Demostración. Suponemos que ran $\overline{T}$ es cerrado y consideremos $g \in \overline{\text{ran } T^*}$, entonces existe $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T^*$ tal que g_n converge a g. Además, para todo $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \overline{T}$, se cumple que

$$\langle g_n, h\rangle = \langle f_n, k\rangle = \langle f_n, P_{\text{ran }\overline{T}} k\rangle = \langle P_{\text{ran }\overline{T}}\, f_n, k\rangle, \tag{2.10}$$

con $P_{\text{ran }\overline{T}}$ un proyector sobre ran $\overline{T}$. Esto implica que $\{P_{\text{ran }\overline{T}}\, f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en el espacio de Hilbert ran $\overline{T}$. Entonces existe un elemento $f \in$ ran $\overline{T}$ tal que $P_{\text{ran }\overline{T}}\, f_n \xrightarrow{w} f$ y obtenemos de (2.10) que

$$\langle g, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g_n, h\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_{\text{ran }\overline{T}}\, f_n, k\rangle = \langle f, k\rangle$$

para todo $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \overline{T}$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T^*$ y ran T^* es cerrado. La prueba contraria se sigue observando que $\overline{T} = T^{**}$. □

El adjunto, generalmente no es distributivo en suma de relaciones, pero se cumple la siguiente contención.

Proposición 2.17. *Para dos relaciones T y S lo siguiente se cumple:*

$$S^* + T^* \subset (S+T)^*. \tag{2.11}$$

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ s'+t' \end{pmatrix} \in S^* + T^*$ con $\begin{pmatrix} f \\ s' \end{pmatrix} \in S^*$ y $\begin{pmatrix} f \\ t' \end{pmatrix} \in T^*$, entonces para todo $\begin{pmatrix} g_1 \\ s \end{pmatrix} \in S$ y para todo $\begin{pmatrix} g_2 \\ t \end{pmatrix} \in T$,

$$\begin{aligned} \langle s', g_1\rangle &= \langle f, s\rangle, \\ \langle t', g_2\rangle &= \langle f, t\rangle. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por lo tanto, en dom $S \cap$ dom T de (2.12) se sigue que para todo $\begin{pmatrix} g \\ s+t \end{pmatrix} \in S+T$

$$\langle s'+t', g\rangle = \langle f, s+t\rangle,$$

es decir $\begin{pmatrix} f \\ s'+t' \end{pmatrix} \in (S+T)^*$. □

El siguiente resultado muestra las condiciones para que la igualdad en (2.11) se cumpla.

Proposición 2.18. *Si el dominio de T está contenido en el dominio de S y el dominio de $(S+T)^*$ está contenido en el dominio de S^*, entonces*

$$(S+T)^* = S^* + T^*.$$

Demostración. Solo mostramos la contención contraria de (2.11). Bajo las condiciones, para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (S+T)^*$ existe $\begin{pmatrix} f \\ r \end{pmatrix} \in S^*$ y para todo $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in T$ existe $\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} \in S$. Entonces $\begin{pmatrix} h \\ s+t \end{pmatrix} \in S+T$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \langle g, h \rangle &= \langle f, s+t \rangle \\ &= \langle f, s \rangle + \langle f, t \rangle \\ &= \langle r, h \rangle + \langle f, t \rangle, \end{aligned}$$

de donde $\langle g-r, h \rangle = \langle f, t \rangle$ es decir, $\begin{pmatrix} f \\ g-r \end{pmatrix} \in T^*$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T^* + S^*$. □

Con respecto a la distribución del adjunto en composición de relaciones tenemos lo siguiente.

Proposición 2.19. *Para dos relaciones T y S lo siguiente se cumple:*

$$T^* S^* \subset (ST)^*.$$

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T^* S^*$, entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in S^*$ y $\begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix} \in T^*$. Ahora bien, para cada $\begin{pmatrix} r \\ h \end{pmatrix} \in S$ y $\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \in T$ se cumple

$$\begin{aligned} \langle g, k \rangle &= \langle s, t \rangle, \\ \langle s, r \rangle &= \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

Entonces en ran $T \cap$ dom S tomando $r = t$, obtenemos, para todo $\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} \in ST$, que

$$\langle g, k \rangle = \langle f, h \rangle.$$

Esto implica $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (ST)^*$. Por lo tanto $T^* S^* \subset (ST)^*$. □

2.3

El espectro de una relación

En esta sección, damos una serie de conceptos y resultados referentes al espectro de una relación lineal. La exposición es análoga al caso de operadores lineales que se trata en [12].

Decimos que una relación T es acotada, si existe $C > 0$ tal que

$$\|g\| \leq C\|f\|, \qquad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T. \tag{2.13}$$

Debido a (2.13), cada relación acotada resulta ser un operador acotado. En este trabajo, al hablar de relaciones acotadas estamos hablando de operadores acotados. Observemos que para T y S relaciones tales que $S \subset T$, si T es acotada automáticamente se sigue que S es acotada.

Definición 2.20. Definimos el conjunto cuasi-regular de una relación T como

$$\hat{\rho}(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} \;:\; (T - \zeta I)^{-1} \text{ es acotada}\}.$$

La siguiente operación es simple pero muy usual en relaciones y la colocamos en este espacio debido a que la ocupamos en las demostraciones posteriores. Para un elemento $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (T - \zeta I)^{-1}$, con $\zeta \in \mathbb{C}$, se sigue que

$$\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \in (T - \zeta I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g \\ f + \zeta g \end{pmatrix} \in T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g \\ f + \zeta g - \lambda g \end{pmatrix} \in (T - \lambda I).$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (T - \zeta I)^{-1}$ si y solo si $\begin{pmatrix} f + (\zeta - \lambda) g \\ g \end{pmatrix} \in (T - \lambda I)^{-1}$.

Teorema 2.21. *El conjunto cuasi-regular de una relación es un conjunto abierto.*

Demostración. Si $\zeta_0 \in \hat{\rho}(T)$, entonces existe $C_{\zeta_0} > 0$ tal que

$$\|k\| \leq C_{\zeta_0}\|h\|, \quad \forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (T - \zeta_0 I)^{-1}. \tag{2.14}$$

Consideremos la bola abierta $\mathcal{B}_{\frac{1}{C_{\zeta_0}}}(\zeta_0)$ y sea $\zeta \in \mathcal{B}_{\frac{1}{C_{\zeta_0}}}(\zeta_0)$. Es suficiente verificar que $\zeta \in \hat{\rho}(T)$.

Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (T - \zeta I)^{-1}$, tenemos que $\begin{pmatrix} f + (\zeta - \zeta_0) g \\ g \end{pmatrix} \in (T - \zeta_0 I)^{-1}$. Entonces de (2.14) se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{\zeta_0}}\|g\| &\leq \frac{1}{C_{\zeta_0}}(C_{\zeta_0}\|f+(\zeta-\zeta_0)g\|)\\ &\leq \|f\|+|\zeta-\zeta_0|\ \|g\|\,.\end{aligned}$$

Así $\|g\| \leq C'\|f\|$, con $\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_{\zeta_0}} - |\zeta-\zeta_0| > 0$. De esto obtenemos que $(T-\zeta I)^{-1}$ es acotada y por lo tanto $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. ☐

La siguiente observación es una adaptación de [12, Teoremas 3.2.2 y 3.2.7].

Observación 2.22. Si un operador lineal T cumple dos de las siguientes tres propiedades, entonces T cumple las tres propiedades:

- T es cerrado.
- T es acotado.
- El dominio de T es cerrado.

Lema 2.23. *Sea T una relación y sea $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. Entonces* ran $(T-\zeta I)$ *es cerrado si y solo si T es cerrada.*

Demostración. Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, la cerradura del ran $(T-\zeta I)$ implica la cerradura del dominio de $(T-\zeta I)^{-1}$ y debido a que $(T-\zeta I)^{-1}$ es acotado entonces también es cerrado. Así, $T-\zeta I$ es cerrada y por lo tanto T es cerrada.

Inversamente, si T es cerrada entonces $(T-\zeta I)^{-1}$ es cerrado y también es acotado debido a que $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. Por lo tanto ran $(T-\zeta I) =$ dom $(T-\zeta I)^{-1}$ es cerrado. ☐

Notemos que si T es cerrada, entonces para cada $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ se cumple que

$$[\operatorname{ran}\ (T-\zeta I)]^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\ (T-\zeta I)\,. \tag{2.15}$$

Teorema 2.24. *Para una relación cerrada T, la dimensión de* $[\operatorname{ran}\ (T-\zeta I)]^{\perp}$ *es constante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$.*

Demostración. Sea $\zeta_0 \in \hat{\rho}(T)$ y sea $C_{\zeta_0} > 0$ la cota del operador $(T-\zeta_0 I)^{-1}$. Debido a que cada dos elementos en una componente conexa pueden ser unidos con bolas abiertas, es suficiente demostrar la afirmación para la bola abierta $B_{\frac{1}{C_{\zeta_0}}}(\zeta_0)$.

Para $\zeta \in B_{\frac{1}{C_{\zeta_0}}}(\zeta_0)$ tenemos que $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. Vamos a demostrar por contradicción que

$$\dim\ ([\operatorname{ran}\ (T-\zeta_0 I)]^{\perp}) = \dim\ ([\operatorname{ran}\ (T-\zeta I)]^{\perp})\,.$$

Si suponemos que

$$\dim\ ([\operatorname{ran}\ (T-\zeta_0 I)]^{\perp}) < \dim\ ([\operatorname{ran}\ (T-\zeta I)]^{\perp})\,, \tag{2.16}$$

entonces existe $h \in [\text{ran } (T-\zeta I)]^{\perp}$ no trivial, tal que es ortogonal a $[\text{ran } (T-\zeta_0 I)]^{\perp}$. Como T es cerrado, tenemos que $h \in \text{ran } (T-\zeta_0 I)$. Así, existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (T-\zeta_0 I)^{-1}$, además

$$\|k\| \leq C_{\zeta_0} \|h\| . \tag{2.17}$$

Con un simple cálculo mostramos que $\begin{pmatrix} h-(\zeta-\zeta_0)k \\ k \end{pmatrix} \in (T-\zeta I)^{-1}$ y como h es ortogonal a ran $(T-\zeta I) = \text{dom } (T-\zeta I)^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, h-(\zeta-\zeta_0)k \rangle \\ &= \|h\|^2 - \langle h, (\zeta-\zeta_0)k \rangle . \end{aligned}$$

Usando (2.17) se sigue que

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \langle h, (\zeta-\zeta_0)k \rangle \\ &\leq \|h\| \, |\zeta-\zeta_0| \, \|k\| \\ &\leq \|h\| \, |\zeta-\zeta_0| \, C_{\zeta_0} \|h\| < \|h\|^2 , \end{aligned}$$

lo cual resulta una contradicción. La desigualdad contraria de (2.16) se demuestra intercambiando ζ y ζ_0. □

Permítanos introducir dos definiciones de deficiencia que usaremos posteriormente.

Definición 2.25. Definimos el índice de deficiencia de una relación T como

$$\eta_\zeta(T) := \dim \left[\mathcal{H} \ominus \text{ran } (T-\zeta I)\right], \quad \zeta \in \mathbb{C} . \tag{2.18}$$

Debido al Teorema 2.24, el índice de deficiencia de una relación cerrada T es constante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$.

Definición 2.26. Para $\zeta \in \mathbb{C}$, definimos el espacio de deficiencia de una relación T como

$$\mathbf{N}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in T \right\} . \tag{2.19}$$

El espacio de deficiencia resulta ser un operador acotado y satisface las siguientes propiedades:

(1) $\mathbf{N}_\zeta(T) \subset T$.

(2) dom $\mathbf{N}_\zeta(T) = \ker\, (T-\zeta I)$.

(3) Si $T = \overline{T}$ entonces $\mathbf{N}_\zeta(T) = \overline{\mathbf{N}_\zeta(T)}$.

(4) dom $\mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(T^*) = [\text{ran } (T-\zeta I)]^{\perp}$.

La última propiedad implica que

$$\eta_\zeta(T) = \dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(T^*) . \tag{2.20}$$

Tanto el índice de deficiencia como el espacio de deficiencia juegan un papel muy importante en la teoría de extensiones disipativas que desarrollamos en el Capítulo 5. Cabe mencionar que, para efectos prácticos, ambas ecuaciones (2.18) y (2.20) son utilizadas para trabajar con el índice de deficiencia de una relación.

Notemos que para una relación cerrada T y $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, si

$$\dim\,[\operatorname{ran}\,(T-\zeta I)]^{\perp} = 0\,, \tag{2.21}$$

entonces $(T-\zeta I)^{-1}$ es un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 2.27. Denotamos el conjunto regular (o resolvente) de una relación cerrada T como

$$\rho(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : (T-\zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}\,.$$

El conjunto $\rho(T)$ es abierto y consiste en todas las componentes conexas de $\hat{\rho}(T)$ donde (2.21) se cumple. Además la condición de que T sea cerrada no se puede relajar, de lo contrario se tiene del Lema 2.23 que $\rho(T) = \emptyset$. Observemos que $\eta_\zeta(T) = 0$ en cada componente conexa de $\rho(T)$.

Para $\eta \in \mathbb{C}$ distinto de cero, verificamos por simple inspección que T es acotada si y solo si ηT es acotada, que T está en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y solo si ηT está en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y que $(\eta T)^{-1} = \frac{1}{\eta}T^{-1}$.

Para $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ y $\eta \in \mathbb{C}$ consideremos los conjuntos

$$\mathcal{A}+\eta := \{\alpha+\eta \ : \ \alpha \in \mathcal{A}\}; \qquad \eta\mathcal{A} := \{\eta\alpha \ : \ \alpha \in \mathcal{A}\}\,.$$

Así, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ entonces $\mathcal{A}+\eta \subset \mathcal{B}+\eta$ y $\eta\mathcal{A} \subset \eta\mathcal{B}$.

Proposición 2.28. *Para $\eta \in \mathbb{C}$ se cumple lo siguiente:*

1. $\hat{\rho}(T+\eta I) = \hat{\rho}(T)+\eta$.
2. $\rho(T+\eta I) = \rho(T)+\eta$.
3. *Si $\eta \neq 0$, entonces $\hat{\rho}(\eta T) = \eta\hat{\rho}(T)$.*
4. *Si $\eta \neq 0$, entonces $\rho(\eta T) = \eta\rho(T)$.*

Demostración.

1. Notemos que $[(T+\eta I)-\zeta I]^{-1} = [T-(\zeta-\eta)I]^{-1}$, de esto tenemos que $\zeta \in \hat{\rho}(T+\eta I)$ si y solo si $(\zeta-\eta) \in \hat{\rho}(T)$ o equivalentemente $\zeta \in \hat{\rho}(T)+\eta$.

2. Se sigue de manera similar a la demostración del punto anterior, observando que $\operatorname{ran}\,[T-(\zeta-\eta)I] = \operatorname{ran}\,[(T+\eta I)-\zeta I]$.

3. Observemos que $[\eta T-\zeta I]^{-1} = \frac{1}{\eta}[T-\frac{\zeta}{\eta}I]^{-1}$ es acotado si y solo si $[T-\frac{\zeta}{\eta}I]^{-1}$ es acotado. Entonces $\zeta \in \hat{\rho}(\eta T)$ si y solo si $\frac{\zeta}{\eta} \in \hat{\rho}(T)$ o equivalentemente $\zeta \in \eta\hat{\rho}(T)$.

4. Se demuestra de manera análoga al punto anterior usando el hecho de que

$$[\eta T - \zeta I]^{-1} = \frac{1}{\eta}[T - \frac{\zeta}{\eta} I]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow [T - \frac{\zeta}{\eta} I]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

$\square$

Definición 2.29. Para una relación T, definimos los siguientes tipos de espectros:

- El espectro de T como $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.
- El núcleo espectral de T como $\hat{\sigma}(T) = \mathbb{C} \backslash \hat{\rho}(T)$.
- El espectro puntual de T como

$$\sigma_p(T) = \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ \ker\,(T - \zeta I) \neq \{0\}\}.$$

- El espectro puntual no discreto de T como

$$\sigma_p^\infty(T) = \{\zeta \in \sigma_p(T) \ : \ \dim \ker\,(T - \zeta I) = \infty\}.$$

- El espectro discreto de T como

$$\sigma_d(T) = \{\zeta \in \sigma_p(T) \backslash \sigma_p^\infty(T) : \zeta \text{ es aislado}\}.$$

- El espectro continuo de T como

$$\sigma_c(T) = \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{ran}\,(T - \zeta I) \neq \overline{\operatorname{ran}\,(T - \zeta I)}\}.$$

- El espectro residual de T como $\sigma_r(T) = \sigma(T) \backslash \hat{\sigma}(T)$.

Los conjuntos $\sigma(T)$ y $\hat{\sigma}(T)$ son cerrados (en vista de que $\rho(T)$ y $\hat{\rho}(T)$ son abiertos) y claramente $\hat{\sigma}(T) \subset \sigma(T)$. El espectro puntual son los autovalores de la relación. Además el espectro puntual y el espectro continuo de una relación pueden tener intersección no vacía.

Teorema 2.30. *Para una relación cerrada T, se cumple que $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat{\sigma}(T)$.*

Demostración. Si $\zeta \notin \hat{\sigma}(T)$, entonces $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. Del Lema 2.23 se sigue que $\operatorname{ran}\,(T - \zeta I)$ es cerrado y como $(T - \zeta I)^{-1}$ es operador tenemos que

$$\ker\,(T - \zeta I) = \operatorname{mul}\,(T - \zeta I)^{-1} = \{0\},$$

esto implica que $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Por otra parte si $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$, como T es cerrada, se sigue que $(T - \zeta I)^{-1}$ es un operador cerrado con dominio cerrado y por lo tanto acotado. Es decir $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. $\square$

Para $\eta \in \mathbb{C}$ y T una relación cerrada, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\backslash(\hat{\rho}(T)+\eta) &= \mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(T)+\eta\,. \\
\mathbb{C}\backslash(\rho(T)+\eta) &= \mathbb{C}\backslash\rho(T)+\eta\,. \\
\mathbb{C}\backslash(\eta\hat{\rho}(T)) &= \eta\mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(T), \quad \eta \neq 0\,. \\
\mathbb{C}\backslash(\eta\rho(T)) &= \eta\mathbb{C}\backslash\rho(T), \quad \eta \neq 0\,.
\end{aligned}$$

De esto obtenemos lo siguiente:

$$\hat{\sigma}(T+\eta I) = \hat{\sigma}(T)+\eta, \quad \sigma(T+\eta I) = \sigma(T)+\eta\,.$$

Si $\eta \neq 0$, entonces

$$\hat{\sigma}(\eta T) = \eta\hat{\sigma}(T), \quad \sigma(\eta T) = \eta\sigma(T)\,.$$

Más aún, de manera similar a la prueba de la Proposición 2.28 se demuestra lo siguiente.

Proposición 2.31. *Para $\eta \in \mathbb{C}$ se cumple que:*

1. $\sigma_p(T+\eta I) = \sigma_p(T)+\eta$.
2. $\sigma_c(T+\eta I) = \sigma_c(T)+\eta$.
3. $\sigma_p(\eta T) = \eta\sigma_p(T)$, *si* $\eta \neq 0$.
4. $\sigma_c(\eta T) = \eta\sigma_c(T)$, *si* $\eta \neq 0$.

La siguiente afirmación usa el hecho de que $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y solo si $\overline{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver [12], demostración del Teorema 3.2.7).

Teorema 2.32. *Sea T una relación cerrada. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$\sigma(T^*)$ es el complejo conjugado de $\sigma(T)$.*
2. *$\sigma_c(T^*)$ es el complejo conjugado de $\sigma_c(T)$.*
3. *Si $\zeta \in \sigma_r(T)$ entonces $\overline{\zeta} \in \sigma_p(T^*)\backslash\sigma_c(T^*)$.*

Demostración. 1. Si $\zeta \in \rho(T)$ entonces $(T-\zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Debido al Teorema 2.14 tenemos que $(T^*-\overline{\zeta}I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto $\overline{\zeta} \in \rho(T^*)$. Si $\zeta \in \rho(T^*)$ entonces $\overline{\zeta} \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$.

2. Se sigue directamente usando el Teorema 2.16.

3. Si $\zeta \in \sigma_r(T)$, entonces $\zeta \in \hat{\rho}(T)\backslash\rho(T)$, es decir $(T-\zeta I)^{-1}$ es un operador cerrado y acotado con dominio no todo el espacio $\mathcal{H}$. De esta manera ran $(T-\zeta I)$ es cerrado y distinto de $\mathcal{H}$. Así, ker $(T^*-\overline{\zeta}I) \neq \{0\}$ y usando el Teorema 2.16, se sigue que ran $(T^*-\overline{\zeta}I)$ es cerrado. Por lo tanto $\overline{\zeta} \in \sigma_p(T^*)\backslash\sigma_c(T^*)$.

□

Hemos estudiado propiedades espectrales de una relación lineal. Lo siguiente, es descomponer a una relación lineal de tal manera que obtengamos una parte operador de la relación y estudiar propiedades espectrales de dicha parte operador.

Existen distintas maneras de descomponer a una relación lineal en su parte operador y su parte no operador (ver por ejemplo [36] y [19, Cap. I, Sec. 5]). La descomposición que usamos en este trabajo es una adaptación de [25]. Recordemos que una relación cerrada tiene núcleo y multivaluado cerrado (ver Proposición 2.5).

Definición 2.33. Para una relación cerrada T denotamos

$$\begin{aligned} T_\infty &:= \{0\} \bigoplus \operatorname{mul} T\,, \\ T_\odot &:= T \ominus T_\infty\,, \end{aligned}$$

las cuales son relaciones lineales contenidas en T y satisfacen

$$T = T_\odot \oplus T_\infty\,. \tag{2.22}$$

Diremos que T_∞ y $T_\odot$ son la parte multivaluada y la parte operador de T, respectivamente. Dado que T es cerrada, tenemos que T_∞, $T_\odot$ son cerradas y sus rangos son ortogonales. Además, $T_\odot$ es un operador con $\operatorname{dom} T_\odot = \operatorname{dom} T$.

Teorema 2.34. *Si T es una relación cerrada, entonces*

$$\hat\rho(T) \subset \hat\rho(T_\odot)\,. \tag{2.23}$$

Demostración. Notemos que para $\zeta \in \mathbb{C}$

$$(T_\odot - \zeta I)^{-1} \subset (T - \zeta I)^{-1}\,.$$

Si $\zeta \in \hat\rho(T)$, entonces $(T-\zeta I)^{-1}$ es acotada, lo que implica que $(T_\odot - \zeta I)^{-1}$ es acotada. Por lo tanto $\zeta \in \hat\rho(T_\odot)$. □

Debido a (2.23), el núcleo espectral de una relación cerrada contiene al núcleo espectral de su parte operador. Nos interesa averiguar cuándo estos dos núcleos son iguales. Para ello primeramente hacemos la siguiente observación.

Observación 2.35. Una relación cerrada T con $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$, cumple que su parte operador tiene dominio y rango en $(\operatorname{mul} T)^\perp$. Como consecuencia, para $\zeta \in \mathbb{C}$, se sigue que

$$\begin{aligned} T - \zeta I &= (T_\odot \oplus T_\infty) - \zeta I \\ &= (T_\odot - \zeta I) \oplus T_\infty\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Además (2.24) implica

$$\operatorname{ran}\,(T - \zeta I) = \operatorname{ran}\,(T_\odot - \zeta I) \oplus \operatorname{mul} T\,. \tag{2.25}$$

Teorema 2.36. *Si T es una relación cerrada tal que* $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$*, entonces* $\hat\rho(T) = \hat\rho(T_\odot)$.

Demostración. Solo mostramos la contención contraria de (2.23), pero esto se sigue una vez que probemos que, para $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$, la relación $(T-\zeta I)^{-1}$ es acotada. Notemos, de (2.24) y de las propiedades de la inversa (2.2), que

$$(T-\zeta I)^{-1} = (T_\odot - \zeta I)^{-1} \oplus (T_\infty)^{-1}.$$

Entonces, para cada $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (T-\zeta I)^{-1}$, existen $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \in (T_\odot - \zeta I)^{-1}$ y $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in (T_\infty)^{-1}$ tales que $h = r + s$. En vista de que $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$, existe $C > 0$ tal que $\|k\| \leq C\|r\|$. Así

$$\begin{aligned} \|k\| &\leq C(\|r\| + \|s\|) \\ &= C\|r+s\| = C\|h\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(T-\zeta I)^{-1}$ es acotada. □

Bajo las condiciones del resultado anterior, una relación cerrada satisface que su núcleo espectral es igual al núcleo espectral de su parte operador. Sin embrago, esta propiedad no siempre se cumple con el espectro, pues una relación cerrada T con parte multivaluada no trivial y dom $T \subset (\text{mul } T)^\perp$, su parte operador tiene dominio y rango en $(\text{mul } T)^\perp$. Esto implica que dom $(T_\odot - \zeta I)^{-1} \neq \mathcal{H}$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}$ y por ende $\rho(T_\odot) = \emptyset$, es decir, $\sigma(T_\odot) = \mathbb{C}$. Así, si T tiene solo espectro real (por ejemplo las relaciones autoadjuntas que tratamos en la Sección 3.2), entonces su espectro no coincide con el espectro de su parte operador.

La siguiente definición, para una relación T que cumplen dom $T \subset (\text{mul } T)^\perp$, nos ayudará a analizar las similitudes que existen entre los espectros de T en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ y los de su parte operador en $(\text{mul } T)^\perp \oplus (\text{mul } T)^\perp$.

Definición 2.37. Para dos relaciones lineales T y S, definimos la relación T_S en el espacio de Hilbert $(\text{mul } S)^\perp \oplus (\text{mul } S)^\perp$ (con producto interno heredado de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$) como

$$T_S := T \cap (\text{mul } S)^\perp \oplus (\text{mul } S)^\perp. \tag{2.26}$$

La relación T_S resulta una relación lineal. En algunos casos es útil considerar a T_S en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ y se sigue $T_S \subset T$. Notemos que T_S es cerrada si y solo si T es cerrada y si T es un operador entonces T_S es también un operador. Más aún, de manera sencilla verificamos que

$$(T_S)^{-1} = (T^{-1})_S. \tag{2.27}$$

Independientemente de si T es operador o no, T_T es siempre un operador.

Proposición 2.38. *Si T es una relación cerrada, entonces $T_T = (T_\odot)_T$ y, por lo tanto, T_T es un operador cerrado.*

Demostración. Usando la descomposición (2.22) tenemos que $T_\odot \subset T$, lo cual implica que $(T_\odot)_T \subset T_T$. Para la otra contención, si

$$\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T \cap (\text{mul } T)^\perp \oplus (\text{mul } T)^\perp, \tag{2.28}$$

entonces nuevamente de (2.22) existen $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T_\odot$, $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \in T_\infty$ tales que $h = g + k$. Como ran $T_\odot \perp$ mul T, se cumple que $h = g$. Esto implica que $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in (T_\odot)_T$. □

Observación 2.39. Para una relación cerrada T con dom $T \subset (\text{mul } T)^\perp$, se sigue que dom $T_\odot$ (igual a dom T) y ran $T_\odot$ están en $(\text{mul } T)^\perp$. Entonces de la Proposición 2.38 se sigue

$$T_T = (T_\odot)_T = T_\odot \cap (\text{mul } T)^\perp \bigoplus (\text{mul } T)^\perp = T_\odot . \tag{2.29}$$

De esto, cuando T_T es considerado en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, podemos escribir

$$T = T_T \oplus T_\infty .$$

Además, para cualquier $\zeta \in \mathbb{C}$, de (2.24) y de (2.29), se sigue que

$$T - \zeta I = (T_T - \zeta I) \oplus T_\infty . \tag{2.30}$$

Teorema 2.40. *Si T es una relación cerrada con* dom $T \subset (\text{mul } T)^\perp$, *entonces:*

(a) $\hat{\sigma}(T) = \hat{\sigma}(T_T)$.

(b) $\sigma(T) = \sigma(T_T)$.

(c) $\sigma_p(T) = \sigma_p(T_T)$.

(d) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_T)$.

Demostración. (a) Debido a (2.29) tenemos que $(T_T - \zeta I)^{-1}$ es acotado si y solo si $(T_\odot - \zeta I)^{-1}$ es acotado. Entonces $\hat{\rho}(T_\odot) = \hat{\rho}(T_T)$. Por lo tanto, de la Proposición 2.36 la afirmación se cumple.

(b) Para $\zeta \in \rho(T_T)$, el operador $(T_T - \zeta I)^{-1}$ es acotado con dominio $(\text{mul } T)^\perp$. Tomando el punto anterior tenemos que $(T - \zeta I)^{-1}$ también es acotado. Así, de (2.30), tenemos que

$$\begin{aligned} \text{dom } (T - \zeta I)^{-1} &= \text{ran } (T - \zeta I) \\ &= \text{ran } (T_T - \zeta I) \oplus \text{mul } T \\ &= \text{dom } (T_T - \zeta I)^{-1} \oplus \text{mul } T \\ &= (\text{mul } T)^\perp \oplus \text{mul } T = \mathcal{H} . \end{aligned}$$

Por lo tanto $\zeta \in \rho(T)$. La inclusión contraria la obtenemos con un razonamiento similar.

(c) De (2.30) obtenemos que $\ker (T - \zeta I) = \ker (T_T - \zeta I)$, de donde (c) se sigue de inmediato.

(d) Se sigue de (2.30) que

$$\text{ran } (T - \zeta I) = \text{ran } (T_T - \zeta I) \oplus \text{mul } T .$$

Dado que mul T es cerrado, tenemos que ran $(T - \zeta I)$ es cerrado si y solo si ran $(T_T - \zeta I)$ es cerrado. Por lo tanto $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_T)$.

□

En lo siguiente tratamos la resolvente de una relación lineal, la cual discutimos de manera similar a operadores comparado con [12].

Definición 2.41. Sea T una relación cerrada en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$. Definimos la resolvente de T como

$$\begin{aligned} R_T : \rho(T) &\to \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} \\ \zeta &\mapsto (T - \zeta I)^{-1}. \end{aligned}$$

Claramente la resolvente es un operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Teorema 2.42 (Primera identidad). *Si T una relación cerrada, entonces para cada ζ y λ en $\rho(T)$ se cumple*

$$R_T(\zeta) - R_T(\lambda) = (\zeta - \lambda) R_T(\zeta) R_T(\lambda). \tag{2.31}$$

Demostración. Suponemos que $\zeta \neq \lambda$, de lo contrario la afirmación se cumple. Sea $\begin{pmatrix} h \\ f-g \end{pmatrix} \in R_T(\zeta) - R_T(\lambda)$, con

$$\begin{pmatrix} h \\ f \end{pmatrix} \in R_T(\zeta), \quad \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in R_T(\lambda). \tag{2.32}$$

Un cálculo en el segundo elemento de (2.32) muestra que $\begin{pmatrix} h - (\zeta - \lambda) g \\ g \end{pmatrix} \in R_T(\zeta)$ y por linealidad $\begin{pmatrix} g \\ \frac{1}{\zeta - \lambda}(f - g) \end{pmatrix} \in R_T(\zeta)$. Entonces $\begin{pmatrix} h \\ \frac{1}{\zeta - \lambda}(f - g) \end{pmatrix} \in R_T(\zeta) R_T(\lambda)$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} h \\ f-g \end{pmatrix} \in (\zeta - \lambda) R_T(\zeta) R_T(\lambda)$.

Para la otra contención, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (\zeta - \lambda) R_T(\zeta) R_T(\lambda)$, entonces existe

$$\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in R_T(\lambda), \quad \begin{pmatrix} k \\ \frac{1}{\zeta - \lambda} g \end{pmatrix} \in R_T(\zeta). \tag{2.33}$$

Notemos que $\begin{pmatrix} (\zeta - \lambda) k \\ g \end{pmatrix} \in R_T(\zeta)$ y verificamos del primer elemento de (2.33) que $\begin{pmatrix} f - (\zeta - \lambda) k \\ k \end{pmatrix} \in R_T(\zeta)$. Así, $\begin{pmatrix} f \\ g + k \end{pmatrix} \in R_T(\zeta)$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in R_T(\zeta) - R_T(\lambda)$. $\square$

Observación 2.43. Intercambiando λ y ζ en (2.31), tenemos que

$$R_T(\zeta) - R_T(\lambda) = (\zeta - \lambda) R_T(\lambda) R_T(\zeta).$$

De esto obtenemos que la resolvente de una relación es conmutativa en la composición.

Ahora bien, para $\zeta \in \rho(T)$, existe $C_\zeta > 0$ tal que $\|R_T(\zeta)\| \le C_\zeta$. Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ de tal manera que $0 < |\lambda - \zeta| < {C_\zeta}^{-1}$. Para cada $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in [I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1}$, calculamos que $\begin{pmatrix} k \\ \frac{1}{\lambda-\zeta}(k-h) \end{pmatrix} \in R_T(\zeta)$. Entonces $\|k - h\| \le |\lambda - \zeta| C_\zeta \|k\|$. Así,

$$\|k\| - \|h\| \le \|k - h\| \le |\lambda - \zeta| C_\zeta \|k\|\,,$$

de esto obtenemos

$$\|k\| \le \frac{1}{1 - |\lambda - \zeta| C_\zeta} \|h\|\,,$$

lo que implica que $[I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1}$ es un operador acotado. Además, notemos que $[I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)] \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y se cumple

$$I = [I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1}[I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]\,.$$

Entonces

$$[I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1} = I - (\lambda - \zeta)[I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1}R_T(\zeta)\,,$$

recursivamente obtenemos

$$[I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1} = u\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\lambda - \zeta)^k R_T(\zeta)^k\,. \tag{2.34}$$

Por otra parte, de la primera identidad de la resolvente (2.31) se sigue que

$$\begin{aligned} R_T(\zeta) &= R_T(\lambda) - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)R_T(\lambda) \\ &= [I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]R_T(\lambda)\,, \end{aligned}$$

es decir $R_T(\lambda) = [I - (\lambda - \zeta)R_T(\zeta)]^{-1}R_T(\zeta)$. Aplicando (2.34), concluimos que

$$R_T(\lambda) = u\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\lambda - \zeta)^k R_T(\zeta)^{k+1}, \quad |\lambda - \zeta| < \frac{1}{C_\zeta}\,. \tag{2.35}$$

Por lo tanto, hemos probado lo siguiente.

Teorema 2.44. *La resolvente de una relación cerrada T, depende analíticamente de $\lambda \in \rho(T)$. En una vecindad de cada punto $\zeta \in \rho(T)$, $R_T(\lambda)$ se representa como una serie de potencias (2.35), uniformemente convergente en el disco $|\lambda - \zeta| < {C_\zeta}^{-1}$, con $\|R_T(\zeta)\| \le C_\zeta$.*

Observemos que para cualquier $f, g \in \mathcal{H}$, la función escalar $\langle g, R_T(\lambda) f\rangle$ es analítica en $\rho(T)$.

Teorema 2.45 (Segunda identidad). *Sean T un operador cerrado y S una relación cerrada tal que el dominio de S contiene al dominio de T. Si existe $\zeta \in \rho(T) \cap \rho(S)$, entonces*

$$R_T(\zeta) - R_S(\zeta) = R_S(\zeta)(S - T)R_T(\zeta)\,.$$

Demostración. Del hecho de que T es operador, se sigue que

$$R_S(\zeta)(T-\zeta I)R_T(\zeta) = R_S(\zeta). \tag{2.36}$$

Por otra parte, notemos que $R_S(\zeta)(S-\zeta I) = I_{|\text{dom } S}$. Como dom $T \subset$ dom S tenemos que ran $R_T(\zeta) \subset$ dom S. Entonces

$$R_S(\zeta)(S-\zeta I)R_T(\zeta) = I_{|\text{dom } S}R_T(\zeta) = R_T(\zeta). \tag{2.37}$$

Por lo tanto, restando (2.37) y (2.36) obtenemos

$$\begin{aligned} R_T(\zeta) - R_S(\zeta) &= R_S(\zeta)(S-\zeta I)R_T(\zeta) - R_S(\zeta)(T-\zeta I)R_T(\zeta) \\ &= R_S(\zeta)(S-T)R_T(\zeta). \end{aligned}$$

□

Finalizamos la sección con la siguiente propiedad de la resolvente.

Teorema 2.46. *Sean T y S dos relaciones cerradas tal que* dom $S \subset (\text{mul } S)^\perp$*. Si $T \subset S$ entonces*

$$(R_T)_S = R_{T_S}.$$

Demostración. Notemos que $T_\odot \subset S_\odot$, de esto se sigue que tanto el dominio como el rango de $T_\odot$ están contenidos en $(\text{mul } S)^\perp$, lo cual implica que $T_\odot = T_S$. Más aún,

$$\text{dom } T \subset \text{dom } S \subset (\text{mul } S)^\perp \subset (\text{mul } T)^\perp.$$

Entonces, de (2.29), se sigue que $T_T = T_\odot = T_S$. Además, por el Teorema 2.40, tenemos que $\rho(T) = \rho(T_T) = \rho(T_S)$, es decir R_T y R_{T_S} tienen el mismo dominio. Por lo tanto para $\zeta \in \rho(T)$, de (2.30) y de las propiedades de la inversa (2.2), tenemos que

$$\begin{aligned} [R_T(\zeta)]_S &= [(T-\zeta I)^{-1}]_S \\ &= [(T_T-\zeta I)^{-1} \oplus (T_\infty)^{-1}]_S \\ &= [(T_S-\zeta I)^{-1} \oplus (T_\infty)^{-1}]_S \\ &= (T_S-\zeta I)^{-1} = R_{T_S}(\zeta). \end{aligned}$$

□

2.4 Subespacios invariantes y reductores

Permítanos iniciar la sección con una definición de subespacios invariantes en el enfoque de relaciones lineales. Esta definición generaliza el concepto de subespacios invariantes para operadores que se ve en [12, Sec. 3.5].

Definición 2.47. Para una relación T en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ un subespacio en $\mathcal{H}$ denotamos

$$T_{\mathcal{K}} := T \cap (\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}) . \tag{2.38}$$

De la Definición 2.37, para dos relaciones lineales T y S, se sigue de (2.38) que

$$T_S = T_{(\text{mul } S)^{\perp}} . \tag{2.39}$$

Más aún, $T_{\mathcal{H}} = T$ y $T_{\{0\}} = \{0\} \bigoplus \{0\}$.

Definición 2.48. Decimos que un subespacio $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ es invariante para una relación T (escribimos T-invariante) si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\text{dom } T = (\text{dom } T \cap \mathcal{K}) \oplus (\text{dom } T \cap \mathcal{K}^{\perp})$,

(2) $\text{mul } T = (\text{mul } T \cap \mathcal{K}) \oplus (\text{mul } T \cap \mathcal{K}^{\perp})$,

(3) $\text{dom } T_{\mathcal{K}} = \text{dom } T \cap \mathcal{K}$.

Es claro que los subespacios $\mathcal{H}$ y $\{0\}$ son invariantes para cualquier relación T. A estos subespacios les decimos T-invariantes triviales.

Observación 2.49. Si T es un operador, la segunda condición de la Definición 2.48 desaparece. Además la tercera condición implica

$$T(\text{dom } T \cap \mathcal{K}) = T(\text{dom } T_{\mathcal{K}}) = \text{ran } T_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K} . \tag{2.40}$$

La primera condición de la Definición 2.48 junto con (2.40), resulta la definición usual de subespacios invariantes para operadores *cf.* [12, Sec. 3.5].

Definición 2.50. Decimos que un subespacio $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ reduce a una relación T si existen relaciones lineales

$$T_0 \subset \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}; \quad T_1 \subset \mathcal{K}^{\perp} \bigoplus \mathcal{K}^{\perp} , \tag{2.41}$$

tales que

$$T = T_0 \oplus T_1 . \tag{2.42}$$

La relación T se dice irreducible si sus únicos reductores son $\mathcal{H}$ y $\{0\}$.

Notemos que $\mathcal{K}$ reduce a T si y solo si $\mathcal{K}^{\perp}$ reduce a T. Además las ecuaciones (2.41) y (2.42), implican

$$\begin{aligned} \text{dom } T &= \text{dom } T_0 \oplus \text{dom } T_1 ; \\ \text{ran } T &= \text{ran } T_0 \oplus \text{ran } T_1 . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Una relación cerrada T con multivaluado no trivial tal que dom $T \subset (\text{mul } T)^{\perp}$ (por ejemplo las relaciones disipativas que tratamos en el Capítulo 3) tiene al menos dos reductores no triviales, pues de la Observación 2.39 se sigue que

$$T_{\odot} \subset (\text{mul } T)^{\perp} \bigoplus (\text{mul } T)^{\perp}.$$

Por lo tanto, como $T = T_{\odot} \oplus T_{\infty}$, tenemos que mul T y $(\text{mul } T)^{\perp}$ son reductores no triviales.

Proposición 2.51. *Un subespacio $\mathcal{K}$ reduce a T si y solo si $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}^{\perp}$ son T-invariantes.*

Demostración. Suponemos que $\mathcal{K}$ reduce a T. Existen relaciones lineales

$$T_0 \subset \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}, \quad T_1 \subset \mathcal{K}^{\perp} \bigoplus \mathcal{K}^{\perp}$$

tales que $T = T_0 \oplus T_1$, esto implica que $T_0 = T_{\mathcal{K}}$ y $T_1 = T_{\mathcal{K}^{\perp}}$. Así

$$\text{dom } T_{\mathcal{K}} = \text{dom } T_0 = \text{dom } T \cap \mathcal{K}.$$

Similarmente se sigue dom $T_{\mathcal{K}^{\perp}} = \text{dom } T \cap \mathcal{K}^{\perp}$ y de (2.43) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{dom } T &= (\text{dom } T \cap \mathcal{K}) \oplus (\text{dom } T \cap \mathcal{K}^{\perp}); \\ \text{mul } T &= (\text{mul } T \cap \mathcal{K}) \oplus (\text{mul } T \cap \mathcal{K}^{\perp}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}^{\perp}$ son T-invariantes. Inversamente, suponemos que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}^{\perp}$ son T-invariantes, haciendo $T_0 = T_{\mathcal{K}}$ y $T_1 = T_{\mathcal{K}^{\perp}}$, es suficiente mostrar que $T \subset T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}}$.

Sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$, la primera y la última condición de T-invariante implican que existen

$$\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}}; \quad \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}^{\perp}}, \tag{2.44}$$

tales que $f = a + b$. Entonces $\begin{pmatrix} f \\ s+t \end{pmatrix} \in T$ y se sigue que $\begin{pmatrix} 0 \\ g-(s+t) \end{pmatrix} \in T$. La segunda condición de T-invariante implica que existen elementos $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}^{\perp}}$ tales que $g-(s+t) = h+k$. Usando esto y de (2.44) tenemos

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ s+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ t+k \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}}. \tag{2.45}$$

Por lo tanto $T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}}$. □

En la prueba del resultado anterior obtuvimos que $\mathcal{K}$ reduce a T si y solo si

$$T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}}. \tag{2.46}$$

Se sigue de la expresión anterior que T es cerrada si y solo si $T_{\mathcal{K}}$ y $T_{\mathcal{K}^{\perp}}$ son cerradas. Además, con un cálculo sencillo obtenemos que

$$\overline{T} = \overline{T}_{\mathcal{K}} \oplus \overline{T}_{\mathcal{K}^{\perp}}.$$

Usaremos la descomposición (2.46), cuando estemos hablando de subespacios reductores.

Teorema 2.52. *Sea T una relación y $\mathcal{K}$ un subespacio de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{K}$ reduce a T entonces $\mathcal{K}$ reduce a T^* y se satisface que*

$$(T_{\mathcal{K}})^* = (T^*)_{\mathcal{K}}; \quad (T_{\mathcal{K}^\perp})^* = (T^*)_{\mathcal{K}^\perp}. \tag{2.47}$$

Además

$$(T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp})^* = T^*_{\mathcal{K}} \oplus T^*_{\mathcal{K}^\perp}. \tag{2.48}$$

Demostración. Como $\mathcal{K}$ reduce a T tenemos la descomposición $T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp}$. Observemos que

$$\mathsf{W}\overline{T}_{\mathcal{K}} \oplus (T_{\mathcal{K}})^* = \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}; \qquad \mathsf{W}\overline{T}_{\mathcal{K}^\perp} \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^* = \mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathsf{W}\overline{T} \oplus [(T_{\mathcal{K}})^* \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*] &= \mathsf{W}[\overline{T}_{\mathcal{K}} \oplus \overline{T}_{\mathcal{K}^\perp}] \oplus [(T_{\mathcal{K}})^* \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*] \\ &= [\mathsf{W}\overline{T}_{\mathcal{K}} \oplus (T_{\mathcal{K}})^*] \oplus [\mathsf{W}\overline{T}_{\mathcal{K}^\perp} \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*] \\ &= (\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}) \oplus (\mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp) \\ &= \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} = \mathsf{W}\overline{T} \oplus T^*,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$T^* = (T_{\mathcal{K}})^* \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*. \tag{2.49}$$

Como $(T_{\mathcal{K}})^* \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ y $(T_{\mathcal{K}^\perp})^* \subset \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp$, entonces $\mathcal{K}$ reduce a T^*. Así, de (2.46) deducimos que

$$T^* = (T^*)_{\mathcal{K}} \oplus (T^*)_{\mathcal{K}^\perp}. \tag{2.50}$$

Por lo tanto, de (2.49) y (2.50) obtenemos (2.47) y (2.48). □

Permítanos demostrar el siguiente teorema para relaciones acotadas definidas en todo el espacio.

Teorema 2.53. *Para una relación T en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un subespacio $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, lo siguiente se cumple:*

(a) $\mathcal{K}$ es T-invariante si y solo si $\mathcal{K}^\perp$ es T^*-invariante.

(b) $\mathcal{K}$ reduce a T si y solo si $\mathcal{K}$ reduce a T^*.

(c) Si $\mathcal{K}$ es T-invariante y T^*-invariante entonces $\mathcal{K}$ reduce a T y a T^*.

Demostración. (a) Suponemos que $\mathcal{K}$ es T-invariante. La condición $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ implica que $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, de donde las dos primeras condiciones de subespacios invariantes se cumplen directamente. Solo nos falta demostrar la tercera condición, pero esto se reduce a demostrar que $\mathcal{K}^\perp \subset \operatorname{dom} T^*_{\mathcal{K}^\perp}$.

Sea $h \in \mathcal{K}^{\perp}$, entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T^*$ y dado que $\mathcal{K}$ es T-invariante, para todo $f \in \mathcal{K}$ existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$ tal que $g \in \mathcal{K}$. Entonces $\langle k, f\rangle = \langle g, h\rangle = 0$, lo cual implica $k \in \mathcal{K}^{\perp}$, es decir $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T^*_{\mathcal{K}^{\perp}}$. Por lo tanto $\mathcal{K}^{\perp} \subset \operatorname{dom} T^*_{K^{\perp}}$.

La prueba contraria del punto (a) se sigue por simetría. Los puntos (b) y (c) se siguen directamente del punto (a) y de la Proposición 2.51. □

2.5

Relativamente acotada y relativamente compacta

Terminamos el capítulo con una sección que involucra el concepto de relativamente acotada y relativamente compacta para relaciones lineales. La exposición es similar al caso de operadores que se ve en [72] y extiende este caso (para un caso más general ver [44]). Vale la pena mencionar que podemos encontrar un concepto más general sobre relaciones relativamente acotadas en [19].

Definición 2.54. Sean T y S dos relaciones tales que $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} S$. Decimos que S es T-acotada si para todo $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$, existe $c \geq 0$ tal que

$$\|g\| \leq c \left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\|, \tag{2.51}$$

donde c es la T-cota de S. Decimos que S es fuertemente T-acotada cuando $c < 1$.

La condición (2.51) de la definición anterior, conlleva a que S tenga multivaluado trivial, es decir, a que S sea un operador. Más aún la definición de relativamente, fuertemente acotada que damos, en el caso de operadores es formalmente más fuerte que la definición dada en [44, Cap. 4, Sec. 1]. Sin embargo, podemos demostrar que son equivalentes siguiendo el argumento de la prueba en [12, Cap. 3, Sec. 4, Teo. 3].

Lema 2.55. *Sea S fuertemente T-acotada. Entonces T es cerrada si y solo si $T+S$ es cerrada.*

Demostración. Dado que S es fuertemente T-acotada, se sigue de la desigualdad del triángulo que existe $0 < c < 1$ tal que para todo $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$,

$$(1-c)\left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} \right\| \leq (1+c)\left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\|. \tag{2.52}$$

Suponemos T cerrada y sea $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \overline{T+S}$, entonces existen sucesiones $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en T y $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S, tales que

$$\begin{pmatrix} f_n \\ h_n+g_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}.$$

Se sigue de (2.52) y del hecho de que $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ h_n+g_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún elemento $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$. Entonces, existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} \in T+S$. Así, nuevamente de (2.52), obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}\right\| &= \lim_{n\to\infty}\left\|\begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_n \\ h_n+g_n \end{pmatrix}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\begin{pmatrix} f-f_n \\ (h-h_n)+(g-g_n) \end{pmatrix}\right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty}(1+c)\left\|\begin{pmatrix} f-f_n \\ h-h_n \end{pmatrix}\right\| = 0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in T+S$, lo cual establece que $T+S$ es cerrada. La prueba contraria la realizamos de manera análoga. □

El requerimiento de que S sea fuertemente T-acotada en el último resultado no se puede debilitar, debido a que si T es un operador cerrado no acotado y $S=-T$, entonces

$$T+S = O|_{\mathrm{dom}\ T}$$

es un operador acotado no cerrado.

Lema 2.56. *Sea T una relación cerrada. Si S y S^* son fuertemente T-acotada y fuertemente T^*-acotada, respectivamente, entonces*

$$(T+S)^* = T^* + S^*\,. \tag{2.53}$$

Demostración. Debido a (2.11), $T^*+S^* \subset \mathbf{W}(T+S)^\perp$. Se sigue del Lema 2.55 que $W(T+S)$ y (T^*+S^*) son cerradas. Así, para probar (2.53), es suficiente mostrar que

$$\mathbf{W}(T+S)\oplus(T^*+S^*) = \mathcal{H}\bigoplus\mathcal{H}\,. \tag{2.54}$$

Como una consecuencia de que S y S^* sean relativamente, fuertemente acotadas, existe

$0 < b < 1$, tal que para cada $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \in T^*$ y $\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix} \in S^*$, tenemos

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &\leq b \left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\|^2, \\ \|s\|^2 &\leq b \left\| \begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Usando el hecho de que T es acotada,

$$\mathbf{W}T \oplus T^* = \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}. \tag{2.56}$$

Entones para $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, existen $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \in T^*$ tales que $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h+l \\ f+t \end{pmatrix}$. En vista de que dom $T \subset$ dom S y dom $T^* \subset$ dom S^*, podemos encontrar $g, s \in \mathcal{H}$ tales que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ y $\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix} \in S^*$. Definamos la relación lineal $\mathbf{Q}$ en $(\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}) \bigoplus (\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H})$ como

$$\mathbf{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix} \ : \ \tilde{r} = \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{s} = \begin{pmatrix} -g \\ s \end{pmatrix} \right\}.$$

Para cualquier $\begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}$, de (2.55) y (2.56) tenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{s}\|^2 &= \|g\|^2 + \|s\|^2 \\ &\leq b \left(\left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \\ &\leq b \left(\left\| \begin{pmatrix} -h \\ f \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \\ &= b \left\| \begin{pmatrix} -h+l \\ f+t \end{pmatrix} \right\|^2 = b\|\tilde{r}\|^2. \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{Q} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H})$ con $\|\mathbf{Q}\| < 1$, lo cual implica

$$\text{ran } (\mathbf{Q} + \mathbf{I}) = \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}.$$

Por lo tanto, para cada $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, existe $\begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} &= \tilde{s} + \tilde{r} \\ &= \begin{pmatrix} -g-h+l \\ s+f+t \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{W} \begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ t+s \end{pmatrix} \in \mathbf{W}(T+S) \oplus (T^* + S^*), \end{aligned}$$

de donde obtenemos (2.54). $\square$

Definición 2.57. Sean T y S dos relaciones tales que $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} S$. Decimos que S es T-compacta, si para cualquier sucesión acotada $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en T y $\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \in S$, entonces $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente.

Observación 2.58. Si T es una relación cerrada, entonces S es T-acotada si y solo si es $T_\odot$-acotada, además la T-cota y la $T_\odot$-cota de S coinciden. Más aún, la relación S es T-compacta si y solo si es $T_\odot$-compacta.

La Definición 2.57 es mas débil que la de 2.54 debido a lo siguiente.

Observación 2.59. Si S es T-compacta, entonces es fuertemente T-acotada. Ciertamente, de la Observación 2.58, S es $T_\odot$-compacta y ambos son operadores. De [85, Sec. 9.2, Teo. 9.7], existen escalares $a \geq 0$ y $0 < b < 1$ tales que para todo $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T_\odot$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$,

$$\|g\| \leq a\|f\| + b\|h\|. \tag{2.57}$$

Así, remplazando T y S por αT y αS respectivamente, donde $\alpha = b/\max\{a,b\}$, conseguimos lo deseado.

Proposición 2.60. *Sea T una relación cerrada. Si S es una relación T-compacta, entonces $T+S$ es cerrada y S es $(T+S)$-compacta.*

Demostración. La cerradura de $T+S$ viene de la Observación 2.59 y del Lema 2.55. Para mostrar que S es $(T+S)$-compacta, consideremos $\left\{\begin{pmatrix} f_n \\ h_n + g_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $T+S$, con $\begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix} \in T$ y $\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Debemos mostrar que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente. Dado que S es T-compacta, esto se reduce a mostrar que $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión acotada. Si suponemos que esto no sucede, entonces $\|h_n\| \to \infty$. De la Observación 2.59, podemos suponer que S es T-acotada. De la desigualdad del triángulo, obtenemos que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$\left\|\begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix}\right\| \leq \frac{1}{1-c}\left\|\begin{pmatrix} f_n \\ h_n + g_n \end{pmatrix}\right\|,$$

de donde conseguimos que

$$1 = \frac{\|h_n\|}{\|h_n\|} \leq \frac{1}{\|h_n\|(1-c)}\left\|\begin{pmatrix} f_n \\ h_n + g_n \end{pmatrix}\right\| \to 0,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión acotada. $\square$

- Resultados originales del capítulo -

Los resultado principales que obtuvimos en este capítulo: vigorizamos la Proposición 2.18 en comparación al resultado que se ve en [4, Teo. 3.41].

En la Definición 2.20 introducimos el conjunto cuasi-regular $\hat{\rho}(T)$ de una relación lineal que no se tenía en la literatura. En el Teorema 2.21 mostramos que este conjunto es abierto y probamos en el Lema 2.23 que sobre este conjunto, ran $(T-\zeta I)$ es cerrado si y solo si T es cerrada. Considerando una relación cerrada, en el Teorema 2.24 exhibimos que dim $[\text{ran } (T-\zeta I)]^{\perp}$ permanece constante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$. Además en el Teorema 2.30 presentamos que

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat{\sigma}(T).$$

En los Teoremas 2.34 y 2.36, para relaciones cerradas, obtuvimos que $\hat{\rho}(T) \subset \hat{\rho}(T_{\odot})$ (ver Definición 2.33 para la parte operador $T_{\odot}$ de T), donde la igualdad se cumple siempre que dom $T \subset (\text{mul } T)^{\perp}$.

La motivación de incluir la Definición 2.37, surge al querer encontrar las similitudes que existen entre los espectros de una relación cerrada y los espectros de su parte operador restringida a un subespacio. Primeramente en la proposición 2.38 mostramos que $T_T = (T_{\odot})_T$ y posteriormente en el Teorema 2.40, para relaciones que cumplen dom $T \subset (\text{mul } T)^{\perp}$, conseguimos que

(a) $\hat{\sigma}(T) = \hat{\sigma}(T_T)$.

(b) $\sigma(T) = \sigma(T_T)$.

(c) $\sigma_p(T) = \sigma_p(T_T)$.

(d) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_T)$.

Con respecto a la resolvente para relaciones $R_T(\lambda) = (T-\lambda I)^{-1}$, en el Teorema 2.44 presentamos que la resolvente depende analíticamente de $\lambda \in \rho(T)$ y en una vecindad de cada punto $\zeta \in \rho(T)$, se representa como una serie de potencias

$$R_T(\lambda) = u\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\lambda-\zeta)^k R_T(\zeta)^{k+1},$$

uniformemente convergente en el disco $|\lambda-\zeta| < C_{\zeta}{}^{-1}$, con $\|R_T(\zeta)\| \leq C_{\zeta}$, además de presentar en el Teorema 2.45 la segunda identidad de la resolvente. Más aún, para relaciones que satisfacen $T \subset S$ y dom $S \subset (\text{mul } S)^{\perp}$, exhibimos en el Teorema 2.46 que $(R_T)_S = R_{T_S}$.

Incluimos en la Definición 2.47 otro subíndice que, a diferencia de la Definición 2.37, es con respecto a subespacios y estos subíndices se relacionan de la forma (2.39). Este subíndice nos ayuda a definir subespacios invariantes y reductores para relaciones y conseguimos lo siguiente: en la Proposición 2.51. mostramos que un subespacio $\mathcal{K}$ reduce a T si y solo si $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}^{\perp}$ son T-invariantes. Por otra parte, en el Teorema 2.52 exponemos que si $\mathcal{K}$ reduce a T entonces $\mathcal{K}$ reduce a T^* y

$$(T_{\mathcal{K}})^* = (T^*)_{\mathcal{K}}, \quad (T_{\mathcal{K}^{\perp}})^* = (T^*)_{\mathcal{K}^{\perp}},$$

de donde obtuvimos $(T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}})^* = T^*_{\mathcal{K}} \oplus T^*_{\mathcal{K}^{\perp}}$.

Por último, en el contexto de relaciones lineales, introducimos las definiciones de relativamente acotada y relativamente compacta (Definiciones 2.54 y 2.57). Exhibimos además los Lemas 2.55, 2.56 y la Proposición 2.60.

CAPÍTULO 3

TEORÍA DE RELACIONES DISIPATIVAS

3.1 Relaciones disipativas

Una ampliación de los sistemas conservativos son los llamados sistemas disipativos, en los cuales la energía no aumenta a través del tiempo [65]. Para tratar estos sistemas es muy importante el estudio de la teoría general de operadores disipativos. Sin embargo, una parte crucial de los operadores disipativos es que tengan dominio denso. Con la motivación de tratar dichos operadores con dominio no denso, trabajamos con la teoría de relaciones disipativas la cual fue introducida en [51].

Definición 3.1. Decimos que una relación L es disipativa si

$$\operatorname{Im} \langle f, g\rangle \geq 0 \tag{3.1}$$

se cumple para todo $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$.

Observación 3.2. Una relación L es disipativa si y solo si $-L^{-1}$ es disipativa, esto debido a que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ si y solo si $\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix} \in -L^{-1}$ y

$$\operatorname{Im} \langle f, g\rangle = \operatorname{Im} \langle -g, f\rangle .$$

Lo anterior fue una caracterización sencilla de relaciones disipativas, la siguiente caracterización requiere el conjunto cuasi-regular de una relación.

Teorema 3.3. *Una relación L es disipativa si y solo si el semi-plano inferior $\mathbb{C}_-$ está contenido en $\hat{\rho}(L)$ y para todo $\zeta \in \mathbb{C}_-$,*

$$\|(L-\zeta I)^{-1}\| \leq -1/\operatorname{Im} \zeta .$$

Demostración. Suponemos que L es disipativa y sea $\zeta \in \mathbb{C}_-$. Si $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (L-\zeta I)^{-1}$ entonces $\begin{pmatrix} k \\ h+\zeta k \end{pmatrix} \in L$, lo cual implica $\mathrm{Im}\ \langle k, h+\zeta k\rangle \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Im}\ \langle k,h\rangle + \mathrm{Im}\ \zeta \|k\|^2 \\ &\leq |\langle k,h\rangle| + \mathrm{Im}\ \zeta \|k\|^2 \\ &\leq \|h\|\,\|k\| + \mathrm{Im}\ \zeta \|k\|^2 . \end{aligned}$$

Para $k \neq 0$ de la última igualdad tenemos

$$\|k\| \leq -\frac{1}{\mathrm{Im}\ \zeta}\|h\| . \tag{3.2}$$

Si $k=0$, entonces (3.2) se sigue directamente. Por lo tanto $\|(L-\zeta I)^{-1}\| \leq -1/\mathrm{Im}\ \zeta$ y $\zeta \in \hat{\rho}(L)$.

Inversamente si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ y $\tau > 0$, entonces $\begin{pmatrix} g-(-i\tau)f \\ f \end{pmatrix} \in [L-(-i\tau)I]^{-1}$ y, por hipótesis,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\leq \frac{1}{\tau^2}\|g+\tau i f\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\tau^2}(\|g\|^2 + \tau^2\|f\|^2 + 2\tau \mathrm{Im}\ \langle f,g\rangle) . \end{aligned}$$

Así,

$$-\frac{1}{2\tau}\|g\|^2 \leq \mathrm{Im}\ \langle f,g\rangle .$$

Tendiendo τ a infinito, obtenemos que $\mathrm{Im}\ \langle f,g\rangle \geq 0$ y por lo tanto L es disipativa. □

Una propiedad que cumple la adjunta de una relación disipativa cerrada es la siguiente.

Proposición 3.4. *Si L es una relación disipativa cerrada, entonces para cada $\zeta \in \hat{\rho}(L)$ (en particular para $\zeta \in \mathbb{C}_-$) se cumple que*

$$\mathrm{ran}\ (L^* - \overline{\zeta} I) = \mathcal{H} . \tag{3.3}$$

Demostración. Para $\zeta \in \hat{\rho}(L)$, del Lema 2.23 y del Theorem 2.16, se sigue que el rango de $(L^* - \overline{\zeta} I)$ es cerrado. Entonces si $\mathrm{ran}\ (L^* - \overline{\zeta} I) \neq \mathcal{H}$ tenemos que $\ker\ (L-\zeta I) \neq \{0\}$. Esto implica que $\zeta \in \sigma_p(L) \subset \hat{\sigma}(L) = \mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(L)$, lo cual resulta una contradicción. □

Del Teorema 3.3, para una relación disipativa cerrada L, tenemos que $\mathbb{C}_-$ es una componente conexa de $\hat{\rho}(L)$. Debido a ello, al índice de deficiencia (2.20) de L sobre $\mathbb{C}_-$ lo denotamos como

$$\eta_-(L) := \dim\ \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(L^*) , \quad \zeta \in \mathbb{C}_- , \tag{3.4}$$

el cual diremos que es el índice de deficiencia inferior de L.

Definición 3.5. Decimos que una relación disipativa es maximal si no tiene extensiones disipativas propias.

Proposición 3.6. *Si L es una relación disipativa cerrada cuyo dominio es todo el espacio, entonces L es un operador acotado, disipativo maximal.*

Demostración. Si S es una extensión disipativa de L, entonces dom $\overline{S} = \mathcal{H}$ y como consecuencia de Proposición 3.12, tenemos que $\overline{S}$ es un operador disipativo y además acotado, debido a la Observación 2.22. Por lo tanto, como $L \subset \overline{S}$ y ambos son operadores con dominio todo el espacio esto conlleva a que son iguales. □

Una caracterización de las relaciones disipativas maximales es la siguiente.

Teorema 3.7. *Una relación disipativa L es maximal si y solo si es cerrada y $\eta_-(L) = 0$.*

Demostración. Suponemos que L es disipativa maximal. Verificamos por simple inspección que la cerradura de una relación disipativa resulta ser relación disipativa, esto implica que L es cerrada. Si $\eta_-(L) \neq 0$, entonces $\mathbf{N}_i(L^*)$ es no trivial. Notemos que para cada $\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_i(L^*)$ y $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in L$ se cumple $\langle k, f \rangle = \langle h, if \rangle$. Usando esto, se sigue que

$$\left\langle \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \right\rangle = \langle h, f \rangle + \langle k, if \rangle = 0,$$

es decir L y $\mathbf{N}_i(L^*)$ son ortogonales. Así, calculamos de manera simple que $S = L \oplus \mathbf{N}_i(L^*)$ es disipativa, contradiciendo el hecho de que L sea maximal y por lo tanto $\eta_-(L) = 0$.

Inversamente, si existe S extensión disipativa de L entonces $S^* \subset L^*$, lo que implica $\eta_-(\overline{S}) \leq \eta_-(L) = 0$. Notemos que para $\zeta \in \mathbb{C}_-$, $(L - \zeta I)^{-1} \subset (\overline{S} - \zeta I)^{-1}$ y ambos son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto $(L - \zeta I)^{-1} = (\overline{S} - \zeta I)^{-1}$ y concluimos que $L = \overline{S}$. □

Observación 3.8. En teorema anterior, la condición $\eta_-(L) = 0$ es equivalente a decir que $\mathbb{C}_- \subset \rho(L)$.

Proposición 3.9. *Una relación disipativa maximal L satisface,*

$$\rho(L) \cap (\mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}) = \hat{\rho}(L) \cap (\mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}). \tag{3.5}$$

Demostración. Suponemos que $\zeta \in \hat{\rho}(L) \cap \mathbb{C}_-$. Como $\eta_-(L) = 0$, tenemos que el conjunto ran $(L - \zeta I)$ coincide con todo el espacio. Esto implica $\zeta \in \rho(L)$.

Ahora suponemos que $\zeta \in \hat{\rho}(L) \cap \mathbb{R}$. Como $\hat{\rho}(L)$ es abierto, existe una vecindad abierta $\mathcal{V}(\zeta)$ de ζ en $\hat{\rho}(L)$. Sabemos que $\eta_\zeta(L)$ es constante en componentes conexas de $\hat{\rho}(L)$. Entonces, para cada $\nu \in \mathcal{V}(\zeta) \cap \mathbb{C}_-$,

$$\eta_\zeta(L) = \eta_\nu(L) = \eta_-(L) = 0.$$

Así, ran $(L - \zeta I) = \mathcal{H}$ y por lo tanto $\zeta \in \rho(L)$. □

De (3.5), deducimos que

$$\sigma(L) \cap \mathbb{R} = \hat{\sigma}(L) \cap \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

De la Observación 3.2 tenemos que la trasformación $L \mapsto -L^{-1}$ preserva la clase de relaciones disipativas. Más aún, esta trasformación preserva también la clase de relaciones disipativas maximales.

Teorema 3.10. *Si L es una relación disipativa maximal, entonces $-L^{-1}$, $-L^*$ y $-L^\perp$ son relaciones disipativas maximales . Inversamente, si $-L^{-1}$, $-L^*$ o $-L^\perp$ es una relación disipativa maximal, entonces L es una relación disipativa maximal.*

Demostración. Suponemos que L es una relación disipativa maximal. De la Observación 3.2 se sigue que $-L^{-1}$ es disipativa. Si suponemos que $-L^{-1}$ tiene extensiones disipativas propias, entonces L también tiene extensiones disipativas propias lo cual es una contradicción. Por lo tanto $-L^{-1}$ es disipativas maximal.
Ahora consideremos $\zeta \in \mathbb{C}_-$ y sea $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (-L^* - \zeta I)^{-1}$, esto es $\begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \in (L + \overline{\zeta} I)^*$. Dado que $\eta_-(L) = 0$, ran $(L + \overline{\zeta} I) = \mathcal{H}$, entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in (L + \overline{\zeta} I)$ y se debe de cumplir que

$$\|k\|^2 = \langle f, -h \rangle. \tag{3.7}$$

Notemos que $\begin{pmatrix} k \\ f \end{pmatrix} \in [L - (-\overline{\zeta})]^{-1}$ y del Teorema 3.3,

$$\|f\| \le -\frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \|k\|. \tag{3.8}$$

Entonces, de (3.7) y (3.8),

$$\begin{aligned} \|k\|^2 &= \langle f, -h \rangle \\ &\le \|f\| \, \|h\| \\ &\le -\frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \|k\| \, \|h\|. \end{aligned}$$

Para $k \neq 0$ la última desigualdad satisface

$$\|k\| \le -\frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \|h\|. \tag{3.9}$$

Si $k = 0$ entonces (3.9) es directo. Por lo tanto, del Teorema 3.3, $-L^*$ es disipativa y la maximalidad, es decir $\mathbb{C}_- \subset \rho(-L^*)$, se sigue del Teorema 2.32.
Ahora bien, para ver que $-L^\perp$ es disipativa maximal, solo observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} -L^\perp &= -(\mathbf{W}\mathbf{W}L)^\perp \\ &= -(\mathbf{W}L)^* \\ &= -(-L^{-1})^*. \end{aligned}$$

Contrariamente notemos que $-(-L^{-1})^{-1} = L$, $-(-L^*)^* = L$ y $-(-L^\perp)^\perp = L$. $\square$

El siguiente resultado nos da una condición para mostrar que la suma de relaciones disipativas maximales resulta una relación disipativa maximal.

Teorema 3.11. *Sean A y V relaciones disipativas maximales. Si* $\operatorname{dom} V = \mathcal{H}$, *entonces* $L = A + V$ *es una relación disipativa maximal.*

Demostración. El hecho de que L sea disipativa, se sigue directamente de (3.1). La cerradura de L viene como consecuencia de la Proposición 3.6 y del Teorema 2.12. Falta probar que L es maximal, pero esto se resume a mostrar que $\mathbf{N}_i(L^*)$ es trivial. Observemos que la Proposición 3.6 asegura $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y por lo tanto $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. De la Proposición 2.18, si $\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \in L^*$, entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in A^*$ y $\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix} \in V^*$ tales que $if = t + s$. Así

$$\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix} \in V^*, \quad \begin{pmatrix} f \\ if - t \end{pmatrix} \in A^*. \tag{3.10}$$

Por otra parte, dado que $-i \in \rho(A)$, existe $\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \in (A + iI)^{-1}$, lo cual implica que $\begin{pmatrix} k \\ t - ik \end{pmatrix} \in A$. Esta inclusión y la segunda en (3.10) implican $\langle if - t, k\rangle = \langle f, t - ik\rangle$ y por lo tanto $\mathrm{Im}\ \langle k, t\rangle = \mathrm{Im}\ \langle f, t\rangle$. Obtenemos de la condición de disipatividad que

$$o \le \mathrm{Im}\ \langle k, t - ik\rangle \le \mathrm{Im}\ \langle k, t\rangle = \mathrm{Im}\ \langle f, t\rangle\,. \tag{3.11}$$

Del Teorema 3.10 tenemos que $-V^*$ es disipativa. Entonces usando (3.10) llegamos a

$$\mathrm{Im}\ \langle f, t\rangle = -\mathrm{Im}\ \langle f, -t\rangle \le 0\,,$$

esto, junto con (3.11), implican $\mathrm{Im}\ \langle f, t\rangle = 0$. Para concluir la prueba, usamos la disipatividad de $-A^*$ (Teorema 3.10) y el segundo elemento de (3.10) para obtener

$$\mathrm{Im}\ \langle f, -if + t, =\rangle - \|f\|^2\,.$$

lo cual implica $f = 0$. □

La siguiente afirmación esclarece la interrelación entre el dominio y el multivaluado de una relación disipativa.

Proposición 3.12. *Si L es una relación disipativa entonces* $\operatorname{dom} L \subset (\operatorname{mul} L)^\perp$. *Además, si L es maximal entonces* $\overline{\operatorname{dom} L} = (\operatorname{mul} L)^\perp$.

Demostración. Sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ y considera $k \in \operatorname{mul} L$. Entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos $\begin{pmatrix} f \\ g + \alpha k \end{pmatrix} \in L$ y $\mathrm{Im}\ \langle f, g + \alpha k\rangle \ge 0$. Así,

$$\mathrm{Im}\ \langle f, g\rangle \ge -\mathrm{Im}\ \alpha\langle f, k\rangle\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Esto implica que $\langle f,k\rangle = 0$ y por lo tanto dom $L \subset (\text{mul } L)^{\perp}$. Ahora bien, suponemos que L es maximal y sea $k \in (\text{mul } L)^{\perp} \ominus \text{dom } L$. Es claro que $\hat{L} := L \dotplus \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}\right\}$ es extensión disipativa de L, lo cual implica $\hat{L} = L$. De este modo $k \in \text{mul } L$, es decir, $k = 0$. Por lo tanto $\overline{\text{dom } L} = (\text{mul } L)^{\perp}$. $\square$

Observación 3.13. Como una consecuencia de la Proposición 3.12, el espectro de cualquier relación disipativa cerrada L satisface las condiciones del Teorema 2.40, es decir las propiedades espectrales de L son equivalentes a las propiedades espectrales de L_L.

Lema 3.14. *Sea L una relación cerrada. Si* dom $L \subset (\text{mul } L)^{\perp}$ *y si $L_{\odot}$ es disipativo, entonces L es disipativa. Inversamente, si L es disipativa entonces $L_{\odot}$ es disipativo.*

Demostración. Para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ existen $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in L_{\odot}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in L_{\infty}$ tales que $g = s + t$. Entonces

$$\text{Im } \langle f,g\rangle = \text{Im } \langle f, s+t\rangle = \text{Im } \langle f,s\rangle \geq 0.$$

Por lo tanto L es disipativa. La prueba contraria se sigue directamente debido a que $L_{\odot} \subset L$. $\square$

El índice de deficiencia de una relación disipativa cerrada con respecto al de su parte operador, se preservan de la siguiente manera.

Teorema 3.15. *Sea L una relación cerrada. Si L es disipativa (maximal), entonces L_L es un operador disipativo (maximal) en* $(\text{mul } L)^{\perp} \bigoplus (\text{mul } L)^{\perp}$ *y*

$$\eta_{-}(L_L) = \eta_{-}(L). \tag{3.12}$$

Inversamente, si mul $L \subset (\text{dom } L)^{\perp}$ *y L_L es disipativo (maximal), entonces L es disipativa (maximal) y por lo tanto* (3.12) *se satisface.*

Demostración. Suponemos que L es disipativa cerrada. Se sigue del Lema 3.14, de la Proposición 3.12 y de la ecuación (2.29) que L_L es un operador disipativo cerrado en $(\text{mul } L)^{\perp} \oplus (\text{mul } L)^{\perp}$. Más aún, (2.30) implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \ominus \text{ran } (L - \zeta I) &= \mathcal{H} \ominus [\text{ran } (L_L - \zeta I_L) \oplus \text{mul } L] \\ &= [\mathcal{H} \ominus \text{mul } L] \ominus \text{ran } (L_L - \zeta I_L) \\ &= (\text{mul } L)^{\perp} \ominus \text{ran } (L_L - \zeta I_L)\,. \end{aligned}$$

De donde se sigue (3.12).

Para la prueba contraria, usamos nuevamente (2.29) para concluir que $L_{\odot}$ es disipativo. Así, del Lema 3.14, tenemos que L es disipativo. Debido a (3.12), L es maximal si y solo si L_L es maximal. $\square$

3.2 Relaciones simétricas

Decimos que una relación A es simétrica si

$$\operatorname{Im}\langle f,g\rangle = 0, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A\,. \tag{3.13}$$

Las relaciones simétricas son una subclase de las relaciones disipativas, de hecho, A es simétrica si y solo si A y $-A$ son disipativas. Observemos que la condición (3.13) es equivalente a $\langle f,g\rangle \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.16. *Para una relación lineal A, los siguientes son equivalentes:*

(a) A es simétrica.

(b) $A \subset A^*$.

(c) Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ en A se cumple que $\langle k,f\rangle = \langle h,g\rangle$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ tenemos $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$, esto implica $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ y por lo tanto $A \subset A^*$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sean $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A$ entonces, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ y por lo tanto $\langle h,g\rangle = \langle k,f\rangle$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ tenemos que $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$, lo cual implica que A es simétrica. □

Tanto la proposición anterior como la siguiente, caracterizan a las relaciones simétricas.

Proposición 3.17. *Una relación A es simétrica si y solo si los semi-planos $\mathbb{C}_+$ y $\mathbb{C}_-$ están contenidos en $\hat{\rho}(A)$, y para todo $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,*

$$\|(A-\zeta I)^{-1}\| \le 1/|\operatorname{Im}\,\zeta|\,.$$

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 3.3 y del hecho de que A y $-A$ sean disipativas. □

Del teorema anterior se sigue que el conjunto cuasi-regular de una relación simétrica cerrada A contiene a los semi-planos $\mathbb{C}_+$ y $\mathbb{C}_-$. Con base en esto y en (2.20), denotamos los índices de deficiencia superior e inferior de A como

$$(\eta_+(A), \eta_-(A)) = (\dim \mathbf{N}_\zeta(A^*), \dim \mathbf{N}_{\bar{\zeta}}(A^*)), \quad \zeta \in \mathbb{C}_-\,. \tag{3.14}$$

Definición 3.18. Decimos que una relación A es autoadjunta si $A = A^*$.

Proposición 3.19. *Si A es una relación simétrica cerrada con dominio todo el espacio, entonces A es un operador acotado y autoadjunto.*

Demostración. Como dom $A = \mathcal{H}$ se sigue de (2.9) que A^* es un operador. Ahora bien, para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$, existe $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A \subset A^*$ lo que implica $\begin{pmatrix} 0 \\ g-h \end{pmatrix}$, es decir $g = h$. Por lo tanto $A = A^*$. Por último, A es un operador cerrado con dominio cerrado y por tanto acotado. □

En lo siguiente damos una caracterización de las relaciones autoadjuntas.

Teorema 3.20. *Para una relación simétrica cerrada A, los siguientes son equivalentes:*

(a) A *es autoadjunta.*

(b) $\eta_{\pm}(A) = 0$.

(c) $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$.

(d) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. (a) ⇒ (b): Para $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$, se sigue que $(A - \zeta I)^{-1}$ es un operador acotado. Así

$$\{0\} = \text{mul } (A - \zeta I)^{-1} = \ker\, (A - \zeta I) = \text{dom } \mathbf{N}_{\zeta}(A),$$

de donde dim $\mathbf{N}_{\zeta}(A^*) = 0$. Por lo tanto $\eta_{\pm}(A) = 0$.

(b) ⇒ (c): Es suficiente mostrar que $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$. Para $\zeta \in \hat{\rho}(A)$ tal que Im $\zeta \neq 0$ by (2.18) tenemos que ran $(A - \zeta I) = \mathcal{H}$ y de esto $\zeta \in \rho(A)$. Si Im $\zeta = 0$, dado que $\hat{\rho}(A)$ es abierto, existe una vecindad abierta B_{ζ} de ζ en $\hat{\rho}(A)$ y en vista de que el índice de deficiencia permanece constante sobre componentes conexas de $\hat{\rho}(A)$, obtenemos que $\eta_{\zeta}(A) = \eta_{\nu}(A) = 0$ con $\nu \in B_{\zeta} \cap \mathbb{C}_-$. Por lo tanto $\zeta \in \rho(A)$.

(c) ⇒ (d) Tenemos que $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(A) \subset \mathbb{R}$.

(d) ⇒ (a) Bajo la hipótesis, $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y verificamos que dom $\mathbf{N}_i(A^*) = \{0\}$. Solo falta mostrar que $A^* \subset A$.

Sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ entonces existe $\begin{pmatrix} g - if \\ h \end{pmatrix} \in (A - iI)^{-1}$, lo cual sigue que

$$\begin{pmatrix} h \\ g - i(f-h) \end{pmatrix} \in A \subset A^*. \tag{3.15}$$

Entonces $\begin{pmatrix} f-h \\ i(f-h) \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_i(A^*)$. Por lo tanto $f = h$ y (3.15) implica que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$. □

Para declarar la próxima afirmación es necesario definir lo siguiente.

Definición 3.21. Decimos que una relación A es positiva (escribimos $A \geq 0$) si

$$\langle f, g\rangle \geq 0, \qquad \text{para todo} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A\,. \tag{3.16}$$

Cada relación positiva es simétrica y por ende disipativa.

Teorema 3.22. *Si A y B dos relaciones autoadjuntas tales que B es positiva y fuertemente A-acotada, entonces $A+iB$ es una relación disipativa maximal.*

Demostración. Establecemos de verificar (3.1) que $A+iB$ es disipativa. La cerradura se sigue del Lema 2.55 después de observar que iB también es fuertemente A-acotada. Falta demostrar que $\mathbf{N}_i((A+iB)^*)$ es trivial. Notemos del Lema 2.56 que $(A+iB)^* = A-iB$. Entonces, para un elemento arbitrario

$$\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \in A - iB\,,$$

existe $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in B$ tales que $if = h - ig$. Así, $\begin{pmatrix} f \\ i(f+g) \end{pmatrix} \in A$ y debido a la autoadjuntes de A, concluimos que

$$\|f\|^2 + \langle f, g\rangle = \operatorname{Im} \langle f, i(f+g)\rangle = 0\,.$$

Dado que B es positiva, la igualdad anterior implica $f = 0$. Por lo tanto $A+iB$ es disipativa maximal. □

Una relación simétrica cerrada A cumple que dom $A \subset (\text{mul } A)^{\perp}$, esto debido a que A es disipativa.

Proposición 3.23. *Sea A una relación cerrada. Si A es simétrica (autoadjunta), entonces A_A es un operador simétrico (autoadjunto) en* $(\text{mul } A)^{\perp} \bigoplus (\text{mul } A)^{\perp}$ *y*

$$\eta_+(A_A) = \eta_+(A)\,; \quad \eta_-(A_A) = \eta_-(A)\,. \tag{3.17}$$

Inversamente, si mul $A \subset (\text{dom } A)^{\perp}$ *y A_A es simétrico (autoadjunto), entonces A es simétrica (autoadjunta) y por lo tanto (3.17) se satisface.*

Demostración. Suponemos que A es simétrica cerrada, entonces A y $-A$ son disipativas cerradas y del Teorema 3.15 se sigue que A_A y $(-A)_{-A}$ son disipativos. Además,

$$\eta_-(A_A) = \eta_-(A); \quad \eta_-((-A)_{-A}) = \eta_-(-A)\,.$$

Observemos que $(-A)_{-A} = -A_A$ y de esto se sigue que A_A es simétrico. Por último

$$\eta_+(A_A) = \eta_-(-A_A) = \eta_-((-A)_{-A}) = \eta_-(-A) = \eta_+(A)\,.$$

Inversamente se sigue que A_A y $-A_A$ son disipativos y de nuevo por el Teorema 3.15 tenemos que A y $-A$ son disipativas, lo que implica que A sea simétrica.

De (3.17) y del Teorema 3.20, se sigue que A es autoadjunta si y solo si A_A es autoadjunto. □

3.3

Contracciones

Abordamos el tema de contracciones ya que es de gran utilidad en la teoría de descomposición canónica de relaciones disipativas y en la teoría de extensiones disipativas (ver Secciones 4.3 y 5.1).

Definición 3.24. Decimos que una relación lineal V es una contracción si

$$\|g\| \leq \|f\|, \quad \text{para todo } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V\,. \tag{3.18}$$

Es decir, V es un operador con norma menor o igual a uno. Más aún, si la igualdad en (3.18) se cumple entonces decimos que V es una relación isométrica.

Observación 3.25. Las relaciones acotadas pueden trabajarse como contracciones. Ciertamente, si T es una relación acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|T\| \leq C$, entonces $V = C^{-1}T$ resulta una contracción.

Permítanos primeramente trabajar con contracciones y posteriormente con relaciones isométricas. Usemos la siguiente notación del disco unitario,

$$\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ |\zeta| < 1\}\,. \tag{3.19}$$

A la frontera de $\mathbb{D}$ la denotamos por $\mathrm{Fr}(\mathbb{D})$.

Proposición 3.26. *Si V es una contracción, entonces $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}} \subset \hat{\rho}(V)$.*

Demostración. Para $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$, es suficiente ver que $(V-\zeta I)^{-1}$ es acotada. Consideremos $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (V-\zeta I)^{-1}$, es decir, $\begin{pmatrix} k \\ h+\zeta k \end{pmatrix} \in V$ y como V es contracción,

$$\begin{aligned} \|k\| &\geq \|h+\zeta k\| \\ &\geq \|\zeta k\| - \|h\| = |\zeta|\|k\| - \|h\|\,, \end{aligned}$$

esto implica que $\|k\| \leq \frac{1}{|\zeta|-1}\|h\|$. Por lo tanto $(V-\zeta I)^{-1}$ es acotada. □

En vista del resultado anterior, si V es una contracción cerrada entonces $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ es una componente conexa de $\hat{\rho}(V)$. De esto, el índice de deficiencia (2.20) de V sobre $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$, podemos denotarlo como

$$\eta_e(V) := \dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(V^*)\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}\,, \tag{3.20}$$

el cual decimos que es el índice de deficiencia exterior de V.

Teorema 3.27. *Si V es una contracción cerrada, entonces*

$$\eta_e(V) = \dim\ (V^*)_\infty\,, \tag{3.21}$$

donde $(V^*)_\infty$ es la parte multivaluada de V^*.

Demostración. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que $|\zeta| > 1$. Si $\dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(V^*) < \dim\ (V^*)_\infty$, entonces existe un elemento no cero $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$ en V^* tal que $h \perp \ker\ (V^* - \overline{\zeta}I)$, es decir $h \in \operatorname{ran}\ (V - \zeta I)$. Notemos que existe $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in V - \zeta I$, esto es $\begin{pmatrix} g \\ h+\zeta g \end{pmatrix} \in V$ y obtenemos $\langle g,h\rangle = 0$. Dado que V es contracción, tenemos que $g \neq 0$ y $\|h+\zeta g\| \leq \|g\|$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &< |\zeta|^2\|g\|^2 + \|h\|^2 \\ &= \|h+\zeta g\|^2 \leq \|g\|^2, \end{aligned}$$

lo cual resulta una contradicción.

Ahora bien, si $\dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(V^*) > \dim\ (V^*)_\infty$, existe un elemento no cero $\begin{pmatrix} h \\ \overline{\zeta}h \end{pmatrix} \in V^*$ tal que $h \perp \operatorname{mul} V^*$. Observemos que V tiene dominio cerrado y de (2.9) se sigue que $h \in \operatorname{dom} V$, es decir, existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in V$. De esto tenemos que $\zeta\|h\|^2 = \langle h,k\rangle$ y en vista de que V es contracción,

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &< |\zeta|\,\|h\|^2 = |\langle h,k\rangle| \\ &\leq \|h\|\,\|k\| \leq \|h\|^2\,, \end{aligned}$$

lo cual también resulta una contradicción. □

Notemos que toda contracción cerrada tiene dominio cerrado. Más aún, de (2.9) se sigue que (3.21) satisface

$$\eta_e(V) = \dim\ \operatorname{mul} V^* = \dim\ \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} V\,. \tag{3.22}$$

Definición 3.28. Decimos que una contracción V es maximal si no tiene extensiones contractivas propias.

Teorema 3.29. *Una contracción V es maximal si y solo si es cerrada y $\eta_e(V) = 0$.*

Demostración. Suponemos que V es una contracción maximal, ciertamente V es cerrado debido a que la cerradura de una contracción también es una contracción. Ahora bien si $\eta_e(V) \neq 0$, entonces $(V^*)_\infty$ es no trivial y como $\operatorname{dom} V = (\operatorname{mul} V^*)^\perp$ podemos considerar a

$$\hat{V} = V \oplus [(V^*)_\infty]^{-1}\,,$$

la cual es una contracción y además, extensión propia de V. Esto resulta una contradicción y por lo tanto $\eta_e(V) = 0$.

Inversamente si $\hat{V}$ es una contracción cerrada y extensión de V, entonces $\hat{V}^* \subset V^*$. Esto implica que $\eta_e(\hat{V}) = 0$ y de (3.22) obtenemos que tanto V como $\hat{V}$ son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Este hecho implica que $\hat{V} = V$. □

Observación 3.30. Con base en el teorema anterior y de (3.22), para una contracción V, los siguientes son equivalentes:

(1) V es maximal.

(2) V es cerrada con $\eta_e(V) = 0$.

(3) $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}} \subset \rho(V)$.

(4) $\sigma(V) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

(5) V es cerrada y V^* es un operador.

(6) $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Lema 3.31. *Producto de contracciones (maximales) es una contractión (maximal).*

Demostración. Consideramos V y $\hat{V}$ dos contracciones, y sea $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in V\hat{V}$ entonces existen $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in \hat{V}$ y $\begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in V$. De esto se sigue que

$$\|k\| \leq \|g\| \leq \|h\|.$$

Por lo tanto $V\hat{V}$ es una contracción. Ahora bien, si V y $\hat{V}$ son maximales entonces ambos están en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, lo que implica que $V\hat{V}$ está en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y por lo tanto es maximal. □

Es claro ver que la transformación $V \mapsto -V$ preserva la clase de contracciones.

Teorema 3.32. *Si V es una contracción maximal, entonces $-V$, V^* y $(V^{-1})^\perp$ son contracciones maximales. Más aún, si $-V$, V^* o $(V^{-1})^\perp$ es contracción maximal, entonces V es contracción maximal.*

Demostración. Suponemos que V es contracción maximal entonces $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es directo que $-V$ es contracción maximal. Ashora si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V^*$, existe $\begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in V$ de donde obtenemos $\langle f, k \rangle = \|g\|^2$. Entonces

$$\|g\|^2 = |\langle f, k \rangle| \leq \|f\| \|k\| \leq \|f\| \|g\|.$$

Así $\|g\| \leq \|f\|$ y esto implica que V^* sea contracción. Dado que $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y por lo tanto V^* es maximal. Para mostrar que $(V^{-1})^\perp$ es contracción maximal se sigue de lo anterior que $-V^*$ es contracción maximal y

$$-V^* = -(-V^{-1}) \perp = (V^{-1})^\perp.$$

Contrariamente notemos que $-(-V) = V$, $(V^*)^* = V$ y $\{[(V^{-1})^\perp]^{-1}\}^\perp = V$. □

Del teorema anterior obtenemos que las transformaciones

$$V \mapsto -V, \quad V \mapsto V^*, \quad V \mapsto (V^{-1})^\perp,$$

preservan la clase de contracciones maximales.

Corolario 3.33. *Sea V una relación, entonces los siguientes son equivalentes.*

(a) V es contracción maximal.

(b) V^*V es contracción maximal.

(c) VV^* es contracción maximal.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Si V es contracción maximal entonces del Teorema 3.32 y del Lema 3.31 tenemos que V^*V es contracción maximal. Inversamente si V^*V es contracción maximal, entonces dom $V = \mathcal{H}$ y para $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in V$ existe $\begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \in V^*$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in V^*V$. Sigue que $\langle h, g\rangle = \|k\|^2$ y $\|g\|^2 \le \|h\|^2$. Así,

$$\|k\|^2 = |\langle h, g\rangle| \le \|h\|\|g\| \le \|h\|^2 .$$

Por lo tanto V es contracción maximal.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) De lo anterior y del Teorema 3.32 tenemos que V es contracción maximal si y solo si V^* es contracción maximal, esto si y solo si VV^* es contracción maximal. $\square$

En lo siguiente tratamos con la clase de las relaciones isométricas, es decir, cuando la igualdad en (3.18) se cumple.

Observación 3.34. Notemos que si V es isométrica entonces V^{-1} también lo es. Además, el dominio y el rango de una relación isométrica cerrada son subespacios y tienen la misma dimensión.

Teorema 3.35. *Para una relación V, los siguientes son equivalentes:*

(a) V es isométrica.

(b) $V^{-1} \subset V^*$.

(c) Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ en V se cumple que $\langle f, h\rangle = \langle g, k\rangle$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (c) Sean $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in V$, entonces para $\alpha \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} f + \alpha h \\ g + \alpha k \end{pmatrix} \in V$. Como V es isométrica se sigue que

$$\begin{aligned} \|f\|^2 + \|\alpha h\|^2 + 2\text{Re }\alpha\langle f, h\rangle &= \|f + \alpha h\|^2 \\ &= \|g + \alpha k\|^2 \\ &= \|g\|^2 + \|\alpha k\|^2 + 2\text{Re }\alpha\langle g, k\rangle , \end{aligned}$$

de donde para $\alpha \in \{1, i\}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{Re }\langle f, h\rangle &= \text{Re }\langle g, k\rangle; \\ \text{Im }\langle f, h\rangle &= \text{Im }\langle g, k\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle f,h\rangle = \langle g,k\rangle$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sea $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \in V^{-1}$, entonces $\langle f,h\rangle = \langle g,k\rangle$ para todo $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in V$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \in V^*$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$, entonces $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \in V^{-1} \subset V^*$. Así $\langle g,g\rangle = \langle f,f\rangle$ y por lo tanto $\|g\| = \|f\|$. □

El conjunto cuasi-regular de una relación isométrica contiene las siguientes dos componentes conexas.

Proposición 3.36. *Si V es una relación isométrica, entonces $\mathbb{C}\backslash \mathrm{Fr}(\mathbb{D}) \subset \hat{\rho}(V)$.*

Demostración. Debido a la Proposición 3.26, solo vamos a mostrar que $\mathbb{D} \subset \hat{\rho}(V)$. Sea $\zeta \in \mathbb{D}$ y para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (V - \zeta I)^{-1}$, tenemos que $\begin{pmatrix} g \\ f + \zeta g \end{pmatrix} \in V$. Entonces, como V es isométrica,

$$\|g\| = \|f + \zeta g\| \le \|f\| + |\zeta|\ \|g\|,$$

de donde se sigue que $\|g\| \le (1 - |\zeta|)^{-1}\|f\|$. Por lo tanto $\zeta \in \hat{\rho}(V)$. □

En vista al resultado anterior, podemos establecer el índice de deficiencia interior de una relación isométrica cerrada V, sobre $\mathbb{D}$, dada por

$$\eta_i(V) := \dim\ \mathbf{N}_{\bar{\zeta}}(V^*), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{3.23}$$

Este índice es equivalente a $\eta_i(V) = \dim\ \mathbf{N}_0(V^*)$. Podemos escribir los índices de deficiencia de una relación isométrica cerrada V como

$$(\eta_e(V), \eta_i(V)) = (\dim\ \mathrm{mul}\ V^*, \dim\ \ker\ V^*),$$

o bien, del Teorema 2.15 tenemos

$$(\eta_e(V), \eta_i(V)) = (\dim\ \mathcal{H} \ominus \mathrm{dom}\ V, \dim\ \mathcal{H} \ominus \mathrm{ran}\ V). \tag{3.24}$$

Definición 3.37. Decimos que una relación V es unitaria si $V^{-1} = V^*$.

Las relaciones unitarias tienen la siguiente caracterización.

Teorema 3.38. *Si V es una relación isométrica cerrada, entonces los siguientes son equivalentes:*

(a) V es unitaria.

(b) $V, V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(c) $\eta_i(V) = \eta_e(V) = 0$.

(d) $\hat{\rho}(V) = \rho(V)$,

(e) $\sigma(V) \subset \mathrm{Fr}(\mathbb{D})$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Si $V^{-1} = V^*$ entonces V^* y $(V^*)^{-1}$ son operadores y por lo tanto del Teorema 2.15 tenemos

$$\begin{aligned} \text{dom } V &= (\text{mul } V^*)^{\perp} = \mathcal{H}\,; \\ \text{dom } V^{-1} &= [\text{mul } (V^*)^{-1}]^{\perp} = \mathcal{H}\,. \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c) El hecho de que $V, V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ implica que dom $V =$ ran $V = \mathcal{H}$ y por lo tanto de (3.24) tenemos que $\eta_i(V) = \eta_e(V) = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (d)) Es suficiente mostrar que $\hat{\rho}(V) \subset \rho(V)$. Sea $\zeta \in \hat{\rho}(V)$, si $|\zeta| \neq 1$, entonces debido a los índices

$$\text{ran } (V - \zeta I) = \mathcal{H} \oplus \ker\,(V^* - \overline{\zeta} I) = \mathcal{H}\,.$$

Esto implica que $(V - \zeta I) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y por lo tanto $\zeta \in \rho(V)$. Ahora, para $|\zeta| = 1$, es suficiente mostrar que dim ker $(V^* - \overline{\zeta} I) = \{0\}$. Dado que $\hat{\rho}(V)$ es abierto, existe una vecindad abierta B_ζ de ζ en $\hat{\rho}(V)$. En vista de que dim ker $(V^* - \overline{\zeta} I)$ permanece constante sobre componentes conexas de $\hat{\rho}(V)$, para $\nu \in B_\zeta \cap \mathbb{D}$, concluimos que

$$\dim \ker\,(V^* - \overline{\zeta} I) = \dim \ker\,(V^* - \overline{\nu} I) = 0\,.$$

(d) $\Rightarrow$ (e) Como consecuencia de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Fr}(\mathbb{D}) \subset \rho(V)$, tenemos $\eta_e(V) = 0 = \eta_i(V)$, lo cual implica $V, V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Notemos que $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto, como V es isométrica, $V^{-1} \subset V^*$ y el hecho de que ambos están en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ implica que $V^{-1} = V^*$. $\square$

3.4 Transformada de Krein

La trasformada de Krein mapea operadores positivos a contracciones simétricas y mediante esta transformación podemos estudiar extensiones autoadjuntas positivas de operadores simétricos positivos *cf.* [72, Cap. 13].

Antes de introducir la trasformada de Krein para relaciones lineales, incluimos algunos conceptos y resultados sobre relaciones simétricas.

Definición 3.39. Decimos que una relación simétrica A es semi-acotada inferiormente, si existe $m_A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, g \rangle \geq m_A \|f\|^2 \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A\,.$$

Decimos que A es semi-acotada superiormente si existe $M_A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, g \rangle \leq M_A \|f\|^2 \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A\,.$$

Llamamos a las constantes m_A y M_A, una cota inferior y una cota superior respectivamente de A. Si A es semi-acotada inferiormente y superiormente entonces simplemente decimos que A es semi-acotada.

Teorema 3.40. *Sea A una relación simétrica. Si A es semi-acotada inferiormente entonces*

$$\mathbb{C}\backslash[m_A,\infty) \subset \hat{\rho}(A). \tag{3.25}$$

Si A es semi-acotada superiormente entonces

$$\mathbb{C}\backslash(-\infty, M_A] \subset \hat{\rho}(A). \tag{3.26}$$

Demostración. Por ser A relación simétrica, basta demostrar que para $\zeta \in (-\infty, m_A)$, la relación $(A-\zeta I)^{-1}$ es acotada. Sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (A-\zeta I)^{-1}$, es decir $\begin{pmatrix} g \\ f+\zeta g \end{pmatrix} \in A$. Como A es semi-acotada inferiormente se cumple que

$$\begin{aligned}(m_A-\zeta)\|g\|^2 &\leq \langle g, f+\zeta g\rangle - \zeta\|g\|^2 \\ &= \langle g, f\rangle \leq \|g\|\,\|f\|,\end{aligned}$$

de donde para $g \neq 0$ (si $g=0$, se cumple directo) tenemos que $\|g\| \leq (m_A-\zeta)^{-1}\|f\|$. Por lo tanto $(A-\zeta I)^{-1}$ es un operador acotado. Cuando A es semi-acotada superiormente, la ecuación (3.26) se demuestra de manera análoga al razonamiento anterior. $\square$

Notemos que una relación positiva A (ver Definición 3.21) es acotada inferiormente con cota $m_A = 0$ y del resultado anterior se sigue que $\hat{\sigma}(A) \subset [0,+\infty)$. Por otra parte, si A es contracción simétrica, de las Proposiciones 3.17 y 3.26, conseguimos $\hat{\sigma}(A) \subset [-1,1]$.

Es bien conocido que la transformación

$$\xi(z) = (z-1)(z+1)^{-1} = 1-2(z+1)^{-1}$$

mapea el intervalo $[0,+\infty)$ conformemente al intervalo $[-1,1)$. Parece plausible esperar que la transformación

$$I-2(T+I)^{-1}, \tag{3.27}$$

mapea relaciones positivas a contracciones simétricas. Modificamos la trasformación (3.27) en la siguiente definición, esto con el fin de mostrar la estructura de sus elementos y de simplificar cálculos posteriores.

Definición 3.41. Definimos la transformada de Krein de una relación T como

$$\mathbf{K}(T) := \left\{ \begin{pmatrix} g+f \\ g-f \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},$$

la cual resulta ser una relación lineal con

$$\operatorname{dom} \mathbf{K}(T) = \operatorname{ran}\,(T+I), \quad \operatorname{ran} \mathbf{K}(T) = \operatorname{ran}\,(T-I).$$

Definimos la anti-transformada de Krein de T como

$$\check{\mathsf{K}}(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f-g \\ f+g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},$$

esta también resulta ser una relación lineal, con

$$\text{dom } \check{\mathsf{K}}(T) = \text{ran } (I-T), \quad \text{ran } \check{\mathsf{K}}(T) = \text{ran } (I+T).$$

La transformada y la anti-transformada de Krein cumplen las siguientes propiedades.

Teorema 3.42. *Para T y S dos relaciones lineales se cumple lo siguiente:*

(1) $\mathsf{WK}(T) = \check{\mathsf{K}}(T), \quad \mathsf{W}\check{\mathsf{K}}(T) = \mathsf{K}(T)$.

(2) $\mathsf{K}(T) = \mathsf{K}(S) \;\Leftrightarrow\; T = S \;\Leftrightarrow\; \check{\mathsf{K}}(T) = \check{\mathsf{K}}(S)$.

(3) $\check{\mathsf{K}}(\mathsf{K}(T)) = T = \mathsf{K}(\check{\mathsf{K}}(T))$.

(4) $\mathsf{K}(T) \subset \mathsf{K}(S) \;\Leftrightarrow\; T \subset S \;\Leftrightarrow\; \check{\mathsf{K}}(T) \subset \check{\mathsf{K}}(S)$.

(5) $\mathsf{K}(T^{-1}) = -\mathsf{K}(T), \quad \check{\mathsf{K}}(T)^{-1} = \check{\mathsf{K}}(-T)$.

(6) $\mathsf{K}(T \dotplus S) = \mathsf{K}(T) \dotplus \mathsf{K}(S), \quad \check{\mathsf{K}}(T \dotplus S) = \check{\mathsf{K}}(T) \dotplus \check{\mathsf{K}}(S)$.

(7) $\mathsf{K}(T \oplus S) = \mathsf{K}(T) \oplus \mathsf{K}(S), \quad \check{\mathsf{K}}(T \oplus S) = \check{\mathsf{K}}(T) \oplus \check{\mathsf{K}}(S)$.

(8) $\mathsf{K}(T^*) = \mathsf{K}(T)^*, \quad \check{\mathsf{K}}(T^*) = \check{\mathsf{K}}(T)^*$

(9) $\text{dom } T = \text{ran } (I - \mathsf{K}(T)) = \text{ran } (I + \check{\mathsf{K}}(T))$.

(10) $\ker \mathsf{K}(T) = \ker (I-T) = \text{mul } \check{\mathsf{K}}(T), \quad \ker \check{\mathsf{K}}(T) = \ker (I+T) = \text{mul } \mathsf{K}(T)$.

(11) $\ker T = \ker (I + \mathsf{K}(T)) = \ker (I - \check{\mathsf{K}}(T))$.

(12) $\text{mul } T = \ker (I - \mathsf{K}(T)) = \ker (I + \check{\mathsf{K}}(T))$.

(13) $\overline{\mathsf{K}(T)} = \mathsf{K}(\overline{T}), \quad \overline{\check{\mathsf{K}}(T)} = \check{\mathsf{K}}(\overline{T})$.

Demostración. Probemos solo las propiedades (8) y (13). Las demás propiedades se siguen con un cálculo directo de las definiciones de la trasformada y la anti-trasformada de Krein.

(8): Sea $\begin{pmatrix} \hat{g}+\hat{f} \\ \hat{g}-\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(T^*)$ con $\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in T^*$ y para cada $\begin{pmatrix} g+f \\ g-f \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(T)$ con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$ tenemos que $\langle \hat{g}, f\rangle = \langle \hat{f}, g\rangle$. Así

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}-\hat{f}, g+f\rangle &= \langle \hat{g}, g\rangle + \langle \hat{g}, f\rangle - \langle \hat{f}, g\rangle - \langle \hat{f}, f\rangle \\ &= \langle \hat{g}, g\rangle + \langle \hat{f}, g\rangle - \langle \hat{g}, f\rangle - \langle \hat{f}, f\rangle = \langle \hat{g}+\hat{f}, g-f\rangle, \end{aligned}$$

esto implica que $\begin{pmatrix} \hat{g}+\hat{f} \\ \hat{g}-\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(T)^*$. Para la otra contención (usando la misma notación en los elementos), si $\begin{pmatrix} \hat{g}+\hat{f} \\ \hat{g}-\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(T)^*$, entonces para cada $\begin{pmatrix} g+f \\ g-f \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(T)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, g\rangle + \langle \hat{g}, f\rangle - \langle \hat{f}, g\rangle - \langle \hat{f}, f\rangle &= \langle \hat{g}-\hat{f}, g+f\rangle \\ &= \langle \hat{g}+\hat{f}, g-f\rangle = \langle \hat{g}, g\rangle + \langle \hat{f}, g\rangle - \langle \hat{g}, f\rangle - \langle \hat{f}, f\rangle, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\langle \hat{g}, f\rangle = \langle \hat{f}, g\rangle$, es decir $\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in T^*$ y $\begin{pmatrix} \hat{g}+\hat{f} \\ \hat{g}-\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(T^*)$. Por lo tanto $\mathsf{K}(T^*) = \mathsf{K}(T)^*$. De (1) y de lo anterior obtenemos $\check{\mathsf{K}}(T^*) = \check{\mathsf{K}}(T)^*$.

(13): Obtenemos de (8) que

$$\overline{\mathsf{K}(T)} = (\mathsf{K}(T)^*)^* = \mathsf{K}(T^*)^* = \mathsf{K}((T^*)^*) = \mathsf{K}(\overline{T}).$$

Análogamente se prueba $\overline{\check{\mathsf{K}}(T)} = \check{\mathsf{K}}(\overline{T})$. □

El siguiente resultado se tiene directamente de las propiedades (2), (4) y (8).

Lema 3.43. *Una relación A es simétrica (autoadjunta) si y solo si $\mathsf{K}(A)$ es simétrica (autoadjunta) si y solo si $\check{\mathsf{K}}(A)$ es simétrica (autoadjunta).*

Con base en el resultado anterior mostramos lo siguiente.

Teorema 3.44. *Una relación A es positiva si y solo si $L = \mathsf{K}(A)$ es contracción simétrica.*

Demostración. Suponemos que $A \geq 0$. Debido al Lema 3.43, solo basta demostrar que $\mathsf{K}(A) = L$ es una contracción. Sea $\begin{pmatrix} g+f \\ g-f \end{pmatrix} \in L$ con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \|g-f\|^2 &= \|g\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f, g\rangle \\ &\leq \|g\|^2 + \|f\|^2 + 2\langle f, g\rangle = \|g-f\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto L es contracción. Inversamente, para $\begin{pmatrix} h-k \\ h+k \end{pmatrix} \in \check{\mathsf{K}}(L)$ con $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in L$, como L es contracción simétrica, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle h-k, h+k\rangle &= \|h\|^2 + \langle h, k\rangle - \langle k, h\rangle - \|k\|^2 \\ &= \|h\|^2 - \|k\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

entonces $\check{\mathsf{K}}(L) \geq 0$. Por lo tanto del Teorema 3.42 concluimos que $A = \check{\mathsf{K}}(L) \geq 0$. □

Como consecuencia del resultado anterior, si $\mathfrak{P}_{\mathcal{H}}$ es el conjunto de todas las relaciones positivas en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ y $\mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$ el conjunto de todas las contracciones simétricas en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Entonces la trasformada de Krein

$$\mathsf{K} : \mathfrak{P}_{\mathcal{H}} \to \mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$$

es un mapeo biyectivo, con inversa $\check{\mathsf{K}}$. Más aún, si $L \in \mathfrak{C}_{\mathcal{H}}$ es tal que ker $(I-L)=\{0\}$, entonces de las propiedades (3) y (12) del Teorema 3.42 tenemos que

$$\text{mul } \check{\mathsf{K}}(L) = \ker\ (I - \mathsf{K}(\check{\mathsf{K}}(L))) = \ker\ (I-L) = \{0\}\,.$$

Esto implica que $\check{\mathsf{K}}(L)$ sea un operador positivo.

Proposición 3.45. *Si A es una relación positiva no acotada entonces $\|\mathsf{K}(A)\| = 1$.*

Demostración. Como A es no acotada, existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ tal que para todo $C > 0$, se cumple $\|g\| > C\|f\|$, es decir, $\|g\| \geq n\|f\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos del Teorema 3.44 que $\mathsf{K}(A)$ es contracción y además $\begin{pmatrix} g+f \\ g-f \end{pmatrix} \in \mathsf{K}(A)$. Entonces

$$1 \geq \|\mathsf{K}(A)\| \geq \frac{\|g-f\|}{\|g+f\|} \geq \frac{\|g\|-\|f\|}{\|g\|+\|f\|}\,. \tag{3.28}$$

Para $f \neq 0$, (3.28) implica

$$1 \geq \|\mathsf{K}(A)\| \geq \frac{\frac{\|g\|}{\|f\|}-1}{\frac{\|g\|}{\|f\|}+1} \geq \frac{n-1}{n+1} \to 1.$$

Por lo tanto $\|\mathsf{K}(A)\| = 1$. Si $f = 0$, de (3.28), el resultado se tiene de imediato. $\square$

Una relación positiva con multivaluado no trivial, resulta ser no acotada y del resultado previo se cumple que su trasformada de Krein tienen norma igual a uno.

Si A es una relación positiva y L es extensión simétrica contractiva de $\mathsf{K}(A)$, entonces $\check{\mathsf{K}}(L)$ es una extensión positiva de A y tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & \check{\mathsf{K}}(L) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathsf{K}(A) & \subset & L. \end{array}$$

Por otra parte, si V es una contracción simétrica y A es una extensión positiva de $\check{\mathsf{K}}(V)$, entonces $\mathsf{K}(A)$ es una extensión simétrica contractiva de V y obtenemos

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & \mathsf{K}(A) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \check{\mathsf{K}}(V) & \subset & A. \end{array}$$

- *Resultados originales del capítulo* -

A continuación describimos los resultados principales de este capítulo: en el Teorema 3.3 mostramos que L es disipativa si y solo si $\mathbb{C}_- \subset \hat{\rho}(L)$ y para todo $\zeta \in \mathbb{C}_-$,

$$\|(L-\zeta I)^{-1}\| \leq -1/\text{Im }\zeta\,.$$

Con respecto a relaciones disipativas maximales (ver Definición 3.5) obtuvimos de la Proposición 3.6 que si L es una relación disipativa cerrada cuyo dominio es todo el espacio, entonces L es un operador acotado, disipativo maximal. Además, en el Teorema 3.7 mostramos que una relación disipativa es maximal si y solo si es cerrada con índice de deficiencia nulo. Exhibimos en el Teorema 3.10 que las aplicaciones

$$L \mapsto -L^{-1}; \quad L \mapsto -L^*; \quad L \mapsto -L^{\perp},$$

preservan la clase de relaciones disipativas maximales. En el Teorema 3.11 conseguimos que suma de relaciones disipativas maximales resulta disipativa maximal siempre que una de ellas tenga dominio todo el espacio.

En la Proposición 3.12 expusimos que una relación disipativa cumple la propiedad $\mathrm{dom}\ L \subset (\mathrm{mul}\ L)^{\perp}$. Esto implica que las propiedades espectrales de L son equivalentes a las propiedades espectrales de L_L (ver Teorema 2.40). Además en el Teorema 3.15 conseguimos mostrar que si L es disipativa (maximal), entonces L_L es un operador disipativo (maximal) en $(\mathrm{mul}\ L)^{\perp} \oplus (\mathrm{mul}\ L)^{\perp}$ y $\eta_-(L_L) = \eta_-(L)$. Inversamente, si $\mathrm{mul}\ L \subset (\mathrm{dom}\ L)^{\perp}$ y L_L es operador disipativo (maximal), entonces L es disipativa (maximal).

Restringiendo a la clase de relaciones simétricas, en el Teorema 3.20 exhibimos que en relaciones simétricas cerradas los siguientes son equivalentes:

(a) A es autoadjunta.

(b) $\eta_{\pm}(A) = 0$.

(c) $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$.

(d) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Ahora bien, en el Teorema 3.22 presentamos que si A es autoadjunta y B es positiva, autoadjunta y fuertemente A-acotada, entonces $A + iB$ es una relación disipativa maximal. Además en la Proposición 3.23 conseguimos mostrar que si A es simétrica (autoadjunta), entonces A_A es un operador simétrico (autoadjunto) con los mismos índices de deficiencia de A. Inversamente, si $\mathrm{mul}\ A \subset (\mathrm{dom}\ A)^{\perp}$ y A_A es simétrico (autoadjunto), entonces A es simétrica (autoadjunta).

Aunque las contracciones son operadores, conseguimos mostrar en la Proposición 3.26 que una contracción V satisface $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}} \subset \hat{\rho}(V)$. Además, en el Teorema 3.27 exhibimos que $\eta_e(V) = \dim\ \mathrm{mul}\ V^*$ y del Teorema 3.29 obtuvimos que V es maximal (ver Definición 3.28) si y solo si es cerrada y $\eta_e(V) = 0$.

En el Teorema 3.32 mostramos que las aplicaciones

$$V \mapsto -V; \quad V \mapsto V^*; \quad V \mapsto (V^{-1})^{\perp},$$

preservan la clase de contracciones maximales. Más aún, en el Teorema 3.38 dimos la equivalencia de contracciones que son unitarias:

(a) V es unitaria.

(b) $\eta_i(V) = \eta_e(V) = 0$.

(c) $\hat{\rho}(V) = \rho(V)$,

(d) $\sigma(V) \subset \mathrm{Fr}(\mathbb{D})$

Con el objetivo de encontrar extensiones positivas de relaciones positivas, introducimos en la Definición 3.41 la trasformada y la anti-trasformada de Krein para relaciones lineales y en el Teorema 3.43 probamos que estas trasformadas preservan las clases de relaciones simétricas y autoadjuntas. En el Teorema 3.44 exponemos que la trasformada de Krein mapea relaciones positivas a contracciones y la anti-trasformada de Krein mapea contracciones a relaciones positivas. Por último, en el Teorema 3.45 presentamos que la trasformada de Krein de una relación positiva no acotada (en particular las positivas con multivaluado no trivial) tiene norma uno.

CAPÍTULO 4

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE RELACIONES DISIPATIVAS

4.1 Transformada de Cayley

Un papel decisivo para el análisis espectral de relaciones disipativas, es la partición del plano complejo en tres subconjuntos: eje real, semiplano superior e inferior. Similarmente, la partición del plano en el circulo unitario, el interior y el exterior del mismo desempeñan un papel importante en la teoría espectral de contracciones.

Es bien conocido que, para $\zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ fijo, la trasformación

$$\xi(z) = \frac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}} = 1 + \frac{\overline{\zeta}-\zeta}{z-\overline{\zeta}}$$

mapea el eje real al circulo unitario y los semiplanos al interior y exterior del circulo unitario. Para $\zeta \in \mathbb{C}_+$, es de esperar que la transformación

$$I + (\overline{\zeta}-\zeta)(A-\overline{\zeta}I)^{-1} \tag{4.1}$$

mapea una relación disipativa A a una contracción. Permítanos formular (4.1) de la siguiente manera *cf.* [25].

Definición 4.1. Para $\zeta \in \mathbb{C}$, definimos la transformada de Cayley de una relación T como

$$\mathsf{C}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} g-\overline{\zeta}f \\ g-\zeta f \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},$$

la cual resulta una relación lineal con

$$\operatorname{dom} \mathsf{C}_\zeta(T) = \operatorname{ran}\,(T-\overline{\zeta}I); \quad \operatorname{ran} \mathsf{C}_\zeta(T) = \operatorname{ran}\,(T-\zeta I)\,. \tag{4.2}$$

Definimos la anti-transformada de Cayley de T como

$$\check{\mathsf{C}}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} g - f \\ \bar{\zeta} g - \zeta f \end{pmatrix} \; : \; \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},$$

la cual también es una relación con

$$\text{dom } \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) = \text{ran } (T - I); \quad \text{ran } \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) = \text{ran } (\bar{\zeta} T - \zeta I).$$

La transformada y la anti-transformada de Cayley satisfacen las siguientes propiedades.

Teorema 4.2. *Para T y S dos relaciones y $\zeta \in \mathbb{C}$ lo siguiente se cumple:*

(1) $\mathsf{C}_\zeta(T) = \mathsf{C}_\zeta(S) \;\Leftrightarrow\; T = S \;\Leftrightarrow\; \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) = \check{\mathsf{C}}_\zeta(S)$.

(2) $\mathsf{C}_\zeta(T) = (1/\bar{\zeta})\check{\mathsf{C}}_\zeta((1/\bar{\zeta})T), \quad \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) = \bar{\zeta}\mathsf{C}_\zeta(\bar{\zeta}T)$.

(3) $\check{\mathsf{C}}_\zeta(\mathsf{C}_\zeta(T)) = T = \mathsf{C}_\zeta(\check{\mathsf{C}}_\zeta(T))$.

(4) $\mathsf{C}_\zeta(T) \subset \mathsf{C}_\zeta(S) \;\Leftrightarrow\; T \subset S \;\Leftrightarrow\; \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) \subset \check{\mathsf{C}}_\zeta(S)$.

(5) $\mathsf{C}_{-\zeta}(T) = \mathsf{C}_\zeta(-T), \quad \check{\mathsf{C}}_{-\zeta}(T) = \check{\mathsf{C}}_\zeta(-T)$.

(6) $\mathsf{C}_{\bar{\zeta}}(T) = (\mathsf{C}_\zeta(T))^{-1}, \quad \check{\mathsf{C}}_{\bar{\zeta}}(T) = \check{\mathsf{C}}_\zeta(T^{-1})$.

(7) $\text{mul } \mathsf{C}_\zeta(T) = \ker\, (T - \bar{\zeta} I), \quad \text{mul } \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) = \ker\, (T - I)$.

Para $\zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ se cumple

(8) $\mathsf{C}_\zeta(T \dot{+} S) = \mathsf{C}_\zeta(T) \dot{+} \mathsf{C}_\zeta(S), \quad \check{\mathsf{C}}_\zeta(T \dot{+} S) = \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) \dot{+} \check{\mathsf{C}}_\zeta(S)$.

(9) Si $\zeta \in \{i, -i\}$ entonces $\mathsf{C}_\zeta(T \oplus S) = \mathsf{C}_\zeta(T) \oplus \mathsf{C}_\zeta(S), \quad \check{\mathsf{C}}_\zeta(T \oplus S) = \check{\mathsf{C}}_\zeta(T) \oplus \check{\mathsf{C}}_\zeta(S)$.

(10) $\mathsf{C}_\zeta(T^*) = \mathsf{C}_{\bar{\zeta}}(T)^*, \quad \check{\mathsf{C}}_\zeta(T^*) = \check{\mathsf{C}}_{\bar{\zeta}}(T)^*$.

(11) $\text{dom } T = \text{ran } (\mathsf{C}_\zeta(T) - I) = \text{ran } (\check{\mathsf{C}}_\zeta(T) - \bar{\zeta} I)$.

(12) $\text{mul } T = \ker\, (\mathsf{C}_\zeta(T) - I) = \ker\, (\check{\mathsf{C}}_\zeta(T) - \bar{\zeta} I)$.

(13) $\overline{\mathsf{C}_\zeta(T)} = \mathsf{C}_\zeta(\overline{T}), \quad \overline{\check{\mathsf{C}}_\zeta(T)} = \check{\mathsf{C}}_\zeta(\overline{T})$.

Demostración. Solamente probamos las propiedades (10) y (13). Las demás propiedades se siguen con un cálculo sencillo de las definiciones de la transformada y la anti-transformada de Cayley.

(10): Sea $\begin{pmatrix} \hat{g}-\overline{\zeta}\hat{f} \\ \hat{g}-\zeta\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{C}_\zeta(T^*)$, con $\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in T^*$ y $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Entonces, para cada elemento $\begin{pmatrix} g-\zeta f \\ g-\overline{\zeta} f \end{pmatrix} \in \mathsf{C}_\zeta(T)$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$, se sigue que $\langle \hat{g}, f\rangle = \langle \hat{f}, g\rangle$ y además

$$\begin{aligned}\langle \hat{g}-\zeta\hat{f}, g-\zeta f\rangle &= \langle \hat{g}, g\rangle - \overline{\zeta}\langle \hat{f}, g\rangle - \zeta\langle \hat{g}, f\rangle + \langle \zeta\hat{f}, \zeta f\rangle \\ &= \langle \hat{g}, g\rangle - \overline{\zeta}\langle \hat{g}, f\rangle - \zeta\langle \hat{f}, g\rangle + \langle \overline{\zeta}\hat{f}, \overline{\zeta} f\rangle = \langle \hat{g}-\overline{\zeta}\hat{f}, g-\overline{\zeta} f\rangle\,,\end{aligned}$$

esto implica que $\begin{pmatrix} \hat{g}-\overline{\zeta}\hat{f} \\ \hat{g}-\zeta\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{C}_\zeta(T)^*$. Para la otra contención, si $\begin{pmatrix} \hat{g}-\overline{\zeta}\hat{f} \\ \hat{g}-\zeta\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{C}_\zeta(T)^*$, entonces para todo $\begin{pmatrix} g-\zeta f \\ g-\overline{\zeta} f \end{pmatrix} \in \mathsf{C}_\zeta(T)$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \hat{g}, g\rangle - \overline{\zeta}\langle \hat{f}, g\rangle - \zeta\langle \hat{g}, f\rangle + \langle \zeta\hat{f}, \zeta f\rangle &= \langle \hat{g}-\zeta\hat{f}, g-\zeta f\rangle \\ &= \langle \hat{g}-\overline{\zeta}\hat{f}, g-\overline{\zeta} f\rangle = \langle \hat{g}, g\rangle - \overline{\zeta}\langle \hat{g}, f\rangle - \zeta\langle \hat{f}, g\rangle + \langle \overline{\zeta}\hat{f}, \overline{\zeta} f\rangle\,,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\langle \hat{g}, f\rangle = \langle \hat{f}, g\rangle$, es decir $\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in T^*$. Así $\begin{pmatrix} \hat{g}-\overline{\zeta}\hat{f} \\ \hat{g}-\zeta\hat{f} \end{pmatrix} \in \mathsf{C}_\zeta(T^*)$ y por lo tanto $\mathsf{C}_\zeta(T^*) = \mathsf{C}_{\overline{\zeta}}(T)^*$. Ahora bien, usando la propiedad (2) obtenemos

$$\begin{aligned}\check{\mathsf{C}}_\zeta(T^*) &= \overline{\zeta}\mathsf{C}_\zeta(\overline{\zeta}T^*) = \overline{\zeta}\mathsf{C}_\zeta((\zeta T)^*) \\ &= \overline{\zeta}\mathsf{C}_{\overline{\zeta}}(\zeta T)^* = (\zeta\mathsf{C}_{\overline{\zeta}}(\zeta T))^* = \check{\mathsf{C}}_{\overline{\zeta}}(T)^*\,.\end{aligned}$$

(13): Se sigue de (10) que

$$\overline{\mathsf{C}_\zeta(T)} = (\mathsf{C}_\zeta(T)^*)^* = (\mathsf{C}_{\overline{\zeta}}(T^*))^* = \mathsf{C}_\zeta((T^*)^*) = \mathsf{C}_\zeta(\overline{T})\,.$$

De igual manera se satisface $\overline{\check{\mathsf{C}}_\zeta(T)} = \check{\mathsf{C}}_\zeta(\overline{T})$. □

El siguiente teorema nos muestra que la transformada de Cayley da una correspondencia uno a uno entre la relaciones disipativas y las contracciones.

Teorema 4.3. *Asumiendo que $\zeta \in \mathbb{C}_+$, una relación L es disipativa (cerrada, maximal) si y solo si $V = \mathsf{C}_\zeta(L)$ es una contracción (cerrada, maximal).*

Demostración. Suponemos que L es una relación disipativa y considerando $\begin{pmatrix} g-\overline{\zeta} f \\ g-\zeta f \end{pmatrix}$ en $\mathsf{C}_\zeta(L) = V$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$. Entonces

$$\begin{aligned}\|g-\overline{\zeta} f\|^2 - \|g-\zeta f\|^2 &= 2\mathrm{Re}\,(-\zeta\langle f, g\rangle) + 2(\mathrm{Re}\,\overline{\zeta}\langle f, g\rangle), \\ &= 4(\mathrm{Im}\,\zeta)\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle \geq 0. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Esto muestra que V es una contracción.

Inversamente, para $\begin{pmatrix} g-f \\ \overline{\zeta}g-\zeta f \end{pmatrix} \in \check{\mathsf{C}}_\zeta(V) = L$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \langle g-f, \overline{\zeta}g-\zeta f\rangle &= \operatorname{Im} (\overline{\zeta}\|g\|^2 + \zeta\|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \zeta\langle g,f\rangle) \\ &= \operatorname{Im} \zeta(\|f\|^2 - \|g\|^2) \geq 0\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por lo tanto L es disipativa. Observemos que L y V son simultáneamente cerradas debido a la propiedad (13) del Teorema 4.2. En cuanto a la maximalidad,

$$\begin{aligned} \eta_e(V) &= \dim\,(\mathcal{H} \ominus \operatorname{dom}\, V) \\ &= \dim\,(\mathcal{H} \ominus \operatorname{dom}\, \mathsf{C}_\zeta(L)) \\ &= \dim\,(\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\,(L-\overline{\zeta}I)) = \eta_-(L)\,. \end{aligned}$$

□

Restringiendo al caso de relaciones simétricas tenemos lo siguiente.

Corolario 4.4. *Para $\zeta \in \mathbb{C}$, una relación L es simétrica si y solo si $V = \mathsf{C}_\zeta(L)$ es una relación isométrica. Más aún, para $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, L es autoadjunta si y solo si V es unitaria.*

Demostración. Usando las ecuaciones (4.3) y (4.4) del resultado anterior, se sigue directamente que, para $\zeta \in \mathbb{C}$, L es simétrica si y solo si $V = \mathsf{C}_\zeta(L)$ es isométrica.

Para ζ no real, si $L = L^*$, entonces de la propiedades (6) y (10) del Teorema 4.2 se cumple que

$$\mathsf{C}_\zeta(L)^{-1} = \mathsf{C}_{\overline{\zeta}}(L) = \mathsf{C}_{\overline{\zeta}}(L^*) = \mathsf{C}_\zeta(L)^*. \tag{4.5}$$

Si $L \neq L^*$ entonces usando la propiedad (1) del Teorema 4.2 y el análisis de (4.5) tenemos que $V^{-1} \neq V^*$. Por lo tanto L es autoadjunta si y solo si V es unitaria. □

El resultado anterior implica que la trasformada de Cayley da una correspondencia unívoca entre la relaciones simétricas e isométricas y también una correspondencia unívoca entre la relaciones autoadjuntas y unitarias.

El siguiente resultado se sigue directamente del Teorema 4.3 y de la propiedad (12) del Teorema 4.2.

Proposición 4.5. *Asumiendo $\zeta \in \mathbb{C}_+$, si V es una contracción tal que $\overline{\operatorname{ran}\,(V-I)} = \mathcal{H}$, entonces $\check{\mathsf{C}}_\zeta(V)$ es un operador disipativo.*

En la Sección 5.1 estudiamos extensiones disipativas mediante la trasformada de Cayley, en la cual nos basamos en lo siguiente:

Si L es una relación disipativa y V es extensión contractiva de $\mathsf{C}_\zeta(L)$, entonces $\check{\mathsf{C}}_\zeta(V)$ es una extensión disipativa de L y obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} L & \subset & \check{\mathsf{C}}_\zeta(V) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathsf{C}_\zeta(L) & \subset & V. \end{array}$$

Por otra parte, si V es una contracción y L es una extensión disipativa de $\check{\mathsf{C}}_\zeta(V)$, entonces $\mathsf{C}_\zeta(L)$ es una extensión contractiva de V y se cumple que

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & \mathsf{C}_\zeta(L) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \check{\mathsf{C}}_\zeta(V) & \subset & L. \end{array}$$

4.2 Descomposición canónica de contracciones

En esta sección descomponemos a una contracción en su parte unitaria y su parte completamente no unitaria.

En el Sección 3.2 del Capítulo 3 dimos la definición de relaciones positivas (ver Definición 3.21). Para dos relaciones T y S, decimos que $T \geq S$ si $T - S \geq 0$.

Lema 4.6. *Si V es una contracción, entonces VV^*, V^*V son positivas y lo siguiente se cumple:*

$$0 \leq VV^* \leq I; \qquad 0 \leq V^*V \leq I. \tag{4.6}$$

Además si V es maximal entonces VV^* y V^*V son contracciones maximales autoadjuntas.

Demostración. Notemos que para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in VV^*$, existen $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in V^*$ y $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in V$. Esto implica que

$$\langle f, g \rangle = \|h\|^2 \geq 0\,.$$

Por lo tanto $VV^* \geq 0$. Intercambiando los papeles de V y V^* en el anterior argumento, tenemos que $V^*V \geq 0$. Ahora bien, si $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in I - VV^*$, es decir $\begin{pmatrix} h \\ h-k \end{pmatrix} \in VV^*$, entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in V^*$ y $\begin{pmatrix} g \\ h-k \end{pmatrix} \in V$. Así,

$$\|g\|^2 = \langle h, h-k \rangle = \|h\|^2 - \langle h, k \rangle\,,$$

de donde se sigue que

$$\langle h, k \rangle = \|h\|^2 - \|g\|^2\,. \tag{4.7}$$

Como V es contracción

$$\|g\|^2 \geq \|h-k\|^2 = \|h\|^2 + \|k\|^2 - 2\langle h, k \rangle\,.$$

Esto junto con (4.7), obtenemos

$$\langle h,k\rangle \geq \|h\|^2 - \|g\|^2 - \langle h,k\rangle + \|k\|^2 = \|k\|^2 \geq 0\,.$$

Por lo tanto $I \geq VV^*$. Por otra parte, si $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in I - V^*V$, esto es $\begin{pmatrix} h \\ h-k \end{pmatrix} \in V^*V$, existe $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in V$ y $\begin{pmatrix} g \\ h-k \end{pmatrix} \in V^*$. Entonces $\langle h, h-k\rangle = \|g\|^2$, como V es contracción

$$\|h\|^2 - \langle h,k\rangle = \|g\|^2 \leq \|h\|^2\,,$$

lo que implica que $\langle h,k\rangle \geq 0$ y por lo tanto $I \geq V^*V$. Por último si V es contracción maximal, entonces del Corolario 3.33, Observación 3.30 y Proposición 3.19 obtenemos que VV^* y V^*V son contracciones maximales autoadjuntas. □

Como una consecuencia del teorema anterior, para una contracción maximal V, podemos formar los siguientes operadores positivos

$$T_v := \sqrt[+]{I - V^*V} \quad \text{y} \quad T_{v^*} := \sqrt[+]{I - VV^*}\,, \tag{4.8}$$

los cuales tienen dominio todo el espacio y esto implica que sean autoadjuntos (ver Proposición 3.19).

Teorema 4.7. *Los operadores T_v y T_{v^*} son contracciones maximales que cumplen*

$$0 \leq T_v, T_{v^*} \leq I\,.$$

Demostración. Para $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in T_v$, existe $\begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} \in T_v$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in (I - V^*V)$, es decir $\begin{pmatrix} h \\ h-g \end{pmatrix} \in V^*V$. Como V^*V es positivo

$$\|h\|^2 - \langle h,g\rangle = \langle h, h-g\rangle \geq 0\,. \tag{4.9}$$

Dado que T_v es autoadjunto tenemos que $\langle h,g\rangle = \|k\|^2$ y de (4.9) se sigue que $\|k\| \leq \|h\|$. Así T_v es contracción y de la Observación 3.30 obtenemos que T_v es maximal. Ahora bien, sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (I - T_v)$, esto es $\begin{pmatrix} f \\ f-g \end{pmatrix} \in T_v$ y el hecho de que T_v sea contracción autoadjunta implica que $\langle f,g\rangle \in \mathbb{R}$ y

$$\|f\|^2 \geq \|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\langle f,g\rangle\,,$$

de donde se sigue que $\langle f,g\rangle \geq \frac{1}{2}\|g\|^2 \geq 0$. Por lo tanto $T_v \leq I$. Intercambiando los papeles de V y V^* en la prueba anterior, probamos la afirmación para T_{v^*}. □

Lo siguiente caracteriza los núcleos de los operadores (4.8).

Teorema 4.8. *Los núcleos de los operadores en* (4.8) *cumplen lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \ker T_v &= \{f \in \mathcal{H} \ : \ \|f\| = \|g\| \ \textit{con} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V\}; \\ \ker T_{v^*} &= \{h \in \mathcal{H} \ : \ \|h\| = \|k\| \ \textit{con} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in V^*\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Demostración. Solo mostramos la primera igualdad de (4.10), la segunda se sigue de manera simétrica. Usando la notación del espacio de deficiencia (2.19), mostramos que $\mathbf{N}_0(T_v) = \mathbf{N}_0(I - V^*V)$ y además dom $\mathbf{N}_0(I - V^*V) =$ dom $\mathbf{N}_1(V^*V)$. Entonces basta demostrar que

$$\mathbf{N}_1(V^*V) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} : \|f\| = \|g\| \ \text{con} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V \right\}. \tag{4.11}$$

Para efectos prácticos, denotamos por N_v al conjunto del lado derecho de (4.11). Si $\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \in V^*V$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ y $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \in V^*$. Así, $\langle f, f \rangle = \langle g, g \rangle$ y $\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \in N_v$.

Para la otra inclusión, si $\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \in N_v$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ tal que $\|f\| = \|g\|$. Como V es contracción maximal, del Teorema 3.32 se sigue que V^* es contracción maximal por lo que existe $\begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in V^*$ tal que $\|k\|^2 - \|g\|^2 \leq 0$ y además se satisface que $\langle f, k \rangle = \|g\|^2$. Usando esto tenemos que

$$\begin{aligned} \|f - k\|^2 &= \|f\|^2 + \|k\|^2 - 2\langle f, k \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|k\|^2 - 2\|g\|^2 = \|k\|^2 - \|g\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

lo cual implica $f = k$ y $\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \in V^*V$. □

El siguiente resultado es una propiedad simple de contracciones maximales.

Proposición 4.9. *Si V una contracción maximal, entonces*

$$\ker\,(V - I) = \ker\,(V^* - I). \tag{4.12}$$

Demostración. Es suficiente mostrar que $\mathbf{N}_1(V) \subset \mathbf{N}_1(V^*)$. Notemos, del Teorema 3.32, que V^* es contracción maximal. Para $\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_1(V)$ existe $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in V^*$ y $\langle f, h \rangle = \|f\|^2$. Como V^* es contracción obtenemos que $\|h\|^2 - \|f\|^2 \leq 0$. Entonces

$$\|f - h\|^2 = \|f\|^2 + \|h\|^2 - 2\langle f, h \rangle = \|h\|^2 - \|f\|^2 \leq 0,$$

lo cual implica que $f = h$ y por lo tanto $\mathbf{N}_1(V) \subset \mathbf{N}_1(V^*)$. □

Una clase importante de contracciones son las relaciones unitarias y es de interés saber si a una contracción se le puede extraer una parte unitaria no trivial.

Definición 4.10. Decimos que una contracción V tiene una parte unitaria no trivial, si existe un subespacio reductor (ver Definición 2.50) no trivial $\mathcal{K}$, para V, tal que $V_{\mathcal{K}}$ es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$. Por el contrario diremos que V es completamente no unitaria y escribimos V c.n.u.

Observemos que si $V \oplus W$ es una contracción c.n.u. entonces V y W son contracciones c.n.u. El siguiente resultado se le conoce como la descomposición de Sz. Nagy-Foiaş-Langer (ver [81, Cap. I, Sec. 3, Teo. 3.2]) y lo demostramos en notación de relaciones lineales.

Teorema 4.11. *Para cada contracción maximal V, existe un único subespacio $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ reductor para V tal que*

$$V = V_u \oplus V_c\,,$$

donde V_u es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y V_c es c.n.u.

Demostración. Permítanos introducir la siguiente notación

$$V_n := \begin{cases} V^n & \text{si } n \geq 1 \\ I & \text{si } n = 0 \\ V^{*|n|} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Se sigue del Teorema 3.32 y del Lema 3.31 que tanto V^* como V_n, son contracciones maximales, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además del Teorema 4.8 tenemos que

$$\ker\, T_{v_n} = \{f \in \mathcal{H}\ :\ \|f\| = \|g\| \text{ con } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V_n\}\,.$$

Definamos

$$\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{H}\ :\ \|f\| = \|g_n\| \text{ con } \begin{pmatrix} f \\ g_n \end{pmatrix} \in V_n, \forall n \in \mathbb{Z}\}\,, \tag{4.13}$$

el cual puede ser expresado como $\mathcal{K} = \cap_{n\in\mathbb{Z}} \ker\, T_{v_n}$. De esto se sigue que $\mathcal{K}$ es un subespacio. Para ver que $\mathcal{K}$ es V-invariante, se reduce a mostrar que

$$\mathcal{K} \subset \text{dom } V_{\mathcal{K}}\,. \tag{4.14}$$

Si $h \in \mathcal{K}$ entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ f \end{pmatrix} \in V$ tal que

$$\|f\| = \|h\|\,. \tag{4.15}$$

Más aún, como $h \in \ker\, T_v = \ker\, (I - V^*V)$ entonces $\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \in V^*V$, es decir $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in V^*$. Para $n \geq 0$ existe $\begin{pmatrix} f \\ g_n \end{pmatrix} \in V_n$ y como $V_{n+1} = V_nV$, obtenemos que $\begin{pmatrix} h \\ g_n \end{pmatrix} \in V_{n+1}$. De (4.13) y (4.15), tenemos $\|f\| = \|g_n\|$. Por ora parte, para $n < 0$ existe $\begin{pmatrix} f \\ g_n \end{pmatrix} \in V_n$. Notemos que $V_n = V_{n+1}V_{-1} = V_{n+1}V^*$ y de esto $\begin{pmatrix} h \\ g_n \end{pmatrix} \in V_{n+1}$. Nuevamente de (4.13) y (4.15) se sigue que $\|f\| = \|g_n\|$. Así, $f \in \mathcal{K}$ y por lo tanto se cumple (4.14). Hemos mostrado que $\mathcal{K}$ es V-invariante y de una manera análoga se muestra que $\mathcal{K}$ es V^*-invariante. Por lo tanto, del Teorema 2.53, $\mathcal{K}$ reduce a V.

Con un cálculo obtenemos que $V_{\mathcal{K}}$ es relación isométrica. En el Teorema 2.52 se mostró que $(V_{\mathcal{K}})^* = V_{\mathcal{K}}^*$ en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$. Si $\begin{pmatrix} h \\ f \end{pmatrix} \in V_{\mathcal{K}}^*$ entonces $h \in \ker\, T_{v^*} = \ker\, (I - VV^*)$, lo que implica $\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \in VV^*$, es decir $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in V$. Así $V_{\mathcal{K}}^* \subset V_{\mathcal{K}}^{-1}$ y por lo tanto $V_u = V_{\mathcal{K}}$ es unitaria.

Ahora bien, si existe $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}^\perp$ reductor de V, por el cual $V_{\mathcal{K}_1}$ es unitaria en $\mathcal{K}_1 \bigoplus \mathcal{K}_1$, entonces para cada $f \in \mathcal{K}_1$ existe $\begin{pmatrix} f \\ g_n \end{pmatrix} \in V_n$, con $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\|f\| = \|g_n\|$. Esto implica que $f \in \mathcal{K}$, es decir $\mathcal{K}_1 = \{0\}$. Por lo tanto $V_c = V_{\mathcal{K}^\perp}$ es c.n.u.

Falta demostrar la unicidad de la descomposición. Sea $\mathcal{K}'$ otro reductor de V tal que $V_{\mathcal{K}'}$ es unitaria en $\mathcal{K}' \bigoplus \mathcal{K}'$ y $V_{\mathcal{K}'^\perp}$ es c.n.u. Notemos que cada elemento en $\mathcal{K}'$ pertenece al conjunto del lado derecho de (4.13) y por lo tanto $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. Los espacios $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ son reductores de V, lo que implica que $\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}'$ reduce a V y $V_{\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}'}$ es unitaria. Dado que $V_{\mathcal{K}'^\perp}$ es c.n.u. y $V_{\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}'} \subset V_{\mathcal{K}'^\perp}$ obtenemos que $\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}' = \{0\}$ y por lo tanto $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. □

El mismo resultado ocurre para contracciones cerradas que no necesariamente tengan como dominio todo el espacio.

Corolario 4.12. *Para cada contracción cerrada V, existe un único subespacio $\mathcal{K}$ reductor de V tal que*

$$V = V_u \oplus V_c\,, \tag{4.16}$$

donde V_u es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y V_c es c.n.u.

Demostración. Notemos que dom V es cerrado. Considere la contracción cerrada

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; h \in \mathcal{H} \ominus \text{dom } V \right\},$$

la cual es ortogonal a V. Definamos

$$\hat{V} := V \oplus W\,. \tag{4.17}$$

Es sencillo calcular que $\hat{V}$ es una contracción cerrada con dominio todo el espacio y por lo tanto maximal. Se sigue del Teorema 4.14 que existe un único subespacio $\mathcal{K}$ reductor de $\hat{V}$ por el cual $\hat{V}_{\mathcal{K}}$ es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y $\hat{V}_{\mathcal{K}^\perp}$ es c.n.u.

Sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \hat{V}_{\mathcal{K}} \subset \hat{V}$, entonces $\|g\| = \|f\|$ y existe $\begin{pmatrix} f_1 \\ g \end{pmatrix} \in V$ y $f_2 \in (\text{dom } V)^\perp$ tales que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ g \end{pmatrix}$. Esto implica que

$$\|f_1\|^2 \geq \|g\|^2 = \|f\|^2 = \|f_1 + f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2\,,$$

por lo que $f_2 = 0$ y $\hat{V}_{\mathcal{K}} \subset V_{\mathcal{K}}$. La otra inclusión se sigue de manera directa. Por lo tanto $\hat{V}_{\mathcal{K}} = V_{\mathcal{K}}$. Además, tenemos que $W \subset \hat{V}_{\mathcal{K}^\perp}$. Sea $V_c := \hat{V}_{\mathcal{K}^\perp} \ominus W$, la cual es una contracción cerrada c.n.u. en $\mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp$ y

$$\begin{aligned} V &= \hat{V} \ominus W \\ &= (\hat{V}_{\mathcal{K}} \oplus \hat{V}_{\mathcal{K}^\perp}) \ominus W \\ &= \hat{V}_{\mathcal{K}} \oplus (\hat{V}_{\mathcal{K}^\perp} \ominus W) = V_{\mathcal{K}} \oplus V_c . \end{aligned}$$

Para la unicidad, suponemos que existe otro reductor $\mathcal{K}'$ de V por el cual $V_{\mathcal{K}'}$ es unitaria en $\mathcal{K}' \bigoplus \mathcal{K}'$ y $V_{\mathcal{K}'^\perp}$ es c.n.u. Entonces $\mathcal{K}'$ es reductor de $\hat{V}$ en (4.17) con $\hat{V}_{\mathcal{K}'}$ unitaria en $\mathcal{K}' \bigoplus \mathcal{K}'$ y $\hat{V}_{\mathcal{K}'^\perp}$ c.n.u. Dado que $\mathcal{K}$ es único para $\hat{V}$ deducimos que $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. □

A la descomposición (4.16) se le llama la descomposición canónica de una contracción cerrada V en su parte unitaria V_u y su parte completamente no unitaria V_c. Vamos a restringirnos a la clase de relaciones isométricas, para extraer mas información sobre la descomposición (4.16).

Sea V una relación isométrica en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y suponemos que existe un subespacio $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ tal que

$$V^n \mathcal{L} \perp \mathcal{L} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \dots \tag{4.18}$$

Esto es equivalente a

$$V^m \mathcal{L} \perp V^n \mathcal{L}, \quad n, m \geq 0, n \neq m . \tag{4.19}$$

Al espacio $\mathcal{L}$ que cumple (4.18), se dice ser un ***espacio errante*** para V y debido a (4.19) podemos formar la suma ortogonal

$$\mathcal{M}_+(\mathcal{L}) := \mathcal{L} \oplus V\mathcal{L} \oplus V^2\mathcal{L} \oplus \cdots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^n \mathcal{L} .$$

Observemos que

$$V\mathcal{M}_+(\mathcal{L}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^n \mathcal{L} = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}) \ominus \mathcal{L} ,$$

por consiguiente

$$\mathcal{L} = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}) \ominus V\mathcal{M}_+(\mathcal{L}). \tag{4.20}$$

Definición 4.13. Decimos que una relación isométrica $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un desplazamiento unilateral, si existe un espacio errante $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ para V, tal que $\mathcal{M}_+(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$.

El espacio errante $\mathcal{L}$ de un desplazamiento unilateral V es no trivial y es únicamente determinado por V. Además tenemos de (4.20) que

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H} . \tag{4.21}$$

El siguiente teorema es conocido como la descomposición de von Neumann-Wold (ver [81, Cap. I, Sec. 1, Teo. 1.1]).

Teorema 4.14. *Para cada relación isométrica $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe un único subespacio $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, reductor de V, tal que*

$$V = V_u \oplus V_s\,, \tag{4.22}$$

donde V_u es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y V_s es desplazamiento unilateral c.n.u. en $\mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp$. Ciertamente,

$$\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} V^n \mathcal{H} \quad y \quad \mathcal{K}^\perp = \mathcal{M}_+(\mathcal{L})\,; \quad donde\ \mathcal{L} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}\,. \tag{4.23}$$

Demostración. Consideramos $\mathcal{L} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}$, de esto se sigue que para $n \geq 1$

$$V^n \mathcal{L} = V^n \mathcal{H} \ominus V^{n+1} \mathcal{H} \subset V\mathcal{H}\,, \tag{4.24}$$

lo que implica que $\mathcal{L}$ sea espacio errante para V. Consideremos el subespacio $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{M}_+(\mathcal{L})$ y observemos que $\mathcal{K} \perp V^n \mathcal{L}$, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ Entonces, $k \in \mathcal{K}$ si y solo si k es ortogonal a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \oplus \cdots \oplus V^{n-1}\mathcal{L} &= (\mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}) \oplus \cdots \oplus (V^{n-1}\mathcal{H} \ominus V^n \mathcal{H}) \\ &= \mathcal{H} \ominus V^n \mathcal{H}\,, \end{aligned}$$

esto si y solo si $k \in V^n \mathcal{H}$. Lo anterior implica que $\mathcal{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V^n \mathcal{H}$. Ahora bien, como $V^{n+1}\mathcal{H} \subset V^n \mathcal{H}$, tenemos que

$$V\mathcal{K} = V \bigcap_{m=0}^{\infty} V^m \mathcal{H} = \bigcap_{m=0}^{\infty} V^{m+1} \mathcal{H} = \bigcap_{n=1}^{\infty} V^n \mathcal{H} = \mathcal{K},$$

de esta manera $\mathcal{K}$ reduce a V y $V_u = V_{\mathcal{K}}$ es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$. Además, $V_s = V_{\mathcal{K}^\perp}$ es evidentemente un desplazamiento unilateral en $\mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp$.

Para la unicidad, si $\mathcal{K}'$ es un subespacio reductor de V tal que $\mathcal{K}'^\perp = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}')$, donde $\mathcal{L}'$ es espacio errante para V y además $V\mathcal{K}' = \mathcal{K}'$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H} \\ &= (\mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}'^\perp) \ominus (V\mathcal{K}' \oplus V\mathcal{K}'^\perp) \\ &= (\mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}'^\perp) \ominus (\mathcal{K}' \oplus V\mathcal{K}'^\perp) \\ &= \mathcal{K}'^\perp \ominus V\mathcal{K}'^\perp \\ &= \mathcal{M}_+(\mathcal{L}') \ominus V\mathcal{M}_+(\mathcal{L}') = \mathcal{L}'\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\mathcal{K}'^\perp = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}') = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}) = \mathcal{K}^\perp$. Por lo tanto $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. □

A la descomposición (4.22) se le llama la descomposición canónica de V, en su parte unitaria V_u y en su parte desplazamiento unilateral V_s.

Corolario 4.15. *Una relación isométrica en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un desplazamiento unilateral si y solo si es c.n.u.*

Demostración. Suponemos que V es un desplazamiento unilateral. Si $\mathcal{K}$ reduce a V tal que $V_{\mathcal{K}}$ es unitario en $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{K} = V^n\mathcal{K}$ para todo $n = 0,1,2,\ldots$ Obtenemos de (4.20) que $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es espacio errante para V.

Sean $g \in \mathcal{K}$ y $t \in V^n\mathcal{L}$. Para cada $n = 0,1,2,\ldots,$ existe $\begin{pmatrix} f_n \\ g \end{pmatrix} \in V^n$ con $f_n \in \mathcal{K}$, y $\begin{pmatrix} h_n \\ t \end{pmatrix} \in V^n$ con $h_n \in \mathcal{L}$. Entonces, como V es isométrico,

$$\langle g,t\rangle = \langle f_n,h_n\rangle = 0\,,$$

Esto implica que $\mathcal{K} \perp V^n\mathcal{L}$ para todo $n = 0,1,2,\ldots$ Así, $\mathcal{K} \perp \mathcal{M}_+(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$ y por lo tanto V es c.n.u. La prueba contraria se sigue del Teorema 4.14. ☐

4.3

Descomposición canónica de relaciones disipativas

En la sección 4.1 vimos que la trasformada de Cayley da una correspondencia uno a uno entre las relaciones disipativas y las contracciones. En esta sección utilizamos la trasformada de Cayley para dar la contraparte de la sección anterior. Dicho de otra manera, descomponemos a una relación disipativa en su parte autoadjunta y su parte completamente no autoadjunta.

Lema 4.16. *Sea $\mathcal{K}$ un conjunto lineal en $\mathcal{H}$ y sea $\zeta \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$\mathsf{C}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} = \check{\mathsf{C}}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}). \tag{4.25}$$

Demostración. Notemos que $\mathsf{C}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}), \check{\mathsf{C}}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$. De esto, junto con los puntos (3) y (4) del Teorema 4.2, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} &= \mathsf{C}_\zeta(\check{\mathsf{C}}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K})) \subset \mathsf{C}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K})\,; \\ \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} &= \check{\mathsf{C}}_\zeta(\mathsf{C}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K})) \subset \check{\mathsf{C}}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K})\,, \end{aligned}$$

de donde se cumple (4.25). ☐

El resultado anterior implica que conjuntos lineales de la forma $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, son invariantes bajo la trasformada y la anti-trasformada de Cayley. Esto nos sirve en la investigación de subespacios reductores de una relación (ver Sección 2.4).

Corolario 4.17. *Asumiendo que $\zeta \in \{i,-i\}$, un subespacio $\mathcal{K}$ reduce a una relación T si y solo si reduce a $\mathsf{C}_\zeta(T)$.*

Demostración. Si $\mathcal{K}$ reduce a T entonces $T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp}$ y del Teorema 4.2-(9) tenemos que

$$\mathsf{C}_\zeta(T) = \mathsf{C}_\zeta(T_{\mathcal{K}}) \oplus \mathsf{C}_\zeta(T_{\mathcal{K}^\perp}).$$

Más aún, como $T_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y $T_{\mathcal{K}^\perp} \subset \mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp$, entonces se sigue del Teorema 4.2-(4) y del Lema 4.16 que

$$\mathsf{C}_\zeta(T_{\mathcal{K}}) \subset \mathsf{C}_\zeta(\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}) = \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$$
$$\mathsf{C}_\zeta(T_{\mathcal{K}^\perp}) \subset \mathsf{C}_\zeta(\mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp) = \mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp,$$

Por lo tanto $\mathcal{K}$ reduce a $\mathsf{C}_\zeta(T)$. Inversamente, establecemos $S = \mathsf{C}_\zeta(T)$ y realizamos la misma demostración anterior con la anti-trasformada de Cayley obteniendo que $\mathcal{K}$ reduce a $\check{\mathsf{C}}_\zeta(S) = T$. □

Observación 4.18. Como una consecuencia del resultado anterior, haciendo $S = \mathsf{C}_{\pm i}(T)$, obtenemos que $\mathcal{K}$ reduce a S si y solo si reduce a $\check{\mathsf{C}}_{\pm i}(S)$.

Con base en los resultados anteriores, lo siguiente es empezar a descomponer una relación disipativa.

Definición 4.19. Decimos que una relación disipativa L tiene una parte autoadjunta no trivial, si existe un subespacio reductor $\mathcal{K}$ no trivial para L tal que $L_{\mathcal{K}}$ es autoadjunta en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$. De lo contrario diremos que L es completamente no autoadjunta y en este caso escribimos L c.n.a.

Cabe mencionar que si $L \oplus S$ es una relación disipativa c.n.a. entonces L y S son relaciones disipativas c.n.a.

Teorema 4.20. *Una relación L es disipativa, completamente no autoadjunta si y solo si $V = \mathsf{C}_i(L)$ es una contracción, completamente no unitaria.*

Demostración. Suponemos que L es una relación disipativa c.n.u., se sigue del Teorema 4.3 que $V = \mathsf{C}_i(L)$ es una contracción. Si existe $\mathcal{K}$ reductor de V por el cual $V_{\mathcal{K}}$ es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$, entonces de la Observación 4.18, $\mathcal{K}$ reduce a L y del Corolario 4.4 tenemos que $\check{\mathsf{C}}_i(V_{\mathcal{K}}) \subset L$ es autoadjunta en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$. Esto implica que $\mathcal{K} = \{0\}$ y por lo tanto V es c.n.u. La prueba contraria se sigue usando el mismo razonamiento anterior. □

El siguiente resultado nos muestra la descomposición de una relación disipativa en su parte autoadjunta y su parte completamente no autoadjunta.

Teorema 4.21. *Para cada relación disipativa cerrada L en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, existe un único subespacio $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ reductor para L tal que*

$$L = L_a \oplus L_c, \tag{4.26}$$

donde L_a es autoadjunta en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y L_c es c.n.a.

Demostración. Dado que L es disipativa cerrada entonces del Teorema 4.3 tenemos que $\mathsf{C}_i(L)$ es contracción cerrada. Del Corolario 4.12 tenemos la existencia de un único subespacio $\mathcal{K}$ reductor para $\mathsf{C}_i(L)$ tal que

$$\mathsf{C}_i(L) = V_u \oplus V_c\,, \tag{4.27}$$

donde V_u es unitaria en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y V_c es c.n.u. Así, del Corolario 4.17 llegamos a que $\mathcal{K}$ reduce a L y aplicando los puntos (1), (9) del Teorema 4.2,

$$L = \check{\mathsf{C}}_i(V_u) \oplus \check{\mathsf{C}}_i(V_c)\,.$$

Del Corolario 4.4 tenemos que $L_a = \check{\mathsf{C}}_i(V_u)$ es autoadjunta en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y del Teorema 4.20, $L_c = \check{\mathsf{C}}_i(V_c)$ es c.n.a.

Para demostrar la unicidad, suponemos que $\mathcal{K}'$ reduce a L y

$$L = L'_a \oplus L'_c\,,$$

donde L'_a es autoadjunta en $\mathcal{K}' \bigoplus \mathcal{K}'$ y L'_c es c.n.a. Entonces del Corolario 4.17 y del Teorema 4.2-(9), obtenemos que $\mathcal{K}'$ reduce a $\mathsf{C}_i(L)$ y

$$\mathsf{C}_i(L) = \mathsf{C}_i(L'_a) \oplus \mathsf{C}_i(L'_c)\,.$$

Más aún, del Corolario 4.4 y del Teorema 4.20 conseguimos que $\mathsf{C}_i(L'_a)$ es unitaria en $\mathcal{K}' \bigoplus \mathcal{K}'$ y $\mathsf{C}_i(L'_c)$ es c.n.u.. Por lo tanto, como $\mathcal{K}$ es única en (4.27) deducimos que $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. □

A la descomposición (4.26) le nombramos la descomposición canónica de una relación disipativa cerrada L, en su parte autoadjunta L_a y su parte c.n.a. L_c.

Para una relación simétrica cerrada A en $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ tal que $\eta_-(A) = 0$, si $\zeta \in \mathbb{C}_+$, verificamos por simple inspección que $\mathsf{C}_\zeta(A)$ es una relación isométrica cerrada con índice de deficiencia $\eta_e(\mathsf{C}_\zeta(A)) = 0$, lo cual implica que dom $\mathsf{C}_\zeta(A) = \mathcal{H}$.

Definición 4.22. Sea A una relación simétrica cerrada con $\eta_-(A) = 0$. Decimos que A es maximal elementaria, si $\mathsf{C}_i(A)$ es un desplazamiento unilateral (ver Definición 4.13).

Notemos que cada relación maximal elementaria es disipativa maximal. Además, si V es un desplazamiento unilateral automáticamente se sigue que $\check{\mathsf{C}}_i(V)$ es maximal elementaria.

El siguiente resultado se sigue directamente del Teorema 4.20 y del Corolario 4.15.

Proposición 4.23. *Una relación simétrica cerrada A con $\eta_-(A) = 0$, es completamente no autoadjunta si y solo si es maximal elementaria.*

Ahora bien, lo siguiente es dar la contraparte de la descomposición de Wold (ver Teorema 4.14) para relaciones simétricas.

Teorema 4.24. *Para cada relación simétrica cerrada A en $\mathcal{H}\bigoplus\mathcal{H}$ con $\eta_{-}(A)=0$, existe un único subespacio $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$, reductor de A, tal que*

$$A = A_a \oplus A_e\,, \tag{4.28}$$

donde A_a es autoadjunta en $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$ y A_e es maximal elementaria en $\mathcal{K}^{\perp}\bigoplus\mathcal{K}^{\perp}$.

Demostración. Bajo las condiciones del teorema, obtenemos que $\check{\mathsf{C}}_i(A)$ es una relación isométrica cerrada con dominio $\mathcal{H}$. Se sigue del Teorema 4.14 que existe un único subespacio $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ reductor de $\check{\mathsf{C}}_i(A)$ tal que

$$\check{\mathsf{C}}_i(A) = V_u \oplus V_s\,,$$

donde V_u es unitaria en $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$ y V_s es un desplazamiento unilateral en $\mathcal{K}^{\perp}\bigoplus\mathcal{K}^{\perp}$. Así, del Corolario 4.17 conseguimos que $\mathcal{K}$ reduce a A y aplicando los puntos (1), (9) del Teorema 4.2,

$$A = \check{\mathsf{C}}_i(V_u)\oplus\check{\mathsf{C}}_i(V_s)\,.$$

Del Corolario 4.4 tenemos que $A_a=\check{\mathsf{C}}_i(V_u)$ es autoadjunta en $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$. Observemos que $A_e=\check{\mathsf{C}}_i(V_s)$ es maximal elementaria en $\mathcal{K}^{\perp}\bigoplus\mathcal{K}^{\perp}$.

La unicidad de $\mathcal{K}$ se sigue sobre las mismas líneas de la prueba en el Teorema 4.21. □

Llamamos a la descomposición (4.28), la descomposición canónica de A, en su parte autoadjunta A_a y en su parte maximal elementaria A_e.

- Resultados originales del capítulo -

Los resultados relevantes de este capítulo son los siguientes: en el Corolario 4.12 vigorizamos la descomposición de Sz. Nagy-Foiaş-Langer que dimos en el Teorema 4.14, a contracciones cerradas no necesariamente definidas en todo el espacio. En el Corolario 4.15 mostramos que una relación isométrica con dominio todo el espacio es completamente no unitaria si y solo si es un desplazamiento unilateral

En el Lema 4.16 exhibimos que conjuntos lineales de la forma $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$, son invariantes bajo las trasformadas de Cayley. Además en el Corolario 4.17, obtuvimos que un subespacio reduce a T si y solo si reduce a su trasformada de Cayley $\mathsf{C}_i(T)$ (lo mismo sucede para $\mathsf{C}_{-i}(T)$).

Mostramos en el Teorema 4.20 que una relación disipativa L es completamente no autoadjunta si y solo si su transformada $\mathsf{C}_i(L)$ es una contracción, completamente no unitaria. Este resultado nos ayuda a demostrar el Teorema 4.21, que es el análogo a la descomposición de Sz. Nagy-Foiaş-Langer, en el cual presentamos que para cada relación disipativa cerrada L, existe un único subespacio $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$, reductor para L, tal que $L=L_a\oplus L_c$, donde L_a es autoadjunta en $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$ y L_c es completamente no autoadjunta.

Por último exhibimos el Teorema 4.23 que sirve como pauta al Teorema 4.24, el cual es la contraparte a la descomposición de von Neumann-Wold, en donde afirmamos que cada relación simétrica cerrada A, con índice $\eta_-(A) = 0$, tiene un único subespacio reductor $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, tal que $A = A_a \oplus A_e$, donde A_a es autoadjunta en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y A_e es maximal elementaria en $\mathcal{K}^\perp \bigoplus \mathcal{K}^\perp$.

CAPÍTULO 5

TEORÍA DE EXTENSIONES DISIPATIVAS

5.1 Extensiones disipativas por medio de la trasformada de Cayley

En esta sección reducimos el problema de describir las extensiones disipativas, esto como resultado de describir las extensiones contractivas y la aplicación de la trasformada de Cayley. Este enfoque es similar al que se utiliza en la teoría de von Neumann [12, Cap. 4, Sec. 4].

Teorema 5.1. *Para una contracción cerrada V, el operador $\hat{V}$ es una contracción cerrada, extensión de V si y solo si existe una única contracción cerrada W tal que*

$$\hat{V} = V \oplus W, \tag{5.1}$$

y

$$2|\mathrm{Re}\,(\langle f,h\rangle - \langle g,k\rangle)| \leq (\|f\|^2 - \|g\|^2) + (\|h\|^2 - \|k\|^2), \tag{5.2}$$

para todo $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ *y* $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in W$. *Más aún, si V es isométrica, entonces la condición (5.2) se convierte en las condiciones,*

$$\mathrm{dom}\, V \perp \mathrm{dom}\, W \quad y \quad \mathrm{ran}\, V \perp \mathrm{ran}\, W. \tag{5.3}$$

Debido a (5.1), las condiciones en (5.3) se cumplen simultáneamente.

Demostración. Suponemos que $\hat{V}$ es una contracción cerrada, extensión de V y consideremos $W = \hat{V} \ominus V$. Resulta que W es contracción cerrada y conseguimos $\hat{V} = V \oplus W$.

Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ y $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in W$, tenemos $\begin{pmatrix} \alpha f + h \\ \alpha g + k \end{pmatrix} \in \hat{V}$ y $\|\alpha g + k\| \leq \|\alpha f + h\|$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 \|g\|^2 + \|k\|^2 + 2\mathrm{Re}\ \overline{\alpha}\langle g, k\rangle &= \|\alpha g + k\|^2 \\ &\leq \|\alpha f + h\|^2 \\ &= |\alpha|^2 \|f\|^2 + \|h\|^2 + 2\mathrm{Re}\ \overline{\alpha}\langle f, h\rangle, \end{aligned}$$

de donde

$$-2\mathrm{Re}\ \overline{\alpha}(\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle) \leq |\alpha|^2(\|f\|^2 - \|g\|^2) + (\|h\|^2 - \|k\|^2). \tag{5.4}$$

Así, asignando $\alpha := \pm 1$ obtenemos la desigualdad (5.2).

Si V es isométrica entonces $\|f\| = \|g\|$. Afirmamos que

$$\langle f, h\rangle = \langle g, k\rangle \tag{5.5}$$

de no ser así, existe $\tau > 0$ tal que

$$\tau|\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle| > \|h\|^2 - \|k\|^2.$$

Esta desigualdad contradice (5.4) donde $\alpha = -\tau|\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle|/(\langle h, f\rangle - \langle k, g\rangle)$. Por lo tanto, como V y W son ortogonales, se sigue de (5.5) que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle f, h\rangle + \langle g, k\rangle = 2\langle f, h\rangle = 2\langle g, k\rangle. \end{aligned}$$

La unicidad de la descomposición es trivial. La prueba contraria se sigue de manera directa. □

Para V y $\hat{V}$ contracciones cerradas tales que $V \subset \hat{V}$, se cumple que

$$\mathrm{dom}\ \hat{V} = \mathrm{dom}\ V \oplus (\mathrm{dom}\ \hat{V} \ominus \mathrm{dom}\ V).$$

Usando esto junto con la segunda igualdad de (3.22) conseguimos

$$\eta_e(V) = \eta_e(\hat{V}) + \eta_0\,, \tag{5.6}$$

donde $\eta_0 = \dim\ (\mathrm{dom}\ \hat{V} \ominus \mathrm{dom}\ V)$.

Observación 5.2. Bajo las condiciones del Teorema 5.1, si V es isométrica entonces de (5.3) tenemos que $\eta_0 = \dim\ \mathrm{dom}\ W$. Además, es claro que $\hat{V}$ es isométrica si y solo si W es isométrica.

Corolario 5.3. *Una relación isométrica cerrada V tiene extensiones unitarias si y solo si sus índices de deficiencia son iguales.*

Demostración. Si $\hat{V}$ es una extensión unitaria de V, entonces del Teorema 3.38, de (5.6) y de la Observación 5.2 conseguimos que

$$\eta_e(V) = \dim \operatorname{dom} W\,, \tag{5.7}$$

con W en la descomposición (5.1). Por otra parte, para $\zeta \neq 0$ calculamos de manera simple que $\mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(V^*) = \mathbf{N}_{1/\overline{\zeta}}((V^*)^{-1})$. Como los índices son constantes en componentes conexas, se sigue que $\eta_i(V) = \eta_e(V^{-1})$. Además de (5.1) obtenemos $\hat{V}^{-1} = V^{-1} \oplus W^{-1}$. Por lo tanto, como W es isométrica, de (5.7) obtenemos que

$$\begin{aligned} \eta_i(V) &= \eta_e(V^{-1}) \\ &= \dim \operatorname{dom} W^{-1} \\ &= \dim \operatorname{dom} W = \eta_e(V)\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Inversamente, si V tiene índices iguales, tomando (5.8) y (5.6) se sigue que sus extensiones simétricas también tienen índices iguales y esto implica que tiene extensiones con índices cero y por lo tanto unitarias, debido al Teorema 3.38. □

Procedemos ahora con la teoría de extensiones disipativas.

Proposición 5.4. *Para una relación disipativa cerrada L, se cumple que $\hat{L}$ es una extensión disipativa cerrada de L si y solo si existe una única relación disipativa cerrada S tal que*

$$\hat{L} = L \oplus S\,, \tag{5.9}$$

donde para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ *y* $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$*,*

$$\operatorname{Im}\,(\langle f,g\rangle + \langle h,k\rangle) \geq |\operatorname{Im}\,(\langle f,k\rangle - \langle g,h\rangle)|\,. \tag{5.10}$$

Demostración. Si $\hat{L}$ es una extensión disipativa cerrada de L, basta que consideremos $S := \hat{L} \ominus L$ para obtener (5.9). La unicidad se sigue de manera directa. Además, es claro que S es disipativa cerrada. Para obtener (5.10), sean $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ y $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$, esto implica que $\begin{pmatrix} \alpha f + h \\ \alpha g + k \end{pmatrix} \in \hat{L}$. Así,

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \operatorname{Im}\,\langle \alpha f + h, \alpha g + k\rangle \\ & = & |\alpha|^2 \operatorname{Im}\,\langle f,g\rangle + \operatorname{Im}\,\langle h,k\rangle + \operatorname{Im}\,\overline{\alpha}(\langle f,k\rangle - \langle g,h\rangle)\,, \end{array}$$

así

$$|\alpha|^2 \operatorname{Im}\,\langle f,g\rangle + \operatorname{Im}\,\langle h,k\rangle \geq -\operatorname{Im}\,\overline{\alpha}(\langle f,k\rangle - \langle g,h\rangle)\,.$$

Por lo tanto, asignando $\alpha := \pm 1$, obtenemos (5.10). La prueba contraria se sigue calculando directamente que (5.9) es disipativa. □

La siguiente fórmula para operadores se le conoce como la primera fórmula de von Neumann (*cf.* [12, Cap. 4, Sec. 4]). Esta fórmula caracteriza la adjunta de una relación simétrica, con respecto a su espacio de deficiencia (2.19).

Teorema 5.5. *Si A es una relación simétrica cerrada, entonces*

$$A^* = A \dotplus \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*) \dotplus \mathbf{N}_{\zeta}(A^*), \qquad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{5.11}$$

Para $\zeta \in \{i, -i\}$, la suma directa en (5.11) es ortogonal.

Demostración. Solo mostramos que

$$A^* \subset A \dotplus \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*) \dotplus \mathbf{N}_{\zeta}(A^*), \tag{5.12}$$

debido a que la otra inclusión es trivial. Consideremos $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ y sea $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$. Verificamos de (2.7), del Lema 2.23 y de la Proposición 3.17 que

$$\mathcal{H} = \text{ran } (A - \zeta I) \oplus \ker\, (A^* - \overline{\zeta} I), \tag{5.13}$$

esta descomposición implica que existen $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} u \\ \overline{\zeta} u \end{pmatrix} \in A^*$ tales que

$$\begin{aligned} k - \zeta h &= g - \zeta f + u \\ &= g - \zeta f + (\overline{\zeta} - \zeta) v, \end{aligned} \tag{5.14}$$

con $v = (\overline{\zeta} - \zeta)^{-1} u \in \ker\, (A^* - \overline{\zeta} I)$, de manera que $\begin{pmatrix} v \\ \overline{\zeta} v \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*)$. Sea $w := h - f - v$ y notemos de (5.14) que $k - g - (\overline{\zeta} - \zeta) v = \zeta h - \zeta f$. Entonces

$$\begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h - f - v \\ \zeta h - \zeta f - \zeta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \overline{\zeta} v \end{pmatrix} \in A^*,$$

es decir, $\begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_{\zeta}(A^*)$. Nuevamente de (5.14),

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + v + w \\ g + \overline{\zeta} v + \zeta(h - f - v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ \overline{\zeta} v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Solo falta verificar que la suma en (5.15) es directa. Suponemos que (con la notación anterior)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ \overline{\zeta} v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix} \in A^*, \tag{5.16}$$

esto implica que $0 = g - \zeta f + (\overline{\zeta} - \zeta) v \in \text{ran } A^* - \zeta I$. Como $g - \zeta f \in \text{ran } (A - \zeta I)$ y $(\zeta - \overline{\zeta}) v \in \ker\, (A^* - \overline{\zeta} I)$, tenemos de (5.13) que $v = 0$ y $g = \zeta f$. Se sigue de (5.16) que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

por lo que $f = -w$. Dado que $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix} \in A^*$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\zeta}\|f\|^2 &= \langle \zeta f, f\rangle \\ &= -\langle \zeta f, w\rangle \\ &= -\langle f, \zeta w\rangle \\ &= \langle f, \zeta f\rangle = \zeta\|f\|^2 . \end{aligned}$$

lo cual implica que $(\overline{\zeta} - \zeta)\|f\|^2 = 0$ y por lo tanto $-w = f = 0$. Para verificar que la suma es ortogonal, sea $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} v \\ -iv \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_{-i}(A^*)$ y $\begin{pmatrix} w \\ iw \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_i(A^*)$. Entonces

$$\left\langle \begin{pmatrix} w \\ iw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ -iv \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w, v\rangle + \langle iw, -iv\rangle = 0 ,$$

por lo que $\mathbf{N}_{-i}(A^*)$ y $\mathbf{N}_i(A^*)$ son ortogonales. Luego $\langle iw, f\rangle = \langle w, g\rangle$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} w \\ iw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w, f\rangle - i\langle w, g\rangle = \langle w, f\rangle - i\langle iw, f\rangle = 0 ,$$

es decir $\mathbf{N}_i(A^*)$ y A son ortogonales. De manera similar obtenemos que $\mathbf{N}_{-i}(A^*)$ y A son ortogonales. El caso $\zeta = -i$ se sigue por simetría. □

El siguiente resultado extiende a lo que se conoce para operadores como la segunda fórmula de von Neumann *cf.* [25, Teo. 6.2].

Teorema 5.6. *Sea A una relación simétrica cerrada. Una relación $\hat{A}$ es extensión disipativa (simétrica) cerrada de A si y solo si, para un $\zeta \in \mathbb{C}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) fijo,*

$$\hat{A} = A \dotplus (\mathbf{V} - \mathbf{I})D, \tag{5.18}$$

donde $D \subset \mathbf{N}_\zeta(A^*)$ es una relación cerrada y acotada, $\mathbf{V} : D \to \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*)$ es una contracción (isometría) en $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Para $\zeta = i$, la suma directa en (5.18) resulta ortogonal.

Demostración. Suponemos que $\hat{A}$ es extensión disipativa cerrada de A y fijemos $\zeta \in \mathbb{C}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$). Se sigue de la Proposición 4.3 y del Teorema 4.2 que $\mathbf{C}_\zeta(A)$ es isométrica, $\mathbf{C}_\zeta(\hat{A})$ es contracción y $\mathbf{C}_\zeta(A) \subset \mathbf{C}_\zeta(\hat{A})$. El teorema 5.1 implica la existencia de una contracción (isometría) cerrada W tal que

$$\mathbf{C}_\zeta(\hat{A}) = \mathbf{C}_\zeta(A) \oplus W, \tag{5.19}$$

con

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} W \subset \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} \mathbf{C}_\zeta(A) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\,(A - \overline{\zeta} I) = \ker\,(A^* - \zeta I), \\ \operatorname{ran} W \subset \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran} \mathbf{C}_\zeta(A) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\,(A - \zeta I) = \ker\,(A^* - \overline{\zeta} I). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Aplicando la anti-trasformada de Cayley a (5.19), obtenemos

$$\hat{A} = A \dotplus \check{\mathbf{C}}_\zeta(W). \tag{5.21}$$

Notemos que dom W es cerrada y consideremos la relación lineal

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \,:\, v \in \operatorname{dom} W \right\}, \tag{5.22}$$

donde de (5.20) tenemos que $D \subset \mathbf{N}_\zeta(A^*)$. Así D es acotada y por lo tanto cerrada.

Para cada $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in W$, definemos la relación $\mathbf{V}$ en $(\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H})$ con dom $\mathbf{V} = D$ tal que

$$\mathbf{V} \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \bar{\zeta} w \end{pmatrix}.$$

Se cumple de (5.20) que $\mathbf{V}D \subset \mathbf{N}_{\bar{\zeta}}(A^*)$ y dado que W es una contracción (isometría):

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} w \\ \bar{\zeta} w \end{pmatrix} \right\| &= \|w\| + \|\bar{\zeta} w\| \\ &\leq \|v\| + \|\zeta v\| = \left\| \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Esto implica que $\mathbf{V}$ sea una contracción cerrada (isométrica porque la igualdad se cumple en (5.23) cuando W es isométrica). Entonces

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}_\zeta(W) &= \left\{ \begin{pmatrix} w - v \\ \bar{\zeta} w - \zeta v \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in W \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{V} \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \in D \right\} = (\mathbf{V} - \mathbf{I})D. \end{aligned}$$

Por lo tanto (5.21) se trasforma en $\hat{A} = A \dot{+} (\mathbf{V} - \mathbf{I})D$. Para $\zeta = i$, la ortogonalidad de la suma directa en (5.21) se sigue del Teorema 4.2.

Inversamente, definamos

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \in D \text{ y } \begin{pmatrix} w \\ \zeta w \end{pmatrix} \in \mathbf{V}D \right\}.$$

Como $\mathbf{V}$ es una contracción (isométrica), tenemos que

$$\begin{aligned} \|v\| - \|w\| &= \frac{1}{1 + |\zeta|} [(1 + |\zeta|)\|v\| - (1 + |\zeta|)\|w\|] \\ &= \frac{1}{1 + |\zeta|} \left(\left\| \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} w \\ \bar{\zeta} w \end{pmatrix} \right\| \right) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Teniendo en cuenta que dom $W = $ dom D, deducimos que W es una contracción cerrada (isométrica porque la igualdad se cumple en (5.24) cuando V es isométrica). De igual manera,

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} - I)D &= \left\{ \mathbf{V} \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \in D \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} w - v \\ \bar{\zeta} w - \zeta v \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in W \right\} = \check{\mathbf{C}}_\zeta(W). \end{aligned}$$

Llegamos a que $\hat{A} = A \dotplus \check{\mathsf{C}}_\zeta(W)$ y con la aplicación de la trasformada de Cayley obtenemos

$$\mathsf{C}_\zeta(\hat{A}) = \mathsf{C}_\zeta(A) \dotplus W\,, \tag{5.25}$$

donde $\mathsf{C}_\zeta(A)$ es una relación isométrica cerrada. Concluimos la prueba una vez que mostremos que $\mathsf{C}_\zeta(\hat{A})$ es una contracción (isometría) cerrada. Esto se sigue notando que

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} W &\subset \ker\,(A^* - \zeta I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\,(A - \overline{\zeta} I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} \mathsf{C}_\zeta(A)\,, \\ \operatorname{ran} W &\subset \ker\,(A^* - \overline{\zeta} I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\,(A - \zeta I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran} \mathsf{C}_\zeta(A)\,, \end{aligned}$$

de donde la sima directa en (5.25) resulta ortogonal. Por el Teorema 5.1, deducimos que $\mathsf{C}_\zeta(\hat{A})$ es una contracción (isometría) cerrada. □

Definición 5.7. Diremos que L es una extensión canónica de una relación simétrica A, si

$$A \subset L \subset A^*\,.$$

Como una consecuencia de (5.18), las extensiones disipativas de relaciones simétricas son extensiones canónicas.

Corolario 5.8. *Sea A una relación simétrica cerrada. Si $\hat{A}$ es una extensión disipativa cerrada de A, entonces*

$$\eta_-(A) = \eta_-(\hat{A}) + \dim\,[\hat{A}/A]. \tag{5.26}$$

Más aún, si $\hat{A}$ es simétrica cerrada, entonces

$$\eta_+(A) = \eta_+(\hat{A}) + \dim\,[\hat{A}/A]. \tag{5.27}$$

Demostración. En la prueba del Teorema 5.6 conseguimos que $(\mathbf{V} - \mathbf{I})$ da un correspondencia unívoca. Entonces (5.18) y (5.22) implican

$$\begin{aligned} \dim\,[\hat{A}/A] &= \dim\,[(\mathbf{V} - \mathbf{I})D] \\ &= \dim\,(\operatorname{dom} W)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en referencia de (4.2), se sigue de (5.19) y (5.6) que

$$\begin{aligned} \eta_-(A) &= \eta_e(\mathsf{C}_\zeta(A)) \\ &= \eta_e(\mathsf{C}_\zeta(\hat{A})) + \dim\,(\operatorname{dom} W) \\ &= \eta_-(\hat{A}) + \dim\,[\hat{A}/A]. \end{aligned}$$

Para el caso de que $\hat{A}$ es simétrica cerrada, calculamos de manera simple que $\mathbf{N}_\zeta(A^*) = \mathbf{N}_{-\zeta}(-A^*)$. Así, $\eta_+(A) = \eta_-(-A)$ y por lo tanto de (5.26) obtenemos

$$\begin{aligned} \eta_-(-A) &= \eta_-(-\hat{A}) + \dim\,[-\hat{A}/-A] \\ &= \eta_+(\hat{A}) + \dim\,[\hat{A}/A]\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue (5.27). □

Del resultado anterior conseguimos que una relación simétrica cerrada A tienen extensiones autoadjuntas si y solo si sus índices de deficiencia son iguales. Además, si los índices de A son igual a uno, entonces sus extensiones simétricas propias son autoadjuntas.

5.2 Perturbación unidimensional de relaciones autoadjuntas

En la sección anterior dimos una fórmula para determinar extensiones disipativas de relaciones simétricas (Teorema 5.6). El objetivo de esta sección es dar una caracterización más explicita de todas las extensiones disipativas de una relación simétrica cerrada con índices de deficiencia $(1,1)$.

Iniciamos con el siguiente resultado que es muy útil en resultados posteriores. Calculamos de manera sencilla que $(S_1 \dot{+} S_2)^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$. Este cálculo implica que

$$\overline{(S_1 \dot{+} S_2)} = (S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp})^{\perp}. \tag{5.28}$$

Permítanos usar la definición de conjuntos linealmente independientes (ver Definición 1.13) en relaciones.

Lema 5.9. *Sea B una relación cerrada. Si C es una relación de dimensión finita tal que B^* y C son linealmente independientes, entonces*

$$B^* \dot{+} C = (B \cap C^*)^*.$$

Demostración. Como B^* es cerrada y C es de dimensión finita, $B^* \dot{+} C$ es cerrada. Así de (5.28) conseguimos

$$\begin{aligned} B^* \dot{+} C &= \overline{B^* \dot{+} C} \\ &= \overline{\mathbf{W}B^{\perp} \dot{+} \mathbf{W}(C^*)^{\perp}} \\ &= \mathbf{W}(\overline{B^{\perp} \dot{+} (C^*)^{\perp}}) \\ &= \mathbf{W}(B \cap C^*)^{\perp} = (B \cap C^*)^*. \end{aligned}$$

□

Ahora tratamos resultados generales sobre relaciones simétricas cerradas y después iremos restringiendo condiciones. Una demostración análoga a la del siguiente resultado, la podemos encontrar en [26, Lema, 5.1].

Teorema 5.10. *Sea A una relación simétrica cerrada y sea Z una relación de dimensión finita. Si Z y A^* son linealmente independientes, entonces $S := A \cap Z^*$ es una relación simétrica cerrada con las siguientes propiedades:*

(1) $S^* = A^* \dotplus Z$,

(2) $\dim \mathbf{N}_\zeta(S^*) = \dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) + \dim Z$, *con* $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,

(3) $\dim [S^*/S] = 2\dim Z + \dim [A^*/A]$.

Demostración. Es claro que S es simétrica cerrada y del Lema 5.9 tenemos que

$$S^* = (A \cap Z^*)^* = A^* \dotplus Z\,.$$

Ahora para demostrar (2), si $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in S^*$ entonces de (1) se sigue que

$$\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*, \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in Z\,. \tag{5.29}$$

De esto obtenemos que la aplicación lineal γ que mapea $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_\zeta(S^*)$ a $\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in Z$ en la descomposición (5.29) está bien definida y de hecho es sobreyectiva debido a lo siguiente. Si $\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in Z$, dado que ran $(A^* - \zeta I) = \mathcal{H}$ con $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $s - \zeta t = k - \zeta h$, o bien $k - s = \zeta(h - t)$. Así estableciendo $f = h - t$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in A^* \dotplus Z = S^*\,.$$

Observemos que $\ker \gamma = \mathbf{N}_\zeta(A^*)$ y además γ restringido a $\mathbf{N}_\zeta(S^*) \ominus \mathbf{N}_\zeta(A^*)$ es una biyección lineal sobre Z y por lo tanto se cumple (2). El punto (3) se sigue directamente de (2) y de la fórmula (5.11). $\square$

Bajo las condiciones del resultado anterior, si A tiene índices de deficiencia (n,m), entonces $A \cap Z^*$ tiene índices de deficiencia

$$(n + \dim Z, m + \dim Z)\,. \tag{5.30}$$

Para una relación autoadjunta A, si Z es unidimensional entonces $A \cap Z^*$ tiene índices $(1,1)$. Inversamente tenemos lo siguiente.

Teorema 5.11. *Sea S una relación simétrica cerrada con índices $(1,1)$. Si A es una extensión autoadjunta de S, entonces existe una relación cerrada Y unidimensional, linealmente independiente a A, tal que*

$$S = A \cap Y^*\,. \tag{5.31}$$

Demostración. Como S tiene índices $(1,1)$, de las fórmulas (5.11) y (5.18), se sigue que $\dim [S^*/S] = 2$ y $\dim [A/S] = 1$. Esto conlleva a que $\dim [S^*/A] = 1$. Entonces podemos escoger un subespació unidimensional $Y \subset S^*$, linealmente independiente a A, tal que $S^* = A \dotplus Y$. Por lo tanto, utilizando el Lema 5.9 tenemos que $S = A \cap Y^*$. $\square$

El siguiente teorema nos da una caracterización de todas las extensiones autoadjuntas de la relación (5.31), vistas como perturbaciones de A. Este resultado también lo podemos encontrar en [37].

Teorema 5.12. *Sea A una relación autoadjunta y sea $Z = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\right\}$ de dimensión uno. Si A y Z son linealmente independientes, entonces las extensiones autoadjuntas de $S := A \cap Z^*$ están en correspondencia uno a uno con $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Estas extensiones $A(\tau)$ vienen dadas por $A(0) = A$. Para $\tau \neq 0$ tal que $1/\tau + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \neq 0$,*

$$A(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + \frac{\langle \varphi_2, h\rangle - \langle \varphi_1, g\rangle}{1/\tau + \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \; : \; \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in A \right\}. \tag{5.32}$$

Mientras que para $1/\tau + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$, la extensión viene dada por

$$A(\tau) = S \dotplus Z\,. \tag{5.33}$$

Demostración. Debido a (5.30), la relación S tiene índices $(1,1)$. Además, es claro que las relaciones (5.32) y (5.33) son extensiones simétricas propias y por lo tanto autoadjuntas.

Mostremos que cualquier extensión autoadjunta de S tiene esta estructura. Sea $\hat{S}$ una extensión autoadjunta de S. El caso $\hat{S} = A$ corresponde a $\tau = 0$ por lo que suponemos que $\hat{S} \neq A$.

Sea $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in \hat{S}$ y dado que $\hat{S} \subset S^* = A \dotplus Z$, entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in A$ tal que

$$\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \qquad (\zeta \in \mathbb{C})\,. \tag{5.34}$$

Podemos asumir que $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \notin S$ y esto implica que $\zeta \neq 0$, de lo contrario $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in A$ y por autoadjuntes $\hat{S} = A$, lo cual resulta contradictorio. Usando (5.34) y el hecho de que $\langle k, f \rangle = \langle f, k \rangle$, llegamos a

$$\begin{aligned} \zeta\langle g, \varphi_1\rangle + \overline{\zeta}\langle \varphi_2, h\rangle + |\zeta|^2\langle \varphi_2, \varphi_1\rangle &= \langle g + \zeta\varphi_2, h + \zeta\varphi_1\rangle \\ &= \langle h + \zeta\varphi_1, g + \zeta\varphi_2\rangle \\ &= \overline{\zeta}\langle \varphi_1, g\rangle + \zeta\langle h, \varphi_2\rangle + |\zeta|^2\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle\,. \end{aligned}$$

Como $\zeta \neq 0$,

$$\frac{1}{\zeta}(\langle \varphi_2, h\rangle - \langle \varphi_1, g\rangle) - \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = \frac{1}{\overline{\zeta}}(\langle h, \varphi_2\rangle - \langle g, \varphi_1\rangle) - \langle \varphi_2, \varphi_1\rangle\,. \tag{5.35}$$

Notemos que el lado derecho de (5.35) es complejo conjugado del izquierdo, por lo que debe ser real, digamos $1/\tau$ para algún $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ distinto de cero. Se sigue que

$$1/\tau + \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle = \frac{1}{\zeta}(\langle \varphi_2, h\rangle - \langle \varphi_1, g\rangle)\,, \tag{5.36}$$

de donde si $\langle \varphi_2, h\rangle \neq \langle \varphi_1, g\rangle$, entonces $1/\tau + \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle \neq 0$. Así

$$\zeta = \frac{\langle \varphi_2, h\rangle - \langle \varphi_1, g\rangle}{1/\tau + \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle},$$

por lo que conseguimos de (5.34) que $\hat{S} \subset A(\tau)$. La igualdad se da debido a que ambas son autoadjuntas.

Para el caso en el que $\langle \varphi_2, h\rangle = \langle \varphi_1, g\rangle$ obtenemos $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in Z^*$, es decir, $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in S$. De (5.34) se sigue que $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in S \dotplus Z$. De esta manera concluimos que $\hat{S} = S \dotplus Z$. □

En lo siguiente trabajamos con relaciones simétricas cerradas restringiendo su dominio.

Teorema 5.13. *Sea A una relación simétrica cerrada. Si $\mathcal{F}$ es un subespacio de $\overline{\mathrm{dom}\ A}$, entonces A^* y $Z := \{0\} \bigoplus \mathcal{F}$ son linealmente independientes y además*

$$A_{|\mathrm{dom}\ A \ominus \mathcal{F}} = A \cap Z^*, \tag{5.37}$$

esto implica que $S := A \cap Z^*$ sea una relación simétrica cerrada. Más aún, si $\mathcal{F}$ es de dimensión finita entonces se cumple lo siguiente:

(1) $S^* = A^* \dotplus Z$.

(2) $\mathrm{mul}\ S^* = \mathrm{mul}\ A^* \oplus \mathcal{F}$.

(3) Si A tiene índices (n, m) entonces S tiene índices $(n + \dim \mathcal{F}, m + \dim \mathcal{F})$.

Demostración. Como $\mathcal{F} \subset \overline{\mathrm{dom}\ A}$, se sigue de (2.9) que

$$\mathrm{mul}\ Z = \mathcal{F} \subset (\mathrm{mul}\ A^*)^{\perp}, \tag{5.38}$$

lo cual conlleva a que $A^* \cap Z = \{0\} \bigoplus \{0\}$.

Para mostrar (5.37), si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A_{|\mathrm{dom}\ A \ominus \mathcal{F}}$ entonces para todo $\begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} \in Z$,

$$\langle f, l\rangle = \langle g, 0\rangle, \tag{5.39}$$

es decir, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in Z^*$ y tenemos $A_{|\mathrm{dom}\ A \ominus \mathcal{F}} \subset A \cap Z^*$. Ahora bien, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \cap Z^*$ entonces para todo $\begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} \in Z$ se cumple (5.39) y $f \in \mathcal{F}^{\perp}$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A_{|\mathrm{dom}\ A \ominus \mathcal{F}}$.

Cuando $\mathcal{F}$ es de dimensión finita, el punto (1) se sigue del Teorema 5.10 y del hecho de que $\dim Z = \dim \mathcal{F}$. Luego (2) se sigue directamente de (1) y de (5.38). Por último 5.30 implica (3). □

Permítanos mostrar una caracterización de la parte operador y la parte multivaluada de la adjunta de la relación (5.37).

Corolario 5.14. *Bajo las condiciones del Teorema 5.13 y suponiendo que A tiene dominio denso. Si $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$, con $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ elementos de alguna base ortonormal en $\mathcal{H}$, entonces $S^* = (S^*)_\odot \oplus Z$, donde*

$$(S^*)_\odot = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g - \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^* \right\}. \tag{5.40}$$

Demostración. Como A es densamente definida, se sigue de (2.9) que $\operatorname{mul} A = \{0\}$. Del Teorema 5.13 tenemos $\operatorname{mul} S^* = \mathcal{F}$ y por lo tanto $(S^*)_\infty = Z$. Denotemos el lado derecho de (5.40) como T y mostraremos que $(S^*)_\odot = T$. Sea $\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix} \in (S^*)_\odot \subset S^* = A^* \dotplus Z$, existen $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ y $l = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j \in \mathcal{F}$, con $\alpha_j \in \mathbb{C}$, tales que

$$\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g + l \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Dado que $t \in (\operatorname{mul} S^*)^\perp = (\mathcal{F})^\perp$, entonces para cada $\varphi_r \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi_r, t \rangle \\ &= \langle \varphi_r, g + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j \rangle \\ &= \langle \varphi_r, g \rangle + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle \varphi_r, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_r, k \rangle + \alpha_r, \end{aligned}$$

es decir, $\alpha_r = -\langle \varphi_r, g \rangle$. Así, $l = -\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j$ y junto con (5.41) se sigue $(S^*)_\odot \subset T$.

Para la otra contención, suponemos que $\begin{pmatrix} f \\ g - \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j \end{pmatrix} \in T$ con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ y como $\begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j \end{pmatrix} \in Z$, tenemos $\begin{pmatrix} f \\ g - \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j \end{pmatrix} \in S^*$. Así, para $\varphi_r \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g - \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_r \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle g - \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j, \varphi_r \rangle \\ &= \langle g, \varphi_r \rangle - \sum_{j=1}^{m} \overline{\langle \varphi_j, g \rangle} \langle \varphi_j, \varphi_r \rangle \\ &= \langle g, \varphi_r \rangle - \overline{\langle \varphi_r, g \rangle} = 0 \end{aligned}$$

esto implica que $\begin{pmatrix} f \\ g - \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, g \rangle \varphi_j \end{pmatrix} \in (S^*)_\odot$. Por lo tanto se cumple (5.40). □

En lo siguiente damos una caracterización de todas las extensiones disipativas maximales de la relación (5.37) vistas como perturbaciones de A. Esto en el caso cuando A es autoadjunta y $\mathcal{F}$ es unidimensional. En cierto manera, este resultado extiende al Teorema (5.12).

Teorema 5.15. *Bajo las condiciones del Teorema 5.13 y suponiendo que A es autoadjunta. Si $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{\varphi\}$, entonces las extensiones disipativas maximales de $S := A \cap Z^*$ están en correspondencia unívocamente con $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para $\tau \neq \infty$ las extensiones de S son perturbaciones de A dadas por*

$$A(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + \tau\langle\varphi, f\rangle\varphi \end{pmatrix} \; : \; \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \right\}, \tag{5.42}$$

mientras que

$$A(\infty) = S \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.43}$$

Para $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, la extensión $A(\tau)$ es autoadjunta.

Demostración. Se sigue del Teorema 5.13 que S tiene índices $(1,1)$. Por otra parte, con un cálculo sencillo mostramos que (5.42) y (5.43) son extensiones disipativas y por lo tanto maximales. Además, si $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ entonces $A(\tau)$ es simétrica y por lo tanto autoadjunta. Falta mostrar que cada extensión tiene esta estructura.

Suponemos que $\hat{S}$ es una extensión disipativa maximal de S y sea $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in \hat{S}$. Del Teorema 5.13, $S^* = A \dotplus Z$ y como $\hat{S}$ es extensión canónica de S (ver Definición 5.7), existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ tal que

$$\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g + \zeta\varphi \end{pmatrix}, \qquad (\zeta \in \mathbb{C}). \tag{5.44}$$

Definamos $\tau := \zeta / \langle\varphi, f\rangle$. Si $\langle\varphi, f\rangle \neq 0$, entonces de (5.44) y del hecho de que $\hat{S}$ es disipativa,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Im}\, \langle f, g + \zeta\varphi\rangle \\ &= \operatorname{Im}\, \zeta\langle f, \varphi\rangle = |\langle f, \varphi\rangle|^2 \operatorname{Im}\, \tau, \end{aligned}$$

es decir, $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$. Así, sustituyendo $\zeta = \tau\langle\varphi, f\rangle$ en (5.44) obtenemos que $\hat{S} \subset A(\tau)$. Esto implica que son iguales debido a que ambas son maximales.

Por otra parte, si $\langle\varphi, f\rangle = 0$, entonces $f \in \operatorname{dom}\, A \ominus \operatorname{span}\{\varphi\}$ y se sigue de (5.37) que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$. Por lo tanto, de (5.44) tenemos $\hat{S} \subset A(\infty)$ e iguales debido a que son maximales. $\square$

Observación 5.16. Para A una relación autoadjunta, si $\varphi \in \overline{\operatorname{dom}\, A}$, entonces se sigue del Teorema 5.13 que

$$S = A|_{\operatorname{dom}\, A \ominus \operatorname{span}\{\varphi\}}$$

es una relación simétrica cerrada con índices $(1,1)$, cuya adjunta esF

$$S^* = A \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\}.$$

Además todas sus extensiones disipativas maximales vienen dadas por (5.42) y (5.43).

Corolario 5.17. *Si S un operador simétrico cerrado no densamente definido, con índices* $(1,1)$. *Entonces existe una extensión autoadjunta A de S, que es operador, tal que*

$$S^* = A \dotplus (S^*)_\infty . \tag{5.45}$$

Además la dimensión de $(S^*)_\infty$, que es igual a la codimensión del dominio de S, es igual a uno y

$$S = A_{|\text{dom } A \ominus \text{mul } S^*} . \tag{5.46}$$

Más aún, todas las extensiones disipativas maximales de S son las del Teorema 5.15, donde mul $S^* = \text{span } \{\varphi\}$, *las cuales todas son operadores a excepción de* (5.43).

Demostración. En [37, Prop. 1.3 y 1.4], obtenemos la existencia de un operador autoadjunto A con

$$\text{dom } A = \text{dom } S^* , \tag{5.47}$$

que es extensión autoadjunta A de S. Se sigue que A y $(S^*)_\infty$ son linealmente independientes y como A es extensión canónica tenemos que $A \dotplus (S^*)_\infty \subset S^*$. Para la otra inclusión, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$ entonces de (5.47) existe $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in A \subset S^*$. Así $\begin{pmatrix} 0 \\ g-k \end{pmatrix} \in (S^*)_\infty$ y por lo tanto

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g-k \end{pmatrix} \in A \dotplus (S^*)_\infty ,$$

de donde obtenemos (5.45). Ahora bien, en vista de que S tiene índices $(1,1)$, de las fórmulas (5.11) y (5.18), tenemos que dim $[S^*/S] = 2$ y dim $[A/S] = 1$. Esto, junto con (5.45), implican

$$1 = \text{dim } [S^*/A] = \text{dim } (S^*)_\infty .$$

Notemos de (2.9) que

$$\text{dim } (S^*)_\infty = \text{dim mul } S^* = \text{dim } (\text{dom } S)^\perp ,$$

por lo que la codimensión de dom S es uno. Haciendo $Z := (S^*)_\infty$ en (5.45) y utilizando Lema 5.9, se sigue que $S = A \cap Z^*$. Observemos que mul $S^* \subset \overline{\text{dom } A}$ por lo que del Teorema 5.13 obtenemos (5.46) y este hecho implica que todas las extensiones disipativas maxiamales de S son las dadas en el Teorema 5.15, donde verificamos directamente que las extensiones (5.42) son operadores. □

Para que la codimensión del dominio de S sea igual a uno en el resultado anterior, un papel importante es que S sea operador. Ciertamente, si consideremos a la relación autoadjunta $A(\infty)$ que vimos en (5.43) y $\varphi \in \text{dom } A(\infty)$, entonces del Teorema 5.13 conseguimos que

$$A(\infty)_{|\text{dom } A(\infty) \ominus \text{span } \{\varphi\}}$$

es una relación simétrica cerrada no densamente definida, con índices $(1,1)$. Sin embargo, la codimensión de su dominio es mayor-igual que dos.

5.3

Perturbación finita-dimensional y compacta de relaciones disipativas

En las dos primeras secciones de este capítulo mostramos algunas caracterizaciones de extensiones disipativas de relaciones disipativas. En esta sección abordamos primeramente la teoría de perturbación para relaciones lineales disipativas y posteriormente, damos comportamientos espectrales de las extensiones disipativas de relaciones disipativas.

Existe otra manera de construir extensiones disipativas de relaciones simétricas, basándonos en la fórmula (5.11).

Proposición 5.18. *Si A una relación simétrica cerrada con índice finito $\eta_-(A) = n$, entonces para cada $\zeta \in \mathbb{C}_+$ fijo, la relación*

$$\hat{A} := A \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*) \tag{5.48}$$

es la única extensión maximal disipativa de A tal que $\dim \mathbf{N}_\zeta(\hat{A}) = n$.

Demostración. Fijemos $\zeta \in \mathbb{C}_+$. Notemos que (5.11) implica

$$A \cap \mathbf{N}_\zeta(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además, (5.11) y (5.48) conllevan a que $\mathbf{N}_\zeta(A^*) = \mathbf{N}_\zeta(\hat{A})$.

Verificamos directamente de la definición que $\hat{A}$ es disipativa. Como A es cerrada y $\dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) = \eta_-(A)$ es finito, $\hat{A}$ es cerrada. Más aún, del Corolario 5.8 tenemos que

$$\eta_-(\hat{A}) = \eta_-(A) - \dim\,[\hat{A}/A] \tag{5.49}$$
$$= \eta_-(A) - \dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) = 0\,. \tag{5.50}$$

Así, $\hat{A}$ es una extensión maximal disipativa de A.

Para la unicidad, suponemos que L es una extensión maximal disipativa de A con $\dim \mathbf{N}_\zeta(L) = n$. Dado que $L \subset A^*$, tenemos $\mathbf{N}_\zeta(L) \subset \mathbf{N}_\zeta(A^*)$. Debido a la dimensión de los conjuntos, deducimos que $\mathbf{N}_\zeta(L) = \mathbf{N}_\zeta(A^*)$. Por lo tanto $A \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*) \subset L$ y esto conlleva a que son iguales, en vista de que ambos son maximales. ☐

Observemos que (5.48) es una relación disipativa maximal, no autoadjunta. La siguiente afirmación complementa el resultado anterior.

Proposición 5.19. *Sea A una relación simétrica cerrada con índices finitos (n,n). Si $\alpha \in \hat{\rho}(A) \cap \mathbb{R}$, entonces*

$$L := A \dotplus \mathbf{N}_\alpha(A^*) \tag{5.51}$$

es la única extensión disipativa maximal de A, con $\dim \mathbf{N}_\alpha(L) = n$. *Además L es autoadjunta.*

Demostración. Del hecho de que A es simétrica, obtenemos que $(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})\cup\{\alpha\}$ está en una componente conexa de $\hat{\rho}(A)$. Esto conlleva a que dim $\mathbf{N}_\alpha(A^*) = n$.

Si $\begin{pmatrix} f \\ \alpha f \end{pmatrix} \in A$, entonces $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in (A-\alpha I)^{-1}$ y esto conlleva a que $f = 0$, ya que $\alpha \in \hat{\rho}(A)$. Por lo cual A y $\mathbf{N}_\alpha(A^*)$ son linealmente independientes.

Luego, por simple inspección verificamos que $L := A \dotplus \mathbf{N}_\alpha(A^*)$ es simétrica y además es cerrada, debido a que $\mathbf{N}_\alpha(A^*)$ es de dimensión finita. Por ser L es extensión simétrica de A, se cumple que $L \subset A^*$ y de esto deducimos que $\mathbf{N}_\alpha(L) = \mathbf{N}_\alpha(A^*)$. Usando la misma analogía en (5.49) obtenemos que $\eta_\pm(L) = 0$, conllevando a que L sea autoadjunta. La unicidad la demostramos siguiendo las mismas líneas de la prueba en la Proposición 5.18. Así concluimos que L satisface las propiedades requeridas. □

El siguiente resultado muestra características espectrales de las extensiones autoadjuntas de una relación simétrica.

Proposición 5.20. *Sea A una relación simétrica cerrada con índices finitos (n,n) y sea L una extensión autoadjunta de A. Si un intervalo real Δ está contenido en $\hat{\rho}(A)$, entonces $\sigma(L)\cap\Delta$ solo puede consistir de autovalores aislados de multiplicidad a lo más n.*

Demostración. Si $\zeta \in \sigma(L)\cap\Delta$, entonces $\zeta \in \hat{\rho}(A)$ y dim $\mathbf{N}_\zeta(A^*) = n$. De la Proposición 2.23, tenemos que ran $(A-\zeta I)$ es cerrado. Del hecho de que $L \subset A^*$, podemos definir

$$K := \text{ran } (L-\zeta I) \ominus \text{ran } (A-\zeta I). \tag{5.52}$$

Así, $K \subset \ker\,(A^* - \zeta I)$ y

$$\begin{aligned} \dim K &\leq \dim\,[\ker\,(A^*-\zeta I)] \\ &= \dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) = n. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Las expresiones (5.52) y (5.53) implican que ran $(L-\zeta I)$ sea cerrado. Por lo tanto $\zeta \notin \sigma_c(L)$. Luego, de la Proposición 3.15, obtenemos que L_L es operador autoadjunto y como consecuencia del Teorema 2.40, logramos que ζ sea un autovalor aislado.

Para calcular la multiplicidad de ζ, observemos que $\mathbf{N}_\zeta(L) \subset \mathbf{N}_\zeta(A^*)$. Entonces

$$\begin{aligned} \dim\,[\ker\,(L-\zeta I)] &= \dim \mathbf{N}_\zeta(L) \\ &\leq \dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) = n\,. \end{aligned}$$

□

Permítanos introducir un tipo de regularidad de una relación, esto con base en su conjunto cuasi-regular.

Definición 5.21. Decimos que una relación T es regular, si su conjunto cuasi-regular $\hat{\rho}(T)$ comprende todo el plano complejo, es decir, si $\hat{\rho}(T) = \mathbb{C}$.

Corolario 5.22. *Sea A una relación simétrica cerrada, regular, con $\eta_-(A) = n$ finito y asumimos que L es una extensión disipativa maximal de A.*

(1) Si L es autoadjunta, entonces su espectro consiste solamente de autovalores aislados de multiplicidad a lo más n.

(2) Si L no es autoadjunta, entonces su núcleo espectral consiste de autovalores de multiplicidad a lo más n.

(3) Para $n=1$, cada número en $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ es un autovalor de una y solo una relación L.

Demostración. Debido a la regularidad de A, sus índices son iguales. Ahora (1), tomando en cuenta que $\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$, es consecuencia de la Proposición 5.20. Para (2), consideremos $\zeta \notin \hat{\rho}(L)$ y repetimos el argumento de la prueba en la Proposición 5.20, para mostrar que $\zeta \notin \sigma_c(L)$ y la multiplicidad de cada autovalor la calculamos similarmente a como se calculó en demostración de la Proposición 5.20. Por último, (3) lo obtenemos de las Proposiciones 5.18 y 5.19. □

Observación 5.23. Dado que cualquier operador simétrico cerrado, regular, con índices $(1,1)$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación en un espacio de de Branges (*cf.* [59]), el espectro de L, en el corolario anterior, es discreto, incluso cuando L no es autoadjunto (ver Teorema 6.7).

Para una relación T en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, permítanos denotar lo siguiente

$$\operatorname{rank} T := \dim\,(\operatorname{ran} T)\,.$$

En [12, Teo. 2.6.4] se muestra que $\operatorname{rank} T = m$ si y solo si $\operatorname{rank} T^* = m$. De esto conseguimos que

$$\dim\,(\mathcal{H} \ominus \ker T) = \operatorname{rank} T^* = \operatorname{rank} T\,. \tag{5.54}$$

Para L, A relaciones disipativas maximales y $\zeta \in \rho(L) \cap \rho(A)$, denotamos

$$F_{(L,A)} := (L-\zeta I)^{-1} - (A-\zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,. \tag{5.55}$$

Observación 5.24. Podemos considerar siempre al operador 5.55, esto debido a que de la Observación 3.8 los conjuntos $\rho(A)$ y $\rho(L)$ tienen en común a $\mathbb{C}_-$. Por otra parte, si $\operatorname{rank} F_{(L,A)} = m < \infty$ para algún $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(L)$, entonces se cumple para todo $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(L)$. En este sentido, el operador 5.55 no depende de ζ.

El siguiente resultado está relacionado con la discusión en el Teorema 3.11, sobre relaciones disipativas maximales $A+V$.

Lema 5.25. *Sean A, V relaciones disipativas maximales y asume que $L = A+V$. Si* $\operatorname{dom} V = \mathcal{H}$, *entonces* $\operatorname{rank} F_{(L,A)} \le \operatorname{rank} V$.

Demostración. Sea $\begin{pmatrix} f \\ h-k \end{pmatrix} \in F_{(L,A)}$, donde $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in (L-\zeta I)^{-1}$ y $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in (A-\zeta I)^{-1}$. De la Proposición 3.6 tenemos que $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por lo consiguiente existe $\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \in V$. Definamos el conjunto

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ h-k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \in V \text{ y } \begin{pmatrix} f \\ h-k \end{pmatrix} \in F_{(L,A)} \right\}.$$

Verificamos por simple inspección que G es una relación lineal y si $\begin{pmatrix} 0 \\ h-k \end{pmatrix} \in G$, donde $h \neq g$, entonces $\begin{pmatrix} k \\ f+\zeta k \end{pmatrix} \in L$ y $\begin{pmatrix} h-k \\ \zeta(h-k) \end{pmatrix} \in L$. Esto implica que $\zeta \in \sigma_p(L) \subset \sigma(L)$, lo cual es imposible dado que $\zeta \in \rho(L)$. Así, G es un operador lineal y por lo tanto

$$\dim \text{ ran } F_{(L,A)} = \dim \text{ ran } G \leq \dim \text{ dom } G \leq \dim \text{ ran } V.$$

□

En la siguiente afirmación damos un resultado sobre rank $F_{(L,A)}$ en relación al índice de deficiencia.

Lema 5.26. *Si L y A son extensiones disipativas maximales de una relación disipativa cerrada S, entonces* rank $F_{(L,A)} \leq \eta_-(S)$.

Demostración. Sea $\zeta \in \mathbb{C}_-$ y notemos que $S-\zeta I \subset (L-\zeta I) \cap (A-\zeta I)$, de donde se sigue que ran $(S-\zeta I)$ está contenido en ker $F_{(L,A)}$. Por lo tanto, debido a (5.54) obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{rank } F_{(L,A)} &= \dim \ (\mathcal{H} \ominus \ker F_{(L,A)}) \\ &\leq \dim \ [\mathcal{H} \ominus \text{ran } (S-\zeta I)] = \eta_-(S). \end{aligned}$$

□

Ahora bien, pasemos al estudio de autovalores de relaciones disipativas. Para simplificar notación, dada una relación disipativa cerrada A, denotemos

$$\mu_A(\lambda) := \dim \ker \ (A-\lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Proposición 5.27. *Sean L y A relaciones disipativas maximales y consideremos*

$$G_\lambda := \ker \ (L-\lambda I) \cap \ker \ (A-\lambda I).$$

Entonces

$$\dim \ [\ker \ (L-\lambda I) \ominus G_\lambda] \leq \text{rank } F_{(L,A)}, \quad \dim \ [\ker \ (A-\lambda I) \ominus G_\lambda] \leq \text{rank } F_{(L,A)} \ \ y \tag{5.56}$$

$$\mu_A(\lambda) - \text{rank } F_{(L,A)} \leq \mu_L(\lambda) \leq \mu_A(\lambda) + \text{rank } F_{(L,A)}. \tag{5.57}$$

Demostración. Si asumimos por ejemplo que dim $[\ker \ (A-\lambda I) \ominus G_\lambda] >$ rank $F_{(L,A)}$, entonces debido a (5.54) existe un elemento no cero $f \in \ker \ (A-\lambda I) \cap \ker F_{(L,A)}$ tal que $f \perp G_\lambda$. Así, $\begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix} \in A$ y $\begin{pmatrix} f \\ (\lambda-\zeta)^{-1} f \end{pmatrix} \in (A-\zeta I)^{-1}$. Como $f \in \ker F_{(L,A)}$, tenemos que

$\begin{pmatrix} f \\ (\lambda-\zeta)^{-1}f \end{pmatrix} \in (L-\zeta I)^{-1}$ lo cual implica $\begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix} \in L$. Por lo tanto $f \in G_\lambda$, resultando una contradicción. Ahora probemos la desigualdad izquierda en (5.57). Se sigue de (5.56) que

$$\begin{aligned} \mu_A(\lambda) &= \dim\ [\ker\ (A-\lambda I) \ominus G_\lambda] + \dim\ G_\lambda \\ &\leq \text{rank}\ F_{(L,A)} + \dim\ G_\lambda \leq \text{rank}\ F_{(L,A)} + \mu_L(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Para mostrar la desigualdad derecha en (5.57), intercambiamos los papeles de A y L en (5.58). □

En la Proposición 5.27, si rank $F_{(L,A)} < +\infty$, entonces debido a (5.56), los autoespacios de L y A solo pueden diferir por un subespacio de dimensión a lo más rank $F_{(L,A)}$. Además, se sigue de (5.57) que $\sigma_p^\infty(A) = \sigma_p^\infty(L)$.

Proposición 5.28. *Sea A una extensión disipativa cerrada de una relación simétrica cerrada S. Si $\lambda \in \hat{\rho}(S)$, entonces $\mu_A(\lambda) \leq \eta_-(S)$.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.30 y 3.3 que ker $(A-\zeta I)$ solo puede tener elementos no triviales cuando $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$. Por lo tanto, dado que $A \subset S^*$, obtenemos que

$$\mu_A(\lambda) = \dim\ \mathbf{N}_\lambda(A) \leq \dim\ \mathbf{N}_\lambda(S^*) = \eta_-(S)\,,$$

para cada $\lambda \in \hat{\rho}(S) \cap (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R})$. □

Definición 5.29. Para una relación autoadjunta A, denotamos su espectro esencial como

$$\sigma_e(A) := \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A). \tag{5.59}$$

Del Teorema 3.20-(d) y Observación 3.13, obtenemos que A_A es un operador autoadjunto y con base en (2.29), conseguimos ker $(A-\zeta I) =$ ker $(A_A-\zeta I)$. Entonces $\sigma_p^\infty(A) = \sigma_p^\infty(A_A)$, de donde se sigue que

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A_A)\,. \tag{5.60}$$

La siguiente definición es una generalización de la noción de sucesiones singulares para operadores autoadjuntos *cf.* [12, Cap. 9, Sec. 1].

Definición 5.30. Sea A una relación autoadjunta y consideremos $\left\{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cuyos elementos pertenecen a A. Decimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión singular para A en el punto $\lambda \in \mathbb{R}$, si los siguientes enunciados se satisfacen:

(I) $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| > 0$, (II) $u_n \xrightarrow{w} 0$, (III) $(v_n - \lambda u_n) \to 0$.

El siguiente resultado es bien conocido como el criterio Weyl y podemos encontrarlo para operadores autoadjuntos en [12, Teo. 9.1.2] (ver [44], para una versión más general en operadores).

Proposición 5.31. *Existe una sucesión singular para una relación autoadjunta A en λ si y solo si λ pertenece a $\sigma_e(A)$.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada elemento $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in A$, en vista de (2.29), existe $\begin{pmatrix} u_n \\ t_n \end{pmatrix} \in A_A$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ s_n \end{pmatrix} \in A_\infty$ tales que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ t_n + s_n \end{pmatrix}.$$

Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singular para A en λ, entonces

$$\begin{aligned} \|t_n - \zeta u_n\|^2 &\leq \|t_n - \zeta u_n\|^2 + \|s_n\|^2 \\ &= \|t_n + s_n - \zeta u_n\|^2 \\ &= \|v_n - \zeta u_n\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singular para A_A en λ. Como el resultado se cumple en operadores, concluimos de (5.60) que $\lambda \in \sigma_e(A)$. La prueba contraria se sigue directamente debido a que $A_A \subset A$. □

Denotemos por $S_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, como el conjunto de todos los operadores compactos cuyo dominio es $\mathcal{H}$. De manera estándar se sigue que V pertenece a $S_\infty(\mathcal{H})$ si y solo si V trasforma una sucesión débilmente convergente en una sucesión convergente (ver [12, Cap. 2, Sec. 6]). Damos el siguiente resultado que para operadores se conoce como el Teorema de Weyl.

Teorema 5.32. *Sean A y V dos relaciones autoadjuntas. Si $V \in S_\infty(\mathcal{H})$, entonces $L = A + V$ es autoadjunta y $\sigma_e(L) = \sigma_e(A)$.*

Demostración. La autoadjuntes de L se sigue de la Proposición 2.18. Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in A$ existe $\begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$ in V tal que

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L.$$

Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singular para A en λ, entonces $w_n \to 0$ y $[(v_n + w_n) - \lambda u_n] \to 0$. Por lo tanto $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singular para L en λ y de la Proposición 5.31, concluimos que $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(L)$. La otra inclusión se sigue notando que $A = L - V$. □

Permítanos dar una versión más general el resultado previo, esto usando el operador $F_{(L,A)}$ dado en (5.55).

Teorema 5.33. *Sean L y A dos relaciones autoadjuntas. Si $F_{(L,A)}$ pertenece a $S_\infty(\mathcal{H})$, entonces $\sigma_e(L) = \sigma_e(A)$.*

Demostración. Solo necesitamos mostrar que $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(L)$. Siguiendo la prueba de la Proposición 5.31, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singular para A en λ, entonces lo es también para A_A en λ. Así, existe una sucesión $\left\{\begin{pmatrix} u_n \\ t_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ con elementos en A_A tales que

$$(t_n - \lambda u_n) \to 0\,. \tag{5.61}$$

Observemos que $\begin{pmatrix} t_n - \zeta u_n \\ u_n \end{pmatrix} \in (A-\zeta I)^{-1}$ y existe $\begin{pmatrix} t_n - \zeta u_n \\ w_n \end{pmatrix} \in (L-\zeta I)^{-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Calculamos de manera simple que

$$\left\{\begin{pmatrix} w_n \\ t_n - \zeta(u_n - w_n) \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L\,.$$

Debido a la Proposición 5.31, solo falta probar que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singulara para L en λ. Verificamos de manera sencilla que $\begin{pmatrix} t_n - \zeta u_n \\ w_n - u_n \end{pmatrix} \in F_{(L,A)}$ y $\begin{pmatrix} u_n \\ w_n - u_n \end{pmatrix} \in F_{(L,A)}(A_A - \zeta I)$. Como A_A y $F_{(L,A)}$ son operadores,

$$F_{(L,A)}(A_A - \zeta I) = F_{(L,A)}(A_A - \lambda I) + (\lambda - \zeta) F_{(L,A)}\,.$$

Entonces existen

$$\begin{pmatrix} u_n \\ s_n \end{pmatrix} \in F_{(L,A)}(A_A - \lambda I)\,; \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ g_n \end{pmatrix} \in (\lambda - \zeta) F_{(L,A)} \tag{5.62}$$

tales que

$$w_n - u_n = s_n + g_n\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.63}$$

El hecho de que $\begin{pmatrix} u_n \\ t_n - \lambda u_n \end{pmatrix} \in A_A - \lambda I$ implica

$$\begin{pmatrix} t_n - \lambda u_n \\ s_n \end{pmatrix} \in F_{(L,A)}\,. \tag{5.64}$$

Como $F_{(L,A)}$ es compacto y $u_n \rightharpoonup 0$, se sigue de (5.61), (5.62), y (5.64) que $g_n, s_n \to 0$. Así (5.63) conlleva a

$$(w_n - u_n) \to 0\,. \tag{5.65}$$

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es singular, obtenemos $w_n \xrightarrow{w} 0$ y $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\| > 0$. Para concluir la prueba, notemos de (5.61) y (5.65) que

$$[t_n - \zeta(u_n - w_n)] - \lambda w_n = (t_n - \lambda u_n) - (\lambda - \zeta)(w_n - u_n) \to 0\,.$$

$\square$

En lo siguiente estudiamos el espectro discreto de una relación autoadjunta. Debido a la Observación 3.13, podemos considerar el teorema espectral para operadores autoadjuntos de la siguiente manera: para una relación autoadjunta A, si E_{A_A} es la medida espectral de A_A, entonces (*cf.* [12, Teo. 6.1.3]) se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\sigma(A) \text{ es el soporte de } E_{A_A}.\\
&\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : E_{A_A}\{\lambda\} \neq 0\}.\\
&E_{A_A}\{\lambda\}(\text{mul } A)^{\perp} \text{ es el autoespacio asociado a } \lambda \in \sigma_p(A).\\
&\sigma_c(A) \text{ es el conjunto de los puntos no aislados de } \sigma(A).
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Para un intervalo acotado Δ denotamos

$$\mu_A(\Delta) := \dim\, E_{A_A}(\Delta)(\text{mul } A)^{\perp}.$$

El siguiente resultado lo podemos encontrar para operadores en [12, Cap. 9] y es tentativo pensar que para relaciones lineales se cumple de manera directa usando (5.66). Sin embargo, esto no siempre es posible debido a que para L y A relaciones autoadjuntas los espacios $(\text{mul } L)^{\perp}$ y $(\text{mul } A)^{\perp}$ pueden diferir.

Teorema 5.34. *Si L y A son dos relaciones autoadjuntas, entonces*

$$\mu_A(\Delta) - \text{rank } F_{(L,A)} \leq \mu_L(\Delta) \leq \mu_A(\Delta) + \text{rank } F_{(L,A)}. \tag{5.67}$$

Demostración. Es suficiente probar una desigualdad. Si $\mu_L(\Delta) > \mu_A(\Delta) + \text{rank } F_{(L,A)}$, entonces existe $f \in E_{L_L}(\Delta)(\text{mul } L)^{\perp} \cap \ker F_{(L,A)}$ no cero tal que $f \perp E_{A_A}(\Delta)(\text{mul } A)^{\perp}$. Esto a su vez implica la existencia de

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in R_L(\zeta) \cap R_A(\zeta). \tag{5.68}$$

Como una consecuencia de la Proposición 3.12 tenemos $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in R_{L_L}(\zeta)$ y observemos que

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in R_{L_L}(\zeta)E_{L_L}(\Delta) = E_{L_L}(\Delta)R_{L_L}(\zeta), \tag{5.69}$$

lo cual implica $g \in E_{L_L}(\Delta)(\text{mul } L)^{\perp}$.

Asumiendo $\Delta = (\alpha, \beta)$, consideremos $\gamma = (\alpha + \beta)/2$ y $\xi = (\alpha - \beta)/2$. Verifiquemos de manera sencilla que $\begin{pmatrix} g \\ f + (\zeta - \gamma)g \end{pmatrix} \in (L_L - \gamma I)$ y del teorema espectral obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f + (\zeta - \gamma)g\|^2 &= \|(L_L - \gamma I)g\|^2 \\
&= \int_{|t-\gamma|<\xi} (t-\gamma)^2 d(E_{L_L}(t)g, g) < \xi^2 \|g\|^2.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Por otra parte de (5.68) tenemos $\begin{pmatrix} g \\ f + \zeta g \end{pmatrix} \in A$ y nuevamente de la Proposición 3.12 conseguimos que $g \in (\text{mul } A)^{\perp}$. El hecho de que $f \perp E_{A_A}(\Delta)(\text{mul } A)^{\perp}$ implica

$$f \in [E_{A_A}(\mathbb{R}\backslash\Delta)(\text{mul } A)^{\perp}] \oplus [\text{mul } A],$$

de donde se sigue que $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in E_{A_A}(\mathbb{R}\backslash\Delta)(\text{mul } A)^\perp$ y $f_2 \in \text{mul } A$. Verificamos por simple inspección que $\begin{pmatrix} f_1 \\ g \end{pmatrix} \in R_{A_A}(\zeta)$ y análogamente a (5.69) obtenemos $g \in E_{A_A}(\mathbb{R}\backslash\Delta)(\text{mul } A)^\perp$. Además, $\begin{pmatrix} g \\ f_1 + (\zeta - \gamma)g \end{pmatrix} \in (A_A - \gamma I)$ y

$$\begin{aligned} \|f + (\zeta-\gamma)g\|^2 &= \|f_1 + f_2 + (\zeta-\gamma)g\|^2 \\ &= \|f_2\|^2 + \|f_1 + (\zeta-\gamma)g\|^2 \\ &\geq \|f_1 + (\zeta-\gamma)g\|^2 \\ &= \|(A_A - \gamma I)g\|^2 \\ &= \int_{|t-\gamma|\geq\xi} (t-\gamma)^2 d(E_{A_A}(t)g, g) \geq \xi^2 \|g\|^2 , \end{aligned}$$

lo cual contradice (5.70). □

La siguiente afirmación se sigue de manera trivial usando (5.67).

Corolario 5.35. *Si L y A son dos relaciones autoadjuntas tales que* rank $F_{(L,A)}$ *es finito, entonces el espectro de L en Δ es discreto si y solo si el espectro de A en Δ es discreto.*

Definición 5.36. Decimos que un intervalo $\Delta = (\gamma - \xi, \gamma + \xi)$ es una laguna de una relación simétrica S si

$$\|f\| \leq \frac{1}{\xi}\|g - \gamma f\| , \qquad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S .$$

Una laguna consiste de puntos que pertenecen a $\hat{\rho}(S)$. Ciertamente, si $\lambda \in \Delta$ entonces $|\lambda - \gamma| < \xi$. Así,

$$\|g - \lambda f\| \geq \|g - \gamma f\| - |\lambda - \gamma| \ \|f\| \geq (\xi - |\lambda - \gamma|)\|f\| ,$$

de donde se sigue que $\lambda \in \hat{\rho}(S)$. Por otra parte, es claro que cada punto real en $\hat{\rho}(S)$ pertenece a alguna laguna de S. Si S tiene una laguna entonces sus índices de deficiencia son iguales.

Permítanos mostrar el siguiente resultado que para operadores lo podemos encontrar en [12, Teo. 9.3.6].

Teorema 5.37. *Sea A una extensión autoadjunta de una relación simétrica cerrada S. Si Δ es una laguna de S, entonces $\mu_A(\Delta) \leq \eta_-(S)$.*

Demostración. De la Proposición 3.12 y del hecho de que $S \subset A$, llegamos a

$$S_\odot \subset (\text{mul } A)^\perp \oplus (\text{mul } A)^\perp ,$$

esto implica $S_A = S_\odot$. Luego de (2.25),

$$\begin{aligned} \text{ran } (S - \zeta I) &= \text{ran } (S_\odot - \zeta I) \oplus \text{mul } S \\ &= \text{ran } (S_A - \zeta I) \oplus \text{mul } S \subset \text{ran } (S_A - \zeta I) \oplus \text{mul } A , \end{aligned}$$

de donde llegamos a

$$\begin{aligned}
\eta_-(S) &= \dim\, \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}\, (S-\zeta I) \\
&\geq \dim\, \mathcal{H} \ominus (\operatorname{ran}\, (S_A-\zeta I) \oplus \operatorname{mul}\, A) \\
&= \dim\, (\mathcal{H} \ominus \operatorname{mul}\, A) \ominus \operatorname{ran}\, (S_A-\zeta I) \\
&= \dim\, (\operatorname{mul}\, A)^{\perp} \ominus \operatorname{ran}\, (S_A-\zeta I) = \eta_-(S_A)\,.
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Observemos que A_A es extensión autoadjunta de S_A y además Δ es laguna de S_A. Por lo tanto, como el resultado se cumple para operadores, deducimos de (5.71) que

$$\mu_A(\Delta) \leq \eta_-(S_A) \leq \eta_-(S)\,.$$

□

Observación 5.38. Bajo las hipótesis del Teorema 5.37, si $\eta_-(S)$ es finito, entonces en cada $\Delta \subset \hat{\rho}(S)$ se cumple que el espectro de A en Δ es discreto y de multiplicidad a lo más $\eta_-(S)$. Esto debido a que cada intervalo cerrado y acotado $\Omega' \subset \Delta$ puede ser cubierto por un número finito de lagunas de $\hat{\rho}(S)$.

Corolario 5.39. *Sean L y A extensiones autoadjuntas de una relación simétrica cerrada S con índices (1,1). Si $\Delta \subset \hat{\rho}(S)$, entonces los espectros de L y A en Δ son discretos, simples y se alternan.*

Demostración. Obtenemos de la Observación 5.38 que los espectros de L y A en Δ son discretos y simples. Notemos que $\operatorname{ran}\, F_{(L,A)} = \{0\}$ implica $L = A$, entonces del Lema 5.26 conseguimos que $\operatorname{rank}\, F_{(L,A)} = 1$ y además de (5.67),

$$\mu_A(\Delta) - 1 \leq \mu_L(\Delta) \leq \mu_A(\Delta) + 1\,. \tag{5.72}$$

Como $L \neq A$, en vista de la Proposición 5.19, los espectros de L y A tienen intersección vacía en Δ. Consideremos λ_1 y λ_2 autovalores vecinos de A en Δ, se sigue de (5.72) que $\mu_L((\lambda_1, \lambda_2)) \leq 1$. Si no hay espectro de L en $[\lambda_1, \lambda_2]$, entonces lo mismo sucede para algún intervalo abierto $\delta \supset [\lambda_1, \lambda_2]$ y nuevamente por (5.72) tenemos que

$$0 = \mu_L(\delta) \geq \mu_A(\delta) - 1 \geq 1\,,$$

lo cual resulta una contradicción. Por lo tanto los espectros de L y A en Δ se alternan. □

El siguiente resultado se obtiene directamente del corolario anterior.

Corolario 5.40. *Si S es una relación simétrica cerrada, regular (véase Definición 5.21), con índices $(1,1)$. Entonces los espectros de sus extensiones autoadjuntas consisten solamente de autovalores aislados de multiplicidad uno y se intercalan a pares.*

5.4

Tripletes fronterizos y funciones de Weyl

Los tripletes fronterizos son una herramienta útil en la teoría de extensiones y en análisis espectral de relaciones disipativas. Los métodos que se utilizan en tripletes, tienen aplicaciones en la teoría de operadores diferenciales ordinarios y parciales (*cf.* [14,31,34,58,66,67]). Podemos encontrar la teoría de tripletes fronterizos para operadores en [15, 23, 33, 72].

En la Sección 5.1 vimos que todas las extensiones disipativas de una relación simétrica A están contenidas en A^*, es decir, son extensiones canónicas de A (ver Definición 5.7). Con motivo de hallar extensiones disipativas de A, en la siguiente definición damos un espacio de Hilbert auxiliar $\mathcal{K}$, técnicamente llamado espacio fronterizo, y dos relaciones lineales Γ_0, Γ_1 que conectan al dominio de A^* con $\mathcal{K}$. Esto con la finalidad de que las extensiones canónicas de A estén parametrizadas con las relaciones lineales en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$.

Definición 5.41. Decimos que un triplete fronterizo (o simplemente triplete) para la adjunta de una relación simétrica A, es un triplete $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ de un espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$ y dos relaciones lineales $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{K}$ cuyos dominios son igual al dominio de A^*, el cual satisface lo siguiente:

(1) Para cada par de elementos $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ y $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, se cumple que

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{W} \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle_* . \tag{5.73}$$

(2) Para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$, existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$, tal que $\begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1$.

A la condición (5.73) de un triplete fronterizo se le conoce como la identidad abstracta de Green en un triplete, mientras que a los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la segunda condición se les llaman los valores abstractos de frontera de f.

Proposición 5.42. *Si* $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ *es un triplete fronterizo para la adjunta de una relación simétrica cerrada* A*, entonces* $\operatorname{dom} A = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1$.

Demostración. Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$, existe $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Luego para cualquier elemento $\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$, existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así

$$\begin{aligned}\langle s,b\rangle_* - \langle a,t\rangle_* &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle_* \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \langle g,h\rangle - \langle f,k\rangle = 0,\end{aligned}$$

esto implica $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in (\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K})^* = \{0\} \bigoplus \{0\}$ y por lo tanto $\operatorname{dom} A \subset \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1$.

Para la otra inclusión, si $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ De esta manera, para cada $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$, $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$ tenemos que

$$\langle g,h\rangle - \langle f,k\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle_* = 0,$$

lo que conlleva a $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ y por lo tanto $\ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1 \subset \operatorname{dom} A$. □

Para efectos prácticos, en la siguiente definición modificamos la identidad abstracta de Green de la Definición 5.41, usando Γ_+, Γ_- en vez de Γ_0, Γ_1 para diferenciar la condición. Posteriormente mostraremos que estas definiciones son equivalentes.

Definición 5.43. Decimos que $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ es un triplete fronterizo para la adjunta de una relación simétrica A, si para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ y $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_+$, $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_-$, se cumple que

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2i} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \right\rangle_*, \tag{5.74}$$

además de satisfacer la condición (2) de la Definición 5.41.

Teorema 5.44. *Sea A una relación simétrica. Si $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete para A^*, entonces denotando*

$$\Gamma_+ := \Gamma_0 + i\Gamma_1; \qquad \Gamma_- := \Gamma_0 - i\Gamma_1$$

se cumple que $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ es un triplete para A^*. Inversamente, si $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ es un triplete para A^*, entonces definiendo

$$\Gamma_0 := \frac{1}{2}(\Gamma_+ + \Gamma_-), \qquad \Gamma_1 := \frac{1}{2i}(\Gamma_+ - \Gamma_-)$$

tenemos que $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ resulta un triplete para A^*.

Demostración. Es suficiente mostrar que Γ_+, Γ_- y Γ_0, Γ_1 satisfacen las condiciones (5.73) y (5.74) respectivamente.

Si $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$ es un triplete para A^*, entonces para $\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\in A^*$, $\begin{pmatrix} f\\ a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ b\end{pmatrix}\in\Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f\\ s\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ t\end{pmatrix}\in\Gamma_1$, se sigue que $\begin{pmatrix} f\\ a+is\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ b+it\end{pmatrix}\in\Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f\\ a-is\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ b-it\end{pmatrix}\in\Gamma_-$. Por lo tanto de (5.73) conseguimos que

$$\begin{aligned}\left\langle\begin{pmatrix} a+is\\ a-is\end{pmatrix},\mathbf{W}\begin{pmatrix} b-it\\ b+it\end{pmatrix}\right\rangle_* &= 2i(\langle s,b\rangle_*-\langle a,t\rangle_*)\\ &= 2i\left\langle\begin{pmatrix} a\\ s\end{pmatrix},\mathbf{w}\begin{pmatrix} b\\ t\end{pmatrix}\right\rangle_* = 2i\left\langle\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\mathbf{W}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\right\rangle.\end{aligned}$$

Inversamente, si $(\mathcal{K},\Gamma_+,\Gamma_-)$ es un triplete para A^*, entonces para $\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\in A^*$, $\begin{pmatrix} f\\ a\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ b\end{pmatrix}\in\Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f\\ s\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ t\end{pmatrix}\in\Gamma_-$, verificamos que $\begin{pmatrix} f\\ (a+s)/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ (b+t)/2\end{pmatrix}\in\Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f\\ (a-s)/2i\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ (b-t)/2i\end{pmatrix}\in\Gamma_1$. Por lo tanto, se sigue de (5.74) que

$$\begin{aligned}\left\langle\begin{pmatrix} (a+s)/2\\ (a-s)/2i\end{pmatrix},\mathbf{W}\begin{pmatrix} (b+t)/2\\ (b-t)/2i\end{pmatrix}\right\rangle_* &= \frac{1}{2i}(\langle s,t\rangle_*-\langle a,b\rangle_*)\\ &= \frac{1}{2i}\left\langle\begin{pmatrix} a\\ s\end{pmatrix},\mathbf{W}\begin{pmatrix} t\\ b\end{pmatrix}\right\rangle_* = \left\langle\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix},\mathbf{W}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\right\rangle.\end{aligned}$$

□

Veamos un ejemplo sencillo de un triplete en relaciones lineales.

Ejemplo 5.45. Consideremos A una relación autoadjunta y $\mathcal{K}\subset\overline{\text{dom }A}$ un subespacio de dimensión finita. Del Teorema 5.10 tenemos que $S=A\cap(\{0\}\bigoplus\mathcal{K})^*$ es una relación simétrica cerrada con adjunta

$$S^*=A\dot{+}\{0\}\bigoplus\mathcal{K}. \tag{5.75}$$

Notemos que para cada $\begin{pmatrix} f\\ g_1+g_2\end{pmatrix}\in S^*$ con $\begin{pmatrix} f\\ g_1\end{pmatrix}\in A$ y $g_2\in\mathcal{K}$, existen $f_1\in\mathcal{K}$ y $f_2\in\mathcal{K}^\perp$ tales que $f=f_1+f_2$. Definamos las relaciones lineales Γ_0, $\Gamma_1\subset\mathcal{H}\bigoplus\mathcal{K}$ dadas por

$$\Gamma_0:=\left\{\begin{pmatrix} f_1+f_2\\ f_1\end{pmatrix}\ :\ \begin{pmatrix} f_1+f_2\\ g_1+g_2\end{pmatrix}\in S^*\right\};\quad \Gamma_1:=\left\{\begin{pmatrix} f_1+f_2\\ g_2\end{pmatrix}\ :\ \begin{pmatrix} f_1+f_2\\ g_1+g_2\end{pmatrix}\in S^*\right\} \tag{5.76}$$

las cuales observemos tienen el mismo dominio de S^*. Verifiquemos que $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$ es un triplete para S^*.

Para $\begin{pmatrix} f_1+f_2\\ g_1+g_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h_1+h_2\\ k_1+k_2\end{pmatrix}\in S^*$, tenemos que $\begin{pmatrix} f_1+f_2\\ g_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h_1+h_2\\ k_1\end{pmatrix}\in A$ y como A es autoadjunta,

$$\langle f_1+f_2,k_1\rangle=\langle g_1,h_1+h_2\rangle. \tag{5.77}$$

Además, $\begin{pmatrix} f_1+f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1+h_2 \\ h_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f_1+f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1+h_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Entonces de (5.77), del hecho de que $g_2, k_2 \in \mathcal{K}$ y $f_2, h_2 \in \mathcal{K}^{\perp}$, tenemos que

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1+f_2 \\ g_1+g_2 \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h_1+h_2 \\ k_1+k_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\langle f_1, k_2\rangle + \langle g_2, h_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

de donde conseguimos la identidad de Green en triplete. Por otra parte, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, como $\mathcal{K} \subset \operatorname{dom} A$, entonces existe $\begin{pmatrix} x \\ g \end{pmatrix} \in A$. Por lo que $\begin{pmatrix} x \\ g+y \end{pmatrix} \in S^*$, lo cual implica de (5.76) que $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1$ y obtenemos la segunda condición de triplete.

Permítanos introducir lo siguiente.

Definición 5.46. Definimos el operador canónico, denotado por $\mathfrak{A}$, de una relación simétrica cerrada $A \subset \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, con respecto a un triplete $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ para A^*, como

$$\mathfrak{A} := \left\{ \begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix} \ : \ \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*, \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}, \text{ donde } \begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \right\}, \tag{5.78}$$

el cual es una relación lineal en $(\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}) \bigoplus (\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K})$ con dominio A^*.

A la relación $\mathfrak{A}$ le damos el nombre de operador canónico, debido a que lo aplicamos en las extensiones canónicas (ver la Definición 5.7) de una relación simétrica cerrada.

Teorema 5.47. *El operador canónico* $\mathfrak{A} : A^* \to \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ *es en efecto un operador lineal sobreyectivo, con* $\ker \mathfrak{A} = A$.

Demostración. Del Teorema 5.42 obtenemos que $\ker \mathfrak{A} = A$ mientras que de la definición de triplete se sigue que $\mathfrak{A}$ es sobreyectiva. Solo nos falta mostrar que el multivaluado de $\mathfrak{A}$ es trivial.

Si $\begin{pmatrix} \mathfrak{o} \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$, entonces se cumple que $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ con $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Notemos que $\begin{pmatrix} s \\ -a \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ de donde existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} f \\ -a \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así,

$$\|a\|_*^2 + \|s\|_*^2 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} s \\ -a \end{pmatrix} \right\rangle_* = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. □

A partir de aquí, aplicaremos el operador canónico a relaciones lineales que son extensiones canónicas.

Observación 5.48. Para S y $\hat{S}$ extensiones canónicas de una relación simétrica cerrada A, como $\mathfrak{A}$ es un operador con $\ker \mathfrak{A} = A$, se sigue que

$$\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{A}(\hat{S}) \Leftrightarrow S = \hat{S}\,. \tag{5.79}$$

Esto conlleva a que si S es extensión canónica de A y si $\mathfrak{B}$ es una relación lineal en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$, entonces

$$\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{A}(S)) = S; \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}\,. \tag{5.80}$$

Además,

$$\mathfrak{A}^{-1}(\{0\} \bigoplus \{0\}) = A, \qquad \mathfrak{A}^{-1}(\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}) = A^*\,. \tag{5.81}$$

Así, si $\mathfrak{B}$ es una relación lineal en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$, entonces $\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B})$ es extensión canónica de A. Notemos asimismo que la adjunta de una extensión canónica es también una extensión canónica.

Lema 5.49. *Sea $\mathfrak{A}$ un operador canónico de una relación simétrica cerrada A, con respecto a $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ para A^*. Si S es una extensión canónica de A, entonces*

$$\mathfrak{A}(S^*) = \mathfrak{A}(S)^*\,. \tag{5.82}$$

Más aún, si $\mathfrak{B}$ es una relación en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ entonces

$$\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B}^*) = [\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B})]^*\,. \tag{5.83}$$

Demostración. Si $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S^*)$, entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Luego, para todo $\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S)$, existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así,

$$\begin{aligned} \langle s, b\rangle_* - \langle a, t\rangle_* &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle_* \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle g, h\rangle - \langle f, k\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.84}$$

La última parte conlleva a que $\langle s, b\rangle_* - \langle a, t\rangle_* = 0$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S)^*$.

Para la inclusión contraria, si $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S)^* \subset S^*$, entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Para cada $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$ tenemos $\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S)$ con $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Tomando la dirección contraria de (5.84) llegamos a que $\langle g, h\rangle - \langle f, k\rangle = 0$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$.

Por lo tanto $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S^*)$ y con esto hemos demostrado (5.82). Para probar (5.83), haciendo $S = \mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B})$ conseguimos de (5.82) y de (5.80) que

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B}^*) &= \mathfrak{A}^{-1}[\mathfrak{A}(S)^*] \\ &= \mathfrak{A}^{-1}[\mathfrak{A}(S^*)] \\ &= S^* = [\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B})]^* . \end{aligned}$$

□

Con base en los resultados anteriores sobre el operador canónico de A con respecto a $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, conseguimos que las extensiones canónicas de A están en correspondencia unívoca con las relaciones lineales en $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$.

Consideremos las dos relaciones autoadjuntas triviales en $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$,

$$\mathfrak{B}_0 := \{0\} \oplus \mathcal{K} \qquad \mathfrak{B}_1 := \mathcal{K} \oplus \{0\} . \tag{5.85}$$

El siguiente resultado es consecuencia directa del Lema (5.49).

Corolario 5.50. *Si $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete para la adjunta de una relación simétrica cerrada A, entonces existen dos distinguidas extensiones autoadjuntas de A dadas por*

$$A_0 := \mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B}_0), \qquad A_1 := \mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{B}_1) .$$

Nos interesa averiguar si siempre existe un triplete para la adjunta de una relación simétrica. La respuesta se esclarece con el siguiente resultado.

Teorema 5.51. *Una relación simétrica cerrada A tiene índices de deficiencia iguales si y solo si existe un triplete $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ para A^*. Más aún,*

$$\eta_\pm(A) = \dim\, \mathcal{K} . \tag{5.86}$$

Demostración. Suponemos que los índices de A son iguales. Notemos que del Teorema (5.5), cada elemento $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ puede ser expresado

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f} + u + v \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix}, \tag{5.87}$$

con $\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} u \\ -iu \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_{-i}(A^*)$ y $\begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_i(A^*)$ y además, debido a la igualdad de los índices, existe una isometría biyectiva $W : \mathrm{dom}\ \mathbf{N}_i(A^*) \to \mathrm{dom}\ \mathbf{N}_{-i}(A^*)$. Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{K} = \mathrm{dom}\ \mathbf{N}_{-i}(A^*)$ con norma heredada. Usando (5.87) definamos las relaciones lineales

$$\Gamma_+ := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 2u \end{pmatrix} \ :\ \begin{pmatrix} f \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix} \in A^* \right\}; \quad \Gamma_- := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 2Wv \end{pmatrix} \ :\ \begin{pmatrix} f \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix} \in A^* \right\} .$$

Mostremos que $(\mathcal{K},\Gamma_+,\Gamma_-)$ es un triplete para A^*.

Sean $\begin{pmatrix} f \\ \hat{g}-iu+iv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \hat{k}-ix+iy \end{pmatrix} \in A^*$, $\begin{pmatrix} f \\ 2u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ 2x \end{pmatrix} \in \Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f \\ 2Wv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ 2Wy \end{pmatrix} \in \Gamma_-$. Con la notación de (5.87) y usando la ortogonalidad de la fórmula (5.11),

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \hat{f}+u+v \\ \hat{g}-iu+iv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\hat{k}+ix-iy \\ \hat{h}+x+y \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} u \\ -iu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ix \\ x \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= -2i(\langle v,y\rangle - \langle u,x\rangle) \\
&= \frac{1}{2i}(\langle 2Wv, 2Wy\rangle - \langle 2u,2x\rangle) = \frac{1}{2i}\left\langle \begin{pmatrix} 2u \\ 2Wv \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} 2Wy \\ 2x \end{pmatrix} \right\rangle,
\end{aligned}$$

de donde conseguimos la condición (5.74) de la Definición 5.43. Para la segunda condición, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ entonces existe $u \in \text{dom } W$ tal que $Wu = y$. Así,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+u \\ -ix+iu \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_{-i}(A^*) \oplus \mathbf{N}_i(A^*) \subset A^*.$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} (x+u)/2 \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_+$, $\begin{pmatrix} (x+u)/2 \\ Wu \end{pmatrix} \in \Gamma_-$.

Inversamente, si existe un triplete para A^*, entonces el Corolario 5.50 nos indica que A tiene extensiones autoadjuntas y por ende sus índices son iguales.

Para mostrar (5.86), conseguimos del Teorema 5.47 que $\ker \mathfrak{A} = A$, por consiguiente $\mathfrak{A}|_{A^*\ominus A}$ es un operador biyectivo. Por lo tanto, usando la Fórmula (5.11) deducimos que

$$\begin{aligned}
2\eta_+(A) &= \dim\, [\mathbf{N}_{-i}(A^*) \oplus \mathbf{N}_i(A^*)] = \dim\, [A^*\ominus A] \\
&= \dim\, [\mathfrak{A}(A^*\ominus A)] = \dim\, [\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}] = 2\dim\, \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

□

En el siguiente resultado vemos que, dado un triplete $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$ para la adjunta de una relación simétrica cerrada, ciertas propiedades entre las extensiones canónicas de A y las relaciones lineales en $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$, se cumplen simultáneamente. Esto nos ayuda a que el problema de investigar extensiones disipativas de A se reduzca a investigar relaciones disipativas en $\mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$.

Teorema 5.52. *Sea $\mathfrak{A}$ un operador canónico de una relación simétrica cerrada A, con respecto a $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$ para A^*. Si S y $\hat{S}$ son extensiones canónicas de A, entonces lo siguiente se cumple:*

(1) $S \subset \hat{S}$ si y solo si $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}(\hat{S})$.

(2) $\mathfrak{A}(S\cap\hat{S}) = \mathfrak{A}(S)\cap\mathfrak{A}(\hat{S})$.

(3) $\mathfrak{A}(S)$, $\mathfrak{A}(\hat{S})$ son linealmente independientes si y solo si $S\cap\hat{S} = A$.

(4) S es disipativa si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ es disipativa.

(5) S es disipativa maximal si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ es disipativa maximal.

(6) S es simétrica si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ es simétrica.

(7) S es autoadjunta si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ es autoadjunta.

Demostración. (1) Si cada elemento de S pertenece a $\hat{S}$, entonces de manera directa de la definición del operador canónico se sigue que $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}(\hat{S})$.

Inversamente, si $\mathfrak{f} \in S$, entonces existe $\begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}(\hat{S})$, existe $\mathfrak{h} \in \hat{S}$ tal que $\begin{pmatrix} \mathfrak{h} \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$. Esto implica $\begin{pmatrix} \mathfrak{f} - \mathfrak{h} \\ \mathfrak{o} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$ y dado que $\ker \mathfrak{A} = A$ tenemos $\mathfrak{f} - \mathfrak{h} \in A \subset \hat{S}$. Por lo tanto $\mathfrak{f} \in \hat{S}$.

(2) Se sigue del punto (1) que $\mathfrak{A}(S \cap \hat{S})$ está tanto en $\mathfrak{A}(S)$ como en $\mathfrak{A}(\hat{S})$. Esto implica que $\mathfrak{A}(S \cap \hat{S}) \subset \mathfrak{A}(S) \cap \mathfrak{A}(\hat{S})$. Para la otra inclusión, si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(S) \cap \mathfrak{A}(\hat{S})$, entonces existen $\begin{pmatrix} \mathfrak{f} \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{h} \\ \mathfrak{a} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}$ con $\mathfrak{f} \in S$ y $\mathfrak{h} \in \hat{S}$. Como $\ker \mathfrak{A} = A$, entonces conseguimos que $\mathfrak{f} - \mathfrak{h} \in A \subset \hat{S}$ y de esto $\mathfrak{f} \in \hat{S}$. Por lo tanto $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(S \cap \hat{S})$.

(3) Se sigue del punto (2), de (5.79) y notando que $\mathfrak{A}(A) = \{\mathfrak{o}\}$.

(4) Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ y $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(S)$ con $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, tenemos de la identidad abstracta de Green (5.73) que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \langle f, g \rangle &= \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle \\ &= -\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{W} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{W} \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \right\rangle_* \\ &= \langle a, s \rangle_* - \langle s, a \rangle_* = \operatorname{Im} \langle a, s \rangle_*, \end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación.

(5) Es directo observando, de los puntos (1) y (4), que S tiene extensiones disipativas si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ tiene extensiones disipativas.

(6) Del primer punto y del Lema (5.49) tenemos $S \subset S^*$ si y solo si $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}(S)^*$.

(7) Conseguimos del Lema (5.49) y de (5.79) que $S = S^*$ si y solo si $\mathfrak{A}(S) = \mathfrak{A}(S)^*$. □

Ahora procedemos con la teoría de funciones de Weyl para relaciones lineales. Esta teoría es una herramienta importante en la teoría de extensiones de relaciones simétricas, en particular, en la teoría de operadores singulares Sturm-Liouville (*cf.* [5]). Cabe mencionar que en el caso de operadores, las funciones de Weyl asociadas con los tripletes, han sido desarrolladas e investigadas por Derkach y Malamud [23].

Teorema 5.53. *Sea A es una relación simétrica cerrada. Si L es una extensión disipativa maximal de A, entonces para cualquier $\zeta \in \mathbb{C}_-$ fijo, se cumple que*

$$A^* = L \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*). \tag{5.88}$$

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in L$, entonces

$$0 \leq \text{Im } \langle f, \zeta f \rangle = \|f\|^2 \text{Im } \zeta ,$$

esto implica que $f = 0$ y conseguimos que L y $\mathbf{N}_\zeta(A^*)$ sean linealmente independientes. Ahora bien, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$, dado que L es maximal, ran $(L - \zeta I) = \mathcal{H}$. Entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in L$ tal que

$$g - \zeta f = k - \zeta h . \tag{5.89}$$

Por ser L extensión canónica de A, tenemos de (5.89) que

$$\begin{pmatrix} f - h \\ \zeta(f - h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^* .$$

Nuevamente de (5.89)

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h + (f - h) \\ k + \zeta(f - h) \end{pmatrix} \in L \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*) . \tag{5.90}$$

Por lo tanto $A^* \subset L \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*)$. La otra inclusión es directa debido a que L es extensión canónica. □

Consideremos un triplete $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ para la adjunta de una relación simétrica cerrada A. Dado que $A_0 = \mathfrak{A}^{-1}(\{0\} \bigoplus \mathcal{K})$ es extensión autoadjunta de A (ver Corolario 5.50), basándonos en el Teorema 5.53, obtenemos que

$$A^* = A_0 \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*) , \quad \zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} . \tag{5.91}$$

Notemos que dom $A_0 = \ker \Gamma_0$, por lo que de la segunda condición de la Definición 5.41 y de (5.91), la relación lineal $\gamma(\zeta) \subset \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{H}$ definida como

$$\gamma(\zeta) := (\Gamma_0|_{\text{dom } \mathbf{N}_\zeta(A^*)})^{-1} , \qquad (\zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}) \tag{5.92}$$

resulta ser un operador lineal con dom $\gamma(\zeta) = \mathcal{K}$. Definimos, de manera análoga a relaciones lineales, el adjunto de $\gamma(\zeta)$ como

$$\gamma(\zeta)^* := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \;:\; \langle f, h \rangle = \langle a, b \rangle_* , \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix} \in \gamma(\zeta) \right\} ,$$

el cual es un operador lineal.

En el siguiente resultado trabajamos con la parte operador de la relación Γ_1 y con la resolvente $R_{A_0}(\zeta) = (A_0 - \zeta I)^{-1}$.

Teorema 5.54. *El operador* (5.92) *cumple las siguientes propiedades:*

(1) $\gamma(\overline{\zeta})^* = \Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\zeta)$.

(2) $\gamma(\eta) - \gamma(\zeta) = (\eta - \zeta) R_{A_0}(\eta)\gamma(\zeta)$.

(3) $\gamma(\zeta)$ *y* $\gamma(\zeta)^*$ *son analíticas.*

(4) $\frac{d}{d\zeta}\gamma(\zeta) = R_{A_0}(\zeta)\gamma(\zeta)$.

Demostración. (1) Sea $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\zeta)$, existen $\begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_{1\odot}$ y $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in R_{A_0}(\zeta)$, esto implica que $\begin{pmatrix} k \\ h + \zeta k \end{pmatrix} \in A_0$ y $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0$. Entonces, para todo $\begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix} \in \gamma(\overline{\zeta})$ tenemos $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} f \\ \overline{\zeta} f \end{pmatrix} \in A^*$ y además existe $\begin{pmatrix} f \\ c \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. De la primera condición de triplete,

$$\begin{aligned} \langle h, f \rangle &= -\langle k, \overline{\zeta} f \rangle + \langle h, f \rangle + \langle \zeta k, f \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} k \\ h + \zeta k \end{pmatrix}, \mathbf{W} \begin{pmatrix} f \\ \overline{\zeta} f \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{W} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right\rangle_* = \langle b, a \rangle_* . \end{aligned}$$

Así, $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \gamma(\overline{\zeta})^*$ y por lo tanto

$$\Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\zeta) \subset \gamma(\overline{\zeta})^* . \tag{5.93}$$

Observemos que ran $R_{A_0}(\zeta) \subset \operatorname{dom} \Gamma_{1\odot}$, esto implica

$$\operatorname{dom} \Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\zeta) = \mathcal{H} . \tag{5.94}$$

Dado que $\gamma(\overline{\zeta})^*$ y $\Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\zeta)$ son operadores, deducimos de (5.93) y (5.94) que son iguales .

(2) Debido a que ambos son operadores con dominio $\mathcal{K}$, es suficiente mostrar solo una inclusión.

Si $\begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix} \in (\eta - \zeta) R_{A_0}(\eta)\gamma(\zeta)$, entonces existe $\begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} \in \gamma(\zeta)$ y $\begin{pmatrix} k \\ f \end{pmatrix} \in (\eta - \zeta) R_{A_0}(\eta)$, de donde $\begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ con $\begin{pmatrix} k \\ \zeta k \end{pmatrix} \in A^*$ y $\begin{pmatrix} f \\ (\eta - \zeta) k + \eta f \end{pmatrix} \in A_0$. Esto implica

$$\begin{pmatrix} f + k \\ \eta (f + k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ (\eta - \zeta) k + \eta f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ \zeta k \end{pmatrix} \in A^* . \tag{5.95}$$

Como $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, obtenemos que $\begin{pmatrix} f + k \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$. Se sigue de (5.95) que $\begin{pmatrix} a \\ f + k \end{pmatrix} \in \gamma(\eta)$. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ (f + k) - k \end{pmatrix} \in \gamma(\eta) - \gamma(\zeta) .$$

(3) Como la resolvente es analítica, deducimos de los puntos anteriores que

$$\gamma(\zeta) = (\zeta - \eta) R_{A_0}(\zeta)\gamma(\eta) + \gamma(\eta) ; \quad \gamma(\zeta)^* = \Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\overline{\zeta}) ,$$

son analíticas.

(4) Dividiendo (2) entre $\eta - \zeta$, haciendo $\eta \to \zeta$ y usando la continuidad de la resolvente, conseguimos la afirmación. □

Como consecuencia de (5.94), llegamos a que $\gamma(\zeta)^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ y $\gamma(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$.

Definición 5.55. Sea $\mathfrak{A}$ un operador canónico de una relación simétrica cerrada A, con respecto a $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$ para A^*. Definimos la función de Weyl $M:\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathcal{K}\bigoplus\mathcal{K}$ como

$$M(\zeta) := \mathfrak{A}(\mathbf{N}_\zeta(A^*))\,. \tag{5.96}$$

Debido a que $\mathfrak{A}$ es operador, conseguimos que la función de Weyl está bien definida. Además, podemos calcular de manera simple que

$$M(\zeta) = \Gamma_1|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}\gamma(\zeta)\,, \tag{5.97}$$

de donde obtenemos que para cada $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $M(\zeta)$ es una relación con dom $M(\zeta) = \mathcal{K}$.

Teorema 5.56. *La función de Weyl cumple las siguientes propiedades:*

(1) $M(\zeta)\Gamma_0|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)} = \Gamma_1|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$.

(2) $M(\zeta)^* = M(\overline{\zeta})$ *y* $M(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

(3) $M(\zeta) = \Gamma_{1\odot}\gamma(\zeta)$ *y es analítica.*

(4) $\frac{d}{d\zeta}M(\zeta) = \gamma(\overline{\zeta})^*\gamma(\zeta)$.

(5) $M(\eta) - M(\zeta) = (\eta-\zeta)\gamma(\overline{\eta})^*\gamma(\zeta)$.

(6) $(\mathrm{Im}\ \zeta)\mathrm{Im}\ M(\zeta) \geq 0$.

Demostración. (1) Para $\begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} \in M(\zeta)\Gamma_0|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$, existen $\begin{pmatrix} a \\ f \end{pmatrix} \in \gamma(\zeta)$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M(\zeta)$. De (5.97) conseguimos la existencia de $\begin{pmatrix} a \\ g \end{pmatrix} \in \gamma(\zeta)$ y $\begin{pmatrix} g \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_1|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$. Como $\gamma(\zeta)$ es un operador, llegamos a que $g = f$ y obtenemos $M(\zeta)\Gamma_0|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)} \subset \Gamma_1|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$.

Para la otra inclusión, si $\begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_1|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$ y de (5.96) conseguimos que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M(\zeta)$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} \in M(\zeta)\Gamma_0|_{\mathrm{dom}\ \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$.

(2) Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M(\overline{\zeta})$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ \overline{\zeta} f \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Luego, para todo $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in M(\zeta)$, existe $\begin{pmatrix} g \\ \zeta g \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} g \\ r \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} g \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así,

$$\langle b,r\rangle_* - \langle a,s\rangle_* = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right\rangle_* = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ \overline{\zeta} f \end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} g \\ \zeta g \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,.$$

esto implica que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M(\zeta)^*$ y conseguimos

$$M(\overline{\zeta}) \subset M(\zeta)^*\,. \tag{5.98}$$

Del hecho de que dom $M(\zeta) = \mathcal{K}$ y de (2.9), tenemos que $M(\zeta)^*$ es operador y por consiguiente de (5.98), $M(\overline{\zeta})$ también es operador. Por lo tanto, como dom $M(\overline{\zeta}) = \mathcal{K}$, se cumple la igualdad en (5.98). Para mostrar $M(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, notemos que $M(\zeta) = M(\overline{\zeta})^*$ es un operador cerrado con dominio todo $\mathcal{K}$.

(3) Debido a que ambos son operadores con dominio todo $\mathcal{K}$, es suficiente mostrar solo una contención. Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_{1\odot}\gamma(\zeta)$, entonces de (5.92) existe $\begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_{1\odot}$ y $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, tal que $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in A^*$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M(\zeta)$. Ahora bien, del Teorema 5.54 tenemos que $\gamma(\zeta)$ es analítica y por lo tanto $\Gamma_{1\odot}\gamma(\zeta)$ también lo es.

(4) Del punto (3) y del Teorema 5.54, conseguimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta}M(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta}\Gamma_{1\odot}\gamma(\zeta) = \Gamma_{1\odot}\frac{d}{d\zeta}\gamma(\zeta) \\
&= \Gamma_{1\odot}R_{A_0}(\zeta)\gamma(\zeta) = \gamma(\overline{\zeta})^*\gamma(\zeta).
\end{aligned}$$

(5) Usando el punto (3) y el Teorema 5.54 obtenemos

$$\begin{aligned}
M(\eta) - M(\zeta) &= \Gamma_{1\odot}[\gamma(\eta) - \gamma(\zeta)] \\
&= \Gamma_{1\odot}[(\eta - \zeta)R_{A_0}(\eta)\gamma(\zeta)] \\
&= (\eta - \zeta)\gamma(\overline{\eta})^*\gamma(\zeta).
\end{aligned}$$

(6) Verificamos de manera sencilla que $\gamma(\overline{\zeta})^*\gamma(\overline{\zeta}) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ y es un operador positivo. Entonces se sigue de los puntos (2) y (5) que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Im}\ \zeta)\mathrm{Im}\ M(\zeta) &= \mathrm{Im}\ \zeta\left[\frac{1}{2i}(M(\zeta) - M(\zeta)^*)\right] \\
&= \mathrm{Im}\ \zeta\left[\frac{1}{2i}(\zeta - \overline{\zeta})\gamma(\zeta)^*\gamma(\zeta)\right] \\
&= (\mathrm{Im}\ \zeta)^2\gamma(\overline{\zeta})^*\gamma(\overline{\zeta}) \geq 0.
\end{aligned}$$

□

El teorema anterior implica que la función de Weyl es una función Herglotz, *i. e.* es una función analítica con parte imaginaria positiva sobre $\mathbb{C}_+$.

- Resultados originales del capítulo -

A continuación enunciamos los resultados fundamentales que obtuvimos en este capítulo: en el Teorema 5.1 mostramos una caracterización de las extensiones contractivas de relaciones contractivas. De igual forma en la Proposición 5.4 dimos una caracterización de las extensiones disipativas de relaciones disipativas. Para una relación simétrica cerrada A, exhibimos en el Teorema 5.6 que $\hat{A}$ es una extensión disipativa (simétrica) cerrada de A si y solo si, para un $\zeta \in \mathbb{C}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$) fijo,

$$\hat{A} = A \dotplus (\mathbf{V} - \mathbf{I})D,$$

donde $D \subset \mathbf{N}_\zeta(A^*)$ es una relación cerrada y acotada, $\mathbf{V}: D \to \mathbf{N}_{\bar{\zeta}}(A^*)$ es una contracción (isometría). Además, en el Corolario 5.8, obtuvimos que

$$\eta_\pm(A) = \eta_\pm(\hat{A}) + \dim\,[\hat{A}/A].$$

La fórmula que presentamos para obtener extensiones disipativas de relaciones simétricas, es semejante a la de von Neumann, la cual obtiene extensiones simétricas de operadores simétricos.

En el Teorema 5.13, a la cerradura del dominio de una relación simétrica cerrada A, le quitamos un subespacio $\mathcal{F}$ para obtener

$$A|_{\mathrm{dom}\ A\ominus\mathcal{F}} = A \cap Z^*,$$

donde $Z = \{0\} \bigoplus \mathcal{F}$. Mostramos que si $\mathcal{F}$ es de dimensión finita entonces $S = A \cap Z^*$ cumple lo siguiente:

(1) $S^* = A^* \dotplus Z$.

(2) $\mathrm{mul}\ S^* = \mathrm{mul}\ A^* \oplus \mathcal{F}$.

(3) Si A tiene índices (n,m) entonces S tiene índices $(n+\dim\,\mathcal{F}, m+\dim\,\mathcal{F})$.

Usando lo anterior, bajo las condiciones de que A es autoadjunta y $\mathcal{F}$ es de dimensión uno, en el Teorema 5.15 probamos que las extensiones disipativas maximales de $S = A \cap Z^*$ están unívocamente en correspondencia con $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y estas son perturbaciones de A.

En las Proposiciones 5.18 y 5.19, dimos extensiones disipativas maximales de una relación simétrica cerrada A con índices son finitos (n,n), las cuales son suma directa de A con un espacio de deficiencia de A^*. En la Proposición 5.20, supusimos que L una extensión autoadjunta de A y si un intervalo real Δ pertenece a $\hat{\rho}(A)$, entonces el espectro de L en Δ solo consiste solamente de autovalores de multiplicidad a lo más n. Este resultado fue de referencia para probar el Corolario 5.22, en donde exhibimos que para una relación simétrica cerrada, regular (ver Definición 5.21) A, con índice $\eta_-(A) < \infty$, si L es extensión disipativa maximal de A, entonces se cumple lo siguiente:

(1) Cuando L es autoadjunta su espectro consiste solamente de autovalores aislados de multiplicidad a lo más $\eta_-(A)$.

(2) Cuando L no es autoadjunta su núcleo espectral consiste de autovalores de multiplicidad a lo más $\eta_-(A)$.

(3) Para $\eta_-(A) = 1$, cada número en $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ es un autovalor de una y solo una extensión.

Introducimos la diferencia de resolventes (5.55) para dos relaciones disipativas maximales. En los Lemas 5.25, 5.26 y en las proposiciones 5.27, 5.28, obtuvimos resultados referentes a esta diferencia de resolventes. Por otra parte , análogamente a operadores autoadjuntos, denotamos al espectro esencial como la unión del espectro continuo y el espectro puntual no continuo. Además, en la Proposición 5.31 mostramos que existe una sucesión singular (ver Definición 5.30) para una relación autoadjunta A en λ si y solo si λ pertenece al espectro esencial de A. Estos resultados nos ayudaron a demostrar los Teoremas 5.32 y 5.33, en donde nos exhiben, bajo ciertas condiciones, los espectros esenciales de dos relaciones autoadjuntas son iguales.

Los Teoremas 5.34, 5.37 y el Corolario 5.39, moldearon caracterizaciones espectrales de las extensiones autoadjuntas de una relación simétrica cerrada. Estos resultados fueron la base para probar el Corolario 5.40, en donde exhibimos que los espectros de las extensiones autoadjuntas de una relación simétrica cerrada, regular, con índices $(1,1)$, consisten solamente de autovalores aislados de multiplicidad uno y además, se intercalan a pares.

Con respecto a la teoría de tripletes fronterizos (ver Definición 5.41), mostramos en la Proposición 5.42 que si $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$ es un triplete para A^*, donde A es simétrica cerrada, entonces $\operatorname{dom} A = \ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1$. Introducimos en la Definición 5.46 al operador canónico $\mathfrak{A} : A^* \to \mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$ y presentamos en los Teoremas 5.47, 5.51 y en Lema 5.49, propiedades referentes a este operador. Este operador juega un papel importante en encontrar extensiones disipativas ya que en el Teorema 5.52 mostramos que para S, $\hat{S}$ extensiones canónicas de A y $\mathfrak{B}$ una relación en $\mathcal{K} \bigoplus \mathcal{K}$, lo siguiente se cumple:

(1) $\mathfrak{A}(S \cap \hat{S}) = \mathfrak{A}(S) \cap \mathfrak{A}(\hat{S})$.

(2) $\mathfrak{A}(S)$, $\mathfrak{A}(\hat{S})$ son linealmente independientes si y solo si $S \cap \hat{S} = A$.

(3) S es disipativa (maximal) si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ es disipativa (maximal).

(4) S es simétrica (autoadjunta) si y solo si $\mathfrak{A}(S)$ es simétrica (autoadjunta).

Por último manejamos un poco de la teoría de funciones de Weyl para relaciones lineales, en donde un resultado primordial fue el Teorema 5.54, el cual presenta que para un triplete $(\mathcal{K},\Gamma_0,\Gamma_1)$, si $A_0 = \mathfrak{A}^{-1}(\{0\} \bigoplus \mathcal{K})$, entonces $\gamma(\zeta) := (\Gamma_0|_{\operatorname{dom}\, \mathbf{N}_\zeta(A^*)})^{-1}$ cumple las siguientes propiedades:

(1) $\gamma(\overline{\zeta})^* = \Gamma_{1\odot} R_{A_0}(\zeta)$.

(2) $\gamma(\eta) - \gamma(\zeta) = (\eta - \zeta) R_{A_0}(\eta)\gamma(\zeta)$.

(3) $\gamma(\zeta)$ y $\gamma(\zeta)^*$ son analíticas.

(4) $\frac{d}{d\zeta}\gamma(\zeta) = R_{A_0}(\zeta)\gamma(\zeta)$.

Otro resultado sobresaliente fue el Teorema 5.56, el cual exhibe que, para $\zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, la función de Weyl $M(\zeta) := \mathfrak{A}(\mathbf{N}_\zeta(A^*))$ satisface lo siguiente:

(1) $M(\zeta)\Gamma_0|_{\operatorname{dom}\, \mathbf{N}_\zeta(A^*)} = \Gamma_1|_{\operatorname{dom}\, \mathbf{N}_\zeta(A^*)}$.

(2) $M(\zeta)^* = M(\overline{\zeta})$ y $M(\zeta) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

(3) $M(\zeta) = \Gamma_{1\odot}\gamma(\zeta)$ y es analítica.

(4) $\frac{d}{d\zeta} M(\zeta) = \gamma(\overline{\zeta})^* \gamma(\zeta)$.

(5) $M(\eta) - M(\zeta) = (\eta - \zeta)\gamma(\overline{\eta})^* \gamma(\zeta)$.

(6) $(\operatorname{Im} \zeta)\operatorname{Im} M(\zeta) \geq 0$.

Con este resultado concluimos que la función de Weyl es una función Herglotz.

CAPÍTULO 6

APLICACIONES

6.1

El operador de multiplicación en espacios de de Branges

En esta sección trabajamos con el operador de multiplicación por la variable independiente en un espacio de de Branges (escribimos espacio dB) y mostramos con la teoría de relaciones lineales, una estructura diferente a (5.18) de todas sus extensiones disipativas maximales. Esta nueva estructura nos permite presentar una caracterización de los espectros de dichas extensiones. Aunque el operador de multiplicación es en efecto un operador, no necesariamente tiene dominio denso en el espacio y el trabajar con la teoría de relaciones lineales nos permite incluir el caso no densamente definido.

Hay dos maneras esenciales de definir un espacio dB [21, Cap. 2]. La siguiente es axiomática:

Definición 6.1. Decimos que un espacio de Hilbert no trivial $\mathcal{B}$ de funciones enteras es un espacio dB, si para cada función f en $\mathcal{B}$ lo siguiente se cumple:

(A1) Para cada $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, el funcional lineal $f(\cdot) \mapsto f(w)$ es continuo;

(A2) Para cada cero no real w de f, la función $f(z)(z-\overline{w})(z-w)^{-1}$ pertenece a $\mathcal{B}$ y tiene la misma norma que f;

(A3) La función $f^{\#}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ pertenece también a $\mathcal{B}$ y tiene la misma norma que f.

De la identidad de polarización y de (A3) tenemos que para cada $f, g \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|g + i^k f\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|g^{\#} + (-i)^k f^{\#}\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|i^k g^{\#} + f^{\#}\|^2 = \langle g^{\#}, f^{\#}\rangle .\end{aligned} \tag{6.1}$$

Debido al lema de Riez, (A1) es equivalente a la existencia de un único núcleo reproductor $k(z,w)$ que pertenece a $\mathcal{B}$, para cada $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ y satisface

$$\langle k(\zeta, w), f(\zeta)\rangle = f(w), \quad \forall f \in \mathcal{B}. \tag{6.2}$$

Además como consecuencia de (A2), $k(w,w) = \langle k(\zeta,w), k(\zeta,w)\rangle > 0$ (ver la prueba de [21, Teo. 23]). También notemos que $\overline{k(z,w)} = k(w,z)$. Finalmente, en vista de (6.1), para cada $f \in \mathcal{B}$,

$$\langle k^{\#}(\zeta,w), f(\zeta)\rangle = \overline{\langle k(\zeta,w), f^{\#}(\zeta)\rangle} = \overline{f^{\#}(w)} = \langle k(\zeta,\overline{w}), f(\zeta)\rangle ,$$

de donde obtenemos $\overline{k(\overline{z},w)} = k(z,\overline{w})$.

Definición 6.2. Definimos el operador de multiplicación por la variable independiente en $\mathcal{B}\bigoplus\mathcal{B}$ como

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \; : \; f, g \in \mathcal{B}, \; \text{donde} \; g(z) = z f(z) \right\}. \tag{6.3}$$

Claramente (6.3) es un operador y en [41, Prop. 4.2, Cors. 4.3 y 4.7] nos muestran que S es simétrico, cerrado, regular, con índices de deficiencia $(1,1)$ y no necesariamente es densamente definido. El operador S tiene dominio denso; por ejemplo, cuando los polinomios son densos en $\mathcal{B}$ *cf.* [8, 43].

Fijemos $w \in \mathbb{C}_+$. Para cada $\begin{pmatrix} f \\ g - wf \end{pmatrix} \in S - wI$, de (6.2) tenemos que

$$\langle k(\zeta,w), g(\zeta) - wf(\zeta)\rangle = g(w) - wf(w) = 0,$$

lo que implica $k(z,w) \in \ker\,(S^* - \overline{w}I) = \operatorname{dom} \mathbf{N}_{\overline{w}}(S^*)$. Como $\eta_{\pm}(S) = 1$, deducimos que

$$\mathbf{N}_{\overline{w}}(S^*) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,w) \\ \overline{w}k(z,w) \end{pmatrix} \right\};\; \mathbf{N}_{w}(S^*) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,\overline{w}) \\ wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix} \right\}. \tag{6.4}$$

La ecuación (5.11) ahora equivale a

$$S^* = S \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,w) \\ \overline{w}k(z,w) \end{pmatrix} \right\} \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,\overline{w}) \\ wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix} \right\}. \tag{6.5}$$

Más aún por el Teorema 5.6, cada etensión disipativa maximal $\hat{S}$ de S viene dada por

$$\hat{S} = S \dotplus (\mathbf{V} - I)\mathbf{N}_w(S^*) \tag{6.6}$$

con $\mathbf{V} : \mathbf{N}_w(S^*) \to \mathbf{N}_{\overline{w}}(S^*)$, una contracción cerrada la cual viene caracterizada por

$$\mathbf{V}\left(\begin{pmatrix} k(z,\overline{w}) \\ wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix}\right) = \tau \begin{pmatrix} k(z,w) \\ \overline{w}k(z,w) \end{pmatrix}, \quad |\tau| \leq 1. \tag{6.7}$$

Usando (6.4), las extensiones (6.6) se convierten en

$$S_\tau = S \dotplus \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} \tau k(z,w) - k(z,\overline{w}) \\ \tau \overline{w} k(z,w) - wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix} \right\}, \quad |\tau| \leq 1. \tag{6.8}$$

Las extensiones (6.8) cumple las propiedades espectrales dadas en el Corolario 5.22. Además para $|\tau| = 1$, la contracción (6.7) es un operador isométrico y como consecuencia del Teorema 5.6, la extensión S_τ resulta ser autoadjunta.

La otra definición del espacio dB requiere tanto del espacio de Hardy

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+) := \left\{ f \text{ holomorfa en } \mathbb{C}_+ \ : \ \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 < \infty \right\}, \tag{6.9}$$

como una función Hermite-Biehler, es decir una función entera E que satisface

$$|E(z)| > |E^{\#}(z)|, \qquad z \in \mathbb{C}_+. \tag{6.10}$$

Notemos que E es una función libre de ceros en el semiplano $\mathbb{C}_+$.

Definición 6.3. El espacio dB asociado a una función Hermite-Biehler E [69, Sec. 2], es el espacio

$$\mathcal{B}(E) := \left\{ f \text{ entera } : \frac{f}{E}, \frac{f^{\#}}{E} \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+) \right\},$$

equipado con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{f(t)} g(t)}{|E(t)|^2} dt.$$

En [41, Sec. 5] (ver también [21, Sec. 19]), se muestra que, para cada $w \in \mathbb{C}$, la expresión

$$k(z,w) = \frac{E^{\#}(z)E(\overline{w}) - E(z)E^{\#}(\overline{w})}{2\pi i(z - \overline{w})} \tag{6.11}$$

es el núcleo reproductor de $\mathcal{B}(E)$.

Teorema 6.4. *Sea $\mathcal{B}(E)$ un espacio dB. Si z_0 es un cero real de E, entonces existe otro espacio dB $\mathcal{B}(\tilde{E})$ unitariamente equivalente a $\mathcal{B}(E)$, tal que z_0 no es cero de $\tilde{E}$.*

Demostración. Suponemos que z_0 es un cero real de E, de multiplicidad n. Entonces de (6.11) tenemos $k(z,z_0) = 0$ y de (6.2) obtenemos que $f(z_0) = \langle k(z,z_0), f(z) \rangle = 0$ para cada $f \in \mathcal{B}(E)$. Esto implica que z_0 es un cero real de multiplicidad n de cualquier función en $\mathcal{B}(E)$. Definiendo

$$\tilde{E}(z) := E(z)/(z-z_0)^n \tag{6.12}$$

conseguimos que $\tilde{E}(z_0) \neq 0$ y obtenemos que

$$|\tilde{E}(z)| = |E(z)/(z-z_0)^n| > |E^{\#}(z)/(z-z_0)^n| = |\tilde{E}^{\#}(z)|, \quad z \in \mathbb{C}_+ .$$

Así, $\tilde{E}$ es función Hermite-Biehler, el espacio

$$\mathcal{B}(\tilde{E}) = \{f(z)/(z-z_0)^n \ : \ f \in \mathcal{B}(E)\}$$

es espacio dB y el operador $V_{z_0}f = f(z)/(z-z_0)^n$ cumple $\|f\|_{\mathcal{B}(E)} = \|V_{z_0}f\|_{\mathcal{B}(\tilde{E})}$. Por consiguiente, V_{z_0} es operador lineal unitario. □

Notemos en la demostración anterior que de (6.12), las funciones E y $\tilde{E}$ comparten los ceros distintos a z_0, es decir, no se crean nuevos ceros a la función $\tilde{E}$. Sin perdida de generalidad, en lo siguiente asumimos que E es libre de ceros en $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ (ver también [42, Lem. 2.4]). Esto junto con (6.11) implican que $k(z,w)$ es libre de ceros en $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, para cada $w \in \mathbb{C}_+$.

Observación 6.5. Dado un espacio dB $\mathcal{B}$ con núcleo reproductor $k(z,w)$, para $w_0 \in \mathbb{C}_+$ fijo, si definimos

$$E_{w_0}(z) := \frac{\pi(z-\overline{w}_0)}{(\mathrm{Im}\ w_0)k(w_0,w_0)} k(z,w_0), \tag{6.13}$$

entonces E_{w_0} es una función Hermite-Biehler [75, Sec. 2] y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(E_{w_0})$ son isométricamente equivalentes [77, Teo. 7]. El núcleo reproductor de $\mathcal{B}(E_{w_0})$ lo calculamos usando (6.11), el cual resulta

$$\begin{aligned} k_{w_0}(z,w_0) &= \frac{E_{w_0}{}^{\#}(z)E_{w_0}(\overline{w}_0) - E_{w_0}(z)E_{w_0}{}^{\#}(\overline{w}_0)}{2\pi i(z-\overline{w}_0)} \\ &= \frac{-E_{w_0}(z)}{2\pi i(z-\overline{w}_0)} \left(\frac{\pi(\overline{w}_0 - w_0)}{(\mathrm{Im}\ w_0)\tilde{k}(w_0,w_0)} \tilde{k}(w_0,w_0) \right) = \frac{E_{w_0}(z)}{z-\overline{w}_0} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos que

$$E_{w_0}(z) = (z-\overline{w}_0)k_{w_0}(z,w_0). \tag{6.14}$$

Definición 6.6. Definimos el espacio de funciones asociadas $\mathrm{Assoc}\,\mathcal{B}$ de un espacio dB $\mathcal{B}$, como

$$\mathrm{Assoc}\,\mathcal{B} = \mathcal{B} + z\mathcal{B} .$$

Denotamos la función asociada a una función Hermite-Biehler E, como

$$\varphi_\tau := \tau E - E^{\#}, \qquad \tau \in \mathbb{C}, \tag{6.15}$$

la cual es una función entera que pertenece a $\mathrm{Assoc}\,\mathcal{B}(E)$. Además es claro que $\varphi_\tau = \varphi_\beta$ si y solo si $\tau = \beta$.

En el siguiente resultado usamos la función asociada para determina todas las extensiones disipativas maximales del operador de multiplicación.

Teorema 6.7. *Fijemos $w \in \mathbb{C}_+$ y consideremos el espacio dB $\mathcal{B}(E_w)$ con E_w dado en (6.13). Entonces todas las extensiones maximales disipativas del operador de multiplicación S (ver (6.3)) están en correspondencia uno a uno con el conjunto de funciones asociadas φ_τ, $|\tau| \le 1$. Estas extensiones disipativas maximales vienen dadas por*

$$S_\tau = \left\{ \begin{pmatrix} h_\alpha(z) \\ zh_\alpha(z) - \alpha\varphi_\tau(z) \end{pmatrix} \; : \; \begin{array}{c} h_\alpha(z) = f(z) + \alpha(\tau k_w(z,w) - k_w(z,\overline{w})), \\ f \in \operatorname{dom} S \text{ y } \alpha \in \mathbb{C} \end{array} \right\}. \tag{6.16}$$

Además, $\sigma(S_\tau) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \; : \; \varphi_\tau(\lambda) = 0\}$. El autoespacio correspondiente a $\lambda \in \sigma(S_\tau)$ es $h^{(\tau)}(z) = \frac{\varphi_\tau(z)}{z-\lambda}$.

Demostración. Las extensiones S_τ de S vienen dadas por (6.8). Si $\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix} \in S_\tau$, entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$, con $g(z) = zf(z)$, y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{pmatrix} h(z) \\ j(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z) + \alpha(\tau k_w(z,w) - k_w(z,\overline{w})) \\ zf(z) + \alpha(\tau\overline{w}k_w(z,w) - wk_w(z,\overline{w}) \end{pmatrix}.$$

Tenemos de (6.14) y (6.15) que

$$\begin{aligned} j(z) &= zh(z) - \alpha[\tau(z-\overline{w})k_w(z,w) - (z-w)k_w(z,\overline{w})] \\ &= zh(z) - \alpha[\tau E_w(z) - E_w{}^{\#}(z)] \\ &= zh(z) - \alpha\varphi_\tau(z). \end{aligned}$$

De esto obtenemos que las extensiones de S son de la forma (6.16).

Ahora bien, para cada $\lambda \in \hat{\sigma}(S_\tau)$ (el cual, por el Teorema 3.3, es un subconjunto de $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$), tenemos del Corolario 5.22 que $\mathbf{N}_\lambda(S_\tau)$ es unidimensional. Usando (6.16), para $\begin{pmatrix} h_\alpha \\ \lambda h_\alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_\lambda(S_\tau)$ distinto de cero tenemos que $\alpha \neq 0$, de otra manera $h_\alpha = f$ y $\lambda f(z) = zf(z)$ lo cual implica $f = 0$. Entonces

$$\lambda h_\alpha(z) = zh_\alpha(z) - \alpha\varphi_\tau(z), \tag{6.17}$$

de donde obtenemos $\varphi_\tau(\lambda) = 0$. Luego si $\lambda \notin \sigma(S_\tau)$, entonces $(S_\tau - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. De esta manera, existe $\begin{pmatrix} k_w(z,w) \\ g(z) \end{pmatrix} \in (S_\tau - \lambda I)^{-1}$ implicando $\begin{pmatrix} g(z) \\ k_w(z,w) + \lambda g(z) \end{pmatrix} \in S_\tau$. Usando nuevamente (6.16), llegamos a

$$k_w(z,w) + \lambda g(z) = zg(z) - \alpha\varphi_\tau(z).$$

Por lo tanto, si $z = \lambda$, entonces $k_w(\lambda,w) = -\alpha\varphi_\tau(\lambda)$. Como $k_w(z,w)$ es libre de ceros en $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, concluimos que $\lambda \notin \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \; : \; \varphi_\tau(\lambda) = 0\}$. Hemos mostrado que

$$\hat{\sigma}(S_\tau) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \; : \; \varphi_\tau(\lambda) = 0\} \subset \sigma(S_\tau).$$

Dado que los ceros de una función entera no trivial forman un conjunto discreto, tenemos que el núcleo espectral es un conjunto discreto. Esto implica que $\rho(S_\tau) = \hat{\rho}(S_\tau)$, como consecuencia de la maximalidad de S_τ.

El hecho de que $h^{(\tau)}(z) = \frac{\varphi_\tau(z)}{z-\lambda}$ sea una autofunción de S_τ correspondiente al autovalor λ, proviene de (6.17). $\square$

El caracterizar la distribución de los espectros de las extensiones (6.16) se reduce a caracterizar los ceros de las funciones (6.15). En [55, 56, 88] dan condiciones para caracterizar la distribución de los ceros de las funciones (6.15), esto cuando $|\tau| = 1$. Esta caracterización es la base al problema, de cuando el espacio de funciones asociadas $\operatorname{Assoc}\mathcal{B}$ contiene la función libre de ceros [89].

6.2 Operadores de Jacobi

En este ejemplo trabajamos en el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$, que es el formado por todas las sucesiones que son cuadrado sumables. Fijemos dos sucesiones $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ con $b_k > 0$ y $\{q_k\}_{k=1}^\infty$. Sea J el operador cuya representación matricial con respecto a la base canónica $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ de $l_2(\mathbb{N})$ es

$$\begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

(ver [3, Sec. 47] para la definición de una representación matricial para un operador simétrico no acotado). Consideremos la ecuación en diferencias

$$b_{k-1}\phi_{k-1} + q_k\phi_k + b_k\phi_{k+1} = \zeta\phi_k, \ \zeta \in \mathbb{C}, \tag{6.19}$$

para $k \in \mathbb{N}$ con $b_0 = 0$. Asignando $\phi_1 = 1$, resolvemos recurrentemente (6.19) y obtenemos que ϕ_k es un polinomio de grado $k-1$ en ζ, el cual denotamos por $\pi_k(z)$, y se le conoce como el $(k-1)$-ésimo polinomio de primer género asociado a (6.18). Similarmente, ϕ_k es un polinomio de grado $k-2$, si asignamos en (6.19), $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = 1/b_1$. En este caso ϕ_k es el $(k-1)$-ésimo polinomio de segundo grado asociado a (6.18) y lo denotamos por $\theta_k(z)$. Obtenemos que

$$\theta_{k+1}(z) = b_1^{-1}\widetilde{\pi}_k(z), \tag{6.20}$$

donde $\widetilde{\pi}_k(z)$ es el polinomio obtenido de $\pi_k(z)$ substituyendo b_j, q_j por b_{j+1}, q_{j+1}, para $j = 1, \ldots, k-1$.

Observación 6.8. El operador simétrico J tiene índices de deficiencia $(0,0)$ o $(1,1)$. El primer caso es caracterizado por la divergencia de las series $\sum_k |\pi_k(\zeta)|^2$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, mientras que el segundo caso por la convergencia de la misma (ver [2, Cap. IV] y [11, Cap. VII]).

Consideremos el caso $J = J^*$ denotemos el operador lineal

$$B := J_{|_{\text{dom } J \ominus \text{span } \{\delta_1\}}},$$

el cual es cerrado, simétrico y no densamente definido. Debido a (5.27), sus índices son $(1,1)$.

El siguiente resultado se sigue directamente del Teorema 5.15 de la Sección 5.2. Daremos la prueba de manera diferente para ejemplificar que existe una conexión entre las extensiones (5.18) que vimos en el Teorema 5.6 y las extensiones que damos a continuación.

Proposición 6.9. *Las extensiones disipativas maximales de B están en correspondencia uno a uno con $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para $\tau \neq \infty$ las extensiones son operadores y perturbaciones de J dadas por*

$$J(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + \tau\langle \delta_1, f\rangle \delta_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in J \right\}, \tag{6.21}$$

mientras que

$$J(\infty) = B \dot{+} \text{span } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right\} \tag{6.22}$$

Para $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tenemos que $J(\tau)$ es autoadjunta. Más aún,

$$B^* = J \dot{+} \text{span } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{6.23}$$

Demostración. Fijemos $\zeta \in \mathbb{C}_+$, entonces debido a la Observación 6.8 y (6.20) llegamos a que $\pi(\zeta)$ y $\theta(\zeta)$ no pertenecen a $l_2(\mathbb{N})$. En acorde a [2, Cap.1 Sec. 3] (ver también [11, Cap. VII]), existe una única función $m(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisface $m(\overline{\zeta}) = \overline{m(\zeta)}$ y $(\text{Im } \zeta)(\text{Im } m(\zeta)) > 0$, tal que

$$\psi(\zeta) = \theta(\zeta) + m(\zeta)\pi(\zeta) \in \text{dom } J.$$

Haciendo un cálculo directo, obtenemos

$$J\psi(\zeta) = \delta_1 + \zeta\psi(\zeta). \tag{6.24}$$

Así, para cada $f \in \text{dom } B$, se cumple

$$\begin{aligned} \langle f, \zeta\psi(\zeta)\rangle &= \langle f, \delta_1 + \zeta\psi(\zeta)\rangle = \langle f, J\psi(\zeta)\rangle \\ &= \langle Jf, \psi(\zeta)\rangle = \langle Bf, \psi(\zeta)\rangle, \end{aligned}$$

esto conlleva a que $\begin{pmatrix} \psi(\zeta) \\ \zeta\psi(\zeta) \end{pmatrix} \in B^*$. Por lo tanto, debido a que $\eta_\pm(B) = 1$,

$$\mathbf{N}_\zeta(B^*) = \text{span } \left\{ \begin{pmatrix} \psi(\zeta) \\ \zeta\psi(\zeta) \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(B^*) = \text{span } \left\{ \begin{pmatrix} \psi(\overline{\zeta}) \\ \overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta}) \end{pmatrix} \right\}. \tag{6.25}$$

Por el Teorema 5.5, se sigue que

$$B^* = B \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\psi(\overline{\zeta})\\ \overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta})\end{pmatrix}\right\} \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\psi(\zeta)\\ \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right\}. \tag{6.26}$$

Notemos que tanto el dominio de B como $\psi(\zeta)$ y $\psi(\overline{\zeta})$ pertenecen al dominio de J, esto implica que $\operatorname{dom} B^* \subset \operatorname{dom} J$, *i. e.* J y B^* tienen el mismo dominio. Además, J y $\{0\} \bigoplus \operatorname{span}\{\delta_1\}$ son linealmente independientes por lo que $J \dotplus \{0\} \bigoplus \operatorname{span}\{\delta_1\} \subset B^*$. Por otra parte, para cada $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} \in B^*$, (6.26) implica la existencia de $f \in \operatorname{dom} B$ y $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f + a\psi(\zeta) + b\psi(\overline{\zeta})\\ Bf + a\zeta\psi(\zeta) + b\overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta})\end{pmatrix}.$$

Entonces usando (6.24),

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}f + a\psi(\zeta) + b\psi(\overline{\zeta})\\ Jf + a(\delta_1 + \zeta\psi(\zeta)) + b(\delta_1 + \overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta}))\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -(a+b)\delta_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}f + a\psi(\zeta) + b\psi(\overline{\zeta})\\ J(f + a\psi(\zeta) + b\psi(\overline{\zeta}))\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -(a+b)\delta_1\end{pmatrix} \in J \dotplus Z\,.\end{aligned}$$

Hemos probado 6.23. Ahora procedemos a demostrar (6.21) y (6.22). Notemos que (6.21) y (6.22) son extensiones disipativas cerradas de B, las cuales por lo tanto son maximales. El teorema 5.6 nos afirma que cada extensión disipativa maximal $\hat{J}$ de B viene dada por

$$\hat{J} = B \dotplus (\mathbf{V} - \mathbf{I})\mathbf{N}_{\zeta}(B^*), \tag{6.27}$$

con $\mathbf{V} : \mathbf{N}_{\zeta}(B^*) \to \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(B^*)$ siendo una contracción cerrada. Con base en (6.25), deducimos que todos los mapeos contractivos están en correspondencia uno a uno con $\beta \in \overline{\mathbb{D}}$, dados por

$$\mathbf{V}\left(\begin{pmatrix}\psi(\zeta)\\ \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right) = \beta\begin{pmatrix}\psi(\overline{\zeta})\\ \overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta})\end{pmatrix},$$

de donde las extensiones (6.27) se convierten en

$$J(\beta) = B \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\beta\psi(\overline{\zeta}) - \psi(\zeta)\\ \overline{\zeta}\beta\psi(\overline{\zeta}) - \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right\}. \tag{6.28}$$

La última igualdad implica que $\operatorname{dom} J(\beta) \subset \operatorname{dom} J$. Considerando la trasformación de Möbius

$$\beta_\tau = \frac{1 + \tau m(\zeta)}{1 + \tau m(\overline{\zeta})}.$$

Como $m(\zeta) \in \mathbb{C}_+$, tenemos que β_τ mapea $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sobre $\overline{\mathbb{D}}$, con $\beta_\infty = m(\zeta)/m(\overline{\zeta})$. Entonces para $\tau \neq \infty$ se sigue de (6.28) que, para cada $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} \in J(\beta_\tau)$, existe $f \in \operatorname{dom} B$

tal que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f+\alpha(\beta_\tau\psi(\bar{\zeta})-\psi(\zeta)) \\ Bf+\alpha(\beta_\tau\bar{\zeta}\psi(\bar{\zeta})-\zeta\psi(\zeta)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f+\alpha(\beta_\tau\psi(\bar{\zeta})-\psi(\zeta)) \\ Jf+\alpha[\beta_\tau(\delta_1+\bar{\zeta}\psi(\bar{\zeta}))-(\delta_1+\zeta\psi(\zeta))]+\alpha(1-\beta_\tau)\delta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f+\alpha(\beta_\tau\psi(\bar{\zeta})-\psi(\zeta)) \\ J[f+\alpha(\beta_\tau\psi(\bar{\zeta})-\psi(\zeta))]+\alpha(1-\beta_\tau)\delta_1 \end{pmatrix}. \qquad (6.29)
\end{aligned}$$

Observemos que $\psi_1(\zeta)=m(\zeta)$, así

$$\begin{aligned}
\tau\langle\delta_1,h\rangle &= \tau\langle\delta_1, f+\alpha(\beta_\tau\psi(\bar{\zeta})-\psi(\zeta))\rangle \\
&= \alpha\tau(\beta_\tau m(\bar{\zeta})-m(\zeta)) \\
&= \alpha\tau\left(\frac{1+\tau m(\zeta)}{1+\tau m(\bar{\zeta})}m(\bar{\zeta})-m(\zeta)\right) \\
&= \alpha\left(1-\frac{1+\tau m(\zeta)}{1+\tau m(\bar{\zeta})}\right) = \alpha(1-\beta_\tau).
\end{aligned}$$

De esta manera, (6.29) produce $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ Jh+\tau\langle\delta_1,h\rangle\delta_1 \end{pmatrix} \subset J(\tau)$. Debido a la maximalidad se sigue que $J(\beta_\tau)=J(\tau)$.

Para $\beta_\infty = m(\zeta)/m(\bar{\zeta})$, la expresión $\beta_\infty\psi_1(\bar{\zeta})-\psi_1(\zeta)$ desaparece. Entonces de (6.28), obtenemos que dom $J(\beta_\infty)\subset$ dom B. En acorde a (6.29), para cada $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in J(\beta_\infty)$,

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ Bh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(1-\beta_\tau)\delta_1 \end{pmatrix} \in B\dot{+}Z = J(\infty).$$

Por lo tanto $J(\beta_\infty)=J(\infty)$. □

De lo que hemos mencionado en el resultado anterior, llegamos a que las extensiones disipativas maximales (6.21) de B tienen representación

$$\begin{pmatrix} q_1+\tau & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

mientras que las partes operadores $(B^*)_\odot$ y $J(\infty)_\odot$ tienen la misma representación

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

notando que dom $(B^*)_\odot=$ dom J y dom $J(\infty)_\odot=$ dom $J\ominus$span $\{\delta_1\}$.

6.3

Operadores de Schrödinger unidimensionales

Esta sección está dedicada a caracterizar todas las extensiones disipativas maximales del operador de Schrödinger en una dimensión. Para ello, iniciamos con el siguiente resultado, el cual es crucial en la caracterización de dichas extensiones disipativas.

Lema 6.10. *Todas las relaciones disipativas no triviales en* $\mathbb{C}\bigoplus\mathbb{C}$ *son maximales y están en correspondencia uno a uno con* $\tau\in\mathbb{C}_+\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$*, las cuales vienen dadas por*

$$\mathfrak{B}_\tau := \tau I\,, \qquad \tau\neq\infty\,, \tag{6.30}$$

mientras que

$$\mathfrak{B}_\infty := \{0\}\bigoplus\mathbb{C}\,. \tag{6.31}$$

Para $\tau\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *se cumple que* $\mathfrak{B}_\tau$ *es autoadjunta.*

Demostración. Consideremos la relación simétrica trivial $S=\{0\}\bigoplus\{0\}$. Observemos que $S^*=\mathbb{C}\bigoplus\mathbb{C}$ y $\mathbf{N}_{\pm i}(S^*)=\pm iI$, por consiguiente tenemos que los índices de S son $(1,1)$. Por lo tanto, todas las extensiones disipativas propias de S son maximales.

Ahora bien, es claro que las relaciones (6.30) y (6.31) son extensiones disipativas de S. Además, las únicas relaciones lineales en $\mathbb{C}\bigoplus\mathbb{C}$ que no son operadores son S^* y $\mathfrak{B}_\infty$. Falta mostrar que cualquier operador disipativo no trivial es de la forma (6.30).

Sea $\mathfrak{B}$ un operador disipativo no trivial, el cual es extensión maximal de S. Para $\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in\mathfrak{B}$ distinto de cero, tenemos que

$$\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ \tau f\end{pmatrix}, \quad \tau=g/f\,. \tag{6.32}$$

Más aún,

$$0\leq \operatorname{Im}\,\langle f,\tau f\rangle = \|f\|^2\operatorname{Im}\,\tau\,,$$

por lo que $\tau\in\mathbb{C}_+\cup\mathbb{R}$. Afirmamos que la representación (6.32) no depende de τ. Ciertamente, para $\begin{pmatrix} f\\ \tau f\end{pmatrix},\begin{pmatrix} h\\ \hat\tau h\end{pmatrix}\in\mathfrak{B}$ distintos de cero, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1\\ \tau\end{pmatrix}=f^{-1}\begin{pmatrix} f\\ \tau f\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1\\ \hat\tau\end{pmatrix}=h^{-1}\begin{pmatrix} h\\ \hat\tau h\end{pmatrix}.$$

Entonces $\begin{pmatrix} 0\\ \tau-\hat\tau\end{pmatrix}\in\mathfrak{B}$, lo cual implica $\tau=\hat\tau$. Así, $\mathfrak{B}\subset\tau I$ y por ende iguales, debido a que $\mathfrak{B}$ es maximal. □

Para un valor fijo $0 < a < \infty$, consideremos la forma diferencial de Schrödinger

$$H_a := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \tag{6.33}$$

donde $V(x) \in L_1(0,a)$, es una función de valores reales. Denotemos el conjunto lineal

$$M_a := \{f \in L_2(0,a) : f, f' \in AC(0,a) \ \text{ y } H_a f \in L_2(0,a)\}.$$

Observación 6.11. Denotando por S_{min} como la clausura de (6.33) restringido a $C_0^\infty(0,a)$, conseguimos de [72] que S_{min} es un operador simétrico, densamente definido en $L_2(0,a)$, con índices $(2,2)$ y cuya adjunta viene dado por (6.33), con dominio M_a. Además, el espectro de cada extensión autoadjunta de S_{min} es puramente discreto.

Teorema 6.12. *Si S es el operador en (6.33) con dominio*

$$\{f \in M_a : f'(0) = 0, \quad f(a) = f'(a) = 0\},$$

entonces S es un operador simétrico, cerrado, regular, densamente definido en $L_2(0,a)$, con índices $(1,1)$ y cuya adjunta tiene dominio $\{f \in M_a : f'(0) = 0\}$. Las extensiones disipativas maximales S_τ de S están parametrizadas por las condiciones de frontera

$$f'(0) = 0, \quad f(a) = \tau f'(a), \qquad \tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \tag{6.34}$$

interpretando que $\tau = \infty$, implica $f'(a) = 0$. Para $\tau \in \cup\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se cumple que S_τ es autoadjunta. Más aún:

1) El espectro de cada S_τ consiste solamente de autovalores aislados de multiplicidad uno.

2) Cada número de $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ es parte del espectro de solo y solo una extensión disipativa maximal de S.

3) El espectro de cada S_τ no autoadjunta, pertenece a $\mathbb{C}_+$.

4) El espectro de las extensiones autoadjuntas de S se intercalan a pares.

Demostración. De la Observación 6.11, conseguimos que S es densamente definido por ser extensión canónica (ver Definición 5.7) de S_{min}. Debido a los índices de S_{min}, junto con (5.11) tenemos que

$$\dim\, [S/S_{min}] \leq \dim\, [(S_{min})^*/S_{min}] \leq 4,$$

lo que implica que S sea cerrado. Calculamos integrando por partes que es simétrico. Notemos que S^* es extensión canónica de S_{min}. Sea $f \in M_a$ y para todo $g \in \operatorname{dom} S$, usando integración por partes,

$$\langle g, H_a f\rangle = f'(0)g(0) + \langle H_a g, f\rangle = f'(0)g(0) + \langle Sg, f\rangle,$$

de donde obtenemos que $f \in S^*$ si y solo si $f \in \{f \in M_a : f'(0) = 0\}$.

De lo anterior llegamos a que S es una extensión simétrica, cerrada, no autoadjunta de S_{min} y además, S tiene índices $(1,1)$. Para mostrar que S es regular, de la Observación 6.11 y del hecho de que las extensiones autoadjuntas de S son también extensiones autoadjuntas de S_{min}, deducimos que $\hat{\sigma}(S)$ solamente puede tener autovalores. Ahora si $\zeta \in \hat{\sigma}(S)$, entonces existe $f \in \ker\,(S-\zeta I)$ no cero. Debido a la unicidad (ver [72, Cor. 15.3]), la única solución $H_a f = \zeta f$ tal que $f(a) = f'(a) = 0$ es $f = 0$, lo cual resulta contradictorio. Por lo tanto $\hat{\rho}(S) = \mathbb{C}$.

Lo siguiente es caracterizar las extensiones disipativas de S y lo haremos mediante tripletes (ver Definición 5.41). Para $f, h \in \mathrm{dom}\ S^*$, usando integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} f \\ S^* f\end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h \\ S^* h\end{pmatrix}\right\rangle &= \langle H_a f, h\rangle - \langle f, H_a h\rangle \\ &= -\overline{f'(a)}h(a) + \overline{f(a)}h'(a) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f'(a) \\ f(a)\end{pmatrix}, \mathbf{W}\begin{pmatrix} h'(a) \\ h(a)\end{pmatrix}\right\rangle .\end{aligned}$$

Por otra parte en [72, Prop. 15.5] nos muestran que para $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$, existe $f \in \mathrm{dom}\ S^*$ tal que $f(a) = \zeta_1$ y $f'(a) = \zeta_2$. Así definiendo

$$\Gamma_0 := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f'(a)\end{pmatrix} : f \in \mathrm{dom}\ S^* \right\}; \quad \Gamma_1 := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f(a)\end{pmatrix} : f \in \mathrm{dom}\ S^* \right\},$$

conseguimos que $(\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es triplete para S^*. Por lo tanto, del Lema 6.10 y del Teorema 5.52 llegamos a que todas las extensiones disipativas maximales de S cumplen las condiciones (6.34). Las propiedades espectrales que mencionamos en la afirmación, vienen como consecuencia directa del Corolario 5.22, de la Observación 5.23 y del Corolario 5.40. $\square$

INVESTIGACIÓN SUBSECUENTE

Durante el desarrollo de esta tesis, fluyeron temas a investigar que no desarrollamos debido a ciertas circunstancias. Estos temas los exhibimos en este espacio con el fin de seguir fomentando la teoría plasmada en este trabajo. Es digno señalar que esperamos que el lector germine especulaciones a nuevos temas de investigación.

(i) Respecto a relaciones autoadjuntas, los Teoremas 2.30 y 3.20 implican que el espectro es la unión del espectro continuo y del espectro puntual. Además de (5.59) de la Sección 5.3, conseguimos que el espectro es la unión disjunta del espectro discreto y del espectro esencial. Es interesante saber que otras descomposiciones del espectro podemos obtener para relaciones autoadjuntas. Por ejemplo en [85, Sec. 7.4], para operadores autoadjuntos, el espectro podemos verlo como la unión del espectro puntual con el espectro singular continuo y el espectro absolutamente continuo, o como la unión del espectro singular con el espectro absolutamente continuo. ¿Será posible tener está descomposición espectral en relaciones lineales?

(ii) Es de interés investigar la estabilidad de subconjuntos del espectro bajo perturbaciones y hemos mostrado algunos resultados en las Sección 5.3, respecto al espectro esencial de relaciones. En operadores, se ha investigado la estabilidad bajo perturbaciones del *espectro esencial Browder* definido en [13] como

$$\sigma_b(T) := \bigcup \{\sigma(T+K) : TK = KT, \text{ donde } K \text{ es compacto}\}.$$

Nos preguntamos si es posible extender esta investigación al caso de relaciones lineales.

(ii) En la Sección 5.3 tenemos que si A es una relación autoadjunta, entonces E_{A_A} es medida espectral de A. Esto implica que en la descomposición $A = A_A \oplus A_\infty$,

$$A = \int_{\mathbb{R}} t\, dE_{A_A}(t) \oplus A_\infty\,. \tag{6.35}$$

Esto conlleva primeramente a generar la teoría de relaciones normales, es decir, las relaciones cerradas T que cumplen $TT^* = T^*T$. Posteriormente investigar si existe un teorema espectral para dichas relaciones lineales y si es equivalente a (6.35).

(iv) Para las descomposiciones canónicas de contracciones (Corolario (4.12) y Teorema 4.14), ¿Es posible debilitar estas descomposiciones a subespacios invariantes y que dichas descomposiciones sean en suma directa? De ser así ¿También podemos debilitar las correspondientes descomposiciones canónicas para relaciones disipativas que vemos en la Sección 4.3?

(v) El problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert para operadores acotados, podemos reducirlo a contracciones y como consecuencia del Lema 4.16 y del Teorema 4.3, conseguimos trasladarlo el problema a relaciones disipativas. Esto conlleva a preguntarnos si es factible resolver el problema del subespacio invariante en relaciones disipativas.

APÉNDICE A

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN EN PROCESO DE ARBITRAJE

Complementemos la tesis, mostrando tres artículos de investigación que están en proceso de ser arbitrados. Estos artículos los sometimos con el fin de dar a conocer los resultados obtenidos, de forma clara y sintética a la comunidad científica. Los artículos que a continuación mostramos, enmarcan una serie de resultados importantes, donde damos a conocer algunas demostraciones de manera distinta a las demostraciones que mostramos en la tesis, esto con la finalidad de sintetizar la redacción. A continuación presentamos un panorama breve de lo que trata cada articulo:

En el primero planteamos la teoría de extensiones disipativas que, aparte de englobar la teoría clásica de von Neumann acerca de las extensiones simétricas de operadores lineales, arroja las peculiaridades de las relaciones disipativas que pueden ser importantes en futuros desarrollos y aplicaciones; por ejemplo en el contexto de tripletes fronterizos para ecuaciones diferenciales parciales donde los índices de deficiencia son infinitos.

El segundo exhibe dos descomposiciones de relaciones disipativas análogas a las descomposiciones de Sz. Nagy-Foiaş-Langer y von Neumann-Wold, para contracciones. Las descomposiciones que obtenemos, separan la parte autoadjunta de una relación disipativa y esto la realizamos mediante subespacios invariantes y la utilización de la trasformada Z.

El tercero concierne a la teoría de perturbación sobre la estabilidad del espectro esencial de relaciones disipativas, esto en relación a los resultados clásicos de H. Weyl sobre perturbaciones de operadores autoadjuntos.

Cabe señalar que tenemos resultados relevantes en esta tesis que aun no han sido plasmados en artículos, los cuales planeamos sintetizar sus resultados y posteriormente someterlos en revistas arbitradas.

... el fruto"

Dissipative extension theory for linear relations*

Josué I. Rios-Cangas
Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
jottsmok@gmail.com

Luis O. Silva
Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
silva@iimas.unam.mx

Abstract

This work is devoted to dissipative extension theory for dissipative linear relations. We give a self-consistent theory of extensions by generalizing the theory on symmetric extensions of simmetric operators. Several results on the properties of dissipative relations are proven. Finally, we deal with the spectral properties of dissipative extensions of dissipative relations and provide results concerning particular realizations of this general setting.

Mathematics Subject Classification(2010): 47A06 47A45 47B44
Keywords: Closed linear relations; Dissipative extensions; Nondensely defined operators.
*Research partially supported by SEP-CONACYT 254062

1. Introduction

This paper deals with the theory of dissipative extensions of dissipative relations and it can be seen as a generalization of the classical von Neumann theory of symmetric extensions of symmetric operators [43]. The theory is presented thoroughly and the exposition goes along the lines of the classical texts on the von Neumann theory (see for instance [3, Chap. 7], [10, Chap. 4] [45, Chap. 8]), but in a more general setting.

In this work we obtain new results in the theory of dissipative relations. There are several results deemed to be folklore knowledge for which, to the best of our understanding, there were no proofs in the literature prior to this work. It is also worth remarking that the proofs of some classical results on dissipative operators, as well as their particular cases: symmetric and selfadjoint operators, are simplified and streamlined when considered in the more general framework of dissipative relations.

Our motivation for studying relations and its extensions comes from their use in the boundary triplet theory (see [16–18, 21]) and quasi boundary triplet theory (see [7, 8]) for extensions of operators; a panoramic account on boundary triplets is in [38, Chap. 14]). The theory of relations is also used in studying extensions of nondensely defined symmetric operators (see for instance [12] and cf. [28]). We remark that the examples given in Section 5 are related to this kind of applications. Relations are also relevant in other contexts; for instance in the theory of canonical systems (see [23, 24]).

It is not a coincidence that von Neumann was not only the pioneer in extension theory of operators, but also in the theory of linear relations. Indeed, the modern notion of linear relation goes back to [44]. The theory was later developed in [4, 11, 19]. More recent accounts on the matter can be found in [13, 25]. Symmetric extension theory of symmetric relations were first developed in [19] (cf. [1, 20]) Various aspects of the theory of symmetric relations were studied in [13, 30]. The perturbation theory of linear relations is dealt with in [5, 14, 22, 46].

The theory of dissipative operator has its roots in the theory of contractions for which a seminal work is Sz. Nagy's [41]. Contractive and dissipative operators are related via the Cayley transform (see [42, Chap. 4, Sec. 4]). One of the first works on dissipative operators is due to Philips [36]. The development of Sz. Nagy and Foiaş's theory for dissipative operators was done in [34, 35] and later generalized in [31–33]. Dissipative extension theory was formulated in [36].

The theory presented here generalizes previous results in two directions. We consider relations which are dissipative extensions of dissipative relations. This general setting not only covers all earlier results, but also shed light on the peculiarities of dissipative relations that may be important in further developments and applications (as for instance in the context of boundary triplets for partial differential equations where the deficiency indices are infinite). Dissipative relations appear in applications in [16, 18] and are studied in [6, 19].

The paper is organized as follows. In Section 2, we give a general account on the theory of closed linear relations. Here we lay out the notation and introduce preparatory facts. Section 3 is concerned with the theory of dissipative relations. In this section, we extend some results which characterize dissipative operators to the case of relations (Theorems 3.1 and 3.6, and Proposition 3.5). Theorems 3.7 and 3.10 give criteria for maximal dissipativeness for sums of dissipative relations. Propositions 3.11 and 3.13 allow us to study the spectrum and the deficiency index of a dissipative relation in terms of the spectrum and the deficiency index of the operator part of it. In Section 4, we deal with dissipative extensions of dissipative relations. Here, instead of using the Cayley transform for relations (see [19, Sec. 2]), we recur to its modern countepart, the Z-transform, introduced in [20]. Theorem 4.7 provides the generalization of the von Neumann formula for which

Corollary 4.8 and Propositions 4.9 and 4.10 are related results. The spectral properties of dissipative relations are dealt with in Proposition 4.11 and Corollary 4.13. Finally, Section 5 presents examples of dissipative extensions for a Jacobi operator and the operator of multiplication in a de Branges space in a general setting including the case when they are not densely defined.

2. Spectral theory of closed linear relations

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space with inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ being antilinear in the first argument. Consider the orthogonal sum of $\mathcal{H}$ with itself, i.e. $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ (see [10, Chap. 2 Sec. 3.3]), and denote an arbitrary element of it as a pair $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ with $f, g \in \mathcal{H}$. Thus,

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle f_1, f_2\rangle + \langle g_1, g_2\rangle. \tag{2.1}$$

We shall use the norm

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| = \|f\| + \|g\|,$$

which is equivalent to the norm

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 . \tag{2.2}$$

generated by the inner product (2.1).

Define the operators U, W acting on $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ by the rule

$$\mathsf{U}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{W}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

One verifies that

$$\mathsf{U}^2 = \mathsf{I} = -\mathsf{W}^2, \quad \mathsf{UW} = -\mathsf{WU}\,,$$

where I is the identity operator in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Moreover, for any linear subset $\mathcal{G}$ of $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ the following holds

$$\begin{aligned} (\mathsf{W}\mathcal{G})^\perp &= \mathsf{W}(\mathcal{G}^\perp) \qquad & \overline{\mathsf{W}\mathcal{G}} &= \mathsf{W}\overline{\mathcal{G}} \\ (\mathsf{U}\mathcal{G})^\perp &= \mathsf{U}(\mathcal{G}^\perp) \qquad & \overline{\mathsf{U}\mathcal{G}} &= \mathsf{U}\overline{\mathcal{G}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Throughout this paper, any linear set T in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ is called a linear relation or simply a relation. The graph of a linear operator is a relation, and thus any operator can be seen as a particular instance of a relation. Not all relations are graphs of operators since for a linear relation $\mathcal{G}$ to be the graph of an operator, it is necessary and sufficient that

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \;:\; f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.5}$$

A closed relation is a subspace in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. If a closed relation is an operator, then the operator is closed [10, Chap. 3, Sec. 2].

For a given relation T, define the sets

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T &:= \left\{ f \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} & \operatorname{ran} T &:= \left\{ g \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \\ \ker T &:= \left\{ f \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T \right\} & \operatorname{mul} T &:= \left\{ g \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

which are linear sets in $\mathcal{H}$. Moreover, if T is closed, then $\ker T$ and $\operatorname{mul} T$ are subspaces of $\mathcal{H}$. According to (2.5) a relation is an operator if and only if $\operatorname{mul} T = \{0\}$.

Let T and S be relations, and $\zeta \in \mathbb{C}$. Consider the relations:

$$\begin{aligned} T + S &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g+h \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in S \right\} & \zeta T &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \\ ST &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in S \right\} & T^{-1} &:= \mathsf{U} T\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Note that T^{-1} is the inverse of the relation T. Clearly,

$$\begin{gathered} \operatorname{dom} T^{-1} = \operatorname{ran} T \qquad \operatorname{ran} T^{-1} = \operatorname{dom} T \\ \ker T^{-1} = \operatorname{mul} T \qquad \operatorname{mul} T^{-1} = \ker T \\ (TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}\,. \end{gathered} \tag{2.8}$$

We also deal with the relations:

$$\begin{aligned} & T \dot{+} S := \left\{ \begin{pmatrix} f+h \\ g+k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S, \text{ and } T \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}. \\ & T \oplus S := T \dot{+} S\,, \text{ with } T \subset S^{\perp}. \\ & T \ominus S := T \cap S^{\perp}\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Clearly, $T^{\perp}$ is a closed relation. Note that, in the last two definitions, we consider the orthogonal sum and difference in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. It will cause no confusion to use the same symbol $\oplus$ when refering to subspaces of a Hilbert space and when forming the orthogonal sum of Hilbert spaces.

Define

$$T^* := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \langle k, f \rangle = \langle h, g \rangle,\ \ \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}.$$

T^* is the adjoint of T and has the following properties:

$$\begin{aligned} T^* &= (\mathsf{W}T)^{\perp}, & & S \subset T \Rightarrow T^* \subset S^*, \\ T^{**} &= \overline{T}, & & (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*, \text{ with } \alpha \neq 0, \\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*, & & \ker T^* = (\operatorname{ran} T)^{\perp}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

The last item above implies

$$\mathcal{H} = \overline{\operatorname{ran} T} \oplus \ker T^*. \tag{2.11}$$

Proposition 2.1. *Let T be a closed linear relation, then* $\operatorname{mul} T = (\operatorname{dom} T^*)^\perp$.

Proof. It follows from (2.8) and (2.10) that

$$\operatorname{mul} T = \ker T^{-1} = \ker[(T^*)^{-1}]^* = [\operatorname{ran}(T^*)^{-1}]^\perp = (\operatorname{dom} T^*)^\perp .$$

□

For the linear relations S and T, one directly verifies

$$S^* + T^* \subset (S+T)^* . \tag{2.12}$$

The conditions for the equality in the above inclusion are given by the next assertion which follows from the proof of [4, Thm. 3.41].

Proposition 2.2. *If the domain of T is in the domain of S and the domain of $(T+S)^*$ is in the domain of S^*, then $(S+T)^* = S^* + T^*$.*

We shall say that a relation T is bounded if there exists $C > 0$ such that for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$ it holds $\|g\| \le C \|f\|$. It follows from this definition that a bounded relation is a bounded operator.

Remark 2.3. Repeating the proof of [10, Thm. 3.2.3], one verifies that if T and S are two closed relations such that S is bounded, then $T + S$ is a closed relation.

Define the quasi-regular set of T by

$$\hat\rho(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ (T - \zeta I)^{-1} \ \text{ is bounded}\}$$

As in the case of operators, the quasi-regular set is open. It is a well-known fact, and a useful one, that a bounded operator T is closed if and only if its domain is closed.

Proposition 2.4. *For every $\zeta \in \hat\rho(T)$ it holds that* $\operatorname{ran}(T - \zeta I)$ *is closed if and only if T is closed.*

Proof. We suppose that $\operatorname{ran}(T-\zeta I) = \operatorname{dom}(T-\zeta I)^{-1}$ is closed, then $(T-\zeta I)^{-1}$ is closed, whence $T - \zeta I$ and T are simultaneously closed (see Remark 2.3). Conversely, closedness of T implies both closedness of $(T-\zeta I)$ and $(T-\zeta I)^{-1}$. Therefore $\operatorname{dom}(T-\zeta I)^{-1}$ is closed and by (2.8) the assertion follows. □

Similar to what happens to operators, the deficiency index

$$\eta_\zeta(T) := \dim[\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(T - \zeta I)] \tag{2.13}$$

is constant on each connected component of $\hat\rho(T)$ (cf. [10, Chp. 3 Sec. 7 Lem. 3]).

For a linear relation T and $\zeta \in \mathbb{C}$, we introduce the deficiency space

$$\mathbf{N}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in T \right\} , \tag{2.14}$$

which is a closed bounded relation and $\operatorname{dom} \mathbf{N}_\zeta(T) = \ker(T - \zeta I)$. Hence, it follows from (2.10) and Proposition 2.2 that

$$\eta_\zeta(T) = \dim \mathbf{N}_{\bar\zeta}(T^*).$$

Both the deficiency index and the deficiency space play a crucial role in the theory of dissipative extensions of symmetric relations developed in Section 3.

The connected components of $\hat{\rho}(T)$ in which $\eta_\zeta(T) = 0$ constitute the regular set of T which is denoted by $\rho(T)$. Thus

$$\rho(T) = \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ (T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} ,$$

where $B(\mathcal{H})$ is the class of bounded operators defined on the whole space $\mathcal{H}$. What was said before implies that if the relation is not closed, then its regular set is empty.

Proposition 2.5. *Let T be a closed linear relation. If $\zeta \in \rho(T)$, then $\overline{\zeta} \in \rho(T^*)$.*

Proof. The fact that $\zeta \in \rho(T)$ means that $(T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. This implies that $\left[(T - \zeta I)^{-1}\right]^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (see [10, Chap. 2 Sec. 4]) which yields $(T^* - \overline{\zeta} I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ by (2.10). □

In analogy to the operator case, the spectrum of the linear relation T, denoted $\sigma(T)$, and its spectral core, $\hat{\sigma}(T)$, are the complements in $\mathbb{C}$ of $\rho(T)$ and $\hat{\rho}(T)$, respectively. As in the case of operators, one has

$$\hat{\sigma}(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) ,$$

where the point spectrum, $\sigma_p(T)$, and the continuous spectrum, $\sigma_c(T)$ are given by

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ \ker(T - \zeta I) \neq \{0\}\} \quad \text{and} \\ \sigma_c(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{ran}(T - \zeta I) \neq \overline{\operatorname{ran}(T - \zeta I)}\} . \end{aligned}$$

For a closed relation T, define

$$T_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} , \quad T_\odot := T \ominus T_\infty .$$

Thus,

$$T = T_\odot \oplus T_\infty . \tag{2.15}$$

Note that $\operatorname{ran} T_\infty = \operatorname{mul} T$ and $T_\odot$ is a closed operator. Moreover, $\operatorname{dom} T_\odot$ coincides with $\operatorname{dom} T$ and $T_\odot \subset T$. We say that $T_\odot$ is the operator part of T and T_∞ is the multivalued part of T.

Apart from (2.15), there are alternative decompositions of linear relations, not necessarily closed, into its *regular* and *singular* parts [25].

The decomposition (2.15) allows to study some spectral properties of the relation T by means of its operator part. The next results deal with this matter.

Proposition 2.6. *If T is a closed relation, then $\hat{\rho}(T) \subset \hat{\rho}(T_\odot)$.*

Proof. Observe that $(T_\odot - \zeta I)^{-1} \subset (T - \zeta I)^{-1}$, for any $\zeta \in \mathbb{C}$. If $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, then $(T - \zeta I)^{-1}$ is bounded. Thus $(T_\odot - \zeta I)^{-1}$ is bounded and $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$. □

The condition for the equality in the above result is given by the next assertion.

Proposition 2.7. *If T is a closed relation such that $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$, then $\hat{\rho}(T) = \hat{\rho}(T_\odot)$.*

Proof. It suffices to show that $(T - \zeta I)^{-1}$ is bounded when $\zeta \in \hat{\rho}(T_\odot)$.

If $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (T - \zeta I)^{-1}$, that is $\begin{pmatrix} k \\ h + \zeta k \end{pmatrix} \in T$, then there exist $\begin{pmatrix} k \\ f \end{pmatrix} \in T_{\odot}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T_{\infty}$ such that $\begin{pmatrix} k \\ h + \zeta k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ f + g \end{pmatrix}$. Thus

$$h = f - \zeta k + g. \tag{2.16}$$

Note that $\begin{pmatrix} f - \zeta k \\ k \end{pmatrix} \in (T_{\odot} - \zeta I)^{-1}$ and there exist $C > 0$ such that

$$\|k\| \leq C \, \|f - \zeta k\|. \tag{2.17}$$

Since f and k are orthogonal to g, one has

$$\|f - \zeta k + g\|^2 = \|f - \zeta k\|^2 + \|g\|^2. \tag{2.18}$$

Combining (2.16), (2.17), and (2.18), one obtains

$$\begin{aligned} \|k\|^2 &\leq C^2(\|f - \zeta k\|^2 + \|g\|^2) \\ &= C^2 \|f - \zeta k + g\|^2 \\ &= C^2 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Therefore $\|k\| \leq C \, \|h\|$ which means that $(T - \zeta I)^{-1}$ is bounded. □

For the relations T and S, define the relation T_S in the Hilbert space $(\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp}$ (with inner product inherent from $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$) by

$$T_S := T \cap (\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp}. \tag{2.19}$$

The relation T_S is a linear relation. In some cases it is useful to consider T_S as a linear relation in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ and then $T_S \subset T$. Note that if T is closed, then T_S is also closed and if T is an operator then T_S is also an operator in $(\operatorname{mul} S)^{\perp}$. Furthermore, one can verifies that $(T_S)^{-1} = (T^{-1})_S$.

Proposition 2.8. *Let T and S be linear relations such that T is closed. If $\operatorname{mul} T \subset \operatorname{mul} S$, then $T_S = (T_{\odot})_S$ and, therefore, T_S is a closed operator in $(\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp}$.*

Proof. Since

$$(\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp} \subset (\operatorname{mul} T)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} T)^{\perp},$$

one has $T_{\infty} \cap (\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp} = \{0\} \oplus \{0\}$. Hence

$$\begin{aligned} T_S &= T \cap (\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp} \\ &= (T_{\odot} \oplus T_{\infty}) \cap (\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp} \\ &= T_{\odot} \cap (\operatorname{mul} S)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} S)^{\perp} = (T_{\odot})_S. \end{aligned}$$

□

Remark 2.9. For a closed relation T with $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^{\perp}$ it follows that $\operatorname{dom} T_{\odot}$ and $\operatorname{ran} T_{\odot}$ are in $(\operatorname{mul} T)^{\perp}$. Thus by Proposition 2.8

$$T_T = (T_{\odot})_T = T_{\odot} \cap (\operatorname{mul} T)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} T)^{\perp} = T_{\odot}\,. \tag{2.20}$$

This means that $T_{\odot}$ and T_T have the same elements and, when T_T is regarded as a relation in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, one can write

$$T = T_T \oplus T_{\infty}\,.$$

Besides, for any $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} T - \zeta I &= (T_{\odot} - \zeta I) \oplus T_{\infty} \\ &= (T_T - \zeta I) \oplus T_{\infty}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Theorem 2.10. *If T is a closed linear relation such that $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^{\perp}$, then*

(a) $\hat{\sigma}(T) = \hat{\sigma}(T_T)$.

(b) $\sigma(T) = \sigma(T_T)$.

(c) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_T)$.

(d) $\sigma_p(T) = \sigma_p(T_T)$

Proof. (a) The subspaces $(T_T - \zeta I)^{-1}$ and $(T_{\odot} - \zeta I)^{-1}$ coincide due to (2.20). Therefore $(T_T - \zeta I)^{-1}$ is bounded if and only if $(T_{\odot} - \zeta I)^{-1}$ is bounded. Thus $\hat{\rho}(T_{\odot}) = \hat{\rho}(T_T)$ and hence the assertion holds by Proposition 2.7.

(b) For $\zeta \in \rho(T_T)$, the operator $(T_T - \zeta I)^{-1}$ is bounded in the space $(\operatorname{mul} T)^{\perp}$. By the previous item $(T - \zeta I)^{-1}$ is also bounded. Thus, taking into account (2.21), one has

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(T - \zeta I)^{-1} &= \operatorname{ran}(T - \zeta I) \\ &= \operatorname{ran}(T_T - \zeta I) \oplus \operatorname{mul} T \\ &= \operatorname{dom}(T_T - \zeta I)^{-1} \oplus \operatorname{mul} T \\ &= (\operatorname{mul} T)^{\perp} \oplus \operatorname{mul} T = \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Therefore $\zeta \in \rho(T)$. The other inclusion follows from a similar reasoning.

(c) It follows from (2.21) that

$$\operatorname{ran}(T - \zeta I) = \operatorname{ran}(T_T - \zeta I) \oplus \operatorname{mul} T\,.$$

Thus, since $\operatorname{mul} T$ is closed, $\operatorname{ran}(T - \zeta I)$ is closed if and only if $\operatorname{ran}(T_T - \zeta I)$ is closed. Therefore $\sigma_c(T) = \sigma_c(T_T)$.

(d) Since $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^{\perp}$, one has

$$\ker(T - \zeta I) = \ker(T_T - \zeta I)\,.$$

From this equation (d) follows at once. $\square$

3. Dissipative relations

This section presents the theory of dissipative relations in a fashion similar to the theory of dissipative operators given in [42, Chap. 4, Sec. 4]. The theory of these operators was introduced by [36] (see further developments in [29]). This section is related to [19, Sec. 3] and extends some of its results (cf. [6]).

A linear relation L is said to be dissipative if

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0 \tag{3.1}$$

holds for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ in L. If the equality in (3.1) takes place for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ in L, then L is said to be symmetric. Note that L is symmetric if and only if $L \subset L^*$.

Theorem 3.1. *The linear relation L is dissipative if and only if the lower half plane $\mathbb{C}_-$ is contained in $\hat{\rho}(L)$ and for all $\zeta \in \mathbb{C}_-$,*

$$\|(L - \zeta I)^{-1}\| \leq -1/\operatorname{Im}\zeta\,.$$

Proof. Suppose that L is dissipative and let $\zeta \in \mathbb{C}_-$. If $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (L - \zeta I)^{-1}$, i. e. $\begin{pmatrix} k \\ h + \zeta k \end{pmatrix} \in L$, then $\operatorname{Im}\langle k, h + \zeta k\rangle \geq 0$. Therefore

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Im}\langle k, h\rangle + \operatorname{Im}\zeta \|k\|^2 \\ &\leq |\langle k, h\rangle| + \operatorname{Im}\zeta \|k\|^2 \\ &\leq \|h\|\,\|k\| + \operatorname{Im}\zeta \|k\|^2. \end{aligned}$$

For $k \neq 0$ the last inequality yields

$$\|k\| \leq -\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\|h\|\,. \tag{3.2}$$

If $k = 0$, then (3.2) holds. Hence $\|(L - \zeta I)^{-1}\| \leq -1/\operatorname{Im}\zeta$ and $\zeta \in \hat{\rho}(L)$.

Conversely, if $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ and $\tau > 0$, then $\begin{pmatrix} g - (-i\tau)f \\ f \end{pmatrix} \in [L - (-i\tau)I]^{-1}$ and, by hypothesis,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\leq \frac{1}{\tau^2}\|g + \tau i f\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\tau^2}(\|g\|^2 + \tau^2\|f\|^2 + 2\tau \operatorname{Im}\langle f, g\rangle)\,. \end{aligned}$$

Thus,

$$-\frac{1}{2\tau}\|g\|^2 \leq \operatorname{Im}\langle f, g\rangle.$$

Letting τ tends to infinity, one arrives at $\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0$ and hence L is dissipative. $\square$

Remark 3.2. Note that if A is symmetric so is $-A$. Therefore, by Theorem 3.1 $\mathbb{C}_- \subset \hat{\rho}(-A)$, which implies that the upper half plane $\mathbb{C}_+$ is contained in $\hat{\rho}(A)$. Hence A is symmetric if and only if $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$ and, for all $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, the inequality

$$\|(A - \zeta I)^{-1}\| \leq 1/|\operatorname{Im}\zeta|$$

holds.

Due to Theorem 3.1, for a closed dissipative relation L, the set $\mathbb{C}_-$ is a connected component of $\hat{\rho}(L)$. Hence, the deficiency index (2.13) is constant on $\mathbb{C}_-$. Let set $\eta_-(L) := \eta_\zeta(L)$ for any $\zeta \in \mathbb{C}_-$. Then, in view of (2.14), one has

$$\eta_-(L) = \dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(L^*)\,.$$

Furthermore, if A is a closed symmetric relation, then $\mathbb{C}_+$ is also a connected component of $\hat{\rho}(A)$, and one can also set $\eta_+(A) := \eta_{\overline{\zeta}}(A)$ for any $\zeta \in \mathbb{C}_-$. Hence A has indices

$$(\eta_+(A), \eta_-(A)) = (\dim \mathbf{N}_\zeta(A^*), \dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*)),\ \zeta \in \mathbb{C}_-\,. \tag{3.3}$$

A dissipative relation L is said to be maximal if it is closed and $\eta_-(L) = 0$ (or equivalently $\mathbb{C}_- \subset \rho(L)$).

L is maximal in the following sense. If A is another dissipative relation such that $L \subset A$, one verifies that $\eta_-(\overline{A}) \leq \eta_-(L)$. Then $\overline{A}$ is also maximal. Thus, for $\zeta \in \mathbb{C}_-$, one has $(L - \zeta I)^{-1} \subset (\overline{A} - \zeta I)^{-1}$ and both are in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. This implies that $(L - \zeta I)^{-1} = (\overline{A} - \zeta I)^{-1}$ and then $L = \overline{A}$. Therefore $L = A$.

Proposition 3.3. *If L is a closed dissipative relation whose domain is the whole space, then L is a bounded maximal dissipative operator.*

Proof. If $\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \in L^*$, then there exist $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ such that $\langle f, g\rangle = \langle if, f\rangle$. Thus $-i\|f\|^2 = \langle f, g\rangle$ and

$$-\|f\|^2 = \operatorname{Im}(-i\|f\|^2) = \operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0\,.$$

This implies that $f = 0$ and then $\eta_-(L) = 0$. Furthermore, by Proposition 3.11,

$$\operatorname{mul} L \subset (\operatorname{dom} L)^\perp = \{0\}\,.$$

Thereupon L is a closed operator defined on the whole space and therefore it is bounded. □

Proposition 3.4. *If L is a maximal dissipative relation, then*

$$\rho(L) \cap (\mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}) = \hat{\rho}(L) \cap (\mathbb{C}_- \cup \mathbb{R})\,.$$

Proof. Suppose that $\zeta \in \hat{\rho}(L) \cap \mathbb{C}_-$. Since $\eta_-(L) = 0$, the set $\operatorname{ran}(L - \zeta I)$ coincides with the whole space. This means that $\zeta \in \rho(L)$.

Now suppose that $\zeta \in \hat{\rho}(L) \cap \mathbb{R}$. Since $\hat{\rho}(L)$ is open, there exists an open neighborhood $\mathcal{V}(\zeta)$ of ζ in $\hat{\rho}(L)$. Since $\eta_\zeta(L)$ is constant on each connected component of $\hat{\rho}(L)$, one has, for any $\nu \in \mathcal{V}(\zeta) \cap \mathbb{C}_-$,

$$\eta_\zeta(L) = \eta_\nu(L) = \eta_-(L) = 0\,.$$

Thus $\operatorname{ran}(L - \zeta I) = \mathcal{H}$, which yields $\zeta \in \rho(L)$. □

From Proposition 3.4, one concludes that

$$\sigma(L) \cap \mathbb{R} = \hat{\sigma}(L) \cap \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Proposition 3.5. *A linear relation L is dissipative if and only if $-L^{-1}$ is dissipative.*

Proof. Suppose that L is dissipative and let $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in -L^{-1}$ then $\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix} \in L$ and

$$0 \leq \operatorname{Im}\langle -g, f\rangle = \operatorname{Im} -\langle g, f\rangle = \operatorname{Im}\langle f, g\rangle,$$

thence $-L^{-1}$ is dissipative. The converse can be established by noting that

$$-(-L^{-1})^{-1} = L\,. \tag{3.5}$$

□

Thus, the transform $L \to -L^{-1}$ preserves the class of dissipative relations. Furthermore this transform also preserves the subclass of maximal, dissipative relations.

Theorem 3.6. *If L is a maximal, dissipative relation, then $-L^{-1}$, $-L^*$ and $-L^\perp$ are maximal dissipative relations. Conversely, if $-L^{-1}$, $-L^*$ or $-L^\perp$ is a maximal dissipative relation, then L is a maximal dissipative relation.*

Proof. It follows from Proposition 3.5 that $-L^{-1}$ is dissipative and since L is closed, so is $-L^{-1}$. One should show that $\mathbf{N}_i((-L^{-1})^*)$ is the trivial relation. Let

$$\begin{pmatrix} g \\ ig \end{pmatrix} \in (-L^{-1})^*\,. \tag{3.6}$$

The maximality of L means that $\operatorname{ran}(L + iI) = \mathcal{H}$, so there exists $\begin{pmatrix} h \\ ig \end{pmatrix} \in (L + iI)$, which implies that $\begin{pmatrix} ig - ih \\ -h \end{pmatrix} \in -L^{-1}$. Taking into account (3.6), one has

$$\begin{aligned} \langle g, -h\rangle &= \langle ig, ig - ih\rangle \\ &= \|g\|^2 + \langle g, -h\rangle. \end{aligned}$$

Thus $g = 0$ and $-L^{-1}$ is maximal dissipative.

Now consider $\zeta \in \mathbb{C}_-$ and let $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in (-L^* - \zeta I)^{-1}$, that is $\begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \in (L + \overline{\zeta} I)^*$. Since $\eta_-(L) = 0$, $\operatorname{ran}(L + \overline{\zeta} I) = \mathcal{H}$, so there exists $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in (L + \overline{\zeta} I)$. Therefore it should hold that

$$\|k\|^2 = \langle f, -h\rangle. \tag{3.7}$$

Observe that $\begin{pmatrix} k \\ f \end{pmatrix} \in [L - (-\overline{\zeta})]^{-1}$ and from Proposition 3.1,

$$\|f\| \leq -\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\|k\|. \tag{3.8}$$

Then, by (3.7) and (3.8),

$$\begin{aligned}\|k\|^2 &= \langle f, -h\rangle \\ &\le \|f\|\,\|h\| \\ &\le -\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\|k\|\,\|h\|.\end{aligned}$$

For $k \neq 0$ the last inequality yields

$$\|k\| \le -\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\|h\|. \tag{3.9}$$

If $k = 0$ then (3.9) is trivial. Hence, by Proposition 3.1, $-L^*$ is dissipative. Maximality, i. e. the fact that $\mathbb{C}_- \subset \rho(-L^*)$, follows from Proposition 2.5.

Observe that

$$\begin{aligned}-L^\perp &= -(\mathbf{W}\mathbf{W}L)^\perp \\ &= -(\mathbf{W}L)^* \\ &= -(-L^{-1})^*\,.\end{aligned}$$

Thus by what has been proven $-L^\perp$ is maximal dissipative. The converse assertions follow from (3.5), $-(-L^*)^* = L$, and $-(-L^\perp)^\perp = L$. ☐

Let us turn to the question of when the sum of maximal dissipative relations is a maximal dissipative relation.

Theorem 3.7. *Let A and V be maximal dissipative relations. If $\operatorname{dom} V = \mathcal{H}$, then $L = A + V$ is a maximal dissipative relation.*

Proof. The fact that L is dissipative follows directly from (3.1). Closedness is a consequence of Remark 2.3. It remains to be proven that L is maximal which in turn is reduced to showing that $\mathbf{N}_i(L^*)$ is trivial. Observe that Proposition 3.3 ensures $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and therefore $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. By Proposition 2.2, if $\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \in L^*$, then there is $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in A^*$ and $\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix} \in V^*$ such that $if = t + s$. Thus

$$\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix} \in V^*\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ if - t \end{pmatrix} \in A^*\,. \tag{3.10}$$

On the other hand, since $-i \in \rho(A)$, there exists $\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \in (A+iI)^{-1}$, which implies that $\begin{pmatrix} k \\ t - ik \end{pmatrix} \in A$. This inclusion and the second one in (3.10) yield $\langle if - t, k\rangle = \langle f, t - ik\rangle$ and therefore $\operatorname{Im}\langle k, t\rangle = \operatorname{Im}\langle f, t\rangle$. Thus, one obtains from the dissipativity condition that

$$0 \le \operatorname{Im}\langle k, t - ik\rangle \le \operatorname{Im}\langle k, t\rangle = \operatorname{Im}\langle f, t\rangle\,. \tag{3.11}$$

By Theorem 3.6, $-V^*$ is dissipative. Using this fact and the first inclusion in (3.10) one arrives at

$$\operatorname{Im}\langle f, t\rangle = -\operatorname{Im}\langle f, -t\rangle \le 0\,,$$

which, together with (3.11), yields $\mathrm{Im}\langle f,t\rangle = 0$. To conclude the proof, use the dissipativity of $-A^*$ (Theorem 3.6) and the second inclusion in (3.10) to obtain

$$0 \le \mathrm{Im}\langle f, -if + t\rangle = -\|f\|^2 ,$$

which implies $f = 0$. $\square$

Let us introduce the concept of relatively boundedness for relations in a way analogous to the same concept for operators [27, Chap. 4, Sec. 1].

A relation S is said to be T-bounded if $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} S$ and there exists $c > 0$ such that for all $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ and $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ the following holds

$$\|g\| \le c \left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\| . \tag{3.12}$$

Observe that if S is T-bounded, then S is an operator. Furthermore, S is said to be strongly T-bounded when $c < 1$ in (3.12). Note that our definition of strongly relatively boundedness is formally stronger than the definition given in [27, Chap. 4, Sec. 1], however it can be proven to be equivalent by following the argumentation of the proof of [10, Thm. 3 Sec. 4 Chap 3].

Lemma 3.8. *Let S be strongly T-bounded. The relation T is closed if and only if $T + S$ is closed.*

Proof. Since S is strongly T-bounded, it follows from the triangle inequality that there exists $0 < c < 1$ such that for all $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ and $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$,

$$(1-c) \left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\| \le \left\| \begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} \right\| \le (1+c) \left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\| . \tag{3.13}$$

Suppose that T is closed and let $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \overline{T+S}$, then there are sequences $\left\{ \begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ in T and $\left\{ \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ in S such that

$$\begin{pmatrix} f_n \\ h_n + g_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} .$$

It follows from (3.13) and the fact that $\left\{ \begin{pmatrix} f_n \\ h_n + g_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence, that $\left\{ \begin{pmatrix} f_n \\ h_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to some $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$. Thereupon, there exists $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ such that $\begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} \in T + S$. Thus, again by (3.13), one obtains

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}\right\| &= \lim_{n\to\infty}\left\|\begin{pmatrix} f \\ h+g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_n \\ h_n+g_n \end{pmatrix}\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\begin{pmatrix} f-f_n \\ (h-h_n)+(g-g_n) \end{pmatrix}\right\| \\ &\le \lim_{n\to\infty}(1+c)\left\|\begin{pmatrix} f-f_n \\ h-h_n \end{pmatrix}\right\| = 0\,.\end{aligned}$$

Hence $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in T+S$, which establishes that $T+S$ is closed. The proof of the converse assertion is carried out analogously. □

The requirement of S being strongly T-bounded in the last result cannot be relaxed (see a counterexample in [10, Sec. 4 Chap 3]).

Lemma 3.9. *Let T be a closed linear relation. If S and S^* are strongly T-bounded and strongly T^*-bounded, respectively, then*

$$(T+S)^* = T^* + S^*\,. \tag{3.14}$$

Proof. Due to (2.12), $T^*+S^* \subset \mathsf{W}(T+S)^{\perp}$. It follows from Lemma 3.8 that $W(T+S)$ and (T^*+S^*) are closed. Thus, for proving (3.14), it suffices to show that

$$\mathsf{W}(T+S) \oplus (T^*+S^*) = \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\,. \tag{3.15}$$

By hypothesis, there exist $0 < b < 1$ such that, for any $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \in T^*$ and $\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix} \in S^*$, one has

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &\le b\left\|\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}\right\|^2, \\ \|s\|^2 &\le b\left\|\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix}\right\|^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

One obtains from (2.10), using the fact that T is closed, that

$$\mathsf{W}T \oplus T^* = \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\,. \tag{3.17}$$

Thus, for every $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, there exist $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ and $\begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \in T^*$ such that $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h+l \\ f+t \end{pmatrix}$. Since $\operatorname{dom} T \subset \operatorname{dom} S$ and $\operatorname{dom} T^* \subset \operatorname{dom} S^*$, one can find $g, s \in \mathcal{H}$ such that $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ and

$\begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix} \in S^*$. Define the linear relation $\mathbf{Q}$ in $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ as follows

$$\mathbf{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix} \ : \ \tilde{r} = \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \text{ and } \tilde{s} = \begin{pmatrix} -g \\ s \end{pmatrix} \right\} .$$

Due to the fact that the norm in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ is equivalent to (2.2), it follows from (3.16) and (3.17) that, for any $\begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{s}\|^2 &= \|g\|^2 + \|s\|^2 \\ &\le b \left(\left\| \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \\ &\le b \left(\left\| \begin{pmatrix} -h \\ f \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} l \\ t \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \\ &= b \left\| \begin{pmatrix} -h + l \\ f + t \end{pmatrix} \right\|^2 = b\|\tilde{r}\|^2 . \end{aligned}$$

Then $\mathbf{Q} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ with $\|\mathbf{Q}\| < 1$, which implies that

$$\operatorname{ran}(\mathbf{Q} + \mathbf{I}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}.$$

Therefore, for any $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, there exists $\begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{s} \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}$ such that

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} &= \tilde{s} + \tilde{r} \\ &= \begin{pmatrix} -g - h + l \\ s + f + t \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{W} \begin{pmatrix} f \\ h + g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ t + s \end{pmatrix} \in \mathbf{W}(T + S) \oplus (T^* + S^*) , \end{aligned}$$

whence (3.15) follows. ☐

To state the following assertion, one requires a certain class of symmetric relations. A relation A is said to be positive (denoted by $A \ge 0$) whenever

$$\langle f, g \rangle \ge 0, \quad \text{for all } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A .$$

Theorem 3.10. *Let A and B be two selfadjoint relations such that B is positive and strongly A-bounded. Then $A + iB$ is a maximal dissipative relation.*

Proof. By a direct verification of (3.1), one establishes that $A + iB$ is dissipative. The closedness follows from Lemma 3.8 after noting that iB is also strongly A-bounded.

It remains to prove that $\mathbf{N}_i((A + iB)^*)$ is a trivial relation. By Lemma 3.9, one has $(A+iB)^* =$

$A - iB$. For an arbitrary

$$\begin{pmatrix} f \\ if \end{pmatrix} \in A - iB\,,$$

there exist $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A$ and $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in B$ such that $if = h - ig$. Thus, $\begin{pmatrix} f \\ i(f+g) \end{pmatrix} \in A$ and, due to the selfadjointness of A, one concludes

$$\|f\|^2 + \langle f, g\rangle = \operatorname{Im}\langle f, i(f+g)\rangle = 0\,.$$

Since B is positive the last equality yields that $f = 0$. Therefore $A + iB$ is maximal dissipative. $\square$

The following assertion sheds light on the interrelationship of $\operatorname{dom} L$ and $\operatorname{mul} L$ for a dissipative relation L.

Proposition 3.11. *If L is a closed dissipative relation, then* $\operatorname{dom} L \subset (\operatorname{mul} L)^{\perp}$.

Proof. For $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$, there exist elements $f_1,\ g_1 \in (\operatorname{mul} L)^{\perp}$ and $f_2,\ g_2 \in \operatorname{mul} L$ such that $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix}$. To prove the statement, it suffices to show that $f_2 = 0$.

Suppose $f_2 \neq 0$. This implies that there exits $\tau > 0$ such that

$$\operatorname{Im}\langle f_1, g_1\rangle - \tau\|f_2\|^2 < 0\,. \tag{3.18}$$

Thus $\begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ g_1 - i\tau f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(i\tau f_2 + g_2) \end{pmatrix} \in L$. Since L is dissipative, one has

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Im}\langle f_1 + f_2, g_1 - i\tau f_2\rangle \\ &= \operatorname{Im}(\langle f_1, g_1\rangle - i\tau\|f_2\|^2) \\ &= \operatorname{Im}\langle f_1, g_1\rangle - \tau\|f_2\|^2\,, \end{aligned}$$

which contradicts (3.18). Therefore $f_2 = 0$. $\square$

Remark 3.12. Due to last proposition, the spectrum of any closed dissipative relation satisfies the conditions of Theorem 2.10. Moreover, one can verify that the operator part of a closed dissipative relation is a closed dissipative operator. Conversely, for a closed relation L such that $\operatorname{dom} L \subset (\operatorname{mul} L)^{\perp}$, if $L_{\odot}$ is dissipative, then L is dissipative.

Proposition 3.13. *Let L be a closed linear relation. If L is (maximal) dissipative, then L_L is (maximal) dissipative operator in* $(\operatorname{mul} L)^{\perp} \oplus (\operatorname{mul} L)^{\perp}$ *and*

$$\eta_{-}(L_L) = \eta_{-}(L). \tag{3.19}$$

Conversely, if $\operatorname{mul} L \subset (\operatorname{dom} L)^{\perp}$ *and L_L is (maximal) dissipative, then L is (maximal) dissipative and, therefore,* (3.19) *holds.*

Proof. Suppose that L is closed dissipative. It follows from Proposition 3.11 and (2.20) that L_L is a closed, dissipative operator in $(\operatorname{mul} L)^\perp \oplus (\operatorname{mul} L)^\perp$. Moreover, (2.21) implies that

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(L - \zeta I) &= \mathcal{H} \ominus [\operatorname{ran}(L_L - \zeta I_L) \oplus \operatorname{mul} L] \\ &= [\mathcal{H} \ominus \operatorname{mul} L] \ominus \operatorname{ran}(L_L - \zeta I_L) \\ &= (\operatorname{mul} L)^\perp \ominus \operatorname{ran}(L_L - \zeta I_L)\,.\end{aligned}$$

Whence (3.19) follows.

For the converse assertion, one again uses (2.20) to conclude that $L_\odot$ is dissipative. Thus, taking into account Remark 3.12, one has that L is dissipative.

Note that L is maximal if and only if L_L is maximal due to (3.19). □

4. Dissipative extensions of dissipative relations

This section is devoted to the development of the theory of extensions of dissipative relations. We consider only extensions without exit to a larger space (cf. [3, Appendix 1]). Our approach is similar to the one used in the von Neumann theory. There are other ways for dealing with extensions of operators (see for instance [38, Sec. 14]).

A relation V is a contraction if it is bounded (and then it is actually an operator) with $\|V\| \le 1$. It is known that if a relation V satisfies $V^{-1} \subset V^*$, then V is a particular kind of contraction called isometric operator for which $\|V\| = 1$ holds. Moreover if $V^{-1} = V^*$ the operator V is said to be unitary.

Denote $\mathbb{T}_e := \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ |\zeta| > 1\}$. For any contraction V, one verifies $\mathbb{T}_e \subset \hat{\rho}(V)$. Whence the deficiency index $\eta_\zeta(V)$ (see (2.13)) is constant for $\zeta \in \mathbb{T}_e$. Define

$$\eta_e(V) := \eta_\zeta(V), \quad \zeta \in \mathbb{T}_e\,.$$

Following the argumentation of [10, Thm. 4.2.2] (which deals with isometric operators), it can be proven for any contraction V that

$$\eta_e(V) = \dim(\mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} V). \tag{4.1}$$

If V and $\hat{V}$ are closed contractions such that $V \subset \hat{V}$, then

$$\eta_e(V) = \eta_e(\hat{V}) + \eta_0, \tag{4.2}$$

where $\eta_0 = \dim(\operatorname{dom} \hat{V} \ominus \operatorname{dom} V)$.

A contraction V it is said to be maximal if it is closed and $\eta_e(V) = 0$.

Compare the following statement with [10, Sec. 4.4] and [19, Thm. 5.1].

Theorem 4.1. *Let V be a closed contraction. The operator $\hat{V}$ is a closed contraction extension of V if and only if there exists a unique closed contraction W such that*

$$\hat{V} = V \oplus W, \tag{4.3}$$

and

$$2|\operatorname{Re}(\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle)| \le (\|f\|^2 - \|g\|^2) + (\|h\|^2 - \|k\|^2), \tag{4.4}$$

for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ *and* $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in W$. *Note that the right-hand side of* (4.3) *is an orthogonal sum of relations (see (2.9)). Moreover, if* V *is isometric, then the condition* (4.4) *turns into the condition that either*

$$\operatorname{dom} V \perp \operatorname{dom} W \quad \textit{or} \quad \operatorname{ran} V \perp \operatorname{ran} W \tag{4.5}$$

holds. In view of (4.3)*, the conditions in (4.5) hold simultaneously.*

Proof. Suppose that $\hat{V}$ is a closed contraction extension of V and consider $W = \hat{V} \ominus V$ then W is a closed contraction and one verifies that $\hat{V} = V \oplus W$.

For every $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$ and $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in W$, one has that $\begin{pmatrix} \alpha f + h \\ \alpha g + k \end{pmatrix} \in \hat{V}$ and $\|\alpha g + k\| \le \|\alpha f + h\|$ with $\alpha \in \mathbb{C}$. Then

$$\begin{aligned} |\alpha|^2\|g\|^2 + \|k\|^2 + 2\operatorname{Re}\overline{\alpha}\langle g, k\rangle &= \|\alpha g + k\|^2 \\ &\le \|\alpha f + h\|^2 \\ &= |\alpha|^2\|f\|^2 + \|h\|^2 + 2\operatorname{Re}\overline{\alpha}\langle f, h\rangle, \end{aligned}$$

whence

$$-2\operatorname{Re}\overline{\alpha}(\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle) \le |\alpha|^2(\|f\|^2 - \|g\|^2) + (\|h\|^2 - \|k\|^2). \tag{4.6}$$

Thus, setting $\alpha := \pm 1$, the inequality (4.4) holds.

If V is isometric then $\|f\| = \|g\|$. It turns out that in this case

$$\langle f, h\rangle = \langle g, k\rangle \tag{4.7}$$

since otherwise there would exit $\tau > 0$ such that

$$\tau|\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle| > \|h\|^2 - \|k\|^2.$$

This inequality contradicts (4.6) when $\alpha = -\tau|\langle f, h\rangle - \langle g, k\rangle|/(\langle h, f\rangle - \langle k, g\rangle)$. Therefore since V and W are orthogonal, it follows from (4.7) that

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle f, h\rangle + \langle g, k\rangle = 2\langle f, h\rangle = 2\langle g, k\rangle. \end{aligned}$$

The uniqueness of the decomposition is trivial. The converse assertion is straightforward. □

Note that under the assumption that V is isometric in (4.3), the number η_0 in (4.2) is given by $\eta_0 = \dim \operatorname{dom} W$. Moreover, in this case, $\hat{V}$ is isometric if and only if W is isometric.

We now turn to the question of extending closed dissipative relations and, in particular, closed symmetric relations. To this end, we introduce a fractional linear transformation of a relation as follows.

Definition 4.2. Following [19], for a relation T and $\zeta \in \mathbb{C}$, define the Cayley transform of T by

$$\mathsf{C}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} g - \overline{\zeta} f \\ g - \zeta f \end{pmatrix} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} = I + (\overline{\zeta} - \zeta)(T - \overline{\zeta} I)^{-1}$$

Also, let us define the Z transform of T (cf. [20])

$$\mathbf{Z}_\zeta(T) := \overline{\zeta}\mathbf{C}_\zeta(T)$$

This is a linear relation which satisfies

$$\operatorname{dom}\mathbf{Z}_\zeta(T) = \operatorname{ran}(T - \overline{\zeta}I)\,, \quad \operatorname{ran}\mathbf{Z}_\zeta(T) = \operatorname{ran}(T - \zeta I)\,, \tag{4.8}$$
$$\operatorname{mul}\mathbf{Z}_\zeta(T) = \ker(T - \overline{\zeta}I)\,, \quad \ker\mathbf{Z}_\zeta(T) = \ker(T - \zeta I)\,. \tag{4.9}$$

The Z transform has the following properties (see [19, Lems. 2.6, 2.7] and [20, Props. 3.6, 3.7]). For any $\zeta \in \mathbb{C}$:

(i) $\mathbf{Z}_\zeta(\mathbf{Z}_\zeta(T)) = T$.

(ii) $\mathbf{Z}_\zeta(T) \subset \mathbf{Z}_\zeta(S) \;\Leftrightarrow\; T \subset S$.

(iii) $\mathbf{Z}_{-\zeta}(T) = -\mathbf{Z}_\zeta(-T)$.

(iv) If $|z| = 1$, then $\mathbf{Z}_\zeta(T^{-1}) = \mathbf{Z}_{\overline{\zeta}}(T) = (\mathbf{Z}_\zeta(T))^{-1}$.

For any $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

(vii) $\mathbf{Z}_\zeta(T \dotplus S) = \mathbf{Z}_\zeta(T) \dotplus \mathbf{Z}_\zeta(S)$.

(viii) If $\zeta = \pm i$, then $\mathbf{Z}_\zeta(T \oplus S) = \mathbf{Z}_\zeta(T) \oplus \mathbf{Z}_\zeta(S)$.

(ix) $\mathbf{Z}_\zeta(T^*) = (\mathbf{Z}_{\overline{\zeta}}(T))^*$.

(x) $\mathbf{Z}_\zeta(T)$ is closed $\Leftrightarrow$ T is closed.

Proposition 4.3. *Under the assumption that $\zeta \in \mathbb{C}_+$ and $|\zeta| = 1$, the linear relation L is (closed, maximal) dissipative if and only if $V = \mathbf{Z}_\zeta(L)$ is a (closed, maximal) contraction.*

Proof. Suppose that L is a dissipative relation and let $\begin{pmatrix} g - \overline{\zeta}f \\ \overline{\zeta}g - f \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_\zeta(L) = V$, with $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$. Then

$$\begin{aligned} \|g - \overline{\zeta}f\|^2 - \|\overline{\zeta}g - f\|^2 &= 2\operatorname{Re}(-\zeta\langle f, g\rangle) + 2(\operatorname{Re}\overline{\zeta}\langle f, g\rangle), \\ &= 4(\operatorname{Im}\zeta)\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Thus V is a contraction.

Conversely, let $\begin{pmatrix} g - \overline{\zeta}f \\ \overline{\zeta}g - f \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}_\zeta(V) = L$, with $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V$. Then

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle g - \overline{\zeta}f, \overline{\zeta}g - f\rangle &= \operatorname{Im}(\overline{\zeta}\|g\|^2 + \zeta\|f\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle g, f\rangle) \\ &= \operatorname{Im}\zeta(\|f\|^2 - \|g\|^2) \geq 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

therefore L is dissipative. Note that L and V are simultaneously closed due to (x). As regards the maximality,

$$\begin{aligned} \eta_e(V) &= \dim(\mathcal{H} \ominus \operatorname{dom}V) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \operatorname{dom}\mathbf{Z}_\zeta(L)) \quad \text{(due to (4.8))} \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(L - \overline{\zeta}I)) = \eta_-(L)\,. \end{aligned}$$

$\square$

Remark 4.4. It follows from (4.10) and (4.11) that, for all $|\zeta| = 1$, a relation is symmetric if and only if its Z transform is isometric. Moreover, Proposition 4.3 shows that the Z transform gives a one-to-one correspondence between contractions and dissipative relations.

The next assertion can be found in [19, Thm. 6.1] and corresponds to the first von Neumann formula. It characterizes the adjoint of a closed symmetric relation by means of its deficiency space (2.14). We omit the proof since it can be obtained by the same argumentation used in the proof of the first von Neumann formula (cf. [10, Thm. 4.4.1])

Theorem 4.5. *For a closed symmetric relation A, one has*

$$A^* = A \dotplus \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*) \dotplus \mathbf{N}_{\zeta}(A^*) , \qquad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{4.12}$$

For $\zeta \in \{i, -i\}$, the direct sum in (4.12) *is orthogonal.*

The proof of the next proposition repeats the argumentation given in the first part of the proof of Theorem 4.1.

Proposition 4.6. *Let L be a closed dissipative relation. Then $\hat{L}$ is a closed dissipative extension of L if an only if there exist a unique closed dissipative relation S such that*

$$\hat{L} = L \oplus S,$$

and, for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ *and* $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$,

$$\operatorname{Im}(\langle f, g\rangle + \langle h, k\rangle) \geq |\operatorname{Im}(\langle f, k\rangle - \langle g, h\rangle)|.$$

The following extends the so-called second von Neumann formula (cf. [19, Thm. 6.2]).

Theorem 4.7. *Let A be a closed symmetric relation. $\hat{A}$ is a closed dissipative (symmetric) extension of A if and only if, for a fixed $\zeta \in \mathbb{C}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$),*

$$\hat{A} = A \dotplus (\mathbf{V} - \mathbf{I})D, \tag{4.13}$$

where $D \subset \mathbf{N}_{\zeta}(A^*)$ is a closed bounded relation and $\mathbf{V} : D \to \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*)$ is a closed contraction (isometry) in $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. For $\zeta = i$, the direct sum in (4.13) *is orthogonal.*

Proof. It follows from Proposition 4.3 that $\mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A)$ and $\mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} \hat{A})$ are, respectively, a closed isometric and a closed contraction (isometry) whenever $\zeta \in \mathbb{C}_+$ ($\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$). Moreover, since $A \subset \hat{A}$, one has $\mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A) \subset \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} \hat{A})$ in view of property (ii).

Theorem 4.1 implies the existence of a closed contraction (isometry) W such that

$$\mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} \hat{A}) = \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A) \oplus W, \tag{4.14}$$

with

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} W \subset \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A - \overline{\zeta} I) = \ker(A^* - \zeta I), \\ \operatorname{ran} W \subset \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran} \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A - \zeta I) = \ker(A^* - \overline{\zeta} I). \end{aligned} \tag{4.15}$$

By applying the Z transform to (4.14), using (i), one obtains

$$\hat{A} = A \dotplus |\zeta|\, \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(W)\,. \tag{4.16}$$

Observe that $\operatorname{dom} W$ is closed. Consider the linear relation

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \;:\; v \in \operatorname{dom} W \right\}, \tag{4.17}$$

whence, in view of (4.15), $D \subset \mathbf{N}_{\zeta}(A^*)$. Thus D is bounded and then closed.

For every $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in W$, define the relation $\mathbf{V}$ in $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ with $\operatorname{dom} \mathbf{V} = D$ such that

$$\mathbf{V} \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \begin{pmatrix} w \\ \overline{\zeta} w \end{pmatrix}.$$

It follows from (4.15) that $\mathbf{V}D \subset \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(A^*)$ and, since W is a contraction (isometry):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\zeta}{|\zeta|} \begin{pmatrix} w \\ \overline{\zeta} w \end{pmatrix} \right\| &= \|w\| + \|\overline{\zeta} w\| \\ &\leq \|v\| + \|\zeta v\| = \left\| \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Thus $\mathbf{V}$ is a closed contraction (isometry because the equality holds in (4.18) when W is an isometry). Hence

$$\begin{aligned} |\zeta|\, \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(W) &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{|\zeta|} w - v \\ |\zeta|\, w - \zeta v \end{pmatrix} \;:\; \frac{\zeta}{|\zeta|} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in W \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{V} \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \;:\; \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \in D \right\} = (\mathbf{V} - \mathbf{I})D\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Therefore (4.16) is transformed into $\hat{A} = A \dotplus (\mathbf{V} - \mathbf{I})D$. For $\zeta = i$, the orthogonality of the direct sum in (4.16) follows from property (viii).

We now prove the converse assertion. Define

$$W = \left\{ \frac{\zeta}{|\zeta|} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \;:\; \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \in D \text{ and } \frac{\zeta}{|\zeta|} \begin{pmatrix} w \\ \overline{\zeta} w \end{pmatrix} \in \mathbf{V}D \right\}.$$

Since $\mathbf{V}$ is a contraction (isometry), one has

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\zeta}{|\zeta|} v \right\| - \left\| \frac{\zeta}{|\zeta|} w \right\| &= \frac{1}{1 + |\zeta|} \left[(1 + |\zeta|)\|v\| - (1 + |\zeta|)\|w\| \right] \\ &= \frac{1}{1 + |\zeta|} \left(\left\| \begin{pmatrix} v \\ \zeta v \end{pmatrix} \right\| - \left\| \frac{\zeta}{|\zeta|} \begin{pmatrix} w \\ \overline{\zeta} w \end{pmatrix} \right\| \right) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

From this, taking into account that $\operatorname{dom} W = \operatorname{dom} D$, one concludes that W is a closed contraction (isometry because the equality holds in (4.20) when V is an isometry).

Also, reading (4.19) backwards, one arrives at (4.16). Now, multiply (4.16) by $|\zeta|^{-1}$ and apply

$\mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(\cdot)$ to both sides of the resulting equality. This yields (4.14), where the orthogonality is a consequence of

$$\operatorname{dom} W \subset \ker(A^* - \zeta I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A - \overline{\zeta} I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A),$$
$$\operatorname{ran} W \subset \ker(A^* - \overline{\zeta} I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A - \zeta I) = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran} \mathbf{Z}_{\zeta/|\zeta|}(|\zeta|^{-1} A)\,.$$

The assertion then follows from (4.14) in view of Theorem 4.1 and Proposition 4.3. □

As a consequence of (4.13), any dissipative extension S of a symmetric relation A satisfies $A \subset S \subset A^*$.

Corollary 4.8. *If A is a closed symmetric relation and $\hat{A}$ is a closed dissipative extension of A, then*

$$\eta_-(A) = \eta_-(\hat{A}) + \dim[\hat{A}/A]. \tag{4.21}$$

Proof. In the proof of Theorem 4.7 one verifies that $(\mathbf{V} - \mathbf{I})$ gives a one-to-one correspondence. Thus, by (4.13) and by (4.17),

$$\begin{aligned} \dim[\hat{A}/A] &= \dim[(\mathbf{V} - \mathbf{I})D] \\ &= \dim(\operatorname{dom} W)\,. \end{aligned}$$

Hence, taking into account (4.8), it follows from (4.14) and (4.2) that

$$\begin{aligned} \eta_-(A) &= \eta_e(\mathbf{Z}_i(A)) \\ &= \eta_e(\mathbf{Z}_i(\hat{A})) + \dim(\operatorname{dom} W) \\ &= \eta_-(\hat{A}) + \dim[\hat{A}/A]. \end{aligned}$$

□

Since $\mathbf{N}_\zeta(A^*) = \mathbf{N}_{-\zeta}(-A^*)$, for a closed symmetric relation A, the equality $\eta_+(A) = \eta_-(-A)$ holds. This, together with Corollary 4.8, yields that if $\hat{A}$ is a closed symmetric extension of A, then

$$\eta_\pm(A) = \eta_\pm(\hat{A}) + \dim[\hat{A}/A]. \tag{4.22}$$

A closed symmetric relation A is selfadjoint if and only if it has indices $(0, 0)$ (see (3.3)). For this reason, the selfadjoint relations are maximal dissipative.

There is another way to construct maximal dissipative extensions of symmetric relations on the basis of formula (4.12).

Proposition 4.9. *Let A be a closed symmetric relation with finite deficiency index $\eta_-(A) = n$. Then, for every $\zeta \in \mathbb{C}_+$ fixed, the relation*

$$\hat{A} := A \dotplus \mathbf{N}_\zeta(A^*) \tag{4.23}$$

is the unique maximal dissipative extension of A such that $\dim \mathbf{N}_\zeta(\hat{A}) = n$.

Proof. Fix $\zeta \in \mathbb{C}_+$. Note that (4.12) implies

$$A \cap \mathbf{N}_\zeta(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also, (4.12) and (4.23) yield $\mathsf{N}_\zeta(A^*) = \mathsf{N}_\zeta(\hat{A})$.

Appealing to (3.1), one verifies that $\hat{A}$ is dissipative. Since A is closed and $\dim \mathsf{N}_\zeta(A^*) = \eta_-(A)$ is finite, $\hat{A}$ is closed. Besides, from Corollary 4.8, one has

$$\begin{aligned}\eta_-(\hat{A}) &= \eta_-(A) - \dim[\hat{A}/A] \\ &= \eta_-(A) - \dim \mathsf{N}_\zeta(A^*) = 0\,.\end{aligned}$$

Thus, $\hat{A}$ is a maximal dissipative extension of A.

To prove uniqueness, let L be a maximal dissipative extension of A such that $\mathsf{N}_\zeta(L) = n$. Since $L \subset A^*$, $\mathsf{N}_\zeta(L) \subset \mathsf{N}_\zeta(A^*)$ holds, so taking into account the dimension of the spaces, one concludes that $\mathsf{N}_\zeta(L) = \mathsf{N}_\zeta(A^*)$. Therefore $\hat{A} = A \dotplus \mathsf{N}_\zeta(A^*) \subset L$. To complete the proof, it only remains to recall that $\hat{A}$ is maximal. ☐

Note that $\hat{A}$ is a maximal dissipative, nonselfadjoint relation. The next assertion complements the previous one.

Proposition 4.10. *Let A be a closed symmetric relation with finite deficiency indices (n, n). If $\alpha \in \hat{\rho}(A) \cap \mathbb{R}$, then*

$$L := A \dotplus \mathsf{N}_\alpha(A^*) \tag{4.24}$$

is the unique maximal dissipative extension of A such that $\dim \mathsf{N}_\alpha(L) = n$. *Moreover L is selfadjoint.*

Proof. Since A is symmetric, it follows that $(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \cup \{\alpha\}$ is in a connected component of $\hat{\rho}(A)$. Thus $\dim \mathsf{N}_\alpha(A^*) = n$.

If one assumes that $\begin{pmatrix} f \\ \alpha f \end{pmatrix} \in A$, then $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in (A - \alpha I)^{-1}$. It follows from the fact that $(A - \alpha I)^{-1}$ is an operator that $f = 0$. Hence A and $\mathsf{N}_\alpha(A^*)$ are linearly independent.

Taking into account that $\alpha \in \mathbb{R}$, one verifies that L is symmetric and closed directly from (4.24). Hence, $L \subset A^*$. Using again (4.24), one concludes that $\mathsf{N}_\alpha(L) = \mathsf{N}_\alpha(A^*)$.

As in the proof of Proposition 4.9, one obtains, on the basis of (4.22), that $\eta_\pm(L) = 0$. Uniqueness can also be proved along the lines of the proof of Proposition 4.9. ☐

Similar to the operator case, one can characterize the spectrum of a selfadjoint extension of the symmetric relation A in the intervals intersecting $\hat{\rho}(A)$.

Proposition 4.11. *Let A be a closed symmetric relation with finite deficiency indices (n, n) (see* (3.3)*) and L be a selfadjoint extension of A. If a real interval Δ is in $\hat{\rho}(A)$, then the spectrum of L in Δ only has isolated eigenvalues of multiplicity at most n.*

Proof. Fix $\zeta \in \sigma(L) \cap \Delta$. Since $\zeta \in \hat{\rho}(A)$, $\dim \mathsf{N}_\zeta(A^*) = n$ and, in view of Proposition 2.4, $\operatorname{ran}(A - \zeta I)$ is closed. Now, due to the fact that $L \subset A^*$, one can define

$$K := \operatorname{ran}(L - \zeta I) \ominus \operatorname{ran}(A - \zeta I)\,. \tag{4.25}$$

Thus $K \subset \ker(A^* - \zeta I)$ and

$$\begin{aligned}\dim K &\le \dim[\ker(A^* - \zeta I)] \\ &= \dim \mathsf{N}_\zeta(A^*) = n.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Then by (4.25) and (4.26) $\operatorname{ran}(L - \zeta I)$ is closed. This implies that $\zeta \notin \sigma_c(L)$. Furthermore, by Proposition 3.13, L_L is a selfadjoint operator and then, recurring to Theorem 2.10, one obtains that ζ is an isolated eigenvalue.

Let us compute the multiplicity of the eigenvalue ζ. To this end, observe that $\mathbf{N}_\zeta(L) \subset \mathbf{N}_\zeta(A^*)$. Also,

$$\begin{aligned}\dim[\ker(L - \zeta I)] &= \dim \mathbf{N}_\zeta(L)\\ &\le \dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) = n\,.\end{aligned}$$

□

Definition 4.12. A relation T is said to be regular if its quasi-regular set is the whole complex plane, that is $\hat{\rho}(T) = \mathbb{C}$.

Corollary 4.13. *Let A be a closed, regular, symmetric relation with $\eta_-(A) = n$. Assume that L is a maximal dissipative extension of A.*

(i) If L is selfadjoint, then its spectrum consists of isolated eigenvalues of multiplicity at most n.

(ii) If L is not selfadjoint, then its spectral core consists of eigenvalues of multiplicity at most n.

(iii) If $n = 1$, then every number in $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ is an eigenvalue of one, and only one, realization of L.

Proof. First note that, due to the regularity of A, its deficiency indices are equal. Now, (i) is a consequence of Proposition 4.11 since $\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$. For proving (ii), consider $\zeta \notin \hat{\rho}(L)$ and repeat the argumentation of the proof of Proposition 4.11 to show that $\operatorname{ran}(L - \zeta I)$ is closed so $\zeta \notin \sigma_c(L)$. The multiplicity of any eigenvalue is computed as in the proof of Proposition 4.11. (iii) follows from Propositions 4.9 and 4.10. □

Remark 4.14. Since by , any closed regular symmetric operator is unitarily equivalent to the multiplication operator is a dB space (see Section 5.2), the spectrum of L in the above corollary is discrete even in the nonselfadjoint case (see Theorem 5.3).

5. Applications to nondensely defined operators

5.1. Jacobi operators

Consider the Hilbert space $l_2(\mathbb{N})$, i. e. the space of square-summable sequences. Fix two real sequences $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ and $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ such that $b_k > 0$ for $k \in \mathbb{N}$ and let J be the operator whose matrix representation with respect to the canonical basis $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ of $l_2(\mathbb{N})$ is

$$\begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \tag{5.1}$$

see [3, Sec. 47] for the definition of a matrix representation for an unbounded closed symmetric operator.

Consider the difference equation

$$b_{k-1}\phi_{k-1} + q_k\phi_k + b_k\phi_{k+1} = \zeta\phi_k, \;\; \zeta \in \mathbb{C}\,, \tag{5.2}$$

for $k \in \mathbb{N}$ with $b_0 = 0$. Setting $\phi_1 = 1$, one solves recurrently (5.2) and ϕ_k is a polynomial of degree $k-1$ in ζ, denoted here by $\pi_k(z)$, and known as the $k-1$-th polynomial of the first kind associated to (5.1). Similarly, ϕ_k is a polynomial of degree $k-2$ if one sets $\phi_1 = 0$ and $\phi_2 = 1/b_1$, in (5.2). In this case ϕ_k is the $k-1$-th polynomial of the second kind associated to (5.1) and denoted by $\theta_k(z)$. It holds true that

$$\theta_{k+1}(z) = b_1^{-1}\widetilde{\pi}_k(z)\,, \tag{5.3}$$

where $\widetilde{\pi}_k(z)$ is the polynomial obtained from $\pi_k(z)$ substituting b_j, q_j by b_{j+1}, q_{j+1} $(j = 1, \dots, k-1)$.

Remark 5.1. The symmetric operator J has deficiency indices $(0, 0)$ or $(1, 1)$. The first case is characterized by the divergence of the series $\sum_k |\pi_k(\zeta)|^2$ for all $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, while the second case by the convergence of it (see [2, Chap. IV] and [9, Chap. VII]).

Suppose that J is selfadjoint and consider the linear operator

$$B = J\restriction_{\operatorname{dom} J\ominus\operatorname{span}\{\delta_1\}}\,.$$

The operator B is closed, non-densely defined, and symmetric. By (4.22), B has indices $(1, 1)$.

Proposition 5.2. *The maximal dissipative extensions are in one-to-one correspondence with $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ and they are perturbations of J given by*

$$J(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + \tau\langle\delta_1, f\rangle\delta_1 \end{pmatrix} \;:\; \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in J \right\}, \;\; \tau \neq \infty, \tag{5.4}$$

and

$$J(\infty) = B \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right\}\,, \tag{5.5}$$

where, for $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $J(\tau)$ is selfadjoint. Furthermore,

$$B^* = J \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.6}$$

Proof. Fix $\zeta \in \mathbb{C}_+$, then $\pi(\zeta)$ and $\theta(\zeta)$ do not belong to $l_2(\mathbb{N})$ in view of Remark 5.1 and (5.3). According to [2, Chap.1 Sec. 3] (see also [9, Chap. VII]), there exists a unique function $m(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfying $m(\overline{\zeta}) = \overline{m(\zeta)}$ and $(\operatorname{Im}\zeta)(\operatorname{Im} m(\zeta)) > 0$ such that

$$\psi(\zeta) = \theta(\zeta) + m(\zeta)\pi(\zeta) \in \operatorname{dom} J\,.$$

By a straightforward computation, one obtains

$$J\psi(\zeta) = \delta_1 + \zeta\psi(\zeta) \tag{5.7}$$

so that, for every $f \in \operatorname{dom} B$, one has

$$\begin{aligned}\langle f, \zeta\psi(\zeta)\rangle &= \langle f, \delta_1 + \zeta\psi(\zeta)\rangle = \langle f, J\psi(\zeta)\rangle \\ &= \langle Jf, \psi(\zeta)\rangle = \langle Bf, \psi(\zeta)\rangle\,,\end{aligned}$$

which means that $\begin{pmatrix}\psi(\zeta)\\ \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix} \in B^*$. Therefore

$$\mathbf{N}_\zeta(B^*) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\psi(\zeta)\\ \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right\} \quad\text{and}\quad \mathbf{N}_{\bar\zeta}(B^*) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\psi(\bar\zeta)\\ \bar\zeta\psi(\bar\zeta)\end{pmatrix}\right\}. \tag{5.8}$$

since $\eta_\pm(B) = 1$. By Theorem 4.5, it holds that

$$B^* = B \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\psi(\bar\zeta)\\ \bar\zeta\psi(\bar\zeta)\end{pmatrix}\right\} \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\psi(\zeta)\\ \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right\}. \tag{5.9}$$

Now, since $\operatorname{dom} B$ as well as $\psi(\zeta)$ and $\psi(\bar\zeta)$ belong to $\operatorname{dom} J$, it follows that $\operatorname{dom} B^* \subset \operatorname{dom} J$. Hence J and B^* have the same domain. Observe that J and $\{0\} \oplus \operatorname{span}\{\delta_1\}$ are linearly independent so that $J \dotplus Z \subset B^*$. On the other hand, (5.9) implies that there exist $f \in \operatorname{dom} B$ and a, $b \in \mathbb{C}$ such that

$$\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f + a\psi(\zeta) + b\psi(\bar\zeta)\\ Bf + a\zeta\psi(\zeta) + b\bar\zeta\psi(\bar\zeta)\end{pmatrix}$$

for every $\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} \in B^*$. Then by (5.7)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}f + a\psi(\zeta) + b\psi(\bar\zeta)\\ Jf + a(\delta_1 + \zeta\psi(\zeta)) + b(\delta_1 + \bar\zeta\psi(\bar\zeta))\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -(a+b)\delta_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}f + a\psi(\zeta) + b\psi(\bar\zeta)\\ J(f + a\psi(\zeta) + b\psi(\bar\zeta))\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -(a+b)\delta_1\end{pmatrix} \in J \dotplus Z.\end{aligned}$$

We have proven 5.6. Now we turn to the proof of (5.4) and (5.5). Note that these equations yield closed dissipative extensions of B which are therefore maximal. Theorem 4.7 asserts that every maximal dissipative extension $J(\beta)$ of B is given by

$$J(\beta) = B \dotplus (\mathbf{V}_\beta - \mathbf{I})\mathbf{N}_\zeta(B^*), \tag{5.10}$$

with $\mathbf{V}_\beta : \mathbf{N}_\zeta(B^*) \to \mathbf{N}_{\bar\zeta}(B^*)$ being a closed contraction. On the basis of (5.8), one concludes that all the contraction mappings are in one-to-one correspondence with $\beta \in \mathbb{T} \cup \mathbb{T}_i$ given by

$$\mathbf{V}_\beta\left(\begin{pmatrix}\psi(\zeta)\\ \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right) = \beta\begin{pmatrix}\psi(\bar\zeta)\\ \bar\zeta\psi(\bar\zeta)\end{pmatrix},$$

whence, by means of (5.10), one arrives at

$$J(\beta) = B \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}\beta\psi(\bar\zeta) - \psi(\zeta)\\ \bar\zeta\beta\psi(\bar\zeta) - \zeta\psi(\zeta)\end{pmatrix}\right\}. \tag{5.11}$$

The last equality implies that $\operatorname{dom} J(\beta) \subset \operatorname{dom} J$. Take the Möbius transformation

$$\beta_\tau = \frac{1+\tau m(\zeta)}{1+\tau m(\overline{\zeta})}.$$

Since $m(\zeta) \in \mathbb{C}_+$, one has that β_τ maps $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ onto $\mathbb{T} \cup \mathbb{T}_i$, with $\beta_\infty = m(\zeta)/m(\overline{\zeta})$. Then for $\tau \neq \infty$ it follows from (5.11) that, for any $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in J(\beta_\tau)$, there exists $f \in \operatorname{dom} B$ such that

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f + \alpha(\beta_\tau \psi(\overline{\zeta}) - \psi(\zeta)) \\ Bf + \alpha(\beta_\tau \overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta}) - \zeta\psi(\zeta)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f + \alpha(\beta_\tau \psi(\overline{\zeta}) - \psi(\zeta)) \\ Jf + \alpha[\beta_\tau(\delta_1 + \overline{\zeta}\psi(\overline{\zeta})) - (\delta_1 + \zeta\psi(\zeta))] + \alpha(1-\beta_\tau)\delta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f + \alpha(\beta_\tau \psi(\overline{\zeta}) - \psi(\zeta)) \\ J[f + \alpha(\beta_\tau \psi(\overline{\zeta}) - \psi(\zeta))] + \alpha(1-\beta_\tau)\delta_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Note that $\psi_1(\zeta) = m(\zeta)$, so

$$\begin{aligned}
\tau\langle \delta_1, h\rangle &= \tau\langle \delta_1, f + \alpha(\beta_\tau \psi(\overline{\zeta}) - \psi(\zeta))\rangle \\
&= \alpha\tau(\beta_\tau m(\overline{\zeta}) - m(\zeta)) \\
&= \alpha\tau\left(\frac{1+\tau m(\zeta)}{1+\tau m(\overline{\zeta})} m(\overline{\zeta}) - m(\zeta)\right) \\
&= \alpha\left(1 - \frac{1+\tau m(\zeta)}{1+\tau m(\overline{\zeta})}\right) = \alpha(1-\beta_\tau).
\end{aligned}$$

Thus (5.12) yields $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ Jh + \tau\langle \delta_1, h\rangle\delta_1 \end{pmatrix} \subset J(\tau)$. Due to maximality it follows that $J(\beta_\tau) = J(\tau)$.

For $\beta_\infty = m(\zeta)/m(\overline{\zeta})$. the expression $\beta_\infty \psi_1(\overline{\zeta}) - \psi_1(\zeta)$ vanishes. Thus, by (5.11), it follows that $\operatorname{dom} J(\beta_\infty) \subset \operatorname{dom} B$. Thence, according to (5.12), for every $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in J(\beta_\infty)$,

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ Bh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha(1-\beta_\tau)\delta_1 \end{pmatrix} \in B \dotplus Z = J(\infty).$$

Therefore $J(\beta_\infty) = J(\infty)$. $\square$

From what has been said, all the maximal dissipative extensions (5.4) of B have the the representation

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} q_1+\tau & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

5.2. Operator of multiplication in dB spaces

There are two essentially different ways of defining a de Branges space (dB space) [15, Chap. 2]. The following one has an axiomatic structure:

A nontrivial Hilbert space of entire functions $\mathcal{B}$ is said to be a dB space when for every function $f(z)$ in the space, the following holds:

(A1) For every $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, the linear functional $f(\cdot) \mapsto f(w)$ is continuous;

(A2) for every non-real zero w of $f(z)$, the function $f(z)(z-\overline{w})(z-w)^{-1}$ belongs to $\mathcal{B}$ and has the same norm as $f(z)$;

(A3) the function $f^{\#}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ also belongs to $\mathcal{B}$ and has the same norm as $f(z)$.

Due to the polarization identity, (A3) implies

$$\langle f(\zeta), g(\zeta)\rangle = \langle g^{\#}(\zeta), f^{\#}(\zeta)\rangle \tag{5.13}$$

for every $f(z),\ g(z) \in \mathcal{B}$.

By the Riesz lemma, (A1) is equivalent to the existence of a unique reproducing kernel $k(z,w)$ that belongs to $\mathcal{B}$ for every $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ and satisfies

$$\langle k(\zeta,w), f(\zeta)\rangle = f(w), \tag{5.14}$$

for every $f(z) \in \mathcal{B}$. Besides, $k(w,w) = \langle k(\zeta,w), k(\zeta,w)\rangle > 0$ as a consequence of (A2) (see the proof of [15, Thm. 23]). Note also that $\overline{k(z,w)} = k(w,z)$. Finally, in view of (5.13), for every $f(z) \in \mathcal{B}$,

$$\langle k^{\#}(\zeta,w), f(\zeta)\rangle = \overline{\langle k(\zeta,w), f^{\#}(\zeta)\rangle} = \overline{f^{\#}(w)} = \langle k(\zeta,\overline{w}), f(\zeta)\rangle\,,$$

whence $\overline{k(\overline{z},w)} = k(z,\overline{w})$.

The operator of multiplication by the independent variable in $\mathcal{B}$ is defined by the relation

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} f(z) \\ zf(z) \end{pmatrix} \mid f(z),\ zf(z) \in \mathcal{B} \right\}. \tag{5.15}$$

Clearly it is an operator and [26, Prop. 4.2, Cors. 4.3 and 4.7] show that S is closed, regular, symmetric, with deficiency indices $(1,1)$, and not necessarily densely defined.

Fix $w \in \mathbb{C}_+$. It follows from (5.14) that for every $\begin{pmatrix} f(z) \\ (z-w)f(z) \end{pmatrix} \in S - wI$

$$\langle k(\zeta,w), (\zeta-w)f(\zeta)\rangle = (w-w)f(w) = 0,$$

which implies that $k(z,w) \in \ker(S^* - \overline{w}I) = \operatorname{dom}\mathbf{N}_{\overline{w}}(S^*)$. Since $\eta_\pm(S) = 1$, one has

$$\mathbf{N}_{\overline{w}}(S^*) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,w) \\ \overline{w}k(z,w) \end{pmatrix} \right\};\ \mathbf{N}_{w}(S^*) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,\overline{w}) \\ wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.16}$$

Equation (4.12) now reads

$$S^* = S \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,w) \\ \overline{w}k(z,w) \end{pmatrix} \right\} \dotplus \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} k(z,\overline{w}) \\ wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.17}$$

Furthermore by Theorem 4.7, every maximal dissipative extension S_τ of S is given by

$$S_\tau = S \dotplus (\mathbf{V}_\tau - I)\mathbf{N}_w(S^*) \tag{5.18}$$

with $\mathbf{V}_\tau : \mathbf{N}_w(S^*) \to \mathbf{N}_{\overline{w}}(S^*)$ being a closed contraction given by

$$\mathbf{V}_\tau\left(\begin{pmatrix} k(z,\overline{w}) \\ wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix}\right) = \tau \begin{pmatrix} k(z,w) \\ \overline{w}k(z,w) \end{pmatrix},$$

where $|\tau| \le 1$. Note that the form of $\mathbf{V}_\tau$ has been deduced from (5.16). Whence, by (5.18), one has

$$S_\tau = S \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \tau k(z,w) - k(z,\overline{w}) \\ \tau\overline{w}k(z,w) - wk(z,\overline{w}) \end{pmatrix}\right\}. \tag{5.19}$$

Notice that for any $\tau \in \mathbb{C}$ such that $|\tau| \le 1$, S_τ has the spectral properties given in Corollary 4.13. Moreover, for $|\tau| = 1$, $\mathbf{V}_\tau$ is isometric and, as a consequence of Theorem 4.7, S_τ is a selfadjoint extension of S.

The other definition of dB space requires the Hardy space

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+) := \left\{ f(z) \text{ holomorphic in } \mathbb{C}_+ \;:\; \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 < \infty \right\}$$

as well as an Hermite-Biehler function, which is an entire function $e(z)$ satisfying

$$|e(z)| > |e^{\#}(z)|, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

whence it follows that $e(z)$ is a function without zeros in the half-plane $\mathbb{C}_+$.

The dB space associated with an Hermite-Biehler function $e(z)$ [37, Sec. 2] is the linear manifold

$$\mathcal{B}(e) := \left\{ f(z) \text{ entire } : \frac{f(z)}{e(z)}, \ \frac{f^{\#}(z)}{e(z)} \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}_+) \right\},$$

equipped with the inner product

$$\langle f(t), g(t) \rangle_e := \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{f(t)}g(t)}{|e(t)|^2} dt.$$

Without loss of generality, let us assume that $e(z)$ not only has no zeros in $\mathbb{C}_+$, but also in $\mathbb{R}$.

In [26, Sec. 5] (see also [15, Sec. 19]), it is shown that, for any $w \in \mathbb{C}$, the expression

$$k(z,w) = \frac{e^{\#}(z)e(\overline{w}) - e(z)e^{\#}(\overline{w})}{2\pi i(z - \overline{w})} \tag{5.20}$$

is the reproducing kernel of $\mathcal{B}(e)$. Moreover, since $e(z)$ does not have zeros on $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, $k(z,w)$ has no zeros in $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ for every $w \in \mathbb{C}_+$.

For a given dB space $\mathcal{B}$ with reproducing kernel $k(z,w)$, if one defines

$$e_{w_0}(z) := \frac{\pi(z - \overline{w}_0)}{(\operatorname{Im} w_0)k(w_0,w_0)} k(z,w_0), \tag{5.21}$$

then $e_{w_0}(z)$ is an Hermite-Biehler function [39, Sec. 2] and $\mathcal{B} = \mathcal{B}(e_{w_0})$ isometrically [40, Thm. 7]. The reproducing kernel of $\mathcal{B}(e_{w_0})$ can be computed using (5.20):

$$\begin{aligned} k_{w_0}(z, w_0) &= \frac{e^{\#}_{w_0}(z) e_{w_0}(\overline{w}_0) - e_{w_0}(z) e^{\#}_{w_0}(\overline{w}_0)}{2\pi i (z - \overline{w}_0)} \\ &= \frac{-e_{w_0}(z)}{2\pi i (z - \overline{w}_0)} \left(\frac{\pi(\overline{w}_0 - w_0)}{(\operatorname{Im} w_0) \tilde{k}(w_0, w_0)} \tilde{k}(w_0, w_0) \right) = \frac{e_{w_0}(z)}{z - \overline{w}_0} . \end{aligned}$$

Therefore

$$e_{w_0}(z) = (z - \overline{w}_0) k_{w_0}(z, w_0). \tag{5.22}$$

The set of associated functions $\operatorname{Assoc} \mathcal{B}$ of a dB space $\mathcal{B}$ is given by

$$\operatorname{Assoc} \mathcal{B} = \mathcal{B} + z\mathcal{B} .$$

For a $\tau \in \mathbb{C}$, define

$$\varphi_\tau(z) := \tau e(z) - e^{\#}(z) . \tag{5.23}$$

These entire functions belongs to $\operatorname{Assoc} \mathcal{B}$ and determine the maximal dissipative extensions of the multiplication operator.

Theorem 5.3. *Fix $w \in \mathbb{C}_+$ and consider the dB space $\mathcal{B}(e_w)$ with $e_w(z)$ given in* (5.21)*. All the maximal dissipative extension of the operator of multiplication S (see* (5.15)*) are in one-to-one correspondence with the set of entire functions $\varphi_\tau(z)$, $|\tau| \le 1$. These maximal dissipative extensions are given by*

$$S_\tau = \left\{ \begin{pmatrix} h_\alpha(z) \\ z h_\alpha(z) - \alpha \varphi_\tau(z) \end{pmatrix} \ : \ \begin{array}{c} h_\alpha(z) = f(z) + \alpha(\tau k_w(z, w) - k_w(z, \overline{w})), \\ f(z) \in \operatorname{dom} S \end{array} \right\} . \tag{5.24}$$

Moreover, $\sigma(S_\tau) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \ : \ \varphi_\tau(\lambda) = 0\}$. The eigenfunction corresponding to $\lambda \in \sigma(S_\tau)$ is $h^{(\tau)}(z) = \frac{\varphi_\tau(z)}{z - \lambda}$.

Proof. All dissipative extensions S_τ are given by (5.19). If $\begin{pmatrix} h(z) \\ g(z) \end{pmatrix} \in S_\tau$, then there exist $\begin{pmatrix} f(z) \\ z f(z) \end{pmatrix} \in S$ and $\alpha \in \mathbb{C}$ such that

$$\begin{pmatrix} h(z) \\ g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z) + \alpha(\tau k_w(z, w) - k_w(z, \overline{w})) \\ z f(z) + \alpha(\tau \overline{w} k_w(z, w) - w k_w(z, \overline{w}) \end{pmatrix} .$$

It follows from (5.22) and (5.23) that

$$\begin{aligned} g(z) &= z h(z) - \alpha[\tau(z - \overline{w}) k_w(z, w) - (z - w) k_w(z, \overline{w})] \\ &= z h(z) - \alpha[\tau e_w(z) - e^{\#}_w(z)] \\ &= z h(z) - \alpha \varphi_\tau(z), \end{aligned}$$

whence (5.24) follows.

By Corollary 4.13, for every $\lambda \in \hat{\sigma}(S_\tau)$ (which is a subset of $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ by Theorem 3.1), $\mathbf{N}_\lambda(S_\tau)$ is one-dimensional. Thus, in view of (5.24), $\begin{pmatrix} h_\alpha(z) \\ \lambda h_\alpha(z) \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_\lambda(S_\tau)$ with $\alpha \neq 0$ and

$$\lambda h_\alpha(z) = z h_\alpha(z) - \alpha \varphi_\tau(z), \tag{5.25}$$

so $\varphi_\tau(\lambda) = 0$.

On the other hand, if $\lambda \notin \sigma(S_\tau)$, then $(S_\tau - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Thus $\begin{pmatrix} k_w(z,w) \\ g(z) \end{pmatrix} \in (S_\tau - \lambda I)^{-1}$ which implies $\begin{pmatrix} g(z) \\ k_w(z,w) + \lambda g(z) \end{pmatrix} \in S_\tau$. Using again (5.24), one arrives at

$$k_w(z,w) + \lambda g(z) = z g(z) - \alpha \varphi_\tau(z)\,.$$

Therefore, for $z = \lambda$, $k_w(\lambda, w) = -\alpha \varphi_\tau(\lambda)$. Since $k_w(z,w)$ has no zeros in $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$, one concludes that $\lambda \notin \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \,:\, \varphi_\tau(\lambda) = 0\}$.

We have proven that

$$\hat{\sigma}(S_\tau) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \,:\, \varphi_\tau(\lambda) = 0\} \subset \sigma(S_\tau)\,.$$

Since the zeros of a nonzero entire function is a discrete set, the spectral core is a discrete set. This implies that $\rho(S_\tau) = \hat{\rho}(S_\tau)$ because of the maximality of S_τ.

The fact that $h^{(\tau)}(z)$ is an eigenfunction of S_τ corresponding to the eigenvalue λ is a consequence of (5.25). □

References

[1] K. R. Acharya. Self-adjoint extension and spectral theory of a linear relation in a Hilbert space. *ISRN Math. Anal.*, pages Art. ID 471640, 5, 2014.

[2] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[3] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[4] R. Arens. Operational calculus of linear relations. *Pacific J. Math.*, 11:9–23, 1961.

[5] T. Y. Azizov, J. Behrndt, P. Jonas, and C. Trunk. Compact and finite rank perturbations of closed linear operators and relations in Hilbert spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 63(2):151–163, 2009.

[6] T. Y. Azizov, A. Dijksma, and G. Wanjala. Compressions of maximal dissipative and self-adjoint linear relations and of dilations. *Linear Algebra Appl.*, 439(3):771–792, 2013.

[7] J. Behrndt and M. Langer. Boundary value problems for elliptic partial differential operators on bounded domains. *J. Funct. Anal.*, 243(2):536–565, 2007.

[8] J. Behrndt and M. Langer. Elliptic operators, Dirichlet-to-Neumann maps and quasi boundary triples. In *Operator methods for boundary value problems*, volume 404 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 121–160. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[9] J. M. Berezans′kiĭ. *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators.* Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[10] M. S. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[11] E. A. Coddington. *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134.

[12] E. A. Coddington. Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79:712–715, 1973.

[13] R. Cross. *Multivalued linear operators*, volume 213 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[14] R. Cross, A. Favini, and Y. Yakubov. Perturbation results for multivalued linear operators. In *Parabolic problems*, volume 80 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 111–130. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[15] L. de Branges. *Hilbert spaces of entire functions*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

[16] V. Derkach, S. Hassi, M. Malamud, and H. de Snoo. Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operators. *Russ. J. Math. Phys.*, 16(1):17–60, 2009.

[17] V. A. Derkach and M. M. Malamud. Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps. *J. Funct. Anal.*, 95(1):1–95, 1991.

[18] V. A. Derkach and M. M. Malamud. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem. *J. Math. Sci.*, 73(2):141–242, 1995. Analysis. 3.

[19] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo. Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. *Pacific J. Math.*, 54:71–100, 1974.

[20] M. Fernandez Miranda and J.-P. Labrousse. The Cayley transform of linear relations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(2):493–499, 2005.

[21] V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk. *Boundary value problems for operator differential equations*, volume 48 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated and revised from the 1984 Russian original.

[22] S. Hassi and H. de Snoo. One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 22(1):123–164, 1997.

[23] S. Hassi, H. De Snoo, and H. Winkler. Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems. *Integral Equations Operator Theory*, 36(4):445–479, 2000.

[24] S. Hassi, C. Remling, and H. de Snoo. Subordinate solutions and spectral measures of canonical systems. *Integral Equations Operator Theory*, 37(1):48–63, 2000.

[25] S. Hassi, Z. Sebestyén, H. S. V. de Snoo, and F. H. Szafraniec. A canonical decomposition for linear operators and linear relations. *Acta Math. Hungar.*, 115(4):281–307, 2007.

[26] M. Kaltenbäck and H. Woracek. Pontryagin spaces of entire functions. I. *Integral Equations Operator Theory*, 33(1):34–97, 1999.

[27] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.

[28] M. A. Krasnosel′ skiĭ. On the extension of Hermitian operators with a nondense domain of definition. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 59:13–16, 1948.

[29] M. G. Krein and G. K. Langer. The defect subspaces and generalized resolvents of a Hermitian operator in the space Π_κ. *Funkcional. Anal. i Priložen*, 5(2):59–71, 1971.

[30] H. Langer and B. Textorius. On generalized resolvents and Q-functions of symmetric linear relations (subspaces) in Hilbert space. *Pacific J. Math.*, 72(1):135–165, 1977.

[31] S. N. Naboko. Absolutely continuous spectrum of a nondissipative operator, and a functional model. I. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 65:90–102, 204–205, 1976. Investigations on linear operators and the theory of functions, VII.

[32] S. N. Naboko. Absolutely continuous spectrum of a nondissipative operator, and a functional model. II. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 73:118–135, 232–233 (1978), 1977. Investigations on linear operators and the theory of functions, VIII.

[33] S. N. Naboko. Functional model of perturbation theory and its applications to scattering theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 147:86–114, 203, 1980. Boundary value problems of mathematical physics, 10.

[34] B. S. Pavlov. Conditions for separation of the spectral components of a dissipative operator. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39:123–148, 240, 1975.

[35] B. S. Pavlov. Selfadjoint dilation of a dissipative Schrödinger operator, and expansion in eigenfunctions. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 9(2):87–88, 1975.

[36] R. S. Phillips. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90:193–254, 1959.

[37] C. Remling. Schrödinger operators and de Branges spaces. *J. Funct. Anal.*, 196(2):323–394, 2002.

[38] K. Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, volume 265 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2012.

[39] L. O. Silva and J. H. Toloza. The class of n-entire operators. *J. Phys. A*, 46(2):025202, 23, 2013.

[40] L. O. Silva and J. H. Toloza. De Branges spaces and Kreĭn's theory of entire operators. In *Operator theory. With 51 figures and 2 tables. In 2 volumes*, pages 549–580. Basel: Springer, 2015.

[41] B. Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, 15:87–92, 1953.

[42] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. Universitext. Springer, New York, second enlarged edition, 2010.

[43] J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Ann.*, 102(1):49–131, 1930.

[44] J. von Neumann. *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*. Annals of Mathematics Studies, no. 22. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950.

[45] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.

[46] D. L. Wilcox. Essential spectra of linear relations. *Linear Algebra Appl.*, 462:110–125, 2014.

The canonical decomposition of dissipative linear relations

Josué I. Rios-Cangas
Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
jottsmok@gmail.com

Abstract

In this note, two decompositions for dissipative linear relations are given on the basis of Sz. Nagy-Foiaş-Langer and the von Neumann-Wold decompositions. The obtained decompositions permit the separation of the selfadjoint and completely nonselfadjoint parts of a dissipative relation and some refinements of this splitting up. The decomposition is realized by transforming invariant subspaces for contractions into their corresponding parts for dissipative relations by means of the Z transform.

Mathematics Subject Classification(2010): 47A06, 47B44, 47B25, 47A45, 47A15.
Keywords: Linear relations; Dissipative relations; Invariant and reducing subspaces; Canonical decompositions.

1. Introduction

This paper deals with dissipative linear relations in a Hilbert space $\mathcal{H}$. We recall that a linear relation is a linear set of $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ which generalize the notion of a linear operator when it is identified with its graph (sometimes a linear relation is refer to as a multivalued linear operator *cf.* [4]). In fact, a linear relation is an operator whenever its multivalued part is trivial.

The theory of relations is of practical importance in spectral theory, extension theory of operators and canonical systems.

The operator T is in the class of linear dissipative operators when

$$\operatorname{Im}\langle f, Tf\rangle \geq 0\,, \quad f \in \operatorname{dom} T\,.$$

Dissipative operators are important in applications to problems arising in mathematical physics since dissipative operators are connected with dissipative systems *i. e.* systems in which the energy is in general nonconstant and nonincreasing in time. A particular application is related to dissipative hyperbolic systems [10].

The theory of dissipative operators has its roots in the theory of contractions, *i. e.* linear operators T such that $\|T\| \leq 1$ (see the seminal work [14] and [15] for a exhaustive exposition). Contractions and dissipative operators are related via the Cayley transform [15, Chap. 4, Sec. 4]. The class of contractions has been amply studied and is a well-understood class of operators. Some generalizations of the class is found in [3, 6]. A motivation for studying contractions stems from the invariant subspace problem [8, 11, 15].

The present work is concerned with a particular feature of contractions, namely to the fact that they admit useful decompositions. We focus our attention on two kinds of decompositions, the Sz. Nagy-Foiaş-Langer and the von Neumann-Wold decompositions [9, 15] (see [13] for a more general setting). Our goal is to decompose dissipative relations and, in particular, to isolate the selfadjoint part of any dissipative relation. This is done by means of transforming invariant subspaces for contractions.

The paper is organized as follows. In Section 2, we first review some of the standard definitions on linear relations. Afterwards, we turn to the problem of invariant and reducing subspaces for linear relations. Here, we show that linear relations of the form $\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$, where $\mathcal{K}$ is a linear set in $\mathcal{H}$, are invariant under the Z transform (see Remark 2). A consequence of this is that the Z transform preserve reducing subspaces for any linear relation (See Theorem 2.2). Section 3 deals with the general theory of contractions, in particular, the Sz. Nagy-Foiaş-Langer and the von Neumann-Wold decompositions. In this section, the Sz. Nagy-Foiaş-Langer decomposition is obtained for any closed contraction (see Theorem 3.1). These results, together with the theory of reducing subspaces for linear relations developed in the preceding section, are combined with the theory of the Z transform to obtain the decomposition of any closed dissipative relation into its selfadjoint part and its completely nonselfadjoint part (Theorem 3.3). A particular realization of this is the decomposition of any closed maximal symmetric relation in its selfadjoint part and its maximal elementary part (Theorem 3.4).

2. Invariant and reducing subspaces for linear relations

Let $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be a Hilbert space with inner product antilinear in its left argument. Consider $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ as the orthogonal sum of two copies of the Hilbert space $\mathcal{H}$ *cf.* [2, Sec. 2.3]. Throughout this work, a linear relation (or simply relation) T is a linear set in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ with

$$\operatorname{dom} T := \left\{f\in\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\} \quad \operatorname{ran} T := \left\{g\in\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}$$
$$\ker T := \left\{f\in\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}\in T\right\} \quad \operatorname{mul} T := \left\{g\in\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} 0\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}.$$

For two relations T and S, and $\zeta\in\mathbb{C}$, we consider

$$T+S := \left\{\begin{pmatrix} f\\ g+h\end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T,\ \begin{pmatrix} f\\ h\end{pmatrix}\in S\right\} \quad \zeta T := \left\{\begin{pmatrix} f\\ \zeta g\end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}$$
$$ST := \left\{\begin{pmatrix} f\\ k\end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T,\ \begin{pmatrix} g\\ k\end{pmatrix}\in S\right\} \quad T^{-1} := \left\{\begin{pmatrix} g\\ f\end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}.$$

The adjoint of a relation T is defined by

$$T^* := \left\{\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \langle k,f\rangle = \langle h,g\rangle,\ \ \forall\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\},$$

which turns out to be a closed relation with the following properties:

$$\begin{aligned} T^* &= (-T^{-1})^\perp, & S\subset T &\Rightarrow T^*\subset S^*,\\ T^{**} &= T, & (\alpha T)^* &= \overline{\alpha}T^*,\ \text{ with } \alpha\neq 0,\\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*, & \ker T^* &= (\operatorname{ran} T)^\perp. \end{aligned} \tag{2.1}$$

For a relation T in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$ a linear set in $\mathcal{H}$, we denote

$$T_{\mathcal{K}} := T\cap(\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}), \tag{2.2}$$

where $\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ is the orthogonal sum of two copies of $\mathcal{K}$. It is clear that $T_{\mathcal{H}} = T$ and $T_{\{0\}} = \{0\}\oplus\{0\}$.

Definition 1. We say that a subspace $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ is invariant for a relation T (we write T-invariant) when the following conditions are true:

(i) $\operatorname{dom} T = (\operatorname{dom} T\cap\mathcal{K})\oplus(\operatorname{dom} T\cap\mathcal{K}^\perp)$.

(ii) $\operatorname{mul} T = (\operatorname{mul} T \cap \mathcal{K}) \oplus (\operatorname{mul} T \cap \mathcal{K}^{\perp})$.

(iii) $\operatorname{dom} T_{\mathcal{K}} = \operatorname{dom} T \cap \mathcal{K}$.

Note that $\mathcal{H}$ and $\{0\}$ are invariant for any linear relation.

Definition 2. We say that a subspace $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ reduces a relation T if

$$T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}}$$

Remark 1. For a relation T and a subspace $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, if there exist relations $T_1 \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, $T_2 \subset \mathcal{K}^{\perp} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$ such that

$$T = T_1 \oplus T_2 \,,$$

then one has that $\mathcal{K}$ reduces T and $T_1 = T_{\mathcal{K}}$, $T_2 = T_{\mathcal{K}^{\perp}}$.

We see at once that $\mathcal{K}$ reduces T if and only if $\mathcal{K}^{\perp}$ reduces T. Moreover, if $\mathcal{K}$ reduces T, then

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T &= \operatorname{dom} T_{\mathcal{K}} \oplus \operatorname{dom} T_{\mathcal{K}^{\perp}} \,, \quad & \ker T &= \ker T_{\mathcal{K}} \oplus \ker T_{\mathcal{K}^{\perp}} \,, \\ \operatorname{ran} T &= \operatorname{ran} T_{\mathcal{K}} \oplus \operatorname{ran} T_{\mathcal{K}^{\perp}} \,, \quad & \operatorname{mul} T &= \operatorname{mul} T_{\mathcal{K}} \oplus \operatorname{mul} T_{\mathcal{K}^{\perp}} \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Proposition 2.1. *A subspace $\mathcal{K}$ reduces T if and only if $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}^{\perp}$ are T-invariant.*

Proof. Suppose that $\mathcal{K}$ reduces T. By verifying the inclusions in both directions, one arrives at

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T_{\mathcal{K}} &= \operatorname{dom} T \cap \mathcal{K} \,, \quad & \operatorname{ran} T_{\mathcal{K}} &= \operatorname{ran} T \cap \mathcal{K} \,, \\ \ker T_{\mathcal{K}} &= \ker T \cap \mathcal{K} \,, \quad & \operatorname{mul} T_{\mathcal{K}} &= \operatorname{mul} T \cap \mathcal{K} \,. \end{aligned}$$

The above equalities also hold when $\mathcal{K}$ is substituted by $\mathcal{K}^{\perp}$, since $\mathcal{K}^{\perp}$ also reduces T. Therefore, by (2.3), one has that $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}^{\perp}$ are T-invariant.

We proceed with the proof of the converse assertion which follows once we show that $T \subset T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^{\perp}}$.

Let $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$, the conditions for $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}^{\perp}$ to be T-invariant imply that there are

$$\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}}; \quad \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}^{\perp}} \,, \tag{2.4}$$

such that $f = a+b$. In turn this implies that $\begin{pmatrix} f \\ s+t \end{pmatrix} \in T$ which yields $\begin{pmatrix} 0 \\ g-(s+t) \end{pmatrix} \in T$. It follows from the second condition for $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}^{\perp}$ to be T-invariant that there are

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}} \,; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}^{\perp}}, \tag{2.5}$$

such that $g - (s + t) = h + k$. Hence, (2.4) and (2.5) imply

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ s + h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ t + k \end{pmatrix} \in T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp} \,. \tag{2.6}$$

□

Let us note that if $\mathcal{K}$ reduces T, then a simple computation shows that

$$\overline{T} = \overline{T}_{\mathcal{K}} \oplus \overline{T}_{\mathcal{K}^\perp} \,.$$

Furthermore, T is closed if and only if $T_{\mathcal{K}}$ and $T_{\mathcal{K}^\perp}$ are closed.

Theorem 2.1. *If $\mathcal{K}$ reduces T, then $\mathcal{K}$ reduces T^* and the following holds*

$$(T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp})^* = T^*_{\mathcal{K}} \oplus T^*_{\mathcal{K}^\perp} \,. \tag{2.7}$$

Proof. Given that $\mathcal{K}$ reduces T, one has $T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp}$. Note that

$$-(\overline{T}_{\mathcal{K}})^{-1} \oplus (T_{\mathcal{K}})^* = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}; \quad -(\overline{T}_{\mathcal{K}^\perp})^{-1} \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^* = \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp \,.$$

Then

$$\begin{aligned} -(\overline{T})^{-1} \oplus [(T_{\mathcal{K}})^* \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*] &= -[\overline{T}_{\mathcal{K}} \oplus \overline{T}_{\mathcal{K}^\perp}]^{-1} \oplus [(T_{\mathcal{K}})^* \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*] \\ &= [-(\overline{T}_{\mathcal{K}})^{-1} \oplus (T_{\mathcal{K}})^*] \oplus [-(\overline{T}_{\mathcal{K}^\perp})^{-1} \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^*] \\ &= (\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}) \oplus (\mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp) \\ &= \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = -(\overline{T})^{-1} \oplus T^* \,. \end{aligned}$$

From this, one obtains

$$T^* = (T_{\mathcal{K}})^* \oplus (T_{\mathcal{K}^\perp})^* \,. \tag{2.8}$$

Thus, since $(T_{\mathcal{K}})^* \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ and $(T_{\mathcal{K}^\perp})^* \subset \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp$, the subspace $\mathcal{K}$ reduces T^* and

$$T^*_{\mathcal{K}} = (T_{\mathcal{K}})^*; \quad T^*_{\mathcal{K}^\perp} = (T_{\mathcal{K}^\perp})^* \,. \tag{2.9}$$

Inserting (2.9) into (2.8), one arrives at (2.7). □

Let us introduce the following transform which is an alternative to the Cayley transform for linear relations (*cf.* [7]).

Definition 3. For a relation T and $\zeta \in \mathbb{C}$, define the Z transform of T by

$$\mathsf{Z}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} g - \overline{\zeta} f \\ \overline{\zeta} g - |\zeta|^2 f \end{pmatrix} \ : \ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} .$$

This is a linear relation which satisfies

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \mathsf{Z}_\zeta(T) &= \operatorname{ran}(T - \overline{\zeta} I)\,, \quad & \operatorname{ran} \mathsf{Z}_\zeta(T) &= \operatorname{ran}(T - \zeta I)\,, \\ \operatorname{mul} \mathsf{Z}_\zeta(T) &= \ker(T - \overline{\zeta} I)\,, \quad & \ker \mathsf{Z}_\zeta(T) &= \ker(T - \zeta I)\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

The Z transform has the following properties (see [5, Lems. 2.6, 2.7] and [7, Props. 3.6, 3.7]). For any $\zeta \in \mathbb{C}$:

(i) $\mathsf{Z}_\zeta(\mathsf{Z}_\zeta(T)) = T$.

(ii) $\mathsf{Z}_\zeta(T) \subset \mathsf{Z}_\zeta(S) \;\Leftrightarrow\; T \subset S$.

(iii) $\mathsf{Z}_{-\zeta}(T) = -\mathsf{Z}_\zeta(-T)$.

(iv) $\mathsf{Z}_\zeta(T^{-1}) = \mathsf{Z}_{\overline{\zeta}}(T) = (\mathsf{Z}_\zeta(T))^{-1}$, if $|z| = 1$.

For any $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

(v) $\mathsf{Z}_\zeta(T \dotplus S) = \mathsf{Z}_\zeta(T) \dotplus \mathsf{Z}_\zeta(S)$.

(vi) $\mathsf{Z}_{\pm i}(T \oplus S) = \mathsf{Z}_{\pm i}(T) \oplus \mathsf{Z}_{\pm i}(S)$.

(vii) $\mathsf{Z}_\zeta(T^*) = (\mathsf{Z}_{\overline{\zeta}}(T))^*$.

(viii) $\overline{\mathsf{Z}_\zeta(T)} = \mathsf{Z}_\zeta(\overline{T})$.

Remark 2. For any linear set $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, it follows that

$$\mathsf{Z}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \quad (\zeta \in \mathbb{C})\,. \tag{2.11}$$

Indeed, one can check that $\mathsf{Z}_\zeta(\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ and the other inclusion follows from property (i) of the Z transform.

Theorem 2.2. *A subspace $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ reduces T if and only if it reduces $\mathsf{Z}_{\pm i}(T)$ (the assertion is meant to hold separately for $+i$ and $-i$).*

Proof. If $\mathcal{K}$ reduces T, then $T = T_{\mathcal{K}} \oplus T_{\mathcal{K}^\perp}$ and

$$\mathsf{Z}_{\pm i}(T) = \mathsf{Z}_{\pm i}(T_{\mathcal{K}}) \oplus \mathsf{Z}_{\pm i}(T_{\mathcal{K}^\perp})\,.$$

Since $T_{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, $T_{\mathcal{K}^\perp} \subset \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp$, one has by (2.11) that

$$\begin{gathered} \mathsf{Z}_{\pm i}(T_{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}; \\ \mathsf{Z}_{\pm i}(T_{\mathcal{K}^\perp}) \subset \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp\,. \end{gathered}$$

Therefore $\mathcal{K}$ reduces $\mathsf{Z}_{\pm i}(T)$. Conversely, set $S = \mathsf{Z}_{\pm i}(T)$ and repeat the reasoning above. $\square$

3. The canonical decomposition of dissipative relations

We begin this section with the exposition of general concepts and results on contractions. We recall that a linear operator V is a contraction if it is bounded with $\|V\| \leq 1$. Moreover V is a maximal contraction if it does not have proper contractive extensions, which is equivalent to saying that V is a contraction in $B(\mathcal{H})$ ($B(\mathcal{H})$ is the class of bounded operators defined on the whole space $\mathcal{H}$).

If an operator V satisfies $V^{-1} \subset V^*$, then V is a particular kind of contraction with $\|V\| = 1$, known as isometric operator. Furthermore V is unitary if $V^{-1} = V^*$.

Definition 4. A contraction V is said to be completely nonunitary (we write c.n.u. for short) when there is no nonzero reducing subspace $\mathcal{K}$ for V such that $V_{\mathcal{K}}$ is a unitary operator in the Hilbert space $\mathcal{K}$.

The following result is an extension of the so-called Sz. Nagy-Foiaş-Langer decomposition (see [15, Chap. I, Sec. 3, Thm. 3.2]) which is proven for contractions in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Theorem 3.1. *To every closed contraction V, there exists a unique reducing subspace $\mathcal{K}$ for V such that $V_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$ and $V_{\mathcal{K}^\perp}$ is c.n.u.*

Proof. Note that $\operatorname{dom} V$ is closed and consider the closed contraction

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ h \in \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom} V \right\} .$$

Define

$$\hat{V} := V \oplus W \,, \tag{3.1}$$

which is a contraction in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Then, by the Sz. Nagy-Foiaş-Langer decomposition [15, Chap. I, Sec. 3, Thm. 3.2], there exists a unique subspace $\mathcal{K}$ that reduces $\hat{V}$ for which $\hat{V}_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$ and $\hat{V}_{\mathcal{K}^\perp}$ is c.n.u.

For any $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \hat{V}_{\mathcal{K}} \subset \hat{V}$, in view of (3.1), there are $\begin{pmatrix} f_1 \\ g \end{pmatrix} \in V$ and $f_2 \in (\operatorname{dom} V)^\perp$ such that $f = f_1 + f_2$. This implies that

$$\|f_1\|^2 \geq \|g\|^2 = \|f\|^2 = \|f_1 + f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 .$$

Consequently $f_2 = 0$ and therefore $\hat{V}_{\mathcal{K}} \subset V_{\mathcal{K}}$ meaning $\hat{V}_{\mathcal{K}} = V_{\mathcal{K}}$ due to (3.1). Observe that $W \subset \hat{V}_{\mathcal{K}^\perp}$ so that $V_{\mathcal{K}^\perp} = \hat{V}_{\mathcal{K}^\perp} \ominus W$ is a c.n.u. contraction.

Let us prove the uniqueness. If there exists another reducing subspace $\mathcal{K}'$ for V with the same properties as $\mathcal{K}$, then $\mathcal{K}'$ reduces $\hat{V}$ such that $\hat{V}_{\mathcal{K}'}$ is unitary and $\hat{V}_{\mathcal{K}'^\perp}$ is c.n.u. Since $\mathcal{K}$ is unique for $\hat{V}$, one concludes that $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. $\square$

Now, we turn our attention to a particular class of contractions (actually isometries): the unilateral shifts. Let V be an isometric operator in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and suppose that there exists a subspace $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ such that

$$V^n\mathcal{L} \perp \mathcal{L} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

The conditions in (3.2) are equivalent to

$$V^m\mathcal{L} \perp V^n\mathcal{L}, \quad n, m \geq 0,\, n \neq m\,. \tag{3.3}$$

The subspace $\mathcal{L}$ for which (3.2) holds is said to be a *wandering space* for V. On the basis of (3.3), one defines

$$\mathcal{M}_+(\mathcal{L}) := \mathcal{L} \oplus V\mathcal{L} \oplus V^2\mathcal{L} \oplus \cdots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^n\mathcal{L}\,.$$

Observe that

$$V\mathcal{M}_+(\mathcal{L}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^n\mathcal{L} = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}) \ominus \mathcal{L}\,.$$

So that

$$\mathcal{L} = \mathcal{M}_+(\mathcal{L}) \ominus V\mathcal{M}_+(\mathcal{L}). \tag{3.4}$$

Definition 5. An isometric operator V in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is called a unilateral shift if there exists a wandering space $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ for V such that $\mathcal{M}_+(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$.

The following assertion is known as the von Neumann-Wold decomposition *cf.* [15, Chap. I, Sec. 1, Thm. 1.1].

Theorem 3.2. *For every isometric operator V in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, there exists a unique reducing subspace $\mathcal{K}$ for V such that $V_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$ and $V_{\mathcal{K}^\perp}$ is an unilateral shift in $\mathcal{K}^\perp$. Namely, if*

$$\mathcal{K} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \operatorname{ran} V^n\,, \quad \textit{then} \quad \mathcal{K}^\perp = \mathcal{M}_+(\mathcal{L})\,, \quad \textit{where } \mathcal{L} = \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran} V\,.$$

Corollary 3.1. *An isometric operator in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a unilateral shift if and only if it is c.n.u.*

Proof. Suppose that V is a unilateral shift. If $\mathcal{K}$ reduces V so that $V_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$, then $\mathcal{K} = V^n\mathcal{K}$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$ By (3.4), one has $\mathcal{K} \perp \mathcal{L}$.

Fix an arbitrary $g \in \mathcal{K}$ and $t \in V^n\mathcal{L}$. For any $n = 0, 1, 2, \ldots$, there is $\begin{pmatrix} f_n \\ g \end{pmatrix} \in V^n$

with $f_n \in \mathcal{K}$, and there is $\begin{pmatrix} h_n \\ t \end{pmatrix} \in V^n$ with $h_n \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$. Thus

$$\langle g, t\rangle = \langle f_n, h_n\rangle = 0$$

since V is isometric. This implies that $\mathcal{K} \perp V^n\boldsymbol{\mathcal{L}}$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$ Thus $\mathcal{K} \perp \mathcal{M}_+(\boldsymbol{\mathcal{L}}) = \mathcal{H}$ and hence V is c.n.u. The converse follows from Theorem 3.2. ☐

Now we apply the obtained results on dissipative relations. We say that a linear relation L is dissipative when for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$,

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0\,.$$

We call a dissipative relation L maximal when it has no proper dissipative extension.

A relation L satisfying $L \subset L^*$ is a particular case of a dissipative relation called symmetric relation. Moreover, when $L = L^*$, L is selfadjoint.

For the reader's convenience, the following result from [12] is brought up.

Proposition 3.1. *Under the assumption that $\zeta \in \mathbb{C}_+$ and $|\zeta| = 1$, a linear relation L is (closed, maximal) dissipative (symmetric, selfadjoint) if and only if $V = \mathbf{Z}_\zeta(L)$ is a (closed, maximal) contraction (isometric, unitary).*

Thus the Z transform gives a one-to-one correspondence between contractions and dissipative relations.

Definition 6. We say that a dissipative relation L is completely nonselfadjoint (we write c.n.s. for short) when there is no nonzero reducing subspace $\mathcal{K}$ for L such that $L_{\mathcal{K}}$ is a selfadjoint relation in $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$.

Proposition 3.2. *L is a c.n.s. dissipative relation if and only if $V = \mathbf{Z}_i(L)$ is a c.n.u. contraction.*

Proof. If L is a c.n.s. dissipative relation, then, by Proposition 3.1, one has that $V = \mathbf{Z}_i(L)$ is a contraction. Suppose that there is a reducing subspace $\mathcal{K}$ for V such that $V_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$. Then, it follows from Theorem 2.2 that $\mathcal{K}$ reduces L and, again by Proposition 3.1, one obtains that $\mathbf{Z}_i(V_{\mathcal{K}}) \subset L$ is selfadjoint in $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$. Thus $\mathcal{K} = \{0\}$ and hence V is c.n.u. The converse follows in an analogous way. ☐

The following is the analogue of the Sz. Nagy-Foiaş-Langer decomposition for dissipative relations.

Theorem 3.3. *For every closed dissipative relation L, there exists a unique reducing subspace $\mathcal{K}$ for L such that $L_{\mathcal{K}}$ is selfadjoint in $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ and $L_{\mathcal{K}^\perp}$ is c.n.s.*

Proof. In view of Proposition 3.1, one has that $\mathsf{Z}_i(L)$ is a closed contraction. By Theorem 3.1, there exists a unique subspace $\mathcal{K}$ reducing $\mathsf{Z}_i(L)$ for which $\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$ and $\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}^\perp}$ is c.n.u. Thus, Theorem 2.2 implies that $\mathcal{K}$ reduces L and

$$\begin{aligned} L &= \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(L)) \\ &= \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}} \oplus \mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}^\perp}) \\ &= \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}}) \oplus \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}^\perp})\,, \end{aligned}$$

whence it follows from Proposition 3.1 that $L_{\mathcal{K}} = \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}})$ is selfadjoint in $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ and by Proposition 3.2 that $L_{\mathcal{K}^\perp} = \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(L)_{\mathcal{K}^\perp})$ is c.n.s.

It remains to prove that the decomposition is unique. Suppose that, apart from $\mathcal{K}$, there is $\mathcal{K}'$ reducing L for which $L_{\mathcal{K}'}$ is selfadjoint in $\mathcal{K}' \oplus \mathcal{K}'$ and $L_{\mathcal{K}'^\perp}$ is c.n.s. Then, by Theorem 2.2, $\mathcal{K}'$ reduces

$$\begin{aligned} \mathsf{Z}_i(L) &= \mathsf{Z}_i(L_{\mathcal{K}'} \oplus L_{\mathcal{K}'^\perp}) \\ &= \mathsf{Z}_i(L_{\mathcal{K}'}) \oplus \mathsf{Z}_i(L_{\mathcal{K}'^\perp})\,, \end{aligned}$$

where, by Proposition 3.1, $\mathsf{Z}_i(L_{\mathcal{K}'})$ is unitary in $\mathcal{K}'$ and $\mathsf{Z}_i(L_{\mathcal{K}'^\perp})$ is c.n.u. But, at the beginning of this proof, it was said that $\mathcal{K}$ is the unique subspace with these properties. Therefore $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. $\square$

Definition 7. We say that a symmetric relation A is maximal elementary, if $\mathsf{Z}_i(A)$ is a unilateral shift (*cf.* [1, Sec. 82]).

Every maximal elementary relation A is maximal dissipative. Indeed, if L is a dissipative extension of A, then $\mathsf{Z}_i(L)$ is a contractive extension of $\mathsf{Z}_i(A)$. But, inasmuch as $\mathsf{Z}_i(A)$ is a maximal contraction, $\mathsf{Z}_i(L) = \mathsf{Z}_i(A)$ and hence $L = A$.

The following assertion follows straightforwardly from Proposition 3.2 and Corollary 3.1.

Proposition 3.3. *A symmetric relation is maximal elementary if and only if it is c.n.s.*

We conclude this section with the counterpart of the von Neumann-Wold decomposition in the class of symmetric relations. We draw the reader's attention to the fact that here a maximal symmetric relation is a relation which does not admit dissipative extensions.

Theorem 3.4. *For every maximal symmetric relation A, there exists a unique reducing subspace $\mathcal{K}$ for A, such that $A_{\mathcal{K}}$ is selfadjoint in $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ and $A_{\mathcal{K}^\perp}$ is maximal elementary in $\mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp$.*

Proof. In view of Proposition 3.1, $\mathsf{Z}_i(A)$ is a contraction in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Then, by Theorem 3.2, there exits a unique subspace $\mathcal{K}$ reducing $\mathsf{Z}_i(A)$ such that $\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}}$ is unitary in $\mathcal{K}$ and $\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}^\perp}$ is an unilateral shift in $\mathcal{K}^\perp$. Thus, Theorem 2.2 shows that $\mathcal{K}$ reduces A and

$$\begin{aligned} A &= \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(A)) \\ &= \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}} \oplus \mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}^\perp}) \\ &= \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}}) \oplus \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}^\perp})\,, \end{aligned}$$

whence, due to Proposition 3.1, $A_{\mathcal{K}} = \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}})$ is selfadjoint in $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$. Note that $A_{\mathcal{K}^\perp} = \mathsf{Z}_i(\mathsf{Z}_i(A)_{\mathcal{K}^\perp})$ is maximal elementary in $\mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{K}^\perp$. Uniqueness can also be proven along the lines of the proof of Theorem 3.3. $\square$

References

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[2] M. S. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space.* Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[3] G. Corach, A. Maestripieri, and D. Stojanoff. Generalized Schur complements and oblique projections. *Linear Algebra Appl.*, 341:259–272, 2002. Special issue dedicated to Professor T. Ando.

[4] R. Cross. *Multivalued linear operators*, volume 213 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[5] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo. Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. *Pacific J. Math.*, 54:71–100, 1974.

[6] R. G. Douglas. On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 30:19–32, 1969.

[7] M. Fernandez Miranda and J.-P. Labrousse. The Cayley transform of linear relations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(2):493–499, 2005.

[8] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17.

[9] C. S. Kubrusly. *An introduction to models and decompositions in operator theory.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[10] R. S. Phillips. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90:193–254, 1959.

[11] H. Radjavi and P. Rosenthal. *Invariant subspaces.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, second edition, 2003.

[12] J. I. Rios-Cangas and L. O. Silva. Dissipative extension theory for linear relations. *Preprint*, arXiv:1710.11285, 2017.

[13] L. Suciu. Canonical decompositions induced by A-contractions. *Note Mat.*, 28(2):187–202 (2010), 2008.

[14] B. Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, 15:87–92, 1953.

[15] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Universitext. Springer, New York, second enlarged edition, 2010.

Perturbation theory for selfadjoint relations*

Josué I. Rios-Cangas
Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
jottsmok@gmail.com

Luis O. Silva
Departamento de Física Matemática
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 04510, México D.F.
silva@iimas.unam.mx

Abstract

We study Weyl-type perturbation theorems in the context of linear closed relations. We establish general results on perturbations for dissipative relations. In the particular case of selfadjoint relations, we treat finite-rank perturbations and its fine-tuning implications on the spectrum.

Mathematics Subject Classification(2010): 47A06; 47B25; 47A55
Keywords: Closed linear relations; Dissipative and Selfadjoint relations; Weyl perturbation theory
*Research supported by UNAM-DGAPA-PAPIIT IN110818 and SEP-CONACYT CB-2015 254062

1. Introduction

Linear closed relations in a Hilbert space $\mathcal{H}$ are subspaces (*i. e.* closed linear sets) of $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. A particular realization of a closed linear relation is the graph of a closed linear operator and, since the operator can be identified with its graph, we consider relations as generalizations of operators.

In this work, we study perturbation theory for relations when the essential spectrum is preserved after the relation is submitted to some kind of perturbation. There are various perturbation theorems on the stability of the essential spectrum of operators (*cf.* [9, Thm. 4.5.35], [3, Thm. 9.1.4]) related with the classical result on perturbations for the selfadjoint case by H. Weyl [11]. These theorems are known as Weyl-type perturbations theorems. Some results of this kind have been obtained for relations being perturbed by relations (see [4, Chap. 7] and [12])

When dealing with perturbation theory for relations, there are various ways of extending the notions related to Weyl-type perturbation theory from the operator setting to the one of relations. One can use a general approach to the matter and define the essential spectrum for relations as it is done for closed operators in Banach spaces (see [9, Sec. 4.5.6], and [4, Chap. 7] in the relation setting). There are alternative definitions of essential spectrum [6, Chap. 9] for operators which can be extended to the case of relations [12]. These notions reduce to one we use here (see Definition 3) in the case of selfadjoint relations.

There are also various ways of generalizing the concepts of relatively bounded and compact perturbations from operators to relations (see [4, Chap. 7] and [12]). In this work, we do not dwell on additive perturbations of subspaces in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ by relatively compact subspaces in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, instead we approach the matter more generally by studying the difference of the resolvents of relations when this difference is a compact operator (for an even more general setting see [2]). Here we establish a Weyl-type theorem (see Theorem 4.1) with no conditions on the multivalued part of the relations (*cf.* [4, Chap. 7] and [12]).

The goal of this paper is the fine-tuning spectral analysis of selfadjoint relations such that the the difference of their resolvents is a finite-rank operator. We develop the theory on the basis of [3, Chap. 9.] and extend some classical perturbation results for operators to selfadjoint relations. To this end, various results on finite-rank perturbations are obtained in Section 3 for a setting more general than the selfadjoint one, namely, for dissipative relations. This is done this way for future developments on the spectral theory of dissipative relations. In Section 4, Theorem 4.2 gives bounds on the shift of the spectrum using the rank of difference of the resolvent. Theorem 4.3 deals with the spectra of selfadjoint extensions of symmetric relation with finite deficiency indices. The last Corollaries give conditions for spectral interlacing.

Our results are of practical importance in the various applications that the spectral theory of relations has in the extension and spectral theories of operators [10] and the theory of canonical systems [8]. The last section provides examples related to the spectral theory of operators.

2. On linear relations

We consider a separable Hilbert space $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ with inner product antilinear in its left argument. Throughout this work, any linear set T in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ is called a linear relation. Here, $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ denotes the orthogonal sum of two copies of the Hilbert space $\mathcal{H}$ (see [3, Sec. 2.3]). Define the sets

$$\operatorname{dom} T := \left\{ f\in\mathcal{H} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}, \quad \operatorname{ran} T := \left\{ g\in\mathcal{H} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\},$$
$$\ker T := \left\{ f\in\mathcal{H} : \begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}\in T\right\}, \quad \operatorname{mul} T := \left\{ g\in\mathcal{H} : \begin{pmatrix} 0\\ g\end{pmatrix}\in T\right\},$$

which turn out to be linear sets in $\mathcal{H}$. Moreover, if T is closed, then $\ker T$ and $\operatorname{mul} T$ are subspaces (i. e. closed linear sets) of $\mathcal{H}$.

Given linear relations T and S, and $\zeta\in\mathbb{C}$, we consider the linear relations:

$$\begin{aligned} T+S \; &:= \left\{ \begin{pmatrix} f\\ g+h\end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T,\ \begin{pmatrix} f\\ h\end{pmatrix}\in S\right\} & \zeta T &:= \left\{ \begin{pmatrix} f\\ \zeta g\end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}\\ ST \; &:= \left\{ \begin{pmatrix} f\\ k\end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T,\ \begin{pmatrix} g\\ k\end{pmatrix}\in S\right\} & T^{-1} &:= \left\{ \begin{pmatrix} g\\ f\end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\}. \end{aligned}$$

We assume that the symbols $\dot{+}$, $\oplus$, and $\ominus$ have their standard meaning, i. e.,

$$\begin{aligned} &T\dot{+}S = \left\{ \begin{pmatrix} f+h\\ g+k\end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T,\ \begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\in S, \text{ and } T\cap S = \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}\right\}.\\ &T\oplus S = T\dot{+}S\,, \text{ with } T\subset S^{\perp}.\\ &T\ominus S = T\cap S^{\perp}\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

The symbol $\oplus$ in this context strictly speaking differs from its meaning in the expression $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ given above. It will cause no confusion to use the same symbol.

The adjoint of T is defined by

$$T^{*} := \left\{ \begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} : \langle k,f\rangle = \langle h,g\rangle,\ \forall\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\in T\right\},$$

which is a closed relation with the properties:

$$\begin{aligned} T^* &= (-T^{-1})^\perp, & S \subset T &\Rightarrow T^* \subset S^*, \\ T^{**} &= \overline{T}, & (\alpha T)^* &= \overline{\alpha} T^*, \text{ with } \alpha \neq 0\,, \\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*, & \ker T^* &= (\operatorname{ran} T)^\perp. \end{aligned} \tag{2.2}$$

From (2.2), one obtains

$$\overline{\operatorname{dom} T} = \overline{\operatorname{ran} T^{-1}} = (\ker (T^{-1})^*)^\perp = (\operatorname{mul} T^*)^\perp. \tag{2.3}$$

We call a linear relation T bounded if there exists $C > 0$ such that $\|g\| \leq C\,\|f\|$, for all $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T$. Note that every bounded linear relation is a bounded linear operator. The quasi-regular set, $\hat{\rho}(T)$, of T is defined by

$$\hat{\rho}(T) = \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ (T - \zeta I)^{-1} \text{ is bounded}\}\,.$$

It is straightforward to verify that this set is open and for every $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ it follows that $\operatorname{ran}(T - \zeta I)$ is closed if and only if T is closed [10, Prop. 2.4]. Furthermore, for any $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, the number

$$\eta_\zeta(T) := \dim[\operatorname{ran}(T - \zeta I)]^\perp \tag{2.4}$$

is constant on each connected component of $\hat{\rho}(T)$. We call $\eta_\zeta(T)$ the deficiency index of T. We define the deficiency space $\mathbf{N}_\zeta(T)$ as follows.

$$\mathbf{N}_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in T \right\}, \ \ \zeta \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

Note that (2.5) is a linear bounded relation which is closed if T is closed. Moreover, by (2.2)

$$\eta_\zeta(T) = \dim \ker (T^* - \overline{\zeta} I) = \dim \mathbf{N}_{\overline{\zeta}}(T^*)\,.$$

If $\eta_\zeta(T) = 0$, then $(T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, where $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotes the class of all bounded operators having the whole space $\mathcal{H}$ as their domain.

Define the regular set of the linear relation T, $\rho(T)$, by

$$\rho(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ (T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}\,.$$

Note that if the linear relation is not closed, then the regular set is empty. Clearly, the regular set is a subset of the quasi-regular set and it is also open.

So for a relation T, we consider the sets

$$\begin{aligned}
\sigma(T) &:= \mathbb{C}\backslash\rho(T), && \text{(spectrum)}\\
\hat\sigma(T) &:= \mathbb{C}\backslash\hat\rho(T), && \text{(spectral core)}\\
\sigma_p(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ \ker(T-\zeta I) \neq \{0\}\}, && \text{(point spectrum)}\\
\sigma_p^\infty(T) &:= \{\zeta \in \sigma_p(T) \ : \ \dim\ker(T-\zeta I) = \infty\}, && \text{(point non-discrete spectrum)}\\
\sigma_c(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{ran}(T-\zeta I) \neq \overline{\operatorname{ran}(T-\zeta I)}\}. && \text{(continous spectrum)}
\end{aligned}$$

As in the case of operators, one has

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat\sigma(T)\,. \tag{2.6}$$

For any two linear relations T and S in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, define the linear relation T_S in the Hilbert space $(\operatorname{mul} S)^\perp \oplus (\operatorname{mul} S)^\perp$ (here $\oplus$ has the same meaning as in $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$) by

$$T_S := T \cap (\operatorname{mul} S)^\perp \oplus (\operatorname{mul} S)^\perp. \tag{2.7}$$

If T is closed, then T_S is closed and if T is an operator, then T_S is an operator. Besides $(T_S)^{-1} = (T^{-1})_S$.

It is useful to decompose a closed relation T as follows $T = T_\odot \oplus T_\infty$, where

$$\begin{aligned}
T_\infty &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},\\
T_\odot &= T \ominus T_\infty
\end{aligned}$$

are closed linear relations called the multivalued part and the operator part of T, respectively.

Lemma 2.1. *If T is a closed relation such that $\operatorname{dom} T \subset (\operatorname{mul} T)^\perp$, then*

$$T - \zeta I = (T_T - \zeta I) \oplus T_\infty\,.$$

Proof. Since the domain and the range of $T_\odot$ belong to $(\operatorname{mul} T)^\perp$, it follows from (2.7) that

$$T_T = T_\odot\,. \tag{2.8}$$

Moreover,

$$T - \zeta I = (T_\odot - \zeta I) \oplus T_\infty$$

from which the assertions follows. □

3. Finite-dimensional perturbation of dissipative relations

Definition 1. A relation L is called dissipative if for every $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$,

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0\,. \tag{3.1}$$

If the equality in (3.1) holds, then L is said to be symmetric. Thus L is symmetric if and only if $L \subset L^*$.

As in [10], one can show that

$$\mathbb{C}_- \subset \hat{\rho}(L)\,, \tag{3.2}$$

for any closed dissipative relation L. Thus one can consider the deficiency index of L (see (2.4)) in $\mathbb{C}_-$ and denote it by $\eta_-(L)$. This index is an important characteristic of a dissipative relation. If L is a closed, symmetric relation, then $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(L)$ and hence L has indices

$$(\eta_+(L),\, \eta_-(L)) = (\dim \mathsf{N}_\zeta(L^*),\, \dim \mathsf{N}_{\overline{\zeta}}(L^*))\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}_-\,.$$

Definition 2. A dissipative relation L is maximal when it is closed and $\eta_-(L) = 0$.

A maximal dissipative relation does not have proper dissipative extensions. Note that maximality of a dissipative relation means that $\mathbb{C}_-$ is in the regular set of the relation.

Remark 1. In [10] it is shown that, for any dissipative relation L,

$$\operatorname{dom} L \subset (\operatorname{mul} L)^\perp. \tag{3.3}$$

Moreover, it is proven in [10, Thm. 2.10] that (3.3) yields

$$\begin{aligned} \sigma(L) &= \sigma(L_L), \quad \sigma_p(L) = \sigma_p(L_L),\\ \hat{\sigma}(L) &= \hat{\sigma}(L_L), \quad \sigma_c(L) = \sigma_c(L_L)\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Furthermore, if L is a closed symmetric relation in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, then by (2.8) one obtains that L_L is a closed symmetric operator in $(\operatorname{mul} L)^\perp \oplus (\operatorname{mul} L)^\perp$.

For any relation T in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, we use the notation $\operatorname{rank} T := \dim(\operatorname{ran} T)$. In [3, Thm 2.6.4] it is shown that $\operatorname{rank} T = m$ if and only if $\operatorname{rank} T^* = m$. Then

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \ker T) = \operatorname{rank} T^* = \operatorname{rank} T\,. \tag{3.5}$$

For A and L maximal dissipative relations, and $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(L)$, we define

$$F := (L - \zeta I)^{-1} - (A - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,. \tag{3.6}$$

Note that if rank $F = m < \infty$ for some $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(L)$, then the equality holds for every $\zeta \in \rho(A) \cap \rho(L)$. Since we are mostly interested in the rank of F, its dependence on ζ is not indicated.

The following assertion is related to the discussion in [10] on maximal dissipative relations $A + V$ such that $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Lemma 3.1. *Let A, V be maximal dissipative relations such that* $\operatorname{dom} V = \mathcal{H}$ *and assume that $L = A + V$. Then* rank $F \leq$ rank V*.*

Proof. Take $\begin{pmatrix} f \\ h-k \end{pmatrix} \in F$, where $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in (L - \zeta I)^{-1}$ and $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in (A - \zeta I)^{-1}$. Since $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, there is $t \in \mathcal{H}$ such that $\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \in V$. Define the set

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} t \\ h-k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} \in V \text{ and } \begin{pmatrix} f \\ h-k \end{pmatrix} \in F \right\}.$$

A simple computation shows that G is a linear relation. Let $\begin{pmatrix} 0 \\ h-k \end{pmatrix} \in G$, if $h \neq g$, then $\begin{pmatrix} k \\ f+\zeta k \end{pmatrix} \in L$ and $\begin{pmatrix} h-k \\ \zeta(h-k) \end{pmatrix} \in L$, whence $\zeta \in \sigma_p(L) \subset \sigma(L)$, which is impossible since $\zeta \in \rho(L)$. Thus G is a linear operator and therefore

$$\dim \operatorname{ran} F = \dim \operatorname{ran} G \leq \dim \operatorname{dom} G \leq \dim \operatorname{ran} V.$$

□

Lemma 3.2. *If A and L are maximal dissipative extensions of a closed dissipative relation S, then* rank $F \leq \eta_-(S)$*.*

Proof. Let $\zeta \in \mathbb{C}_-$. Since $S - \zeta I \subset (A - \zeta I) \cap (L - \zeta I)$, one has $\operatorname{ran}(S - \zeta I)$ is contained in $\ker F$. Hence by (3.5) one obtains

$$\begin{aligned} \text{rank } F &= \dim(\mathcal{H} \ominus \ker F) \\ &\leq \dim[\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(S - \zeta I)] = \eta_-(S)\,. \end{aligned}$$

□

The following statement is adapted from [10, Props. 4.10, 4.11].

Proposition 3.1. *Let S be a closed symmetric relation with finite deficiency index $\eta_-(S)$. Then for any $\lambda \in \hat{\rho}(S) \cap (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R})$ there exists a unique maximal dissipative extension A of S such that λ is an eigenvalue of multiplicity at most $\eta_-(S)$. Furthermore, A is selfadjoint if $\lambda \in \mathbb{R}$ while for $\lambda \in \mathbb{C}_+$ it follows that A is nonselfadjoint.*

Now we turn to the study of individual eigenvalues of dissipative relations. To simplify the notation, for $\lambda \in \mathbb{C}$ and A a closed dissipative relation, we put

$$\mu_A(\lambda) := \dim \ker(A - \lambda I)\,.$$

Proposition 3.2. *Let A and L be a maximal dissipative relations and define*

$$G_\lambda := \ker(A - \lambda I) \cap \ker(L - \lambda I).$$

Then

$$\dim[\ker(A - \lambda I) \ominus G_\lambda] \leq \text{rank } F, \quad \dim[\ker(L - \lambda I) \ominus G_\lambda] \leq \text{rank } F, \tag{3.7}$$

$$\mu_A(\lambda) - \text{rank } F \leq \mu_L(\lambda) \leq \mu_A(\lambda) + \text{rank } F\,. \tag{3.8}$$

Proof. If we assume, for example, $\dim[\ker(A - \lambda I) \ominus G_\lambda] > \text{rank } F$, then in view of (3.5) there exists a nonzero element $f \in \ker(A - \lambda I) \cap \ker F$ such that $f \perp G_\lambda$. Thus $\begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix} \in A$ and $\begin{pmatrix} f \\ (\lambda - \zeta)^{-1} f \end{pmatrix} \in (A - \zeta I)^{-1}$. Since $f \in \ker F$, one has $\begin{pmatrix} f \\ (\lambda - \zeta)^{-1} f \end{pmatrix} \in (L - \zeta I)^{-1}$ which implies $\begin{pmatrix} f \\ \lambda f \end{pmatrix} \in L$. Hence $f \in G_\lambda$ yielding a contradiction. Now we prove the right inequality in (3.8). It follows from (3.7) that

$$\begin{aligned} \mu_A(\lambda) &= \dim[\ker(A - \lambda I) \ominus G_\lambda] + \dim G_\lambda \\ &\leq \text{rank } F + \dim G_\lambda \leq \text{rank } F + \mu_L(\lambda)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

To obtain the left inequality in (3.8), interchange the roles of A and L in (3.9). $\square$

In Proposition 3.2, if $\text{rank } F < +\infty$ then by (3.7), the eigenspaces of A and of L can differ only by a subspace of dimension at most rank F. Besides, it follows from (3.8) that $\sigma_p^\infty(A) = \sigma_p^\infty(L)$.

Proposition 3.3. *If A is a closed dissipative extension of a closed symmetric relation S and $\lambda \in \hat{\rho}(S)$, then $\mu_A(\lambda) \leq \eta_-(S)$.*

Proof. It is clear from (2.6) and (3.2) that $\ker(A - \zeta I)$ can only have nontrivial elements when $\zeta \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$. Thus, since $A \subset S^*$, one obtains that

$$\mu_A(\lambda) = \dim \mathbf{N}_\lambda(A) \leq \dim \mathbf{N}_\lambda(S^*) = \eta_-(S)$$

for any $\lambda \in \hat{\rho}(S) \cap (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R})$. $\square$

4. Compact and finite-dimensional perturbation of selfadjoint relations

We begin this section by stating the following characterization of selfadjoint relations which in its operator version is well known.

Proposition 4.1. *For A a closed symmetric relation the following are equivalent:*

(i) A is selfadjoint.

(ii) $\eta_\pm(A) = 0$.

(iii) $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$.

(iv) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii): If $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, then $(A - \zeta I)^{-1}$ is an operator. Thus

$$\{0\} = \operatorname{mul}(A - \zeta I)^{-1} = \ker(A - \zeta I) = \operatorname{dom} \mathbf{N}_\zeta(A),$$

whence $\dim \mathbf{N}_\zeta(A^*) = 0$. (ii) $\Rightarrow$ (iii): If $\zeta \in \hat{\rho}(A) \setminus \mathbb{R}$, then, taking into account (2.4), one concludes that $\operatorname{ran}(A - \zeta I) = \mathcal{H}$ and then $\zeta \in \rho(A)$. Since $\hat{\rho}(A)$ is open and $\eta_\pm(A)$ are constants in the connected components of $\hat{\rho}(A)$, if $\zeta \in \hat{\rho}(A) \cap \mathbb{R}$, then $\zeta \in \rho(A)$. Thus we have shown that $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$. (iii) $\Rightarrow$ (iv): This is straightforward. (iv) $\Rightarrow$ (i): The hypothesis immediately implies that $\operatorname{dom} \mathbf{N}_i(A^*) = \{0\}$. If $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ is in A^*, then $\begin{pmatrix} g - if \\ h \end{pmatrix} \in (A - iI)^{-1}$. Therefore

$$\begin{pmatrix} h \\ g - i(f - h) \end{pmatrix} \in A \subset A^*. \tag{4.1}$$

By linearity, $\begin{pmatrix} f - h \\ i(f - h) \end{pmatrix} \in \mathbf{N}_i(A^*)$. Thus, $f = h$ and (4.1) implies that $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ is in A. $\square$

Definition 3. The notion of essential spectrum for relations in the case of selfadjoint relations reduces to (*cf.* [3, Sec. 9.1.1])

$$\sigma_e(A) := \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A)\,.$$

As a consequence of Proposition 4.1-(iv) and Remark 1, if A is a selfadjoint relation, then A_A is a selfadjoint operator. Moreover, one verifies at once, on the basis of (2.8), that $\ker(A-\zeta I) = \ker(A_A-\zeta I)$ which implies $\sigma_p^\infty(A) = \sigma_p^\infty(A_A)$. Thus,

$$\sigma_e(A) = \sigma_e(A_A)\,. \tag{4.2}$$

The following definition is a generalization of the notion of singular sequences for selfadjoint operators.

Definition 4. Let A be a selfadjoint relation and $\left\{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence whose elements are in A. We say that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is a singular sequence for A at the point $\lambda \in \mathbb{R}$, if the following conditions are true:

(i) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| > 0$, (ii) $u_n \rightharpoonup 0$, (iii) $(v_n - \lambda u_n) \to 0\,,$

where $\rightharpoonup$ denotes weak convergence.

The following result is known as the Weyl criterion and it can be found for selfadjoint operators in [3, Th. 9.1.2] (see more general version for operators in [9, Chap. 4 Sec. 5]).

Proposition 4.2. *Let A be a selfadjoint relation. Then a point λ belongs to $\sigma_e(A)$ if and only if there exits a singular sequence for A at λ.*

Proof. Assume that $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in A$ for $n \in \mathbb{N}$. In view of (2.8), there exist $\begin{pmatrix} u_n \\ t_n \end{pmatrix} \in A_A$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ s_n \end{pmatrix} \in A_\infty$ such that

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ t_n + s_n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

If $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular for A at λ, then

$$\begin{aligned} \|t_n - \zeta u_n\|^2 &\le \|t_n - \zeta u_n\|^2 + \|s_n\|^2 \\ &= \|t_n + s_n - \zeta u_n\|^2 \\ &= \|v_n - \zeta u_n\|^2 \to 0\,. \end{aligned}$$

Therefore $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular for A_A at λ. Since the assertion holds for operators, one concludes from (4.2) that $\lambda \in \sigma_e(A)$. The converse is straightforward due to $A_A \subset A$. □

Denote by $S_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ the set of compact operators whose domain is $\mathcal{H}$. It is known that V belongs to $S_\infty(\mathcal{H})$ if and only if V maps a weakly convergent sequence into a convergent sequence (see [3, Sec. 2.6]). The following assertion is the Weyl theorem for relations.

Proposition 4.3. *If A and V are selfadjoint relations such that $V \in S_\infty(\mathcal{H})$, then $L = A + V$ is selfadjoint and $\sigma_e(L) = \sigma_e(A)$.*

Proof. The selfadjointness of L follows from the fact that $(A+V)^* = A^* + V^*$ [10, Prop. 2.2]. If $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ is in A, then there is $\begin{pmatrix} u_n \\ w_n \end{pmatrix}$ in V. Observe that

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L\,.$$

If, moreover, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular for A at λ, then $w_n \to 0$ and $[(v_n+w_n) - \lambda u_n] \to 0$. Therefore, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular for L at λ and, by Proposition 4.2, one obtains that $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(L)$. The other inclusion is obtained by noting that $A = L - V$. □

We now extend the previous result using operator F given in (3.6).

Theorem 4.1. *If A and L are selfadjoint relations and F belongs to $S_\infty(\mathcal{H})$, then $\sigma_e(A) = \sigma_e(L)$.*

Proof. We only need to show that $\sigma_e(A) \subset \sigma_e(L)$. If $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular for A at λ, then it is also singular for A_A at λ (see the Proof of Proposition 4.2). Therefore, there is a sequence $\left\{ \begin{pmatrix} u_n \\ t_n \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ with elements in A_A such that

$$(t_n - \lambda u_n) \to 0\,. \tag{4.3}$$

Note that $\begin{pmatrix} t_n - \zeta u_n \\ u_n \end{pmatrix} \in (A - \zeta I)^{-1}$ and there exists $\begin{pmatrix} t_n - \zeta u_n \\ w_n \end{pmatrix} \in (L - \zeta I)^{-1}$ for any $n \in \mathbb{N}$. A short computation shows that

$$\left\{ \begin{pmatrix} w_n \\ t_n - \zeta(u_n - w_n) \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L\,.$$

In view of Proposition 4.2, it only remains to prove that $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular for L at λ. One verifies that $\begin{pmatrix} t_n - \zeta u_n \\ w_n - u_n \end{pmatrix} \in F$ and $\begin{pmatrix} u_n \\ w_n - u_n \end{pmatrix} \in F(A_A - \zeta I)$. Since A_A and F are operators,

$$F(A_A - \zeta I) = F(A_A - \lambda I) + (\lambda - \zeta)F\,.$$

Then there exist $\begin{pmatrix} u_n \\ s_n \end{pmatrix} \in F(A_A - \lambda I)$ and

$$\begin{pmatrix} u_n \\ g_n \end{pmatrix} \in (\lambda - \zeta)F \tag{4.4}$$

such that

$$w_n - u_n = s_n + g_n \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,. \tag{4.5}$$

The fact that $\begin{pmatrix} u_n \\ t_n - \lambda u_n \end{pmatrix} \in A_A - \lambda I$ implies

$$\begin{pmatrix} t_n - \lambda u_n \\ s_n \end{pmatrix} \in F \,. \tag{4.6}$$

Since F is a compact operator and $u_n \rightharpoonup 0$, it follows from (4.3), (4.4), and (4.6) that g_n, $s_n \to 0$. Thus (4.5) implies

$$(w_n - u_n) \to 0 \,. \tag{4.7}$$

The fact that $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is singular then yields that $w_n \rightharpoonup 0$ and $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|w_n\| > 0$. To conclude the proof, observe that from (4.3) and (4.7), one has

$$[t_n - \zeta(u_n - w_n)] - \lambda w_n = (t_n - \lambda u_n) - (\lambda - \zeta)(w_n - u_n) \to 0 \,.$$

□

Let us turn to the study of the discrete spectrum of a selfadjoint relation A. In view of Remark 1, one can consider the spectral theorem for selfadjoint operators. Let E_{A_A} be the spectral measure of A_A. It follows from [3, Th. 6.1.3] that

(1) $\sigma(A) = \sup E_{A_A}$.

(2) $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : E_{A_A}\{\lambda\} \neq 0\}$. The eigenspace corresponding to the eigenvalue λ is $E_{A_A}\{\lambda\}(\operatorname{mul} A)^\perp$.

(3) $\sigma_c(A)$ is the set of non-isolated points of $\sigma(A)$.

Consider a bounded interval $\Delta = (\alpha,\beta\ )$ and define

$$\gamma := (\alpha + \beta)/2 \,, \qquad \xi := (\alpha - \beta)/2 \,. \tag{4.8}$$

and

$$\mu_A(\Delta) := \dim E_{A_A}(\Delta)(\operatorname{mul} A)^\perp \,.$$

The following assertion does not follows directly from [3, Thm. 9.3.3] and (1)–(3), since the relations L and A could be such that $(\operatorname{mul} A)^\perp$ and $(\operatorname{mul} L)^\perp$ do not coincide. This is illustrated by the relations we give as examples in (5.4).

Theorem 4.2. *If A and L are two selfadjoint relations and* rank F *is finite, then*

$$\mu_A(\Delta) - \operatorname{rank} F \le \mu_L(\Delta) \le \mu_A(\Delta) + \operatorname{rank} F. \tag{4.9}$$

Proof. Only one inequality in (4.9) needs to be proven. If $\mu_L(\Delta) > \mu_A(\Delta) + \operatorname{rank} F$, then there exists a non-zero element $f \in E_{L_L}(\Delta)(\operatorname{mul} L)^\perp \cap \ker F$ such that $f \perp E_{A_A}(\Delta)(\operatorname{mul} A)^\perp$. This implies that there also exists

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (A - \zeta I)^{-1} \cap (L - \zeta I)^{-1}. \tag{4.10}$$

Due to (3.3), $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (L_L - \zeta I)^{-1}$. Observe that

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (L_L - \zeta I)^{-1} E_{L_L}(\Delta) = E_{L_L}(\Delta)(L_L - \zeta I)^{-1} \tag{4.11}$$

which implies that $g \in E_{L_L}(\Delta)(\operatorname{mul} L)^\perp$. Thereupon

$$\begin{pmatrix} g \\ f + (\zeta - \gamma) g \end{pmatrix} \in (L_L - \gamma I),$$

so, by the spectral theorem, one concludes

$$\begin{aligned} \|f + (\zeta - \gamma) g\|^2 &= \|(L_L - \gamma I) g\|^2 \\ &= \int_{|t-\gamma|<\xi} (t-\gamma)^2 d(E_{L_L}(t) g, g) < \xi^2 \|g\|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Since $f \perp E_{A_A}(\Delta)(\operatorname{mul} A)^\perp$, one obtains that

$$f \in [E_{A_A}(\mathbb{R} \backslash \Delta)(\operatorname{mul} A)^\perp] \oplus [\operatorname{mul} A].$$

Thus, one has the decomposition $f = f_1 + f_2$, where $f_1 \in E_{A_A}(\mathbb{R}\backslash\Delta)(\operatorname{mul} A)^\perp$ and $f_2 \in \operatorname{mul} A$. On the basis of the fact that $g \in (\operatorname{mul} A)^\perp$, which follows from (4.10), one has $\begin{pmatrix} f_1 \\ g \end{pmatrix} \in (A_A - \zeta I)^{-1}$. Recurring to the trick in (4.11), one establishes as before that

$$\begin{pmatrix} g \\ f_1 + (\zeta - \gamma) g \end{pmatrix} \in (A_A - \gamma I).$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
\|f+(\zeta-\gamma)g\|^2 &= \|f_1+f_2+(\zeta-\gamma)g\|^2 \\
&= \|f_2\|^2+\|f_1+(\zeta-\gamma)g\|^2 \\
&\geq \|f_1+(\zeta-\gamma)g\|^2 \\
&= \|(A_A-\gamma I)g\|^2 \\
&= \int_{|t-\gamma|\geq\xi}(t-\gamma)^2 d(E_{A_A}(t)g,g) \geq \xi^2\|g\|^2\,,
\end{aligned}
$$

which contradicts (4.12). $\square$

Remark 2. As a consequence of Lemma 3.2 and Theorem 4.1, if S is a closed symmetric relation with finite and equal deficiency indices, then its selfadjoint extension have the same essential spectrum.

The next definition is based on the analogous notion for operators given in [3, Sec. 9.3].

Definition 5. The interval $\Delta=(\gamma-\xi,\gamma+\xi)$ is a spectral lacuna (or simply lacuna) of a symmetric relation S when

$$
\|f\|\leq\frac{1}{\xi}\|g-\gamma f\| \qquad \forall\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}\in S\,.
$$

Notice that a spectral lacuna consists of quasi-regular points of S and each quasi-regular point of S belongs to a lacuna of S.

The following result is a generalization of [3, Thm. 9.3.6].

Theorem 4.3. *Let A be a selfadjoint extension of a closed symmetric relation S. If Δ is a lacuna of S, then $\mu_A(\Delta)\leq\eta_-(S)$.*

Proof. From (3.3), it follows that $\operatorname{dom}S\subset\operatorname{dom}A\subset(\operatorname{mul}A)^\perp$. Thus

$$
S_\odot\subset(\operatorname{mul}A)^\perp\oplus(\operatorname{mul}A)^\perp\,.
$$

So $S_A=S_\odot$ and this implies that S_A is a closed symmetric operator and A_A is its selfadjoint extension, which is also an operator. Since $S_A\subset S$, Δ is also a lacuna of S_A. We use (2.1) to obtain that

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ran}(S-\zeta I) &= \operatorname{ran}(S_\odot-\zeta I)\oplus\operatorname{mul}S \\
&= \operatorname{ran}(S_A-\zeta I)\oplus\operatorname{mul}S\subset\operatorname{ran}(S_A-\zeta I)\oplus\operatorname{mul}A,
\end{aligned}
$$

whence

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\ominus\operatorname{ran}(S-\zeta I)&\supset\mathcal{H}\ominus(\operatorname{ran}(S_A-\zeta I)\oplus\operatorname{mul}A)\\&=(\mathcal{H}\ominus\operatorname{mul}A)\ominus\operatorname{ran}(S_A-\zeta I)\\&=(\operatorname{mul}A)^{\perp}\ominus\operatorname{ran}(S_A-\zeta I).\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}\eta_-(S)&=\dim\mathcal{H}\ominus\operatorname{ran}(S-\zeta I)\\&\le\dim(\operatorname{mul}A)^{\perp}\ominus\operatorname{ran}(S_A-\zeta I)\\&=\eta_-(S_A).\end{aligned}$$

Using the fact that the theorem holds for operators, one concludes that

$$\mu_A(\Delta)\le\eta_-(S_A)\le\eta_-(S)\,.$$

□

Remark 3. Under the conditions of the previous result, if $\eta_-(S)=n<\infty$, then, for any$\Delta\ \subset\hat{\rho}(S)$, the spectrum of A in Δ is discrete and its multiplicity is at most n. This is so because every closed bounded interval$\Omega\ '\subset\Delta$ can be covered by a finite number of lacunae of $\hat{\rho}(S)$.

Corollary 4.1. *Let S be a closed symmetric relation with indices* $(1,1)$. *Suppose that A and L are distinct selfadjoint extensions of S and $\Delta\subset\hat{\rho}(S)$. Then the spectra of A and L in Δ are discrete, simple and alternating.*

Proof. By Remark 3, the spectra of A and L in Δ are discrete and simple. Note that $\operatorname{ran}F=\{0\}$ implies $A=L$, then Lemma 3.2 implies that rank $F=1$ and then (4.9) yields

$$\mu_A(\Delta)-1\le\mu_L(\Delta)\le\mu_A(\Delta)+1\,. \tag{4.13}$$

Moreover, since $A\neq L$, it follows from Proposition 3.1 that the spectra of A and L have empty intersection in Δ. Let λ_1, λ_2 be neighbouring eigenvalues of A in Δ. By (4.13), one has $\mu_L((\lambda_1,\,\lambda_2))\le 1$. If there is not spectral points of L in $[\lambda_1,\,\lambda_2]$, then the same is true in some open interval $\delta\supset[\lambda_1,\,\lambda_2]$. Recurring again to (4.13), one arrives at

$$0=\mu_L(\delta)\ge\mu_A(\delta)-1\ge 1\,,$$

which is a contradiction. Therefore the spectra of A and L are alternating. □

The next result complements Proposition 3.1. It follows directly from Corollary 4.1.

Corollary 4.2. *Suppose that S is closed symmetric relation with indices* $(1, 1)$. *If $\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$, then the spectra of the selfadjoint extensions of S are pairwise interlaced and consist solely of isolated eigenvalues of multiplicity one.*

5. Examples

Let J be a selfadjoint operator in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$. For a fixed nonzero $\delta \in \mathcal{H}$, consider the linear operator

$$B_\delta = J|_{\operatorname{dom} J \ominus \operatorname{span}\{\delta\}} . \tag{5.1}$$

The operator B_δ is closed, non-densely defined and symmetric. One verifies that

$$B_\delta = J \cap \left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}\right\}\right)^* .$$

Observe that J and $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}\right\}$ are linearly independent so, in view of [7, Sec. , 2], one obtains that B_δ has indices $(1, 1)$. Moreover, for any $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ there is a unique selfadjoint extension of B_δ given by

$$J(\tau) = \left\{\begin{pmatrix} f \\ g + \tau\langle\delta, f\rangle\delta \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in J\right\}, \quad \tau \neq \infty, \tag{5.2}$$

and

$$J(\infty) = B_\delta \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}\right\} . \tag{5.3}$$

When τ runs through the set $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $J(\tau)$ runs through all selfadjoint extensions of B_δ [7, Thm. 2.4]. Also, by [7, Eq. 2.2],

$$B_\delta^* = J \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}\right\} .$$

A direct consequence of Remark 2 is the following assertion.

Proposition 5.1. *For any nonzero $\delta \in \mathcal{H}$, the essential spectra of all the selfadjoint extensions of the symmetric operator B_δ given in* (5.1)*, are equal.*

Recall that a selfadjoint operator J is said to be simple when there exists $g \in \mathcal{H}$ such that the linear envelope of the vectors $E_J(\partial)g$, where E_J is the spectral measure of J and ∂ runs through all intervals of $\mathbb{R}$, is dense in $\mathcal{H}$ (see [1, Sec. 69]). The vector g is then call a generating element of J.

Proposition 5.2. *Suppose that J is simple and δ is a generating element of it. If ∂ is an interval such that $\partial \cap \sigma_e(J) = \emptyset$, then $\partial \subset \hat{\rho}(B_\delta)$.*

Proof. Assume $\zeta \in \partial \cap \hat{\sigma}(B_\delta)$. Then $\zeta \in \sigma(J)$ and, since $\partial \cap \sigma_e(J) = \emptyset$, $\zeta \in \sigma_d(J)$. Moreover $\zeta \in \sigma_p(B_\delta)$, otherwise $\zeta \in \sigma_p^\infty(J) \subset \sigma_e(J)$. Therefore

$$\ker(B_\delta - \zeta I) = E_J\{\zeta\}\mathcal{H}\,.$$

Since δ is a generating element of J, one has $\langle f,\delta \rangle \neq 0$ for every nonzero $f \in \ker(B_\delta - \zeta I)$. This contradicts the fact that $\delta \perp \operatorname{dom} B_\delta$. Therefore $\partial \cap \hat{\sigma}(B_\delta)$ is empty which yields that $\partial \subset \hat{\rho}(B_\delta)$. $\square$

As a consequence of the last result, if the spectrum of J is purely discrete and δ is a cyclic vector of it, then, by Corollary 4.2, the spectra of the extensions (5.2) and (5.3) are pairwise interlaced and consist solely of isolated eigenvalues of multiplicity one. Note that this applies to J being a selfadjoint Jacobi operator with discrete spectrum and $\delta = \delta_1$, where $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is the canonical basis in $l_2(\mathbb{N})$.

Now suppose that $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{H}$ and consider

$$S := J_{|\operatorname{dom} J \ominus \operatorname{span}\{\delta_1,\delta_2\}}\,.$$

Clearly, by (5.3) one has that

$$J_{\delta_1} := B_{\delta_1} \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \delta_1\end{pmatrix}\right\}\ ; \quad J_{\delta_2} := B_{\delta_2} \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \delta_2\end{pmatrix}\right\} \tag{5.4}$$

are selfadjoint extensions of S and they have not common multivalued part. Let us show that the selfadjoint relations (5.4) have the same essential spectrum. One computes that

$$S = J \cap \left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \delta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \delta_2\end{pmatrix}\right\}\right)^*\,.$$

According to [5, Lem. .5.1], the indices of S are $(2,2)$. Therefore, by Remark 2, the extensions (5.4) have the same essential spectrum.

References

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[2] T. Y. Azizov, J. Behrndt, P. Jonas, and C. Trunk. Compact and finite rank perturbations of closed linear operators and relations in Hilbert spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 63(2):151–163, 2009.

[3] M. S. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[4] R. Cross. *Multivalued linear operators*, volume 213 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[5] A. Dijksma, H. S. V. de Snoo, and A. A. El Sabbagh. Selfadjoint extensions of regular canonical systems with Stieltjes boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 152(2):546–583, 1990.

[6] D. E. Edmunds and W. D. Evans. *Spectral theory and differential operators*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1987. Oxford Science Publications.

[7] S. Hassi and H. de Snoo. One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 22(1):123–164, 1997.

[8] S. Hassi, H. De Snoo, and H. Winkler. Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems. *Integral Equations Operator Theory*, 36(4):445–479, 2000.

[9] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.

[10] J. I. Rios-Cangas and L. O. Silva. Dissipative extension theory for linear relations. *Preprint*, arXiv:1710.11285, 2017.

[11] H. Weyl. Über beschränkte quadratiche Formen, deren Differenz vollsteig ist. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27:373–392, 1909.

[12] D. L. Wilcox. Essential spectra of linear relations. *Linear Algebra Appl.*, 462:110–125, 2014.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Keshav Raj Acharya, *Self-adjoint extension and spectral theory of a linear relation in a Hilbert space*, ISRN Math. Anal. (2014), Art. ID 471640, 5. MR 3178945

[2] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Translated by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965. MR 0184042 (32 #1518)

[3] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, 1993, Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one. MR 1255973 (94i:47001)

[4] Richard Arens, *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. **11** (1961), 9–23. MR 0123188 (23 #A517)

[5] N. Aronszajn, *On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm-Liouville equations*, Amer. J. Math. **79** (1957), 597–610. MR 0088623

[6] T. Ya. Azizov, A. Dijksma, and G. Wanjala, *Compressions of maximal dissipative and self-adjoint linear relations and of dilations*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 3, 771–792. MR 3057107

[7] Tomas Ya. Azizov, Jussi Behrndt, Peter Jonas, and Carsten Trunk, *Compact and finite rank perturbations of closed linear operators and relations in Hilbert spaces*, Integral Equations Operator Theory **63** (2009), no. 2, 151–163. MR 2481074

[8] Anton D. Baranov, *Polynomials in the de Branges spaces of entire functions*, Ark. Mat. **44** (2006), no. 1, 16–38. MR 2237209

[9] Jussi Behrndt and Matthias Langer, *Boundary value problems for elliptic partial differential operators on bounded domains*, J. Funct. Anal. **243** (2007), no. 2, 536–565. MR 2289696

[10] ———, *Elliptic operators, Dirichlet-to-Neumann maps and quasi boundary triples*, Operator methods for boundary value problems, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 404, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, pp. 121–160. MR 3050306

[11] Ju. M. Berezans′kiĭ, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. MR 0222718 (36 #5768)

[12] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)

[13] F.E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators. I*, Math. Ann. **142** (1961), 22–130.

[14] B. M. Brown, G. Grubb, and I. G. Wood, *M-functions for closed extensions of adjoint pairs of operators with applications to elliptic boundary problems*, Math. Nachr. **282** (2009), no. 3, 314–347. MR 2503156

[15] Jochen Brüning, Vladimir Geyler, and Konstantin Pankrashkin, *Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators*, Rev. Math. Phys. **20** (2008), no. 1, 1–70. MR 2379246

[16] Earl A. Coddington, *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134. MR 0477855

[17] ______, *Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 712–715. MR 0322568

[18] G. Corach, A. Maestripieri, and D. Stojanoff, *Generalized Schur complements and oblique projections*, Linear Algebra Appl. **341** (2002), 259–272, Special issue dedicated to Professor T. Ando. MR 1873624

[19] Ronald Cross, *Multivalued linear operators*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 213, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998. MR 1631548

[20] Ronald Cross, Angelo Favini, and Yakov Yakubov, *Perturbation results for multivalued linear operators*, Parabolic problems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 80, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011, pp. 111–130. MR 3052575

[21] Louis de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. MR 0229011 (37 #4590)

[22] V. Derkach, S. Hassi, M. Malamud, and H. de Snoo, *Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operators*, Russ. J. Math. Phys. **16** (2009), no. 1, 17–60. MR 2486805 (2009m:47051)

[23] V. A. Derkach and M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps*, J. Funct. Anal. **95** (1991), no. 1, 1–95. MR 1087947 (93d:47046)

[24] ______, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem*, J. Math. Sci. **73** (1995), no. 2, 141–242, Analysis. 3. MR 1318517

[25] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo, *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*, Pacific J. Math. **54** (1974), 71–100. MR 0361889 (50 #14331)

[26] A. Dijksma, H. S. V. de Snoo, and A. A. El Sabbagh, *Selfadjoint extensions of regular canonical systems with Stieltjes boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **152** (1990), no. 2, 546–583. MR 1077947

[27] José Ferreirós Domínguez, *David hilbert, hermann minkowski, la axiomatización de la física y el problema número seis*, LA GACETA DE LA RSME **6.3** (2003), 641–664.

[28] R. G. Douglas, *On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics*, Acta Sci. Math. (Szeged) **30** (1969), 19–32. MR 0250106

[29] D. E. Edmunds and W. D. Evans, *Spectral theory and differential operators*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1987, Oxford Science Publications. MR 929030

[30] Mercedes Fernandez Miranda and Jean-Philippe Labrousse, *The Cayley transform of linear relations*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 2, 493–499. MR 2093073

[31] Fritz Gesztesy and Marius Mitrea, *A description of all self-adjoint extensions of the Laplacian and Kreĭn-type resolvent formulas on non-smooth domains*, J. Anal. Math. **113** (2011), 53–172. MR 2788354

[32] M. L. Gorbachuk and V. I. Gorbachuk, *M. G. Krein's lectures on entire operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 97, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. MR 1466698 (99f:47001)

[33] V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 48, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, Translated and revised from the 1984 Russian original. MR 1154792 (92m:34133)

[34] Gerd Grubb, *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968), 425–513. MR 0239269

[35] Paul Richard Halmos, *A Hilbert space problem book*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 19, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17. MR 675952

[36] S. Hassi, Z. Sebestyén, H. S. V. de Snoo, and F. H. Szafraniec, *A canonical decomposition for linear operators and linear relations*, Acta Math. Hungar. **115** (2007), no. 4, 281–307. MR 2327982

[37] Seppo Hassi and Henk de Snoo, *One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), no. 1, 123–164. MR 1430397 (97m:47025)

[38] Seppo Hassi, Henk De Snoo, and Henrik Winkler, *Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems*, Integral Equations Operator Theory **36** (2000), no. 4, 445–479. MR 1759823

[39] Seppo Hassi, Mark Malamud, and Vadim Mogilevskii, *Generalized resolvents and boundary triplets for dual pairs of linear relations*, Methods Funct. Anal. Topology **11** (2005), no. 2, 170–187. MR 2150518

[40] Seppo Hassi, Christian Remling, and Henk de Snoo, *Subordinate solutions and spectral measures of canonical systems*, Integral Equations Operator Theory **37** (2000), no. 1, 48–63. MR 1761504

[41] M. Kaltenbäck and H. Woracek, *Pontryagin spaces of entire functions. I*, Integral Equations Operator Theory **33** (1999), no. 1, 34–97. MR 1664343 (2000a:46039)

[42] Michael Kaltenbäck and Harald Woracek, *De Branges spaces of exponential type: general theory of growth*, Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), no. 1-2, 231–284. MR 2160366 (2006c:30031)

[43] ______, *Hermite-Biehler functions with zeros close to the imaginary axis*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 1, 245–255. MR 2086217

[44] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132. MR 0407617 (53 #11389)

[45] M. A. Krasnosel′ skiĭ, *On the extension of Hermitian operators with a nondense domain of definition*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **59** (1948), 13–16. MR 0024061

[46] M. Krein, *A contribution to the theory of entire functions of exponential type*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR] **11** (1947), 309–326. MR 0022252

[47] M. G. Krein, *On a remarkable class of Hermitian operators*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) **44** (1944), 175–179. MR 0012177 (6,269h)

[48] ______, *On Hermitian operators whose deficiency indices are* 1, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) **43** (1944), 323–326. MR 0011170 (6,131a)

[49] ______, *On Hermitian operators with deficiency indices equal to one. II*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) **44** (1944), 131–134. MR 0011533 (6,179a)

[50] ______, *The fundamental propositions of the theory of representations of Hermitian operators with deficiency index* (m,m), Ukrain. Mat. Žurnal **1** (1949), no. 2, 3–66. MR 0048704 (14,56d)

[51] M. G. Krein and G. K. Langer, *The defect subspaces and generalized resolvents of a Hermitian operator in the space* Π_κ, Funkcional. Anal. i Priložen **5** (1971), no. 2, 59–71. MR 0282238

[52] Carlos S. Kubrusly, *An introduction to models and decompositions in operator theory*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. MR 1464436

[53] Pavel Kurasov and Serguei Naboko, *On the essential spectrum of a class of singular matrix differential operators. I. Quasiregularity conditions and essential self-adjointness*, Math. Phys. Anal. Geom. **5** (2002), no. 3, 243–286. MR 1940117 (2003m:47084)

[54] H. Langer and B. Textorius, *On generalized resolvents and Q-functions of symmetric linear relations (subspaces) in Hilbert space*, Pacific J. Math. **72** (1977), no. 1, 135–165. MR 0463964 (57 #3902)

[55] B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, revised ed., Translations of Mathematical Monographs, vol. 5, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980, Translated from the Russian by R. P. Boas, J. M. Danskin, F. M. Goodspeed, J. Korevaar, A. L. Shields and H. P. Thielman. MR 589888 (81k:30011)

[56] B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 150, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko, Translated from the Russian manuscript by Tkachenko. MR 1400006 (97j:30001)

[57] Deivi Luzardo and Alirio J. Peña, *Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo xx*, Divulgaciones Matemáticas **2** (2006), no. 14, 153–170.

[58] M. M. Malamud, *Spectral theory of elliptic operators in exterior domains*, Russ. J. Math. Phys. **17** (2010), no. 1, 96–125. MR 2602538

[59] R. T. W. Martin, *Representation of simple symmetric operators with deficiency indices* $(1,1)$ *in de Branges space*, Complex Anal. Oper. Theory **5** (2011), no. 2, 545–577. MR 2805419 (2012g:47073)

[60] S. N. Naboko, *Absolutely continuous spectrum of a nondissipative operator, and a functional model. I*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **65** (1976), 90–102, 204–205, Investigations on linear operators and the theory of functions, VII. MR 0500225 (58 #17904)

[61] ______, *Absolutely continuous spectrum of a nondissipative operator, and a functional model. II*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **73** (1977), 118–135, 232–233 (1978), Investigations on linear operators and the theory of functions, VIII. MR 513172 (81i:47018)

[62] ______, *Functional model of perturbation theory and its applications to scattering theory*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **147** (1980), 86–114, 203, Boundary value problems of mathematical physics, 10. MR 573902 (82d:47012)

[63] B. S. Pavlov, *Conditions for separation of the spectral components of a dissipative operator*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), 123–148, 240. MR 0365199 (51 #1452)

[64] ______, *Selfadjoint dilation of a dissipative Schrödinger operator, and expansion in eigenfunctions*, Funkcional. Anal. i Priložen. **9** (1975), no. 2, 87–88. MR 0385642 (52 #6502)

[65] R. S. Phillips, *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 193–254. MR 0104919

[66] Andrea Posilicano, *Self-adjoint extensions of restrictions*, Oper. Matrices **2** (2008), no. 4, 483–506. MR 2468877

[67] Olaf Post, *Boundary pairs associated with quadratic forms*, Math. Nachr. **289** (2016), no. 8-9, 1052–1099. MR 3512049

[68] Heydar Radjavi and Peter Rosenthal, *Invariant subspaces*, second ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. MR 2003221

[69] Christian Remling, *Schrödinger operators and de Branges spaces*, J. Funct. Anal. **196** (2002), no. 2, 323–394. MR 1943095 (2003j:47055)

[70] ______, *Inverse spectral theory for one-dimensional Schrödinger operators: the A function*, Math. Z. **245** (2003), no. 3, 597–617. MR 2021573

[71] Josué I. Rios-Cangas and Luis O. Silva, *Dissipative extension theory for linear relations*, Preprint **arXiv:1710.11285** (2017).

[72] Konrad Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 265, Springer, Dordrecht, 2012. MR 2953553

[73] Kristian Seip, *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions*, University Lecture Series, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. MR 2040080 (2005c:30038)

[74] Luis O. Silva and Julio H. Toloza, *On the spectral characterization of entire operators with deficiency indices* (1,1), J. Math. Anal. Appl. **367** (2010), no. 2, 360–373. MR 2607264

[75] ______, *The class of n-entire operators*, J. Phys. A **46** (2013), no. 2, 025202, 23. MR 3002855

[76] ______, *A class of n-entire Schrödinger operators*, Complex Anal. Oper. Theory **8** (2014), no. 8, 1581–1599. MR 3275436

[77] Luis O. Silva and Julio H. Toloza, *De Branges spaces and Kreĭn's theory of entire operators.*, Operator theory. With 51 figures and 2 tables. In 2 volumes, Basel: Springer, 2015, pp. 549–580 (English).

[78] A. V. Strauss, *Functional models of linear operators*, Operator theory, system theory and related topics (Beer-Sheva/Rehovot, 1997), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 123, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 469–484. MR 1821925 (2002e:47020)

[79] Laurian Suciu, *Canonical decompositions induced by A-contractions*, Note Mat. **28** (2008), no. 2, 187–202 (2010). MR 2681000

[80] Béla Sz.-Nagy, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*, Acta Sci. Math. Szeged **15** (1953), 87–92. MR 0058128

[81] Béla Sz.-Nagy, Ciprian Foias, Hari Bercovici, and László Kérchy, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, second enlarged ed., Universitext, Springer, New York, 2010. MR 2760647

[82] Gerald Teschl, *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR 1711536 (2001b:39019)

[83] J. von Neumann, *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*, Math. Ann. **102** (1930), no. 1, 49–131. MR 1512569

[84] John von Neumann, *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*, Annals of Mathematics Studies, no. 22, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950. MR 0034514

[85] Joachim Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1980, Translated from the German by Joseph Szücs. MR 566954 (81e:47001)

[86] Hermann Weyl, *Über beschränkte quadratiche Formen, deren Differenz vollsteig ist*, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), 373–392.

[87] Diane L. Wilcox, *Essential spectra of linear relations*, Linear Algebra Appl. **462** (2014), 110–125. MR 3255523

[88] Harald Woracek, *de Branges spaces of entire functions closed under forming difference quotients*, Integral Equations Operator Theory **37** (2000), no. 2, 238–249. MR 1769812 (2001g:46058)

[89] ______, *Existence of zerofree functions N-associated to a de Branges Pontryagin space*, Monatsh. Math. **162** (2011), no. 4, 453–506. MR 2784432 (2012i:46033)

[90] Angel Ruiz Zúñiga, *Historia y filosofía de las matemáticas*, EUNED, 2003.