



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA FINITA DE GRAN UNIFICACIÓN  $SU(5)$  E  
INVARIANZA DE ESCALA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Físico**

PRESENTA:

**Luis Enrique Reyes Rodríguez**

DIRECTOR:

Myriam Mondragón Ceballos



Ciudad de México, 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- 
1. Datos del alumno.  
Reyes  
Rodríguez  
Luis Enrique  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
413012768
  2. Datos del tutor.  
Dra.  
Myriam  
Mondragón  
Ceballos
  3. Datos del sinodal 1.  
Dr.  
Luis Fernando  
Urrutia  
Ríos
  4. Datos del sinodal 2.  
Dr.  
Rodolfo Patricio  
Martínez y  
Romero
  5. Datos del sinodal 3.  
Dr.  
Saúl Noé  
Ramos  
Sánchez
  6. Datos del sinodal 4.  
Dr.  
Erick Leonardo  
Patiño  
Jaidar
  7. Datos del trabajo escrito.  
Teoría Finita de Gran Unificación  $SU(5)$   
e Invarianza de Escala.  
101 p  
2018

*A la memoria de mis abuelos Enrique y Bernardina.*



# Reconocimientos

---

Primero que nada quiero expresar mi más grande agradecimiento a la *Universidad Nacional Autónoma de México* y a la *Facultad de Ciencias*, ya que de no haber entrado a esta institución pública de educación superior, es bastante probable que se me hubiera imposibilitado el estudiar una carrera universitaria. A esta universidad le debo muchas cosas; mi formación como profesionista, mi crecimiento como ser humano, pero sobre todo mi formación como científico.

Agradezco a la Dra. Myriam Mondragón Ceballos, ya que desde muy temprano en mi carrera supo orientarme y aconsejarme sobre el mundo académico y científico, además de su apoyo incondicional como asesora para la realización de este trabajo de investigación. Convirtiéndose para mí en un ejemplo a seguir como físico y como persona.

También a mi familia: mi madre Adriana y a mi hermana Daniela, que siempre me han apoyado en todo lo que he deseado hacer desde que tengo memoria, y que sin su comprensión, paciencia y amor, yo no sería todo lo que soy ahora. A Desiree por su apoyo y cariño durante estos últimos años de conocernos, ya que siempre ha estado presente en los momentos felices y en los momentos difíciles.

No puedo no agradecer a todas las personas de mi alrededor en el día a día, como todos mis amigos de la Facultad, sobre todo a aquellos que me apoyaron en mis peores días y a los cuales tengo en la mejor estima; Abril, Daniel, Efrén, Fernando, José Antonio y Juan, y muchas personas más, que sería cansado mencionarlas a todas, pero espero que sepan que aprecio mucho su amistad y compañerismo.

Así como personas con las que convivo todos los días, también hay personas que a pesar de la distancia y los años, siguen teniendo un lugar en mi corazón y que siguen apoyándome a lo lejos; Alejandra, Ernesto y Rogelio, gracias por acompañarme hasta estas instancias. Su amistad es muy preciada para mí.

Al Dr. Eugenio Ley Koo, que me dio la oportunidad de trabajar con él dando clases en la facultad de ciencias cuando atravesaba un momento complicado. De su persona he aprendido muchas cosas buenas en su calidad como docente y sobre todo como ser humano.

Por último, quiero agradecer a la *DGAPA-UNAM*, dentro del programa de apoyo a proyectos de investigación e innovación tecnológica mediante el proyecto *PAPIIT IN111115*, el cual me dio la oportunidad de enfocarme a mi proyecto de investigación.



# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Luis Enrique Reyes Rodríguez. Ciudad de México, 2018



# Índice general

---

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El modelo estándar de partículas elementales</b>	<b>5</b>
2.1. El grupo del modelo estándar . . . . .	5
2.2. Campos y contenido de materia en el Modelo Estándar . . . . .	6
2.3. El lagrangiano del modelo estándar . . . . .	8
2.4. El sector escalar y el mecanismo de Higgs . . . . .	9
2.5. Las masas de las partículas del SM . . . . .	13
2.6. Problemas del modelo estándar . . . . .	15
<b>3. Elementos básicos de supersimetría y las primeras extensiones al SM</b>	<b>21</b>
3.1. El álgebra de supersimetría . . . . .	22
3.2. El súper-espacio . . . . .	23
3.3. Teorías físicas en el lenguaje de súper-campos . . . . .	28
3.4. Rompimiento de la supersimetría: rompimiento suave . . . . .	31
3.5. Primera extensión al SM: El modelo mínimo supersimétrico . . . . .	32
<b>4. El grupo de renormalización</b>	<b>39</b>
4.1. La regularización . . . . .	40
4.1.1. Aspectos de la regularización dimensional . . . . .	41
4.2. Condiciones de renormalización . . . . .	45
4.2.1. Esquemas de renormalización . . . . .	47
4.3. El grupo de renormalización . . . . .	48
4.4. El grupo de renormalización para teorías supersimétricas . . . . .	51
4.4.1. Teorema de no-renormalización . . . . .	51
4.4.2. Teorías finitas . . . . .	53
4.4.3. Relación entre finitud e invarianza súper-conforme . . . . .	58

<b>5. Teoría <math>SU(5)</math> de Gran Unificación</b>	<b>61</b>
5.1. $SU(5)$ con mínimo contenido de materia . . . . .	62
5.1.1. Unificación vía $SU(N)$ . . . . .	62
5.2. Carga eléctrica y cancelación de anomalías. . . . .	65
5.3. Sector escalar y rompimiento espontáneo de $SU(5)$ . . . . .	67
5.3.1. Sector de Higgs . . . . .	67
5.3.2. Sector de Yukawa . . . . .	68
5.3.3. Rompimiento espontáneo $SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . . . . .	69
5.4. Problemas del modelo $SU(5)$ . . . . .	73
5.5. Modelo $SU(5)$ supersimétrico de gran unificación . . . . .	77
<b>6. Rompimiento de SUSY-<math>SU(5)</math> y finitud.</b>	<b>81</b>
6.1. Finitud en el modelo $SU(5)$ . . . . .	82
6.1.1. Rompimiento de SUSY en un modelo finito . . . . .	83
6.1.2. Variedad conforme de $SU(5)$ . . . . .	84
6.2. Teorema de Morse para el flujo de renormalización y el índice $\hat{\mu}$ . . . . .	85
6.2.1. Índice de Morse en el flujo $SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . . . . .	87
<b>7. Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>

# Índice de figuras

---

2.1. Potencial de Higgs o sombrero mexicano en tres dimensiones, graficado respecto a su parte real y su parte imaginaria. . . . .	11
2.2. Evolución energética del inverso de los acoplamientos de norma en el SM. Imagen tomada de [1, 2] . . . . .	17
2.3. Diagramas que contribuyen a la masa del bosón de Higgs a un loop en el SM. . . . .	18
3.1. Vértices para la interacción entre partículas supersimétricas y partículas del modelo estándar. Interacción Higgsino-quark-squark (arriba) e interacción Higgsino-slepton-lepton (abajo). . . . .	36
3.2. Vértices para la interacción entre el sector de norma y el sector de materia. Donde $f_i(\tilde{f}_i)$ hace referencia a todos los fermiones (sfermions) de la teoría, denotando a su vez <i>sin</i> y <i>dob</i> en qué multiplete de $SU(2)$ viven. . . . .	36
3.3. Contribuciones a 1 loop a la masa de $\phi_1$ . . . . .	37
5.1. Vértices de interacción entre bosones $X_\mu$ y $Y_\mu$ con los fermiones de la primera familia. . . . .	76



# Índice de tablas

---

2.1. Números cuánticos de los campos de norma del SM. . . . .	7
2.2. Notación y números cuánticos para los campos de materia del SM. . . .	7
3.1. Contenido de partículas del MSSM con sus respectivos números cuánticos.	33



---

## Capítulo 1

# Introducción

---

El modelo estándar de partículas elementales es el resultado del incansable trabajo de muchos científicos alrededor del mundo con el afán de describir teóricamente las interacciones fundamentales de la naturaleza y con ello, predecir nuevos fenómenos y caracterizar con precisión los ya observados. Con la ayuda de herramientas matemáticas como la teoría de grupos, se lograron describir las interacciones electromagnéticas, las interacciones débiles y las fuerzas nucleares, implementadas dentro de una teoría cuántica de campos con simetría de norma, esto que, junto con la adición de un mecanismo para dar masas a las partículas, constituye el modelo estándar. Sin embargo, esta descripción de la naturaleza era insuficiente para empatar ciertos aspectos teóricos con observaciones experimentales (como las masas de los neutrinos), además de aspectos puramente teóricos (como el problema de la jerarquía), por lo que la necesidad de extender dicho modelo de partículas a uno que explique estos fenómenos se convirtió en una obligación. Así surgieron las teorías más allá del modelo estándar o BSM (por sus siglas en inglés), las cuales buscan solucionar los problemas del modelo estándar sin desecharlo, ya que en sí mismo da resultados con alto grado de precisión a bajas energías, por lo que se considera como una teoría efectiva de un modelo mucho más fundamental.

Una de las propuestas más populares para modelos más allá son las teorías de gran unificación, las cuales consisten en teorías de campo con simetría bajo grupos de norma que contienen al modelo estándar, y que a bajas energías por medio de algún mecanismo recuperan el contenido del SM. Además de que a altas energías unifican los acoplamientos de norma de isospín, color e hipercarga. Este tipo de teorías suelen introducir multipletes de partículas adicionales, además de nuevas interacciones, de manera que al darse un rompimiento del grupo de norma, el contenido de materia debe de recombinarse en los multipletes de partículas correspondientes al  $G_{SM}$ . El hecho de tener nuevas interacciones puede dar lugar a predicciones extra que no se dan con otros modelos, sin embargo se debe estar en consistencia con lo observado a bajas energías.

Otra de las posibles extensiones, es la introducción de supersimetría, que es una simetría entre los grados de libertad bosónicos y fermiónicos dentro de los multipletes de partículas, lo cual ayuda a resolver problemas como la jerarquía en las correcciones

a la masa del bosón de Higgs. Sin embargo, las observaciones experimentales sugieren que dicha simetría debe de romperse a alguna escala de energía, ya que el efecto de las partículas supersimétricas no se ha detectado, siendo este efecto el que las partículas extra tengan las mismas masas de las partículas del modelo estándar. La combinación de las teorías de gran unificación con dicha simetría entre bosones y fermiones, da lugar a extensiones que solucionan más de un problema, además de dar correcciones más precisas a cantidades determinadas en los mismos modelos sin supersimetría, como es el caso del modelo de gran unificación basado en el grupo de norma  $SU(5)$ .

El modelo de gran unificación  $SU(5)$ , bajo la introducción de supersimetría puede convertirse en un modelo finito, es decir, carecerá de divergencias en el ultravioleta (esto dependiendo de la elección de contenido de materia), lo cual se traduce en tener una acción efectiva finita. Además de que al contener un rompimiento espontáneo de simetría de norma, se recupera de manera conveniente el grupo del modelo estándar a bajas energías, esto da un modelo que es altamente predictivo y fenomenológicamente consistente con lo observado en el modelo de Glashow, Weinberg y Salam. También al tener nuevas interacciones dadas por nuevas partículas, da un escenario para estimar cotas para la vida media del protón.

Este modelo resulta de gran interés para nuestro trabajo, ya que al poder convertirse en una teoría finita en el sentido supersimétrico, como bien describen los autores [3, 4], presenta propiedades sobre las funciones del grupo de renormalización que hace que se conjeture una invarianza de escala, además de una invarianza conforme en el punto de rompimiento de norma, debido a la conservación cuántica de las corrientes bajo transformaciones  $R$ . Dicho comportamiento súper-conforme se espera por igual en las distintas teorías finitas; no sólo para el modelo  $SU(5)$ , siendo entonces uno de los principales objetivos del presente trabajo el demostrar esta conformidad como consecuencia de la finitud y de la invarianza de escala. Sin embargo, no es el único motivo por el cual es de interés este modelo, ya que en analogía con las transiciones de fase en materia condensada [5], el rompimiento del grupo de norma presenta similitudes con los rompimientos espontáneos asociados con un cambio de fases. Dicho rompimiento es modulado por el valor esperado del vacío de un multiplete escalar, que al igual que en el caso del rompimiento electrodébil, genera términos de masa para cierto número de partículas. Entonces, al estudiar la invarianza conforme, o lo que es lo mismo, la existencia de una variedad conforme a la escala del rompimiento de norma [6], se espera poder obtener información sobre una transición de fase en el espacio de parámetros de acuerdo con lo trabajado por Gukov [7].

El tratar de determinar la existencia de una transición entre fases se basará principalmente en analizar las propiedades de escala de la teoría, que surgen como consecuencia de la finitud en el sentido supersimétrico. Se espera entonces demostrar que las condiciones de finitud en una teoría de campos resultan ser más poderosas de lo pensado, ya que dan información relevante a cerca de las propiedades críticas de la teoría, además de la carencia de divergencias en su acción efectiva. Sin embargo, la descripción de elementos más específicos de las propiedades críticas requerirán un estudio más detallado en el contexto de la teoría de transiciones de fase de Landau. Por lo que

---

no se tratan en este trabajo, sino se dejan a un estudio futuro una vez que se haya demostrado la existencia de dicha transición.

Por tanto, la principal motivación para trabajar con teorías finitas de gran unificación fue el demostrar que el rompimiento espontáneo del grupo de norma  $SU(5)$  en dicho modelo está en correspondencia con una transición de fase en el espacio de parámetros, teniendo un paso entre una fase súper-conforme y una fase no conforme. Demostrando en el proceso que las condiciones de finitud [8] son necesarias para garantizar la invarianza súper-conforme a la escala de gran unificación.

Con el fin de motivar la utilización de las teorías de gran unificación, la distribución de los capítulos del trabajo de tesis es la siguiente: en el próximo capítulo se realiza una introducción a los elementos básicos del modelo estándar, analizando principalmente su contenido de materia y el mecanismo por el cual adquieren masa las partículas. Sin embargo, se hace un especial énfasis en los problemas teóricos y experimentales del modelo, siendo esto una referencia directa a la necesidad de buscar una teoría más allá. En el capítulo tres se discuten las bases para la introducción de la ya mencionada simetría entre grados de libertad fermiónicos y bosónicos en una teoría de campos, construyendo los respectivos lagrangianos mediante el lenguaje de súper-campos y el concepto del súper-espacio, y haciendo una mención a la primera extensión posible del modelo estándar agregando dicha supersimetría. El cuarto capítulo consiste en varias ideas, primero se trata el concepto de renormalización y el método por el cual las cantidades físicas se regularizan; segundo, se discuten las condiciones de finitud en una teoría de campos con supersimetría, lo que lleva a hablar de las condiciones para la existencia de la variedad conforme y la postulación de un teorema al respecto. El capítulo 5 describe al modelo de gran unificación con grupo de norma  $SU(5)$  carente de supersimetría, analizando al igual que en el capítulo 2 su contenido de materia, el mecanismo de Higgs para sus multipletes escalares, así como los principales problemas que llevan a la implementación del mismo con supersimetría. Por último, en el capítulo sexto se hace uso de los teoremas del capítulo 4 para demostrar la invarianza conforme de la teoría SUSY  $SU(5)$  y probar con ello la existencia de la transición de fase, utilizando el concepto de operadores marginales.

Para los puntos centrales del trabajo se utilizaron diferentes fuentes de información, resaltando entre todas las que se refieren a las teorías finitas y las condiciones de finitud [3, 4, 8], así como aquellas que clasifican a los multipletes de SCFT [6] y los que fueron de vital ayuda al momento de postular la invarianza súper-conforme [7, 9].



# El modelo estándar de partículas elementales

---

Nuestra principal motivación para trabajar con teorías de gran unificación (GUTs) y modelos extendidos, es la necesidad de resolver los problemas existentes en el modelo estándar de partículas elementales, el cual unifica las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas, pero antes de hablar siquiera sobre las teorías de gran unificación, debemos entender un poco a cerca del modelo estándar, sus interacciones, su grupo de simetrías, su contenido de partículas y el mecanismo por el cual los bosones de norma y las demás partículas del modelo adquieren masa. Siendo esto último un ingrediente importante para el resto del trabajo, ya que con este mismo mecanismo se estudiarán aspectos importantes del modelo de gran unificación  $SU(5)$  supersimétrico.

En esta sección por tanto, repasaremos conceptos básicos del modelo estándar y enumeraremos los distintos problemas que presenta a un nivel general, haciendo principal énfasis en aquellos problemas que motivan extensiones supersimétricas y no supersimétricas del mismo. Los desarrollos aquí presentados se basan principalmente en la literatura especializada [10, 11, 12].

## 2.1. El grupo del modelo estándar.

El modelo estándar (SM) es una teoría de Yang-Mills no abeliana, encargada de describir la interacción electromagnética y la interacción débil entre quarks y leptones, que combinada con la interacción fuerte entre quarks nos da una descripción de tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Cada una de estas interacciones está asociada a un grupo de simetrías, de manera que el lagrangiano asociado al modelo estándar debe ser invariante ante transformaciones locales asociadas a ellos. El grupo de norma del modelo estándar está conformado por el producto de tres grupos semi-simples, tal que

$$G_{SM} : SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y,$$

donde el primero es el grupo asociado a la interacción fuerte;  $SU(2)$  es el grupo de isospín, asociado a la fuerza débil; y el último es el grupo de hypercarga asociado al electromagnetismo. Donde la connotación  $SU(N)$  se refiere a un grupo matricial de orden  $N$  de matrices unitarias con determinante igual a la unidad.

Como  $G_{SM}$  es un grupo de norma, es decir, un grupo de transformaciones locales (con dependencia espacio-temporal explícita), al imponer la invarianza bajo  $G_{SM}$  al lagrangiano asociado al SM, es necesario tomar en cuenta nuevos campos que transformen de manera no trivial bajo el grupo, teniendo así que la interacción asociada a cada ‘pedazo’ del modelo estándar viene acompañado por un mediador de dicha interacción. Los conocidos bosones de Norma.

Uno de los ingredientes más importantes en el modelo estándar es el mecanismo de rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, el cual genera las masas de los bosones de norma y de las partículas de la teoría, que fue propuesto en 1964 por Englert-Higgs-Kibble y por el cual los primeros dos recibieron el premio Nobel de Física [13, 14]. Con este mecanismo el grupo del modelo estándar se rompe a un grupo de simetrías de norma más pequeño  $SU(3) \times U(1)$ , de acuerdo con el teorema de Goldstone [10, 15] y a la aparición de un valor esperado del vacío (vev) no nulo para un campo interactuante en el sector escalar. Los detalles del mecanismo de Higgs se explorarán más a fondo en las siguientes secciones, pero cabe mencionarlo de manera superficial ya que en las secciones siguientes distinguiremos entre el modelo antes y después de este rompimiento electrodébil

## 2.2. Campos y contenido de materia en el Modelo Estándar

Debido a la estructura del grupo del modelo estándar, la variedad en el contenido de partículas consta de tres tipos de partículas: Bosones vectoriales, Fermiones de Dirac y bosones escalares. Siendo los primeros los mediadores de las interacciones; los segundos los llamados campos de materia y los últimos los responsables del rompimiento de un grupo de norma en otro más pequeño.

Los bosones vectoriales (Spin 1), son los bosones de norma encargados de mediar las interacciones. En el modelo estándar tenemos uno por cada grupo de simetría que conforma a  $G_{SM}$  entonces, en el sector electrodébil hay 4,  $B_\mu$  asociado al generador  $Y$  del grupo  $U(1)$  y  $W_\mu^i$  asociado a los generadores <sup>1</sup>  $T^i$  de  $SU(2)_L$ ; con  $T^i$  generadores de la forma

$$T^i = \frac{1}{2}\sigma^i,$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli, por lo que los generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

---

<sup>1</sup>Donde  $i = 1, 2, 3$

$V_{mu}$	Números cuánticos ( $SU(3), SU(2), U(1)$ )
$B_\mu$	( <b>1</b> , <b>1</b> , 0)
$W_\mu^i$	( <b>1</b> , <b>3</b> , 0)
$G_\mu^a$	( <b>8</b> , <b>1</b> , 0)

**Tabla 2.1:** Números cuánticos de los campos de norma del SM.

Leptones	QN ( $SU(3), SU(2), U(1)$ )	Quarks	QN ( $SU(3), SU(2), U(1)$ )
$L_{L_j} = \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}$	( <b>1</b> , <b>2</b> , -1)	$q_{L_j} = L_{L_j} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	( <b>3</b> , <b>2</b> , 1/3)
$e_{R_j}$	( <b>1</b> , <b>1</b> , -2)	$u_{R_j}$	( <b>3</b> , <b>1</b> , 4/3)
		$d_{R_j}$	( <b>3</b> , <b>1</b> , -2/3)

**Tabla 2.2:** Notación y números cuánticos para los campos de materia del SM.

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk}T^k \quad ; \quad [Y, Y] = 0,$$

siendo  $\epsilon^{ijk}$  el símbolo de Levi-Civita. En el sector de interacción fuerte tendremos 8 bosones vectoriales ( $G_\mu^a$  con  $a = 1, \dots, 8$ ), correspondientes a los generadores de álgebra de  $SU(3)_C$ , que satisfacen la relación de conmutación

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c,$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura del álgebra de  $SU(3)_C$  y además, estos generadores están normalizados como  $Tr[T^a T^c] = \frac{1}{2}\delta_{ac}$ .

Los campos de materia (Spin 1/2) consisten en tres generaciones de las partes izquierdas y partes derechas de Leptones y quarks quirales, siendo las partes izquierdas y las partes derechas dobletes y singletes de  $SU(2)_L$ , respectivamente. En las tablas 2.1 y 2.2 se muestran los números cuánticos de los bosones de norma y de los campos de materia.

Donde usamos la notación estándar de la literatura para las partes derechas

$$u_{R_{1,2,3}} = u_R, c_R, t_R,$$

$$d_{R_{1,2,3}} = d_R, s_R, b_R$$

y

$$e_{R_{1,2,3}} = e_R, \mu_R, \tau_R,$$

donde  $i = 1, 2, 3$  es el índice de familia. Los números cuánticos para las distintas familias enlistados en la [Tabla 2.2](#) corresponden con  $(-, a, -)$  la componente  $I^3$  del isoespín y con  $(-, -, y)$  la hipercarga de estos Fermiones, que se puede definir en términos de la carga eléctrica de los mismos como [\[11\]](#)

$$Y = 2(Q - I^3),$$

y sabiendo además que las partes izquierdas son dobletes de  $SU(2)_L$ , entonces  $I_{f_L}^3 = \pm \frac{1}{2}$ ; análogamente para las partes derechas tendremos que  $I_{f_R}^3 = 0$ , obteniendo trivialmente los valores de hipercarga que aparecen en la [Tabla 2.2](#).

### 2.3. El lagrangiano del modelo estándar

Como ya se mencionó, al imponer la invarianza ante transformaciones locales en el lagrangiano, surgen términos asociados a campos no masivos de spin 1, esta necesidad de invarianza puede ser codificada con el uso de la derivada covariante del SM, la cual es explícitamente

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} - ig_2 W_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - ig_1 B_\mu \frac{Y}{2},$$

con  $g_1, g_2$  y  $g_3$  las constantes de acoplamiento para cada una de las interacciones,  $\sigma^i$  y  $\lambda^a$  las matrices de Pauli y las matrices de Gell-Man, respectivamente; y en donde se tiene suma implícita sobre los índices de color  $a$  y los índices de isoespín  $i$ . Debido a la presencia de los campos de norma en la expresión de  $D_\mu$ , esta derivada además nos genera las interacciones entre los bosones vectoriales con los demás campos del modelo, siempre y cuando estos tengan números cuánticos no nulos.

Además, necesitamos considerar términos cinéticos para los campos de norma para poder escribir el lagrangiano del SM, para esto definimos el tensor de fuerzas para el campo de norma  $V_\mu$  el cual se escribe en general para una simetría no abeliana como

$$V_{\mu\nu}^a = \partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a - gf^{abc} V_\mu^b V_\nu^c,$$

que en el caso abeliano, las constantes de estructura son nulas, por lo que a la expresión anterior le sobreviven sólo dos factores. Entonces, en términos de estos  $V_{\mu\nu}^a$  escribimos el lagrangiano del sector de norma con la contribución correspondiente de cada uno de los campos de norma.

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}(G^{a\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + W^{i\mu\nu}W_{\mu\nu}^i + B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}).$$

Utilizando la notación empleada en la [Tabla 2.2](#) para los campos fermiónicos, escribimos el lagrangiano del modelo estándar sin términos de masa de fermiones y bosones como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4}(G^{a\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + W^{i\mu\nu}W_{\mu\nu}^i + B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}) \\
 & + \bar{L}_{L_j}iD_\mu\gamma^\mu L_{L_j} + \bar{e}_{R_j}iD_\mu\gamma^\mu e_{R_j} + \bar{q}_{L_j}iD_\mu\gamma^\mu q_{L_j} + \bar{u}_{R_j}iD_\mu\gamma^\mu u_{R_j} + \bar{d}_{R_j}iD_\mu\gamma^\mu d_{R_j},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

que es invariante bajo transformaciones del  $G_{SM}$ . Sin embargo, si agregamos términos de masa asociados a los bosones de norma en el lagrangiano anterior, esto rompería explícitamente la simetría bajo transformaciones de norma, afortunadamente en las interacciones fuertes los gluones son no masivos, al igual que los fotones<sup>1</sup> en las interacciones electromagnéticas. Pero esto no es así en las interacciones débiles, ya que en el sector electrodébil los bosones gauge sí tienen masa [13, 16], por lo que términos del tipo  $1/2M^2V_\mu^aV^{a\mu}$  rompen la invarianza bajo el subgrupo  $SU(2) \times U(1)$ ; por su parte, si adicionalmente quisiéramos agregar términos de masa de la forma  $m_f\hat{\psi}\psi$  para fermiones, estos no resultarían invariantes bajo el grupo de  $SU(2)_L$ , debido a que si escribimos el término de masa en función de las partes izquierdas y derechas como

$$m_f\hat{\psi}\psi = m_f(\hat{\psi}_R\psi_L + \hat{\psi}_L\psi_R),$$

se observa que no habrá tal invarianza debido a que las partes izquierdas y las partes derechas viven en diferentes multipletes del grupo de isoespín. Lo que se tiene entonces es un grave problema en relación con las masas de las partículas (Bosones de gauge y fermiones), ya que si queremos que nuestro lagrangiano sea invariante bajo transformaciones locales de  $G_{SM}$  todas estas partículas necesariamente deben ser no masivas, lo cual no es verdad en general ya que es sabido que los bosones  $W^\pm$  cargados<sup>2</sup>, los bosones  $Z^0$  y los fermiones tienen una masa asociada [16].

Para solucionar este problema es conveniente no dejarse llevar por la intuición y no tratar de meter términos de masa a mano, la manera de hacerlo es considerar la idea desarrollada por Higgs y Englert ya mencionada anteriormente, y que fue incluida en el modelo por Weinberg y Salam en el año de 1968, dando una teoría consistente en las masas de las partículas que surgen mediante éste mecanismo. Los detalles sobre este mecanismo se exploran en la siguiente sección y se basan en el análisis del sector escalar, mencionado en el contenido de partículas.

## 2.4. El sector escalar y el mecanismo de Higgs

Para abordar el mecanismo por el cual se rompe espontáneamente la simetría electrodébil, nos fijamos en el sector escalar del modelo estándar, con un campo  $\Phi$  complejo en un doblete de  $SU(2)_L$ , con hipercarga  $Y_\phi = +1$  y lagrangiano

<sup>1</sup>Los fotones  $\gamma$  y los bosones  $Z^0$  son combinaciones de los campos  $B^\mu$  y  $W_3^\mu$ [10, 11]

<sup>2</sup>Estos bosones cargados son combinaciones de los campos  $W_\mu^1$  y  $W_\mu^2$

$$\mathcal{L}_S = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.2)$$

donde

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}.$$

Siendo  $\phi^0$  una componente neutra. Consideremos un escenario más simple, en el que tenemos un modelo con una simetría local  $U(1)$  el cual consiste en un campo escalar complejo acoplado a un bosón vectorial y a sí mismo, con un lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi^* D^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (2.3)$$

Este modelo servirá para ilustrar el mecanismo de Higgs y posteriormente se retomará en el contexto del SM. La ecuación (2.3) es invariante ante una transformación local  $U(1)$ , donde los campos cambian como

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x).$$

Además el Lagrangiano es invariante bajo el cambio  $\phi \rightarrow -\phi$ , por lo que no tenemos interacción cúbica en el sector escalar. Lo que queremos ver ahora es la minimización del potencial escalar  $V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$  para poder analizar las condiciones sobre los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  que hacen que el vacío tenga una degeneración.

Como ya se mencionó, si se rompe explícitamente la simetría bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  con la inclusión de términos de masa para los bosones de norma, esto resulta problemático debido a que el comportamiento de la teoría a altas energías cambiaría drásticamente, modificando así su renormalizabilidad; como se discutirá en capítulos más adelante. Entonces, lo más conveniente es el no agregar términos de manera arbitraria, sin embargo, aún es necesario el solucionar la ausencia de términos de masa para los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ , por lo que es contemplada la idea de un rompimiento espontáneo en la simetría electrodébil. En ese contexto de rompimiento, se tendrá una especie de simetría "escondida", tal que el Lagrangiano seguirá siendo invariante ante las transformaciones de norma, pero la dinámica modificará su estado base, degenerándolo. La elección de alguno de estos estados base romperá la simetría, y de acuerdo al teorema de Goldstone, implicará la existencia de bosones escalares no masivos [15].

La existencia de estos bosones de Goldstone a primera instancia no resuelve nuestro problema de masas, sino que agrega partículas extra a la teoría. Recordando un poco sobre la estructura general las teorías de norma, encontramos que presentan ciertas irregularidades; como la de no contener una condición para fijar la norma que haga que la teoría satisfaga todas las condiciones de una teoría usual del campo<sup>1</sup>. Tratando

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, con la imposición de normas covariantes obtenemos estados con norma negativa y con normas axiales se pierde covarianza de Lorentz; siendo estas dos condiciones inconsistentes con los axiomas de las teorías de campo usuales[17, 18].

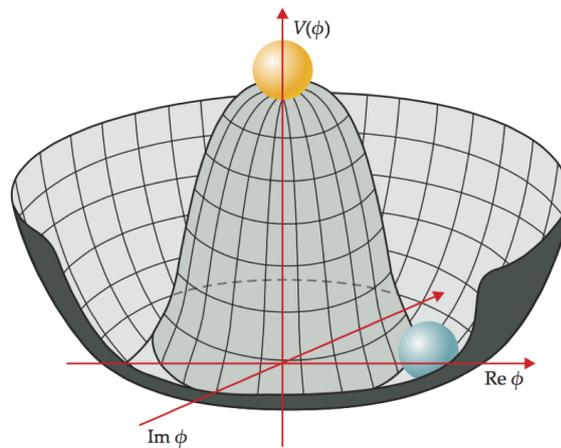
entonces como irregularidades de la teoría a los bosones vectoriales no masivos, y a los bosones de Goldstone, estos últimos desaparecerán del contenido físico al recombinarlos para formar bosones vectoriales con masa, sin arruinar con ello comportamiento de la teoría a altas energías. Es por ello que la existencia de bosones escalares extra soluciona el problema de las masas de los bosones de norma aparentemente sin masa<sup>1</sup>.

Después de justificar un poco el por qué de buscar los mínimos de  $V(\phi)$ , observemos que para la ecuación (2.3) distinguimos dos casos:

- $\mu^2$  positiva y  $\lambda$  positiva, entonces el potencial será siempre positivo. Que presenta un mínimo global en cero  $\langle 0|\phi|0\rangle \equiv \phi_0 = 0$ , como se muestra en la Figura 2.1. En este caso, el lagrangiano  $\mathcal{L}$  es el de QED para un campo complejo de masa  $\mu$
- $\mu^2 < 0$ . En este caso tendremos que el potencial  $V$  adquiere un valor de expectación del vacío, con un mínimo de potencial ahora distinto de cero.

$$\langle 0|\phi|0\rangle = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v}{\sqrt{2}},$$

por lo que el término  $\mu$  ya no puede ser interpretado como un término de masa para



**Figura 2.1:** Potencial de Higgs o sombrero mexicano en tres dimensiones, graficado respecto a su parte real y su parte imaginaria.

el campo escalar cargado. Para poder analizar esto, realizamos una perturbación al rededor del valor esperado  $v$ , y reescribimos el lagrangiano en términos de dos campos escalares sin carga  $\phi_1$  y  $\phi_2$  donde

<sup>1</sup>El primero en mostrar que las teorías de norma resultan renormalizables incluso con un rompimiento espontáneo de la simetría fue 't Hooft en el año de 1971 [19].

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x) + v).$$

Con este cambio, el valor esperado del vacío (vev) se traduce en términos de los nuevos campos como <sup>1</sup>

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v \quad , \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0.$$

El Lagrangiano bajo la redefinición de  $\phi$  se escribe de manera simplificada como se muestra a continuación.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - v^2\lambda\phi_1^2 + \frac{1}{2}g^2v^2A_\mu A^\mu - gvA_\mu\partial^\mu\phi_2, \quad (2.4)$$

de donde se puede hacer la identificación de muchos elementos dentro de la ecuación. Por ejemplo, el bosón de norma  $A_\mu$  adquiere masa mediante el término  $1/2^2v^2A_\mu A^\mu$ , mientras que el campo  $\phi_1$  presenta una masa  $m_{\phi_1} = -2\mu^2$ . Además se tendrá un bosón escalar no masivo, que se piensa debe ser el bosón de Goldstone  $\phi_2$ . Sin embargo, existe un término que acopla a  $A_\mu$  con el campo escalar  $\phi_2$ , este término entre todos resulta en especial problemático, ya que no se puede interpretar de manera correcta, por lo que es conveniente removerlo<sup>2</sup>. Para esto, se reescribe la perturbación del campo  $\phi(x)$  en una parametrización diferente

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)]e^{i\xi(x)/v}, \quad (2.5)$$

que corresponde con lo que se tenía antes para el caso de oscilaciones pequeñas, i.e.  $\xi(x)/v \ll 1$ , haciendo las identificaciones  $\eta(x) \rightarrow \phi_1(x)$  y  $\xi(x) \rightarrow \phi_2(x)$ . La eliminación del término de mezcla se realizará al fijar una norma unitaria de la siguiente forma

$$A_\mu \rightarrow B_\mu = A_\mu - \frac{1}{gv}\partial_\mu\xi(x). \quad (2.6)$$

Con esta elección de norma se eliminan del Lagrangiano los términos de acoplamiento entre  $A_\mu$  y  $\xi$  y también los términos de  $\xi$ . Que resulta un poco más consistente en cuanto a los grados de libertad, ya que antes del rompimiento se tienen dos campos escalares y un campo vectorial no masivo con dos grados de libertad y después del rompimiento se tiene únicamente un campo escalar y ahora un bosón de norma masivo con tres grados de libertad. Esto quiere decir que el bosón de norma  $A_\mu$  no masivo (fotón) absorbió al campo  $\xi$  para crear un bosón masivo  $B_\mu$ . Mediante este proceso los bosones de norma adquieren masa al romper espontáneamente la simetría del grupo abeliano  $U(1)$ .

---

<sup>1</sup>Es posible hacer la elección contraria, ya que se sigue preservando la norma de  $\phi$  y rompiendo la simetría.

<sup>2</sup>Ya que al hacer la sustitución de los valores de vev, el campo  $A_\mu$  presentará un grado de libertad adicional no físico.

## 2.5. Las masas de las partículas del SM

Ahora que se revisó a detalle el proceso de rompimiento espontáneo de la simetría para el caso de un grupo abeliano, se aplicarán estas ideas al caso del modelo estándar. Lo que se necesita es generar términos de masa para los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ , pero manteniendo al campo de norma  $A^\mu$  no masivo. Retomando el Lagrangiano de la ecuación (2.4), tendremos que para el parámetro  $\mu^2 < 0$ , el doblete  $\Phi$  adquiere un vev en su parte neutra de

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix},$$

donde  $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ . Al igual que en caso abeliano, realizamos una perturbación al rededor del vacío,  $\Phi = \Phi' + \Phi_0$ , que podemos reescribir en términos de nuevos campos escalares  $\Xi_{1,2,3}$  y  $H(x)$  en una parametrización parecida a la de la ecuación (4.3)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2i\Xi_j(x)T^j(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la analogía con el caso de  $U(1)$ , realizamos una transformación de norma para fijarnos en la norma unitaria, tal que  $\Phi$  cambiará como

$$\Phi(x) \rightarrow \hat{\Phi}(x) = e^{-2i\Xi_j(x)T^j(x)/v} \Phi(x),$$

y como los únicos términos en el sector escalar que tienen factores relacionados con los bosones de norma son los que contienen la derivada covariante  $D_\mu \Phi$ , analizamos esos términos para  $\Phi'$ .

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{1}{8} (v + H)^2 (g_2^2 |W_\mu^1 + iW_\mu^2|^2 + |g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu|^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2. \quad (2.7)$$

Además, si definimos nuevos campos como

$$W^\pm = -\frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2) \quad (2.8)$$

y

$$Z_\mu = \frac{g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad (2.9)$$

estas partículas tienen términos de masa de la forma  $1/2m_V^2 V_\mu V^\mu$  dentro del Lagrangiano siendo cada una de estas masas generadas por el rompimiento de la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Las masas correspondientes a cada bosón vectorial son

$$m_W = \frac{1}{2}g_2^2 v, \quad m_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad m_A = 0,$$

donde  $A_\mu$  es el fotón, que corresponde al vector ortogonal a  $Z_\mu$ . De esta forma podemos notar que los campos  $\Xi_j$ ; presumiblemente los bosones de Goldstone, fueron absorbidos

## 2. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

---

por los bosones  $W$  y  $Z$ , junto con sus grados de libertad para formar sus modos longitudinales y generar las masas. De la misma manera, como la simetría bajo el grupo  $U(1)$  se mantiene intacta, el bosón de norma asociado permanece no masivo. En la referencia [20], se trabaja más a detalle el teorema de Goldstone, haciendo principal énfasis en determinar el número de bosones escalares que surgen después de un rompimiento espontáneo de un grupo de la forma  $SU(N)$ .

Además, los campos  $Z_\mu$  y su ortogonal pueden escribirse en términos del parámetro  $\theta_W$ , el cuál es llamado ángulo débil o ángulo de mezcla y que se define como

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2},$$

que reparametriza a los bosones de norma como

$$Z_\mu = \cos \theta_W B_\mu - \sin \theta_W W_\mu^3, \quad Z_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3.$$

Esta nueva parametrización nos da relaciones relevantes para las masas de los bosones en términos del ángulo de mezcla

$$m_W = m_Z \cos \theta_W, \quad \alpha = \alpha_1 \cos^2 \theta_W = \alpha_2 \sin^2 \theta_W,$$

donde se empleó la notación  $\alpha_i^2 = g_i^2/4\pi$ .

Cabe comentar un par de cosas más, por ejemplo, para el sector escalar, cuando el doblete adquiere un valor esperado del vacío, este sigue transformando ante dos generadores de  $SU(2)_L$ , los que son proporcionales a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . De manera que

$$T^j \Phi_0 \neq 0, \quad \text{con } j = 1, 2.$$

Y por el contrario, para una combinación lineal de los otros dos generadores ( $T^3$  de  $SU(2)_L$  y  $Y$  de  $U(1)$ )

$$\left(\frac{1}{2}Y + T^3\right)\Phi_0 = 0,$$

que resulta coincidir con lo que habíamos llamado la carga eléctrica,  $Q = 1/2Y + T^3$ . A este nivel se deja entrever por qué el vev lo adquiere la parte neutra del doblete escalar de  $SU(2)$ , ya que si la parte cargada adquiriera un valor esperado del vacío, no se mantendría la simetría  $U(1)_Q$  y por tanto la carga no sería una cantidad que se conserva. Por la forma del operador  $Q$ , se obtiene que precisamente  $U(1)$  es la simetría residual del grupo completo.

Por otro lado, analicemos más a detalle el sector escalar, ya que al cambiar a la norma unitaria, sobrevive un campo escalar  $H$ , el cual tiene un término cinético que surge de la derivada covariante. Al analizar el término de potencial, obtenemos que la parte del Lagrangiano que contiene el campo  $H$  se reduce a

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - (\lambda v^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4), \quad (2.10)$$

de donde podemos asociarle un término de masa a la partícula  $H$  de  $m_H^2 = 2\lambda v^2$ , el cual nos dice que las oscilaciones del potencial al rededor del valor esperado del vacío son masivas y corresponden a una partícula bosónica  $H$  que autointeractúa siempre y cuando estas oscilaciones sean pequeñas. Además, es posible obtener más información de la expresión de  $\mathcal{L}_H$  y de (2.4), acerca de sus interacciones y su acoplamiento con fermiones y bosones de norma. De la expresión (2.10) obtenemos los acoplamientos para la autointeracción cuadrada y cúbica como

$$g_{H^3} = 3(\sqrt{2}G_F)^{1/2}m_H^2 \quad \& \quad g_{H^4} = 3\sqrt{2}G_F m_H^2,$$

donde  $G_F$  es la constante de Fermi, el cual determina el valor del vev  $v$  a  $v = \frac{1}{(\sqrt{2}G_F)^{1/2}}$ .

Por último, es conveniente mencionar que el bosón de Higgs no sólo da términos de masa para los bosones de norma sino también para los fermiones del modelo, que son los quarks y los leptones, en términos del vev del doblete escalar, lo cual se explora a detalle en [11], para el sector de Yukawa.

## 2.6. Problemas del modelo estándar

El modelo estándar, que se presentó a grandes rasgos en la sección anterior, unifica las interacciones débiles y electromagnéticas, sin embargo, presenta ciertos problemas de los cuales se infiere que tal vez se trate en realidad de la versión a baja energía de una teoría más fundamental. La meta es buscar una teoría que, además de solucionar estos problemas, pueda unificar todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza y sea capaz de predecir nuevos fenómenos, las llamadas teorías de gran unificación o GUT's, por sus siglas en inglés. Algunos de estos problemas tienen que ver con la arbitrariedad de algunos aspectos en el modelo, como la forma de su grupo de simetrías o la forma de tratar las partes izquierdas o derechas de los fermiones; y muchos otros de los problemas son directamente cosas que no son posibles de explicar con el modelo estándar, como son la ausencia de gravedad como fuerza fundamental del modelo o el problema de justificar qué es la materia oscura y como encontrarla. A continuación se enumeran algunos de estos problemas, poniendo principal énfasis en los problemas del sector escalar del modelo estándar, el cual es de mucho interés en este trabajo.

- No contiene a la gravedad.  
Esto es porque la gravedad tratada como una teoría de norma, tiene un comportamiento muy distinto al de las otras interacciones fundamentales, por lo que el problema de incluir la gravedad en este tipo de modelos o del solo hecho de poder cuantizarla es un problema abierto hasta la fecha.
- Parámetros.  
Uno de los principales problemas resulta ser el de la existencia de tantos parámetros libres en la teoría, como son las masas de los fermiones, de los neutrinos, el

## 2. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

---

bosón de Higgs, los bosones  $Z$ , el ángulo de mezcla y las constantes de acoplamiento. Esto da un total de más de 18 parámetros libres; considerando las masas de los neutrinos cero. Pero en el caso de considerarse no cero dichas masa, el número de parámetros aumenta, dependiendo de si son tratados como fermiones de Dirac o de Majorana, haciendo un total de 9 parámetros extra [21].

- Violación de CP fuerte.

En el modelo estándar las interacciones débiles violan las transformaciones de carga y paridad al momento en que aparecen fases complejas en las matrices de mezcla de quarks, las cuales son proporcionales a la amplitud de dispersión de los procesos de decaimiento. De acuerdo a lo descrito por la cromodinámica cuántica (QCD) [22], se esperaría la presencia de una violación de CP en el sector de interacción fuerte, sin embargo esto no se ha observado experimentalmente hasta el momento a pesar de haber indicios teóricos dados por el modelo.

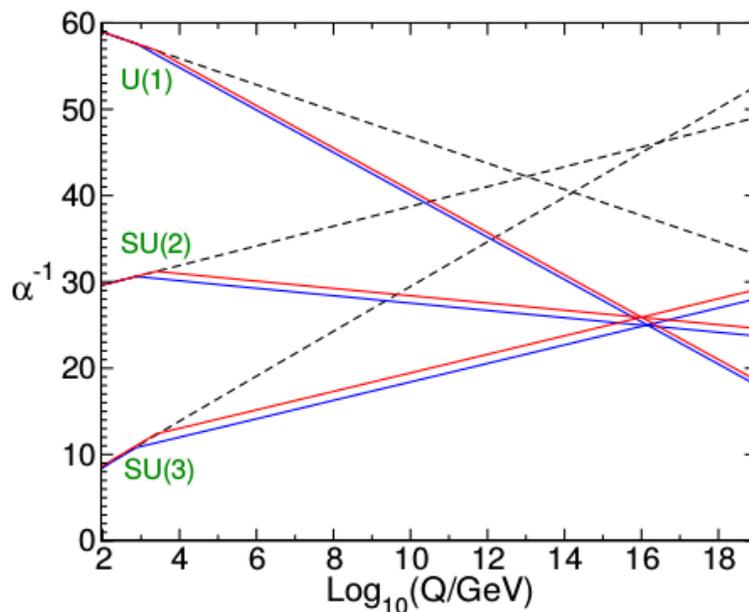
- Los acoplamientos del modelo estándar.

Una de las propuestas más populares para teorías de gran unificación, es la idea de introducir un grupo de simetrías de norma más grande que el del SM tal que, por medio de un rompimiento espontáneo parecido al del mecanismo de Higgs, se recupere el grupo  $G_{SM}$  a bajas energías. Como el grupo del modelo estándar consta de un producto de 3 distintos grupos, tenemos tres acoplamientos que no están relacionados aparentemente. Entonces, al proponerse un grupo de norma más grande, los subgrupos del SM resultan ser subgrupos del nuevo grupo, el cual unifica a sus tres acoplamientos en uno solo, y que, después de su rompimiento, se deben redefinir para cada una de las interacciones, dando los acoplamientos del SM; si el rompimiento se hace bajo condiciones que lo favorezcan.

Si consideramos los acoplamientos del modelo estándar en función de la escala de energía utilizando las ecuaciones del Grupo de Renormalización (RG), es posible observar si a alguna escala de alta energía se da una unificación entre estos parámetros en una sola constante de acoplamiento, tal vez parecida a la del caso del modelo  $SU(5)$  que es el que trataremos en este trabajo. La Figura 2.2 muestra el corrimiento de las constantes  $g_i$  bajo el grupo de renormalización<sup>1</sup>. Y como se puede observar, no se da la unificación de manera completa, pero sí se da por secciones, ya que la interacción electromagnética y débil se unifican al rededor de  $\sim 10^{13} GeV$  y la unificación de la fuerza fuerte con la débil se da a  $\sim 10^{17} GeV$ , cerca de la escala de Plank. Observamos que el acoplamiento  $g_1$  decrece de manera monótona, a diferencia de  $g_{1,2}$ , tal que si ese decrecimiento fuera un poco más lento con la escala de energía, se tendría un escenario más cercano al de unificación completa. Concluyendo con esto que por si solo el modelo estándar no unifica los tres acoplamientos de manera exacta a alguna escala de alta de energía, sin embargo ese comportamiento tiende a que presenten un valor cercano entre sí, siendo una pista más de que en una teoría extendida se complete la unificación

---

<sup>1</sup>En la imagen se usa la notación de estructura fina para para los acoplamientos



**Figura 2.2:** Evolución energética del inverso de los acoplamientos de norma en el SM.

Imagen tomada de [1, 2]

(con o sin sipersimetría).

- Sin masas de neutrinos.

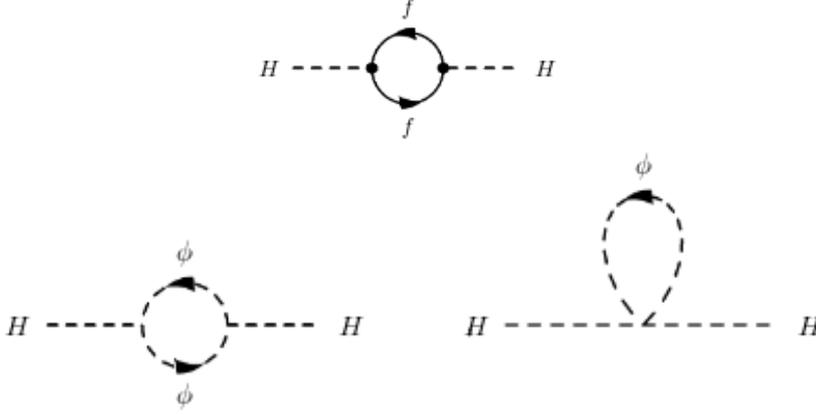
En el modelo no se tienen términos de masa para las partes izquierdas de los neutrinos ( $\nu_L$ ), del mismo modo que ni siquiera se tienen las partes derechas ( $\nu_R$ ), sin embargo es sabido que los neutrinos poseen una masa característica debido a evidencias experimentales asociadas a la oscilación de los mismos. Siendo estas relativamente pequeñas comparadas con el resto de partículas del contenido de materia del SM. Por lo que se requiere un mecanismo o un modelo para poder justificar el origen de las masas de los neutrinos, lo que ya no cae dentro del modelo estándar.
- Problema de la jerarquía.

La teoría descrita en esta sección requirió de la introducción del mecanismo de Higgs para dar masa a los bosones de norma (excepto al fotón) y a los fermiones, además se encontró que el bosón de Higgs tiene un término de masa de la forma  $m_H = 2\lambda v^2$ . Para que haya consistencia, la masa del bosón  $W$  debe ser del orden de la masa del Higgs, pero si se diera el caso de que la masa del Higgs fuera mucho mayor a la masa de los bosones  $W$ , se tendría para el acoplamiento cuártico que,  $g_{H^4} = 3/2g^2(m_H/m_W)^2$  crece mucho, al igual que  $g_{H^3}$ , dando una autointeracción del Higgs fuertemente acoplada, lo cual resulta un tanto problemático ya que no se

## 2. EL MODELO ESTÁNDAR DE PARTÍCULAS ELEMENTALES

---

puede dar un tratamiento perturbativo. Lo que se hará entonces es ver cuales son las correcciones a las masa del Higgs dadas por su acoplamiento con los bosones de norma y los fermiones de materia, como se muestra en los diagramas de Feynman de la [Figura 2.3](#).



**Figura 2.3:** Diagramas que contribuyen a la masa del bosón de Higgs a un loop en el SM.

Para la contribución a 1 loop de la [Figura 2.3](#), se tiene un comportamiento cuadráticamente divergente [[17](#), [23](#)]

$$\Delta m_H^2 = N_f \frac{\lambda_f^2}{8\pi^2} \left( -\Lambda^2 + 6m_f^2 \log \frac{\Lambda}{m_f} - 2m_f^2 \right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right),$$

donde  $\Lambda$  es la escala de corte, hasta la cual es válida la teoría y  $\lambda_f$  es un acoplamiento de Yukawa. De manera análoga, se tiene que para la contribución a 1 loop de los diagramas de Feynman, se mantiene el comportamiento cuadráticamente divergente.

$$\Delta m_H^2 = N_s \frac{\lambda_s^2}{16\pi^2} \left( -\Lambda^2 + 2m_s^2 \log \frac{\Lambda}{m_s} - 2m_s^2 \right) - \frac{N_s \lambda_s^2}{16\pi^2} v^2 \left( 1 - 2 \log \frac{\Lambda}{m_s} \right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right).$$

Si se elige la escala de corte del orden de la escala de gran unificación ( $\sim 10^{16} GeV$ ) o de la escala de Planck ( $\sim 10^{18} GeV$ ), se tendrá que la masa del Higgs es muy grande comparada con la escala de rompimiento electrodébil, por lo cual es necesario un contratérmino de un orden de precisión elevado ( $\sim 10^{30}$ ) para llevar la masa del higgs al rango  $\leq 1TeV$ . Este resulta un gran problema, ya que no es posible hacer algo como esto de manera natural. Entonces la cuestión es ¿Por qué sucede esto, por qué la masa del bosón de Higgs es más pequeña que la escala de Planck si no puede existir una cancelación fina como la que se requiere?

Ahora se considerará que existe una relación entre los acoplamientos del Higgs con fermiones y con escalares, tal que  $\lambda_S \propto \lambda_f^2$ , además de que  $N_f = 2N_s$ . Teniendo estas suposiciones, las correcciones a la masa del Higgs, considerando correcciones a 1 lazo de fermiones y escalares se modifica porque

$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_f^2 N_s}{2\pi^2} \left( \log \frac{\Lambda}{m_s} (m_f^2 - m_s^2) + 2m_f^2 \log \frac{m_s}{m_f} \right) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right).$$

Si además se diera el caso de que las masas de los fermiones y los escalares tienen la misma masa, se eliminarían todas las divergencias en las correcciones a la masa de  $H$ . Lo que se concluye con esto es que si existiera una simetría que relacionara los acoplamientos del Higgs y que haga que las masas de los fermiones sean igual que las de los escalares, entonces las correcciones a la masa del Higgs serían canceladas.

De acuerdo a los problemas que presenta el SM que se enumeraron en esta sección, se identifican varios aspectos e ingredientes extra que debe contener una extensión del Modelo estándar u otro modelo que quiera explicar la interacción de las fuerzas fundamentales.

1. Debe contener un mecanismo que genere las masas de neutrinos.

Actualmente, los modelos más aceptados son los relacionados al mecanismo de Seesaw, considerando masas de fermiones de Majorana, e incluso hay propuestas considerando masas de Dirac y masas de Majorana.

2. Una solución para el problema de ajuste fino y el problema de la jerarquía.

Existen muchos caminos para tratar de dar solución a estos problemas, algunos de los más conocidos son la supersimetría como simetría entre el número de fermiones y bosones; la introducción de un rompimiento parecido al que se da en QCD para la simetría quiral, introduciendo al Higgs como un condensado de fermiones; o la inclusión de dimensiones extra.

La idea de la supersimetría motivada por este problema de la jerarquía y de ajuste fino se explora a detalle en el siguiente capítulo, en el que además se dará una primera aproximación a extensiones del modelo estándar incluyendo esta supersimetría.



# Elementos básicos de supersimetría y las primeras extensiones al SM

---

La noción de simetría es un pilar fundamental en la física de partículas elementales, ya que en este contexto se construyen distintas teorías y modelos que nos dan una descripción detallada de la física a altas energías, apoyándose con elementos matemáticos de la teoría de grupos. A nivel de baja energía, una simetría global presenta las regularidades de un sistema en su totalidad, mientras que una simetría local (que depende de las coordenadas) explica y unifica constituyentes fundamentales del sistema de manera individual en cada punto. En nuestro trabajo, estamos interesados en las simetrías a un nivel cuántico, para poder así identificar las propiedades infrarrojas y ultravioletas de una teoría como el modelo estándar, además de poder analizar su renormalizabilidad. La supersimetría, entendida como una simetría en el sentido más general resulta ser una simetría "máxima", ya que unifica las simetrías del espacio-tiempo con simetrías internas, así como el número de partículas bosónicas con las fermiónicas, y surge de los intentos de extender el álgebra de Poncairé para mezclar representaciones con distintos números cuánticos en el espín. Esta supersimetría viene motivada por distintas áreas, y promete resolver algunos problemas particulares del modelo estándar y las teorías de gran unificación, la mayoría de estas motivaciones relacionan las ideas de unificación de todas las fuerzas de la naturaleza, resaltando entre todas ellas las siguientes:

- La unificación de los acoplamientos de norma
- Solución del problema de la jerarquía
- Materia Oscura en el universo

Desafortunadamente no hay evidencia experimental hasta la fecha de que exista esta supersimetría, lo cual hace que muchos científicos duden de si se trata en realidad de una simetría fundamental de la naturaleza. Desde el punto de vista teórico; independientemente de si la supersimetría es la teoría final o no, su estudio nos da

un entendimiento más amplio de la teoría cuántica de campos y tal vez sea un paso importante para encontrar una teoría más fundamental.

En esta sección se intentará dar una descripción corta sobre el álgebra supersimétrica, el formalismo de súper-espacios y súper-campos y su uso para la construcción de lagrangianos de interacción quiral y de norma en este contexto, así como nociones de como debe ser el rompimiento de SUSY.

### 3.1. El álgebra de supersimetría

La idea de tener una simetría entre bosones y fermiones se manifiesta en el hecho de tener una transformación que pase de un estado bosónico a uno fermiónico, y viceversa. Si  $Q$  es un generador de este tipo de transformaciones, su acción sobre estados de partículas debe ser de la forma

$$Q|boson\rangle = |fermion\rangle, Q|fermion\rangle = |boson\rangle, \quad (3.1)$$

donde  $Q$  debe ser un espinor. Entonces  $Q$  y  $Q^\dagger$  son operadores fermiónicos, es decir, cambian el espín de un estado a uno semi-entero, modificando así la estadística. Con esto, y con el hecho de que los bosones y los fermiones conmutan y anti-conmutan entre ellos, respectivamente, se tiene que los generadores de SUSY anticonmutan entre sí. En el caso de teorías como el Modelo Estándar, la forma de estas simetrías está constreñida por el teorema de Coleman-Mandula [17, 24], implicando directamente que los generadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  deben satisfacer un álgebra con relaciones de conmutación y anti-conmutación como las siguientes

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger\} = 2\sigma_{\alpha,\dot{\alpha}}^\mu P_\mu, \quad (3.2)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{Q_{\dot{\alpha}}^\dagger, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\} = 0, \quad (3.3)$$

$$[P^\mu, Q_\alpha] = [P^\mu, Q_{\dot{\alpha}}^\dagger] = 0, \quad (3.4)$$

donde el operador  $P_\mu$  es el generador de traslaciones espacio-temporales; y  $\alpha$  y  $\dot{\beta}$  son índices espinoriales quirales y anti-quirales, respectivamente. En principio, la aparición del generador de traslaciones del lado derecho de la relación (3.2) no es de sorprender, ya que el vector  $P_\mu$  transforma como un objeto de espín 1, mientras que  $Q$  y  $Q^\dagger$  transforman cada uno como objetos de espín 1/2. Pero en un sentido un poco más físico, sí es sorprendente que la regla de conmutación de los operadores  $Q$  dé una traslación en el espacio-tiempo. Las notaciones y convenciones utilizadas de ahora en adelante se especifican mas a detalle dentro del apéndice B, junto con una breve discusión del álgebra de Grassman.

Al tratarse de una extensión del álgebra de Poncairé, también se tienen los generadores  $M^{\mu\nu}$  dentro del súper-álgebra; de forma que los estados de partículas que vivan en las irreps (representaciones irreducibles) del súper álgebra de Poncairé contendrán estados de fermiones y de bosones al mismo tiempo, los llamados súper-multipletes. Además

se observa que el operador  $P_\mu P^\mu$  conmuta con los generadores de supersimetría y con los generadores de traslaciones y rotaciones espacio-temporales, al igual que el operador  $C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}$ <sup>1</sup>, por lo que en analogía directa con el caso de mecánica cuántica para el momento angular, etiquetamos a los súper-multipletes con los eigenvalores de estos operadores. De manera que las partículas que vivan en el mismo multiplete de una irrep tendrán las mismas masas. Algo similar sucede con los generadores de los grupos de norma, al conmutar los generadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  con estos, tenemos que las partículas que viven en un mismo súper-multiplete también vivirán en la misma irrep del grupo de norma, compartiendo con ello números cuánticos como son carga, isoespín débil, etc.

Como se sabe, se tendrán en un mismo multiplete bosones y fermiones, siguiendo la discusión de [1], los grados de libertad fermiónicos  $n_F$  tanto bosónicos  $n_B$  son iguales para cada súper-multiplete. Las posibles elecciones para los multipletes que son fenomenológicamente consistentes con esta afirmación son lo siguientes:

- **Quiral.** Un fermión de Weyl y dos campos escalares reales, o en su defecto un solo campo escalar, pero esta vez complejo, codificando así esos dos grados de libertad que se tendría con dos escalares reales.
- **De norma.** En el caso del modelo estándar, un bosón de norma no masivo antes del rompimiento espontáneo del grupo de norma, que contiene dos grados de libertad bosónicos ( $N_B = 2$ ) y por la simetría, debemos tener uno o varios fermiones de Weyl igual no masivos. Debido al número de grados de libertad del bosón, será necesario solo un fermión. Estos fermiones de Weyl que viven en la representación adjunta del grupo de norma son los llamados gauginos, y tienen la peculiaridad de que sus partes izquierdas y derechas comparten la misma regla de transformación bajo el grupo.

Estos dos tipos de súper-multipletes son los únicos que se tomarán en cuenta para fines de este trabajo; sin embargo existen otras posibilidades, de acuerdo a la consistencia con los números de grados de libertad, como el caso en el que se considera a un gravitón y su compañero el gravitino.

## 3.2. El súper-espacio

Comencemos ahora abordando un concepto que habla de la supersimetría en un sentido un tanto geométrico, el cual se obtiene agregando coordenadas de distinto tipo a las coordenadas usuales del espacio-tiempo, teniendo así una variedad constituida por coordenadas espacio-temporales y coordenadas con grados de libertad fermiónicos. Representados de la siguiente forma

---

<sup>1</sup>Este es uno de los operadores de Casimir para el álgebra de SUSY, que difiere del Casimir para Poincaré (definido en términos del Vector de Pauli-Lubanski) debido a que los súper-multipletes contienen tanto grados de libertad bosónicos como fermiónicos.

### 3. ELEMENTOS BÁSICOS DE SUPERSIMETRÍA Y LAS PRIMERAS EXTENSIONES AL SM

---

$$x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}},$$

donde los términos  $\theta^\alpha$  y  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  son variables de Grassman [25] que anti-conmutan entre si. Lo que se quiere lograr es, describir al contenido de un súper-multiplete en términos de una función de las coordenadas de este súper-espacio, y que al mismo tiempo transforme bajo el grupo extendido de Poncairé. Consideramos entonces una función general de las coordenadas del súper-espacio  $S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ , la que podemos escribir como una serie en potencias de las variables de Grassman, por lo cual solo se extenderá hasta orden cuadrático en  $\theta$  y  $\bar{\theta}$ .

$$S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = \phi(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \theta\theta(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x), \quad (3.5)$$

donde debe hacerse notar que  $S$  es una cantidad escalar debido a que no tiene índices ni espacio-temporales ni espinoriales. Ahora, para ver su regla de transformación en el súper-espacio bajo el grupo de SUSY, debemos analizar como es que transforman cada uno de sus constituyentes; los que vienen dados por cuatro campos fermiónicos  $\phi$ ,  $\bar{\chi}$ ,  $\rho$  y  $\bar{\lambda}$ ; ocho campos bosónicos, representados por cuatro campos escalares complejos  $\phi$ ,  $M$ ,  $N$  y  $D$ ; además de un campo vectorial  $V_\mu$ . A continuación consideramos una transformación en el súper-espacio para el súper-campo escalar  $S$ .

$$S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \mapsto e^{-ia_\mu O^\mu} S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}),$$

siendo esta una transformación en general para  $S$  cuando es tratado como un vector en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , donde  $O^\mu$  es el generador del grupo y  $a_\mu$  su parámetro de transformación. Para el caso en que  $O^\mu$  son los generadores  $P^\mu$  o  $M^{\mu\nu}$ , el parámetro  $a$  es una cantidad vectorial; contrario al caso en el que  $O$  es  $Q$  o  $\bar{Q}$ , siendo  $a$  un escalar  $\epsilon$  o  $\bar{\epsilon}$ , según se el caso. Por otro lado, observemos que el súper-campo también puede ser tratado como un operador actuando sobre un espacio general de funciones parecido al de mecánica cuántica, teniendo así una regla de transformación como la siguiente

$$S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \mapsto e^{-ia_{\mu\nu} O^{\mu\nu}} S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) e^{ia_{\mu\nu} O^{\mu\nu}}, \quad (3.6)$$

semejante a la acción de un grupo sobre un operador. De manera que si hacemos que  $O$  sea el generador del álgebra de Poncairé  $P_\mu$ , tendremos que al comparar las transformaciones de las ecuaciones (3.2-3.4), la forma del generador  $P_\mu$  es  $-i\partial_\mu$ . Si ahora se hace corresponder al generador con los generadores  $Q$  y  $Q^\dagger$ , se tendrá por un lado el análogo al caso de  $P^\mu$

$$S \mapsto e^{-i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})} S = S(x^\mu + i\epsilon\sigma^\mu\theta\bar{\theta} + i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\theta, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}),$$

y por otro que

$$S \mapsto e^{-i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})} S e^{i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})} \sim (1 - i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})) S ((1 + i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}))),$$

que al comparar ambas expresiones se obtiene

$$(1 - i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}))S((1 + i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}))) = S(x^\mu + i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} + i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\theta, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}),$$

donde se puede inferir que la acción conjunta de  $Q$  y  $\bar{Q}$  sobre  $S$  nos debe dar una traslación en las coordenadas  $x^\mu$  si queremos que se cumpla la relación de anti-conmutación. Por su parte, se debe tener una traslación en las coordenadas fermiónicas debido a que el operador  $Q$  sólo actuará sobre variables  $\theta$  y  $\bar{Q}$  sólo sobre variables  $\bar{\theta}$ , obteniendo que la forma de los generadores espinoriales será <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}} + (\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \\ \bar{Q}_{\dot{\beta}} &= i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} - (\sigma^\mu\bar{\theta})_{\dot{\beta}}\partial_\mu,\end{aligned}$$

y que se puede verificar fácilmente utilizando propiedades de las variables de Grassman que satisfacen la relación de anti-conmutación. Con esta forma de los generadores  $Q$ ,  $\bar{Q}$  y  $P^\mu$ , es posible encontrar la regla de transformación para cada una de las componentes del súper-campo  $S$ , partiendo de que una transformación infinitesimal para  $S$  será de la forma  $\delta S = i(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q})S$ . Resultando lo que se quería, la regla de transformación para cada componente del campo (3.6)

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \epsilon\phi + \bar{\epsilon}\bar{\chi}, \\ \delta\psi &= 2\epsilon M - \sigma^\mu\bar{\epsilon}(i\partial_\mu\phi + V_\mu), \\ \delta\bar{\chi} &= 2\bar{\epsilon}N + \epsilon\sigma^\mu(i\partial_\mu - V_\mu), \\ \delta M &= \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\epsilon}, \\ \delta N &= \epsilon\rho + \frac{i}{2}\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}, \\ \delta V_\mu &= \epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda} - \rho\sigma_\mu\bar{\epsilon} - \frac{i}{2}(\partial^\nu\psi\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon - \bar{\epsilon}\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu\partial^\nu\bar{\chi}), \\ \delta\bar{\lambda} &= 2\bar{\epsilon}D - \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\epsilon})\partial_\mu V_\nu + i\bar{\sigma}^\mu\epsilon\partial_\mu M, \\ \delta\rho &= 2\epsilon D - \frac{i}{2}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\epsilon)\partial_\mu V_\nu - i\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu N, \\ \delta D &= -\frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} + \rho\sigma^\mu\bar{\epsilon}).\end{aligned}$$

Se tiene finalmente una función  $S$  de las coordenadas del súper-espacio que transforma ante la extensión del grupo de Poncairé; como se hizo la identificación del contenido del súper-multipletes con esta función  $S$ , se deben ahora establecer condiciones sobre este súper-campo para que sea consistente con los caso de multipletes que analizamos,

<sup>1</sup>La forma de estos operadores dependerá de la elección de coordenadas  $x^\mu$ .

### 3. ELEMENTOS BÁSICOS DE SUPERSIMETRÍA Y LAS PRIMERAS EXTENSIONES AL SM

---

el quiral y el vectorial; para ello es necesario hablar de una noción de derivada en el súper-espacio.

Al construir el súper-espacio como una variedad formada por coordenadas  $x^\mu$  y coordenadas de Grassman <sup>1</sup>, es un tanto intuitivo pensar en la noción de una derivada que codifique como cambian las funciones de estas coordenadas en cada punto del súper-espacio. En este sentido, la variación del espacio-tiempo viene dado por la derivada usual, mientras que un intento para codificar las variaciones de la parte fermiónica es la derivada respecto a las variables  $\theta, \bar{\theta}$ ; sin embargo, esta elección ingenua resulta ser incorrecta, debido a la estructura de las álgebras gradadas. Como el objetivo final será escribir lagrangianos para teorías supersimétricas, debemos encontrar la forma de codificar esta información en un objeto que sea súper-covariante. Consideramos para ello los siguientes operadores de derivada

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad (3.7)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu. \quad (3.8)$$

Estos operadores anticonmutan con todos los generadores fermiónicos, y con sigo mismos, además de cumplir la regla de anti-conmutación

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu.$$

Y como se esperaba, es súper-covariante al actuar sobre un súper-campo, es decir, que la cantidad  $D_\alpha S$  es un súper-campo, al igual que la  $\bar{D}_{\dot{\alpha}} S$ . Teniendo esta derivada covariante para el súper-campo, podemos restringir las componentes del súper-multipletes en términos de esta, de manera que al retirar componentes siga siendo un súper-campo. Entonces un súper-campo quiral; que ya había sido mencionado antes, se define en términos de la constricción

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0,$$

y su conjugada compleja será análogamente

$$D_\alpha \bar{\Phi} = 0,$$

siendo un campo anti-quiral el que satisface esta última condición. Por otro lado, el súper-campo que cumple con la constricción de ser real”

$$V = V^\dagger,$$

se le llama súper-campo vectorial.

Para visualizar explícitamente el contenido de campos de un súper-campo quiral, consideramos la siguiente transformación  $z^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ , de modo que la derivada covariante de  $\Phi$  cambia por

---

<sup>1</sup>Una definición más precisa se da en la referencia [26].

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(z^\mu, \theta, \bar{\theta}) = i(\theta\sigma)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu\Phi - (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z^\mu}\frac{\partial z^\mu}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}) = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0, \quad (3.9)$$

de donde se infiere que el súper-campo no debe de contener componentes con componentes con la variable  $\bar{\theta}$ . Entonces la expresión más general de este campo es

$$\begin{aligned} \Phi(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = & \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu\phi, \end{aligned}$$

donde la identificación física del componente de campos se aclarará más adelante en el contexto del modelo estándar.

Precediendo de manera parecida, la forma más general de un súper-campo vectorial es

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + i\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-i\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)) \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta(i\lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x))\frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(D - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C). \quad (3.10) \end{aligned}$$

Una propiedad útil es que, si tenemos que  $\Lambda$  es un súper-campo quiral, la combinación  $i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$  será un súper-campo vectorial. Entonces definimos una transformación generalizada de norma para el súper-campo  $V$  como

$$V \mapsto V - \frac{i}{2}(\Lambda - \Lambda^\dagger),$$

que como era de esperarse; en términos de consistencia con lo ya conocido, induce una transformación de norma para la componente vectorial del súper-campo

$$V_\mu \mapsto V_\mu - \partial_\mu\alpha.$$

En términos de las componentes del súper-campo quiral  $\Lambda$ , podemos restringir las componentes del súper-campo vectorial, para definir así la llamada "Norma de Wess Zumino" (WZ). El componente de campos de  $V$  y por tanto de  $\Lambda$  en la norma de Wess Zumino es

$$V_{WZ} = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D,$$

con un contenido de partículas reducido sólo a un campo vectorial, dos fermiones de Weyl y un campo auxiliar  $D$  el cual se explicará más a detalle un poco más adelante. Cabe mencionar que la transformación a la norma WZ eliminó los campos extra en la definición general de súper-campo vectorial, además de hacer la conexión entre este lenguaje y las transformaciones de norma en el lenguaje de campos en el espacio-tiempo.

### 3.3. Teorías físicas en el lenguaje de súper-campos

En la sección anterior se describieron algunos elementos básicos del súper-espacio y de los súper-campos, que son una generalización a los campos que conocemos de QFT y de mecánica cuántica, y que constituyen una poderosa herramienta para poder escribir una teoría física, ya que su estructura matemática hace muy sencillo el poder escribir lagrangianos libres y de interacción. A continuación se explicará como es este tratamiento en general para una teoría de campo con una supersimetría; es decir, con dos generadores  $Q$  y  $\bar{Q}$ , siguiendo la discusión de P. Martin en [1].

Primero definimos una función de súper-campos  $W$ , que debe ser holomorfa en  $\Phi$  (o en  $\bar{\Phi}$ ), dicha función nos dará información sobre las interacciones y las masas del contenido de partículas de nuestra teoría de campos supersimétrica, ya que esta información codificada en el súper-campo quiral es la misma que está contenida en sólo su componente escalar. La forma más general posible de este "súper-potencial"  $W$  es

$$W = L^i \Phi_i + \frac{1}{2} M^{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{6} y^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \quad (3.11)$$

Esta forma del potencial se verá modificada debido a que el súper-potencial está restringido a ser invariante ante transformaciones de norma, de modo que esto constreñirá al conjunto de parámetros de la teoría  $M$ ,  $y$  y  $L$ , rescatando sólo a aquellos que sean no nulos. Los parámetros  $L^i$  son no nulos únicamente cuando  $\Phi_i$  es un singlete del grupo de norma; los acoplamientos de Yukawa  $y^{ijk}$  se mantienen cuando el producto  $\Phi_i \Phi_j \Phi_k$  transforma como un singlete; finalmente los parámetros provenientes de la matriz de masas  $M^{ij}$  son no nulos siempre y cuando los súper-campos  $\Phi_i$  y  $\Phi_j$  transformen en representaciones (en general reducibles) del grupo de norma que sean conjugadas entre sí.

Ahora bien, lo que quiere es poder construir Lagrangianos y acciones supersimétricas utilizando esta función potencial  $W$  y lo que ya se sabe sobre los súper-campos. Debido a que la acción en teoría de campos esta restringida a ser una función real, el súper-campo que debemos utilizar para esto debe ser un súper-multiplete vectorial  $V$ , entonces la densidad Lagrangiana será la integral del súper-campo únicamente en las componentes espinoriales

$$\mathcal{L}(x) = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V(x, \theta, \bar{\theta}) = V(x, \theta, \bar{\theta})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}},$$

que resulta ser la restricción del súper-campo  $V$  a sus componentes en  $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ , la que se conoce como contribución de tipo  $D$  a la densidad Lagrangiana. Al igual que esta, existen otros tipos de contribución y se consideran de esa manera debido a que la componente bajo una transformación de SUSY cambia como una derivada total<sup>1</sup>. Entonces el Lagrangiano completo viene de la suma de las contribuciones del término  $D$

---

<sup>1</sup>La componente  $D$  de un súper-campo general transforma como una derivada total, al igual que la componente  $F$  de un súper-campo quiral.

de un súper-campo vectorial y el término  $F$  de un súper-campo quirral (y su conjugada compleja).

En general, el Lagrangiano para una teoría supersimétrica será de la forma

$$\mathcal{L}(x) = ([W(\Phi_i)]_F + c.c) + [\Phi^{\dagger i} \Phi_i]_D, \quad (3.12)$$

donde se ha usado al súper-potencial  $W$  para la parte de los términos  $F$ , ya que es una función holomorfa de  $\Phi$ .

Ahora consideremos que se quiere un Lagrangiano para una teoría de norma no abeliana supersimétrica. Es conveniente recordar que un súper-campo real incluye un campo vectorial  $A_\mu$  que corresponderá al campo de norma, entonces de manera análoga al caso de teoría cuántica de campos, se define el campo de intensidad para el súper-campo vectorial de la siguiente manera

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}D(e^{-V} D_\alpha e^D).$$

Se considera entonces una simetría en un súper-campo quirral bajo transformaciones del grupo  $G$  de norma, en una representación  $R$  en general reducible, con generadores  $T_i^{ak}$ , entonces  $\Phi$  transformará como

$$\Phi^{\dagger i} \mapsto \Phi^{\dagger j} (e^{-2ig_a \Lambda^a T^a})^i_j, \quad \Phi_i \mapsto (e^{2ig_a \Lambda^a T^a})^j_i \Phi_j,$$

siendo  $\Lambda^a$  súper-campos quirales, que representan el parámetro de la transformación. Para el caso en el que no se tiene una simetría de norma, el término  $\Phi^{\dagger} \Phi$  daba una contribución de tipo  $D$  al Lagrangiano, pero en este caso ese término deberá ser invariante ante el grupo de gauge; sin embargo, dada la naturaleza no abeliana de  $G$ , resulta que no es invariante. Entonces se define la siguiente cantidad análoga a  $\Phi^{\dagger} \Phi$  que será invariante ante  $G$  y ante SUSY

$$[\Phi^{\dagger i} (e^{2g_a T^a V^a})^j_i \Phi_j]_D, \quad (3.13)$$

tal que para cada generador  $T$  existe un súper-campo vectorial que contiene al vector de norma y a su compañero supersimétrico. Por tratarse de un grupo no conmutativo, la regla de transformación para la cantidad de la ecuación (3.13) determina la regla de transformación para los súper-campos vectoriales  $V^a$ , por medio de la regla de Baker-Campbell-Hausdorff, teniendo que

$$V^a \mapsto V^a + i(\Lambda^{*a} - \Lambda^a) + g_a f^{abc} V^b (\Lambda^{*c} + \Lambda^c) - \frac{i}{3} g_a^2 f^{abc} f^{cde} V^b V^d (\Lambda^{*e} - \Lambda^e) + \dots,$$

donde se usó que los generadores satisfacen la regla de conmutación  $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ , con constantes de estructura  $f^{abc}$ . Con esto se asegura la invarianza ante simetrías del grupo de norma, y bajo supersimetría. Finalmente, para construir el Lagrangiano general para una teoría de este tipo, utilizamos la contribución de tipo  $F$  de

### 3. ELEMENTOS BÁSICOS DE SUPERSIMETRÍA Y LAS PRIMERAS EXTENSIONES AL SM

---

la cantidad  $Tr[W^\alpha W_\alpha]_F$ , que es invariante ante  $G$  y SUSY.<sup>1</sup> Por tanto, considerando los términos de contribución  $F$  y  $D$  antes mencionados, el lagrangiano quedará como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4k_a g_a^2} Tr[W^\alpha W_\alpha]_F + c.c. + [\Phi^{\dagger i} (e^{2g_a T^a V^a})^j_i \Phi_j]_D + ([W(\Phi)]_F + c.c.). \quad (3.14)$$

Cabe remarcar un par de cosas más llegado a este punto, ya que el tratamiento descrito para construir un Lagrangiano en términos de súper-campos fue hecho para teorías que son renormalizables. Con esto en mente, la expresión de la ecuación (3.14) debería contener en general factores extra que hacen que el lagrangiano sea o no renormalizable, por ejemplo

$$\mathcal{L} = [K(\Phi_i, \tilde{\Phi}^{*j})]_D + ([\frac{1}{4}f(\Phi_i)Tr[W^\alpha W_\alpha] + W(\Phi_i)]_F + c.c.),$$

contiene a primera vista dos factores adicionales, los cuales se enumeran a continuación.

- Potencial de Kähler  $K$ . Es una función de súper-campos quirales y de antiquirales, donde se ha definido el súper-campo  $\tilde{\Phi}^* = \Phi^* e^V$ , que muestra un factor dependiente de un súper-campo real, el que lo dota de la propiedad de invarianza de norma. En el caso de una teoría renormalizable, este potencial  $K$  adquiere una forma muy sencilla, debido a que contribuciones aditivas a su término  $D$  son derivadas totales del espacio-tiempo y no contribuyen a la acción. La forma de  $K$  depende de la teoría o modelo en el que se esté trabajando
- Función cinética de Norma  $f$ . Corresponde a una función holomorfa de súper-campos quirales, que se puede escribir con índices de la representación adjunta si se escribe en términos de componentes matriciales del campo de intensidad  $W_a^a$ . Para el caso de una teoría renormalizable, la función cinética de norma adquiere una forma proporcional al acoplamiento para el término cinético del súper-campo  $V$  ( $f = \tau$ ), y proporcional a  $\delta_{ab}$  en término de sus componentes.
- Adicionalmente, hay un ingrediente extra que no necesariamente se incluye si la teoría es renormalizable o no, y que se menciona debido a que llega a estar presente. Esta parte es la contribución de un término asociado a una simetría abeliana  $U(1)$ , y que aparece debido a la naturaleza del campo de norma al no tener cargas bajo el grupo mencionado. Este factor es el siguiente

$$\mathcal{L}_{FI} = \kappa[V]_D = \frac{1}{2}\kappa D, \quad (3.15)$$

y es conocido como término de Fayet-Iliopoulos, que solo se incluye en teorías de norma no abelianas

---

<sup>1</sup>Se consideró una nacionalización de los generadores  $Tr[T^a T^b] = k_a \delta_{ab}$ , sin convención de suma.

Con estas herramientas, es posible escribir una teoría física como el modelo estándar en este lenguaje de súper-campos, la cual resultaría siendo la primera extensión al SM en el que se incluye una supersimetría,  $\mathcal{N} = 1$ . La teoría resultante es conocida como el modelo estándar mínimo supersimétrico (MSSM), y se tratará con detalle en una sección posterior; pero ahora es conveniente hablar de un tema crucial cuando se trabaja con teorías SUSY's, el rompimiento de supersimetría, que es muy relevante debido a que fenomenológicamente hablando, la simetría entre bosones y fermiones dentro del mismo multiplete está rota, lo que se sabe de acuerdo a las observaciones experimentales, siendo un punto crucial el que no se hayan podido detectar las partículas supersimétricas. Entonces si queremos que una teoría sea consistente con lo observado, debemos incluir un mecanismo para romper esta simetría.

### 3.4. Rompimiento de la supersimetría: rompimiento suave

Existen muchos mecanismos por el cual la simetría entre bosones y fermiones se rompe, todos ellos motivados en tener un modelo fenomenológicamente consistente con lo observado o lo esperado. Pero en lo correspondiente a de este trabajo, solo se considerará uno de estos mecanismos, en el que se introducen términos al lagrangiano que rompen explícitamente la simetría, con un acoplamiento relativamente débil. Que estará en consistencia con la jerarquía entre la escala electrodébil y la escala de gran unificación.

De manera análoga al rompimiento de la simetría electrodébil en el modelo estándar, se espera que la supersimetría se rompa espontáneamente, de manera que el vacío ya no sea invariante ante transformaciones de SUSY y que ésta simetría permanezca oculta a bajas energías, justificando así el hecho de que no hayan sido observadas las partículas supersimétricas. Siguiendo con la analogía del rompimiento electrodébil, para este caso existe un sector que comunica al de rompimiento de SUSY con el sector de materia (que contiene a los quarks y los leptones), el cual contiene tres tipos de interacciones para comunicar con los sectores en cuestión. Estas son, mediación por gravedad y por partículas de gauge, de manera que la densidad Lagrangiana de una teoría general con rompimiento suave de la supersimetría se termina escribiendo como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SUSY} + \mathcal{L}_{soft},$$

siendo  $\mathcal{L}_{soft}$  contribuciones al sector de materia o sector observable, que explícitamente se escriben como

$$\mathcal{L}_{soft} = \left( -\frac{1}{6} A^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k - \frac{1}{2} b^{ij} \phi_i \phi_j - c^i \phi_i \frac{1}{2} M_a \lambda^a \lambda^a + h.c. \right) - (m^2)_i^j \phi^{i*} \phi_j, \quad (3.16)$$

estos parámetros  $A^{ijk}$ ,  $b^{ij}$ ,  $c_i$ ,  $M_a$  y  $(m^2)_i^j$  son llamados términos de rompimiento suave. En el lenguaje de súper-campos,  $\phi_i$  sería la componente escalar del súper-campo quiral  $\Phi_i$  y  $\lambda$  es el gaugino del correspondiente grupo de norma. Los otros factores

corresponden a términos de masa para el gaugino  $M_a$ , término de masa para la parte relacionada con la gravedad, y términos de interacción para el campo escalar. Con lo que se observa directamente que los sumandos de (3.16) inducen nuevas interacciones y por tanto correcciones a las masas de las partículas, siendo de hecho, libres de divergencias cuadráticas a todos los ordenes. Esto es la parte crucial de la elección de los términos de rompimiento suave, ya que algunas otras elecciones sobre los parámetros podría inducir divergencias de cuadráticas<sup>1</sup>.

### 3.5. Primera extensión al SM: El modelo mínimo supersimétrico

Ahora que se tienen bastantes herramientas para hablar de una teoría del campo supersimétrica, es razonable querer escribir al modelo estándar como un teoría con una supersimetría; esta resultaría ser una extensión al mismo modelo, ya que introduce nuevos ingredientes y nuevas interacciones, en vigor de tratar de resolver algunos de los problemas que se presentaron en el capítulo anterior. Para hacer esta traducción entre el lenguaje de supe-campos y el lenguaje del modelo estándar, identifiquemos varios elementos para comenzar, como son el contenido de partículas en este nuevo modelo supersimétrico y su relación con los multipletes de partículas en el súper-espacio, así como la inclusión de un doblete de Higgs adicional en el modelo.

De acuerdo a lo visto en este capítulo sobre la simetría entre bosones y fermiones, cada multiplete con grados de libertad fermiónicos debe tener de igual manera el mismo número de grados de libertad bosónicos; y recordando nuestra descripción sobre el SM, se tiene que este contiene alrededor de 90 grados fermiónicos y 28 bosónicos. Debido a que el doblete de Higgs tiene un v.e.v. no nulo, su compañero supersimétrico no puede ser alguno de los fermiones de la teoría, ya que se violaría el número bariónico o el leptónico, según corresponda. Esto es un ejemplo claro de que no se pueden elegir los compañeros supersimétricos entre las partículas de la teoría, sino que se deben agregar más partículas, es decir, para partículas ya conocidas se agregan nuevas partículas.

Volviendo al caso del bosón de Higgs, la aparición de su supersimetrización hace que surjan anomalías quirales, que no pueden ser canceladas por si solas como en el caso del SM entre quarks y leptones, por lo que es necesaria la inclusión de un nuevo doblete de Higgs con número cuántico de hipercarga opuesto al del Higgs del modelo estándar<sup>2</sup>, cancelando las anomalías quirales [27]. El contenido de partículas del MSSM viene especificado en la Tabla 3.1, siguiendo una convención en la notación análoga a la de la descripción de la Tabla 2.2, sólo que ahora los multipletes corresponden a

---

<sup>1</sup>Es cierto que los términos de rompimiento suave contienen divergencias, pero del tipo logarítmico, que son un tanto más tratables.

<sup>2</sup>El Higgs del modelo estándar tiene números cuánticos  $H_{SM} = (1, 2, -1)$ , y el doblete adicional tendrá  $H_2 = (1, 2, 1)$ .

S-campo	Bosones	Fermiones	$(SU(3), SU(2), U(1))$
Gauge			
$G^a$	$g^a$	$\tilde{g}^a$	$(8, 0, 0)$
$V^i$	$W^\pm, Z$	$\tilde{w}^\pm, \tilde{z}$	$(1, 3, 0)$
$V$	$B$	$\tilde{b}$	$(1, 1, 0)$
Materia			
$L_i$	$\tilde{L}_i = (\tilde{\nu}, \tilde{e})_L$	$L_i = (\nu, e)_L$	$(1, 2, -1)$
$E_i$	$\tilde{E}_i = \tilde{e}_R$	$E_i = e_R$	$(1, 1, 2)$
$Q_i$	$\tilde{Q}_i = (\tilde{u}, \tilde{d})_L$	$Q_i = (u, d)_L$	$(3, 2, 1/3)$
$U_i$	$\tilde{U}_i = \tilde{u}_R$	$U_i = u_R^c$	$(\bar{3}, 1, -4/3)$
$D_i$	$\tilde{D}_i = \tilde{d}_R$	$D_i = d_R^c$	$(\bar{3}, 1, 2/3)$
Higgs			
$H_1$	$H_1$	$\tilde{H}_1$	$(1, 2, -1)$
$H_2$	$H_2$	$\tilde{H}_2$	$(1, 2, 1)$

**Tabla 3.1:** Contenido de partículas del MSSM con sus respectivos números cuánticos.

súper-campos. Donde el índice  $i$  se refiere al índice de familia, mientras que  $a$  se refiere al índice del grupo.

El modelo MSSM es conocido así debido a su mínimo contenido de ciertos ingredientes que constituyen a una teoría, como son el grupo de norma, que en este modelo resulta ser el mismo que el del modelo estándar sin supersimetría; el contenido de partículas (ya especificado) y el número de parámetros de rompimiento suave de la supersimetría. Estos últimos protegen la aparición de divergencias cuadráticas además de romper explícitamente la invarianza ante transformaciones de SUSY, y en el modelo estándar mínimo supersimétrico corresponden a diferentes tipos de acoplamientos y partículas, tales como términos de masa para gauginos, términos de masa para sfermiones, acoplamientos cúbicos para escalares en distinto multiplete (resaltando el Higgses y sfermiones) y finalmente autointeracciones para Higgses. Todos estos términos, de acuerdo a lo visto en (3.16) y a la Tabla 3.1 se escriben explícitamente como

### 3. ELEMENTOS BÁSICOS DE SUPERSIMETRÍA Y LAS PRIMERAS EXTENSIONES AL SM

---

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gaugino}^{soft} &= -\frac{1}{2}(M_1\tilde{b}\tilde{b} + M_2\tilde{w}^k\tilde{w}^k + M_3\tilde{w}^a\tilde{w}^a + h.c.), \\
\mathcal{L}_{ferm}^{soft} &= -(m_Q^2\tilde{Q}_i^\dagger\tilde{Q}_i + m_L^2\tilde{L}_i^\dagger\tilde{L}_im_U^2\tilde{U}_i^\dagger\tilde{U}_i + m_D^2\tilde{D}_i^\dagger\tilde{D}_i + m_E^2\tilde{E}_i^\dagger\tilde{E}_i), \\
\mathcal{L}_{\phi\phi}^{soft} &= -(a_u\tilde{U}\tilde{Q}H_1 - a_d\tilde{D}\tilde{Q}H_2 - a_e\tilde{E}\tilde{L}H_2 + h.c.), \\
\mathcal{L}_{Higgs}^{soft} &= -(m_{H_1}^2H_1^\dagger H_1 + m_{H_2}^2H_2^\dagger H_2 + b\mu(H_2H_1 + h.c.)),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde se tiene convención de suma para los índices de grupo y los índices de familia. Los parámetros  $a$  corresponden directamente con los acoplamientos cúbicos de Yukawa, siendo matrices de  $3 \times 3$  en el espacio de familia; al igual el parámetro  $b$  que se corresponde con un término de masa del tipo  $m^{ij}$ . Y que por consistencia con la jerarquía electrodébil, los coeficientes de la forma  $a$  y  $M_k$  deben ser del orden de la escala  $m_{soft} \sim 10^3 GeV$  [1, 27].

Para continuar describiendo al modelo MSSM; según las herramientas que se tienen de súper-campos, debemos especificar su súper-potencial y demás elementos para escribir su lagrangiano, el que resultará de la suma del lagrangiano invariante ante SUSY y  $G_{SM}$ , y el lagrangiano de los términos de rompimiento suave (3.17). El potencial  $K$  para este caso es renormalizable y se escribe como

$$K = \bar{\Phi}e^{2g_a V^a}\Phi.$$

Además, la función cinética de norma, por ser renormalizable la teoría cumple con lo ya mencionado, siendo  $f = \tau$ <sup>1</sup>. Y por su parte, el súper-potencial, en consistencia con la notación utilizada para los súper-multipletes, viene dado en la siguiente ecuación.

$$W_{MSSM} = Uy_1QH_1 - Dy_2QH_2 - Ey_3LH_d + \mu H_1H_2, \tag{3.18}$$

de tal forma que se omitieron los índices de familia y del grupo de norma y donde  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$  son los acoplamientos adimensionales de Yukawa, que corresponden a matrices de  $3 \times 3$ , de acuerdo al número de familias de fermiones. De manera general, se deberían de agregar en principio términos extra al súper-potencial del modelo estándar supersimétrico; términos que relacionan partes izquierdas y partes derechas de los súper-multipletes de leptones y los campos de Higgs. Pero al tratarse ésta de una teoría que describe lo observado en la naturaleza, estos términos no se mantienen en el caso aquí estudiado. Una manera matemática de justificar la supresión de estos términos es la introducción del concepto de simetría  $R$ , que es una simetría global bajo el grupo  $U(1)_R$  que transforma a las coordenadas de Grassman y al súper-campo como

$$\theta \mapsto e^{i\alpha\theta} \quad \Phi \mapsto e^{i\alpha\Phi},$$

---

<sup>1</sup>Donde su parte real es  $Re\{\tau\} = \frac{4\pi}{g^2}$  y su parte imaginaria está relacionada con el ángulo de violación de CP;  $Im\{\frac{\theta}{2\pi}\}$ .

con  $r$  el número cuántico asociado a esta simetría. De manera que los términos extra que se incluirían en  $W$  son eliminados al no ser invariantes ante  $U(1)_R$ <sup>1</sup>. Otra cosa interesante de notar es que, si se impone esta misma simetría sobre los términos de rompimiento suave que involucran la masa de gauginos, se tendrá una restricción sobre  $\alpha$  para que sea invariante;  $\alpha = \pm\pi$ , lo cual reduce la simetría global a una simetría discreta tipo  $\mathbb{Z}_2$ , restringiendo a su vez los posibles valores que puede tomar el número cuántico  $r$ , que según la literatura [1, 27] son de la forma

$$r = (-1)^{2s+3B+L},$$

siendo  $s$  el número cuántico de espín y,  $B$  y  $L$  los números bariónicos y leptónicos, respectivamente. Este número  $r$  es 1 si tenemos partículas del modelo estándar, y -1 si se trata de las compañeras bajo SUSY de las partículas del SM. La cancelación de los términos adicionales en el súper-potencial al imponer la simetría  $R$  además fuerza a la conservación de los números  $B$  y  $L$  en el modelo, trayendo además consecuencias fenomenológicas; siendo una de ellas la producción en pares de las partículas supersimétricas bajo el decaimiento de un número impar de partículas supersimétricas [28]. Entonces el súper-potencial escrito en (3.18) es el más general posible para esta teoría, ya que resulta invariante ante la paridad  $R$  y conserva implícitamente los números bariónicos y leptónicos.

Por tanto, el lagrangiano para el MSSM quedará de la siguiente forma, que está en consistencia con la descripción de la sección (3.3)

$$\mathcal{L}_{MSSM} = \mathcal{L}_{SUSY} + \mathcal{L}_{Break} = \mathcal{L}_{SUSY} - \mathcal{L}_{gaugino}^{soft} - \mathcal{L}_{sferm}^{soft} - \mathcal{L}_{\phi\phi\phi}^{soft} - \mathcal{L}_{Higgs}^{soft},$$

y de forma un poco más explícita como

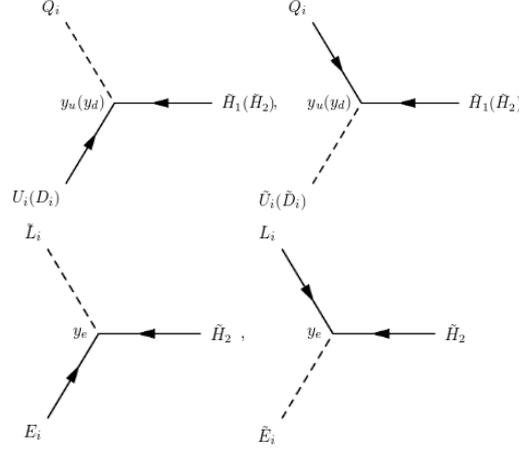
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSSM} = & [\Phi_i^\dagger (e^{2g_1 V_1 + 2g_2 V_2 + 2g_3 V_3}) \Phi_i]_D + ([W_{MSSM}]_F + h.c.) \\ & (\frac{1}{4k_a g_a^2} Tr[\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha]_F + c.c.) \\ & - (\mathcal{L}_{gaugino}^{soft} - \mathcal{L}_{sferm}^{soft} - \mathcal{L}_{\phi\phi\phi}^{soft} - \mathcal{L}_{Higgs}^{soft}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Al escribir explícitamente este lagrangiano, y con lo discutido anteriormente a cerca de la simetría  $R$  y el mínimo contenido de partículas, se tendrá que las interacciones entre las partículas supersimétricas serán las mismas que las de las partículas del modelo estándar, que a nivel de diagramas de Feynman se representa en (Figura 3.1-Figura 3.2) [1, 29]. De donde los vértices de la Figura 3.1 vienen del súper-potencial, que nos da las interacciones Higgs-quark-quark y Higgs-lepton-lepton, pero debido a que la supersimetrización de estas partículas viven en el mismo súper-multiplete, (3.18) también da las interacciones Higgsino-squark-quark y Higgsino-slepton-lepton.

<sup>1</sup> $r = 2$ , es la condición para que el súper-potencial sea invariante ante esta simetría.

### 3. ELEMENTOS BÁSICOS DE SUPERSIMETRÍA Y LAS PRIMERAS EXTENSIONES AL SM

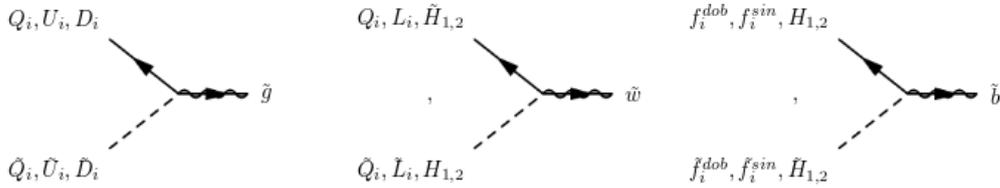
---



**Figura 3.1:** Vértices para la interacción entre partículas supersimétricas y partículas del modelo estándar. Interacción Higgsino-quark-squark (arriba) e interacción Higgsino-slepton-lepton (abajo).

Los términos de autointeracción del sector de norma proviene del término  $F$  de  $Tr[\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha]$ , dando los vértices para los gauginos de la [Figura 3.1](#). De la misma forma, los vértices de interacción entre materia y el sector de norma proviene del término  $F$  del potencial de Kähler.

Una de las principales motivaciones para extender el modelo estándar a una teoría del campo supersimétrica, es precisamente la de resolver el problema de ajuste fino y el problema de la jerarquía. Lo que se esperaba lograr con la inclusión de una simetría entre grados de libertad fermiónicos y bosónicos es la cancelación de las divergencias cuadráticas en las correcciones a la masa del Higgs; teniendo con ello únicamente dependencia logarítmica de la escala de corte.



**Figura 3.2:** Vértices para la interacción entre el sector de norma y el sector de materia. Donde  $f_i(\tilde{f}_i)$  hace referencia a todos los fermiones (sfermions) de la teoría, denotando a su vez *sin* y *dob* en qué multiplete de  $SU(2)$  viven.

Considerando el sector escalar del MSSM, en principio es posible calcular las correcciones a la masa del Higgs tomando en cuenta sus acoplamiento con las demás partículas escalares del modelo, lo cual no se desarrollará a detalle al no tratarse de un

cálculo relevante para los fines de este trabajo. Sin embargo, a continuación se muestra la cancelación de estas divergencias para un caso sencillo, únicamente de manera ilustrativa. Para lo cual se considera un súper-potencial general con acoplamiento cúbico de la forma

$$W = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\eta}{3}\Phi^3,$$

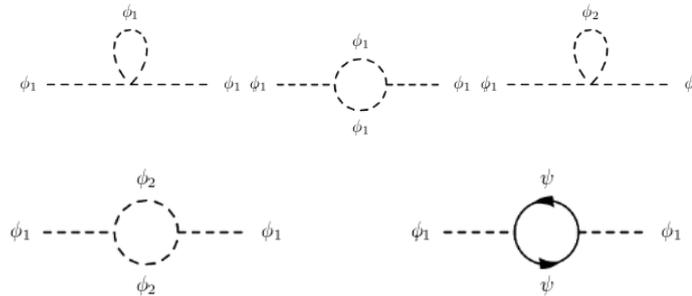
de manera que el lagrangiano para esta teoría supersimétrica se escribe en general como

$$\mathcal{L} = [W(\Phi)]_F + h.c. + [\Phi^\dagger\Phi]_D,$$

pero sólo es de interés el lagrangiano para el sector escalar y sus interacciones, entonces haciendo  $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ , el lagrangiano de interacción de  $\phi_1$  queda igual a

$$\mathcal{L}_{\phi_1}^{int} = -\frac{m\eta}{\sqrt{2}}(\phi_1^3 + \phi_1\phi_2^2) - \frac{\eta^2}{4}(\phi_1^4 + \phi_2^4 + \phi_1^2\phi_2^2) - \frac{\eta}{\sqrt{2}}\psi\phi_1\psi.$$

De donde se puede hacer la identificación de los diagramas que contribuyen a la masa del campo escalar  $\phi_1$  a un loop, siendo  $\Delta m_{\phi_1} \propto \Gamma^{(1)}$ , con  $\Gamma^{(1)}$  la suma de las contribuciones de los diagramas a un lazo, que se muestran en la [Figura 3.3](#).



**Figura 3.3:** Contribuciones a 1 loop a la masa de  $\phi_1$ .

Por orden de aparición, cada uno tiene la siguiente expresión aditiva para la masa [\[23, 26\]](#)

$$\phi_1 \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } \phi_1 = -3(i\eta)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}; \quad (3.20)$$

$$\phi_1 \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } \phi_1 = (m\eta)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2[(k-p)^2 - m^2]}; \quad (3.21)$$

### 3. ELEMENTOS BÁSICOS DE SUPERSIMETRÍA Y LAS PRIMERAS EXTENSIONES AL SM

---

$$\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_1 \text{ --- } \text{---} \text{---} \text{---} \phi_1 \end{array} = 3(m\eta)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2[(k-p)^2 - m^2]}; \quad (3.22)$$

$$\begin{array}{c} \phi_2 \\ \phi_1 \text{ --- } \text{---} \text{---} \text{---} \phi_1 \end{array} = -(i\eta)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}; \quad (3.23)$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ \phi_1 \text{ --- } \text{---} \text{---} \text{---} \phi_1 \\ \psi \end{array} = -g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \frac{i(\not{k} - \not{p} + m)}{(k-p)^2 - m^2} \right\}, \quad (3.24)$$

de donde se obtiene que

$$\Gamma^{(1)} = 2\eta^2 \left( \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2[(k-p)^2 - m^2]} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2m^2}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \right).$$

De manera que, las primeras dos integrales presentan una divergencia UV proporcional a  $\Lambda^2$ , que se cancela debido a que ambas tienen la misma forma integral, y por su parte, el último sumando de (3.5) será proporcional a  $\ln\Lambda$ , que se ve al hacer un análisis dimensional del integrando, el cual quedará proporcional a  $1/K$ , dando así la dependencia logarítmica en  $\Lambda$ . Resumiendo esto anterior, se tiene que las correcciones a la masa del bosón escalar a 1 loop no presentan divergencias en el ultravioleta; y lo mismo se esperaría para un modelo supersimétrico como el MSSM para las correcciones a la masa del Higgs, lo cual resulta una tarea un tanto más engorrosa de realizar, pero que arroja resultados alentadores, ya que al igual que en este caso ilustrativo, las divergencias de orden cuadrático en momento se cancelan [30], siendo una consecuencia directa de que la teoría sea supersimétrica. Entonces, de esto último se aprende que la supersimetría en efecto soluciona el problema de la jerarquía que se tiene en el modelo estándar, lo cual es un argumento a su favor.

Como veremos un tanto más adelante, el hecho de que la teoría tenga esta simetría nueva entre bosones y fermiones trae consecuencias sobre la evolución de las constantes de acoplamiento, pero antes de llegar a ese punto de la discusión, es necesario hablar sobre algo que ya se mencionó anteriormente y que para virtudes del trabajo resulta de lo más relevante. Esto es, el proceso de renormalización, sus aspectos generales y su uso en teorías de campo supersimétricas.

## El grupo de renormalización

---

De manera regular en física suelen aparecer cantidades que por más que se trate de evitar, tienden a divergir en algún límite; es decir, poseen singularidades en alguna escala, por lo que no están bien determinadas para todos los valores de los que dependen. Esta situación es bastante común en el caso en el que a nosotros interesa, por ejemplo, en el contexto de la teoría cuántica de campos aparecen divergencias a distintos límites energéticos en integrales de momento que, nos dan información sobre las correcciones perturbativas a alguna cantidad física, lo que resulta un tanto desastroso en algunos casos ya que algunas de esas cantidades se esperaba que no tiendan a infinito en alguna escala alta o baja de energía, sino que tuvieran un valor finito determinado de acuerdo a lo previsto por la teoría. Entonces surgen las siguientes preguntas al momento de que hacen su aparición los infinitos en las cantidades físicas: ¿Tienen sentido estos infinitos en la teoría que se está describiendo? ¿O es acaso que la teoría no es válida para todos los valores de energía?

Los encargados de dar respuesta a éstas interrogantes fueron C. Callan y K. Symanzik en 1970, argumentando que, en efecto, la validez de una teoría física está restringida por la escala de energía a la cual se esté trabajando. Siendo esto un impedimento para poder describir una teoría que englobara todas las interacciones fundamentales de la naturaleza, pero que a su vez dio lugar al desarrollo del modelo estándar de partículas elementales propuesto por Weinberg y Salam en 1973 y que ya fue discutido en la sección (2.2). Lo que se requiere ahora es una solución al problema de los infinitos en las cantidades físicas, que se espera se resuelva si se vive dentro del régimen de energía en el cual la teoría es válida, dando el valor real de dicha cantidad dentro de los estándares de la teoría.

En las siguientes secciones se explorará de manera general los procesos de renormalización y de regularización para una teoría de campos, que son herramientas con las cuales se eliminan las divergencias dentro de la teoría, restringiéndola a las escalas de energía a la que sigue siendo válida, siendo entonces este proceso una ventana para explorar los modelos a distintas escalas. A su vez, se describirán diferentes aspectos de este proceso en teorías del campo que incluyen supersimetría, siendo constreñidas en general al teorema de no renormalización. Las teorías del campo con supersimetría

tienen una peculiaridad muy especial, y es que si sus funciones del grupo de renormalización para los acoplamientos se anulan, esta resultará en una teoría con acción efectiva carente de divergencias ultravioletas, y por tanto finita; en el sentido más general de una teoría del campo. Al finalizar este capítulo, se hablará del caso particular de teorías del campo  $\mathcal{N} = 1$ , y un teorema que caracteriza su finitud en término de estos invariantes del RG.

### 4.1. La regularización

Como se mencionó, en la teoría cuántica de campos surgen términos divergentes en ciertas integrales de momento; siendo el caso más sencillo y más estudiado el de una teoría con un campo escalar con autointeracción cuarta de la forma  $\lambda\phi^4$ . Un ejemplo claro de una de éstas integrales es el caso en el que se quiere determinar la integral de un loop proveniente de la autointeracción del campo escalar, siendo esta integral

$$I = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (4.1)$$

donde se ha definido la integral considerando  $D$  dimensiones. Esta integral no está definida para cualquier dimensión, sino que solo es finita para valores  $D < 2$ ; a su vez, presenta una divergencia ultravioleta (UV) para valores  $D \geq 2$  y por el contrario divergencia del tipo infrarroja (IR) para  $D \leq 0$ . El proceso de regularización en pocas palabras consta de hacer finitas las integrales que surgen al momento de calcular las funciones de dos y cuatro puntos, para un valor de  $D$  en el que se esté trabajando, siendo éste en particular  $D = 4$  para fines de nuestro trabajo.

Existe más de un método por el cual se hacen finitas estas integrales, en este escrito se contemplarán sólo dos escenarios posibles, que son el de la regularización dimensional y la regularización por corte de momento. Usualmente, durante este proceso se introduce un parámetro de regularización, que es el que nos va a definir la escala a la cual la integral se vuelve finita y a su vez la teoría es válida, el cuál tiene unidades de momento.

- **Regularización por corte de momento.** Este método de regularización consiste básicamente en definir una escala de corte  $\Lambda$ , hasta la cual se hará la integración. Esto quiere decir que, las integrales de momento estarán restringidas a valores de momento dentro de la región  $|\vec{p}| \leq \Lambda$ , por lo que forzosamente la integral resultará finita si el parámetro de regularización se mantiene finito, evitando así tener una divergencia UV de manera explícita. De esta forma, el parámetro de corte o *cutoff* determinará la escala a la cual la teoría se mantiene válida.
- **Regularización dimensional.** Este método es de los más comunes, ya que representa una generalización matemática de las integrales de momento en  $D$  dimensiones; siendo  $D$  un número arbitrario y en general complejo, modificando así la medida de integración, haciendo factible la utilización de trucos que da la teoría de variable compleja. Por lo general es utilizada esta forma de regularizar

debido a que el método por corte de momento falla a la hora de aplicarse a integrales asociadas a una teoría de norma no abeliana. Además, es de las más usadas debido a que preserva todas las simetrías de la teoría y da una identificación clara de las divergencias.

A continuación se analizan algunos ejemplos demostrativos del procedimiento de regularización utilizando el mecanismo de regularización dimensional para una teoría escalar con término de interacción cuarta

#### 4.1.1. Aspectos de la regularización dimensional

Este método fue desarrollado por 't Hooft y Veltman en el año de 1972, e independientemente por Giambiagi en el mismo año, y fue uno de los principales trabajos que llevó a los primeros dos ser galardonados con el Premio Nobel de Física en 1999<sup>1</sup>. El método consiste en proponer una dimensión continua  $D$  para las integrales de momento que aparecen en las cantidades físicas y resolver así la aparición de divergencias en una teoría cuántica de campos, ya que estas integrales podrán ser reescritas en términos de funciones gamma, y garantizar así su convergencia en un límite completamente determinado.

Consideremos como primer ejemplo el caso de la siguiente integral de momento a un loop en  $D$  dimensiones para una interacción  $\lambda\phi^4$  (4.1)

$$\int \frac{d^D p}{2\pi} \frac{1}{\vec{p}^2 - m^2},$$

que como bien se mencionó ya, sólo está bien definida para valores de  $D$  en el intervalo  $0 < D \leq 2$ . Siguiendo la discusión del apéndice 8A de [23], podemos escribir a (4.1) en coordenadas esféricas como

$$\frac{1}{(2\pi)^{1-D}} \prod_k^{D-2} \int_0^{2\pi} \sin^k \theta_k d\theta_k \int_0^\infty \frac{1}{p^2 - m^2} dp p^{D-1} = \frac{\Gamma(D/2)^{-1}}{(2\pi)^{-D/2+D}} \int_0^\infty \frac{1}{p^2 - m^2} dp p^{D-1}, \quad (4.2)$$

y haciendo un cambio de variable a la coordenada adimensional  $p^2 = ym^2$ , se puede escribir ésta integral de momento en términos de la función beta, que a su vez se escribe en forma de producto de funciones gamma.

$$\frac{\Gamma(D/2)^{-1}}{2(2\pi)^{D/2}} m^{D-2} \int (y-1)^{-1} y^{D/2-1} dy = \frac{\Gamma(1-D/2)}{2 \cdot (2\pi)^{D/2}} m^{D-2},$$

<sup>1</sup>El premio del 1999 fue concedido por sus trabajos en la estructura de las teorías de Yang-Mills y teoría electrodébil [31]

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

donde se usó la definición  $B(\alpha, \gamma) = \Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha + \gamma)$ . Esta expresión de la integral da libertad explícita de poder extenderla para una dimensión continua  $D$ , en virtud de las propiedades analíticas de  $\Gamma$  en el plano complejo. En general, es posible hacer un procedimiento similar para integrales que posean un número  $i$  de propagadores a la  $n_i$  potencia, utilizando la generalización de la forma paramétrica de Feynman descrita en [17, 23], fórmula que se escribe a continuación por completez

$$\frac{1}{K_1^{n_1} \cdots K_i^{n_i}} = \frac{\Gamma(n_1 + \cdots + n_i)}{\Gamma(n_1) \cdots \Gamma(n_i)} \int_0^1 d\tau_1 \cdots \int_0^1 d\tau_i, \frac{\delta(1 - \tau_1 + \cdots + \tau_i) \tau_1^{n_1-1} \cdots \tau_i^{n_i-1}}{(\tau_1 K_1 + \cdots + \tau_i K_i)^{n_1 + \cdots + n_i}},$$

donde  $K_i$  son los propagadores y  $\tau_i$  un conjunto de parámetros adimensionales<sup>1</sup>. Esto determina una forma paramétrica para las integrales de momento que involucran más de un propagador en su integrando, haciéndolas convergentes si y sólo si las integrales paramétricas convergen para toda  $i$ . La expresión final para dos propagadores se muestra en (4.3).

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\vec{p}^2 + m^2)^{n_1} [(\vec{p} - \vec{k})^2 + m^2]^{n_2}} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n_1 + n_2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \times \int_0^1 d\tau \frac{(1 - \tau)^{n_1-1} \tau^{n_2-1}}{[m^2 + \vec{k}^2 \tau(1 - \tau)]^{n_1 + n_2 - D/2}}. \quad (4.3)$$

Esto da una expresión útil a la hora de querer hacer finitas las integrales de momento, ya que la expresión para  $i$  propagadores de converger, se escribe en términos de funciones gamma, la cual extrapola a un número  $D$  continuo.

Para ver la dependencia explícita de la escala de energía y a su vez la dimensión a la cuál estas integrales resultan divergentes en el UV o en el IR, consideremos un par de casos ilustrativos. Primero, el que se ha trabajado hasta ahora, representado por la integral de (4.1), que en términos de la función gamma es

$$I(D) = -\lambda \frac{(m)^{D-2}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(1 - D/2),$$

siendo los polos de  $\Gamma$  los responsables de que la integral sea divergente para dimensiones 2, 4, 6 y de la forma  $2n$  para  $n > 1$  entero. Si se define la constante adimensional  $g$  como  $g \equiv \lambda \mu^{D-4} = \lambda \mu^{-\epsilon}$ , y reemplazando en la integral en términos de  $g$  y  $\epsilon$ , se reduce a la siguiente forma

$$I(\epsilon) = -m^2 \frac{g}{(2\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2 - 1),$$

---

<sup>1</sup>Esta fórmula sigue siendo válida si se escoge a las potencias  $\{n_i\}$  como números complejos con  $Re(n_i) > 0$

que presenta una divergencia explícita en el IR cuando  $m^2 \rightarrow 0$ . Haciendo una expansión en potencias de  $\epsilon$  en el término del acoplamiento y la función gamma, se tendrá según el apéndice 8D de [23] que

$$I(\epsilon) \simeq \frac{m^2 g}{(4\pi)^2} \left[ 2/\epsilon + \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right],$$

donde se muestra la dependencia logarítmica del capítulo anterior (Sección 2.6), dependiente de la escala de energía  $\mu^2$ , además de un polo, independiente de  $\mu$  y proporcional al cuadrado de la masa  $m^2$ . En general, para las integrales de loops contempladas en este trabajo y afines a la teoría interactuante  $\lambda\phi^4$ , los polos de las integrales no dependen del parámetro de masa  $\mu^2$ ; relacionado con la escala energética de la teoría, siendo la parte finita la única que depende de esta energía.

Este procedimiento descrito para un caso particular es el primer paso para analizar la teoría a diferente escala, teniendo definida la dependencia de las integrales con el parámetro energético  $\mu^2$ . Claro que el método por el cual se hacen finitas estas integrales no es para nada sencillo, ya que requiere de una extensa línea de expresiones y trucos operacionales; muchos de los cuales no se presentaron ni se presentarán dentro del desarrollo del escrito, pero que se citarán a su debido tiempo de acuerdo a lo establecido en diversa literatura sobre el tema conforme se vayan utilizando, siguiendo principalmente las discusiones de [11, 23, 32].

Ahora bien, es importante mencionar ciertos aspectos que se consideran al momento de regularizar una teoría, como es el grado de divergencia superficial, que nos es de utilidad para poder identificar las divergencias. Tomemos en consideración el siguiente escenario: Supongamos un diagrama de Feynman  $F$  asociado a la teoría interactuante  $\phi^4$ , que consta de  $I$  líneas internas y  $V$  vértices, el número de loops dentro del diagrama puede ser escrito en términos de estas dos cantidades de la siguiente manera

$$L = I - V + 1.$$

Además, de acuerdo a las reglas de Feynman generales, cada loop está asociado a una integración en espacio de momento, teniendo que la integral asociada al diagrama  $F$  contendrá un total de potencias de  $\vec{p}$  de

$$\omega(F) = DL - 2I = D(1 - V) + I(D - 2), \quad (4.4)$$

con  $D$  la dimensión, introducida por la medida de integración. Esta cantidad  $\omega(F)$  escrita en términos del número de vértices y de propagadores es conocida como el grado de divergencia superficial o SDD por sus siglas en inglés. Y es un indicador de divergencias en los diagramas, ya que si esta cantidad resulta ser no negativa ( $\omega(F) \geq 0$ ), el diagrama correspondiente exhibirá divergencia superficial, siendo logarítmica si es 0 ó cuadrática si es 1, y así sucesivamente. Por su parte, que  $\omega(F)$  sea negativa no quiere decir que no existan divergencias, este caso resulta un poco más sutil y requiere la introducción de otro concepto análogo.

Una subdivergencia en un diagrama de Feynman se refiere a una divergencia asociada a un subdiagrama  $f'$ , el cual consiste en una serie de líneas correspondientes a un

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

diagrama de la teoría a menor orden en la expansión perturbativa. Puede llegar a darse el caso en el que el diagrama  $F$  tenga  $\omega(F) \geq 0$ , pero no se tengan subdivergencias en  $f'$ , por lo que el diagrama puede hacer convergente si se amputa el subdiagrama. Con esto en mente, se tendrá que para el caso en el que  $\omega(F) < 0$ , el diagrama convergerá siempre y cuando no tenga asociado algún subdiagrama  $f'$  que contenga subdivergencias. Y de manera similar, se dice que es absolutamente convergente si  $\omega(F)$  y  $\omega(f')$  son negativos. Esta caracterización resulta importante en lo que es conocido como el teorema de convergencia de Weinberg y Dyson, cuya prueba se discute a detalle en [33].

La importancia del teorema de convergencia radica en la posibilidad de sustituir las divergencias superficiales por términos finitos, donde cada subdiagrama quedará re-expresado de manera proporcional al momento externo  $\lambda$ , para momentos tendiendo a infinito. Por lo que cada subdivergencia superficial puede re-expresarse en términos de cantidades finitas, lo que es conocido popularmente como el método de "power counting", originalmente propuesto por Dyson. La cantidad  $\omega(F)$  se vuelve entonces una cantidad clave a la hora de determinar la renormalizabilidad de una teoría, ya que dependiendo de la dimensión a la que se esté trabajando, se puede inferir la renormalizabilidad, la no-renormalizabilidad y hasta la super-renormalizabilidad, esto puede ver de la siguiente manera. Si re-expresamos adicionalmente al SDD en términos de  $e$  patas externas del diagrama como

$$\omega(F) = e(1 - D/2) + D + V(D - 4),$$

es fácil ver que para cuatro dimensiones, las únicas divergencias que sobreviven son para los diagramas asociados a dos y cuatro puntos. De manera análoga, para un número mayor de dimensiones, se tiene que la cantidad  $D - 4$  resulta positiva, haciendo que SDD presente divergencias a cada orden mayor en teoría de perturbaciones. El primer caso corresponde; de acuerdo a las manipulaciones que se pueden realizar sobre los términos divergentes, según el teorema de convergencia, con una teoría renormalizable. Por el contrario, se dice que es no-renormalizable si está en correspondencia con el segundo caso enumerado. Un tercer caso importante y poco común, es cuando sólo algunos diagramas, y a ordenes bajos son los que poseen los términos divergentes, siendo conocido esto como super-renormalizabilidad. En la teoría que se está usando como referencia, este caso está presente para 2 y 3 dimensiones únicamente.

El desarrollo anterior fue solo una herramienta para poder renormalizar una teoría, una manera de poder aislar las divergencias en los diagramas de Feynman al orden perturbativo en el que se encuentran. Lo siguiente a describir en el contexto de la renormalización es el de relacionar las cantidades finitas con las cantidades desnudas, lo que se logra por medio de las constantes y las condiciones de renormalización. Esto se detalla en la siguiente sección.

## 4.2. Condiciones de renormalización

Las cantidades en teoría de campos que contienen la información de las divergencias superficiales de un diagrama de Feynman son las funciones de vértice  $\Gamma(k)$  y los términos de auto-energía  $\Sigma(k)$  o "self-energy" y que, mediante un power counting es posible mostrar que están contenidas en los coeficientes de la expansión de Taylor de las mismas. Por otro lado, es bien conocida la equivalencia en el poder trabajar con cantidades desnudas o con cantidades ya renormalizadas (añadiendo en este último factores que den cantidades finitas) de masa y acoplamiento al momento de tratar con una teoría renormalizable, equivalencia que es de utilidad ya que  $\Sigma$  y  $\Gamma$  resultan ser funciones de  $g$  y de  $m$ . Entonces un camino natural será el pensar en escribir las condiciones de normalización; es decir, condiciones que relacionen las cantidades desnudas con las cantidades ya renormalizadas, en términos de las funciones energéticas. Estas condiciones heredarán de manera obligada una forma concreta de restricción sobre acoplamientos y masas, definiendo con ello las amplitudes (o constantes) de renormalización.

De manera explícita, se considera la separación en sus partes finitas y divergentes de las cantidades ya mencionadas

$$\Gamma_B(\vec{k}) = \Gamma_{Bf}(\vec{k}) + \Gamma_B(0), \quad (4.5)$$

$$\Sigma_B(\vec{k}) = \Sigma_{Bf}(\vec{k}) + \Sigma_B(0) + \Sigma'_B(0)k^2, \quad (4.6)$$

donde el subíndice  $B$  hace referencia a que se trata de cantidades desnudas, mientras que el subíndice  $Bf$  se refiere a la parte convergente, teniendo entonces que la parte divergente corresponde precisamente a los primeros términos de la expansión en series de Taylor<sup>1</sup>. Cada uno de los factores iniciales de la serie está asociado un tipo de divergencia distinto en integral de momento, ya que se pueden escribir en expansión diagramática en espacio de momentos, siendo de tipo cuadrático o logarítmico su carácter divergente. Dichas integraciones pueden hacerse finitas o truncarse a cierta escala mediante el proceso de regularización, lo cual no garantiza total convergencia, ya que los términos finitos de la expansión (4.5-4.6) sólo resultan ser superficialmente convergente y pueden presentar divergencias a otros ordenes de la expansión en forma de subdivergencias. Para esto, conviene recordar que para cada orden de la expansión, se encuentra sólo un número finito de parámetros libres dentro de la teoría, pero también sólo un número finito de integrales que divergen; esto da pie a que sea posible el absorber estas divergencias por medio de una redefinición de la constante de acoplamiento, la masa y el campo mismo.

Por ejemplo, para el caso que se está tratando, se considera la función de vértice  $\Gamma_B^{(2)}$ . Esta se escribe en términos de la auto-energía gracias a la relación  $\Gamma_B^{(2)}(k) = k^2 + m_B^2 - \Sigma_B(k)$ , donde  $\Sigma_B$  se sustituye de la expresión (4.5), con lo que se puede factorizar de la siguiente manera

<sup>1</sup>El término primado corresponde a su derivada respecto al momento externo  $k$ .

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

$$\Gamma_B^{(2)}(k) = (1 - \Sigma'(0))(k^2 + m_B^2) \frac{Z_\phi}{Z_{m^2}} + \Sigma_{Bf}(k) Z_\phi.$$

De donde se han hecho definiciones para las amplitudes de renormalización del campo y de la masa en términos de las cantidades desnudas de auto-energía y de su derivada respecto al momento externo como siguen.

$$Z_\phi = \frac{1}{1 - \Sigma'_B(0)},$$

$$Z_{m^2} = \frac{1}{1 - \Sigma_B(0)/m_B^2},$$

entonces también es posible definir las funciones de vértice y de auto-energía renormalizadas en términos de estas amplitudes  $Z_i$  teniendo que

$$\Sigma(k) = \Sigma_{Bf}(k) Z_\phi; \quad (4.7)$$

$$\Gamma^{(2)}(k) = Z_\phi \Gamma_B^{(2)}(k); \quad (4.8)$$

$$g = g_B Z_g^{-1} Z_\phi^2; \quad (4.9)$$

$$m^2 = m_B^2 Z_\phi Z_{m^2}^{-1}; \quad (4.10)$$

$$\phi = Z_\phi^{-1/2} \phi_B, \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

donde se definió la amplitud de renormalización para el acoplamiento  $g$ . Utilizando estas expresiones y redefiniciones, encontramos que la cantidad renormalizada para la función de vértice de dos puntos se redujo como  $\Gamma(k) = k^2 + m^2 - \Sigma(k)$ , que resulta al mismo tiempo ser finita. De esta ecuación renormalizada, se infieren las condiciones de normalización en términos de las funciones de vértice de manera trivial de la siguiente forma.

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(0) = 1. \quad (4.14)$$

La tercera condición surge del generalizar la obtención de una función de vértice de  $n$  puntos renormalizada, que siguiendo la idea de lo que se hizo para 2 puntos se escribe como  $\Gamma^{(n)}(k) = Z^{n/2} \Gamma_B^{(n)}(k)$ . Lo que da lugar a una condición relacionando la definición de la constante de acoplamiento renormalizada  $g$ .

$$\Gamma^{(4)}(0) = g. \quad (4.15)$$

Estas redefiniciones hechas para la constante de acoplamiento y la masa desnudas fueron de utilidad para poder remover las divergencias superficiales que quedan aún presentes en las partes finitas de la función de vértice y de auto-energía. Con esto, al reescribir el funcional de energía con las cantidades renormalizadas, se obtiene la

eliminación de todas las divergencias superficiales en la auto-energía a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. El siguiente paso es poder hacer este procedimiento de manera explicita y calcular las cantidades finitas a algunos cuantos lazos, esta tarea resulta ser muy ilustrativa considerando la magnitud y el impacto del resultado general; sin embargo, en virtudes de este trabajo no será considerado para la teoría  $\phi^4$ , pero se pueden consultar detalles de estos cálculos en las referencias [17, 23].

Cabe mencionar que en general, las cantidades renormalizadas correspondientes a las funciones de vértice de  $n$  puntos no sólo son funciones del momento y de los acoplamientos, sino que también lo son de la masa, pero no lo son de la escala de corte  $\Lambda$  (que depende del método de regularización) ya que llegado a este punto la cantidad  $\Gamma$  resulta ser finita para todas las escalas de energía, lo cual fue posible dada la renormalizabilidad de la teoría.

#### 4.2.1. Esquemas de renormalización

Las condiciones de normalización introducidas en las ecuaciones (4.13-4.15) no resultan ser expresiones universales en la teoría de renormalización, ya que existen otros métodos equivalentes que las emplean o no en el afán por calcular las cantidades finitas resultantes. Claro que cualquier método que se utilice para renormalizar una teoría de campos debe de arrojar los mismos resultados, de lo contrario puede que exista una diferencia sustancial que deje pasar por alto algún aspecto de la teoría. Por ello es que existen distintos esquemas de renormalización, que aunque son operacionalmente un tanto distintos, arrojan los mismos resultados (es posible cambiar de un esquema a otro), concluyendo que las cantidades físicas son independientes del esquema de renormalización en el que se esté trabajando.

Uno de los más conocidos y utilizados es el método de los contratérminos, que introduce nuevas interacciones y por tanto nuevos tipos de vértices en las expansión diagramática. Estos nuevos términos se escogen a cierta conveniencia, de manera que se eliminen (resten) los términos divergentes, haciendo las funciones de correlación finitas a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. La elección de los contratérminos y su estructura se construyen de manera inductiva y su introducción en el funcional de energía permite la definición de las constantes de renormalización en función de estos, obteniendo con ello la relación entre las variables desnudas y las ya renormalizadas. Al igual que en la discusión anterior, con ayuda del power counting, es posible determinar la renormalizabilidad de la teoría, proceso que se explica en un contexto un poco más general en la referencia [17].

Otro escenario en el cual se puede trabajar es el esquema de substracción mínima o MS por sus siglas en inglés, el cual consiste principalmente en eliminar mediante una substracción recurrente a los términos con polo en la cantidad  $\epsilon$ ; cantidad que se refiere a una pequeña desviación en la dimensión de regularización alrededor de la dimensión a la cual la teoría es renormalizable. Esta eliminación de términos polares resulta conveniente al momento de estudiar las propiedades críticas de una teoría, en dimensiones menores a la de renormalización, teniendo con ello que esto no es sólo de

utilidad para eliminar divergencias UV sino que da información importante sobre como tratar divergencias de tipo IR a bajas energías. La principal ventaja de trabajar con el esquema MS es la peculiaridad que presenta, ya que las condiciones de normalización se vuelven independientes de la masa, lo que conlleva a que los contratérminos adquieran una forma predeterminada e independiente de igual forma del término de masa  $m$ . El emplear este esquema es más complicado que lo que se explicó sobre él, sin embargo no se entrará en muchos más detalles de su empleo formal, pero sí se utilizará de lleno en las siguientes secciones, haciendo siempre referencia a todos sus detalles y peculiaridades. Cabe mencionar que el encargado de trabajar con este formalismo en primera instancia fue 't Hooft [19] al querer renormalizar una teoría de norma no abeliana, que es justo el punto central de interés en nuestro trabajo.

### 4.3. El grupo de renormalización

Al estudiar la teoría de renormalización en el esquema MS, al igual que al hacer una regularización dimensional, se encuentra una dependencia de las cantidades desnudas como función de un parámetro de masa/energía, mismo que al ser modificado induce un cambio en las funciones de correlación de  $n$ -puntos. Dicho comportamiento dependiente de la escala energética fue investigado por vez primera por Callan y Symanzik en el año de 1970, y resulta clave al momento de querer determinar el comportamiento con la energía de las funciones renormalizadas. Este cambio en las funciones de correlación sigue siendo cierta cuando se trata con una teoría con interacciones de un grupo no abeliano de norma, ya que la dependencia con la energía proviene del proceso de regularización, de modo que los desarrollos que se presentarán a continuación son válidos para teorías de campo en general.

Si se considera la función de vértice desnuda, que depende explícitamente de la escala de corte, masa y acoplamiento desnudo, se puede encontrar una relación diferencial en función de la masa renormalizada, que se escribe como

$$m \frac{\partial}{\partial m} \Gamma_B^{(n)}(k_i, m_B, g_B, \Lambda) = m \frac{\partial}{\partial m} m_B^2 \frac{\partial}{\partial m_B^2} \Gamma_B^{(n)}(k_i, m_B, g_B, \Lambda), \quad (4.16)$$

donde se utilizó el hecho de que la masa y la masa renormalizada están conectadas por medio de una de las constantes de renormalización. De manera similar, la función de vértice se concreta con su correspondiente función renormalizada por medio de la relación de la ecuación (4.8), que resulta de ayuda al momento de inferir una relación análoga para la derivada respecto a la masa renormalizada de la función de  $n$ -puntos  $\Gamma^{(n)}$ , imponiendo para ello una nueva constante de renormalización  $Z_d$

$$\frac{\partial}{\partial m} \Gamma^{(n)}(k_i, m, g) = Z_\phi^{n/2} Z_d^{-1} \frac{\partial}{\partial m} \Gamma_B^{(n)}(k_i, m_B, g_B, \Lambda),$$

que a su vez requiere de una cuarta condición de normalización para poder caracterizar a  $Z_d$

$$\frac{\partial}{\partial m} \Gamma^{(n)}(0, m, g) = 1.$$

Con ayuda de estas relaciones y la condición de normalización nueva, es posible reescribir a (4.16) en términos de cantidades ya renormalizadas como son la masa, el/los acoplamientos y la función de vértice, esta nueva ecuación se escribe la de siguiente forma:

$$\left(m \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + -n\gamma\right) \Gamma^{(n)}(k_i, m, g) = (2 - 2\gamma) m^2 \frac{\partial}{\partial m} \Gamma^{(n)}(k_i, m, g), \quad (4.17)$$

donde se hicieron un par de consideraciones extras, como el definir a las funciones auxiliares  $\beta$  y  $\gamma$ , además de incluir la condición de normalización (4.10) para poder eliminar la dependencia del término  $\partial m_B^2 / \partial m$ . Los términos adicionales  $\beta$  y  $\gamma$  vienen dadas por

$$\gamma = \frac{1}{2} m \frac{\partial \ln(Z_\phi)}{\partial m}, \quad \beta = m \frac{\partial g}{\partial m},$$

que son funciones del acoplamiento y de la masa renormalizada, y son muy importantes al momento de determinar la invarianza de escala y la finitud de una teoría física, lo cual se estudiará a detalle más adelante. Además, son herramientas poderosas para estudiar las propiedades críticas de una teoría, ya que la función  $\beta(g, m)$  se anulará en los puntos críticos de la teoría, caracterizados por tener un valor particular en el acoplamiento que deja a la teoría invariante de escala<sup>1</sup> e incluso hasta invariante conforme. Ésta propiedad viene mediada por la función o parámetro  $\gamma$ , que es conocida como dimensión anómala, y que da un corrimiento en la dimensión canónica del campo en la relación de escalamiento de las funciones de correlación respecto a la relación de escalamiento lejos del punto fijo. Esto último es la clave para determinar coeficientes o exponentes críticos análogos a los usados en la teoría de transiciones de fase [5, 34], y da la conexión entre el lenguaje de campos cuánticos con el lenguaje de materia condensada.

La ecuación presentada en (4.17) da valiosa información sobre el comportamiento de la teoría cerca del régimen crítico, sin embargo, existe una ecuación que da aún más información sobre las propiedades críticas, esta es la ecuación del grupo de renormalización; que al igual que la ecuación de Callan-Simanzyk relaciona a las funciones auxiliares  $\gamma_i$  y  $\beta$  con la información sobre los exponentes críticos [5].

Como ya sabemos por lo descrito en la literatura [17, 23], la adimensionalización del acoplamiento  $g$ , da una dependencia explícita en las funciones de correlación de un parámetro de masa/energía que llamamos  $\mu$ , este parámetro introducido de cierta manera, de forma arbitraria heredará su dependencia a las funciones de  $n$ -puntos renormalizadas. Teniendo que la ecuación para la función de vértice finita se modifica con esta dependencia en  $\mu$  por

---

<sup>1</sup>Es bueno mencionar que este valor fijo del acoplamiento se relacionan directamente con un valor fijo en la escala, ya que  $g$  es una función implícita del parámetro de energía.

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

$$\Gamma^{(n)}(k_i, m, g, \mu) = Z_\phi^{n/2}(g(\mu))\Gamma_B^{(n)}(k_i, m_B, g_B). \quad (4.18)$$

Ahora se tiene dependencia de las variables  $m$ ,  $g$  y  $\mu$ ; pero al mismo tiempo las amplitudes de renormalización contienen una dependencia del acoplamiento renormalizado, por lo que una aplicación directa de el operador diferencial  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$  a la ecuación (4.18), implica la variación de todos los parámetros respecto a  $\mu$  mediante la regla de la cadena, con lo que la ecuación del grupo de renormalización en términos de las cantidades renormalizadas queda finalmente expresada como

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma\right)\Gamma^{(n)}(k_i, m, g, \mu) = 0, \quad (4.19)$$

donde se usó el recurso de las funciones auxiliares una vez más, que son funciones del parámetro de masa.

$$\gamma = \frac{1}{2}\mu \frac{\partial \ln(Z_\phi)}{\partial \mu}, \quad \beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad \gamma_m = \frac{\mu}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu},$$

que son conocidas como funciones del grupo de renormalización o RGf, por sus siglas en inglés. De acuerdo a la teoría de campos, la ecuación (4.19) hace referencia a la invarianza ante reparametrizaciones de la función de vértice renormalizada respecto a  $\mu$ ; siendo este un parámetro continuo de masa.

En general, el solucionar una ecuación diferencial parcial como es la ecuación del grupo de renormalización, resulta una tarea complicada debido a la cantidad de variables en juego, por lo que es muy conveniente el montarse en el esquema de mínima substracción (MS) para eliminar así la dependencia explícita de parámetros como la masa y la escala  $\mu$  dentro de las funciones del grupo de renormalización, teniendo con ello una ecuación diferencial parcial cuyos coeficientes dependen únicamente del acoplamiento, y con una solución completamente determinada empleando el método de características [35]. Dicho método se especializa en este tipo de dependencias y consiste en resolver para las RGf, y así caracterizar al espacio de parámetros. Siendo las funciones  $\gamma$  y  $\beta$  interpretadas como velocidades características.

Al hacer un escalamiento lineal del parámetro  $\mu$  por  $\xi$ , las variaciones de la escala se codificarán ahora en las variaciones respecto a este factor, teniendo que el acoplamiento, y los parámetros de masa son ahora funciones de  $\xi$ , lo que da lugar para imponer condiciones de frontera para las funciones del grupo de renormalización  $\gamma_i$  y  $\beta$ , obteniendo así una superficie en el espacio de parámetros, cuyas trayectorias corresponden a teorías físicas renormalizadas con diferentes escalas de energía.

Finalmente, el problema de encontrar la evolución de las funciones de correlación a diferentes escalas de energía se traduce en solucionar la ecuación (4.19) sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \beta(g(\xi)) &= \xi \frac{dg(\xi)}{d\xi}, & g(1) &= g \\ \gamma_m(g(\xi)) &= \frac{\xi}{m(\xi)} \frac{dm(\xi)}{d\xi}, & m(1) &= m \\ \mu(\xi) &= \xi \frac{d\mu(\xi)}{d\xi}, & \mu(1) &= \mu. \end{aligned}$$

Siendo estas condiciones las que caracterizan completamente a la solución; en caso de existir, y dan constricciones sobre el espacio de parámetros. Dependiendo de el número de acoplamientos en la teoría, será la dimensión de la superficie solución, que contendrá a su vez puntos especiales<sup>1</sup> que corresponderán a ceros en las funciones beta. Por tratarse la función beta de una función de los acoplamientos, un punto fijo corresponde a valores particulares de estos; que pueden referirse a una escala de bajas o altas energías.

Los puntos fijos caracterizan dos o más regiones dentro de el espacio de parámetros; por ejemplo, en el caso de una teoría con rompimiento espontáneo como el modelo estándar, las ecuaciones del grupo de renormalización y con ellas el flujo de renormalización distinguen entre la teoría rota a la escala electrodébil, y la teoría antes de que se de este rompimiento. Esta caracterización viene dada por el valor de las funciones beta en la escala electrodébil, que corresponderá a un valor particular del acoplamiento  $g_2$ , siendo la función beta negativa cuando se rompe el grupo del modelo y positiva si se está por encima de la escala de rompimiento. Esto mismo sucederá en las teorías de gran unificación, ya que se espera que a alguna escala  $\mu^*$ , su grupo de norma se rompa al grupo del modelo estándar, teniendo entonces distintas regiones dentro de la solución en el espacio de parámetros.

Es por esto que el flujo de renormalización es una ventana para estudiar el comportamiento de estas teorías con rompimiento cerca de los puntos críticos, lo cual; en analogía con la teoría de Landau de transiciones de fase, se puede trabajar en escalas de energía, de temperatura o ambas, como se argumenta en el artículo de Coleman y Weinberg [36], en el que además se habla sobre el cálculo del potencial efectivo como mecanismo para determinar la acción efectiva.

## 4.4. El grupo de renormalización para teorías supersimétricas

### 4.4.1. Teorema de no-renormalización

Cuando se estudia una teoría de campos que incluye transformaciones supersimétricas dentro de sus generadores, es conveniente trabajar en un lenguaje matemático un poco más general; como ya se estudió en el capítulo anterior, que relacione funciones de súper-campos al momento de construir lagrangianos. Estas funciones son respectivamente, la función cinética de norma  $f$ , el súper-potencial  $W(\Phi)$  y el potencial de *Kähler*  $K(\Phi)$ , donde  $\Phi$  es el súper-multiplete. Un resultado importante para este tipo de teorías es el dado por el teorema de no-renormalización, el cual da información sobre el comportamiento de las funciones  $f$ ,  $W$ ,  $K$  y la constante  $\chi$  en el contexto de la renormalizabilidad de la teoría. Además de dar constricciones sobre las posibles correcciones

---

<sup>1</sup>En general se trata de variedades fijas, dependiendo de la dimensión de la superficie solución.

cuánticas que presentan cada una de estas funciones.

El teorema antes mencionado, estudiado y demostrado a detalle por Seiberg en el año de 1993 establece lo siguiente:

**Teorema 1:** Para una teoría de campos con grupo de simetrías  $G$  y  $\mathcal{N} = 1$  supersimetrías, cuya acción, y por tanto estructura estén completamente determinadas por el súper-potencial  $W$  (holomorfo en  $\Phi$ ), el potencial de Kahler  $K$ , la función cinética de norma  $f$  y término de FI  $\chi$ , se tendrá que la renormalizabilidad de la teoría está ligada al comportamiento bajo correcciones cuánticas de las cantidades ya mencionadas, teniendo para esto que

- $W(\Phi)$  es no renormalizable en teoría de perturbaciones
- $K$  presenta correcciones cuánticas a todos los ordenes en la expansión perturbativa
- $f(\Phi)$  sólo presenta correcciones a primer orden
- Al igual que  $W$ , el término de FI no es renormalizable.

La demostración detallada de este teorema se puede encontrar en las referencias [37, 38]. La importancia de mencionar esto, es principalmente por sus implicaciones sobre los invariantes de grupo de renormalización y la restricción que presenta para la forma de las funciones beta, ya que en el caso del MSSM, las funciones beta adquieren una forma particular, de modo que las ecuaciones de renormalización para cada uno de los parámetros de la teoría supersimétrica son proporcionales al parámetro en cuestión. Esto no sucede con las RGE para los parámetros de los términos de rompimiento suave, ya que como rompen de manera explícita la supersimetría, no son considerados por este teorema de no-renormalización, por lo que su forma puede ser muy distinta y depender a su vez de más de un parámetro.

Muchos otros trabajos tratan el teorema de no renormalización haciendo consideraciones distintas a las de Seidberg, como son la presencia de anomalías quirales y anomalías de norma, obteniendo diferentes teoremas de no-renormalización para todas las teorías supersimétricas. El que se presentó, es el teorema correspondiente al caso que nos ha interesado en todo el escrito, el de una sola supersimetría  $\mathcal{N} = 1$ . Para otro tipo de teorías susy se recomiendan otros trabajos de Seidberg [39].

Lo que se espera ahora es tener todas las herramientas para poder construir una teoría que sea consistente con el contenido de materia del modelo estándar, y que esté libre de las divergencias que lo caracterizan. Esto fue posible en la primera extensión al SM en el que se incluyó supersimetría; pero además de la cancelación de las divergencias, se espera poder hacer la introducción de un grupo de norma que contenga a  $G_{SM}$ , en el afán por unificar las fuerzas fundamentales. Entonces lo que se espera tener es un modelo supersimétrico, que sea finito (no contenga divergencias en el UV) y que esté basado en un grupo de norma consistente con el grupo del SM.

#### 4.4.2. Teorías finitas

El tipo de teorías que se presentan libres de divergencias en el UV a todos los ordenes en la expansión perturbativa son conocidas como teorías finitas, cuya búsqueda e implementación son de gran interés para los físicos que piensan que el modelo estándar es una versión a baja energía de una teoría más fundamental libre de divergencias; pero que a su vez son conscientes de la utilidad y consistencia experimental de sus predicciones, por lo que tratar de extender el SM a una teoría finita se convierte en una obligación.

La definición de finitud en el contexto de las teorías de campo con supersimetría es un poco más sutil que su definición usual en teorías carentes de supersimetría [40], ya que en el contexto de la supersimetría es posible hacer una identificación de estos modelos finitos en términos de las propiedades de sus funciones del grupo de renormalización  $\gamma_i$  y  $\beta_i$ . La caracterización puede hacerse por cálculos explícitos a uno y dos loops, lo cual resulta en una tarea cansada y tediosa que no da información aparente sobre la teoría al  $n$ -ésimo loop. Para esto existe el teorema de finitud, el cual establece las condiciones sobre los invariantes del grupo de norma, y por tanto de las funciones de renormalización para tener una teoría finita a todos los ordenes en la expansión perturbativa.

Antes de enunciar el teorema explícitamente, es conveniente mencionar ciertos aspectos preliminares que deben considerarse para sembrar el terreno de la finitud en las teorías supersimétricas. Como se está trabajado con extensiones del modelo estándar, es conveniente recordar que un modelo extendido busca dar solución a los principales problemas del modelo, como es la unificación de los acoplamientos de norma, y la reducción de parámetros libres de la teoría. Para esto último es apropiado el relacionar el sector de Yukawa con el sector de norma; la conocida unificación Gauge-Yukawa (GYU), que como se verá más adelante, está en consistencia con las condiciones de finitud a todos los ordenes en teoría de perturbaciones.

Un primer camino para intentar relacionar los sectores de norma y Yukawa es la supersimetría, ya que relaciona directamente ambos sectores en el afán de la unificación; sin embargo, existen otros caminos hacia la unificación de los acoplamientos, por ejemplo, el método trabajado en [8, 41], el cual consiste en encontrar invariantes de grupo de renormalización (RGI), que en general resultan ser relaciones de los acoplamientos que mantienen su forma a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. El hecho de que sean válidas a todos los ordenes resulta como consecuencia de su validez a primer orden, lo cual senta un precedente para la finitud, ya que gracias a esto será posible encontrar invariantes (RGI) que garanticen al finitud de una teoría a todo orden.

Consideremos ahora una teoría de campos supersimétrica  $\mathcal{N} = 1$ , con simetría de norma dada por un grupo semisimple  $G$ , y libre de anomalías. Cuyo súper-potencial viene dado por

$$W = \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}C_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k,$$

donde  $\phi_i$  transforma en la representación irreducible  $R_i$  de  $G$ . Para este súper-potencial,

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

las correspondientes funciones del grupo de renormalización a 1 loop  $\gamma_{ij}^{(1)}$  y  $\beta_g^{(1)}$  estarán determinadas respectivamente por

$$\gamma_j^{i(1)} = \frac{1}{32\pi^2} (C^{ilm} C_{jlm} - 2g^2 C_2(R_i) \delta_j^i), \quad (4.20)$$

$$\beta_g^{(1)} = \frac{g^3}{16\pi^2} (\Sigma_i T(R_i) - 3C_2(G)), \quad (4.21)$$

donde  $T(R_i)$  es el índice de Dynkin de la representación  $R_i$  y a su vez,  $C_2$  es el operador cuadrático de Casimir en la representación  $R_i$  ( $C_2(R_i)$ ) ó en la representación adjunta ( $C_2(G)$ ). Las condiciones para garantizar que esta teoría sea finita a un loop, implican directamente que las ecuaciones (4.20) y (4.21) se deben anular, lo que da lugar a condiciones sobre los parámetros responsables del comportamiento asintótico de la teoría, de modo que se debe cumplir que

$$\sum_i T(R_i) = 3C_2(G), \quad (4.22)$$

$$C^{ilm} C_{jlm} = 2g^2 C_2(R_i) \delta_j^i. \quad (4.23)$$

De acuerdo a lo descrito en primera instancia por Jones [4], y en trabajos posteriores por D. Kazakov y por Piguet [3, 42], estas dos condiciones son necesarias y suficientes para garantizar finitud a uno y dos lazos, de modo que la elección de irreps queda constreñida en función de la elección del grupo de norma  $G$ .

Esta noción de finitud a ordenes bajos y la búsqueda de invariantes del grupo de renormalización, son las bases del teorema de finitud a todos los ordenes, el cual establece lo siguiente.

**Teorema 2.** Sea una teoría de Yang-Mills supersimétrica  $\mathcal{N} = 1$ , con un grupo de norma semisimple  $G$ . Si las siguientes condiciones se satisfacen

1. no hay anomalías de norma;
2. la función beta de norma se anula a un loop

$$\beta_g^{(1)} = 0 = \Sigma_i T(R_i) - 3C_2(G);$$

3. existe una solución de la forma

$$C_{ijk} = \phi_{ijk} g, \quad (4.24)$$

con  $\phi_{ijk}$  números complejos. Para la condición que anula la dimensión anómala del campo a un loop;

4. esta solución es única y no degenerada, cuando se considera como solución de la función beta de yukawa a un loop siendo anulada

$$\beta_{ijk} = 0.$$

Entonces, la solución dada en la condición (3) puede ser extendida a una serie de potencias en  $g$ , de modo que la teoría unificada de Yang-Mills dependerá únicamente de un acoplamiento, cuya función beta se anula a todos los ordenes.

Analizando detalladamente las condiciones del teorema 2, resaltan ciertos aspectos, como la necesidad de que exista una solución como la de la ecuación (4.24), lo cual va de la mano con el programa de la reducción de parámetros. Ya que, para que se de la reducción, es requerido que exista una solución única para la expansión de los coeficientes de reducción, en función del parámetro principal, que en este caso es el acoplamiento de norma. Obteniendo que la teoría resultante después de la reducción de parámetros presenta el mismo flujo de renormalización que el de la teoría no reducida. Entonces, si las condiciones de finitud son satisfechas, es posible la reducción de parámetros para una teoría masiva o no masiva, según la discusión de [41]. Por lo que está garantizada la existencia de la solución en series de potencias de  $g$  de los parámetros cúbicos del súper-potencial y que se relacionan con los coeficientes de la reducción por medio de ()<sup>1</sup>. Esto resulta de gran utilidad al momento de construir una teoría que sea finita y que sea extensión del modelo estándar, ya que reduce la cantidad de parámetros del modelo. Sin embargo, las condiciones del teorema 2 reducen considerablemente la cantidad de grupos de norma viables para la finitud, de manera que la posibilidad de un grupo como  $G_{SM}$  queda descartada, teniendo así que el MSSM no es una teoría finita, como ya es sabido.

Otro aspecto a resaltar es una implicación directa de las condiciones de finitud que anulan las funciones  $\gamma_j^{i(1)}$  y  $\beta_g^{(1)}$ , ya que si se satisfacen las condiciones (2) y (3) del teorema 2, las anomalías en la corriente asociada a la simetría  $R$  y las anomalías quirales se anulan; anomalías que están presentes en la estructura general de la súper-corriente de las teorías susy  $\mathcal{N} = 1$ . Para ver esto explícitamente, consideremos un escenario un poco más general, en el que se tiene una teoría  $\mathcal{N} = 1$  con grupo de norma no Abelian, con un componente de  $k$  súper-campos quirales en el súper-potencial. Dicha teoría posee invarianza ante transformaciones quirales  $R$  con su respectiva corriente de Noether, además de poseer invarianza de escala a nivel clásico<sup>2</sup>, pero que a nivel cuántico presenta anomalías asociadas con el tensor energía-momento. Finalmente, si se considera que la teoría es no masiva, se tiene además que es invariante clásicamente ante el grupo de transformaciones súper-conformes; el cual es una extensión del grupo conforme [43, 44], y que de igual manera presenta anomalías en el caso cuántico.

La información correspondiente a cada una de estas simetrías y sus respectivas corrientes anómalas está contenida en un súper-multiplete, que incluye al tensor de energía momento, asociado con la invarianza traslacional; la corriente axial asociada a la simetría  $R$  y la corriente de supersimetría. En el caso de una teoría general no se preserva la invarianza a nivel clásico, por lo que la derivada anti-quiral de la súper-corriente está corregida por términos dependientes del súper-potencial. Por su parte, a nivel cuántico surgen anomalías de escala, las cuales hacen que la ecuación de conservación

---

<sup>1</sup>Esto quiere decir que existe una solución en serie de potencias para las ecuaciones de reducción.

<sup>2</sup>La teoría no masiva presenta esta invarianza de escala, pero lo que corresponde al caso masivo, esta invarianza se ve restringida por factores que dependen de derivadas del súper-potencial .

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

presente además, factores dependientes de la escala de corte  $\mu$  como es la amplitud de renormalización de los súper-campos  $\phi_k$ . La ecuación para las anomalías queda expresada en forma general para el súper-multiplete como [9, 45]

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} J_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{3} D_{\alpha} (3W - \Sigma_k \phi_k \frac{\partial W}{\partial \phi_k}) - \delta T r W_{\mu} W^{\mu} + \frac{\bar{D}^2}{8} \Sigma_k \gamma_k Z_k \phi_k^{\dagger} e^V \phi_k, \quad (4.25)$$

donde  $Z_k$  es la amplitud de renormalización de los súper-campos,  $\delta = (3C_2(G) - \Sigma T(R_k))/32\pi^2$  y  $\gamma_k$  la dimensión anómala asociada a cada  $\phi_k$ . De acuerdo a lo descrito por Ferrara y Zumino en [46], la ecuación (4.25) además de contener información sobre la conservación parcial de las corrientes del multiplete  $J_{\alpha\dot{\alpha}}$ , da lugar a identidades en las trazas, que provienen precisamente del hecho de que existan las anomalías. El punto central del trabajo [46] fue el demostrar que las anomalías presentes en el multiplete de corrientes forman a su vez un nuevo súper-multiplete, teniendo que cada una de estas anomalías tienen el mismo coeficiente  $\beta$  que las relaciona (la función beta de la ecuación del grupo de renormalización). De esta forma se deja entrever que, si se satisface la condición (2) del teorema de finitud, se tendrá la cancelación de las anomalías de cada componente de  $J_{\alpha\dot{\alpha}}$ , que se presentan de manera explicita en [41]<sup>1</sup>. Sin embargo, antes de encontrar explícitamente la cancelación de estas, cabe mencionar un par de puntos que son centrales en el desarrollo del trabajo.

Unos de las características más poderosas que da el teorema de no renormalización sobre el súper-potencial; además de no recibir correcciones de tipo perturbativo, es su holomorficidad en los súper-campos  $\phi$ , que de acuerdo a [37] impone severas restricciones sobre la forma de las funciones beta para los acoplamientos adimensionales del súper-potencial y de los acoplamientos de norma. De manera que el corrimiento bajo el grupo de renormalización del parámetro genérico  $y$  será proporcional al parámetro mismo y a la dimensión anómala  $\gamma$ , asociada al campo que acopla. Entonces de manera genérica y en términos de los invariantes del grupo de norma se pueden escribir las funciones beta para un súper-potencial  $W(\phi_i) = \Sigma_a y_a W^a(\phi_i)$  (con  $W^a$  producto de  $d_a$  súper-campos) como

$$\beta_g = f(g)(\Sigma_i T(R_i) - 3C_2(G) - \Sigma_i T(\phi_i)\gamma(\phi_i)), \quad (4.26)$$

$$\beta_y = y[-d_W + \Sigma_i (d(\phi_i) + \frac{1}{2}\gamma(\phi_i))], \quad (4.27)$$

donde  $d_W$  y  $d(\phi_i)$  son las dimensiones canónicas del súper-potencial y de los súper-campos, respectivamente. Cabe notar que  $f(g)$  es una función suave del acoplamiento de norma, que depende de la teoría con que se trabaje y que varía de manera implícita con la escala energética de renormalización  $\mu$ . De la misma manera el acoplamiento del súper-potencial  $y_a$  depende de  $\mu$ .

Como la teoría cerca de un punto fijo es invariante de escala, las funciones beta en el punto fijo se anulan, lo que da una relación entre los acoplamientos, tal que si se

---

<sup>1</sup>Exceptuando la anomalía de escala.

tiene una teoría con  $k$  acoplamientos, se tendrán el mismo número de condiciones. La solución de las ecuaciones en el punto fijo determinan una subvariedad en el espacio de acoplamientos, cuya dimensión está determinada por el número de soluciones linealmente independientes, como ya se había mencionado. Si se hace la suposición de que existe un punto fijo tal que la teoría es conforme (en el sentido supersimétrico), las direcciones del flujo estarán determinadas por un conjunto de operadores, cuya adición al potencial generará nuevos punto fijos, estos operadores llamados "marginales" generan una variedad diferenciable de puntos fijos<sup>1</sup> o variedad conforme asociada a una teoría CFT. En el contexto de las teorías súper-conformes, resalta la existencia de este tipo de operadores en casos limitados, dependientes de la dimensionalidad espacio-temporal  $d$  y la cantidad de súper-multipletes presentes, siendo únicamente viables  $\mathcal{N} = 1, 2, 4$  en  $d = 4$  y  $\mathcal{N} = 1, 2$  en  $d = 3$  [6], en donde se hace una caracterización de las representaciones unitarias del súper-álgebra conforme, restringiendo la dimensión de escalamiento y cargas  $R$  de acuerdo a sus reglas de recombinación de los operadores.

Uno de los motivos por los cuales la suposición de conformalidad supersimétrica en el punto fijo resulta muy poderosa, es debido a que teorías de este estilo presentan una conservación de la simetría  $R$  a nivel cuántico, es decir, el álgebra de las transformaciones  $R$  está contenida en el álgebra súper-conforme. Por lo que si se tiene un punto fijo súper-conforme, en este, la presencia de anomalías  $R$  se verá suprimida, además de que los operadores de la teoría formarán una representación del grupo súper-conforme. Si se define de manera consistente que los factores multiplicativos que acompañan a las funciones beta (4.26) y (4.27), codifiquen adecuadamente la dependencia de la escala en el corrimiento de los parámetros/acoplamientos, entonces para una teoría SCFT, se tendrá que estos coeficientes  $S_h$  y  $S_g$ ; que llamaremos coeficientes de escala, deben ser necesariamente nulos.

Volviendo a la discusión en torno a la ecuación (4.25), de acuerdo con lo descrito en [9, 46], es posible reescribir esta relación de conservación en términos de las ecuaciones de movimiento para los súper-campos quirales, ya que resultan proporcionales a los términos con dependencia  $\mu$

$$\phi_k \frac{\partial W}{\partial \phi_k} + \frac{T(R_k)}{16\pi^2} W_\alpha W^\alpha = \frac{\bar{D}^2}{4} Z_k \phi_k^\dagger e^V \phi_k,$$

tal que la anomalía se reescribe como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} D_\alpha (3W - \sum_k \phi_k \frac{\partial W}{\partial \phi_k}) \\ & - \frac{1}{3} D_\alpha (\frac{\delta}{32\pi^2}) W_\beta W^\beta + \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k (\frac{1}{16\pi^2} T(R_k) W_\beta W^\beta + \phi_k \frac{\partial W}{\partial \phi_k}) = \\ & - \frac{1}{3} D_\alpha [\sum_k \phi_k \frac{\partial W}{\partial \phi_k} (1 + \frac{1}{2} \gamma_k) + \frac{W_\alpha W^\alpha}{32\pi^2} \Sigma_k (T(R_k) \gamma_k + \delta) - 3W], \quad (4.28) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>No confundir a la variedad solución en un punto fijo con la variedad de puntos fijos.

y que en términos de los factores  $W^a$  del súper-potencial se escribe como

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} J_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{1}{3} D_{\alpha} \left[ \frac{W_{\beta} W^{\beta}}{32\pi^2} S_g + \Sigma_k y_a W^{(a)} S_{y_a} \right], \quad (4.29)$$

donde los factores  $S_g$  y  $S_{y_a}$  son los factores de escala antes mencionados. Entonces, para una teoría que es independiente de la escala, estos factores son nulos. Por lo que, de acuerdo a las condiciones del teorema 2, una teoría que sea finita, al ser invariante de escala, sus coeficientes  $S_k$  son cero y por tanto las anomalías dentro del multiplete de corriente son canceladas. Esto en un sentido general, ya que se supuso una forma muy genérica para el súper-potencial, considerando un producto  $d_a$  de súper-campos quirales, sin embargo, si se trata de un súper-potencial cúbico como el del teorema 2, las condiciones que anulan a las anomalías son proporcionales a las condiciones que anulan las funciones beta de norma y de Yukawa, teniendo un súper-multiplete con corrientes conservadas cuánticamente.

#### 4.4.3. Relación entre finitud e invarianza súper-conforme

La finitud resulta ser una consecuencia poderosa en teorías SUSY como esta, ya que al ser carentes de divergencias en su acción efectiva, son de gran interés al momento de buscar teorías que unifiquen al modelo estándar a altas energías. Sin embargo, es probable que las condiciones del teorema 2 sean más poderosas de lo que se piensa, ya que al ser la teoría invariante de escala en los puntos fijos, estas condiciones darían la pauta para la existencia de una variedad conforme asociada a un punto fijo, tendiendo así una teoría SCFT asociada a cada cero de la función beta. Las variedades conformes, de acuerdo con la teoría CFT [7, 44, 47] son generadas por los operadores marginales asociados a las direcciones dentro de la variedad fija, caracterizando así la dimensionalidad de la misma dentro del espacio de parámetros. La presencia de estos operadores en una teoría de campos implica la existencia de una variedad de este estilo, pero supersimétrica, es decir, conformada por operadores que actúan en el súper-espacio.<sup>1</sup>

Teniendo en mente la construcción algebraica de las teorías súper-conformes [6], se enuncia el siguiente teorema/proposición, respecto a la estructura de las teorías finitas supersimétricas.

**Teorema 3.** Sea una teoría de norma supersimétrica  $\mathcal{N} = 1$ , con grupo de norma  $G_s$  y súper-potencial

$$W = m_{ij} \phi_i \phi_j + C_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k,$$

tal que se satisfacen las condiciones 1-4 del teorema 2. Entonces, si la dimensionalidad de la teoría es  $d = 4$  y existe un punto fijo asociado a una escala de energía  $\mu^*$ , la teoría es invariante conforme en ese punto.

Como consecuencia, si se cumple este teorema, los operadores de la teoría supersimétrica constituirán una representación unitaria del grupo súper-conforme en 4d, así

---

<sup>1</sup>Esto solo en el caso en el que se preserve la supersimetría en los puntos fijos.

como el multiplete de corrientes correspondiente a las simetrías de la teoría. Adicionalmente, la teoría CFT incluye en su variedad conjuntos de coeficientes asociados a los operadores primarios; estos conocidos como coeficientes OPE y dimensiones de escalamiento  $\lambda_{ijk}$  y  $\Delta_i$  respectivamente. Para hablar de un operador marginal, dichos coeficientes se ven restringidos de acuerdo a lo trabajado por [47], teniendo que

$$\hat{\Delta} = d \quad \lambda_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\theta}} = 0,$$

siendo esto una de las herramientas primordiales para la búsqueda de variedades fijas.

**Demostración.**

Una teoría que sea súper-conforme debe satisfacer tres condiciones en términos de sus operadores y de los invariantes del grupo; dichas condiciones surgen del estudio algebraico de las teorías SCFT y de lo descrito por varios autores [6, 9, 47].

1. Debe verificarse la invarianza de escala codificada en los coeficientes  $S_g$  y  $S_{Cijk}$ .
2. La corriente  $R$  debe ser conservada a nivel cuántico, por lo que las anomalías en el multiplete  $J_{\alpha\dot{\alpha}}$  no son admisibles.
3. Existen operadores marginales<sup>1</sup> que generan la variedad conforme.

Como se está interesado en la teoría finita a la escala de energía  $\mu^*$  en el que la reducción de acoplamientos se lleva a cabo y existen las soluciones para la ecuación (4.24), la invarianza SCFT se busca en los puntos fijos de la teoría.

El primer punto se verifica de manera trivial para el súper-potencial en cuestión de acuerdo con la condición 1 y 3 del teorema de finitud, ya que los coeficientes de escala son proporcionales a estas condiciones alrededor de  $\mu^*$ . El apartado 2 puede verificarse gracias a la cancelación de las anomalías dentro del súper-multiplete de corrientes como consecuencia de la finitud, en particular la simetría  $R$  es conservada a nivel cuántico.

La última condición resulta ser la más sutil de probar, ya que la manera de mostrar que existen operadores exactamente marginales y por tanto, una variedad fija conforme, es mediante la exhibición directa de los operadores. Para esto, se propone un operador como candidato a marginal, siendo este el término del súper-potencial que influye en las propiedades críticas de la teoría  $\mathcal{O}_1 = C_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k$ . De acuerdo a la caracterización dada en [9], este operador verifica que su factor de escala  $S_C$  es proporcional al factor de escala del acoplamiento de norma. Esto gracias a la condición 2 del teorema de finitud y al teorema de no renormalización, que da una forma particular para la función beta de Yukawa proporcional a las dimensiones anómalas  $\gamma_i^j$ , obteniendo que el coeficiente de escala de norma es

$$S_g = \sum_k T(R_k)\gamma_k,$$

con  $\gamma_k$  los elementos diagonales de la matriz de dimensión anómala. El factor de escala de Yukawa será por tanto

---

<sup>1</sup>Los cuales son operadores locales primarios que no contienen dimensión anómala alguna.

#### 4. EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

---

$$S_C = \frac{3}{2}\gamma_k.$$

Con esto, se prueba que el operador  $\mathcal{O}_1$  es un buen candidato a ser un operador marginal ya que  $S_g \propto S_C$ <sup>1</sup>. Relación que, de igual manera se puede deducir a partir de la ecuación (4.24) que da las soluciones de la reducción de acoplamientos. Otro aspecto sobre  $\mathcal{O}_1$  es la ausencia de dimensión anómala asociada a cada uno de los súper-campos que lo componen, lo cual sucede, ya que por la condición (3) del teorema 1, estas se anulan para todo valor  $i$  y  $j$ .

Finalmente, al tratarse de operadores quirales en una teoría de dimensión  $d = 4$ , se tendrá de acuerdo a [6] que existe una relación estrecha entre la dimensión canónica del campo y su carga bajo la simetría  $R$ , siendo esta  $d_k = \frac{3}{2}r_k$ . Y como ya se mencionó, la condición sobre los operadores marginales es que su dimensión canónica coincida con su dimensión anómala; es decir  $d_k = \Delta_k$ , teniendo entonces que  $\Delta_k = \frac{3}{2}r_k$ . Esto hace que los operadores de la teoría finita sean buenos candidatos para vivir en un súper-multiplete conforme, de acuerdo a la clasificación explícita dada por Córdova y Dimitrescu [6], y en particular, como los operadores que constituyen al marginal carecen de dimensión anómala, cumplirán la relación entre  $r_k$  y  $\Delta_k$  (ya que en términos de la dimensión anómala, la relación se escribe  $3/2r_k = 1 + 1/2\gamma_k$ ). Por tanto,  $\mathcal{O}_1$  tiene elementos suficientes para vivir en un multiplete conforme de acuerdo a lo visto anteriormente, y se concluye entonces que es un operador marginal de la teoría finita, en el punto fijo  $\mu^*$ .

Esto prueba que se tiene asociada una variedad conforme en el punto fijo, en la cual la acción efectiva se mantiene finita. En donde los operadores de la teoría forman una representación unitaria del grupo súper-conforme. ■

Una consecuencia directa de lo mostrado, es la posibilidad de caracterizar a la teoría en el punto fijo, de acuerdo a un multiplete súper-conforme como el que se encuentra en la referencia [6, 7]. La discusión que se ha dado sobre las teorías finitas da el último ingrediente que se requiere para la construcción de una teoría de gran unificación a altas energías, supersimétrica, carente de divergencias UV y que contenga al modelo estándar. El modelo que se trabajará y se describirá a detalle en el siguiente capítulo, es el que consiste en un grupo de norma  $SU(5)$  con mínimo contenido en los súper-multipletes de Higgs. Dicho grupo de norma, al tener el mismo rango que el grupo  $G_{SM}$ , no es complicado construir un patrón de rompimiento de la forma  $SU(5) \rightarrow G_{SM}$ . Esto y más detalles fenomenológicos se especifican a continuación.

---

<sup>1</sup>Para todos los valores de  $i, j$  y  $k$ .

---

## Capítulo 5

# Teoría $SU(5)$ de Gran Unificación

---

Las teorías de Gran Unificación (GUTs) surgieron con el afán de tratar de unificar las fuerzas fundamentales descritas mediante el Modelo Estándar a alguna escala alta de energía. Pero al mismo tiempo, tratar de solucionar algunos (si no es que todos) de los problemas asociados al mismo, previamente enumerados en la sección 2.6, resaltando de entre todos ellos el problema de jerarquía en la estabilización de la masa del Higgs, que se soluciona por medio de teorías con supersimetrías y mediante ajustes finos. La base para la unificación de los acoplamientos de norma es la introducción de un grupo no-abeliano que contenga al grupo del modelo estándar, de forma que en la escala de gran unificación  $M_{GUT}$ ; determinada por la teoría, los acoplamientos  $g_i$  correspondan al acoplamiento de norma del nuevo grupo  $g^1$ .

Como era de esperarse, durante la historia ha existido más de una propuesta para unificar los acoplamientos, entre las primeras propuestas resaltan los modelos propuestos por Pati y Salam, con un grupo con dos acoplamientos de norma  $SU(2) \times SU(4)_c$ ; y la unificación mediante un grupo simple  $SU(N)$  con un único acoplamiento asociado. En el contexto de una unificación mediante un grupo  $SU(N)$ , S. Glashow y H. Georgi propusieron en el año de 1974 un modelo basado en el grupo  $SU(5)$ , cuyas propiedades matemáticas hacen viable el contener como subgrupo al  $G_{SM}$  del modelo estándar, y que a su vez constituye uno de los ejemplos más sencillos de tratar en términos de un modelo predictivo en la unificación a alta energía. En este capítulo se estudiarán a detalle las propiedades de la teoría de gran unificación  $SU(5)$  con un mínimo contenido de partículas en el sector de Higgs, sus representaciones, su contenido de partículas, así como aspectos fenomenológicos y los principales problemas que presenta este modelo como candidato para GUT. Por su parte se estudiará el rompimiento espontáneo del grupo de norma vía el mecanismo de Higgs, al grupo del SM, analizando el patrón de rompimiento y relacionándolo con las restricciones fenomenológicas para así descartar patrones de rompimiento no físicos. A su vez, se describirá un modelo con el mismo grupo de norma, pero en su versión supersimétrica  $\mathcal{N} = 1$  en  $4D$ , la cual resulta ser finita a todos los ordenes en teoría de perturbaciones (dependiendo de su contenido de partículas), de acuerdo al criterio del Teorema 2 del capítulo anterior, consecuencia

---

<sup>1</sup>Salvo factores de normalización.

que resulta de mucho interés debido a sus propiedades recién encontradas a la escala de gran unificación (Teorema 3).

Parte de los desarrollos realizados en la subsección 5.1.1 que trata al modelo no supersimétrico, se basan en lo encontrado en diferentes fuentes sobre teoría de campos [10, 11, 48, 49, 50] y lo trabajado por [51, 52].

## 5.1. $SU(5)$ con mínimo contenido de materia

### 5.1.1. Unificación vía $SU(N)$

Uno de los candidatos más naturales para la unificación de los acoplamientos de norma es aquella que consiste en un grupo de norma simple (o semi-simple, con sutilezas) más grande que el  $G_{SM}$ , y que posea un único acoplamiento  $g$ . Además de que mediante un rompimiento espontáneo se recupere el grupo  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$  a una escala de energía  $\mu < M_{GUT}$ . Al proponer un grupo especial unitario  $SU(N)$ , se requiere que el contenido de partículas del modelo estándar sea reproducible después del rompimiento espontáneo de la simetría. Como el grupo del SM tiene rango 4<sup>1</sup>, la elección más sencilla de grupo candidato a GUT tiene tres posibilidades:  $SU(5)$ ,  $SU(2)^4$  y  $SU(3)^2$ , siendo descartados los últimos dos al no contener a  $SU(3)$  como subgrupo y al resultar imposible el definir un generador asociado con la carga eléctrica, respectivamente. El reto para el modelo restante es el poder reproducir el contenido de materia del modelo estándar.

Al tratarse de un grupo de la forma  $SU(N)$ , los generadores del grupo son matrices unitarias con constricciones en su determinante ( $\det(\hat{T}) = 1$ ), además de poseer eigenvalores reales  $a_{kk} = a_{kk}^*$ , por lo que el número de generadores viene determinado por  $n^2 - 1$ . Que para el caso particular de  $SU(5)$ , son un total de 24 generadores, a diferencia de los 12 del modelo estándar. Dichos generadores suelen asociarse a los bosones de norma de la teoría, que se incluyen de dentro de la derivada covariante  $D^\mu$ . Estos bosones de norma transforman por medio a la representación adjunta del grupo; representación que de acuerdo a la teoría matemática [53, 54], se construye en general mediante el producto de las representaciones  $\mathfrak{n} \otimes \bar{\mathfrak{n}} = \mathbf{1} \oplus \mathfrak{n}^2 - \mathbf{1}$ , siendo para el caso  $SU(5)$  representada por  $\mathbf{24}$ . Esto es fácil de identificar mediante un producto de Young, de acuerdo con la referencia [50, 55].

Como se quiere poder codificar el contenido de materia del modelo estándar a bajas energías en el modelo extendido, es necesario tener diferentes representaciones irreducibles del grupo  $SU(5)$ , de modo que los multipletes asociados a  $G_{SM}$  vivan allí. Un primer intento para lograr esto, motivados por evitar la mezcla entre los multipletes de  $SU(3)$  y los de  $SU(2)$ , es el considerar la representación fundamental de  $SU(5)$  como la suma directa de las fundamentales del grupo de QCD y del grupo de isospín, tal que  $\mathbf{5} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{2}$ , teniendo que los números de hipercarga se asignarán con su correspondiente

---

<sup>1</sup>El rango es el número de generadores independientes que conmutan entre sí.

multiplete del modelo estándar.

Como el grupo  $G_{SM}$  resulta ser un subgrupo maximal de  $SU(5)$ <sup>1</sup>, es posible hacer la extensión de los generadores de  $SU(3)$  y  $SU(2)$  a cinco dimensiones, convirtiéndose así en generadores del grupo  $G_U$ . Al combinar las representaciones mediante la extensión dada por la maximalidad [53, 55], se tendrán generadores asociados a las matrices de Pauli dentro de una matriz 5-dimensional

$$T^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix},$$

con la misma normalización dada en la sección 2.2. Además, 8 generadores asociados con las matrices de Gell-Mann de  $SU(3)$  insertadas en las primeras 3 columnas y renglones de matrices de dimensión cinco

$$T^{a'} = \begin{pmatrix} \lambda^{a'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $a'$  los índices de color. Utilizando la normalización impuesta para los  $T^{a'}$  de  $SU(3)$ , y el hecho de que los generadores  $T^a$  y  $T^{a'}$  conmutan con el generador  $B_\mu$ , se encuentra un generador de  $SU(5)$  que es diagonal

$$T^{24} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{Diag}(2, 2, 2, -3, -3).$$

Por último, los 12 generadores restantes surgen de la mezcla de los generadores de  $SU(3)$  y  $SU(2)$ , y que no están presentes en el modelo estándar usual. Por tanto, inducen nuevas interacciones en el modelo, ajenas a las ya conocidas. Dichos generadores son de la siguiente forma general

$$J^{13+k} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & j^{13+k} \\ (j^{13+k})^\dagger & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

donde las matrices  $j^{13+k}$  son de la forma

$$\begin{aligned} j^{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j^{14} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j^{15} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j^{16} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ j^{17} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & j^{18} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, & j^{19} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j^{20} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ j^{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j^{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j^{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & j^{24} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, estos 12 generadores corresponden directamente con nuevos bosones vectoriales, que interactuarán directamente con las partículas del modelo estándar. De manera

<sup>1</sup>Véase la prueba de esto en las referencias matemáticas de teoría de representaciones [53, 54]

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

similar a como se definieron los bosones  $W$  cargados en la ecuación (2.8), se definen los bosones  $X$  y  $Y$ , responsables de las nuevas interacciones

$$X_{\mu 1} = \frac{V_{\mu}^{13} - iV_{\mu}^{14}}{\sqrt{2}}, \quad (5.1)$$

$$Y_{\mu 1} = \frac{V_{\mu}^{18} + iV_{\mu}^{19}}{\sqrt{2}} \quad (5.2)$$

y de manera análoga se definen  $X_2, Y_2, X_3$  y  $Y_3$ . Con esto último, es posible escribir una matriz general de  $5 \times 5$  que englobe a todos los bosones de norma, la cual nombraremos como  $V_{\mu}$

$$V_{\mu} = \begin{pmatrix} G_{11} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{12} & G_{13} & X_1^{\dagger} & Y_1^{\dagger} \\ G_{21} & G_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_{23} & X_2^{\dagger} & Y_2^{\dagger} \\ G_{31} & G_{32} & G_{22} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & X_3^{\dagger} & Y_3^{\dagger} \\ X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, aún no se cuenta con todo el contenido de partículas del modelo estándar, para incluir todo el contenido es necesario considerar representaciones irreducibles de  $SU(5)$  de dimensionalidad mayor. Para esto, es útil recurrir a las reglas de Young, o directamente al formalismo matemático de teoría de representaciones [54]. Las representaciones requeridas para englobar al SM, de acuerdo a [56] son<sup>1</sup>: la fundamental **5**; la anti-fundamental o conjugada  $\bar{\mathbf{5}}$ , la **10** y finalmente la representación adjunta **24**, responsable del rompimiento espontáneo de la simetría de norma.

Por como fueron construidos los generadores del grupo (bosones de norma), las primeras entradas de la representación vectorial contienen los elementos del grupo  $SU(3)$ ; es decir, viven en un triplete de color, mientras que las últimas dos entradas viven dentro de un isodoublet, por lo que la representación **5** tiene la forma

$$\mathbf{5}^i = (d_1, d_2, d_3, e^+, \nu)_R,$$

que está en consistencia con la descripción del contenido de fermiones dado por la tabla 2.2 de la sección 2.6, respecto a la representación de  $G_{SM}$  en la que viven. En consistencia con el contenido de la representación fundamental, su conjugada  $\bar{\mathbf{5}}$  incluirá los anti-quarks  $\bar{d}_L$  así como los leptones  $\bar{L}$

$$\bar{\mathbf{5}}^i = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ e^- \\ -\nu \end{pmatrix}_L.$$

---

<sup>1</sup>Las mismas son requeridas para el caso supersimétrico.

El decuplete de  $SU(5)$  se construye a partir de la representación estándar; es decir, mediante el producto de dos copias de la representación vectorial se obtienen dos representaciones, una simétrica y otra anti-simétrica, la parte anti-simétrica es la que corresponde con **10**. Además, incluye el contenido restante de partículas de materia para tener en su totalidad el modelo estándar. Por su parte, la porción simétrica del producto no se incluye en el modelo con mínimo contenido de partículas, ya que de acuerdo al producto de Young, contiene un sextuplete de  $SU(3)$  que no está en el SM, por lo que no será considerado para fines de este escrito. La representación **10** se escribe entonces como

$$\mathbf{10}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & u_1 & d_1 \\ -\bar{u}_3 & 0 & \bar{u}_1 & u_2 & d_2 \\ \bar{u}_2 & -\bar{u}_1 & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L,$$

donde el contenido de fermiones dentro de la matriz se determina en función de los números cuánticos bajo el modelo estándar de los elementos de **5**, al ser combinados consigo mismos. Por último, la representación adjunta se construye de la misma manera que se construyó la matriz de bosones de norma  $V_\mu$ , teniendo que  $\mathbf{24} = \Sigma_a V_\mu^a T^a$ , que adicionalmente se puede descomponer de acuerdo al producto  $\mathbf{5} \otimes \bar{\mathbf{5}}$  y a sus números cuánticos de  $(SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y)$  como<sup>1</sup>

$$\mathbf{5} \otimes \bar{\mathbf{5}} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 5/3) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -5/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0),$$

siendo así

$$\mathbf{24} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 5/3) \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, -5/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0).$$

De la expresión anterior, queda clara la contención de la representación de los gluones, de los bosones  $Z$  y  $W$ , así como de  $B_\mu$  dentro del multiplete de la representación adjunta. Además de los bosones extra  $X_\mu$  y  $Y_\mu$ , todo esto al analizar sus números cuánticos. Entonces ya se tiene todo el contenido mínimo de partículas para poder reproducir el modelo estándar a bajas energías. En la siguiente sección se analizarán algunas propiedades y características del modelo.

## 5.2. Carga eléctrica y cancelación de anomalías.

El generador  $T^{12}$  del grupo  $SU(5)$  resulta de gran importancia, esto debido a que se le relaciona directamente con el generador de hipercarga  $Y$  de  $U(1)$ , ya que en el SM el generador  $Y$  es diagonal y conmuta con cada uno de los generadores de  $SU(3)$  y  $SU(2)$ ,

<sup>1</sup>Que es posible ver de acuerdo con los productos de Young.

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

propiedad que satisface la matriz  $T^{12}$ . Como el acoplamiento de  $U(1)$  tiene diferente normalización que los acoplamientos de  $SU(3)$  y de  $SU(2)$ , es necesario normalizar el generador  $T^{12}$  para que esté en verdadera correspondencia con los números cuánticos de hipercarga<sup>1</sup>, y sea igual que el acoplamiento de norma de  $SU(5)$ . La normalización considerada para las constantes de acoplamiento es la siguiente

$$g_{GUT} = k_i g_i \quad i = 1, 2, 3,$$

y de forma más explícita como  $(5/3, 1, 1)$ . Entonces el generador de hipercarga se escribe en términos del generador  $T^{12}$  como  $Y/2 = cT^{12}$ , con  $c = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ , relacionando así las normas del SM y de la teoría.

Una de las consecuencias para el modelo GUT  $SU(5)$  más inmediatas de obtener, es la cuantización de la carga eléctrica, observada experimentalmente y no descrita por otros modelos<sup>2</sup>. Para ejemplificar esto, se define el operador de carga  $Q$  en función de los operadores de la base de  $SU(5)$  que conmutan con todos los generadores de  $SU(3)_c \times SU(2)_L$ , para tener con esto un operador diagonal, que sea aditivo en los eigenvalores.

$$Q \equiv T_3 + \frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}T^3 - \sqrt{\frac{5}{3}}T^{12},$$

y con representación matricial explícita

$$Q^{ij} = \text{Diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0). \quad (5.3)$$

En realidad, la forma de la ecuación (5.3) depende de la representación; más específicamente, de como transforma el multiplete de  $SU(5)$  al que se le quiere asociar carga eléctrica. Con esta consideración, de acuerdo a lo descrito por Li y Cheng [11], se tiene que las cargas para las diferentes representaciones son de la forma

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{5}) &= Q_i \delta_{ij} \\ Q(\bar{\mathbf{5}}) &= -Q_i \delta_{ij} \\ Q(\phi_{ij}) &= Q_i + Q_j \\ Q(\phi_j^i) &= Q_j - Q_i, \end{aligned}$$

con esta asignación es evidente que para el caso de la representación estándar (que se escribe explícitamente en términos de los quarks  $d_i$  y los leptones derechos), los quarks tienen carga en términos de la carga de los leptones, en consistencia con la condición de tener traza nula para los generadores, siendo  $Q_d = 1/3 Q_{e^+}$ .

La construcción del operador de carga eléctrica resulta de utilidad al momento de comprobar la consistencia de la asignación de multipletes y su correcta equivalencia con el contenido de materia del modelo estándar. Para reproducir las familias de fermiones

---

<sup>1</sup>Esto será válido a la escala de Gran Unificación.

<sup>2</sup>La cuantización de la carga eléctrica suele asumirse como inmediata por la elección de un grupo de norma simple, debido al espectro discreto asociado a los grupos no abelianos.

izquierdos del SM en el modelo aquí presentado, son necesarias tres copias de la representación reducible  $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$  que, para que sea consistente en términos fenomenológicos, debe carecer de anomalías en sus acoplamientos con los bosones de norma  $V_\mu^a$ . Dicha información sobre las anomalías está contenida en la traza de los generadores en la representación dada  $T^a(R)$ , con  $R = \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$ , siendo

$$Tr(\{T^a(R), T^b(R)\}T^c(R)) \propto A(R),$$

siendo  $A(R)$  el término de anomalías. Como este último solo depende de las representación que se esté utilizando y no de los generadores del grupo, consideramos el operador de carga eléctrica  $Q$  tres veces, para así tener

$$\begin{aligned} 2Tr(Q^3(\bar{\mathbf{5}})) &= CA(\bar{\mathbf{5}}) \\ 2Tr(Q^3(\mathbf{10})) &= CA(\mathbf{10}), \end{aligned}$$

con  $C$  un factor dependiente de los invariantes del álgebra. Tomando el cociente entre las dos expresiones y desarrollando los términos de la traza en función de las cargas de cada representación<sup>1</sup>, se obtiene

$$\frac{A(\bar{\mathbf{5}})}{A(\mathbf{10})} = \frac{3Q_d^3 + (Q_{e^-})^3}{2Q_u^3 + Q_{e^+} + 3Q_d^3 + 2(-Q_u)^3} = -1.$$

De donde se concluye que la representación  $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$  está libre de anomalías quirales, debido a la cancelación de los coeficientes  $A(R_i)$ . Esto es importante, ya que los diagramas asociados a la interacción entre bosones de norma y fermiones vía los acoplamientos de Yukawa, no presentan términos que rompan la simetría quiral de  $SU(2)_L$ .

Una consecuencia importante y sorprendente de las teorías GUT, es el hecho de que la la carga eléctrica asociada a fermiones esté cuantizada; que a pesar de ser una consecuencia inmediata de la estructura del grupo de norma, resulta un logro importante de la hipótesis de gran unificación.

## 5.3. Sector escalar y rompimiento espontáneo de SU(5)

### 5.3.1. Sector de Higgs

Una característica vital que debe poseer una teoría de gran unificación, además de describir las interacciones fundamentales mediante un único acoplamiento a alta energía y el solucionar los problemas del SM, es el recuperar el grupo y contenido de partículas del mismo a una escala de baja energía (baja comparada con la escala de gran unificación  $M_{GUT}$ ). De la misma manera en la que se da el rompimiento de la simetría electrodébil a la escala  $M_{Weak}$ , en el modelo  $SU(5)$  es posible tener un patrón de rompimiento espontáneo al adquirir un vev en el sector escalar. Dicho patrón de

---

<sup>1</sup>Tomando la carga de  $e^+ = 1$

rompimiento estará en función de la representación adjunta del grupo, pero antes de detallar dicho rompimiento, es necesario describir el sector de Higgs o sector escalar.

El contenido de escalares en el modelo viene dado por un multiplete viviendo en la representación adjunta  $\mathbf{24}$ , y un quintete, dentro de la representación estándar  $(\mathbf{5}_H)$ , siendo la segunda la encargada de romper la simetría del modelo estándar a  $SU(3)_c \times U(1)_q$ , ya que contendrá un doblete escalar de  $SU(2)$  en modelo estándar, además de incluir un triplete de color. Por lo tanto el multiplete dentro de la adjunta será el que rompa la simetría de norma, ya que tiene la peculiaridad de no romper el rango del grupo. Por el momento no es de mayor interés el describir de manera completa el lagrangiano del modelo en su totalidad, por lo que solo se centrará en el contenido del sector escalar.

El sector escalar es descrito por la densidad Lagrangiana que involucra a los multipletes de Higgs, teniendo asociado cada uno de estos términos cinéticos y términos potenciales de interacción y auto-interacción. Los términos cinéticos asocian la derivada covariante de los campos, de modo que dichos términos corresponderán a interacciones entre los bosones de norma y los multipletes de Higgs. El término cinético es

$$\mathcal{L}_{Kin}^H = \frac{1}{2} Tr\{(D_\mu \mathbf{24}_H)^\dagger (D^\mu \mathbf{24}_H) + (D_\mu \mathbf{5}_H)^\dagger (D^\mu \mathbf{5}_H)\}, \quad (5.4)$$

donde la expresión de la derivada covariante cambia dependiendo de la representación en la que esté actuando. Los términos del potencial consisten en productos de los campos escalares, en analogía con el potencial de Higgs del sector escalar del modelo estándar.

$$V(\mathbf{5}_H) = \frac{-\mu_5^2}{2} \mathbf{5}_H^\dagger \mathbf{5}_H + \frac{\lambda}{4} (\mathbf{5}_H^\dagger \mathbf{5}_H)^2, \quad (5.5)$$

$$V(\mathbf{24}_H) = \frac{-\mu^2}{2} Tr\{\mathbf{24}_H^2\} \frac{k}{4} Tr\{\mathbf{24}_H^2\}^2 + \frac{\alpha}{4} Tr\{\mathbf{24}_H^4\} + \frac{\beta}{3} Tr\{\mathbf{24}_H^3\}. \quad (5.6)$$

Finalmente, los términos de potencial mezclados son de la forma

$$V(\mathbf{24}_H, \mathbf{5}_H) = a \mathbf{5}_H^\dagger \mathbf{5}_H Tr\{\mathbf{24}_H^2\} + b \mathbf{5}_H^\dagger \mathbf{24}_H^2 \mathbf{5}_H + c \mathbf{5}_H^\dagger \mathbf{24}_H \mathbf{5}_H, \quad (5.7)$$

con lo que el sector escalar está compuesto por la suma de las cantidades definidas en las ecuaciones (5.4-5.7)

$$\mathcal{L}^H = \mathcal{L}_{Kin}^H + V(\mathbf{5}_H) + V(\mathbf{24}_H) + V(\mathbf{24}_H, \mathbf{5}_H).$$

### 5.3.2. Sector de Yukawa

De manera similar, el sector de Yukawa se construye con relativa facilidad, recordando las identificaciones entre los multipletes, las representaciones de  $SU(5)$ , y las partículas del modelo estándar. Entonces es claro que los campos requeridos para describir el sector de Yukawa son  $\mathbf{5}_H$ ,  $\bar{\mathbf{5}}$  y  $\mathbf{10}$ , ya que contienen a los quarks y leptones.

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \bar{\mathbf{5}}Y_5\mathbf{10}\mathbf{5}_H^* + \frac{1}{8}\mathbf{10}Y_{10}\mathbf{10}\mathbf{5}_H + h.c., \quad (5.8)$$

con  $Y_5$  y  $Y_{10}$  los acoplamientos de Yukawa usuales para cada familia de fermiones. En el modelo  $SU(5)$  no se permite la mezcla entre los multipletes  $\mathbf{24}_H$  y  $\mathbf{10}$  para que al momento del rompimiento de la simetría de norma, no surjan términos de masa asociados a fermiones ya que no estarían en consistencia con lo observado experimentalmente a esas escalas de energía. El primer término de (5.8), se puede escribir explícitamente en función del contenido del SM de acuerdo a lo encontrado en la sección (2.2) como el siguiente producto matricial

$$\bar{\mathbf{5}}^T Y_5 \mathbf{10} \mathbf{5}_H^* = (\bar{d}_i, L_i)_L \begin{pmatrix} \epsilon_{ijk} \bar{u}_k & q \\ -q^T & \epsilon_{ab} e^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_c^* \\ H^* \end{pmatrix},$$

donde se usaron índices de sabor para el símbolo de Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$  e índices genéricos para  $\epsilon_{ab}$ . Donde se nota que la primera entrada de la matriz en realidad corresponde con una submatriz de dimensión 3, y  $Y_5$  la matriz de acoplamientos de Yukawa. Simplificando la relación anterior en términos del doblete  $H$  y el tripléte  $H_c$ , se obtiene<sup>1</sup>

$$q \bar{d}_i Y_5 H^* + \epsilon_{ab} e^+ H^* + \epsilon_{ijk} \bar{d}_i Y_5 \bar{u}_k H_c^* - L_i Y_5 q^T H_c^*, \quad (5.9)$$

que al analizar los términos que involucran a  $H$ , se pueden hacer la siguientes identificaciones

$$\begin{aligned} \epsilon_{ab} L_i Y_5 e^+ H^* &\rightarrow k L_L Y_5 e_R^+ H^* & q \bar{d}_i Y_5 H^* &\rightarrow \overline{(\bar{q}_L d_R Y_5 H)} \\ Y_5 &\rightarrow Y_e & Y_5 &\rightarrow Y_d^T, \end{aligned}$$

concluyendo de esto que  $Y_d^T = T_e$ . Poniendo así una restricción sobre los acoplamientos de Yukawa en el modelo. De manera análoga para el segundo término de (5.8), se obtiene una segunda constricción sobre los acoplamientos de Yukawa  $Y_u = Y_u^T$ <sup>2</sup>. Cabe mencionar que este par de constricciones son válidas para cada generación y que únicamente son ciertas a la escala en la que este modelo de gran unificación describe a las fuerzas ( $G_{GUT}$ ).

### 5.3.3. Rompimiento espontáneo $SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Mediante el mecanismo de Higgs analizado en la sección (2.4), es como se da el rompimiento de la simetría electrodébil, y por tanto los bosones de norma y los fermiones del modelo estándar adquieren masa. De la misma manera a como se da ese rompimiento espontáneo, es posible codificar el rompimiento del grupo  $SU(5)$  por medio del mecanismo de Higgs. Al tener un sector de Higgs poblado por escalares en la representación adjunta y en la representación vectorial; uno responsable del rompimiento

<sup>1</sup>No utilizando explícitamente índices de  $SU(5)$ .

<sup>2</sup>Esta segunda constricción presenta sutilezas en su deducción, ya que involucra el manejar todos los índices de  $SU(5)$  del término de Yukawa.

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

al  $G_{SM}$  y el segundo del rompimiento electrodébil, es lógico pensar que se tienen dos escalas de energía asociadas en el modelo para obtener estos patrones de rompimiento, haciendo que este se de en dos etapas independientes.

Para la primera etapa del rompimiento, se considera únicamente el potencial  $V(\mathbf{24}_H)$ , el cual adquirirá un vev no nulo que lo minimiza. En la segunda etapa, es considerado únicamente el escalar en la fundamental, que del mismo modo adquiere un valor mínimo en el potencial. En este escrito sólo se está interesado en la etapa inicial de rompimiento, por lo que se considera el potencial de la ecuación (5.6), el cual es el potencial renormalizable más general. Además de la constricción en la traza  $Tr\{\mathbf{24}_H\} = 0$ , se puede imponer una simetría adicional de la forma  $\mathbf{24}_H \rightarrow -\mathbf{24}_H$ , reduciendo así la forma del potencial de la  $\mathbf{24}$  por

$$V(\mathbf{24}_H) = \frac{-\mu^2}{2} Tr\{\mathbf{24}_H^2\} + \frac{k}{4} Tr\{\mathbf{24}_H^2\}^2 + \frac{\alpha}{4} Tr\{\mathbf{24}_H^4\}.$$

Como ya se mencionó, al ser el grupo del modelo estándar un subgrupo maximal de  $SU(5)$ , tras romper la simetría con el multiplete  $\mathbf{24}$ , el rango del grupo se mantiene intacto. Caso contrario al rompimiento de  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , ya que el rango del grupo se rompe por un factor con los escalares en la irrep vectorial. En la primera etapa, el campo  $\mathbf{24}_H$  adquiere un vev distinto de cero  $H \equiv \langle \mathbf{24}_H \rangle$  a cierta escala de energía. Como en la teoría de grupos siempre es posible diagonalizar a una matriz en la adjunta, es acertado escribir el valor esperado del vacío como una matriz diagonal

$$H_m^l = h_l \delta_m^l, \quad (5.10)$$

con  $l$  y  $m$  índices de  $SU(5)$ . Expresando a la traza como  $Tr\{H\} = \sum_n^5 h_n$ , el potencial se reduce a lo siguiente

$$V(H) = \frac{-\mu^2}{2} \sum_n h_n^2 + \frac{k}{4} \left( \sum_m h_m^2 \right)^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_n h_n^4. \quad (5.11)$$

Como se quiere encontrar el valor del vev que minimiza al potencial de Higgs (5.6), es necesario extremizar la expresión (5.11) para esto, se realiza la derivación  $\frac{\partial V}{\partial h_n} = 0$ , obteniendo

$$-\mu^2 h_n + k \left( \sum_m h_m^2 \right) h_n + b h_n^3 = 0,$$

de esta expresión general, si se toman tres valores para la matriz  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$ , la ecuación anterior se escribe como un sistema de ecuaciones de manera explícita

$$-\mu^2 h_1 + k \left( \sum_m h_m^2 \right) h_1 + b h_1^3 = 0, \quad (5.12)$$

$$-\mu^2 h_2 + k \left( \sum_m h_m^2 \right) h_2 + b h_2^3 = 0, \quad (5.13)$$

$$-\mu^2 h_3 + k \left( \sum_m h_m^2 \right) h_3 + b h_3^3 = 0. \quad (5.14)$$

Tomando la resta entre (5.12)-(5.13) y (5.12)-(5.14), las ecuaciones resultantes son

$$-\mu^2 + k \left( \sum_m h_m^2 \right) + b(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) = 0, \quad (5.15)$$

$$-\mu^2 + k \left( \sum_m h_m^2 \right) + b(h_1^2 + h_1 h_3 + h_3^2) = 0, \quad (5.16)$$

y volviendo a hacer una resta entre (5.15) y (5.16) la ecuación resultante dará una restricción sobre los elementos de matriz

$$b(h_2^2 + h_1 h_2 - h_1 h_3 - h_3^2) = 0,$$

de donde se obtiene

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0. \quad (5.17)$$

Como la matriz buscada  $H$  será de la forma  $Diag(n_i h_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), con  $n_i$  la multiplicidad de cada elemento <sup>1</sup>, otras restricciones lógicas son

$$n_1 + n_2 + n_3 = 5, \quad (5.18)$$

$$n_i h_i = 0. \quad (5.19)$$

De las expresiones anteriores (5.17-5.19), se reescribe el potencial  $V$  en términos de un solo parámetro  $\phi$  como

$$V(\phi) = -\lambda_1 \phi^2 + \lambda_2 \phi^4,$$

con las correspondientes identificaciones

$$h_1 = \phi, \quad h_2 = \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \phi, \quad h_3 = \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \phi.$$

Este potencial  $V(\phi)$  tiene un mínimo en  $\phi = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}$ , donde queda claro que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son funciones de las multiplicidades  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$ . Sustituyendo este valor del campo  $\phi$  en la expresión del potencial, el extremo  $V_m$  tendrá la forma

$$V_m = -\frac{\lambda_1^2}{2\lambda_2} \equiv F(n_1, n_2, n_3), \quad (5.20)$$

con  $F(n_1, n_2, n_3)$  una nueva función de las multiplicidades. De acuerdo con la referencia [57], la función  $F$  es suave en los enteros positivos, por lo cual encontrar extremos de  $F$  equivale a encontrarlos para el potencial  $V_m$ . Al tener  $F$  la forma específica

<sup>1</sup>Solo serán tres elementos distintos  $h_i$  dentro de la matriz. Ya que al suponer más de estos, la ecuación (5.17) arrojará resultados contradictorios.

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

$$F(n_1, n_2, n_3) = -\frac{\mu^2}{4} \frac{1}{k + \alpha g(n_1, n_2, n_3)}; \quad g(n_1, n_2, n_3) = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_1 - n_3)^2 + (n_3 - n_2)^2}{2\{n_1(n_3 - n_2)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2\}},$$

tendrá dos soluciones cuando  $k > 0$  y  $\alpha > 0$ . Haciendo máximo a  $V_m$  cuando  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 1$  y  $n_3 = 0$  y mínimo cuando  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$  y  $n_3 = 0$ . Esto da dos posibles valores para el vev, que se traducen en dos distintos patrones de rompimiento de  $SU(5)$ . Uno que corresponde al rompimiento  $SU(5) \rightarrow SU(4) \times U(1)$  con vev

$$H = \nu_4 \text{Diag}(1, 1, 1, 1, -4),$$

y el patrón  $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  con correspondiente valor de expectación

$$H = \frac{\nu}{\sqrt{15}} \text{Diag}(2, 2, 2, -3, -3),$$

donde  $\nu^2 = \frac{15\mu^2}{30k + 7\alpha}$ .

Como lo que nos interesa es el reproducir el grupo del modelo estándar, escogemos la segunda expresión para el valor de expectación del vacío (vev). Expresión que si se observa con cuidado, corresponderá a un rompimiento en la dirección de  $T^{12}$ . Esto no es de sorprender, ya que al vivir el campo de Higgs en la representación adjunta, su transformación se da en función de los generadores del grupo, por lo que al orientarse en una dirección particular (análogo al rompimiento electrodébil), la simetría asociada al grupo se verá rota. Como sucede en el caso del rompimiento electrodébil, los bosones de norma adquieren masas asociadas. En este caso particular sucede exactamente lo mismo, de forma que para evaluar dichas masas  $M_X$  y  $M_Y$ , es requerida la expresión explícita de la derivada covariante para la representación adjunta, la cual se escribe de la siguiente manera

$$D_\mu = \partial_\mu + ig[V_\mu, -],$$

con  $g$  el acoplamiento de norma. Los términos de masa de bosones se obtienen al evaluar el valor de expectación del vacío en el término cinético del campo **24**, más específicamente, el término

$$g^2 \text{Tr}\{[A_\mu, H][A^\mu, H]\} = g^2 \text{Tr}\{(A_\mu)_m^l (A'^{mu})_n^m\} (h_l - h - n)(h_m - h_k),$$

sin convención de suma. Como el factor multiplicativo de la parte izquierda de la ecuación anterior son los elementos diagonales de  $H$ , al ser estos  $h_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}\nu 2$  y  $h_2 = -\frac{1}{\sqrt{15}}\nu 3$ , la cantidad  $(h_k - h_l)$  para cualquier valor de  $l$  y  $k$  sólo puede ser  $\pm 5$  o cero. Por tanto la masa de los bosones  $A_\mu = X_\mu, Y_\mu$  es  $M_{X,Y}^2 = 5/3 g^2 \nu^2$ .

De manera parecida, del la expresión del potencial de mezcla entre multipletes  $V(\mathbf{24}_H, \mathbf{5}_H)$ , al evaluar en el vev  $H$  surgen términos de masa para las componentes de  $\mathbf{5}_H$ , que consisten en un triplete de  $SU(3)$   $H_c$  y un doblete de  $H$  de  $SU(2)$ . Evaluando en la expresión de los potenciales estas masa, se obtienen<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Se supuso una simetría  $\mathbb{Z}_2$  para el escalar **24**.

$$m_{H_c}^2 = -\frac{\mu_5^2}{2} + 2a\nu^2 + \frac{4}{15}v\nu^2,$$
$$m_H^2 = -\frac{\mu_5^2}{2} + 2a\nu^2 + \frac{3}{5}b\nu^2.$$

Que al momento de estar en la segunda parte del rompimiento ( $M \sim 250\text{GeV}$ ), la masa asociada al doblete escalar será muy pequeña comparada con la masa de los bosones  $X_\mu$ . De modo que se da un desacoplo entre los multipletes a bajas energías, haciendo necesaria la diferencia sustancial entre el valor  $\nu^2$  y el vev que adquiera el campo  $\mathbf{5}$  para el rompimiento electrodébil  $\nu_2^2$ , requiriendo que  $\nu \gtrsim 10^{12}\nu_2$ , obteniendo con ello un valor pequeño de  $m_H^2$ .

## 5.4. Problemas del modelo $SU(5)$

Al igual que el modelo estándar, los modelos de gran unificación presentan una serie de problemas e inconsistencias al momento de comparar con el experimento. La repetida aparición de problemas en los modelos hace que estos sean descartados o que sigan siendo válidos y aceptados bajo ciertas condiciones. Este es el caso del modelo de gran unificación basado en el grupo  $SU(5)$ , ya que presenta problemas que pueden ser rescatados implementando nuevos multipletes en representaciones de dimensionalidad mayor o inclusive el uso de simetrías adicionales. A continuación se enumeran algunos de los problemas del modelo aquí presentado, haciendo énfasis en aquellos que se solucionan y que no descartan el modelo.

1. **El ángulo de mezcla electrodébil  $\theta_W$ .** Este valor del ángulo de mezcla depende de la escala energética a la cual se está trabajando, por lo que su magnitud en la escala de gran unificación trabajada, tendrá un valor determinado en función de los acoplamientos y demás elementos del grupo, que de acuerdo con lo descrito por Greiner [50], está dado por

$$\sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{\alpha_1(\mu)}{\alpha_3(\mu) + \alpha_1(\mu)},$$

donde se usa la notación de estructura fina para los acoplamientos  $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ . De aquí se llega a que la cantidad  $\sin^2 \theta_W$  a la escala  $\mu = M_{GUT}$  con  $\alpha_G = 5/3\alpha_1$  y  $\alpha_G = \alpha_3$  es

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} \simeq 0.37.$$

Sin embargo, este resultado es sólo válido para una escala de energía. Por lo que para hacer una comparación con lo medido en los experimentos y lo predicho por el modelo, es necesario encontrar una expresión para el ángulo de mezcla en

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

función de la evolución de los acoplamientos vía el grupo de renormalización. Esta expresión buscada surge de las ecuaciones del RG para los acoplamientos  $g_i$  del modelo estándar, que de acuerdo a la literatura [1, 12] resulta en

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} - \frac{1}{\alpha_j(\mu)} = \frac{B_{ij}}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{M_{GUT}^2}\right), \quad (5.21)$$

donde  $B_{ij}$  son funciones del número de multipletes fermiónicos y de Higgs en la teoría; que para nuestro modelo, por tener contenido mínimo es  $n_F = 3$  y  $n_H = 1$ . La ecuación 5.21 se puede escribir únicamente en términos de  $\alpha_3$

$$\frac{\alpha_{EM}}{\alpha_3} = \left[ \left(1 + \frac{8}{5} \frac{B_{23}}{B_{12}}\right) \sin^2 \theta_W(\mu) \frac{3}{5} \frac{B_{23}}{B_{12}} \right],$$

y que al despejar  $\sin^2 \theta_W$ , a la escala  $\mu = M_Z$  será

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) = \frac{\frac{\alpha_{EM}}{\alpha_3} + \frac{3}{5} \frac{B_{23}}{B_{12}}}{1 + \frac{8}{5} \frac{B_{23}}{B_{12}}}.$$

Con información tomada del PDG [16] ( $\alpha_{EM}(M_Z) \simeq 7.81 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_3(M_Z) \simeq 0.118$ ,  $B_{12} = -7.266$ ), resulta que la predicción del modelo  $SU(5)$  con mínimo contenido de partículas es de  $\sin^2 \theta_W \sim 0.207$ . Dicho valor difiere en forma considerable del valor medido experimentalmente, ya que no se hizo la consideración del gran valor de incertidumbre de la constante  $\alpha_3$ .

2. **Unificación de los acoplamientos  $B$ -test.** De la expresión funcional para  $\alpha_{EM}/\alpha_3$  en términos de la escala de energía, es posible despejar el término que involucra al número de multipletes  $B \equiv B_{23}/B_{12}$ , quedando una ecuación de la forma

$$B = \frac{5(\sin^2 \theta_W(\mu) - \alpha_{EM}/\alpha_3)}{3 - 8 \sin^2 \theta_W(\mu)}.$$

Al tratarse a  $B$  por un lado como una función del contenido de partículas, y por otro como función de la escala de energía, es viable el hacer una comparación para valores conocidos en el SM. Esta cantidad conocida como  $B$ -test, es una medida de qué tan buena es la unificación de los acoplamientos de norma para un modelo con contenido fermiónico y bosónico  $n_F$  y  $n_H$ , respectivamente.

Para las energías del modelo estándar ( $\mu \sim M_Z$ ) se tiene que

- Para el contenido mínimo del modelo  $SU(5)$ ,  $B$  es

$$B = \frac{B_{23}}{B_{12}} = 0.528.$$

- Con los valores de  $\sin^2 \theta_W$ ,  $\alpha_{EM}$  y  $\alpha_3$  dados en *PDG*,  $B$  resulta ser

$$B \simeq 0.717$$

De donde se observa una diferencia sustancial entre un valor y otro. Si se abandona la idea del contenido mínimo de partículas, es posible ajustar este valor para que coincida con lo observado, sin embargo esto conlleva problemas al momento de definir la escala de gran unificación, además de introducir nuevas interacciones.

Se concluye del  $B$ -test que la unificación mediante  $SU(5)$  no es exacta, por lo que es requerido un modelo con una contribución distinta de partículas en  $B_{12}$  y  $B_{23}$ .

- Unificación de Yukawa.** De la discusión sobre el sector de Yukawa, se obtuvieron constricciones sobre los acoplamientos de los fermiones; relacionando así a  $Y_e$  y  $Y_d$ . Sin embargo, de acuerdo a la descripción del modelo estándar, tras el rompimiento de la simetría, los fermiones adquieren una masa proporcional a su acoplamiento de Yukawa ( $y_i \propto m_i$ ).

Además, como la relación  $Y_d = Y_e^T$  es válida para las tres familias, las siguientes expresiones son ciertas a la escala de gran unificación

$$m_e = m_d; \quad m_\mu = m_s; \quad m_\tau = m_b.$$

Teniendo estas expresiones, es posible construir cantidades que resultan ser invariantes del grupo de renormalización; es decir, son válidas para toda escala de energía  $\mu$ . Tomando el cociente entre la primera y la segunda, se obtiene

$$\frac{m_e}{m_\mu} = \frac{m_d}{m_s},$$

y análogamente cualquier combinación de cocientes. Al ser invariante del RG, debe coincidir con los valores de las masas a la escala conocida del modelo estándar, que para la masa de los fermiones se obtienen los siguientes resultados numéricos

$$\frac{m_e}{m_\mu} \simeq 4.8 \times 10^{-3}, \quad \frac{m_d}{m_s} \simeq .7 \times 10^{-2},$$

que difieren por un orden de magnitud. Por tanto, no resulta certero (una vez más), que a las escalas conocidas, el modelo unificado reproduzca el sector de Yukawa del modelo estándar en su totalidad.

Sin embargo, la unificación de Yukawa es una condición extra a la unificación de norma, ya que se impone de manera independiente a la unificación vía el grupo  $SU(5)$ .

- Decaimiento del protón.** Como el lagrangiano general de la teoría  $SU(5)$  debe de contener términos cinéticos para los fermiones en la representación  $\mathbf{5} \oplus \mathbf{10} = \Psi$ , mediante la implementación de la derivada covariante  $D_\mu \gamma^\mu$ , se inducen términos de acoplamiento entre las familias de fermiones y los bosones de norma de la

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

teoría. Denotando a  $\Psi = (\phi^i, \chi^{ij})$ , la derivada covariante actuando sobre cada representación se escribe de la siguiente manera

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig \sum_{l=1}^{12} V_\mu^l T^l \phi - ig \sum_{a=13}^{24} X_\mu^a T^a \phi,$$

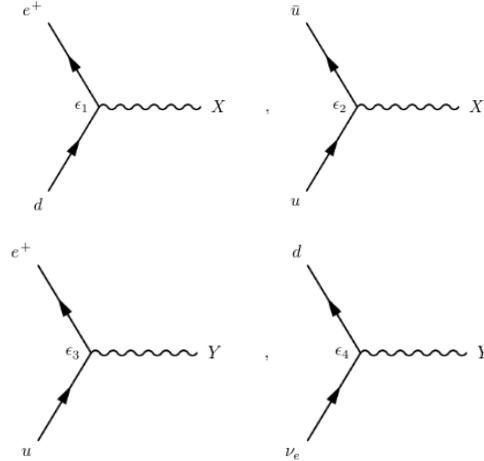
$$D_\mu \chi = \partial_\mu \chi + ig \{V_\mu, \chi\}.$$

Siendo el término de interacción  $-gTr\{\bar{\chi}\gamma^\mu V_\mu \chi\} + \bar{\phi}\gamma^\mu V_\mu^T \phi$ , que en términos de la primera familia de fermiones introduce nuevos vértices, distintos a los del modelo estándar, para  $X_\mu$  y  $Y_\mu$

$$\epsilon_1 X_\mu d \gamma^\mu e^+, \quad \epsilon_2 X_\mu \bar{u} \gamma^\mu u,$$

$$\epsilon_3 Y_\mu u \gamma^\mu e^+, \quad \epsilon_4 Y_\mu \nu_e \gamma^\mu d,$$

con  $\epsilon_k$  factores de acoplamiento, que corresponden con los diagramas de Feynman de la [Figura 5.1](#).



**Figura 5.1:** Vértices de interacción entre bosones  $X_\mu$  y  $Y_\mu$  con los fermiones de la primera familia.

Debido a la estructura de los protones ( $uud$ ) y los piones, es posible construir un escenario para que el protón decaiga vía un Bosón  $X$  o  $Y$  a nivel árbol. De acuerdo con la literatura del tema [16, 48], para el escenario de decaimiento  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ , la tasa  $\Gamma_\mu$  es

$$\Gamma_\mu \propto \frac{\alpha_2^2 m_\mu^5}{m_W^4},$$

que para valor de la escala de gran unificación  $\mu \simeq M_{GUT}$ <sup>1</sup>, su inverso que corresponde con la vida media es  $\tau_p \simeq 3.7 \times 10^{31}$  años. Resultado que de manera desafortunada está descartado por los resultados experimentales de Super-Kamiokande [58], y que da suficientes motivos para descartar el modelo aquí presentado.

5. **Jerarquía de norma.** En la sección anterior se encontró una masa asociada al doblete escalar de  $SU(2)$ , dependiente del valor de expectación del vacío  $\nu$ . Sin embargo, como en la segunda etapa de rompimiento, la masa del doblete  $m_d$  debe ser proporcional al vev asociado a  $\mathbf{5}$ , es necesario que dicha masa sea muy pequeña, para poder satisfacer la condición  $\nu > 10^{12} \nu_2$ .

El problema con esta suposición radica en el hecho de que las correcciones radiativas a uno o más loops para la masa del isodoublet, traen consigo divergencias del tipo cuadrático y/o logarítmico, como ya se mencionó en la sección 2.6. Por tanto, al ser el vev  $\nu$  de gran magnitud, las correcciones de la forma  $\Delta m_d^2 \propto \nu^2$  no serán consistentes con la restricción dada, por lo que se requerirá un ajuste fino o bien, la implementación de simetría entre bosones y fermiones. Este problema es conocido como jerarquía de norma.

Como puede verse, existen muchos problemas asociados al modelo de gran unificación  $SU(5)$ , de modo que en la mayoría de ellos reflejan las inconsistencias al reconciliar con el modelo estándar a bajas energías. Dichas inconsistencias se deben al contenido mínimo de partículas, siendo una vía para dar solución a algunos de ellos el introducir una cantidad mayor de multipletes en representaciones de dimensión superior. Sin embargo, esta introducción de partículas no resuelve el problema de la jerarquía también presente en el modelo estándar, por lo que un modelo con supersimetría basado en el mismo grupo de norma está dentro de las posibilidades para dar mejor información y tratar de solucionar las inconsistencias. Este candidato a GUT se introducirá en la siguiente sección.

## 5.5. Modelo $SU(5)$ supersimétrico de gran unificación

La propuesta del modelo  $SU(5)$  de gran unificación en su versión supersimétrica resulta conveniente para tratar de solucionar el problema de la jerarquía de norma introducido por los términos divergentes asociados a las partículas escalares dentro del sector de Higgs. Ya que en virtud del teorema de no-renormalización [37, 38], los parámetros del súper-potencial asociado no reciben renormalizaciones finitas a ordenes altos en teoría de perturbaciones. Esto tiene una consecuencia directa en la cancelación de las divergencias cuadráticas, al considerar fermiones dentro de los multipletes del sector escalar, de manera idéntica a como se hizo para el caso del modelo MSSM.

---

<sup>1</sup>La escala de gran unificación asociada con la teoría puede determinarse mediante la evolución de los acoplamientos via el grupo de renormalización, despejando directamente de la ecuación (5.21), obteniendo un valor  $M_{GUT} \simeq 7.68 \times 10^{14} \text{GeV}$ .

## 5. TEORÍA $SU(5)$ DE GRAN UNIFICACIÓN

---

Entonces, con este supuesto de simetría entre bosones y fermiones, la construcción del modelo será muy similar a la versión no supersimétrica. La diferencia radicará únicamente en que los objetos matemáticos asociados a los multipletes tendrán diferente estructura matemática, siendo operadores en el súper-espacio. Sin embargo, seguirán viviendo dentro de representaciones del grupo de norma con la dimensionalidad que se utilizó en el modelo con contenido mínimo. Entonces, para el modelo susy son requeridos: dos súper-campos quirales viviendo en las representaciones  $\bar{\mathbf{5}}$  y  $\mathbf{10}$ , para reproducir las familias de fermiones; dos súper-campos de Higgs en  $\mathbf{5}_H$  y  $\bar{\mathbf{5}}_H$  para el rompimiento electrodébil; y finalmente un súper-campo quiral en la representación adjunta  $\mathbf{24}_H$ , encargado de romper la simetría de norma de  $SU(5)$ . Cabe mencionar que, en contraste con el modelo anterior, se requiere de un multiplete adicional en el sector escalar para completar el rompimiento  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \times U(1)$  en el modelo mínimo supersimétrico.

La forma del súper-potencial asociado más general para este modelo viene dado por la siguiente expresión

$$W(\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}, \mathbf{24}, \mathbf{10}) = \sum_i (h_i^u \mathbf{10}_i \mathbf{10}_i H_i^u + h_i^d \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_i \bar{H}_i^d) + aTr\{\mathbf{24}\} \\ + bTr\{\mathbf{24}^2\} + cTr\{\mathbf{24}^3\} + \sum_l g_l (H_l^u \mathbf{24} \bar{H}_l^d + m H_l^u H_l^d), \quad (5.22)$$

donde los elementos  $H^u$  y  $H^d$  son los multipletes de Higgs asociados con  $\mathbf{5}_H$  y  $\bar{\mathbf{5}}_H$ , respectivamente, y los términos  $h^u$ ,  $h^d$  hacen referencia a constantes de acoplamiento. Este potencial codifica la información de las dos etapas del rompimiento de la simetría discutido en la sección (5.3.3), recuperando así el modelo mínimo supersimétrico, en lugar del modelo estándar usual.

El súper-potencial de la ecuación (5.22) puede simplificarse de acuerdo a las consideraciones con el modelo, y dependiendo de la multiplicidad con la que se tomen los multipletes. Para el caso de una teoría finita, el modelo reduce su potencial bajo las consideraciones de [41].

Las ventajas de la introducción de la supersimetría se reflejan a su vez en las cotas para la vida media del protón, así como para la unificación de los acoplamientos. Todas estas generalidades son discutidas a detalle en los trabajos de la referencia [59]. Sin embargo, la introducción de la supersimetría en la teoría  $SU(5)$  hace que se tenga que considerar una nueva escala energética, la escala a la que se rompe supersimetría (se sabe que debe de estar rota), determinada en función del método empleado para romper la supersimetría. Por su parte, esta nueva escala está relacionada directamente con la escala del rompimiento electrodébil ( $M_Z$ ), por medio de algo conocido como rompimiento radiativo de simetría (radiative symmetry breaking), lo cual consiste en un rompimiento espontáneo inducido por el flujo de renormalización de los parámetros de rompimiento suave asociados con las masas de los dobletes de Higgs dentro del MSSM. Este rompimiento surge debido a que las contribuciones a las masas de los dobletes escalares dadas por la tercera familia de fermiones producen un decremento

en los términos del potencial, lo que genera un valor mínimo no trivial en el potencial de Higgs, dando con ello un valor de expectación del vacío de manera natural. Esto justifica el rompimiento de la simetría electrodébil al correr los parámetros de  $M_{GUT}$  a  $M_Z$ . Algunas generalidades extra de este fenómeno se tratan en las referencias [1, 27]

El modelo  $SU(5)$  supersimétrico, bajo un análisis similar al introducido para el modelo sin supersimetría, arroja resultados para el ángulo de mezcla  $\theta_W$  y la escala de gran unificación  $M_{GUT}$  de

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) \gtrsim 0.370; \quad M_X \simeq 2.244 \times 10^{16} \text{ ,}$$

por lo que la introducción de esta nueva simetría no afecta de manera inconsistente el valor de estos parámetros. Una discusión más detallada sobre el súper-potencial y sus términos escalares y de Yukawa, así como el mecanismo empleado para romper supersimetría, se tratará en el siguiente capítulo, el cual trata a la teoría susy- $SU(5)$  como una teoría finita, en el sentido del teorema 2.



---

## Capítulo 6

# Rompimiento de SUSY- $SU(5)$ y finitud.

---

Al haber descrito el modelo de gran unificación  $SU(5)$  en sus versiones supersimétrica y no supersimétrica, se esperaba dar un panorama general del tipo de teorías que se utilizan para describir las fuerzas fundamentales a grandes escalas de energía, así como los principales problemas que conllevan y como identificarlos, además de ciertas predicciones que se pueden realizar con ellos. Sin embargo, al tratar el caso supersimétrico, es natural llegado a este punto el preguntar si es posible obtener información adicional del modelo  $SU(5)$  cerca de la escala de rompimiento de norma en términos del súperpotencial y la evolución de sus parámetros. La respuesta a esta interrogante es un tanto incierta, sin embargo, el camino para tratar esta pregunta es el manejar el modelo de gran unificación vía  $SU(5)$  en el contexto del teorema 2 o teorema de finitud.

El uso de este teorema para nuestro modelo; cuya finitud está demostrada a un loop en teoría perturbativa [60, 61], estará enfocado a buscar una variedad conforme en el punto de rompimiento de la simetría de norma. La existencia de una variedad conforme de dimensionalidad  $k$  da información sobre la estructura de fase de la teoría, y al presentarse un rompimiento (o más de uno) espontáneo de simetría gauge, será posible el identificar si es que se dan las condiciones propicias para relacionar dicho rompimiento con una transición de fase en el espacio de parámetros. Al tener a disposición el teorema enunciado para la existencia de las variedades conformes (teorema 3), se podrá confirmar dicha suposición tras recuperar el modelo estándar mínimo supersimétrico vía el rompimiento de  $SU(5)$ , ya que a ese nivel las cargas asociadas a la simetría  $R$  ya no serán conservadas, por lo que la teoría a baja energía no tendrá una variedad conforme asociada, excepto tal vez en el punto donde se rompe la simetría electrodébil.

En este capítulo se tratará a la teoría  $SU(5)$  con una forma específica del súperpotencial, de manera que la sea finita en el sentido supersimétrico a todos los ordenes en teoría de perturbaciones, encontrando los operadores que generan la variedad fija donde la acción efectiva carece de divergencias en el UV. Con esto, se tratará de dar algún tipo de información sobre si el rompimiento de norma se trata de una transición de fase y en su caso, de qué tipo de transición se trata.

### 6.1. Finitud en el modelo $SU(5)$

De acuerdo con la clasificación para las teorías finitas supersimétricas ( $\mathcal{N} = 1$ ) descrito en la sección anterior y trabajado en [8, 41], la condición sobre las funciones beta a un loop garantiza que esta finitud se mantenga a dos loops y de manera sucesiva para todo orden en teoría de perturbaciones. Al poseer el modelo  $SU(5)$  supersimétrico un súper-potencial con campos quirales en las representaciones fundamentales (anti-fundamental),  $\mathbf{10}$  y en la adjunta, su forma completa es de la forma del potencial (5.22) donde los súper-campos  $\phi_i$  corresponden con cada uno de los ya enumerados.

Como es requerido reproducir el contenido del modelo estándar, cada representación aparecerá con una multiplicidad fija, dependiendo del numero de familias de fermiones que se requieran. Para este caso, se pide que los súper-multipletes  $\mathbf{5}$ ,  $\bar{\mathbf{5}}$ ,  $\mathbf{10}$  y  $\mathbf{24}$  tengan multiplicidad  $(4, 3, 7, 1)$ , respectivamente. Con esto, es posible calcular el coeficiente de la función beta de norma, el cual depende de los índices de Dynkin de cada representación y del operador de Casimir en la representación adjunta ( $\sum_i T(R_i) - 3C_2(G)$ ), que de acuerdo a la tabla 1 de la referencia [62] se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_i T(R_i) - 3C_2(G) &= 4T(\mathbf{5}) + 3T(\mathbf{10}) + 7T(\bar{\mathbf{5}}) + T(\mathbf{24}) - 3C(G) \\ &= 4(1/2) + 3(3/2) + 7(1/2) + 5 - 3(5) = 30/2 - 15 = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

y de la misma manera, se obtiene para los coeficientes de anomalías que

$$\sum_i A(R_i) = 4(1) + 3(1) + 7(-1) + 1(0) = 0.$$

Por tanto, la función  $\beta_g$  a un loop se anula, así como la suma de los coeficientes anómalos. Esto quiere decir que las condiciones 1 y 2 del teorema 2 se cumplen para el modelo  $SU(5)$  con este contenido de materia.

Por otro lado, de acuerdo a la clasificación de candidatos a teorías finitas descrito por Rajpoot y Taylor [62] para las teorías  $SU(N)$ , y al desarrollo encontrado en [63], se requiere analizar los términos del súper-potencial para analizar las condiciones 3 y 4 del teorema de finitud. El súper-potencial más general que contempla al contenido de partículas descrito anteriormente es el siguiente (con acoplamientos cúbicos)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}g_{ija}^u \mathbf{10}_i \mathbf{10}_j H_a + g_{ija}^d \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_j \bar{H}_a + \frac{1}{2}g'_{ijk} \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_j \bar{\mathbf{5}}_k + \frac{1}{2}p_{iab} \mathbf{10}_i \mathbf{10}_j \bar{H}_a \bar{H}_a \\ &\quad + g_{ab}^f H_a \mathbf{24} \bar{H}_a + \frac{1}{3}g^\lambda (\mathbf{24})^3 + h_{ia} \bar{\mathbf{5}}_i \mathbf{24} H_a, \end{aligned} \quad (6.2)$$

con los índices  $i, j, k$ , índices de familia y  $a$  índice escalar. Como se quiere que las condiciones (3) y (4) se cumplan para este modelo, de acuerdo con la referencia [41], el introducir una simetría discreta  $\mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_2$  restringe más el potencial, de forma que la

solución de la ecuación (4.24) para el nuevo potencial tenga soluciones no degeneradas. Bajo esta simetría, el potencial invariante es

$$W = \frac{1}{3}g_{iii}^u \mathbf{10}_i \mathbf{10}_i H_i + g_{iii}^d \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_i \bar{H}_i + g_4^f H_a \mathbf{24} \bar{H}_a + \frac{1}{3}\lambda(\mathbf{24})^3. \quad (6.3)$$

Por tanto, las relaciones sobre los acoplamientos impuestos por la ecuación (4.23) son

$$4\left(\sum_i g_{iii}^d\right)^2 + \frac{24}{5}(g_4^f)^2 = 2C_2(\mathbf{5} + \bar{\mathbf{5}})g^2 = \frac{24}{5}g^2, \quad (6.4)$$

$$3\left(\sum_i u_{iii}\right)^2 + \frac{24}{5}(g_4^f)^2 = 2C_2(\mathbf{5} + \bar{\mathbf{5}})g^2 = \frac{24}{5}g^2, \quad (6.5)$$

$$4\left(\sum_i g_{iii}^u\right)^2 = 2C_2(\bar{\mathbf{5}})g^2 = \frac{24^2}{5}, \quad (6.6)$$

$$2\left(\sum_i g_{iii}^u\right)^2 + 3\left(\sum_i g_{iii}^d\right)^2 = 2C_2(\mathbf{10})g^2 = \frac{36}{5}g^2, \quad (6.7)$$

$$(g_4^f)^2 + \frac{21}{3}8(g^\lambda)^2 = 2C_2(\mathbf{24})g^2 = 10g^2, \quad (6.8)$$

y resolviendo el sistema se encuentra la solución<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} (g_{111}^u)^2 = (g_{222}^u)^2 = (g_{333}^u)^2 &= \frac{8}{5}g^2, & (g_{111}^d)^2 = (g_{333}^d)^2 = (g_{222}^d)^2 &= \frac{6}{5}g^2, \\ (g_4^f)^2 &= g^2, & (g^\lambda)^2 &= \frac{15}{7}g^2, \end{aligned}$$

que por construcción es no degenerada y única. Por lo que se concluye que la teoría de gran unificación con grupo de norma  $SU(5)$  es finita a todos los ordenes; es decir, su acción efectiva carece de divergencias en el ultravioleta.

La manera en que se reprodujo es contenido del SM fue tomando 4 copias de  $\mathbf{5} \oplus \bar{\mathbf{5}}$ , 3 copias de  $\bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$  para las familias de fermiones y un  $\mathbf{24}$ , siendo este último el encargado de romper el grupo de norma al  $G_{SM}$ . Las condiciones de finitud dejan de ser válidas después del rompimiento de la simetría de norma, por lo que teoría resultante no es finita. Además, como el contenido de súper-campos contiene los multipletes del SM, así como a sus compañeros supersimétricos, se recupera el MSSM a baja energía (Es decir, a escalas en las que no se ha roto supersimetría) tras el rompimiento espontáneo de  $SU(5)$ .

### 6.1.1. Rompimiento de SUSY en un modelo finito

Una de las restricciones que ponen las condiciones de finitud sobre la supersimetría es precisamente sobre el mecanismo por el cual ésta se rompe. Siendo el único escenario

<sup>1</sup>Los Casimir de cada representación se calcularon utilizando la expresión dada por teoría de grupos  $T(R_i)d(Adj) = C_2(R_i)d(R_i)$  descrita en [56, 64].

viable el de rompimiento suave descrito en la sección (3.4), empleado mediante la adición de términos en el lagrangiano (ecuación (3.16)). El rompimiento espontáneo de SUSY mediante términos  $D$  o términos  $F$  queda descartado, porque es incompatible con las condiciones (2) y (3) del teorema de finitud; ya que excluye la posibilidad de tener singletes de norma (tipo F) o bien, requiere de la existencia de un grupo de norma  $U(1)$  (tipo D) que no es consistente con la segunda condición.

Sin embargo, la finitud sigue restringiendo el sector de rompimiento suave, haciendo que las funciones beta asociadas a sus acoplamientos se anulen a un loop y dos loop para mantener la finitud en la teoría con  $\mathcal{N} = 1$  [65].

### 6.1.2. Variedad conforme de $SU(5)$

Como se discutió anteriormente, las condiciones de finitud son de las principales causas para que a la escala de rompimiento espontáneo de la simetría de norma, exista una variedad conforme en el que los operadores de la teoría forman una representación unitaria del grupo súper-conforme, así como el multiplete de corrientes conservadas. Esto fue probado en el teorema 3, aprovechando la simetría  $R$  cerca del punto fijo, y buscando operadores marginales.

Para el caso del modelo de gran unificación  $SU(5)$ , se argumentó el por qué con el contenido de partículas que describe al modelo estándar, este resulta finito. Por tanto, existirá una variedad fija conforme generada por los operadores marginales incluidos en el súper-potencial (6.3). Como el multiplete asociado a la representación estándar del grupo es el encargado de romper la simetría de norma (preservando el rango del grupo), el candidato a ser operador marginal es el mismo súper-potencial; sin embargo, los únicos términos que no se mantienen invariantes ante el rompimiento son los que se acoplan a **24**. Cabe notar que ningún otro puede ser candidato, ya que al introducir la simetría discreta para el súper-potencial (6.2), se eliminaron los términos de mezcla entre **24** y las 3 familias de fermiones, lo cual es consistente con lo observado tras romper el grupo de norma, ya que no adquieren masa los fermiones tras el rompimiento  $SU(5) \rightarrow G_{SM}$ . Por tanto, el operador que genera la variedad de puntos fijos es

$$\mathcal{O} = W(\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}, \mathbf{10}, \mathbf{24}, H, \bar{H}), \quad (6.9)$$

de manera que si se calculan los coeficientes de escala  $S_{g_i}$ , asociados a los acoplamientos del potencial, se tiene que la combinación  $S_{g^u} + S_{g^d} - 4S_{g_4^f} - 2S_{g^\lambda}$  será proporcional al factor de escala del acoplamiento de norma  $S_g = -\frac{3}{2}(3\gamma_{10} + 4\gamma_H + \gamma_{\bar{5}}) - 2\gamma_H - 10\gamma_{24}$ . Donde se hizo el supuesto de que las  $\gamma$ 's para  $H$  y  $\bar{H}$  son las mismas. Por tanto, existe una variedad fija generada por el operador marginal (6.9). Y que está parametrizada por los acoplamientos, siendo finita la teoría cuando la curva  $\gamma(g) = 0$ , que sólo depende de un parámetro, ya que en el punto donde se genera la variedad conforme, es a la escala de gran unificación  $M_{GUT}$ , y donde los acoplamientos se relacionan con el acoplamiento de norma.

## 6.2. Teorema de Morse para el flujo de renormalización y el índice $\hat{\mu}$

Lo descrito en esta sección está basado ampliamente en el artículo de Sergei Gukov [7], en el cual da un método para reconstruir el espacio de teorías conectadas por un flujo de renormalización, sin recurrir explícitamente a solucionar las ecuaciones del RG. Esto en el contexto de teorías supersimétricas conformes, se aprovecha de la relación entre la dimensión anómala y la conservación de la simetría  $R$  (así como la dimensión conforme  $\Delta_k$ ). Sin embargo, en su estudio se hace mucha referencia a elementos de topología algebraica, los cuales para fines de nuestro trabajo, quedarán en segundo plano para un posible estudio a futuro.

La importancia de que exista una variedad conforme para nuestra teoría supersimétrica es la clave para poder aplicar el procedimiento de Gukov, ya que el flujo de renormalización se analiza únicamente en los puntos fijos de la teoría conforme, a diferentes escalas energéticas. Entonces, un punto fijo  $M^*$  corresponde con alguna teoría conforme dentro del espacio de teorías  $\mathcal{T}$ , siendo el flujo bajo el parámetro  $t = \ln \mu$  el que conecta diferentes teorías dentro de este espacio.

$$\frac{d}{dt} = -\beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g^i},$$

interpretando a  $\beta$  como velocidades en  $\mathcal{T}$ . De modo que para una teoría  $\mathcal{N} = 1$  en  $4d$ , si la supersimetría se preserva a lo largo del flujo, este va a conectar a diferentes teorías con propiedades similares. Siendo los acoplamientos  $g^i$  los que caracterizan a  $\mathcal{T}$ . En el caso particular en el que se está interesado es en el que se trunca el espacio de teorías, restringiéndose únicamente a la región que conecta a las SCFT's correspondientes a  $M_{UV}$  y  $M_{IR}$ .

Para analizar el comportamiento en los puntos fijos, se requiere la implementación de una función auxiliar, generalmente referida a la función  $C$  de Zamolodchikov [66, 67], la cual mapea elementos de las teorías a los números reales ( $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}$ ) y que decrece monótonamente con el flujo de renormalización. Coincidiendo con el valor de las cargas centrales en los puntos fijos, además de ser estacionaria  $\frac{dC(T(\mu^*))}{dt} = 0$ . En ciertos casos, se requiere que dicha función  $C(T)$  cumpla otras propiedades, por lo que comúnmente se recurre a la función de Morse-Bott, la cual es usada para conocer información sobre la topología de  $\mathcal{T}$  con la información obtenida en los puntos fijos.

El método descrito por [7] enuncia diferentes versiones del teorema  $C$ , en función de un índice que cuenta el número de operadores relevantes en la teoría cerca del punto fijo<sup>1</sup>. Estas diferentes versiones se enumeran de la más débil a la más fuerte, resaltando las primeras dos, ya que no dependen explícitamente de la función  $C$  de Morse-Bott, sino de un índice  $\hat{\mu}$ , definida de la siguiente manera

---

<sup>1</sup>Para las teorías supersimétricas, esta condición se vuelve menos restrictiva, considerando también las deformaciones marginales.

$$\hat{\mu}(M^*) = \#(\mathcal{O}), \quad (6.10)$$

tal que  $\mathcal{O}$  es un operador relevante en el punto fijo. Las 3 versiones para el teorema  $C$  se enumeran a continuación

1. La cantidad (6.10) cuenta los grados de libertad en el punto fijo, y al igual que la función  $C$ , es decreciente a lo largo del flujo ( $\hat{\mu}(M_{UV}) > \hat{\mu}(M_{IR})$ ).
2. Si los puntos  $M_{IR}$  y  $M_{UV}$  están conectados por medio del flujo de renormalización, el espacio generado entre dichos flujos tiene una dimensionalidad

$$\dim \mathcal{M}(M_{UV}, M_{IR}) = \hat{\mu}(M_{UV}) - \hat{\mu}(M_{IR}).$$

3. Para la versión fuerte, es requerida la forma explícita de  $C(M)$ , siendo el índice  $\hat{\mu}$  en el punto fijo

$$\hat{\mu}(M^*) = \#(\text{eigenvalores negativos de } H(C)|_{M=M^*}),$$

con  $H(C)$  la matriz Hessiana de la función  $C$ . Entonces la versión fuerte es una copia de las formas (1) y (2) utilizando esta nueva definición de  $\hat{\mu}$ .

Estas conjeturas son válidas para variedades conformes no triviales. Una sutileza ocurre cuando a la escala  $M_{UV}$  algunos de los operadores irrelevantes ( $\gamma_{\mathcal{O}} > d$ ) se convierten en relevantes ( $\gamma_{\mathcal{O}} < d$ ) a la escala  $M_{IR}$ , de modo que  $\hat{\mu}(M_{IR}) > \hat{\mu}(M_{UV})$ . Esto se explica sugiriendo que el flujo de renormalización no es gradiente de la función  $C$ , indicando una especie de transición de fase al hacer que las dimensiones anómalas de los operadores irrelevantes se vuelvan marginales. Además, de que el espacio de teorías  $\mathcal{M}$  no será una variedad. Este tipo de casos se contemplan en el siguiente teorema.

**Teorema  $\hat{\mu}$  (teorema 4)**

Sea un flujo de renormalización que es gradiente de la función  $C$  de Morse-Bott. En el punto donde los operadores irrelevantes cruzan la brecha de la marginalidad, este flujo se "rompe", indicando una transición de fase. Si esta transición de fase no se presenta, las diferentes versiones del teorema  $C$  se mantienen fijas.

Como se está interesado en el caso en el que se tiene una invarianza conforme en la teoría supersimétrica, la caracterización de los operadores relevantes en los puntos súper-conformes se puede realizar por medio de su dimensión de escalamiento o bien, por su carga asociada a la simetría  $R$ , ya que viven en el mismo súper-multiplete. Cumpliendo un operador marginal y relevante que  $\Delta \leq 3$  o equivalentemente que  $r \leq 2$ . Sin embargo, esta clasificación se vuelve inválida al momento de que se rompe la invarianza conforme (en nuestro caso, esta se da después de un rompimiento espontáneo del grupo de norma), teniendo que la información de la relevancia de los operadores ya no está codificada por las cargas  $r$ , sino por las dimensiones anómalas a la nueva escala de energía.

### 6.2.1. Índice de Morse en el flujo $SU(5) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Con ayuda del método descrito anteriormente y en el artículo [7], solo basta con contar el número de operadores relevantes y marginales a las diferentes escalas de energía para conocer información sobre todo el flujo. Para nuestro modelo, las escalas energéticas corresponden con la escala de gran unificación  $M_{GUT}$ , y la escala de rompimiento de supersimetría en el modelo MSSM  $M_{sb}$ , siendo esta última alrededor de  $2 TeV$ .

Para la escala de gran unificación, el grupo de norma del modelo supersimétrico  $SU(5)$  se rompe al grupo del modelo estándar, ya que el súper-multiplete de Higgs que transforma de acuerdo a la representación irreducible  $\mathbf{24}$  adquiere un valor esperado del vacío no nulo ( $\langle \mathbf{24} \rangle \neq 0$ ), que de acuerdo a lo discutido por R. Mohapatra [48], requiere que su término  $F_{24}$  sea idénticamente cero, para obtener así el patrón de rompimiento adecuado en la dirección  $B_\mu$ . Por otro lado, como la condición de vev no nulo implica en general la existencia de un vev en todas las componentes del multiplete  $(\phi_{24}, \psi_{24})$ , esto no es del todo cierto en un modelo físico, ya que la existencia de un valor de expectación fermiónico no cero, violaría explícitamente la invarianza bajo el grupo de Lorentz, rompiéndolo espontáneamente. Por tanto, la condición  $\langle \mathbf{24} \rangle \neq 0$  sólo se refiere a la componente escalar del súper-multiplete, lo cual provoca que tras el rompimiento, los nuevos campos transformen de acuerdo al  $G_{SM}$  como

$$\mathbf{Adj} \rightarrow \mathbf{Adj} \times \mathbf{Adj} \times 1 \oplus \square_3 \times \square_2 \times 1 \oplus \bar{\square}_3 \times \bar{\square}_2 \times 1 \oplus 1 \times 1 \times 1.$$

A esta escala de energía, al ser la teoría invariante ante el grupo súper-conforme (SCFT), el número de operadores marginales y relevantes se puede contar por medio de la relación  $3/2r = \Delta = 1 + \gamma/2$  (relación totalmente válida a este límite, ya que los generadores de dilataciones y los generadores de transformaciones  $R$  viven en el mismo multiplete conforme), caracterizándolos de acuerdo a  $\gamma \leq 4$ , o bien  $r \leq 2$ . El conjunto de operadores en el modelo  $SU(5)$  con supersimetría que cumplen esta condición sobre sus cargas  $r$  son los siguientes

$$\begin{aligned} & \sum_i \mathbf{10}_i \mathbf{10}_i H_i, \\ & \sum_i \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_i \bar{H}_i, \\ & H_4 \mathbf{24} \bar{H}_4, \\ & (\mathbf{24})^3, \end{aligned}$$

siendo un total de 9 operadores, contando la suma de todos ellos<sup>1</sup>. No es posible tener más operadores, ya que las combinaciones descritas en términos de productos entre ellos tienen una carga  $r$  asociada mayor a la dada por la cota de marginalidad; además, la elección de combinaciones con productos de dos súper-campos rompe la simetría  $R$  y con ello la invarianza conforme, por lo que no son considerados. Por tanto, el índice  $\hat{\mu}$  definido en (6.10) a esta escala de energía es  $\hat{\mu}(SU(5)) = 9$ .

<sup>1</sup>La suma se tomó como el operador marginal en el punto fijo encargado de generar la variedad conforme.

## 6. ROMPIMIENTO DE SUSY- $SU(5)$ Y FINITUD.

---

En el momento en que el multiplete en la adjunta adquiere un valor esperado del vacío, el súper-potencial se ve modificado, obteniendo a escalas de energía  $\mu < M_{GUT}$  el súper-potencial del modelo estándar mínimo supersimétrico. Siendo entonces el rompimiento de norma el que conecta a ambos flujos de renormalización de una forma no necesariamente continua. Como  $\langle \mathbf{24} \rangle = \nu T_{12}$ , el súper-potencial (6.3) se reduce a

$$W_\mu = \frac{1}{2} \sum_i (g_i^u \mathbf{10}_i \mathbf{10}_i H_i + g_i^d \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_i \bar{H}_i) + \mu_n H_4 \bar{H}_4, \quad (6.11)$$

con  $\mu_n = g_4^f \nu$ . Como ya se mencionó en la sección (5.3.2), los términos de Yukawa en el  $SU(5)$  corresponden en el SM con

$$\mathbf{10}_i \mathbf{10}_i H_i \rightarrow q Y_u \bar{u} H, \quad \mathbf{10}_i \bar{\mathbf{5}}_i \bar{H}_i \rightarrow L Y_d \bar{e} H + q Y_d \bar{d} H, \quad (6.12)$$

que al ser promovidos a súper-campos, se obtiene el súper-potencial  $W_{MSSM}$ ,

$$W_{MSSM} = \bar{U} q Y_u Q H_u + \bar{D} Y_d Q H_d + \bar{E} Y_e L H_d + \mu_n H_u H_d,$$

que es el súper-potencial del modelo estándar mínimo supersimétrico, previamente mencionado en el capítulo 3. En este punto, es preciso el determinar el valor del índice  $\hat{\mu}$  a esta nueva escala de energía. Sin embargo, al momento que la simetría de norma se rompe, también se pierde la simetría conforme, haciendo que la relación de caracterización para operadores relevantes ( $r \leq 2$ ) sea ahora inválida.

El método para determinar y caracterizar a los operadores relevantes se dará en términos de la dimensión de escala  $\Delta_i$ , que se relaciona con la dimensión anómala de cada uno de los campos (en ausencia de la invarianza súper-conforme) por medio de la expresión  $\Delta_k = d_k + \gamma_k$ , con  $d_k$  la dimensión de masa de cada  $\phi_k$ , súper-campo. Para los multipletes del MSSM, los valores de  $\gamma_k$  vienen dados a un loop en las notas de supersimetría de Martin [1], teniendo que

$$\gamma_{H_u} = \frac{1}{16\pi^2} [3y_t^2 - \frac{3}{2}g_2^2 - \frac{3}{10}g_1^2], \quad (6.13)$$

$$\gamma_{H_d} = \frac{1}{16\pi^2} [3y_t^2 + y_\tau^2 - \frac{3}{2}g_2^2 - \frac{3}{10}g_1^2], \quad (6.14)$$

$$\gamma_Q = \frac{1}{16\pi^2} [y_t^2 + y_b^2 - \frac{8}{3}g_3^2 - \frac{3}{2}g_2^2 - \frac{1}{30}g_1^2], \quad (6.15)$$

$$\gamma_{\bar{D}} = \frac{1}{16\pi^2} [2y_b^2 - \frac{8}{3}g_3^2 - \frac{2}{15}g_1^2], \quad (6.16)$$

$$\gamma_{\bar{U}} = \frac{1}{16\pi^2} [2y_t^2 - \frac{8}{3}g_3^2 - \frac{8}{15}g_1^2], \quad (6.17)$$

$$\gamma_L = \frac{1}{16\pi^2} [y_\tau^2 - \frac{3}{2}g_2^2 - \frac{3}{10}g_1^2], \quad (6.18)$$

$$\gamma_{\bar{E}} = \frac{1}{16\pi^2} [2y_\tau^2 - \frac{6}{5}g_1^2], \quad (6.19)$$

de donde se observa que se requiere el valor de cada uno de los acoplamientos de norma del  $G_{SM}$  a la escala de rompimiento de supersimetría ( $M_{sb} \sim 2 TeV$ ).

El problema de trabajar con dimensiones  $\Delta_k$  radica en que, de manera general, no son cantidades aditivas respecto al producto de  $n$  operadores distintos, por lo que su cálculo no está del todo claro ni determinado. Para inferir de manera aproximada el valor de  $\Delta_k$  para  $n = 3$  operadores, se recurre a herramientas empleadas en la expansión del producto de operadores u OPE (por sus siglas en inglés), para las teorías supersimétricas. Siguiendo la discusión de Osborn [43] y los rusos Aneva, Mikhov y Stoyanov [68], se tiene que la función de correlación de tres puntos para súper-campos quirales tiene una forma genérica como la siguiente

$$\langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3) \rangle = \sum_i^3 \frac{F_i}{X_{12}^{f_i} X_{13}^{g_i} X_{23}^{h_i}}, \quad (6.20)$$

donde  $f_i$ ,  $g_i$  y  $h_i$  son funciones de las dimensiones de escala  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  de cada uno de los súper-campos quirales<sup>1</sup>. Por otro lado, la dimensión de escalamiento de un operador genérico  $\mathcal{O}$  está determinada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle \sim \frac{1}{X^{2\Delta_{\mathcal{O}}}}, \quad (6.21)$$

de donde se observa que  $\Delta_{\mathcal{O}}$  viene acompañada por un factor de  $[L]^{-2}$ . Entonces, considerando un operador de la forma  $\mathcal{O} \sim \phi_1\phi_2\phi_3$ , la dimensión de escala del operador debe de poder relacionarse con la de cada uno de los súper-multipletes ( $\Delta_k$ ). Para inferir dicha relación, se propone un conteo de potencias, tal que codifique la información de las ecuaciones (6.20) y (6.21). Escribiendo a (6.20) como una descomposición en fracciones parciales de (6.21), se tendrá

$$\frac{\delta_{ABC}}{X^{2\Delta_{\mathcal{O}}}} \sim \frac{A}{(X_{12}^{2/9})^{f_1} (X_{13}^{2/9})^{g_1} (X_{23}^{2/9})^{h_1}} + \frac{B}{(X_{12}^{2/9})^{f_2} (X_{13}^{2/9})^{g_2} (X_{23}^{2/9})^{h_2}} + \frac{C}{(X_{12}^{2/9})^{f_3} (X_{13}^{2/9})^{g_3} (X_{23}^{2/9})^{h_3}}, \quad (6.22)$$

con  $A$ ,  $B$  y  $C$  constantes de la descomposición y  $\delta_{ABC}$  un parámetro dependiente de ellas. De la expresión anterior se obtiene una relación de potencias como

$$\frac{1}{X^{2\Delta_{\mathcal{O}}}} \propto \frac{1}{(X_{12}^{2/3})^{(f_1+g_1+h_1)} (X_{13}^{2/3})^{(f_2+g_2+h_2)} (X_{23}^{2/3})^{(f_3+g_3+h_3)}}, \quad (6.23)$$

y haciendo las siguientes redefiniciones  $F = f_1 + g_1 + h_1$ ,  $G = f_2 + g_2 + h_2$  y  $H = f_3 + g_3 + h_3$ , la relación entre las unidades de longitud queda entonces determinada por

$$([L]^{-2})^{\Delta} \propto \frac{1}{([L]^2)^{(1/3F+1/3G+1/3H)}},$$

---

<sup>1</sup>Las cantidades  $X_{ij}$  contienen información sobre las diferencias  $z_1 - z_2$  en el súper-espacio.

que tras el cómputo detallado del exponente del término de la izquierda ( $1/3\{9(2\Delta_1 + 2\Delta_3 - \Delta_2 - 2)\}$ ), se conjetura que para la teoría a la escala  $\mu < M_{GUT}$ , la dimensión de escala del operador  $\mathcal{O}$  es aproximadamente de la forma  $\Delta_{\mathcal{O}} \simeq 3(2\Delta_1 + 2\Delta_3 - \Delta_2 - 2)$ . Para el caso límite en el que se está a energías cercanas a la de gran unificación ( $\mu \sim M_{GUT}$ ), donde la simetría súper-conforme es válida, la dimensión  $\Delta$  para los operadores del súper-potencial, calculada con la relación obtenida es  $\Delta_{SU(5)} = 3$ , que está en consistencia con la condición  $\Delta = 3/2r$  para el modelo SUSY  $SU(5)$ . Por lo que se sospecha que es una buena aproximación para energías menores, en los que la invarianza de escala es aproximada.

Bajo este supuesto, se calculan las  $\gamma_k$  para la escala de rompimiento de SUSY haciendo uso de las ecuaciones del grupo de renormalización para los acoplamientos de norma del MSSM, obteniendo para  $g_i^2$  los valores  $(g_3^2, g_2^2, g_1^2) = (1.402, 0.4322, 0.2199)$ . Entonces, las dimensiones anómalas son

$$\gamma_{H_u} \simeq -4.523x10^3 \simeq \gamma_{H_d}, \quad (6.24)$$

$$\gamma_Q \simeq -0.0278, \quad (6.25)$$

$$\gamma_{\bar{D}} \simeq -0.0238, \quad (6.26)$$

$$\gamma_{\bar{U}} \simeq 0.0244, \quad (6.27)$$

$$\gamma_L \simeq -4.52x10^{-3}, \quad (6.28)$$

$$\gamma_{\bar{E}} \simeq -1,67x10^{-3}, \quad (6.29)$$

y por tanto las dimensiones de escala serán

$$\Delta_{H_u} = 0.9954 = \Delta_{H_d}, \quad (6.30)$$

$$\Delta_Q = 0.9722, \quad (6.31)$$

$$\Delta_{\bar{U}} = 0.9756, \quad (6.32)$$

$$\Delta_{\bar{D}} = 0.9762, \quad (6.33)$$

$$\Delta_{\bar{E}} = 0.9983, \quad (6.34)$$

$$\Delta_L = 0.9954. \quad (6.35)$$

Con lo anterior, se evalúa la dimensión anómala para los términos del potencial  $W_{MSSM}$

$$\begin{aligned} \bar{U}_q Y_u Q H_u : \Delta_1 = 2.909, & \quad \bar{D} Y_d Q H_d : \Delta_2 = 2.913, \\ \bar{E} Y_e L H_d : \Delta_3 = 2.976, & \quad \mu_n H_u H_d : \Delta_4 = 1. \end{aligned}$$

En términos de éstos  $\Delta_k$ , la condición de relevancia de operadores se reduce a  $\Delta_{\mathcal{O}} < 7$ , haciendo que los términos del súper-potencial sean claramente relevantes. Sin embargo, operadores de la forma  $\mathcal{O} \sim (H_u H_d)^n$ , que en caso de  $SU(5)$  son irrelevantes, en el MSSM se vuelven relevantes<sup>1</sup>. Estando dentro del espectro de operadores

---

<sup>1</sup> La dimensión  $\Delta$  para el operador  $\phi_i \phi_j$  se determina de manera análoga al caso de tres campos, obteniendo como resultado  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_{\mathcal{O}}$  para este caso particular.

relevantes los casos para  $n = 1, 2, 3$ , además de combinaciones entre los términos del súper-potencial, ya que el valor alto de la cota de relevancia permite al menos una combinación con cada uno de los términos cúbicos.

Entonces, se tienen más de nueve operadores que satisfacen la condición  $\Delta < 7$ . Por tanto, aunque no sea bien sabido el tamaño del espectro de operadores, sí se sabe que se cumple la relación  $\hat{\mu}(M_{sb}) > \hat{\mu}(M_{GUT})$ , lo que contradice el teorema  $\mu$  (Teorema 4) y con lo que al versión (1) del teorema  $C$  se viola[7], a pesar de que el espacio que conecta a las teorías mediante el flujo no sea vacío. Esto último se justifica considerando que el flujo de renormalización entre  $M_{GUT}$  y  $M_{sb}$  no es gradiente de una función  $C$  bien comportada, por lo que presentará una discontinuidad en el paso de la barrera  $\mu > M_{GUT}$  a  $\mu < M_{GUT}$ , lo cual se puede asociar con la discontinuidad característica de las cantidades físicas al momento de una transición entre fases.

Otro aspecto sobresaliente es el efecto de la disminución en la dimensión de escala, comparada con el caso totalmente conforme, ya que provoca que operadores en la escala del UV que son irrelevantes se vuelvan relevantes al IR, teniendo como consecuencia que el índice de Morse crezca con el flujo. Esto puede ser un indicador de la posibilidad de caracterizar a la transición de fase haciendo el computo de sus exponentes críticos, como se suele hacer en la literatura especializada [5, 23, 34], con ciertas modificaciones, ya que se está trabajando con campos actuando dentro del súper-espacio.



---

## Capítulo 7

# Conclusiones

---

Durante los capítulos anteriores, se describieron los distintos elementos que requiere un modelo que aspire a ser un candidato para teoría de gran unificación. Teniendo como requerimiento primordial el reproducir el contenido e interacciones del modelo estándar usual a bajas energías y el unificar los acoplamientos de norma a energías cercanas al UV.

Entre todas las consideraciones teóricas y fenomenológicas descritas, resaltan aquellas que eliminan las divergencias ultra-violeta en la acción efectiva; ya que gracias a esto, la descripción a ciertos aspectos de la teoría se vuelven un poco menos complicados de tratar, además de que se carece de infinitos dentro de las cantidades físicas que no se puedan regularizar.

El objetivo central del trabajo fue analizar las condiciones bajo las cuales una teoría de gran unificación supersimétrica va a verse libre de divergencias UV a todos los ordenes en teoría de perturbaciones, y al mismo tiempo determinar si estas condiciones son suficientes para describir una invarianza bajo el grupo súper-conforme a la escala de energía a la que la finitud es válida. Al mismo tiempo fue preciso el aplicar lo encontrado para caracterizar la simetría de escala en el modelo de gran unificación  $SU(5)$  supersimétrico, y de la misma forma la existencia de una variedad conforme. Dicha variedad se mostró que existe únicamente en el punto cercano a donde se da el rompimiento del grupo de norma  $SU(5)$  al grupo del modelo estándar  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , y que gracias a ello, se puede utilizar el teorema de Morse para encontrar información sobre el flujo de renormalización entre dos escalas e inferir si hay una transición de fase.

Como fue tratado en la sección (4.4.2), las condiciones para finitud se imponen sobre las velocidades características del flujo de renormalización un loop (funciones  $\beta$  y  $\gamma_i$ ); funciones que determinan las direcciones dentro de la superficie solución de las ecuaciones del grupo de renormalización en el espacio de parámetros. Siendo una condición necesaria y suficiente que las velocidades se anulen a primer orden en teoría de perturbaciones, para tener una acción efectiva finita. De acuerdo con la estructura matemática de las teorías finitas supersimétricas, dichas condiciones restringen significativamente el espacio de parámetros, haciendo de la finitud un hecho, siempre y cuando la solución

## 7. CONCLUSIONES

---

a  $\beta_{ijk}^{(1)} = 0$  y  $\beta_g^{(1)} = 0$  sea única y no degenerada. Estas son las distintas restricciones previamente enumerados en el teorema de finitud (teorema 2).

La clave de la demostración del teorema 2 es la cancelación de las anomalías en el multiplete de corrientes, ya que a nivel cuántico, no se satisface la condición de conservación. Sin embargo, al pedir que la función beta de norma se anule ( $\beta_g^{(1)} = 0$ ), los términos anómalos dentro de las corrientes asociadas a las simetrías se anulan, ya que todas las anomalías comparten el parámetro  $\beta_g^{(1)}$  además de que no reciben contribuciones a ordenes más altos en teoría de perturbaciones. Lo mismo se da al caso inverso, ya que si no se tienen anomalías en el multiplete de corrientes, la función beta se anula, y por tanto se tiene finitud. Lo que deja ver que una teoría finita en el sentido supersimétrico, no tendrá anomalías en sus corrientes de Noether.

Al ser el súper-multiplete de corrientes una representación de supersimetría, y teniendo además que la teoría en un punto fijo es invariante de escala, se infirió la posibilidad de que cerca del punto  $\mu^*$ <sup>1</sup>, la teoría manifieste una invarianza ante el grupo súper-conforme al cumplirse las condiciones de finitud (teorema 2). La suposición de simetría conforme se ve codificada por la existencia de una variedad conforme en el punto fijo; dicha variedad es generada por operadores locales que cumplen la propiedad de marginalidad. Con ayuda de la estructura matemática dada por la finitud y utilizando la caracterización de multipletes súper-conformes, se probó que las condiciones para finitud con un súper-potencial cúbico ( $W = C_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k$ ), implican la existencia de una variedad fija conforme, dentro de la cual la acción efectiva asociada con la teoría carece de divergencias UV. Este resultado es importante debido a que a la fecha no existía una demostración que tratara la invarianza conforme para teorías finitas supersimétricas con  $\mathcal{N} = 1$ <sup>2</sup>.

Gracias a este teorema de conformidad para teorías finitas (teorema 3), para el modelo de gran unificación  $SU(5)$ ; el cual da un patrón de rompimiento consistente con el modelo estándar, se encontró que el flujo de renormalización entre dos escalas energéticas correspondientes al rompimiento de supersimetría en el MSSM y al rompimiento de la simetría de norma  $M_{sb}$  y  $M_{GUT}$ , respectivamente, se presenta un comportamiento similar, si no es que idéntico al observado para una transición de fase en el espacio de parámetros, dado por el parámetro de orden  $\langle \mathbf{24}_H \rangle = H$  (en analogía con el caso de la transición de fase electrodébil o incluso la transición de un sólido paramagnético). Esto se pudo inferir gracias al trabajo de Sergei Gukov, para lo que fue necesaria la existencia de la variedad conforme a la escala  $\mu = M_{GUT}$ . El trabajo [7] relata este tipo de flujos, ya sean continuos o concatenados, sin hacer uso explícito de las ecuaciones para el grupo de renormalización, sino haciendo referencia al teorema  $\hat{\mu}$ , que relaciona a la función  $C$  para el flujo mencionado. Con esto se caracteriza a su vez la continuidad de  $C$  y del flujo en términos de un índice  $\hat{\mu}$ , que cuenta el número de direcciones relevantes y marginales dentro del espacio de parámetros reales; en analogía al valor de carga central, que cuenta los grados de libertad no masivos.

Para el cálculo explícito de dicho índice a distintas escalas, fue necesario contar el

---

<sup>1</sup>Un punto fijo.

<sup>2</sup>Existen demostraciones para  $\mathcal{N} = 2, 4$  dadas por D. Kazakov [69]

---

número de operadores que generan direcciones relevantes mediante su dimensión de escala  $\Delta$ . Parámetro sencillo de calcular a la escala  $M_{GUT}$ , ya que se tiene una relación directa con las cargas  $r$  dada por la invarianza conforme ( $\Delta = 3/2r$ ); sin embargo, lejos de esta escala ( $\mu < M_{GUT}$ ), el cómputo se realizó haciendo consideraciones de una invarianza de escala aproximada, y al hacer un conteo de potencias en las funciones de correlación se determina el valor aproximado para la dimensión de escala. Teniendo como resultado la condición que viola el teorema  $\hat{\mu}$ , y por tanto, asocia al flujo de renormalización entre  $\mu < M_{GUT}$  y  $\mu > M_{GUT}$  con una transición de fase en el espacio de parámetros. Con esto se observa que fue de vital importancia el tener la variedad conforme para así inferir la existencia de la transición de fase.

El siguiente paso a seguir sería el caracterizar a la transición, determinando el orden de la misma. Para esto, es necesaria la expresión concreta de la función  $C$  de Morse-Bott [7, 67], además del cálculo explícito de los exponentes críticos asociados al comportamiento asintótico de las cantidades físicas. Para este trabajo a futuro, se propone un funcional de energía libre  $\mathcal{F}$ , análogo a la energía libre usada en la teoría de Landau para transiciones de fase, que codifica la información de los exponentes críticos en el formalismo de la integral de trayectoria [70, 71]. Además, en términos de la función de Morse-Bott (función  $C$ ), poder construir el espacio fase para la transición, siguiendo el razonamiento y trabajos de Lütken en el artículo [72].

Si es posible desarrollar todas estas propiedades para el espacio de parámetros del modelo  $SU(5)$  supersimétrico, se espera poder dar una generalización del tratamiento para distintos modelos de gran unificación consistentes con el modelo estándar a bajas energías. Sin embargo, se espera poder tomar en cuenta primero el efecto de la adición de los términos de rompimiento suave en la transición para el modelo  $SU(5)$  y ver como esto afecta a la finitud y por tanto a la existencia de la variedad fija conforme; que al ser aplicado al modelo  $SU(5)$ , se espera que dé un panorama general para otros modelos.



# Bibliografía

---

- [1] S. P. Martin, “A Supersymmetry primer,” pp. 1–98, 1997. [Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.18,1(1998)]. [xi](#), [17](#), [23](#), [28](#), [34](#), [35](#), [74](#), [79](#), [88](#)
- [2] U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstenau, “Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP,” *Phys. Lett.*, vol. B260, pp. 447–455, 1991. [xi](#), [17](#)
- [3] D. I. Kazakov, “Ultraviolet fixed points in gauge and SUSY field theories in extra dimensions,” *JHEP*, vol. 03, p. 020, 2003. [2](#), [3](#), [54](#)
- [4] D. R. T. Jones and L. Mezincescu, “The Chiral Anomaly and a Class of Two Loop Finite Supersymmetric Gauge Theories,” *Phys. Lett.*, vol. 138B, pp. 293–295, 1984. [2](#), [3](#), [54](#)
- [5] A. Altland and B. D. Simons, *Condensed matter field theory*. Cambridge University Press, 2010. [2](#), [49](#), [91](#)
- [6] C. Cordova, T. T. Dumitrescu, and K. Intriligator, “Multiplets of superconformal symmetry in diverse dimensions,” *arXiv preprint arXiv:1612.00809*, 2016. [2](#), [3](#), [57](#), [58](#), [59](#), [60](#)
- [7] S. Gukov, “Counting RG flows,” *JHEP*, vol. 01, p. 020, 2016. [2](#), [3](#), [58](#), [60](#), [85](#), [87](#), [91](#), [94](#), [95](#)
- [8] S. Heinemeyer, M. Mondragón, N. Tracas, and G. Zoupanos, “Reduction of parameters in Finite Unified Theories and the MSSM,” *Nucl. Phys.*, vol. B927, pp. 319–338, 2018. [3](#), [53](#), [82](#)
- [9] R. G. Leigh and M. J. Strassler, “Exactly marginal operators and duality in four dimensional  $n= 1$  supersymmetric gauge theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 447, no. 1, pp. 95–133, 1995. [3](#), [56](#), [57](#), [59](#)
- [10] F. Halzen, A. D. Martin, and N. Mitra, “Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics,” 1985. [5](#), [6](#), [9](#), [62](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] T.-P. Cheng, L.-F. Li, and T.-P. Cheng, “Gauge theory of elementary particle physics,” 1984. [5](#), [8](#), [9](#), [15](#), [43](#), [62](#), [66](#)
- [12] A. Djouadi, “The Anatomy of electro-weak symmetry breaking. I: The Higgs boson in the standard model,” *Phys. Rept.*, vol. 457, pp. 1–216, 2008. [5](#), [74](#)
- [13] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 16, p. 508, 1964. [6](#), [9](#)
- [14] F. Englert and R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 9, p. 321, 1964. [6](#)
- [15] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken symmetries,” *Physical Review*, vol. 127, no. 3, p. 965, 1962. [6](#), [10](#)
- [16] K. A. Olive *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Chin. Phys.*, vol. C38, p. 090001, 2014. [9](#), [74](#), [76](#)
- [17] M. Peskin, “An introduction to quantum field theory, by michael edward peskin and daniel v. schroeder. isbn 13 978-0-201-50397-5, isbn-10 0-201-50397-2,” 1995. [10](#), [18](#), [22](#), [42](#), [47](#), [49](#)
- [18] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013. [10](#)
- [19] G. Hooft, “Dimensional regularization and the renormalization group,” *Nuclear Physics: B*, vol. 61, pp. 455–468, 1973. [11](#), [48](#)
- [20] M. Einhorn, *The Standard Model Higgs Boson: Selections and Comments*, vol. 8. Elsevier, 2012. [14](#)
- [21] H. Päs and W. Rodejohann, “Neutrinoless Double Beta Decay,” *New J. Phys.*, vol. 17, no. 11, p. 115010, 2015. [16](#)
- [22] T. Mannel, “Theory and phenomenology of cp violation,” *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 167, pp. 170 – 174, 2007. Proceedings of the 7th International Conference on Hyperons, Charm and Beauty Hadrons. [16](#)
- [23] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of [Greek Letter Phi] 4-theories*. World Scientific, 2001. [18](#), [37](#), [41](#), [42](#), [43](#), [47](#), [49](#), [91](#)
- [24] S. Coleman and J. Mandula, “All possible symmetries of the s matrix,” *Physical Review*, vol. 159, no. 5, p. 1251, 1967. [22](#)
- [25] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Supersymmetry*, vol. Volume 3. Cambridge University Press, 2000. [24](#)
- [26] F. Quevedo, S. Krippendorff, and O. Schlotterer, “Cambridge lectures on supersymmetry and extra dimensions,” tech. rep., 2010. [26](#), [37](#)

- 
- [27] D. I. Kazakov, “Beyond the standard model: In search of supersymmetry,” in *2000 European School of high-energy physics, Caramulo, Portugal, 20 Aug-2 Sep 2000: Proceedings*, pp. 125–199, 2000. [32](#), [34](#), [35](#), [79](#)
- [28] S. J. Gates Jr, M. T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, “Superspace, or one thousand and one lessons in supersymmetry,” *arXiv preprint hep-th/0108200*, 2001. [35](#)
- [29] H. Muller-Kirsten and A. Wiedemann, “Supersymmetry-an introduction with conceptual and calculational details,” 1987. [35](#)
- [30] P. Draper and H. Rzehak, “A review of higgs mass calculations in supersymmetric models,” *Physics Reports*, vol. 619, pp. 1–24, 2016. [38](#)
- [31] G. Hooft, “Renormalizable lagrangians for massive yang-mills fields,” *Nuclear physics: B*, vol. 35, no. 1, pp. 167–188, 1971. [41](#)
- [32] V. Radovanovic, *Problem book in quantum field theory*. Springer, 2006. [43](#)
- [33] S. Weinberg, “High-energy behavior in quantum field theory,” *Physical Review*, vol. 118, no. 3, p. 838, 1960. [44](#)
- [34] H. Nishimori and G. Ortiz, *Elements of phase transitions and critical phenomena*. OUP Oxford, 2010. [49](#), [91](#)
- [35] R. Haberman, *Elementary applied partial differential equations*, vol. 987. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1983. [50](#)
- [36] S. Coleman and E. Weinberg, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,” *Physical Review D*, vol. 7, no. 6, p. 1888, 1973. [51](#)
- [37] Y. Shirman, “Introduction to Supersymmetry and Supersymmetry Breaking,” in *Proceedings of Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics on The dawn of the LHC era (TASI 2008): Boulder, USA, June 2-27, 2008*, pp. 359–422, 2010. [52](#), [56](#), [77](#)
- [38] H. Sonoda and K. Ülker, “An elementary proof of the non-renormalization theorem for the wess-zumino model,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 123, no. 6, pp. 989–1002, 2010. [52](#), [77](#)
- [39] N. Seiberg, “The Power of holomorphy: Exact results in 4-D SUSY field theories,” in *PASCOS '94: Proceedings, 4th International Symposium on Particles, Strings and Cosmology, Syracuse, New York, USA, May 19-24, 1994*, pp. 0357–369, 1994. [52](#)
- [40] J.-f. Yang, “Quantum field theory: Finiteness and effectiveness,” in *11th International Conference on Problems of Quantum Field Theory Dubna, Russia, July 13-17, 1998*, 1998. [53](#)
-

- [41] S. Heinemeyer, M. Mondragon, and G. Zoupanos, “Finite Unification: Theory and Predictions,” *SIGMA*, vol. 6, p. 049, 2010. [53](#), [55](#), [56](#), [78](#), [82](#)
- [42] C. Lucchesi, O. Piguet, and K. Sibold, “Vanishing beta-functions in  $n=1$  supersymmetric gauge theories,” *Helv. Phys. Acta*, vol. 61, no. CERN-TH-4860-87, pp. 321–344, 1987. [54](#)
- [43] H. Osborn, “ $N=1$  superconformal symmetry in four-dimensional quantum field theory,” *Annals Phys.*, vol. 272, pp. 243–294, 1999. [55](#), [89](#)
- [44] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, “Introduction to conformal field theory: With applications to string theory, vol. 779 of lect,” *Notes Phys. Springer*, 2009. [55](#), [58](#)
- [45] A. Bilal, “Lectures on anomalies,” *arXiv preprint arXiv:0802.0634*, 2008. [56](#)
- [46] S. Ferrara and B. Zumino, “Transformation properties of the supercurrent,” *Nuclear Physics B*, vol. 87, no. 2, pp. 207 – 220, 1975. [56](#), [57](#)
- [47] C. Behan, “Conformal manifolds: Odes from opes,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, no. 3, p. 127, 2018. [58](#), [59](#)
- [48] R. N. Mohapatra, “Unification and supersymmetry,” *Particle Physics*, p. 336, 1986. [62](#), [76](#), [87](#)
- [49] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of all elementary-particle forces,” *Physical Review Letters*, vol. 32, no. 8, p. 438, 1974. [62](#)
- [50] W. Greiner, B. Müller, and D. A. Bromley, *Gauge theory of weak interactions*, vol. 5. Springer, 1996. [62](#), [73](#)
- [51] C. R. Miguel, *The  $SU(5)$  Grand Unification Theory Revisited*. PhD thesis, Instituto Superior Técnico. Universidade Técnica de Lisboa, October 2011. [62](#)
- [52] T. Johan, *Grand Unified Theories.  $SU(5)$ ,  $SO(10)$  and supersymmetric  $SU(5)$* . PhD thesis, Lund University, July 2012. [62](#)
- [53] T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, vol. 98. Springer Science & Business Media, 2013. [62](#), [63](#)
- [54] H. Georgi, *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*. CRC Press, 2018. [62](#), [63](#), [64](#)
- [55] R. Gilmore, *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Courier Corporation, 2012. [62](#), [63](#)
- [56] R. Slansky, “Group theory for unified model building,” *Physics Reports*, vol. 79, no. 1, pp. 1–128, 1981. [64](#), [83](#)
- [57] L.-F. Li, “Group theory of the spontaneously broken gauge symmetries,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 1723–1739, Mar 1974. [71](#)

- 
- [58] M. Miura, “Search for nucleon decay in super-kamiokande,” *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, vol. 273-275, pp. 516 – 521, 2016. 37th International Conference on High Energy Physics (ICHEP). [77](#)
- [59] J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and S. Rudaz, “A phenomenological comparison of conventional and supersymmetric guts,” *Nuclear Physics B*, vol. 202, no. 1, pp. 43–62, 1982. [78](#)
- [60] X.-d. Jiang and X.-j. Zhou, “Finite  $N = 1$  Supersymmetric Theories of Classical Groups,” *Phys. Lett.*, vol. B216, p. 160, 1989. [81](#)
- [61] C. Lucchesi and G. Zoupanos, “All order finiteness in  $N=1$  SYM theories: Criteria and applications,” *Fortsch. Phys.*, vol. 45, pp. 129–143, 1997. [81](#)
- [62] S. Rajpoot and J. G. Taylor, “ON FINITE QUANTUM FIELD THEORIES,” *Phys. Lett.*, vol. 147B, pp. 91–95, 1984. [82](#)
- [63] X. dong Jiang and X. jian Zhou, “Finite  $n=1$  supersymmetric theories of classical groups,” *Physics Letters B*, vol. 216, no. 1, pp. 160 – 166, 1989. [82](#)
- [64] M. Fischler, “Young–tableau methods for kronecker products of representations of the classical groups,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 4, pp. 637–648, 1981. [83](#)
- [65] I. Jack and D. R. T. Jones, “Soft supersymmetry breaking and finiteness,” *Phys. Lett.*, vol. B333, pp. 372–379, 1994. [84](#)
- [66] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2d field theory,” *JETP lett*, vol. 43, no. 12, pp. 730–732, 1986. [85](#)
- [67] A. Codello, G. D’Odorico, and C. Pagani, “A functional rg equation for the c-function,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2014, no. 7, p. 40, 2014. [85](#), [95](#)
- [68] B. Aneva, S. Mikhov, and D. T. Stoyanov, “Two-and three-point functions of conformal superfields,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 35, no. 2, pp. 383–390, 1978. [89](#)
- [69] D. I. Kazakov and L. V. Bork, “Conformal invariance= finiteness and beta deformed = 4 sym theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2007, no. 08, p. 071, 2007. [94](#)
- [70] S. H. Simon, “Lecture notes for quantum condensed matter ii,” 2016. [95](#)
- [71] N. Goldenfeld, “Lectures on phase transitions and critical phenomena,” 1992. [95](#)
- [72] C. Lütken, “Geometry of renormalization group flows constrained by discrete global symmetries,” *Nuclear Physics B*, vol. 396, no. 2-3, pp. 670–692, 1993. [95](#)
-