



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ÍNDICES DE CAMPOS VECTORIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GIBRÁN RODRIGO ESPEJO RAMOS

TUTORA:  
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

2018





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1.Datos del alumno	1.Datos del alumno
Apellido Paterno:	Espejo
Apellido Materno:	Ramos
Nombres:	Gibrán Rodrigo
Universidad:	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad:	Facultad de Ciencias
Carrera:	Matemáticas
2.Datos del tutor	2.Datos del tutor
Grado:	Dra.
Nombre:	Laura
Apellido Paterno:	Ortiz
Apellido Materno:	Bobadilla
3.Datos del sinodal 1	3.Datos del sinodal 1
Grado:	Dr.
Nombres:	José Luis
Apellido Paterno:	Cisneros
Apellido Materno:	Molina
4.Datos del sinodal 2	4.Datos del sinodal 2
Grado:	Dr.
Nombres:	Javier Enrique
Apellido Paterno:	Elizondo
Apellido Materno:	Huerta
5.Datos del sinodal 3	5.Datos del sinodal 3
Grado:	M. en C.
Nombre:	Oziel
Apellido Paterno:	Gómez
Apellido Materno:	Martínez
6.Datos del sinodal 4	6.Datos del sinodal 4
Grado:	Dra.
Nombres:	Ana
Apellido Paterno:	Rechtman
Apellido Materno:	Bulajich
7.Datos del trabajo escrito.	7.Datos del trabajo escrito.
Título:	Índices de campos vectoriales.
Número de páginas:	127 p
Año:	2018

*A mi familia.*

# Agradecimientos

Hacer esta tesis me hizo apreciar muchas cosas, una de ellas es la cantidad de personas que me han apoyado y por ello aprovecho este espacio para agradecer a aquellas personas que no nombrare pues saben quienes son.

Primeramente, agradezco a mis padres por todas las enseñanzas y el infinito amor.

A mi familia, por estar siempre pendiente de mis estudios y de mi bienestar.

A mis amigos, por todos los recuerdos.

A mis profesores, les estoy infinitamente agradecido por mi formación académica.

Agradezco infinitamente a Laura Ortiz, mi asesora y profesora, por transmitirme el gusto por el estudio geométrico de las foliaciones. Le agradezco además; el tiempo, las inagotables enseñanzas, las observaciones y el apoyo.

A mis sinodales, por el tiempo dedicado en escucharme, las puntuales observaciones y los comentarios.

Agradezco a la UNAM, en especial a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas, he disfrutado muchísimo pasar estos años aquí. La beca de lugar y acceso a la biblioteca del Instituto de Matemáticas me ofrecieron un espacio no sólo de estudio, si no también un espacio de convivencia con otros becarios cuya amistad es invaluable.

Finalmente, agradezco el apoyo de la DGAPA-UNAM a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) en el proyecto con clave IN106217 con nombre Foliaciones holomorfas y singularidades.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Foliaciones</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones diferenciales y sus soluciones . . . . .	2
1.2. Foliaciones . . . . .	6
1.2.1. Campos vectoriales . . . . .	7
1.2.2. Foliaciones generadas por formas holomorfas . . . . .	11
1.2.3. Holonomía . . . . .	12
1.3. Equivalencia formal . . . . .	16
<b>2. Resolución de singularidades</b>	<b>21</b>
2.1. Explosión simple . . . . .	21
2.1.1. Explosión de curvas analíticas y puntos singulares . . . . .	23
2.2. Aplicaciones . . . . .	31
2.2.1. Eliminación de puntos singulares no elementales . . . . .	31
2.2.2. Eliminación de nodos resonantes . . . . .	34
2.2.3. Foliaciones integrables . . . . .	36
<b>3. Multiplicidad de intersección</b>	<b>41</b>
3.1. Divisores . . . . .	41
3.2. Índice de intersección . . . . .	46
3.3. Multiplicidad de intersección de series formales . . . . .	59
3.4. Multiplicidad de un punto singular . . . . .	60
<b>4. Problema local de Poincaré</b>	<b>71</b>
4.1. Peso de una componente del divisor evanescente . . . . .	77
4.2. Orden evanescente . . . . .	83
<b>A. Apéndice</b>	<b>91</b>
A.1. Gérmenes de funciones holomorfas . . . . .	91
A.2. Gérmenes de conjuntos analíticos . . . . .	96
A.3. Formas en $\mathbb{C}^2$ . . . . .	99
A.4. Variedades complejas y formas holomorfas . . . . .	101
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>



# Introducción

El estudio de ecuaciones diferenciales comienza con la invención del cálculo por I. Newton (1642-1726/27) y G. Leibniz (1646-1716). En el capítulo 2 del trabajo Método de las fluxiones y series infinitas (Methodus fluxionum et serierum infinitorum, publicado de manera póstuma en 1736) Newton enlista ecuaciones diferenciales de la forma  $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$  y las resuelve usando series infinitas.

La importancia de resolver ecuaciones diferenciales está marcada por la filosofía de predecir el comportamiento de un fenómeno dadas ciertas condiciones iniciales. Con ello se planteó el problema de encontrar una expresión analítica de todas las soluciones dada una ecuación diferencial, sin embargo como observa J. Liouville (1809-1882), este problema así planteado es imposible de resolver.

Básicamente la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se encarga de derivar propiedades geométricas de las soluciones directamente de las ecuaciones que las definen. Esta idea fue propuesta por H. Poincaré (1854-1912), pensando en el problema de los  $n$ -cuerpos que consiste en especificar el comportamiento del movimiento de  $n$  cuerpos que se atraen de acuerdo a las leyes de Newton.

Consideremos una ecuación diferencial holomorfa definida en un dominio abierto  $V$  de  $\mathbb{C}^2$

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in V. \quad (0.0.1)$$

El teorema de existencia y unicidad nos dice que alrededor de cada punto  $x \in V$  existe una vecindad donde las soluciones existen y son únicas. El teorema de rectificación nos dice que alrededor de puntos  $p \in V$  tales que  $F(p) \neq 0$  las soluciones se ven como rectas paralelas. A este tipo de estructuras se les conoce como foliaciones, objeto de estudio en esta tesis.

Para estudiar cómo se comportan las soluciones de la ecuación diferencial (0.0.1) alrededor de puntos  $p \in V$  tales que  $F(p) = 0$ , primero podemos preguntarnos si es posible llevar estas soluciones a las soluciones de otra ecuación,  $\dot{x} = G(x)$ , más sencilla en algún sentido, con una transformación  $H$  invertible que preserve alguna estructura (analítica, topológica, formal). En el caso en el que la parte lineal de  $F(x)$  tiene al menos un valor propio distinto de 0, es

posible encontrar una serie formal  $H$  que simplifique la ecuación, gracias a los teoremas de Poincaré-Dulac 1.44 y al teorema de linealización de Poincaré 1.42, y una transformación analítica  $H$  gracias al teorema de normalización de Poincaré 1.45.

Sin embargo, aunque en general la parte lineal del campo vectorial  $F(x)$  alrededor de  $p \in V$  digamos  $p = 0$ , no necesariamente tiene parte lineal con algún valor propio distinto de 0, es posible encontrar una variedad compleja  $M$  con una curva analítica irreducible  $S$  en ella y una transformación holomorfa  $\pi$  que cumpla ser un biholomorfismo entre  $M \setminus S$  y  $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ , de forma que la parte lineal del campo vectorial que define las singularidades en  $S$  de la foliación inducida  $\pi^* \mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$  alrededor de cada singularidad tiene parte lineal con algún valor propio distinto de 0. A este teorema se le conoce como el teorema de desingularización de Bendixon 2.17 y será probado en el capítulo 4.

Dada una hoja  $L$  de una foliación  $\mathcal{F}$  definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , decimos que  $L$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  alrededor de 0 si  $L \cup \{0\}$  es una curva analítica irreducible. El problema local de Poincaré nos pregunta cuántas separatrices pueden estar asociadas a 0. Si el punto 0 no es singular, tiene asociada sólo una separatriz (la única solución que pasa por el punto). En el caso en el que el punto 0 es un punto singular  $C$ . Camacho y P. Sad prueban que  $\mathcal{F}$  tiene al menos una separatriz en ese punto [CS] y también prueban que en el caso en el que  $\mathcal{F}$  tiene un número finito de separatrices es posible acotar el número con el orden de la foliación. Este segundo hecho es probado al final del capítulo 5.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos que serán utilizados a lo largo de este trabajo, como son las nociones de campo vectorial analítico, ecuación diferencial y sus soluciones, foliaciones singulares (y cómo generarlas tanto con 1 – *formas* holomorfas como con campo vectoriales), equivalencia analítica y formal además de construir la transformación de holonomía definida en una hoja de la foliación.

En el capítulo 2 comenzamos con la construcción de una 2 – *variedad* compleja  $\mathbb{M}$  y una curva  $\mathbb{E}$  que cumpla que  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  sea biholomorfa a  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  mediante una transformación  $\sigma : \mathbb{M} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\sigma(\mathbb{E}) = 0$ . Esto nos permitirá construir foliaciones  $\tilde{\mathcal{F}}$  en  $\mathbb{M}$  tal que su proyección defina foliaciones singulares  $\mathcal{F}$  definidas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . A  $\tilde{\mathcal{F}}$  se le llama la explosión de  $\mathcal{F}$  alrededor de 0. De igual forma se definirá la explosión de curvas. Al final del capítulo se dan algunas aplicaciones de este proceso de explosión como son el teorema de desingularización de Bendixon, la eliminación de nodos resonantes y un criterio para ver cuándo una foliación no es integrable.

En el capítulo 3 se introducen las herramientas algebraicas y topológicas para probar el teorema de Bendixon definiendo un invariante formal de la foliación en un punto, la multiplicidad del punto singular, y viendo cómo se comporta

con el proceso de explosión.

En el capítulo 4 se introduce el problema local de Poincaré y se dan criterios acerca de la existencia de separatrices definiendo pesos a las componentes del divisor evanescente a través y un orden evanescente; al final se da una cota al número de separatrices comparando una suma de órdenes evanescentes con pesos de la foliación  $\mathcal{F}$  con la explosión de una foliación integrable  $\mathcal{H}$  que tenga las mismas separatrices que  $\mathcal{F}$ .

Finalmente se incluye un apéndice con teoremas y definiciones que usamos a lo largo del texto citando dónde es posible consultar la prueba de algunos de estos resultados, o bien probándolos para hacer un trabajo lo más autocontenido posible.



# Capítulo 1

## Foliaciones

En términos generales, una foliación es una partición de una variedad compleja en subconjuntos ajenos que localmente se ven como la unión de discos paralelos. En este capítulo veremos que hay una manera natural de definir localmente una foliación de codimensión  $n - 1$  haciendo uso de las soluciones no singulares de ecuaciones diferenciales.

Para ello, primero definimos lo que es una ecuación diferencial y vemos que las soluciones forman una partición del espacio. Alrededor de cualquier punto no singular esta partición es, por el teorema de rectificación, equivalente localmente a la unión de discos paralelos.

Después vemos que en el caso de variedades complejas de dimensión 2 un campo vectorial define una foliación de manera natural cuando no tiene puntos singulares, dando además condiciones necesarias y suficientes para que 2 campos vectoriales definan a la misma foliación. Posteriormente extendemos la definición de foliación para que admita singularidades, resulta que cualquier foliación se puede construir localmente con un campo vectorial.

Construimos el grupo de holonomía y vemos que es un invariante de la foliación bajo homeomorfismos, en el sentido de que si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son 2 foliaciones analíticamente equivalentes por un holomorfismo  $H$ , y  $\mathcal{L}$  es una hoja de  $\mathcal{F}$  entonces el grupo de holonomía de  $\mathcal{L}$  y el de  $H(\mathcal{L})$  son conjugados.

Finalmente se menciona el teorema de Poincaré-Dulac que nos da condiciones para reducir el campo vectorial de manera formal cuando la parte lineal tiene al menos un valor propio distinto de cero.

## 1.1. Ecuaciones diferenciales y sus soluciones

**Definición 1.1 (Ecuación diferencial ordinaria analítica).** Sea  $U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  un dominio abierto y  $F : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  una función vectorial holomorfa. Una *ecuación diferencial ordinaria analítica* definida por  $F$  en  $U$  es una ecuación vectorial o sistema de  $n$  ecuaciones escalares

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(t, x) \quad (t, x) \in U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n. \quad (1.1.1)$$

Decimos que la transformación holomorfa  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ , definida en un subconjunto abierto  $V \subset \mathbb{C}^n$ , cuya gráfica  $\{(t, \phi(t)) | t \in V\}$  pertenece a  $U$ , es una *solución* de (1.1.1) si en cada punto  $t \in V$  se satisface

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \right) = F(t, \phi(t)) \quad (1.1.2)$$

Denotamos por  $\dot{x}$  al vector  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ , donde  $\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial t}$ .

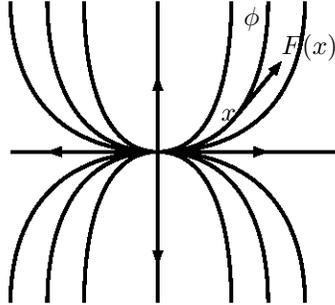


Figura 1.1: Soluciones de una ecuación diferencial lineal en  $\mathbb{R}^2$

Se dice que la ecuación es *autónoma*, si  $F$  es independiente de  $t$ , en este caso  $F$  puede ser pensada como una función que toma puntos en  $\mathbb{C}^n$  y los envía a vectores en  $\mathbb{C}^n$  visto como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ .

**Observación 1.2.** Cualquier ecuación diferencial se puede considerar autónoma agregando la variable ficticia  $z \in \mathbb{C}$  dada por  $\frac{\partial z}{\partial t} = 1$ .

Trabajaremos con ecuaciones diferenciales autónomas de dimensión 2.

Dada una ecuación diferencial (1.1.1) podemos preguntarnos si existen soluciones de ésta y, en caso de existir, cuántas soluciones pueden pasar por un punto específico  $(t_0, x_0) \in U$ . El problema del valor inicial, también llamado el problema de Cauchy nos pide encontrar una solución  $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  a la ecuación

diferencial, que satisfaga  $\phi(t_0) = x_0$ .

El teorema local de existencia y unicidad nos da una respuesta parcial al problema.

**Teorema 1.3 (Teorema de existencia y unicidad).** *Para cualquier ecuación diferencial holomorfa como en la definición 1.1 y cada punto  $(t_0, x_0) \in U$ , existe un polidisco lo suficientemente pequeño*

$$D_\epsilon = \{|t - t_0| < \epsilon, |x_j, (x_0)_j| < \epsilon, j = 1, \dots, n\} \subset U,$$

tal que la solución del problema inicial existe y es única en este polidisco.

Más aún la solución depende de manera holomorfa de la condición inicial, y si  $F$  depende de manera holomorfa de algunos otros parámetros, la solución también depende de manera holomorfa de estos parámetros.

**Demostración.** Ver [[IY], Págs. 2-5]. □

**Lema 1.4.** *Sea  $\dot{x} = F(x)$  una ecuación diferencial holomorfa definida en un abierto de  $\mathbb{C}^2$ . Consideremos dos soluciones  $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$  y  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}^2$  de la ecuación  $\dot{x} = F(x)$ , donde  $V$  y  $W$  son abiertos conexos de  $\mathbb{C}$ .*

*Si existe  $t_0 \in V \cap W$ , de forma que se satisfaga la igualdad  $\phi(t_0) = \varphi(t_0)$ , entonces  $\phi(x) = \varphi(x)$  para  $x \in V \cap W$ .*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad supongamos que  $t_0 = 0$ .

Para  $x \in V \cap W$  consideremos el intervalo  $I = \{tx \mid t \in [0, 1]\}$ .  $I$  es compacto y por tanto su imagen  $\phi(I)$  es compacta al ser  $\phi$  continua.

Para cada punto  $(tx, \phi(tx))$ ,  $t \in [0, 1]$ , por el teorema de existencia y unicidad existe una vecindad de  $(tx, \phi(tx))$  en  $V \cap W \times \mathbb{C}^2$  de la forma  $U_{tx} \times V_{tx}$ , con  $U_{tx}$  vecindad de  $tx$  y  $V_{tx}$  vecindad de  $\phi(tx)$ , donde la solución del problema inicial existe y es única en esta vecindad.

Tomamos una subcubierta finita  $\{V_i\}_{i=1}^n$  de  $\phi(I)$  tal que  $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $\phi(0) \in V_0$ ,  $\phi(x) \in V_n$ . En estas vecindades si  $\phi(y) = \varphi(y)$  para algún  $y \in U_i$ , entonces  $\phi(y) = \varphi(y)$  para todo  $y \in U_i$  (como consecuencia del teorema de existencia y unicidad).

Finalmente, como  $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$  y  $\phi(0) = \varphi(0)$  tenemos que  $\phi(x) = \varphi(x)$ , lo que prueba el resultado. □

Como consecuencia de este lema podemos extender las soluciones de la ecuación diferencial en el siguiente sentido, si  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{C}^2$  y  $\beta : W \rightarrow \mathbb{C}^2$  son soluciones de una ecuación diferencial holomorfa  $\dot{x} = F(x)$ , con  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$  entonces podemos construir una solución  $\varphi(t)$  que contenga a  $\alpha$  y a  $\beta$ .

En efecto, consideremos  $\varphi : V \cup W \rightarrow \mathbb{C}^n$  dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in V, \\ \beta(t), & t \in W. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Esta solución está bien definida pues por el lema  $\alpha(t) = \beta(t)$  en  $V \cap W$ ; Además  $\phi$  es solución de la ecuación diferencial pues

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} \dot{\alpha}(t), & t \in V, \\ \dot{\beta}(t), & t \in W. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

**Observación 1.5.** Lo anterior nos dice que si hay una solución que pasa por los puntos  $x$  y  $p$  y otra solución que pasa por  $x$  y  $z$  entonces hay una solución que pasa por  $x$ ,  $p$  y  $z$ . Esto nos permite separar el espacio en curvas ajenas.

**Ejemplo 1.6 (Ecuación diferencial lineal).** Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^n, A \in Mat(n, \mathbb{C}). \quad (1.1.5)$$

La solución con valor inicial  $x(0) = v$  está dada por la matriz exponencial,

$$x_A(t, v) = e^{At}v, \quad t \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n, \quad (1.1.6)$$

donde la exponencial de una matriz  $B \in Mat(n, \mathbb{C})$  está dada por

$$e^B = Id + B + \frac{1}{2!}B^2 + \dots + \frac{1}{k!}B^k + \dots$$

**Observación 1.7.** Si tenemos 2 matrices  $A$  y  $B$  en  $Mat(n, \mathbb{C})$  semejantes (esto es existe una matriz  $P \in Mat(n, \mathbb{C})$  invertible tal que  $A = P^{-1}BP$ ) y consideramos las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^n \quad (1.1.7)$$

$$\dot{x} = Bx, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad (1.1.8)$$

entonces las soluciones  $x_A(t, v)$  para (1.1.7) y  $x_B(t, p)$  para (1.1.8) satisfacen

$$\begin{aligned} x_A(t, v) &= e^{At}v \\ &= (Id + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \dots)v \\ &= (P^{-1}P + P^{-1}(Bt)P + \frac{1}{2!}P^{-1}(Bt)^2P + \dots)v \\ &= (P^{-1}(Id + Bt + \frac{1}{2!}(Bt)^2 + \dots)P)v \\ &= P^{-1}e^{Bt}Pv \\ &= P^{-1}x_B(t, Pv). \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Por tanto, para conocer las soluciones de una ecuación basta conocer las soluciones de la otra y la matriz invertible  $P$ . Dicho de otra forma, para describir

el comportamiento de las soluciones de toda una familia de ecuaciones definidas por matrices semejantes basta con describir las soluciones de un representante de esa familia. Con ello motivamos la siguiente definición.

**Definición 1.8 (Equivalencia analítica de ecuaciones diferenciales).** Decimos que dos ecuaciones diferenciales holomorfas,  $\dot{x} = V(x)$  y  $\dot{x} = W(x)$ , definidas en abiertos  $U, U' \subset \mathbb{C}^n$ , son *analíticamente equivalentes*, si existe un biholomorfismo  $H : U \rightarrow U'$  tal que para soluciones  $x_V(t, p)$  y  $x_W(t, v)$ , dadas por el teorema de existencia y unicidad, se satisface

$$H \circ x_V(t, p) = x_W(t, H(p)). \tag{1.1.10}$$

Derivando respecto a  $t$  tenemos que la igualdad (1.1.10) es equivalente a

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)V(x) = W(H(x)). \tag{1.1.11}$$

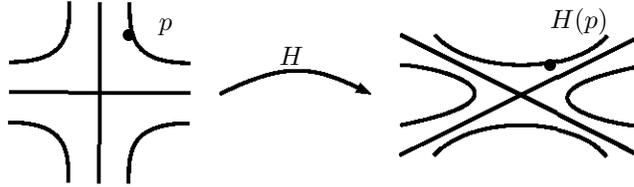


Figura 1.2:  $H$  lleva soluciones de una ecuación a soluciones de otra ecuación de forma analítica.

**Teorema 1.9 (Teorema de rectificación).** Sea  $\dot{x} = V(x)$ , una ecuación diferencial holomorfa definida en  $U \subset \mathbb{C}^2$ . Tenemos que para cada punto  $p \in U$  con  $V(p) \neq (0, 0)$  existe una vecindad  $U_p$  de  $p$  tal que la ecuación  $\dot{x} = V(x)$  es analíticamente equivalente a la ecuación  $\dot{x} = (1, 0)$ .

**Demostración.** Tomemos  $p$  tal que  $V(p) = (V_1(p), V_2(p)) \neq (0, 0)$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $V_1(p) \neq 0$ , ya que  $\dot{x} = (V_1(p), V_2(p))$  y  $\dot{x} = (V_2(p), V_1(p))$  son analíticamente equivalentes con  $H(x,y)=(y,x)$ .

Por el teorema de existencia y unicidad tenemos que existe una vecindad  $D_\epsilon = \{|t| < \epsilon, |x_j - p_j| < \epsilon, j = 1, 2\} \subset V \times U$  y una función holomorfa  $\phi(t, x) : D_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}^2$  tal que si fijamos  $v \in U$ , la curva  $\phi(t, v)$  es la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = V(x)$  que pasa por  $v$ .

Definamos  $H(x_1, x_2) = \phi(x_1, (p_1, x_2))$  en  $\{|x_1| < \epsilon, |x_2 - p_2| < \epsilon\}$ . Notemos que  $H$  satisface

$$\begin{aligned} H \circ \varphi(t, (0, x_2)) &= H(t, x_2) \\ &= \phi(t, (p_1, x_2)) \\ &= \phi(t, H(0, x_2)) \\ &= \phi(t, (0, x_2)). \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Como  $\varphi(t, (x_1, x_2)) = (x_1 + t, x_2)$  es solución de  $\dot{x} = (1, 0)$  en  $\mathbb{C}^2$  pues  $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = (1, 0)$  tenemos que  $H$  envía soluciones parametrizadas de  $\dot{x} = (1, 0)$  (que pasan por  $\{x_1 = 0\}$  en una vecindad de  $(0, p_2)$ ) a soluciones de  $\dot{x} = V(x)$  que pasan por  $\{x_1 = p_1\}$  en una vecindad de  $(p_1, p_2)$ .

Ahora veamos que  $H$  es invertible en una vecindad de  $(0, p_2)$ . Viendo que es invertible habremos terminado pues todas las soluciones de  $\dot{x} = (1, 0)$  intersecan a  $\{x_1 = 0\}$ , ya que  $\varphi(-x_1, (x_1, x_2)) = (0, x_2)$ .

Para ver que es invertible alrededor de  $(0, p_2)$  notemos que al derivar  $H$ , que es la restricción de  $\phi(t, (x_1, x_2))$  a  $\{x_1 = p_1\}$ , donde

$$\phi(t, (x_1, x_2)) = (x_1, x_2) + t \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_1, x_2) + \dots, \quad (1.1.13)$$

tenemos

$$\begin{aligned} D_{(0, p_2)} H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} & \frac{\partial \phi_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} & \frac{\partial \phi_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}_{(0, p_1, p_2)} \\ &= \begin{bmatrix} V_1(p_1, p_2) & 0 \\ V_2(p_1, p_2) & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Como  $V_1(p_1, p_2) \neq 0$  se sigue que  $DH(0, p_2)$  es invertible y por el teorema de la función inversa,  $H$  es invertible y con inversa holomorfa en una vecindad de  $(0, p_2)$ . En esta vecindad  $\dot{x} = v(X)$  y  $\dot{x} = (1, 0)$  son analíticamente equivalentes.  $\square$

## 1.2. Foliaciones

Consideremos una transformación holomorfa  $F$  definida en un abierto conexo  $U$  de  $\mathbb{C}^2$  y  $\dot{x} = F(x)$  la ecuación diferencial asociada a  $F$ . Por el teorema de existencia y unicidad  $U$  puede ser visto como la unión de curvas ajenas conexas que son soluciones de la ecuación diferencial  $\dot{x} = F(x)$ .

El teorema de rectificación nos dice que alrededor de puntos no singulares de la ecuación diferencial, las soluciones se ven como una familia de curvas (complejas) paralelas.

Este tipo de particiones dan lugar a lo que se conoce como una foliación de  $U$ .

**Definición 1.10 (Foliación estándar).** Una *foliación estándar* de dimensión  $n$  (respectivamente, de codimensión  $m$ ) de un polidisco

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : |x| < 1, |y| < 1\}$$

es una representación de  $B$  como la unión de  $n$ -discos ajenos

$$L_y = \{|x| < 1\} \times \{y\},$$

$$B = \bigsqcup_{|y| < 1} L_y.$$

**Definición 1.11 (Foliación).** Una *foliación holomorfa*  $\mathcal{F}$  en una variedad compleja  $U$  de dimensión  $n + m$  es una partición  $U = \bigsqcup_{\alpha} L_{\alpha}$  en subconjuntos ajenos  $L_{\alpha}$ , llamados hojas, que son biholomorfamente equivalentes localmente a la foliación estándar de dimensión  $n$ .

En otras palabras, para cada punto  $a \in U$  tenemos una vecindad  $B' \subset U$ ,  $a \in B'$  y un biholomorfismo  $H : B' \rightarrow B$  en el polidisco estándar  $B$  que manda las componentes conexas de las intersecciones  $L_{\alpha} \cap B'$ , a los  $n$  - discos de la foliación estándar.

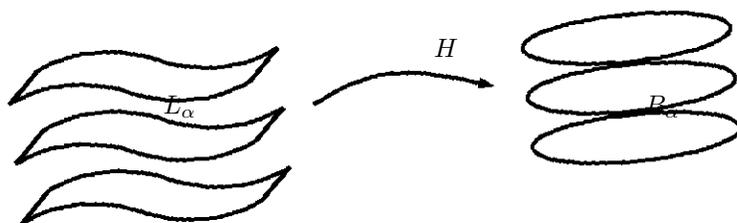


Figura 1.3: Una foliación localmente se ve como hojas paralelas

### 1.2.1. Campos vectoriales

**Definición 1.12 (Campo vectorial holomorfo).** Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$  y  $TM$  su espacio tangente. Un *campo vectorial holomorfo* es una transformación holomorfa  $V : M \rightarrow TM$  tal que  $V(x)$  es un vector tangente a  $M$  en el punto  $x$ .



Figura 1.4: Un campo vectorial es una función que lleva a  $x \in M$  a un vector en el plano tangente a  $M$  en  $x$

Veamos que un campo vectorial holomorfo nunca nulo definido en una variedad compleja de dimensión 2 (en el sentido que  $V(x)$  no es el vector cero de  $TM_x$ ) define una foliación holomorfa, pensemos en el conjunto de curvas de  $M$  que satisfacen  $\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} = V(\alpha(t))$  y tomemos un punto  $x \in M$  representado por

la carta  $(U, \varphi)$  con  $\phi(x) = 0$ . Si tomamos la carta inducida  $(TU, \phi)$  de  $TM$  por  $(U, \varphi)$  tenemos que para  $y \in U$  se cumple:

$$\phi \circ V \circ \varphi^{-1}(y) = (y, v(y)).$$

Ahora consideremos la ecuación diferencial  $\dot{y} = v(y)$  definida en un abierto  $U'$ ,  $y = (y_1, y_2)$ . Como  $V$  es nunca nulo,  $v(0) \neq 0$ . Por el teorema de rectificación tenemos que existe una vecindad de 0 donde la ecuación  $\dot{y} = v(y)$  es analíticamente equivalente a la ecuación  $\dot{y} = (1, 0)$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que desde un principio  $U'$  era esta vecindad. Notemos que en esta vecindad también tenemos el teorema de existencia y unicidad pues  $\dot{y} = (1, 0)$  cumple con que en cada punto hay una única solución que pasa por el punto.

El hecho de que  $\dot{y} = v(y)$  sea analíticamente equivalente a  $\dot{y} = (1, 0)$  nos dice que hay un biholomorfismo  $H : U' \rightarrow U'$  tal que envía las soluciones de  $\dot{y} = (1, 0)$  (las imágenes de estas soluciones forman la foliación estándar) a soluciones de  $\dot{y} = v(y)$  y que una solución  $\beta(t)$  de  $\dot{y} = v(y)$  induce, bajo  $\varphi$ , una curva  $\alpha(t) = \varphi \circ \beta(t)$  tal que  $\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} = V(\alpha(t))$ .

Finalmente consideremos  $L_x$  la unión de las imágenes de las curvas en  $M$   $\alpha : D \rightarrow M$  con  $D$  un dominio de  $\mathbb{C}$  tales que  $\frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} = V(\alpha(t))$ .  $\{L_x\}$  forma una partición ajena de  $M$  (si  $L_x \cap L_y \neq \emptyset$  entonces  $L_x = L_y$ ),  $\mathcal{F}_V$ , tal que localmente alrededor de cada punto  $x$  de  $M$  esta partición es ajena y es biholomórficamente equivalente a las hojas de la foliación estándar.

Lo anterior prueba la siguiente proposición

**Proposición 1.13.** *Sea  $F$  un campo vectorial holomorfo nunca nulo, definido en una variedad  $M$ , entonces las soluciones de la ecuación diferencial  $\dot{x} = F(x)$  constituyen una foliación no singular por curvas  $\mathcal{F}_F$  de  $M$ .*

□

Podemos preguntarnos cuándo dos campos vectoriales  $F$  y  $G$  nunca nulos definen la misma foliación  $\mathcal{F}$  de una variedad compleja  $M$  de dimensión 2. Para resolver esta pregunta consideremos una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  y la carta asociada  $(TU, \phi)$  de  $TM$ . En estas coordenadas el campo vectorial  $F$  tiene la forma

$$\phi \circ F \circ \varphi^{-1}(x) = (x, f(x)),$$

y el campo vectorial  $G$  tiene la forma

$$\phi \circ G \circ \varphi^{-1}(x) = (x, g(x)).$$

El problema se reduce a ver cuándo las soluciones de la ecuación  $\dot{x} = f(x)$  parametrizan a las curvas solución de  $\dot{x} = g(x)$  en  $U$ .

**Proposición 1.14.** *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{C}^2$ ,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}^2$  funciones holomorfas nunca nulas. Las curvas solución de  $\dot{x} = f(x)$  parametrizan a las curvas*

solución de  $\dot{x} = g(x)$  en  $U$  si y sólo si existe una función holomorfa  $p : U \rightarrow \mathbb{C}$  nunca nula tal que  $g(x) = p(x)f(x)$ .

**Demostración.** Primero supongamos que  $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_g$  las foliaciones asociadas a  $\dot{x} = f(x)$  y  $\dot{x} = g(x)$  respectivamente. Tenemos que para cada  $x \in U$ ,  $f(x)$  es vector tangente a la hoja que pasa por  $p$ , de esta forma  $f(x)$  y  $g(x)$  son colineales y por consiguiente existe una función complejo valuada  $p : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $g = pf$ . Para ver que esta función es holomorfa, tomemos  $x \in U$ , como  $f(x) \neq 0$  entonces  $f_i(x) \neq 0$  para  $i = 1$  o  $i = 2$ , y de esta forma  $p = \frac{g_i}{f_i}$  en una vecindad de  $x$ , lo que implica que  $p$  es holomorfa y nunca nula.

Para el regreso, supongamos que  $g = pf$  con  $p : U \rightarrow \mathbb{C}$  nunca nula. Para  $\varphi(t) : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow U$  solución de  $\dot{x} = g(x)$  tenemos que la composición  $p \circ \varphi(t)$  es una función holomorfa nunca nula de una variable, por tanto podemos considerar una función holomorfa  $s(t)$  que satisfaga  $s'(t) = p \circ \varphi(t)$ . Por el teorema de la función inversa tenemos que  $s(t)$  es invertible en una vecindad de 0. Sea  $r(t)$  la inversa holomorfa de  $s(t)$  en una vecindad de 0. Veamos que  $\phi(t) = \varphi(r(t))$  es solución de  $\dot{x} = f(x)$ . En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(r(t))}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(r(t)) \frac{\partial r(t)}{\partial t} \\ &= g(\varphi(r(t))) \frac{\partial r(t)}{\partial t} \\ &= f(\varphi(r(t))) p(\varphi(r(t))) \frac{\partial r(t)}{\partial t} \\ &= f(\varphi(r(t))) \frac{\partial s \circ r(t)}{\partial t} \\ &= f(\varphi(r(t))). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

De esta forma,  $\phi(t) = \varphi(r(t))$  cumple que  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = f(\phi(t))$ , y por tanto las soluciones de  $\dot{x} = g(x)$  parametrizan a las curvas solución de  $\dot{x} = f(x)$ .  $\square$

**Definición 1.15.** Dos campos vectoriales holomorfos

$$\begin{aligned} G : M &\rightarrow TM \quad y \\ F : N &\rightarrow TM, \end{aligned}$$

con  $M$  y  $N$  variedades complejas de la misma dimensión, se dicen *analíticamente equivalentes* si existe una transformación biholomorfa  $H : M \rightarrow N$  tal que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)(G(x)) = F(H(x)). \tag{1.2.2}$$

**Definición 1.16.** Dos foliaciones holomorfas  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  definidas respectivamente en las variedades complejas  $M$  y  $M'$  se dicen *analíticamente equivalentes* si existe un biholomorfismo  $H : M \rightarrow M'$  que transforma las hojas de  $\mathcal{F}$  en hojas de  $\mathcal{F}'$ .

**Definición 1.17 (Foliación singular).** Una *foliación holomorfa singular* en un dominio  $U$  (o una variedad compleja) es una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  cuyas hojas 1-dimensionales están en el complemento  $U \setminus \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es un conjunto analítico de codimensión mayor o igual que 2, llamado el conjunto de singularidades de  $\mathcal{F}$ .

Asumiremos usualmente que  $\Sigma$  es maximal, en el sentido de que la foliación no puede ser extendida analíticamente en algún abierto que contenga propiamente a  $U \setminus \Sigma$ .

**Proposición 1.18.** *Consideremos  $F \in \mathcal{D}(M)$  y  $G \in \mathcal{D}(M')$  dos campos vectoriales holomorfos nunca nulos en  $M, M'$  respectivamente. Tenemos las siguientes afirmaciones:*

a) *Si  $F$  y  $G$  son analíticamente equivalentes entonces  $F$  y  $G$  generan 2 foliaciones  $\mathcal{F}_F, \mathcal{F}_G$  analíticamente equivalentes.*

b) *Si las foliaciones  $\mathcal{F}_F$  y  $\mathcal{F}_G$  que generan son analíticamente equivalentes por un biholomorfismo  $H : M \rightarrow M'$ , entonces existe una función holomorfa nunca nula  $\rho \in \mathcal{O}(U)$  tal que*

$$p(x) \frac{\partial H}{\partial x}(F(x)) = G(H(x)). \quad (1.2.3)$$

**Demostración.** Se sigue de la definición de equivalencia analítica y de la proposición 1.14.  $\square$

**Definición 1.19 (Singularidad).** Consideremos  $M$  una variedad compleja y  $F : M \rightarrow TM$  un campo vectorial holomorfo. Un punto  $p \in M$  es un punto singular (singularidad) de un campo vectorial  $F$  si  $F(p)$  es el vector 0 en  $TM_p$ .

Al conjunto de puntos singulares lo denotamos por  $\Sigma_F$  o  $\Sigma$  cuando queda implícito quién es el campo vectorial.

Un campo vectorial holomorfo  $F \in \mathcal{D}(U)$  define una foliación holomorfa no singular en  $U \setminus \Sigma_F = \{p \in U | F(p) \neq 0\}$ . El conjunto de singularidades  $\Sigma_F$  puede ser un subconjunto analítico arbitrario de  $U$ . Sin embargo la foliación puede extenderse de  $U$  a un subconjunto abierto más grande conteniendo una parte de  $\Sigma$  en el siguiente sentido: si  $U$  y  $U'$  son dos dominios,  $U \subset U'$ , y  $\mathcal{F}'$  es una foliación en  $U'$ , entonces  $\mathcal{F}'$  puede ser restringida en  $U$ . Las hojas de esta nueva foliación son las componentes conexas de las intersecciones  $L'_\alpha \cap U$  para todas las hojas  $L'_\alpha \in \mathcal{F}'$ .

**Teorema 1.20.** *Sea  $U$  un abierto conexo en  $\mathbb{C}^n$  y  $F \in \mathcal{D}(U)$  un campo vectorial holomorfo, no idénticamente cero, con conjunto de singularidades  $\Sigma \in U$ .*

*Entonces existe un subconjunto analítico  $\Sigma' \subset \Sigma$  de dimensión compleja mayor o igual que 2 en  $U$  y una foliación  $\mathcal{F}'$  de  $U \setminus \Sigma'$  cuya restricción en  $U \setminus \Sigma$  coincide con la foliación generada por el campo vectorial inicial  $F$ .*

**Demostración.** Ver [[IY], Págs. 22-23].  $\square$

Gracias a este teorema podemos asumir que  $\Sigma_F$  tiene codimensión mayor o igual a 2; en particular, podemos asumir que las singularidades de foliaciones holomorfas en abiertos de  $\mathbb{C}^2$  son puntos aislados.

**Teorema 1.21.** *Sea  $\Sigma \subset \mathbb{C}^n$  un subconjunto analítico de codimensión mayor o igual que dos y  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa no singular 1-dimensional de  $U \setminus \Sigma$  que no se extiende a ninguna parte de  $\Sigma$ . Entonces cerca del punto  $a \in \Sigma$  la foliación  $\mathcal{F}$  es generada por un campo vectorial holomorfo  $F$  con conjunto de singularidades  $\Sigma$ .*

**Demostración.** Ver [[GM-O], Págs. 10-12].  $\square$

**Definición 1.22 (Equivalencia orbital de campos vectoriales).** Dos campos vectoriales holomorfos  $F \in \mathcal{D}(U)$ ,  $F' \in \mathcal{D}(U')$  con conjuntos de singularidades  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  de codimensión mayor o igual que 2 son *orbitalmente holomorfamente equivalentes* si las foliaciones singulares  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$  que generan son holomorfamente equivalentes, i.e., si existe un biholomorfismo  $H : U \rightarrow U'$  que transforma  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ , es biholomorfa fuera de  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  y transforma las hojas de  $\mathcal{F}$  en las hojas de  $\mathcal{F}'$ .

### 1.2.2. Foliationes generadas por formas holomorfas

Sea  $F = F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y}$  un campo vectorial holomorfo definido en un abierto  $U$  de  $\mathbb{C}^2$  y consideremos la 1-forma  $\omega = F_2 dx - F_1 dy$ . Veamos que el campo vectorial  $F$  anula a  $\omega$  en el siguiente sentido.

Para un punto  $x$  tal que  $\omega_x \neq 0$  y  $(\eta, \mu) \in T_x M \setminus \{0\}$  tenemos

$$\begin{aligned} \omega_x(\eta, \mu) &= F_2(x)dx(\eta, \mu) - F_1(x)dy(\eta, \mu) \\ &= F_2(x)\eta - F_1(x)\mu. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Así,  $\omega_x(\eta, \mu) = 0$  si y sólo si  $F_2(x)\eta - F_1(x)\mu = 0$ ; esto pasa cuando  $\mu = cF_2(x)$  y  $\eta = cF_1(x)$  para cualquier valor de  $c$  complejo.

Como todos los campos vectoriales  $pF$  con  $p : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa nunca nula generan la misma foliación  $\mathcal{F}$ , podemos hablar de la foliación generada por la ecuación  $\{\omega = 0\}$  como la foliación generada por  $F$ ,  $\mathcal{F}_F$ . A la ecuación  $\{\omega = 0\}$  se le conoce como la ecuación de Pfaff.

Una de las ventajas de pensar en foliaciones como objetos geométricos generados localmente por formas holomorfas es que, dada una transformación holomorfa  $H : M \rightarrow N$  entre dos variedades complejas  $M$  y  $N$ , tenemos el operador  $H^*$  que envía formas en  $N$  a formas en  $M$ .

**Definición 1.23.** Consideremos  $H : M \rightarrow N$ ,  $M$  y  $N$  dos variedades complejas y  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa en  $N$  definida por la ecuación  $\omega = 0$  con  $\omega$  una

1-forma holomorfa en  $N$ .

Definimos la *foliación inducida* por  $\mathcal{F}$  a través de  $H$ ,  $H^*(\mathcal{F})$ , como la foliación definida por la ecuación  $H^*\omega = 0$ .

**Definición 1.24.** Sea  $\omega = fdx + gdy$  una 1-forma holomorfa definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Decimos que  $\omega$  tiene una *singularidad aislada de orden  $n$*  en el origen,  $ord_0\omega$  si al momento de escribir a  $f$  y  $g$  como suma de polinomios homogéneos se tiene que

$$\omega = fdx + gdy = (f_n + f_{n+1} + \cdots)dx + (g_n + g_{n+1} + \cdots)dy, \quad (1.2.5)$$

donde los polinomios  $f_n, g_n$  son los primeros polinomios homogéneos de menor grado  $n$  que no se anulan idénticamente  $f_n dx + g_n dy \neq 0$ .

**Definición 1.25.** El *orden de una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$*  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  en 0,  $ord_0\mathcal{F}$  está definido como el orden de la 1-forma holomorfa  $\omega$  que define a  $\mathcal{F}$  en una vecindad de 0

$$ord_0\mathcal{F} := ord_0\omega.$$

El orden también puede ser definido como el orden del campo vectorial holomorfo que define a  $\mathcal{F}$  localmente. Éste está bien definido pues si dos campos vectoriales definen a la misma foliación, entonces hay una transformación nula tal que un campo es múltiplo del otro por tal transformación.

**Proposición 1.26.** Si  $\mathcal{F}$  es analíticamente equivalente a  $\mathcal{F}'$  entonces

$$ord_0(\mathcal{F}) = ord_0(\mathcal{F}').$$

**Demostración.** Supongamos que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son dos foliaciones singulares en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , con 0 una singularidad aislada, analíticamente equivalentes. Sea  $\{\omega = 0\}$  la ecuación de Pfaff que define a  $\mathcal{F}$ . Como  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son analíticamente equivalentes, tenemos que existe una transformación biholomorfa  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\{H^*\omega = 0\}$  define a  $\mathcal{G}$ . Al ser  $H$  invertible se tiene que

$$\begin{aligned} ord_0(\mathcal{F}) &= ord_0\omega \\ &= ord_0H^*\omega \\ &= ord_0(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

□

### 1.2.3. Holonomía

**Definición 1.27.** Una *sección transversal* (parametrizada) a la hoja  $L$  de una foliación  $\mathcal{F}$  de codimensión  $m$  en  $U$  en un punto  $a \in U$  es una transformación holomorfa  $\tau : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (U, a)$  transversal a  $L$ .

Identificamos a la sección transversal con la imagen de la transformación  $\tau$ .

Si  $\mathcal{F}$  es la foliación estándar y  $\tau, \tau'$  cualesquiera dos secciones transversales en puntos  $a, a'$  de la hoja, digamos  $L_0 = \{y = 0\}$ , entonces cualquier otra hoja  $L_\alpha$ , suficientemente cercana, interseca a cada sección transversal exactamente una vez. Esto define de manera única una transformación  $\Delta_{\tau, \tau'} : (\tau, a) \rightarrow (\tau', a')$  tal que a cada punto  $b \in (\tau, a)$  asocia el punto  $b'$  que esté en la misma hoja que  $b$  y en  $(\tau', a')$ . Esta transformación es biholomorfa; más aún, viendo  $\tau, \tau'$  definidos por sus parametrizaciones,  $\Delta_{\tau, \tau'}$  puede ser visto como una transformación en el germen de transformaciones holomorfas en  $Diff(\mathbb{C}, 0)$ .

Por construcción, la transformación de correspondencia satisface

$$\Delta_{\tau, \tau''} = \Delta_{\tau', \tau''} \circ \Delta_{\tau, \tau'} \quad (1.2.6)$$

para cualesquiera 3 secciones transversales lo suficientemente cercanas.

Ahora consideremos una foliación  $\mathcal{F}$  y una hoja  $L$ , la transformación anterior se puede extender no sólo a secciones transversales  $\tau, \tau'$  en puntos suficiente cercanos, si no también a caminos  $\beta : [0, 1] \rightarrow L$  que conecten a  $a$  con  $a'$ ,  $\beta(0) = a$ ,  $\beta(1) = a'$ .

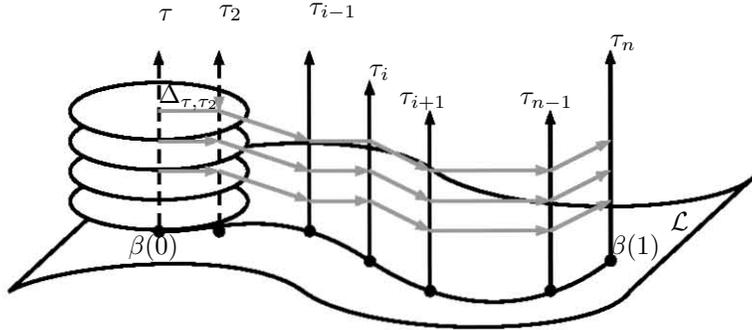


Figura 1.5: Transformación de holonomía

Como  $[0, 1]$  es compacto,  $\beta([0, 1])$  es compacto. Consideremos una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i=1}^n$  tal que  $\mathcal{F}$  es analíticamente equivalente a la foliación estándar con  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$  y tomemos  $a = a_1 \in U_1$ ,  $a_2 \in U_1 \cap U_2 \cap \beta$ ,  $a_3 \in U_2 \cap U_3 \cap \beta$ , ...,  $a_n = a' \in U_n$ , tomamos transversales  $\tau_i$  que pasen por  $a_i$  para construir  $\Delta_{\tau_i, \tau_{i+1}}$ . Definimos

$$\Delta_\beta = \Delta_{\tau_{n-1}, \tau_n} \circ \Delta_{\tau_{n-2}, \tau_{n-1}} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_1, \tau_2}. \quad (1.2.7)$$

La construcción de  $\Delta_\beta$  no depende de la elección de las transversales  $\tau_i$  gracias a la ecuación (1.2.6).

Más aún  $\Delta_\beta$  depende sólo de la clase de homotopía de  $\beta$  en el siguiente sentido:

**Proposición 1.28.** Si  $\beta, \beta' : [0, 1] \rightarrow L$  son homotópicas en  $L$ , entonces se cumple  $\Delta_\beta = \Delta_{\beta'}$ .

**Demostración.** Basta probar que para dos curvas  $\beta, \beta' : [0, 1] \rightarrow L$ , que satisfagan  $\beta(0) = \beta'(0)$ ,  $\beta(1) = \beta'(1)$  lo suficientemente cercanas, se tiene  $\Delta_\beta = \Delta_{\beta'}$ . Observamos que si  $\beta$  y  $\beta'$  son homotópicas podemos encontrar una sucesión de curvas  $\beta_0 = \beta$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_n = \beta'$  tan cercanas como queramos (gracias a la homotopía) que conecte a  $\beta$  con  $\beta'$ .

Tomemos  $\tau_0 = \tau'_0$  transversal a  $\beta(0)$ ,  $\tau_k$  transversal a  $\beta(1)$ ,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}$  transversales a la foliación que pasen por  $\beta$  y  $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{k-1}$  transversales a la foliación que pasen por  $\beta'$  tales que

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \Delta_{\tau_{k-1}, \tau_k} \circ \Delta_{\tau_{k-2}, \tau_{k-1}} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_0, \tau_1} \\ \Delta_{\beta'} &= \Delta_{\tau'_{k-1}, \tau_k} \circ \Delta_{\tau'_{k-2}, \tau'_{k-1}} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_0, \tau'_1}\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

y sean lo suficientemente cercanas para que se satisfagan las igualdades

$$\begin{aligned}\Delta_{\tau_i, \tau_{i+1}} &= \Delta_{\tau'_i, \tau_{i+1}} \circ \Delta_{\tau_i, \tau'_i} & i = 1, \dots, k-1 \\ \Delta_{\tau'_i, \tau'_{i+1}} &= \Delta_{\tau_{i+1}, \tau'_{i+1}} \circ \Delta_{\tau'_i, \tau_{i+1}} & i = 1, \dots, k-1\end{aligned}\quad (1.2.9)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\Delta_\beta &= \Delta_{\tau_{k-1}, \tau_k} \circ \Delta_{\tau_{k-2}, \tau_{k-1}} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_1, \tau_2} \circ \Delta_{\tau_0, \tau_1} \\ &= (\Delta_{\tau'_{k-1}, \tau_k} \circ \Delta_{\tau_{k-1}, \tau'_{k-1}}) \circ (\Delta_{\tau'_{k-2}, \tau_{k-1}} \circ \Delta_{\tau_{k-1}, \tau'_{k-1}}) \\ &\quad \circ \dots \circ (\Delta_{\tau'_0, \tau_1} \circ \Delta_{\tau_0, \tau'_0}) \\ &= \Delta_{\tau'_{k-1}, \tau_k} \circ (\Delta_{\tau_{k-1}, \tau'_{k-1}} \circ \Delta_{\tau'_{k-2}, \tau_{k-1}}) \\ &\quad \circ \dots \circ (\Delta_{\tau_1, \tau'_1} \circ \Delta_{\tau'_0, \tau_1}) \circ \Delta_{\tau_0, \tau'_0} \\ &= \Delta_{\tau'_{k-1}, \tau_k} \circ \Delta_{\tau'_{k-2}, \tau'_{k-1}} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_0, \tau'_1} \circ \Delta_{\tau_0, \tau'_0} \\ &= \Delta_{\beta'}.\end{aligned}\quad (1.2.10)$$

□

**Observación 1.29.** Para  $\beta, \gamma : [0, 1] \rightarrow L$  con  $\beta(1) = \gamma(0)$  se tiene que  $\beta * \gamma$  con

$$\beta * \gamma(t) = \begin{cases} \beta(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

se tiene

$$\Delta_{\beta * \gamma} = \Delta_\gamma \circ \Delta_\beta. \quad (1.2.11)$$

**Definición 1.30.** Dada  $L$  una hoja de una foliación  $\mathcal{F}$  y  $a$  un punto en  $L$ , definimos la *transformación de holonomía*  $\Delta_\gamma : (\tau, a) \rightarrow (\tau, a)$  como la transformación holomorfa de correspondencia asociada al camino cerrado  $\gamma \in \pi_1(L, a)$ .

El *grupo de holonomía* de la foliación  $\mathcal{F}$  a lo largo de la hoja  $L \in \mathcal{F}$  es la imagen del grupo fundamental  $\pi_1(L, a)$  en el grupo de gérmenes de transformaciones holomorfas en sí mismas  $\text{Diff}(\tau, a)$ .

**Proposición 1.31.** Sean  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$  dos foliaciones holomorfas conjugadas por un biholomorfismo  $H$ . Sea  $L$  una hoja de  $\mathcal{F}$  y sea  $L' = H(L)$  la hoja correspondiente de  $\mathcal{F}'$ , entonces para cualquier elección de puntos  $a \in L$ ,  $a' \in L'$  y las correspondientes secciones transversales  $\tau$ ,  $\tau'$ , los grupos de holonomía correspondientes  $G \subset \text{Diff}(\tau, a)$  y  $G' \subset \text{Diff}(\tau', a')$  son analíticamente conjugados: existe un germen de una transformación holomorfa  $h : (\tau, a) \rightarrow (\tau', a')$ , tal que  $h$  conjuga a cada elemento de  $G$  con algún elemento  $g' \in G'$  y respeta la operación de grupo,  $h \circ g \circ h^{-1} \in G'$ .

**Demostración.** Sea  $\tau$  una sección transversal a  $L$  y  $a$  en  $\tau' = H(\tau)$ . Definimos  $h = H|_{\tau}$ . La función  $h$  así definida realiza la conjugación requerida entre  $G$  y  $G'$ .

Cualquier otra elección de  $a'$  y  $\tau'$  resulta en reemplazar  $G'$  con un grupo holomorfaamente conjugado.  $\square$

**Definición 1.32.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa con conjunto de singularidades  $\Sigma$ . Una *separatriz compleja* de la foliación  $\mathcal{F}$  en un punto singular  $a \in \Sigma$  es una hoja local  $L \subset (U, a) \setminus \Sigma$  cuya cerradura  $L \cup \{a\}$  es el germen de una curva analítica.

Como las hojas son por definición conexas, la cerradura es irreducible como germen en cualquiera de sus puntos, por tanto una separatriz compleja es topológicamente un disco agujerado cerca de la singularidad, por tanto el grupo fundamental de la separatriz no es trivial y es infinitamente cíclico. La transformación que genera el grupo local de holonomía es un invariante de la foliación singular y éste no es necesariamente infinitamente cíclico. En otras palabras, cada punto singular que admite una separatriz compleja, produce al menos un germen holomorfo de una transformación que es invariante de la foliación.

**Ejemplo 1.33.** Consideremos la foliación generada por la ecuación lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

La foliación tiene una singularidad aislada en el origen y  $\{x = 0\}$ ,  $\{y = 0\}$  son sus separatrices complejas.

Consideremos la separatriz  $L_1 = \{y = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$ . El lazo  $\gamma = \{|x| = 1, y = 0\}$  parametrizado por  $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ ,  $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, 0)$  genera a  $\pi_1(L_1)$ . Escogamos el hiperplano afín  $\tau = \{x = 1\} \subset \mathbb{C}^2$  como la sección transversal a  $L_1$  en el punto  $(1, 0)$ .

La solución de (1.33) que pasa por el punto  $(1, b) \in \tau$  está dada por

$$x_b(t) = (e^{\lambda_1 t}, b e^{\lambda_2 t}) \tag{1.2.13}$$

Notemos que para  $b = 0$  tenemos  $x_0(\frac{2\pi i}{\lambda_1} t) = \gamma(t)$  para  $t \in [0, 1]$ , de esta forma tenemos  $\Delta_\gamma : (\tau, (1, 0)) \rightarrow (\tau, (1, 0))$  (aquí  $(\tau, (1, 0))$  denota la transversal local

basada en el punto  $(0, 1)$ )

$$\Delta_\gamma((1, b)) = (1, be^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i}), \quad (1.2.14)$$

que podemos ver como transformación lineal de  $(\mathbb{C}, 0)$  a  $(\mathbb{C}, 0)$ ,  $\Delta_\gamma(b) = be^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} 2\pi i}$ .

El grupo de holonomía de  $L_1$  está generado por la función  $\Delta_\gamma$ . Para ésta se satisface

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma^n(b) &= \underbrace{e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdots e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}_n b \\ &= \exp\left(\underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_n\right) b \\ &= e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} n} b. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

De esta forma el grupo de holonomía queda determinado por el cociente  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ . Si  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  es irracional, el grupo de holonomía es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ; si es racional  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p}{q}$  con  $p$  y  $q$  primos relativos, entonces el grupo de holonomía es isomorfo a  $\mathbb{Z}_q$ .

El teorema de Hadamard-Perron, enunciado a continuación nos da un criterio para asegurar la existencia de separatrices a partir de la parte lineal del campo vectorial.

**Definición 1.34.** Sea  $V$  un campo vectorial holomorfo definido en una variedad  $M$ . Decimos que una subvariedad  $W \subset M$  es *invariante* para el campo vectorial  $V$  si para cada  $x \in W$ , el vector  $V(x)$  es tangente a  $W$ .

**Teorema 1.35 (de Hadamard-Perron).** *Sea  $V(x)$  un campo vectorial holomorfo en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  con parte lineal  $Ax$ , tal que  $Ax$  tiene dos subespacios invariantes  $L_1, L_2$  transversales. Si el conjunto de valores propios de  $A$  restringido a  $L_1$  puede ser separado por una línea real que pasa por el origen de  $\mathbb{C}$  del conjunto de valores propios de  $A$  restringido a  $L_2$ , entonces el campo vectorial tiene dos subvariedades invariantes  $W_1, W_2$  tangentes a los subespacios  $L_1, L_2$  respectivamente.*

**Demostración.** Ver [[IY], Págs. 106-109]. □

**Observación 1.36.** Para  $n = 2$ , consideremos el campo vectorial holomorfo  $V(x) = Ax + \cdots$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ . Si la parte lineal  $Ax$  tiene dos valores propios distintos,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , el teorema de Hadamard-Perron nos asegura la existencia de dos separatrices transversales de  $V(x)$ .

### 1.3. Equivalencia formal

A cualquier función vectorial formal  $F = (F_1, \dots, F_n)$  ( $n$ -tupla de elementos en  $\mathbb{C}[[x]]$ ) podemos asociarle una derivación  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial}{\partial x_j} \in \text{Der}\mathbb{C}[[x]]$  del

álgebra  $\mathbb{C}[[x]]$ ; esto es, una aplicación  $\mathbb{C}$  - lineal que satisfaga la regla de Leibnitz

$$\mathbf{F} : \mathbb{C}[[x]] \rightarrow \mathbb{C}[[x]] \quad \mathbf{F}(gh) = g(\mathbf{F}f) + h(\mathbf{F}g). \quad (1.3.1)$$

Por otro lado, cualquier derivación  $\mathbf{F} \in \text{Der}\mathbb{C}[[x]]$  es de la forma  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n F_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  con las componentes  $F_j = \mathbf{F}x_j$ . Por campos vectoriales formales nos referimos a ambas realizaciones,  $F \in \mathbb{C}[[x]]^n$  o  $\mathbf{F} \in \text{Der}\mathbb{C}[[x]]$ .

**Definición 1.37.** *Decimos que el campo vectorial formal  $F$ , tiene una singularidad (en el origen), si todas las series satisfacen  $F_j(0) = 0, j = 1, \dots, n$ . En otras palabras que satisfagan  $F_j \in \mathfrak{m}$ , donde  $\mathfrak{m}$  es el ideal maximal de  $\mathbb{C}[[x]]$ .*

**Definición 1.38.** *Dos campos vectoriales formales  $F, F'$  son formalmente equivalentes, si existe una transformación formal invertible  $H$  tal que se satisfaga la identidad*

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)F(x) = F'(H(x)) \quad (1.3.2)$$

en el nivel de series formales.

Notemos que dos campos vectoriales holomorfos analíticamente equivalentes son formalmente equivalentes por definición y por ello cualquier invariante formal será un invariante holomorfo.

El regreso en general no es cierto, si tenemos campos vectoriales formalmente equivalentes, no necesariamente serán analíticamente equivalentes pues podemos perder la convergencia.

**Proposición 1.39.** *Dos campos vectoriales formales*

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax + \dots, \\ \tilde{F}(x) &= Bx + \dots \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

(con los puntos representando términos no lineales) formalmente equivalentes satisfacen que  $A$  y  $B$  son matrices similares (existe una matriz invertible  $P$  tal que  $A = P^{-1}BP$ ).

Por tanto los valores propios de la matriz de linealización son un invariante de la equivalencia formal.

**Demostración.** Sea  $H(x) = Px + \dots$  la transformación formal invertible  $H$  tal que se satisfaga la identidad 1.38. Considerando sólo los términos lineales tenemos

$$\begin{aligned} (P + \dots)(Ax + \dots) &= B(Px + \dots) + \dots \\ PAx + \dots &= BPx + \dots \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Por tanto  $PA = BP$  y como  $H$  es invertible tenemos que  $P$  es invertible y por tanto  $A = P^{-1}BP$ .  $\square$

La clasificación formal de campos vectoriales formales depende principalmente de propiedades de la matriz de linealización  $(\frac{\partial F}{\partial x})(0)$  cuando es no cero.

**Definición 1.40.** Sea  $F = (F_1, F_2)$  un campo vectorial formal (u holomorfo definido en una vecindad de  $a$ ) tal que  $a$  es una singularidad aislada.

La singularidad  $a$  es *elemental* si la matriz de linealización  $(\frac{\partial F}{\partial(x,y)})(a)$  tiene al menos un valor propio distinto de 0

Decimos que una singularidad elemental es un *nodo resonante* si el cociente de sus valores propios es un número natural o el inverso de un número natural.

La singularidad es una *silla resonante*, si ambos valores propios son reales y su cociente es un número racional negativo.

La singularidad es *elíptica* si  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega > 0$ .

Finalmente, la singularidad es una *silla-nodo*, si tiene exactamente un valor propio 0.

**Definición 1.41.** Una  $n$ -ada de números complejos  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  es llamada *resonante* si existen enteros no negativos  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  tales que  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 2$  y la identidad de resonancia ocurre

$$\lambda_j = \langle \alpha, \lambda \rangle \quad (1.3.5)$$

Con  $\langle \alpha, \lambda \rangle = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n$ .

Una matriz cuadrada es resonante, si la colección de valores propios (con repetición si son múltiples) es resonante. Un campo vectorial  $F = (F_1, \dots, F_n)$  en el origen es resonante si su matriz de linealización  $(\frac{\partial F}{\partial x})(0)$  es resonante.

**Teorema 1.42 (Teorema de linealización de Poincaré).** *Un campo vectorial formal no resonante  $F(x) = Ax + \dots$  es formalmente equivalente a su linealización  $F'(x) = Ax$ .*

**Demostración.** Ver [[IY], Págs. 41-44]. □

**Definición 1.43.** Un *vector monomial resonante* correspondiente a la resonancia  $\lambda_k - \langle \lambda, \alpha \rangle = 0$  es el campo vectorial monomial  $F_{k,\alpha} = x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k}$ .

**Teorema 1.44 (Teorema de Poincaré-Dulac).** *Un campo vectorial es formalmente equivalente a un campo vectorial con parte lineal en su forma canónica de Jordan y sólo monomios resonantes en su parte no lineal.*

**Demostración.** Ver [[IY], Págs. 44-45]. □

El teorema de Poincaré-Dulac nos aporta información sobre un campo vectorial formal cuando algún valor propio de la parte lineal sea distinto de 0, en cambio cuando todos los valores propios de la parte lineal son 0 todos los monomios serán resonantes. Si le pedimos una condición extra a los valores propios tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.45 (Teorema de normalización de Poincaré).** *Un campo vectorial  $F$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con parte lineal tal que  $0$  no es combinación convexa de los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  de la parte lineal de  $F$  es analíticamente equivalente a el campo vectorial dado por el Teorema de Poincaré-Dulac.*

**Demostración.** Ver [[IY], Págs. 62-69]. □

En  $\mathbb{C}^2$  tenemos que los campos vectoriales con parte lineal nilpotente distinta de  $0$  tienen una forma particular.

**Teorema 1.46.** *Un campo vectorial formal definido en  $\mathbb{C}^2$  con parte lineal  $J = y \frac{\partial}{\partial x}$  es formalmente equivalente al campo vectorial*

$$J + [ya(x) + b(x)] \frac{\partial}{\partial y}, \quad a(x), b(x) \in \mathbb{C}[[x]]. \quad (1.3.6)$$

Donde el orden de  $a(x)$  y  $b(x)$  es al menos uno y dos respectivamente.

**Demostración.** Ver [[IY], Pág. 54]. □

El análisis de campos vectoriales sin parte lineal es posible gracias a la técnica de explosión de singularidades.



## Capítulo 2

# Resolución de singularidades

Un análisis razonable de singularidades es posible bajo la hipótesis de que la parte lineal del campo vectorial que los define no es muy degenerada. Los casos degenerados pueden ser tratados con transformaciones que alteren la parte lineal del campo vectorial. La idea en estos últimos, es considerar una transformación holomorfa  $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  de una variedad compleja  $M$  que transforme una curva compleja  $D \subset M$  en el punto  $0 \in \mathbb{C}^2$ , mientras que sea un biholomorfismo entre  $M \setminus D$  y  $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ . Una transformación  $\pi$  así definida nos permite jalar objetos locales (foliaciones, funciones, curvas,  $1$ -formas, etc.) definidos en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  a objetos definidos en  $M$ . Estas transformaciones son llamadas desingularizaciones o explosiones.

### 2.1. Explosión simple

Construyamos una 2-variedad holomorfa  $M$  y una transformación holomorfa  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{C}^2$  tal que

- i) La preimagen del origen sea una curva holomorfa irreducible y compacta  $S \subset M$  y
- ii) La transformación  $\sigma$  entre  $M \setminus S$  y  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  sea biholomorfa.

Consideremos la transformación canónica de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  a la línea proyectiva  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  que asocia a cada punto  $(x, y) \neq (0, 0)$  diferente de el origen, la línea  $\{(tx, ty) : t \in \mathbb{C}\}$  que pasa por este punto.

La gráfica de esta transformación es una superficie 2-dimensional en la 3-variedad  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . La gráfica no es cerrada; para construir la cerradura, tenemos que agregar la curva excepcional  $\mathbb{E} = \{(0, 0)\} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . El resultado es una superficie no singular a la que denotaremos por  $\mathbb{M}$ ; por construcción

está encajada en el espacio 3-dimensional complejo  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  y carga la curva compacta  $\mathbb{E} \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^2$  en ella.

La proyección  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^2$  restringida a  $\mathbb{M}$  se convierte en una transformación

$$\sigma : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \sigma(\mathbb{E}) = \{0\} \in \mathbb{C}^2 \quad (2.1.1)$$

que por construcción es inyectiva entre  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  y  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ .

**Definición 2.1.** La transformación  $\sigma : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$  es llamada la *transformación monoidal (estándar)*. La curva analítica  $\mathbb{E} \subset \mathbb{M}$  será referida como el *divisor excepcional (estándar)*. La transformación inversa  $\sigma^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  es llamada la *transformación explosión*, o simplemente la *explosión*.

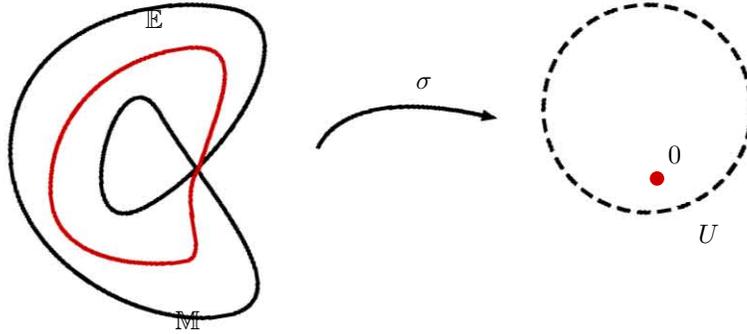


Figura 2.1: La transformación monoidal canónica

Veamos que  $\mathbb{M}$  es una variedad no singular. Sean  $z(x, y) = \frac{y}{x}$ ,  $w(x, y) = \frac{x}{y}$  dos cartas afines en la esfera de Riemann  $\mathbb{P}^1$ . Por construcción,  $w = \frac{1}{z}$ .

Estas cartas inducen dos cartas afines en los dominios respectivos  $V_1, V_2$  en el producto cartesiano  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ . En estas cartas la gráfica de la transformación canónica está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y - xz &= 0 & x &\neq 0, \\ x - wy &= 0 & y &\neq 0. \end{aligned}$$

Las superficies definidas por estas ecuaciones se mantienen no singulares después de la extensión a la línea  $\{x = 0, y = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ , más aún; las funciones  $(x, \frac{y}{x})$  en la carta  $V_1$  y  $(\frac{y}{x}, x)$  en la carta  $V_2$  se convierten en dos cartas de  $\mathbb{M}$  definidas en los dominios  $U_i = \mathbb{M} \cap V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Las transformaciones de transición entre estas cartas están dadas por

$$\begin{aligned} y = zx, w = \frac{1}{z} \quad z \neq 0, \\ x = wy, z = \frac{1}{w} \quad w \neq 0. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Por lo tanto  $\mathbb{M}$  es una variedad holomorfa 2 dimensional no singular.

Observamos que la transformación  $\sigma : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$  en estas cartas es polinomial y por tanto holomorfa globalmente  $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$   $i = 1, 2$  donde

$$\begin{aligned} \sigma_1(x, z) &= (x, xz), \\ \sigma_2(y, w) &= (yw, y). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

El divisor excepcional en estas cartas está dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \cap U_1 &= \{x = 0\}, \\ \mathbb{E} \cap U_2 &= \{y = 0\}. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

**Proposición 2.2.** *Sea  $M$  una superficie compleja y  $\Sigma \subset M$  un conjunto finito de puntos en ella. Entonces existe una superficie holomorfa  $M'$  y una transformación holomorfa  $\pi : M' \rightarrow M$  tal que la preimagen de cualquier punto de  $\Sigma$  es una esfera de Riemann  $\mathbb{E} = \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$  mientras que es inyectiva entre  $M' \setminus \cup_{p \in \Sigma} \mathbb{E}_p$  y  $M \setminus \Sigma$ .*

La restricción de  $\pi$  en una vecindad de cada esfera  $\mathbb{E}_p$  es equivalente a la transformación monoidal estándar  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Demostración.** Consideremos  $\{U_\alpha\}$  un atlas de cartas en  $M$ . Usando que  $M$  es Hausdorff pedimos que, para cada  $p \in \Sigma$ ,  $p$  esté en sólo una carta  $U_p \cong (\mathbb{C}^2, 0)$ .

Tenemos que  $M = \bigsqcup_\alpha U_\alpha / \sim$ . Para construir  $M'$  reemplazamos  $U_p$  con  $U'_p = (\mathbb{M}, \mathbb{E})_p$  y consideramos  $U'_\alpha = U_\alpha$  cuando la carta  $U_\alpha$  no interseca a  $\Sigma$ . La relación de equivalencia  $\sim$  induce una relación de equivalencia  $\sim'$ , todos los puntos que no están en  $\Sigma$  tienen preimágenes únicas en  $U'_\alpha$ . Por construcción  $M' = \bigsqcup_\alpha U'_\alpha / \sim'$  es una variedad.

Existen transformaciones naturales  $\pi : U'_\alpha \rightarrow U_\alpha$  que coinciden con la transformación monoidal  $\sigma$ , si  $U_\alpha \cap \Sigma \neq \emptyset$  y la identidad si  $U_\alpha \cap \Sigma = \emptyset$ . Estas transformaciones definen a la transformación  $\pi : M' \rightarrow M$  con las propiedades locales requeridas.  $\square$

La transformación  $\pi^{-1} : M \setminus \Sigma \rightarrow M'$  es llamada la explosión simple del conjunto finito de puntos  $\Sigma$ .

### 2.1.1. Explosión de curvas analíticas y puntos singulares

Intuitivamente la desingularización (explosión) de un objeto en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  será llevarlo de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  a  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  con  $\sigma^{-1}$  y luego extenderlo de forma natural en  $\mathbb{E}$ . Restringimos los objetos a  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  debido a que  $\sigma$  no es inyectiva en  $\mathbb{E}$  y esto degenerará los objetos que pasan por el 0.

**Definición 2.3 (Explosión de curvas analíticas).** La *explosión simple de una curva analítica*  $\gamma = \{f = 0\} \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  es la cerradura (en  $\mathbb{M}$ ) de la preimagen de la curva  $\gamma$  sin el cero,

$$\tilde{\gamma} = \overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})}. \quad (2.1.5)$$

**Proposición 2.4.** Sea  $\gamma$  una curva analítica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\tilde{\gamma}$  la explosión simple de la curva  $\gamma$ . Tenemos que  $\tilde{\gamma}$  es una curva analítica en  $(\mathbb{M}, \mathbb{E})$  intersecando al divisor  $\mathbb{E}$  sólo en puntos aislados. Más aún, si  $f$  es un germen de función analítica de orden  $n$  libre de cuadrados en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  que describe localmente a  $\gamma = \{f(x, y) = 0\}$ , entonces la curva  $\tilde{\gamma}$  es descrita de la siguiente forma en una vecindad del divisor excepcional:

En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$ , la curva  $\tilde{\gamma}$  es descrita en una vecindad de  $\mathbb{E}$  por los ceros de  $\frac{1}{x^n}f(x, ux)$  y en la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$ , la curva  $\tilde{\gamma}$  es descrita en una vecindad de  $\mathbb{E}$  por los ceros de  $\frac{1}{x^n}f(vy, y)$ .

**Demostración.** Consideremos la explosión simple  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Como  $\sigma^{-1}$  es un biholomorfismo fuera del origen de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , basta considerar el caso cuando  $\gamma$  cumpla la igualdad  $\gamma = \{f = 0\}$  donde  $f$  es una función holomorfa de orden  $n$  en  $0$  y libre de cuadrados, vista como germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Escribamos a  $f$  como suma de polinomios homogéneos que aparecen en la expansión en serie de potencias de  $f$  alrededor de  $0$ .

$$f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + f_{n+2}(x, y) \cdots,$$

donde  $f_m$  es el polinomio homogéneo de grado  $m$  que aparece en la expansión en series de potencias de la función holomorfa  $f$  alrededor de  $0$ .

Fuera del divisor excepcional  $\mathbb{E}$  la preimagen de  $\gamma$  sin el  $0$ ,  $\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})$  es igual a  $\sigma^{-1}(\{f = 0\}) = \{f \circ \sigma = 0\} \setminus \mathbb{E}$ .

En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  tenemos que la función holomorfa  $f \circ \sigma$  tiene la forma

$$\begin{aligned} f \circ \sigma(x, u) &= f(x, ux) \\ &= f_n(x, ux) + f_{n+1}(x, ux) + \cdots \\ &= x^n f_n(1, u) + x^{n+1} f_{n+1}(1, u) + \cdots \\ &= x^n (f_n(1, u) + x(\cdots)). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Gracias a que tenemos que la intersección del divisor excepcional  $\mathbb{E} = \{x = 0\}$  con la preimagen  $\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})$  es vacía, entonces:

$$\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\}) = \{f \circ \sigma = 0\} \setminus \mathbb{E} = \left\{ \frac{1}{x^n} f(x, ux) = 0 \right\} \setminus \mathbb{E}. \quad (2.1.7)$$

Dado que la función  $\frac{1}{x^n}f(x, ux)$  es holomorfa en una vecindad de  $\mathbb{E}$ , en particular es continua, tenemos que el conjunto  $\left\{ \frac{1}{x^n}f(x, ux) = 0 \right\}$  es cerrado y contiene a la preimagen  $\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})$ . Como consecuencia de ello tenemos

$$\overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})} \subset \left\{ \frac{1}{x^n}f(x, ux) = 0 \right\}.$$

Finalmente, como la intersección de  $\{\frac{1}{x^n}f(x, ux) = 0\}$  con el divisor excepcional  $\mathbb{E} = \{x = 0\}$  consiste de un número finito de puntos, a saber los puntos  $(0, t)$  donde  $t$  es raíz del polinomio  $f(1, t) = f_n(1, t) + 0$  (por la ecuación (2.1.6)), junto con el hecho de que una función holomorfa de dos variables no tiene ceros aislados, tenemos que  $\overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})} = \{\frac{1}{x^n}f(x, ux) = 0\}$ .

De forma análoga, en la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  tenemos que  $\overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})}$  es descrita por  $\{\frac{1}{y^n}f(vy, y) = 0\}$ .  $\square$

**Ejemplo 2.5.** Consideremos  $f(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  y sea  $\gamma = \{f = 0\}$  la unión de las dos rectas  $\{x = y\} \cup \{x = -y\}$ . Tenemos que en la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  el pull-back  $\sigma^*f = f \circ \sigma$  satisface la igualdad  $\sigma_1^*f(x, u) = f(x, ux) = x^2 - (ux)^2$ . Por tanto la explosión de  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma}$  está definida por  $\tilde{\gamma} = \{(1 - u)(1 + u) = 0\}$  en la carta  $(U_1, (x, u))$ . Esto nos dice que  $\tilde{\gamma}$  es la unión de 2 rectas paralelas que cumplen ser transversales a  $\mathbb{E} = \{x = 0\}$ .

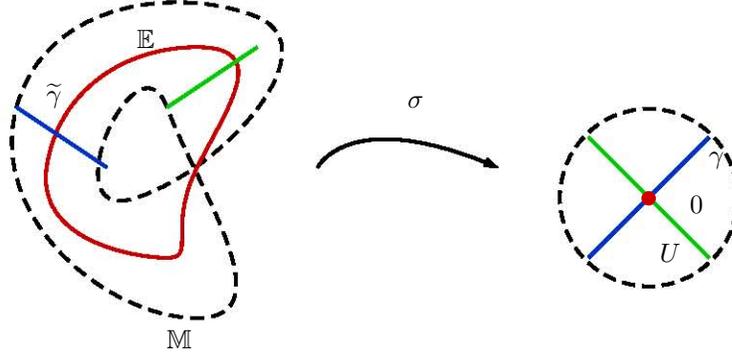


Figura 2.2: La explosión de rectas con distintas pendientes que pasan por el 0 corresponden a líneas paralelas que intersecan transversalmente al divisor excepcional.

**Observación 2.6.** Del ejemplo anterior tenemos que, aunque  $\gamma$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es conexa, la explosión  $\tilde{\gamma}$  no es conexa en general y más aún la explosión envía rectas con distintas pendientes que pasan por el origen de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  a rectas paralelas transversales al divisor excepcional.

**Proposición 2.7.** Consideremos un punto  $a \in \mathbb{E}$  y un germen de un conjunto analítico en una vecindad de  $a$ ,  $\{g = 0\}$  donde  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$  libre de cuadrados. Si la curva  $\{g = 0\}$  interseca transversalmente al divisor excepcional  $\mathbb{E}$ , entonces la proyección de  $\{g = 0\}$ ,  $\sigma(\{g = 0\})$  es el germen de un conjunto analítico en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , tal que la explosión simple de  $\gamma$  es igual a  $\{g = 0\}$ .

Más aún, si  $\{g = 0\}$  es irreducible como conjunto analítico en  $(\mathbb{M}, a)$ , entonces  $\gamma$  es irreducible como conjunto analítico en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad tomemos coordenadas  $(x, y)$  de forma que  $a = (0, 0)$  en la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  y  $g$  sea un polinomio de

Weierstrass en la variable  $u$  (ver teorema de preparación de Weierstrass A.16). En estas coordenadas la condición de que  $\mathbb{E} \cap \{g = 0\} = \{a\}$  se traduce en que  $x$  no divida al germen holomorfo  $g$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{M}, 0)$ .

Si  $g$  tiene orden  $k$  alrededor de 0 podemos escribir a  $g$  como

$$g(x, u) = u^k - a_1(x)u^{k-1} - a_2(x)u^{k-2} - \dots - a_k(x)$$

con  $a_i(0) \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{C} \langle x \rangle$ ,  $i = 1, \dots, k$  al ser un polinomio de Weierstrass.

Consideremos  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  dada por

$$f(x, y) = y^k - a_1(x)xy^{k-1} - a_2(x)x^2y^{k-2} - \dots - a_k(x)x^k.$$

Tenemos que el germen de función holomorfa  $f$  satisface que el polinomio homogéneo de grado  $k$ , que aparece en la expansión en series de potencias del germen holomorfo  $f$ , cumple  $f_k(x, y) = y^k$  y además  $f$  satisface la igualdad  $f(x, ux) = x^k g(x, u)$ .

Consideremos la curva  $\gamma = \{f = 0\}$ . Tenemos que la explosión de  $\gamma$  inducida por  $\sigma$  es descrita por la ecuación  $\sigma^*\gamma = \{\tilde{f} = 0\}$  con  $\tilde{f}$  dada por

$$\begin{aligned} f(x, ux) &= f_k(x, ux) + f_{k+1}(x, ux) + \dots \\ &= x^k(f_k(1, u) + x(\dots)) \\ &= x^k\tilde{f}(x, u). \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

De las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.8), tenemos la igualdad  $\tilde{f}(x, u) = g(x, u)$ , lo que prueba que  $\sigma^*\gamma = \{g = 0\}$  en una vecindad de 0 en  $\mathbb{M}$ .

Para la segunda parte supongamos que el germen holomorfo  $g$  es irreducible en  $\mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ . Veamos que  $f$  es irreducible en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  por contradicción, supongamos  $f = hq$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , donde  $h$  y  $q$  son germenes de funciones holomorfas de orden  $m$  y  $n$  respectivamente, no unidades. Como  $f_k(x, y) = y^k$  tenemos que  $h_m(x, y) = y^m$  y  $j_n(x, y) = y^n$  donde  $h_j$  denota al polinomio de grado  $j$  en la expansión en series de potencias de  $h$ . Consideremos  $\{\tilde{h} = 0\}$  y  $\{\tilde{q} = 0\}$  las explosiones de  $\{h = 0\}$  y  $\{q = 0\}$  respectivamente. Como  $f(x, ux) = x^k g(x, u)$  se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x^k g(x, u) &= f(x, ux) \\ &= h(x, ux)q(x, ux) \\ &= (x^m \tilde{h}(x, u))(x^n (\tilde{q}(x, u))) \\ &= x^k \tilde{h}(x, u) \tilde{q}(x, u). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g(x, u) = \tilde{h}(x, u)\tilde{q}(x, u)$ . Dado que el germen de función holomorfa  $g(x, u)$  es irreducible, entonces alguno de  $\tilde{h}$  o  $\tilde{q}$  es una unidad en  $\mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\tilde{h}$  es una unidad, de esta forma tenemos  $h_m(1, u) = c + u(\cdots)$ ,  $c \neq 0$  y por tanto  $h_m(x, y) = cx^m + (\cdots)$ , lo cual no puede pasar pues  $h_m(x, y) = y^m$ . Con esto hemos probado que  $f$  es irreducible.  $\square$

**Corolario 2.8.** *Sea  $f$  un germe de función holomorfa irreducible en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\gamma$  una curva analítica tal que  $\gamma = \{f = 0\}$  en una vecindad de 0. Tenemos que la intersección de la explosión simple de la curva  $\gamma$  en 0,  $\tilde{\gamma}$ , con el divisor excepcional  $\mathbb{E}$  consiste de un punto  $a \in \mathbb{E}$  y además  $\tilde{\gamma}$  es una curva irreducible en  $(\mathbb{M}, a)$ .*

**Demostración.** Consideremos  $\tilde{\gamma}$  la explosión simple de la curva  $\gamma$  en 0 y un punto  $a$  en la intersección de  $\tilde{\gamma}$  con el divisor excepcional  $\mathbb{E}$ . Dado que  $\tilde{\gamma}$  es una curva analítica de la proposición 2.4, tenemos que existe  $g$  germe de función analítica en  $\mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$  de forma que  $\tilde{\gamma} = \{g = 0\}$ . Consideremos  $h$  un divisor irreducible de  $g$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{M}, a)$ , en particular tenemos  $\{h = 0\} \subset \{g = 0\}$  y por tanto  $\sigma(\{h = 0\}) \subset \gamma$ . De la proposición 2.7 tenemos que como  $h$  es irreducible existe  $s$  germe de función analítica irreducible en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que

$$\sigma(\{h = 0\}) = \{s = 0\}.$$

Por tanto  $\{s = 0\} \subset \{f = 0\}$  y del lema de Study A.27 tenemos que  $s$  divide a  $f$ . Como  $f$  es irreducible tenemos que  $f = su$ , donde  $u$  es una unidad en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  y por tanto  $\{s = 0\} = \{f = 0\}$ . De la proposición 2.7 tenemos que  $\{h = 0\}$  es la explosión simple de  $\gamma$  en 0.  $\square$

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada definida por la forma holomorfa  $\omega$ . Por definición  $\mathcal{F}$  es una foliación no singular en la vecindad  $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ . La preimagen  $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$  es una foliación no singular de  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  generada por la 1-forma  $\sigma^*\omega$ , por el teorema 1.20 esta foliación puede ser extendida a una foliación holomorfa singular  $\sigma^*\mathcal{F}$  con sólo puntos singulares aislados en  $\mathbb{E}$ .

**Definición 2.9 (Explosión de foliaciones).** La *explosión (simple) de una foliación singular  $\mathcal{F}$*  de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es la foliación holomorfa singular de  $(\mathbb{M}, \mathbb{E})$  obtenida extendiendo la preimagen de la foliación  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$  en  $\mathbb{M}$ .

Si  $\pi$  es una explosión compuesta de explosiones simples definimos la explosión de  $\mathcal{F}$ ,  $\pi^*\mathcal{F}$  de forma recursiva.

**Ejemplo 2.10.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación definida por la 1-forma  $\omega = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  de  $\mathbb{M}$ , la 1-forma  $\sigma^*\omega$  está dada por

$$\begin{aligned} \sigma_1^*\omega(x, u) &= \omega(x, ux) \\ &= \lambda_1 x d(ux) - \lambda_2 (ux) dx \\ &= \lambda_1 x u dx + \lambda_1 x^2 du - \lambda_2 u x dx \\ &= x(\lambda_1 - \lambda_2) u dx + \lambda_1 x^2 du. \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $x$  para extender la forma a  $\{x = 0\}$  tenemos

$$\tilde{\omega}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)udx + \lambda_1xdu$$

Análogamente en la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  tenemos que  $\tilde{\omega}$  en las coordenadas está dada por

$$\tilde{\omega}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)vdy - \lambda_2ydu$$

Así la foliación  $\sigma^*(\mathcal{F})$  en  $\mathbb{M}$  está dada por  $\tilde{\omega}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)udx + \lambda_1xdu$  en la carta  $(U_1, (x, u))$  y por  $\tilde{\omega}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)vdy - \lambda_2ydu$  en la carta  $(U_2, (v, y))$ .

De este ejemplo observemos que tenemos dos puntos singulares en  $\mathbb{M}$  y que estos puntos singulares tienen parte lineal distinta a el punto singular inicial.

**Definición 2.11.** Un punto singular de una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es llamado *no dicrítico*, si el divisor excepcional  $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(0)$  es una separatriz de la explosión  $\sigma^*\mathcal{F}$  por la transformación simple monoïdal  $\sigma$ . Un punto es llamado *dicrítico* en el caso contrario.

Resulta que la condición de que una foliación sea dicrítica o no se puede leer con el orden de la 1-forma que la define.

**Proposición 2.12.** *La singularidad es no dicrítica si*

$$\text{ord}_0(xf + yg) = 1 + \text{ord}_0\omega \quad (2.1.9)$$

*y es dicrítica, si*

$$\text{ord}_0(xf + yg) > 1 + \text{ord}_0\omega \quad (2.1.10)$$

**Lema 2.13.** *si  $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$  una 1-forma holomorfa definidas en  $(\mathbb{C}^0)$  de orden  $n$  tenemos que en la carta  $U_1$  con coordenadas  $(x, u)$ ,  $u = \frac{x}{y}$ ,  $\sigma^*\omega$  está dado por*

$$\begin{aligned} \sigma_1^*\omega(x, u) &= \frac{1}{x} [\sigma_1^*h(x, u)dx + x^2\sigma_1^*g(x, u)du] \\ &= x^n [h_{n+1}(1, u) + x(\dots)]dx + x(g_n(1, u) + x(\dots))du \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

*y en la carta  $U_2$  con coordenadas  $(v, y)$ ,  $u = \frac{y}{x}$ ,  $\sigma^*\omega$  está dado por*

$$\begin{aligned} \sigma_2^*\omega(v, y) &= \frac{1}{y} [y^2\sigma_2^*f(v, y)dv + \sigma_1^*h(v, y)dy] \\ &= y^n [h_{n+1}(v, 1) + y(\dots)]dy + y(f_n(v, 1) + y(\dots))dv \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

con  $h(x, y) = xf(x, y) + yg(x, y)$ .

**Demostración (Del lema 2.13).** Tenemos que en la carta  $U_1$  con coordenadas  $(x, u)$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^* \omega(x, u) &= \omega(x, ux) \\
&= f(x, ux)dx + g(x, ux)d(ux) \\
&= f(x, ux)dx + g(u, ux)(udx + xdu) \\
&= [f(x, ux) + ug(x, ux)]dx + xg(u, ux)du \\
&= \frac{1}{x}[(xf(x, ux) + uxg(x, ux))dx + x^2g(u, ux)du] \\
&= \frac{1}{x}[h(x, ux)dx + x^2g(x, ux)du] \\
&= \frac{1}{x}[\sigma^* h(x, u)dx + x^2\sigma^* g(x, u)du]
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

y en la carta  $U_2$  con coordenadas  $(v, y)$

$$\begin{aligned}
\sigma_2^* \omega(v, y) &= \omega(vy, y) \\
&= f(vy, y)d(vy) + g(vy, y)dy \\
&= f(vy, y)(vdy + ydv) + g(vy, y)dy \\
&= yf(vy, y)dv + [vf(vy, y) + g(vy, y)]dy \\
&= \frac{1}{y}[y^2 f(vy, y)dv + (vyf(vy, y) + yg(vy, y))dy] \\
&= \frac{1}{y}[y^2 f(vy, y)dv + h(vy, y)dy] \\
&= \frac{1}{y}[y^2 \sigma^* f(v, y)dv + \sigma^* h(v, y)dy]
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Escribiendo a  $g$  y a  $f$  como suma de polinomios homogéneos tenemos el resultado. □

**Demostración.** [De la proposición 2.12 ] Consideremos 2 casos, cuando  $\text{ord}_0(xf + yg) = 1 + \text{ord}_0\omega$  y cuando  $\text{ord}_0(xf + yg) > 1 + \text{ord}_0\omega$ , tenemos que no puede pasar que  $\text{ord}_0(xf + yg) < 1 + \text{ord}_0\omega$  pues  $\text{ord}_0\omega = \min\{\text{ord}_0f, \text{ord}_0g\}$ .

**Caso 1:** Si  $\text{ord}_0(xf + yg) = 1 + \text{ord}_0\omega$  tenemos  $xf_n(x, y) + yg_n(x, y) \neq 0$ , del lema 2.13 tenemos que la explosión de  $\mathcal{F}$  en la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  es descrita por la ecuación de Pfaff  $\{\widetilde{\omega}_1 = 0\}$  donde

$$\widetilde{\omega}_1 = [h_{n+1}(1, z) + x(\dots)]dx + x[g_n(1, u) + x(\dots)]du \tag{2.1.15}$$

Fuera de los puntos singulares tenemos que  $\mathbb{E} = \{x = 0\}$  es una hoja local de la foliación, pues para  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{M}$  con  $\phi(t) = (0, t)$  tenemos que  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = (0, 1)$  es paralelo a  $F(\phi(t)) = (0, h_{n+1}(1, t))$ , donde  $F$  es el campo vectorial asociado a la 1-forma  $\widetilde{\omega}_1$ .

El conjunto de singularidades  $\Sigma = \text{Sin}(\sigma^*\mathcal{F})$  consiste en las raíces aisladas de la ecuación

$$\Sigma = \{x = 0, u = u_j\}, \quad h_{n+1}(1, u_j) = 0, \quad (2.1.16)$$

junto con el punto  $(0,0)$  en la carta  $U_2$  si  $\deg_u(1, u) < n + 1$ ; esto es, que el polinomio  $h_{n+1}(x, y)$  sea divisible por  $x$ . Por tanto tenemos que  $\{x = 0\} \setminus (1, u_j)$  es una hoja local de la foliación  $\sigma^*(\mathcal{F})$  en  $(\mathbb{M}, (0, u_j))$ .

En el caso donde el punto  $(0,0)$  en la carta  $U_2, (v, y), v = \frac{-x}{y}$  sea un punto singular de la foliación, de manera análoga tenemos que  $\{y = 0\} \setminus (0,0)$  es una hoja local de la foliación.

**Caso 2:** Si  $\text{ord}_0(xf + yg) > 1 + \text{ord}_0\omega$  tenemos  $xf_n(x, y) + yg_n(x, y) = 0$  y por tanto  $g_n(x, y) \neq 0$ . Del lema 2.13 tenemos que la explosión de  $\mathcal{F}$  en la carta  $(U_1, (x, u))$  es descrita por la ecuación de Pfaff  $\widetilde{\omega}_1 = 0$  con

$$\widetilde{\omega}_1 = [h_{n+2}(1, z) + x(\dots)]dx + [g_n(1, u) + x(\dots)]du. \quad (2.1.17)$$

Para los puntos  $(0, t)$  con  $g_n(1, z) \neq 0$  tenemos que la composición del campo vectorial  $F$  que describe a  $\widetilde{\omega}_1$  compuesto con la curva  $\phi(t) = (0, t)$  que parametriza al divisor excepcional  $\mathbb{E}, F(0, t) = (g_n(1, t), -h_{n+2}(1, t))$  no es paralelo a  $\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = (0, 1)$  por tanto la hoja que pasa por  $(0, t)$  es transversal a  $\{x = 0\}$ , de esta forma  $\mathbb{E}$  no puede ser separatriz local de ningún punto singular.  $\square$

**Observación 2.14.** Para el caso no dícritico tenemos de la prueba anterior que el número de singularidades de la resolución  $\widetilde{\mathcal{F}}$  de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definida por la 1-forma  $\omega = fdx + gdy$  están dadas por la forma tangente  $h_{n+1}(x, y) = xf_n(x, y) + yg_n(x, y)$ .

En efecto las singularidades en  $U_1$  están dadas por las raíces de  $h_{n+1}(1, u)$  en  $\{x = 0\}$  y las singularidades en  $U_2$  están dadas por las raíces de  $h_{n+1}(v, 1)$  en  $\{y = 0\}$ .

Más aún podemos contar singularidades elementales de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  con la función  $h_{n+1}(x, y)$  en el siguiente sentido.

**Proposición 2.15.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular no dícritica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definida por la ecuación de Pfaff con  $\omega = fdx + gdy$  una 1-forma holomorfa. Cada factor lineal  $ax + by$  sin multiplicidad del polinomio  $h_{n+1}(x, y)$  corresponde a una singularidad elemental  $u = -\frac{a}{b}$  (resp.  $v = -\frac{b}{a}$ ) de la explosión  $\widetilde{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  en 0.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad supongamos que  $y$  es un factor lineal sin multiplicidad del polinomio  $h_{n+1}(x, y)$ .

Para este caso tenemos  $h_{n+1}(1, u) = ur(u)$  con  $r(0) \neq 0$ .

Tenemos que la foliación  $\widetilde{\mathcal{F}}$  alrededor del punto  $(0,0)$  en la carta  $(U_1, (x, u)), u = \frac{y}{x}$  es escrita por la ecuación de Pfaff  $\{\widetilde{\omega}_1 = 0\}$  con  $\widetilde{\omega}_1$  la 1-forma

$$\tilde{\omega}_1 = [h_{n+1}(1, u) + x(\cdots)]dx + x[g_n(1, u) + x(\cdots)]du \quad (2.1.18)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial[h_{n+1}(1, u) + x(\cdots)]}{\partial u}(0, 0) &= ur'(u) + r(u) + x(\cdots)|_{(0,0)} \\ &= r(0) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

y

$$\frac{\partial x[g_n(1, u) + x(\cdots)]}{\partial u}(0, 0) = 0 \quad (2.1.20)$$

Se sigue que la parte lineal de el campo vectorial  $F$  asociado a  $\tilde{\mathcal{F}}$  en una vecindad de  $(0, 0)$  en la carta  $U_1$  está dado por

$$\begin{aligned} D_{(0,0)}F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial -x[g_n(1, u) + x(\cdots)]}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial -x[g_n(1, u) + x(\cdots)]}{\partial u}(0, 0) \\ \frac{\partial h_{n+1}(1, u) + x(\cdots)}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial h_{n+1}(1, u) + x(\cdots)}{\partial u}(0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & r(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Como  $r(0) \neq 0$ ,  $D_{(0,0)}F$  tiene un valor propio distinto de 0 y así  $(0, 0)$  es una singularidad elemental.  $\square$

**Corolario 2.16.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad no décritica aislada, si 0 es una singularidad elemental, entonces las singularidades de la explosión de  $\mathcal{F}$  en 0,  $\tilde{\mathcal{F}}$  son de nuevo singularidades elementales.*

**Demostración.** Como 0 es una singularidad elemental entonces el orden de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es igual a uno. Como la parte lineal de la 1-forma que define la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 tiene un valor propio distinto de 0, podemos asumir, bajo un cambio lineal de coordenadas, que la foliación  $\mathcal{F}$  es generada localmente en el origen de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  por la 1-forma

$$\omega = (ax + by)dx - xdy + \cdots .$$

Finalmente, la forma tangente  $h_2(x, y) = (ax + by)x - xy = x(ax + (b-1)y)$ , se factoriza en factores lineales y por tanto de la proposición 2.15, las singularidades de la explosión  $\tilde{\mathcal{F}}$  en el divisor excepcional son elementales.  $\square$

## 2.2. Aplicaciones

### 2.2.1. Eliminación de puntos singulares no elementales

**Teorema 2.17 (I. Bendixon, A. Andreev, A. Seidenberg, S.Lefschetz, F. Dumortier).** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una*

*singularidad aislada. Tenemos que existe una explosión  $\pi$  compuesta de explosiones simples  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , de forma que la explosión de la foliación  $\mathcal{F}$ ,  $\pi^*\mathcal{F}$  tiene sólo singularidades elementales en  $D$ .*

*El divisor  $D = \pi^{-1}(0)$  es la unión de un número finito de líneas proyectivas que si se intersecan entre sí, entonces se intersecan transversalmente.*

Este resultado se probará a lo largo del capítulo tres después de introducir un invariante holomorfo de foliaciones, la multiplicidad de intersección y ver cómo se comporta este invariante bajo explosiones.

**Ejemplo 2.18.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación generada por la 1-forma  $\omega = y^2 dx - x^3 dy$  en una vecindad de  $\mathbb{C}^2$  alrededor de 0, por la ecuación de Pfaff  $\omega = 0$ , el 0 es una singularidad de  $\mathcal{F}$  y no es elemental pues no tiene parte lineal y por tanto los valores propios de la parte lineal son ambos 0.

Consideremos  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con la transformación monoidal canónica  $\sigma : (\mathbb{M.E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  tenemos

$$\begin{aligned}\omega \circ \sigma(x, u) &= \omega(x, ux) \\ &= x^2(u - ux)dx - x^4 du\end{aligned}$$

por tanto en  $(U_1, (x, u))$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita por la ecuación de Pfaff  $\tilde{\omega}_1 = 0$  con  $\tilde{\omega}_1 = u(1-x)dx - x^2 du$ , notamos que en esta carta  $\tilde{\mathcal{F}}$  solo tiene una singularidad, la singularidad  $(0, 0)$ , veamos si es una singularidad elemental. Para ello, consideremos la matriz de linealización en  $(0, 0)$  del campo vectorial  $x^2 \frac{\partial}{\partial x} + u(1-x) \frac{\partial}{\partial y}$  dada por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial x^2}{\partial u}(0, 0) \\ \frac{\partial u(1-x)}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial u(1-x)}{\partial u}(0, 0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x(0, 0) & 0 \\ -u(0, 0) & 1 - x(0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

que tiene valores propios 1 y 0, por tanto tiene un valor propio distinto de 0 y así  $(0, 0)$  es una singularidad elemental.

En la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  tenemos

$$\begin{aligned}\omega \circ \sigma(v, y) &= \omega(vy, y) \\ &= y^2(v - yv^3)dy + y^3 dv\end{aligned}$$

y por tanto en  $(U_2, (v, y))$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita por la ecuación de Pfaff  $\tilde{\omega}_2 = 0$  con  $\tilde{\omega}_2 = v(1-yv^2)dy + ydv$ , notamos que en esta carta  $\tilde{\mathcal{F}}$  sólo tiene una singularidad, la singularidad  $(0, 0)$  que no está en  $U_1$ , veamos si es una singularidad elemental.

Consideremos la matriz de linealización en  $(0,0)$  del campo vectorial  $v(yv^2 - 1)\frac{\partial}{\partial v} + y\frac{\partial}{\partial y}$  dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial v(yv^2-1)}{\partial v}(0,0) & \frac{\partial v(yv^2-1)}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(0,0) & \frac{\partial y}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3yv^2 - 1(0,0) & v^3(0,0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que tiene valores propios  $-1$  y  $1$ , y por tanto  $(0,0)$  es una singularidad elemental.

Veamos un caso donde no resolvemos la singularidad en la primera explosión.

**Ejemplo 2.19.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación generada por la ecuación de Pffaf  $\omega = 0$  con  $\omega$  1-forma dada por

$$\omega = (y^2 + yx^3)dx - x^4dy$$

en una vecindad de  $\mathbb{C}^2$  alrededor del origen. Tenemos que el origen es una singularidad de  $\mathcal{F}$  y no es elemental pues no tiene parte lineal y por tanto los valores propios de la parte lineal son ambos 0.

Consideremos  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con la transformación monoidal canónica  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  tenemos

$$\begin{aligned} \omega \circ \sigma(x, u) &= \omega(x, ux) \\ &= ((ux)^2 + ux^4)dx - x^4d(ux) \\ &= ((ux)^2 + ux^4)dx - x^5dy - ux^4dx \\ &= (ux)^2dx - x^5du, \end{aligned}$$

por tanto en  $(U_1, (x, u))$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita por la ecuación de Pffaf  $\tilde{\omega}_1 = 0$  con

$$\tilde{\omega}_1 = u^2dx - x^3du.$$

En esta carta tenemos que el  $(0,0)$  es un punto singular no elemental, sin embargo después de hacer una segunda explosión en este punto tenemos dos puntos singulares elementales por el ejemplo anterior.

En la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  tenemos

$$\begin{aligned} \omega \circ \sigma(v, y) &= \omega(vy, y) \\ &= (y^2 + y(vy)^3)dy - (vy)^4dy \\ &= (y^2v + (yv)^4)dy + (y^3 + y^5v^3)dv - (vy)^4 \\ &= y^2vdy + (y^3 + y^5v^3)dv \end{aligned}$$

y por tanto en  $(U_2, (v, y))$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita por la ecuación de Pfaff  $\tilde{\omega}_2 = 0$  con

$$\tilde{\omega}_2 = vdy + (y + y^3v^3)dv.$$

Notamos que en esta carta  $\tilde{\mathcal{F}}$  sólo tiene una singularidad, la singularidad  $(0, 0)$  que no está en  $U_1$ , veamos si es una singularidad elemental. Consideremos la matriz de linealización en  $(0, 0)$  del campo vectorial  $v\frac{\partial}{\partial v} - (y + y^4v^3)\frac{\partial}{\partial y}$  dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial v}(0, 0) & \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial y + y^3v^3}{\partial v}(0, 0) & \frac{\partial y + y^3v^3}{\partial y}(0, 0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3v^2y^3(0, 0) & 1 + 3y^2v^3(0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que tiene valor propio  $1 \neq 0$ , y por tanto  $(0, 0)$  es una singularidad elemental.

Finalmente la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  obtenida de explotar  $\mathbb{M}$  en el punto  $(0, 0)$  de la carta  $U_1$  con una explosión simple es una foliación tal que todas sus singularidades son elementales.

### 2.2.2. Eliminación de nodos resonantes

Veamos qué pasa con puntos singulares elementales al momento de explotarlos.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con  $0$  una singularidad aislada definida por la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con

$$\omega = xdy + \lambda ydx + \dots = 0 \quad \lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (2.2.1)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están en  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ . Esto es,  $0$  es una singularidad elemental.

En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$ , la explosión simple de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $0$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$ , queda determinada por la ecuación de Pfaff  $\{\tilde{\omega}_1 = 0\}$  donde  $\tilde{\omega}_1$  está dada por la ecuación

$$\tilde{\omega}_1 = (\lambda + 1)udx + xdu + \dots \quad (2.2.2)$$

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_1^* \omega &= xd(ux) + \lambda ux dx + \dots \\ &= ux dx + x^2 du + \lambda ux dx + \dots \\ &= (\lambda + 1)ux dx + x^2 du + \dots \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

De forma análoga tenemos que en la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$ , la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  queda determinada por la ecuación

$$(\lambda + 1)vdy + \lambda ydv + \dots \quad (2.2.4)$$

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_2^* \omega &= v y d y + \lambda y d v y + \dots \\ &= v y d y + \lambda y v d y + \lambda y^2 d v + \dots \\ &= (\lambda + 1) v d y + \lambda y d v + \dots \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Si  $\lambda \neq -1$  tenemos que la singularidad definida por la ecuación (2.2.1) es separada en dos singularidades no degeneradas con respectivas razones negativas de valores propios  $\lambda + 1$  y  $\frac{\lambda}{\lambda+1}$  al momento de hacer la explosión simple. Esto sucede de las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.4).

Cuando  $\lambda = -1$  corresponde al nodo dicrítico  $x dy - y dx + \dots = 0$ , o al nodo de Jordan  $(x + y) dy - y dx + \dots = 0$ . En el primer caso, al explotar desaparece el punto singular pues las formas que definen a  $\tilde{\mathcal{F}}$  no son singulares (Ver las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.4)).

Para el caso donde la singularidad  $\{\omega = 0\}$  sea un nodo de Jordan tenemos un único punto singular, pues su forma tangente es  $(x + y)y - yx = y^2$ , para ver que este punto singular es elemental vemos que en  $U_1 \tilde{\omega} = x du + u x du + u^2 dx + \dots$

$$\begin{aligned} \sigma_1^* \omega &= (x + ux) du x - u x dx + \dots \\ &= x(x + ux) du + u(x + ux) dx - u x dx + \dots \\ &= x(x + ux) du + u^2 x dx + \dots \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Con estas observaciones tenemos que al explotar puntos singulares elementales obtenemos puntos singulares elementales.

**Proposición 2.20.** *Para cualquier singularidad de una foliación holomorfa  $\mathcal{F}$  uno puede construir una superficie holomorfa  $M$  con una curva analítica  $D$  en ella y una transformación  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  que cumplan las condiciones del teorema 2.17 tal que  $\pi^* \mathcal{F}$  tiene sólo singularidades elementales en  $D$  y además sin nodos resonantes, esto es, singularidades en los que el cociente de los valores propios de la parte lineal sea un número natural mayor que 1.*

**Demostración.** Primero consideremos una foliación singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que 0 es una singularidad aislada de tipo nodo resonante. Haciendo un cambio de coordenadas podemos pensar en que  $\mathcal{F}$  está definida por la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con

$$\omega = x dy - n y dx + \dots = 0 \quad n \in \mathbb{Z}, n > 1. \quad (2.2.7)$$

Al momento de hacer una explosión simple vemos que el nodo es separado en dos singularidades no degeneradas con respectivas razones negativas de valores propios  $-n + 1$  y  $\frac{-n}{-n+1}$ , como  $\frac{-n}{-n+1} > 0$  la singularidad con cociente de valores propios  $\frac{-n}{-n+1}$  no es un nodo resonante. Haciendo  $n - 1$  explosiones con centros en los nodos resonantes separamos a la singularidad en  $n - 1$  sillars y un nodo

singular dícritico.

Finalmente consideremos la superficie holomorfa  $M$  con una curva analítica  $D$  en ella y una transformación holomorfa  $\pi : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  dadas por el teorema 2.17,  $\mathcal{F}_0$  la explosión  $\pi^* \mathcal{F}$   $M_0 = M$ .

Construimos  $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $M_0 = M$  la explosión simple de todos los nodos resonantes  $S_{k-1} \subset M_{k-1}$  de la foliación  $\mathcal{F}_{k-1}$  obtenida en la superficie  $M_{k-1}$

Sea  $m$  el máximo de los cocientes enteros de los valores propios de los nodos resonantes en la explosión  $\pi^* \mathcal{F}$ . Éste existe pues sólo hay un número finito de puntos singulares. Tenemos que después de  $m - 1$  explosiones simples

$$\pi' = \pi_{m-1} \circ \pi_{m-2} \circ \dots \circ \pi_1 \circ \pi,$$

la explosión de  $\mathcal{F}$  con  $\pi'$  no tiene puntos singulares.  $\square$

### 2.2.3. Foliaciones integrables

**Definición 2.21.** Una foliación singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  dada por la 1 - forma  $\omega$  con la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  se dice *integrable* si existe una función holomorfa (germen de función holomorfa)  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\omega \wedge du = 0$ .

**Ejemplo 2.22.** Para una función  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tenemos que la foliación dada por la ecuación de Pfaff  $\{dh = 0\}$  es una foliación integrable.

A un campo vectorial  $W$  de la forma  $W = \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$  se le llama hamiltoniano.

**Observación 2.23.** Una foliación singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  integrable no necesariamente está asociada a un campo vectorial hamiltoniano.

Por ejemplo consideremos la foliación  $\mathcal{F}$  dada por  $\{\omega = 0\}$  con  $\omega = 2ydx + xdy$ , es integrable pues para  $f = x^2y$  tenemos

$$\begin{aligned} (2ydx + xdy) \wedge df &= (2ydx + xdy) \wedge (2xydx + x^2dy) \\ &= (2yx^2 - 2yx^2)dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es integrable pero sin embargo como  $\frac{\partial 2y}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial x}{\partial x}$  no puede ser de la forma  $df$  para ninguna función  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Proposición 2.24.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular integrable definida por la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con  $\omega$  una 1 - forma en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , con  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de función holomorfa tal que  $\omega \wedge df = 0$ . Entonces las hojas de  $\mathcal{F}$  son constantes bajo  $f$ , esto es, las hojas de la foliación son componentes conexas de las curvas de nivel de  $f$ .

**Demostración.** Sea  $V(x, y)$  el campo vectorial asociado a la 1-forma  $\omega$ . Dado que  $\omega \wedge df = 0$ , tenemos que  $V(x, y)$  es ortogonal al campo vectorial gradiente  $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ . Consideremos una hoja de la foliación parametrizada localmente por  $\phi(t)$  (dada por el teorema de existencia y unicidad). Dado que  $\phi(t)$  parametriza a una hoja de la foliación, tenemos que el vector  $V(\phi(t))$  es paralelo al vector  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$ . Junto con el hecho de que el vector  $V(\phi(t))$  es ortogonal al vector  $\nabla f(\phi(t))$ , tenemos que el vector  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$  es ortogonal al vector  $\nabla f(\phi(t))$ . Dado que la derivada de  $f \circ \phi(t)$  es igual a  $\nabla f(\phi(t)) \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = 0$ , tenemos que  $f \circ \phi(t)$  es constante.  $\square$

**Observación 2.25.** Consideremos una foliación singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  integrable definida por la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con  $\omega$  una 1-forma en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y una función holomorfa  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\omega \wedge df = 0$ , tenemos que para un biholomorfismo  $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  se cumple

$$(H^*\omega) \wedge d(H^*f) = H^*(\omega \wedge df) = 0. \quad (2.2.8)$$

Por tanto la foliación  $\mathcal{G}$  dada por la ecuación de Pfaffian  $\{H^*\omega = 0\}$  es integrable.

Con lo que probamos la siguiente proposición:

**Proposición 2.26.** Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  dos foliaciones holomorfas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tales que  $\mathcal{F}$  es analíticamente equivalente a  $\mathcal{G}$ , entonces  $\mathcal{F}$  es integrable si y solo si  $\mathcal{G}$  es integrable.

**Definición 2.27.** Sea  $\omega$  una 1-forma formal en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , decimos que  $\omega$  es formalmente integrable si existe una serie formal  $f$  tal que  $\omega \wedge df = 0$ .

**Observación 2.28.** Si una 1-forma holomorfa  $\omega$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es integrable, entonces es integrable en el sentido formal.

De manera análoga a el caso holomorfo tenemos

**Proposición 2.29.** Si  $\omega$  una 1-forma formal en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  es integrable y  $H$  es una transformación formal invertible entonces  $H^*\omega$  es integrable.

**Proposición 2.30.** Si  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es tal que el 0 es una singularidad elemental aislada entonces el 0 es una singularidad elemental de tipo silla resonante, esto es, el cociente de los valores propios de la parte lineal del campo vectorial que define la foliación en el origen de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  es un racional negativo.

**Demostración.** Primero probemos que  $\mathcal{F}$  no es una silla-nodo.

Por contradicción supongamos que  $\mathcal{F}$  es integrable y con 0 una singularidad de tipo silla-nodo. Bajo un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que  $\mathcal{F}$  está generada por el campo vectorial

$$x + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde  $\text{ord}_0 a, \text{ord}_0 b > 1$ . Dado que  $1 = 1 \cdot 1 + n \cdot 0$  y  $0 = 0 \cdot 1 + n \cdot 0$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, por el teorema de Poincare-Dulac,  $x + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  es formalmente equivalente a un campo vectorial formal de la forma  $xf(y) \frac{\partial}{\partial x} + yg(y) \frac{\partial}{\partial y}$  con  $f(0) \neq 0, g(0) = 0$  pues tenemos que los monomios resonantes son de la forma  $xy^n \frac{\partial}{\partial x}$  y  $y^n \frac{\partial}{\partial y}$ .

Si la foliación  $\mathcal{F}$  fuera integrable entonces la 1-forma  $yg(y)dx - xf(y)dy$  sería formalmente integrable. Veamos que  $yg(y)dx - xf(y)dy$  no es formalmente integrable. Sea  $u(x, y)$  una serie formal de orden  $n, n > 0$ . Si suponemos que

$$(yg(y)dx - xf(y)dy) \wedge du = 0$$

tendríamos

$$yg(y) \frac{\partial u}{\partial y} + xf(y) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.2.9)$$

como  $\text{ord}_0 xf(y) = 1$  y  $\text{ord}_0 yg(y) > 1$ , tenemos que  $\text{ord}_0 \frac{\partial u}{\partial x} > \text{ord}_0 \frac{\partial u}{\partial y}$ , esto pasa sólo si el polinomio homogéneo de menor grado que aparece en la expansión en series de potencias de  $u(x, y)$  es de la forma  $cy^n$  con  $c \in \mathbb{C}$  distinto de 0. Sin embargo esto nos diría que  $x$  no divide a  $u(x, y)$  y por tanto tampoco a  $\frac{\partial u}{\partial y}$  lo cual es una contradicción pues  $yg(y) \frac{\partial u}{\partial y} = -xf(y) \frac{\partial u}{\partial x}$ .

De aquí que 0 no puede ser una silla-nodo.

Ahora veamos que 0 es una silla, haciendo un cambio lineal de coordenadas si fuera necesario consideremos

$$\omega = [y + a(x, y)]dx + [\lambda x + b(x, y)]dy,$$

donde  $\text{ord}_0 a, \text{ord}_0 b > 1$  tal que la foliación asociada a la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$ ,  $\mathcal{F}$  es integrable, como es integrable  $\lambda \neq 0$  pues el punto singular 0 no es tipo silla-nodo (como acabamos de observar).

Como  $\mathcal{F}$  es integrable existe una función holomorfa  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  que no es una unidad tal que  $\omega \wedge u = 0$ , esto implica que

$$[y + a(x, y)] \frac{\partial u}{\partial y} = [\lambda x + b(x, y)] \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.10)$$

y por tanto  $\text{ord}_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \text{ord}_0 \frac{\partial u}{\partial x}$  escribiendo a  $u$  como suma de polinomios homogéneos  $u(x, y) = u_n(x, y) + u_{n+1}(x, y) + \dots$  donde  $u_i(x, y)$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$  tenemos que

$$y \frac{\partial u_n}{\partial y} = \lambda x \frac{\partial u_n}{\partial x} \quad (2.2.11)$$

entonces  $y \mid \frac{\partial u_n}{\partial x} \partial x$  y  $x \mid \frac{\partial u_n}{\partial y}$ , por tanto en  $u_n(x, y)$  aparece un término de la forma  $ax^r y^s$  con  $a \neq 0, r, s \in \mathbb{N}, r, s > 0, r + s = n$ , finalmente tenemos que  $sax^r y^s = r\lambda ax^r y^s$  y por tanto  $\lambda = \frac{s}{r}$ , lo que prueba que el 0 es una singularidad elemental de tipo silla resonante.  $\square$

Esta propiedad de las foliaciones integrables con singularidad elemental aislada nos da un criterio para decidir cuándo una foliación con una singularidad elemental aislada no es integrable. Veamos que ser integrable se preserva bajo explosiones, con ello tendríamos que si en la resolución de una foliación con una singularidad elemental aparece un punto singular que no sea de tipo silla, entonces la foliación original no es integrable.

**Proposición 2.31.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación con singularidad aislada en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\pi$  una explosión compuesta de explosiones simples  $\pi = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_1$ ,  $\pi_1 = \sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación monoidal canónica. Si  $\mathcal{F}$  es integrable, entonces  $\tilde{\mathcal{F}}$ , la explosión de  $\mathcal{F}$  con  $\pi$ , es integrable.*

**Demostración.** Basta probarlo para cuando  $\pi = \sigma$ , pues el caso general se deriva inductivamente de este caso.

Sea  $\omega$  una 1-forma tal que la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  está asociada a  $\mathcal{F}$ . Tenemos que si  $\mathcal{F}$  es integrable, entonces existe  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\omega \wedge du = 0$ . Veamos que  $\tilde{\omega}$ , la 1-forma en  $(\mathbb{M}, \mathbb{E})$  tal que  $\{\tilde{\omega} = 0\}$  genera a  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con  $\sigma$ , cumple que  $\tilde{\omega} \wedge d\pi^*u = 0$ . Esto, por definición, nos diría que  $\tilde{\mathcal{F}}$  es integrable.

Sea  $n = \text{ord}_0\omega$ . En la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \pi^*(\omega \wedge du) \\ &= \pi^*\omega \wedge d\pi^*u \\ &= (x^n \tilde{\omega}) \wedge d\pi^*u \\ &= x^n (\tilde{\omega} \wedge d\pi^*u), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

por tanto  $\tilde{\omega} \wedge d\pi^*u = 0$ . De forma análoga en  $(U_2, (y, v))$  tenemos que  $\tilde{\omega} \wedge d\pi^*u = 0$ , por tanto  $\tilde{\omega} \wedge d\pi^*u = 0$  en  $(\mathbb{M}, \mathbb{E})$ . De aquí que  $\tilde{\mathcal{F}}$  sea integrable.  $\square$

**Ejemplo 2.32.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  asociada a la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con  $\omega = (y + x^2)dx + (-2x + 5x^2)dy$ ,  $\mathcal{F}$  no es integrable pues  $(0, 0)$  es un punto singular elemental que no es un punto singular de tipo silla.

**Ejemplo 2.33.** Sea  $\mathcal{F}$  la foliación en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  asociada a la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con  $\omega = yx^2dx + (y^4 - x^5)dy$ , el  $(0, 0)$  no es una singularidad elemental.

Consideremos la explosión  $\tilde{\mathcal{F}}$  con la transformación monoidal canónica  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , en  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \omega(x, ux) &= ux^3dx + ((ux)^4 - x^5)dux \\ &= [ux^3 + u((ux)^4 - x^5)]dx + x((ux)^4 - x^5)du \\ &= x^3[(u + xu^5 - ux^2)dx + (x^2u^4 - x^3)du]. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

La foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  está asociada a la ecuación de Pfaff  $\{\tilde{\omega} = 0\}$  en  $(U_1, (x, u))$  con  $\tilde{\omega}$  dada por

$$\tilde{\omega} = (u + xu^5 - ux^2)dx + (x^2u^4 - x^3)du.$$

De aquí vemos que en la carta  $(U_1, (x, u))$ , el punto  $(0, 0)$  es un punto de tipo silla-nodo. Como  $(0, 0)$  no es un punto silla resonante, se sigue de la proposición 2.30 que la explosión  $\tilde{\mathcal{F}}$  no es integrable y por tanto de la proposición 2.31, tenemos que la foliación  $\mathcal{F}$  no es integrable.

## Capítulo 3

# Multiplicidad de intersección

A lo largo del capítulo se expondrá la teoría necesaria para probar el teorema de desingularización 2.17, introduciendo un invariante formal de la foliación  $\mathcal{F}$  y viendo cómo éste se comporta bajo explosiones.

Comenzamos el capítulo definiendo la noción de divisor en una variedad compleja  $M$  (suma de conjuntos analíticos de codimensión 1 contados con multiplicidad) y veremos que en el caso de que la variedad compleja tenga dimensión 2, localmente podemos asociarle una función holomorfa. Con ello podemos definir la multiplicidad de intersección entre divisores, de forma que esta definición sólo dependa del ideal que generan los gérmenes de funciones holomorfas que definen los divisores respectivos.

Dada una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada asociada localmente a la 1-forma  $\omega = f dx + g dy$ , definimos la multiplicidad del punto singular 0 como la multiplicidad de intersección entre los divisores locales asociados a  $f$  y a  $g$ . Veremos que esta multiplicidad es un invariante formal de la foliación y veremos como se comporta bajo explosiones, al final del capítulo se prueba el teorema de desingularización 2.17 y se da una cota al número de explosiones simples para que se cumpla este teorema en términos de la multiplicidad del punto singular.

### 3.1. Divisores

**Definición 3.1.** [Divisor] Un *divisor*  $D$  en una variedad compleja  $M$  es la unión finita de hipersuperficies analíticas irreducibles (ver A.23) a las que les

asignamos una multiplicidad entera. Esto es

$$D = \sum_{\gamma} k_{\gamma} \cdot \gamma, \quad (3.1.1)$$

donde  $\gamma$  es una subvariedad analítica de codimensión 1 y  $k_{\gamma} \in \mathbb{Z}$  es distinta de cero una cantidad finita de veces. El divisor  $D$  se dice *efectivo* si además satisface que para cada hipersuperficie analítica  $\gamma$ , tenemos que  $k_{\gamma}$  es mayor o igual que 0 en la ecuación (3.1.1).

La suma de dos divisores  $D$  y  $F$  en una variedad compleja se puede definir escribiendo a  $D$  y a  $F$  como en la ecuación (3.1.1); esto es  $D = \sum_{\gamma} k_{\gamma} \cdot \gamma$  y  $F = \sum_{\gamma} l_{\gamma} \cdot \gamma$ . Definimos  $D + F$  como

$$D + F := \sum_{\gamma} (l_{\gamma} + k_{\gamma}) \cdot \gamma. \quad (3.1.2)$$

Con esta suma podemos pensar a los divisores de  $M$  como un grupo abeliano.

**Definición 3.2. [Soporte]** El *soporte* de un divisor  $D$  es la unión de todas las subvariedades analíticas que están acompañadas con un coeficiente distinto de cero. Denotamos al soporte de  $D$  como  $|D|$ , con esta notación tenemos

$$|D| := \bigcup_{k_{\gamma} \neq 0} \gamma \quad (3.1.3)$$

**Definición 3.3 (Divisor local).** Sea  $M$  una variedad compleja. Un divisor local en un punto  $a$  en  $M$  es una clase de equivalencia; donde los divisores  $D$  y  $D'$  son equivalentes si existe una vecindad  $V \subset M$  de  $a$ , de forma que  $D$  y  $D'$  coinciden en  $V$ .

La suma de divisores locales se hereda de la suma de divisores.

En lo siguiente veremos que cada divisor local está asociado al germen de una función meromorfa de manera natural.

**Definición 3.4.** Sea  $f$  un germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Como  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  es un dominio de factorización única (ver teorema A.20) podemos escribir a  $f$  de la forma

$$f = \prod_{i=1}^n f_i^{\alpha_i},$$

donde  $f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  es un germen de función holomorfa irreducible para cada  $i = 1, \dots, n$  y  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ . Definimos el *divisor local asociado a  $f$*  como el divisor local

$$D_f := \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \{f_i = 0\}, \quad (3.1.4)$$

donde  $\{f_i = 0\}$  es el germen del conjunto analítico asociado al germen de función  $f_i$  en 0.

**Observación 3.5.** Se sigue de la definición 3.4 que si  $f$  y  $g$  son gérmenes de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , entonces el divisor local asociado al producto  $fg$  cumple la igualdad

$$D_{fg} = D_f + D_g.$$

Con la observación 3.5 tenemos una forma de asociar divisores locales no sólo a gérmenes de funciones holomorfas si no además, tenemos una forma de asociar divisores locales a gérmenes de funciones meromorfas.

**Definición 3.6.** Sea  $h$  un germen de función meromorfa definido en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Como  $h$  es meromorfa, podemos escribir a  $h$  de la forma  $h = \frac{f}{g}$  donde  $f$  y  $g$  son gérmenes de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  sin factores en común. Definimos el divisor local asociado a  $h$  como

$$D_h := D_f - D_g. \quad (3.1.5)$$

**Proposición 3.7.** Sea  $\mathbf{D}$  un divisor local definido en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Entonces existe un germen de función meromorfa  $h$  definido en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  de forma que  $\mathbf{D} = D_h$ . Más aún si el divisor local  $\mathbf{D}$  está asociado a un divisor efectivo, entonces  $h$  es un germen de función holomorfa.

**Demostración.** Sea  $D$  un divisor en  $\mathbb{C}^2$  tal que  $\mathbf{D}$  es el germen local asociado a  $D$  en 0. Escribamos a  $D$  como suma de subvariedades analíticas de dimensión compleja 1 contadas con multiplicidad

$$D = \sum_{\gamma} k_{\gamma} \cdot \gamma$$

donde  $\gamma$  es una subvariedad analítica y  $k_{\gamma} \in \mathbb{Z}$  es distinta de 0 sólo para un número finito de subvariedades analíticas  $\gamma$ . Por definición de subvariedad analítica de dimensión compleja 1, tenemos que alrededor de 0 existe un germen de función holomorfa  $f_{\gamma}$  libre de cuadrados en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  de forma que  $\{f_{\gamma} = 0\} = \gamma$  como gérmenes de conjuntos.

Definamos el germen de función  $f$  como el producto  $f = \prod_{\gamma} f_{\gamma}^{k_{\gamma}}$ . Tenemos que  $f$  así definida cumple ser meromorfa pues  $k_{\gamma}$  era distinta de 0 sólo un número finito de veces y, más aún, tenemos por construcción que  $\mathbf{D} = D_f$ . El germen de función  $f$  es holomorfo si además pedimos que cada  $k_{\gamma}$  sea mayor o igual que 0, condición que se satisface si  $D$  es un divisor efectivo.  $\square$

**Definición 3.8.** Un divisor local  $D$  definido en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  se dice *irreducible* si, existe un germen de función holomorfa irreducible  $f$ , de forma que el divisor asociado a  $f$ ,  $D_f$ , cumple que  $D = D_f$ .

**Observación 3.9.** Cada divisor local efectivo  $D$  definido en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  se puede expresar como suma de divisores locales irreducibles. En efecto, gracias a la proposición 3.7 tenemos que,  $D = D_f$  con  $f$  un germen de función holomorfa en

$\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , desarrollando a  $f$  como producto de gérmenes de funciones holomorfas irreducibles en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $f = \prod_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}$ , obtenemos

$$D = D_f = \sum_{i=1}^n \alpha_i D_{f_i}.$$

□

Antes de definir la preimagen de un divisor veamos que la preimagen de una variedad analítica de codimensión 1 sigue siendo una variedad analítica de codimensión 1 a través de una transformación holomorfa entre dos variedades de la misma dimensión.

**Lema 3.10.** *Sean  $M$  y  $N$  variedades complejas de la misma dimensión. Si  $V$  es una variedad analítica de codimensión 1 en  $N$  y  $\pi : M \rightarrow N$  una transformación suprayectiva, entonces  $\pi^{-1}(V)$  es también una variedad analítica de codimensión 1.*

**Demostración.** El conjunto  $\pi^{-1}(V)$  es distinto del vacío al ser  $\pi$  suprayectiva. Tomemos  $a \in \pi^{-1}(V)$ , para ver que es una variedad analítica de codimensión 1. Basta con probar que existe una función holomorfa  $g$  (definida en un abierto de  $M$ ) de forma que  $\{f = 0\} = V$  en una vecindad de  $a$ .

Como  $\pi(a) \in V$  y  $V$  es una variedad analítica de codimensión 1, existe una función holomorfa  $f$  definida en un abierto  $U$  de  $M$  tal que localmente  $V = \{f = 0\}$ . Como  $\pi$  es holomorfa, en particular es continua y por tanto  $\pi^{-1}(U)$  es abierto de  $M$  y contiene a el punto  $a$ . Finalmente tenemos que localmente  $g = f \circ \pi$  satisface que localmente

$$\pi^{-1}(V) = \pi^{-1}(\{f = 0\}) = \{f \circ \pi = 0\} = \{g = 0\}.$$

Dado que el punto  $a \in \pi^{-1}(V)$  se tomo de forma arbitraria, probamos que  $\pi^{-1}(V)$  es una variedad analítica de codimensión 1. □

**Definición 3.11 (Preimagen de divisores locales).** Sea  $\pi : M \rightarrow N$  una transformación holomorfa suprayectiva entre 2 variedades complejas de la misma dimensión y  $a$  un punto en  $N$ . Para un divisor local  $D_f$  en  $(N, a)$ , con  $f$  un germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(N, a)$ , definimos la *preimagen del divisor local*  $D_f$  (en un punto  $b \in \pi^{-1}(a)$ ), denotada por  $\pi^{-1}(D_f)$ , como el divisor local  $D_{f \circ \pi}$  en  $(M, b)$ . Viendo a  $f \circ \pi$  como germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(M, b)$ .

En lo siguiente veremos cómo definir preimágenes de divisores en el caso de que la transformación  $\pi$  sea un biholomorfismo o una explosión, de forma que esta definición coincida con la definición de preimágenes de divisores locales.

**Definición 3.12.** Sea  $\pi : M \rightarrow N$  un biholomorfismo entre 2 variedades complejas de la misma dimensión y  $a$  un punto en  $N$ . Para un divisor local  $D$  en  $N$ , escribamos a  $D$  como suma de variedades analíticas contadas con multiplicidad

$$D = \sum_{\gamma} k_{\gamma} \cdot \gamma,$$

donde  $\gamma$  es una subvariedad analítica de codimensión 1 y  $k_\gamma \in \mathbb{Z}$  es distinta de cero una cantidad finita de veces. Definimos la *preimagen del divisor*  $D$  con la transformación  $\pi$ , denotada por  $\pi^{-1}(D)$ , como el divisor

$$\pi^{-1}(D) = \sum_{\gamma} k_\gamma \cdot \pi^{-1}(\gamma).$$

$\pi^{-1}(\gamma)$  es una subvariedad analítica de codimensión 1 gracias al lema 3.10.

**Proposición 3.13.** *Sea  $\pi : M \rightarrow N$  una transformación biholomorfa entre dos variedades complejas de la misma dimensión. Para  $D$  un divisor en  $N$  y un punto  $a \in N$ , sea  $f$  el germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(M, a)$  tal que  $D_f$  es el divisor local asociado a el divisor  $D$ . Entonces el divisor local asociado a  $\pi^{-1}(D)$  en  $(M, \pi^{-1}(a))$  es igual al divisor local  $D_{f \circ \pi}$ , viendo a  $f \circ \pi$  como germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(M, \pi^{-1}(a))$ .*

**Demostración.** La prueba se sigue de que los anillos  $\mathcal{O}(M, \pi^{-1}(a))$  y  $\mathcal{O}(N, a)$  son isomorfos, gracias a que  $\pi$  es un biholomorfismo.  $\square$

El siguiente lema nos permitirá definir la preimagen de un divisor  $D$  a través de una explosión.

**Definición 3.14.** Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión 2. Para un punto  $a$  en  $M$ , sea  $\sigma : (M', \mathbb{E}) \rightarrow (M, a)$  la explosión simple con centro en  $a$ . Para una curva analítica  $\gamma$ , la *preimagen del divisor*  $\gamma$  por  $\sigma$ , denotado por  $\sigma^{-1}(\gamma)$  lo definimos como  $\sigma^{-1}(\gamma) := n\mathbb{E} + \tilde{\gamma}$  donde  $\tilde{\gamma}$  es la explosión de  $\gamma$  y  $n$  es el orden de  $\gamma$  en 0.

Para un divisor  $D$  definido en  $M$  escribamos a  $D$  como suma de variedades analíticas contadas con multiplicidad

$$D = \sum_{\gamma} k_\gamma \cdot \gamma$$

donde  $\gamma$  es una subvariedad analítica de codimensión 1 y  $k_\gamma \in \mathbb{Z}$  es distinta de cero una cantidad finita de veces. Definimos la *preimagen del divisor*  $D$  por  $\sigma$ , denotado por  $\sigma^{-1}(D)$  por la ecuación

$$\sigma^{-1}(D) := \sum_{\gamma} k_\gamma \cdot \sigma^{-1}(\gamma).$$

**Proposición 3.15.** *Con la notación de la definición 3.14. Si  $D_f$  es el divisor local asociado a el divisor  $D$  en  $(M, a)$ , entonces el divisor local  $D_{f \circ \sigma}$  es el divisor local asociado al divisor  $\sigma^{-1}(D)$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , donde  $b$  es un punto en  $\sigma^{-1}(a)$ .*

**Demostración.** Consideremos  $\sigma : (M, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la explosión simple en el origen de  $\mathbb{C}^2$  y una función holomorfa  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  de orden  $n$  en 0. En la carta  $(U_1, (x, u))$   $u = \frac{y}{x}$  tenemos que la explosión de la curva  $\{f = 0\}$  es

descrita por la curva  $\{\tilde{f} = 0\}$  donde  $\tilde{f}$  es la función holomorfa en  $U_1$  dada por  $f \circ \sigma(x, u) = f(x, ux) = x^n \tilde{f}(x, u)$ . Por otro lado, de la definición 3.11 tenemos que la preimagen del divisor local  $D_f$  con  $\sigma$  cumple

$$\sigma^{-1}(D_f) = D_{f \circ \sigma} = D_{x^n \tilde{f}} = n\mathbb{E} + D_{\tilde{f}}.$$

□

**Definición 3.16.** Para  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una explosión compuesta de explosiones simples y  $D$  un divisor en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definimos la preimagen del divisor  $D$  con  $\pi$  aplicando la definición 3.14 de forma recursiva gracias a que cada explosión es un biholomorfismo fuera del centro de la explosión.

## 3.2. Índice de intersección

Sean  $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  dos gérmenes holomorfos y  $D_f, D_g$  sus divisores locales (efectivos) respectivamente en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Definición 3.17.** Decimos que la intersección de los divisores  $D_f$  y  $D_g$  es *aislada en el origen*, si la intersección de los soportes respectivos consiste sólo del origen localmente. Esto es:

$$|D_f| \cap |D_g| \cap (\mathbb{C}^2, 0) = \{0\}. \quad (3.2.1)$$

La siguiente proposición nos da un criterio para ver cuándo dos divisores locales tienen intersección aislada.

**Proposición 3.18.** La intersección de los divisores locales  $D_f$  y  $D_g$  es aislada en el origen si y sólo si, los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$  que los definen no tienen factores en común en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Demostración.** Tenemos que  $V(f) = \{f = 0\}$  es el germen asociado al soporte  $|D_f|$ . Consideremos la descomposición en gérmenes irreducibles de  $V(f)$ ,

$$V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_j), \quad (3.2.2)$$

donde  $f_i$  es un germen de función holomorfa irreducible en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Analicemos la igualdad:

$$\begin{aligned} V(f) \cap V(g) &= (V(f_1) \cup \dots \cup V(f_j)) \cap V(g) \\ &= (V(g) \cap V(f_1)) \cup \dots \cup (V(g) \cap V(f_j)). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Para  $V(g) \cap V(f_j)$  tenemos dos casos dependiendo si  $f_j$  divide a  $g$  o no. En el primer caso tenemos  $V(g) \cap V(f_j) = V(f_j)$  y en el segundo  $V(g) \cap V(f_j) = (0, 0)$ . Para probar esto último, consideramos la parametrización holomorfa inyectiva local  $\gamma_j : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^2$  de  $V(f_j) = \{f_j = 0\}$ , dada por el teorema de parametrización de Puiseux A.33 al ser  $f_j$  irreducible. Localmente tenemos la igualdad

$$V(f_j) \cap V(g) = \{\gamma_i(t) \mid g \circ \gamma_i(t) = 0\}. \quad (3.2.4)$$

Consideremos dos casos dependiendo de si el germen de función holomorfa  $g \circ \gamma_i(t)$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$  es constante o no.

En el primer caso tenemos que  $g \circ \gamma_i(t) \equiv 0$  pues  $g \circ \gamma_i(0) = 0$  y por tanto  $V(f_j) \cap V(g) = V(f_j)$ , lo cual sucede, si y solo si por el lema de Study A.27,  $f_j$  divide a  $g$ .

En el segundo caso tenemos que  $\{g \circ \gamma_i(t) = 0\}$  consiste de a lo más un número finito de ceros, acotados por el orden de  $g \circ \gamma_i(t)$  en 0. En particular  $t = 0$  es un cero aislado y por tanto  $V(f_j) \cap V(g) = \gamma_i(0) = (0, 0)$ .

Con esto probamos que se cumple que los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$  tienen factores en común en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , ó bien los divisores locales  $D_f$  y  $D_g$  tienen intersección aislada.  $\square$

**Definición 3.19.** Sean  $f$  y  $g$  gérmenes de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Para  $D_f$  y  $D_g$  sus divisores locales respectivos con intersección aislada en 0. Definimos la *multiplicidad de intersección de  $D_f$  y  $D_g$  en 0* como la dimensión del cociente  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle f, g \rangle$  visto como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ , donde  $\langle f, g \rangle$  denota al ideal generado por los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$ .

$$D_f \cdot D_g = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle f, g \rangle. \quad (3.2.5)$$

**Proposición 3.20.** Sean  $D_f$  y  $D_g$  divisores locales en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , definidos localmente por los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Si  $D_f$  y  $D_g$  tienen intersección aislada en 0 entonces la multiplicidad de intersección entre ellos es finita,

$$D_f \cdot D_g < \infty. \quad (3.2.6)$$

**Demostración.** Consideremos las funciones coordenadas  $x$  y  $y$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Por el teorema de Nullstellensatz A.37 tenemos que  $x^k \in \langle f, g \rangle$  y  $y^l \in \langle f, g \rangle$  para algunos  $k, l \in \mathbb{N}^*$ , gracias a que  $x$  y  $y$  se anulan en el conjunto  $\{(0, 0)\}$  (que es igual a  $\{f = 0\} \cap \{g = 0\}$  por hipótesis). De esta forma el ideal  $\langle x^k, y^l \rangle$  está contenido en el ideal  $\langle f, g \rangle$  y por tanto tenemos la desigualdad

$$D_f \cdot D_g \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle x^k, y^l \rangle. \quad (3.2.7)$$

Veamos que la dimensión  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle x^k, y^l \rangle$  es finita, para ello notemos que el conjunto  $\{x^i y^j + \langle x^k, y^l \rangle \mid 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq l-1\}$  forma una base de  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle x^k, y^l \rangle$ . Lo cual es inmediato del hecho de que cualquier germen holomorfo  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  se puede escribir forma

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} x^i y^j = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} c_{i,j} x^i y^j + d \quad c_{i,j} \in \mathbb{C}, d \in \langle x^k, y^l \rangle. \quad (3.2.8)$$

Por tanto  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle x^k, y^l \rangle = kl$  y de la desigualdad 3.2.7 se sigue que la multiplicidad de intersección entre los divisores  $D_f$  y  $D_g$  en 0 es finita,  $D_f \cdot D_g < \infty$ .  $\square$

**Ejemplo 3.21.** Tenemos que la multiplicidad de intersección puede ser arbitrariamente grande, para ver ello tomemos los divisores locales  $D_y, D_{x^k}$  con  $k \in \mathbb{N}^*$ , donde  $x$  y  $y$  son gérmenes de las funciones coordenadas. Tenemos

$$\begin{aligned} D_x \cdot D_{y^k} &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle y, x^k \rangle \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0) / \langle x^k \rangle \\ &= k. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

**Observación 3.22.** Para  $D$  y  $D'$  divisores locales efectivos con intersección aislada en 0, tenemos que la multiplicidad de intersección satisface  $D \cdot D' \geq 1$  por definición.

**Proposición 3.23.** Para  $D_f$  y  $D_g$  divisores locales efectivos con intersección aislada en 0, asociados a los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , se tienen que los siguientes son equivalentes:

- a)  $D_f \cdot D_g = 1$ ,
- b)  $\langle f, g \rangle = \langle x, y \rangle$ ,
- c) La transformación holomorfa  $(f, g)$  es invertible localmente.

**Demostración.** Primero veamos que (a) implica (b).

Supongamos que  $D_f \cdot D_g = 1$ . Como  $g(0) = f(0) = 0$  tenemos que  $f$  y  $g$  están en el ideal  $\langle x, y \rangle$  (se puede ver expresando a  $f$  y  $g$  como serie de potencias), por tanto  $\langle f, g \rangle \subset \langle x, y \rangle$ . Para probar que  $\langle x, y \rangle \subset \langle f, g \rangle$  primero veamos que  $x \in \langle f, g \rangle$ . Argumentando por contradicción, si  $x$  no está contenido en el ideal  $\langle f, g \rangle$ , tenemos que  $\{x + \langle f, g \rangle\}$  es base de  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle f, g \rangle$  (pues tiene dimensión compleja  $D_f \cdot D_g = 1$ ). En particular, para la función constante 1 tenemos que existe una constante  $c \in \mathbb{C}^2$  y dos gérmenes de funciones holomorfas  $a$  y  $b$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , de forma que  $1 = cx + af + bg$ , sin embargo esto no puede suceder, pues evaluando en  $(0, 0)$  tendríamos que  $1 = 0$ . Lo que prueba que  $x \in \langle f, g \rangle$ . Se prueba de forma análoga que  $y \in \langle f, g \rangle$  y por tanto tenemos  $\langle x, y \rangle \subset \langle f, g \rangle$ . De esta forma  $\langle f, g \rangle = \langle x, y \rangle$ . Lo que prueba que (a) implica (b).

Ahora veamos que (b) implica (c).

Supongamos que  $\langle f, g \rangle = \langle x, y \rangle$ , por el teorema de la función inversa basta ver que  $\{(\frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0)), (\frac{\partial g}{\partial x}(0), \frac{\partial g}{\partial y}(0))\}$  es una base de  $\mathbb{C}^2$  como espacio vectorial.

Tenemos  $x = a_1 f + a_2 g$  con  $a_1, a_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  puesto que  $x \in \langle f, g \rangle$ .

Derivando con respecto a  $x$  tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial x}(0) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0)a_1(0) + \frac{\partial a_1}{\partial x}(0)f(0) \right) + \left( \frac{\partial g}{\partial x}(0)a_2(0) + \frac{\partial a_2}{\partial x}(0)g(0) \right) \quad (3.2.10) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0)a_1(0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0)a_2(0). \end{aligned}$$

De forma análoga derivando respecto a  $y$  tenemos

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0)a_1(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0)a_2(0). \quad (3.2.11)$$

y por tanto

$$(1, 0) = a_1(0) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0) \right) + a_2(0) \left( \frac{\partial g}{\partial x}(0), \frac{\partial g}{\partial y}(0) \right). \quad (3.2.12)$$

De forma análoga para  $y = b_1f + b_2g$  tenemos

$$(0, 1) = b_1(0) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0) \right) + b_2(0) \left( \frac{\partial g}{\partial x}(0), \frac{\partial g}{\partial y}(0) \right). \quad (3.2.13)$$

Por tanto  $\{(\frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0)), (\frac{\partial g}{\partial x}(0), \frac{\partial g}{\partial y}(0))\}$  es una base de  $\mathbb{C}^2$  como espacio vectorial y por el teorema de la función inversa se sigue que  $(f, g)$  es invertible localmente. Lo que prueba que (b) implica (c).

Finalmente, que (c) implica (a) es consecuencia directa de la proposición 3.34.  $\square$

Ahora veamos que la multiplicidad de intersección se distribuye con la suma.

**Teorema 3.24 (Aditividad).** *Para cualesquiera 3 divisores locales efectivos  $D, D', D''$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tales que los soportes respectivos satisfacen la igualdad  $|D| \cap (|D'| \cup |D''|) = \{0\}$ . Entonces la multiplicidad de intersección en 0 cumple*

$$D \cdot (D' + D'') = D \cdot D' + D \cdot D''. \quad (3.2.14)$$

**Demostración.** Por la observación 3.7 existen  $f, g$  y  $h$  gérmenes asociados a  $D', D''$  y  $D$  respectivamente alrededor de 0. De la observación 3.5 se sigue que el divisor  $D' + D''$  está asociado a  $D_{fg}$ . En lo siguiente denotaremos por  $\overline{\mathcal{O}}$  al anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle h \rangle$  y a las clases correspondientes los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$  en  $\overline{\mathcal{O}}$  por  $\tilde{f} := f + \langle h \rangle$  y  $\tilde{g} := g + \langle h \rangle$  respectivamente. Observando que el cociente  $\langle h, f \rangle / \langle h \rangle$  en el anillo  $\overline{\mathcal{O}}$  es generado por  $\tilde{f}$ , junto con el tercer teorema de isomorfismo tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle h, f \rangle &\simeq (\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle h \rangle) / (\langle h, f \rangle / \langle h \rangle) \\ &= \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f} \rangle \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Y por tanto la multiplicidad de intersección entre  $D_h$  y  $D_f$  en 0 satisface la igualdad

$$D_h \cdot D_f = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f} \rangle. \quad (3.2.16)$$

De forma análoga tenemos

$$D_h \cdot D_f = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f} \rangle, \quad (3.2.17)$$

$$D_h \cdot D_{fg} = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle. \quad (3.2.18)$$

La transformación

$$\begin{aligned} L : \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle &\longrightarrow \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{g} \rangle \\ k + \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle &\longmapsto k + \langle \tilde{g} \rangle, \quad k \in \overline{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

está bien definida pues el ideal  $\langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle$  está contenido en el ideal  $\langle \tilde{g} \rangle$ , es una transformación lineal sobre  $\mathbb{C}$  y es suprayectiva. El kernel de la transformación lineal  $L$  está dado por el cociente  $\langle \tilde{g} \rangle / \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle$  que es isomorfo linealmente a  $\overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{g} \rangle$  a través de la transformación

$$\begin{aligned} M : \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f} \rangle &\longrightarrow \langle \tilde{g} \rangle / \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle \\ k + \langle \tilde{g} \rangle &\longmapsto k\tilde{f} + \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle, \quad k \in \overline{\mathcal{O}} \\ M : \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f} \rangle &\longrightarrow \langle \tilde{g} \rangle / \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle \\ k + \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle &\longmapsto k + \langle \tilde{g} \rangle, \quad k \in \overline{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la dimensión de transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita a la transformación  $L$  tenemos

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{f}\tilde{g} \rangle &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(L) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Img}(L) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(L) + \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}} / \langle \tilde{g} \rangle \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

□

**Definición 3.25.** Sean  $D$  y  $D'$  divisores locales con intersección aislada en 0,  $D'$  efectivo. Como  $D$  puede ser representado como la diferencia de 2 divisores efectivos  $D_1, D_2$  tales que la intersección de  $D'$  con  $D_i$  es aislada para  $i = 1, 2$ .  $D = D_1 - D_2$ . Definimos la *multiplicidad de intersección de los divisores  $D$  y  $D'$  en 0* con la ecuación

$$D \cdot D' := D \cdot D_1 - D \cdot D_2 \quad (3.2.20)$$

Veamos que esta definición no depende de la elección de  $D_1, D_2$ .

Escribamos al divisor local  $D$  de la forma  $D = D_1 - D_2 = D_3 - D_4$ , para  $D_i$  divisor efectivo local con intersección aislada con  $D'$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . De esta forma

$$D_1 + D_4 = D_3 + D_2. \quad (3.2.21)$$

Por la proposición 3.24 tenemos que

$$D \cdot (D_1 + D_4) = D \cdot D_1 + D \cdot D_4 \quad (3.2.22)$$

y

$$D \cdot (D_3 + D_2) = D \cdot D_3 + D \cdot D_2; \quad (3.2.23)$$

de las igualdades (3.2.22) y (3.2.23) se sigue que

$$D \cdot D_1 + D \cdot D_4 = D \cdot D_3 + D \cdot D_2 \quad (3.2.24)$$

y de esta forma

$$D \cdot D_1 - D \cdot D_2 = D \cdot D_3 - D \cdot D_4. \quad (3.2.25)$$

□

A lo largo del capítulo 5 del libro *Singularities of Differentiable Maps*, Volume 1 [AGV] se prueba que esta definición algebraica de multiplicidad es equivalente a las siguientes dos definiciones que, además de dar una interpretación geométrica y topológica de la multiplicidad de intersección, nos da una forma de calcularla:

**Definición 3.26.** *El grado topológico de una transformación suave  $h$  entre dos variedades reales, se define como*

$$\text{topdeg}(h) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} \text{sign } dh_x$$

con  $\text{sign } dh_x = \pm 1$  dependiendo de si  $dh_x$  preserva o no la orientación, y un valor regular de  $h$  (Entendiendo como valor regular  $a \in B$  de una función diferenciable  $f : A \rightarrow B$ , si cada punto de  $f = a$  es tal que su derivada en ese punto tiene rango máximo como matriz).

**Definición 3.27.** El índice  $\text{ind}_a[f]$  de una transformación  $f : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  en el punto  $a$  es el grado topológico de la transformación

$$\frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\rho^{2n-1}(a) \rightarrow \mathbb{S}_1^{2n-1}(0)$$

donde  $\mathbb{S}_\rho^{2n-1} = \{x \mid \|x - a\| = \rho\}$  vista como transformación suave entre dos variedades reales. Si existe una vecindad de  $a$  en la cual no hay imagen inversa del 0 aparte posiblemente del punto  $a$ , entonces el índice está bien definido (Ver [[Arn89], Pág. 86]).

**Proposición 3.28.** *El índice en  $a$  de una transformación holomorfa*

$$f : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

*es igual al número de preimágenes de un valor regular arbitrario suficientemente chico.*

**Demostración.** Ver [[Arn89], Pág. 90]. □

**Definición 3.29 (topología de la multiplicidad de intersección).** Sean  $f$  y  $g$  funciones holomorfas definidas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , consideremos  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  los germenes asociados a  $f$  y  $g$  respectivamente en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , tenemos que si los divisores locales respectivos  $D_{\mathbf{f}}$  y  $D_{\mathbf{g}}$  tienen intersección aislada, entonces la multiplicidad de intersección entre  $D_{\mathbf{f}}$  y  $D_{\mathbf{g}}$  en 0 cumple,

$$D_{\mathbf{f}} \cdot D_{\mathbf{g}} = \text{ind}_a[(f, g)]. \quad (3.2.26)$$

donde  $(f, g) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

Como consecuencia de la definición topológica de multiplicidad de intersección y la proposición 3.28 obtenemos una forma geométrica de interpretar la multiplicidad de intersección.

**Definición 3.30 (geometría de la multiplicidad de intersección).** Con la notación de la definición 3.29 tenemos que la multiplicidad de intersección de  $D_{\mathbf{f}}$  con  $D_{\mathbf{g}}$  en 0 satisface

$$D_{\mathbf{f}} \cdot D_{\mathbf{g}} = \#\{(f, g) = (a, b)\} = \#\{f = a\} \cap \{g = b\}, \quad (3.2.27)$$

donde  $(a, b)$  cualquier valor regular de la transformación  $(f, g)$  en una vecindad conexa alrededor del 0. Podemos tomar un valor regular gracias al lema de Sard que implica que el conjunto de valores regulares es denso.

Una consecuencia inmediata de los teoremas 3.30 y 3.29 es la siguiente.

**Proposición 3.31.** Para  $f(x) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$  de orden  $\mu \geq 1$  y para valores lo suficientemente cercanos  $a \neq 0$  a 0, se cumple que el número de preimágenes de  $a$  es igual a  $\mu$ ,  $\mu = \#\{f(x) = a\}$ .

**Demostración.** En efecto consideremos  $f(x, y) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  por un lado tenemos que  $D_f$  y  $D_y$  tienen intersección aislada en 0 pues  $f$  sólo depende de  $x$  y la multiplicidad de intersección en 0 satisface

$$D_f \cdot D_y = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0) / \langle f(x), y \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0) / \langle f(x) \rangle = \mu. \quad (3.2.28)$$

Por otro lado, tomemos un valor regular de la transformación  $(f(x), y)$ ,  $(a, b)$  con el lema de Sard, de forma que por el la definición 3.30 tengamos

$$D_f \cdot D_y = \#\{f(x) = a, y = b\}. \quad (3.2.29)$$

Junto con la ecuación (3.2.28) tenemos

$$\#\{f(x) = a, y = b\} = \mu. \quad (3.2.30)$$

Viendo a  $f(x)$  como germen de función holomorfa en una variable tenemos

$$\#\{f(x) = a\} = \mu.$$

□

Una herramienta conveniente para calcular la multiplicidad de intersección entre dos divisores locales efectivos asumiendo que uno de los dos divisores locales es irreducible (por el teorema de aditividad), junto con el hecho de que en el caso de que  $D_f$  sea irreducible, es que en este caso,  $\{f = 0\}$  puede ser parametrizado localmente por una transformación inyectiva no constante  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $0 \equiv f \circ \tau \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$  (Ver teorema A.33), es el siguiente lema.

**Lema 3.32.** *Sean  $f$  y  $g$  dos gérmenes de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  con  $f$  irreducible. Consideremos una parametrización holomorfa local inyectiva no constante  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  de  $\{f = 0\}$ , i.e.,  $0 \equiv f \circ \tau \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ ) (dada por el teorema de parametrización de Puiseux A.33).*

*Tenemos que los divisores locales  $D_f$  y  $D_g$  asociados a los gérmenes de funciones holomorfas  $f$  y  $g$ , respectivamente en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tienen intersección aislada en 0 si y solo si, el germen de función holomorfa  $g \circ \tau$  no es idénticamente cero en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ . En este caso la multiplicidad de intersección de  $D_f$  con  $D_g$  en 0 es igual al orden de el germen de función holomorfa  $g \circ \tau$  en 0,*

$$D_f \cdot D_g = \text{ord}_0(f \circ \tau). \quad (3.2.31)$$

**Demostración.** La primera parte del teorema es consecuencia directa del lema de Study A.27 como se probó en la proposición 3.18. Para la segunda afirmación supongamos que el germen de función holomorfa  $g \circ \tau$  no es idénticamente cero en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ , donde  $\tau(t)$  es una parametrización local de la curva  $\gamma = \{f = 0\}$ . Observemos que, de la proposición 3.31 tenemos

$$\#\{f = 0, g = b\} = \#\{g \circ \tau = b\} = \text{ord}_0 g \circ \tau, \quad (3.2.32)$$

para  $b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$  lo suficientemente chica. Del teorema 3.30 junto con la ecuación (3.2.32) tenemos que para probar que la multiplicidad de intersección satisface la ecuación (3.2.31) es suficiente probar que  $(0, b)$  es valor regular de la transformación  $(f, g)$ . Probemos esto último viendo que en una vecindad de 0, el conjunto  $\gamma \setminus \{0\}$  consiste solo de puntos regulares de la transformación  $(f, g)$ .

Sea  $J = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Tenemos que  $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$  es un punto regular de la transformación  $(f, g)$  si  $J(p) \neq 0$ . Para ver que en una vecindad de 0, el conjunto  $\gamma \setminus \{0\}$  consiste solo de puntos regulares de la transformación  $(f, g)$ , consideremos el germen de función holomorfa  $h = J \circ \tau$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ . Probemos que  $h$  no es idénticamente 0 por contradicción. Para ello, supongamos que  $h$  es el germen idénticamente 0 en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ . Si para  $t \in \mathbb{C}$  se cumple que  $h(t) = 0$ , entonces los vectores  $\nabla f(\tau(t))$  y  $\nabla g(\tau(t))$  son paralelos, donde  $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$  y  $\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y})$  los campos vectoriales gradientes correspondientes a  $f$  y  $g$  respectivamente. Como  $\tau(t)$  es una parametrización local de  $\{f = 0\}$  tenemos que  $\nabla f(\tau(t))$  y  $\tau'(t)$  son ortogonales con el producto punto usual. Por consiguiente si  $\nabla g(\tau(t))$  y  $\nabla f(\tau(t))$  son paralelos entonces  $\nabla g(\tau(t))$  y  $\tau'(t)$  son ortogonales, lo que implica que la derivada de  $g \circ \tau(t)$  es 0 pues  $d(g \circ \tau)(t) =$

$\nabla g(\tau(t)) \cdot \tau'(t)$ , esto implica que si  $h$  es idénticamente cero entonces  $g \circ \tau(t)$  es constante pues en cada punto su derivada es 0 y más aún  $g \circ \tau(t)$  es idénticamente 0, pues en 0 vale 0. Como  $\tau$  es parametrización local de  $\{g = 0\}$  se sigue que  $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$  lo que contradice que la intersección de  $D_f$  con  $D_g$  sea aislada.

Así, hemos probado que los puntos en el conjunto  $\gamma \setminus \{0\}$  son regulares en una vecindad de 0, y como  $\{f = 0, g = b\} \subset \{f = 0\} = \gamma$ , se sigue que  $(0, b)$  es valor regular para  $b$  lo suficientemente chico.  $\square$

**Corolario 3.33.** *Sea  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  un germen de función holomorfa de orden  $n$  finito. Tenemos que para una recta genérica  $L$  que pasa por el origen se cumple que el orden en 0 de  $f$  es igual a multiplicidad de intersección en 0 del divisor local asociado a  $f$ ,  $D_f$  con la recta  $L$ .*

**Demostración.** Consideremos la recta  $L = \{l = 0\}$  con  $l(x, y) = y - ax$ . El polinomio homogéneo de grado  $n$ ,  $f_n(x, y)$ , que aparece en la expansión en series de potencias de  $f$  satisface que el polinomio  $f_n(1, y)$  no es idénticamente 0, pues  $n = \text{ord}_0 f$ . Por lo tanto podemos tomar  $a \in \mathbb{C}$  de forma que  $f_n(1, a) \neq 0$ . Como  $\phi(t) = (t, at)$  es parametrización local de  $L$ , se sigue del lema 3.32 que la mutiplicidad de intersección entre los divisores locales  $D_f$  y  $L$  en 0 satisface:

$$\begin{aligned} D_f \cdot L &= \text{ord}_0 f \circ \tau(t) \\ &= \text{ord}_0 f(t, at) \\ &= \text{ord}_0 f_n(t, at) + f_{n+1}(t, at) + \dots \\ &= \text{ord}_0 f_n(1, a)t^n + f_{n+1}(1, a)t^{n+1} + \dots \\ &= n. \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

$\square$

Notemos que si dos divisores  $D$  y  $D'$  tienen intersección aislada, entonces la preimagen de ellos bajo un biholomorfismo también tendrá intersección aislada al ser una correspondencia biyectiva. Más aún, tenemos que la intersección entre preimágenes de divisores locales es invariante bajo biholomorfismos.

**Proposición 3.34.** *Sea  $\pi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  un biholomorfismo con  $\pi(0) = 0$ . Para dos divisores locales  $D$  y  $D'$  con intersección aislada en 0, se cumple que la intersección de sus preimágenes  $\pi^{-1}(D)$  y  $\pi^{-1}(D')$  respectivas es aislada. Además, la multiplicidad de intersección en 0 satisface:*

$$\pi^{-1}(D) \cdot \pi^{-1}(D') = D \cdot D'. \tag{3.2.34}$$

**Demostración.** Sean  $f$  y  $g$  gérmenes de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  asociados a los divisores  $D$  y  $D'$  respectivamente alrededor de 0. Por la proposición 3.15 tenemos que  $f \circ \pi$  y  $g \circ \pi$  son los gérmenes de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  asociados a los divisores  $\pi^{-1}(D)$  y  $\pi^{-1}(D')$  respectivamente. Al ser  $\pi$

biholomorfismo (en particular biyectiva) tenemos

$$\begin{aligned} \{f \circ \pi = 0\} \cap \{g \circ \pi = 0\} &= \pi^{-1}(\{f = 0\}) \cap \pi^{-1}(\{g = 0\}) \\ &= \pi^{-1}(\{f = 0\} \cap \{g = 0\}) \\ &= \pi^{-1}(\{0\}) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $D_f$  y  $D_g$  tienen intersección aislada en 0 entonces  $\pi^{-1}(D_f)$  y  $\pi^{-1}(D_g)$  también tienen intersección aislada en 0. Para la segunda parte tomemos  $(a, b)$  valor regular de  $(f, g)$  en una vecindad del origen. Como  $\pi$  es un biholomorfismo,  $(a, b)$  es también valor regular de  $(f, g) \circ \pi = (f \circ \pi, g \circ \pi)$ . Dado que  $\pi$  es un biholomorfismo tenemos que

$$\begin{aligned} \#\{(f, g) \circ \pi = (a, b)\} &= \#\pi^{-1}(\{(f, g) = (a, b)\}) \\ &= \#\{(f, g) \circ \pi = (a, b)\} \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Finalmente del teorema 3.30 junto con la ecuación (3.2.35) tenemos que la multiplicidad de intersección entre los divisores cumple  $D_{f \circ \pi}$  y  $D_{g \circ \pi}$  cumple

$$D_{f \circ \pi} \cdot^0 D_{g \circ \pi} = D_f \cdot^0 D_g.$$

□

**Definición 3.35.** Sea  $M$  una variedad compleja, consideremos  $D$  y  $D'$  dos divisores locales con intersección aislada alrededor de un punto  $a \in M$ . Definimos la *multiplicidad de intersección de los divisores locales  $D$  y  $D'$  en el punto  $a$*  como la multiplicidad de intersección entre los divisores locales  $\phi^{-1}(D)$  y  $\phi^{-1}(D')$  en  $0 \in \mathbb{C}^2$ , donde  $\phi$  es la carta de  $M$  correspondiente al punto  $a$  y tal que  $\phi(0) = a$ .

En otras palabras si denotamos a la multiplicidad de intersección entre los divisores locales  $D$  y  $D'$  en el punto  $a$  como  $D \cdot^a D'$ , tenemos:

$$D \cdot^a D' := \phi^{-1}(D) \cdot^0 \phi^{-1}(D'). \quad (3.2.36)$$

**Definición 3.36.** Decimos que 2 divisores  $D$  y  $D'$  definidos en una variedad compleja  $M$  tienen *intersección aislada* si la intersección de sus soportes respectivos  $|D| \cap |D'|$  consiste de un número finito de puntos.

**Definición 3.37.** Sean  $D$  y  $D'$  dos divisores con intersección aislada definidos en una variedad compleja  $M$ . Definimos el *índice de intersección entre los divisores  $D$  y  $D'$*  como la suma de la multiplicidad de intersección en cada punto de la intersección  $|D| \cap |D'|$ , esto es

$$D \cdot D' = \sum_{a \in M} D \cdot^a D' \quad (3.2.37)$$

Donde sólo los puntos de  $|D| \cap |D'|$  contribuyen en términos no cero.

**Proposición 3.38.** *Sea  $\pi : M \rightarrow N$  es un biholomorfismo entre dos variedades complejas  $M$  y  $N$ . Para dos divisores  $D, D'$  en  $N$  con intersección aislada, las preimágenes  $\pi^{-1}(D)$  y  $\pi^{-1}(D')$  tienen intersección aislada y satisfacen.*

$$\pi^{-1}(D) \cdot \pi^{-1}(D') = D \cdot D' \quad (3.2.38)$$

□

**Demostración.** *Se sigue de la proposición 3.34.*

Consideremos  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación monoidal (estándar). Para  $D$  y  $D'$  divisores en  $\mathbb{C}^2$  con intersección aislada tenemos dos casos, si el 0 está o no está en la intersección. En el segundo caso, por la proposición 3.38 las preimágenes  $\sigma^{-1}(D)$  y  $\sigma^{-1}(D')$  tienen intersección aislada y cumplen tener el mismo índice de intersección que los divisores  $D$  y  $D'$ . En el primer caso tenemos que el divisor  $\mathbb{E}$  está contenido en el soporte de las preimágenes y por tanto nos gustaría extender la definición de índice de intersección de forma que las preimágenes  $\sigma^{-1}(D)$  y  $\sigma^{-1}(D')$  cumplan la ecuación (3.2.38); esto es, tenemos que definir el índice de intersección de  $\mathbb{E}$  consigo mismo. Del ejemplo 2.5 se sigue que este debería satisfacer  $\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} = -1$ .

**Lema 3.39.** *Sea  $\gamma$  una variedad analítica de codimensión 1 en  $\mathbb{C}^2$  y  $\tilde{\gamma}$  su explosión en  $\mathbb{M}$  con la transformación monoidal estándar  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Tenemos que la intersección del divisor  $\tilde{\gamma}$  con el divisor excepcional  $\mathbb{E}$  es aislada y el índice de intersección entre los divisores  $\tilde{\gamma}$  y  $\mathbb{E}$  es igual al orden de un germen de función holomorfa libre de cuadrados  $f$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  que describe a  $\gamma$  en una vecindad de 0,*

$$\tilde{\gamma} \cdot \mathbb{E} = \text{ord}_0 f.$$

**Demostración.** Consideremos  $f$  un germen de función analítica de orden  $n$  libre de cuadrados en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Escribamos a  $f$  como suma de polinomios homogéneos que aparecen en la serie de potencias de  $f$ ,

$$f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n+1}(x, y) + \cdots,$$

donde  $f_m$  denota al polinomio homogéneo de grado  $m$  que aparece en la expansión en series de potencias de  $f$  en una vecindad de 0. Sea  $\gamma = \{f = 0\}$  y  $\tilde{\gamma}$  la explosión de la curva  $\gamma$ . De la proposición 2.4 tenemos que los puntos en la intersección de la curva analítica  $\tilde{\gamma}$  con el divisor excepcional  $\mathbb{E}$  son descritos en la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  por los puntos  $(0, t)$  donde  $f(0, t) = f_n(0, t) + 0 = 0$  y el punto  $(0, 0)$  de la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  si  $f_n(0, 1) = 0$ . Por tanto la intersección del divisor excepcional  $\mathbb{E}$  y la curva  $\tilde{\gamma}$  es aislada y más aún, del

lema 3.32 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \cdot \tilde{\gamma} &= \sum_{p \in \mathbb{E}} \mathbb{E} \cdot \tilde{\gamma} \\
&= \sum_{a \in \mathbb{C}} \text{ord}_a f(0, t) + \text{ord}_0 f(t, 0) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{C}} \text{ord}_a f_n(1, t) + \text{ord}_0 f_n(t, 1) \\
&= \text{grad} f_n(1, t) + \text{ord}_0 f_n(t, 1) \\
&= n.
\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

□

**Teorema 3.40.** *Sea  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación monoidal estándar. El índice de intersección entre divisores con intersección aislada en  $\mathbb{M}$  puede ser extendido de manera única para parejas de divisores  $R$  y  $R'$  que satisfagan  $|R| \cap |R'| \subset \mathbb{E}$ , como una forma bilineal simétrica con las siguientes propiedades:*

- a)  $\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} = -1$ ,
- b) *Para cada divisor  $D$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  se satisface que la preimagen de  $D$  con  $\sigma$  satisface  $\sigma^{-1}(D) \cdot \mathbb{E} = 0$ ,*
- c) *El índice de intersección de la preimagen de dos divisores  $D$  y  $D'$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con intersección aislada coincide con el índice de intersección entre  $D$  y  $D'$ , esto es  $\sigma^{-1}(D) \cdot \sigma^{-1}(D') = D \cdot D'$ .*

**Demostración.** Definamos el índice de autointersección del divisor excepcional  $\mathbb{E}$  consigo mismo en  $\mathbb{M}$  como  $-1$  y extendamos de forma bilineal el índice de intersección para parejas de divisores cuyo soporte contiene al divisor excepcional de forma natural.

Veamos que sucede (b), por bilinealidad basta considerar el caso cuando  $D$  es una curva analítica. Sea  $f$  un germen de función holomorfa libre de cuadrados de orden  $n$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\{f = 0\}$  coincida con  $D$  en una vecindad de  $0$ . Por definición  $\sigma^{-1}(D) = \tilde{D} + n\mathbb{E}$  donde  $\tilde{D}$  es la explosión simple de la curva  $D$  en  $0$ , por bilinealidad suponiendo que  $\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} = -1$  y gracias al lema 3.39 tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}(D) \cdot \mathbb{E} &= (\tilde{D} + n\mathbb{E}) \cdot \mathbb{E} \\
&= \tilde{D} \cdot \mathbb{E} + n\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \\
&= n - n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que sucede (c) suponiendo que sucede (b). Al ser  $\sigma$  un biholomorfismo fuera de  $0$  basta probar que  $\sigma^{-1}(D_f) \cdot \sigma^{-1}(D_g) = D_f \cdot D_g$  donde  $D_f$  y  $D_g$  son los divisores locales con intersección aislada en  $0$  dados por  $f$  y  $g$  gérmenes

de funciones holomorfas en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , respectivamente. Más aún, por bilinealidad podemos suponer que  $f$  es un germen de función irreducible de orden  $n$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

De (b) tenemos

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(D_f) \cdot \sigma^{-1}(D_g) &= (\widetilde{D}_f + n\mathbb{E}) \cdot \sigma^{-1}(D_g) \\ &= \widetilde{D}_f \cdot \sigma^{-1}(D_g) + n\mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_g) \\ &= \widetilde{D}_f \cdot \sigma^{-1}(D_g),\end{aligned}\tag{3.2.40}$$

donde  $\widetilde{D}_f$  es la explosión de  $D_f$ , del corolario 2.8 tenemos que  $\widetilde{D}_f$  interseca a  $\mathbb{E}$  en un punto  $a$  y  $\widetilde{D}_f = D_s$  para  $s$  un germen de función analítica irreducible en  $\mathcal{O}(M, a)$ . Por el teorema de parametrización de Puiseux existe  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M, a)$  holomorfa que parametriza localmente a  $D_s$  alrededor de  $a$ .

Del lema 3.32 tenemos que como  $s$  es irreducible en  $\mathcal{O}(M, a)$  y  $\tau$  es una parametrización local de  $\widetilde{D}_f = D_s$  tenemos

$$\widetilde{D}_f \cdot \sigma^{-1}(D_g) = \widetilde{D}_f \cdot (D_{g \circ \sigma}) = \text{ord}_0(g \circ \sigma) \circ \tau(t)\tag{3.2.41}$$

Por otro lado  $\sigma \circ \tau(t)$  parametriza a localmente a  $D_f$  en 0 pues  $\tau(t)$  parametriza localmente a  $\widetilde{D}_f$  en una vecindad de la intersección de  $\widetilde{D}_f$  con el divisor excepcional  $\mathbb{E}$ , al ser  $f$  es irreducible se sigue del lema 3.32 que

$$D_f \cdot D_g = \text{ord}_0 g \circ (\sigma \circ \tau)(t)\tag{3.2.42}$$

Finalmente de las ecuaciones (3.2.40), (3.2.41) y (3.2.42) tenemos que

$$\sigma^{-1}(D_f) \cdot \sigma^{-1}(D_g) = D_f \cdot D_g.\tag{3.2.43}$$

Por bilinealidad tenemos que para cualquier par de divisores  $D$  y  $D'$  con intersección aislada en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  se cumple que  $\sigma^{-1}(D) \cdot \sigma^{-1}(D') = D \cdot D'$ .  $\square$

**Corolario 3.41.** *Sean  $f$  y  $g$  dos gérmenes de funciones holomorfas sin factores en común en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  y sean  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  sus explosiones simples respectivamente en  $(M, \mathbb{E})$ . Tenemos la igualdad*

$$D_{\tilde{f}} \cdot D_{\tilde{g}} = D_f \cdot D_g - \text{ord}_0 g \cdot \text{ord}_0 f.\tag{3.2.44}$$

**Demostración.** Por definición tenemos que

$$\sigma^{-1}(D_f) = D_{\tilde{f}} + n\mathbb{E}$$

y

$$\sigma^{-1}(D_g) = D_{\tilde{g}} + m\mathbb{E}$$

donde  $n = \text{ord}_0 f$ ,  $m = \text{ord}_0 g$ . En virtud del teorema 3.40, tenemos

$$\begin{aligned}D_{\tilde{f}} \cdot D_{\tilde{g}} &= (\sigma^{-1}(D_f) - n\mathbb{E}) \cdot (\sigma^{-1}(D_g) - m\mathbb{E}) \\ &= \sigma^{-1}(D_f) \cdot \sigma^{-1}(D_g) - n\mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_g) - m\mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_f) + nm\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} \\ &= D_f \cdot D_g - nm.\end{aligned}$$

$\square$

### 3.3. Multiplicidad de intersección de series formales

Tenemos que la definición de multiplicidad de intersección (3.19) entre divisores locales en un punto estaba bien definida si los divisores respectivos tenían intersección aislada, condición que vimos es equivalente a ver que los gérmenes de funciones holomorfas que definen a los divisores locales no tienen factores en común, una condición meramente algebraica. Veamos que podemos extender la definición de multiplicidad de intersección entre divisores locales a series formales.

**Definición 3.42.** Sean  $f$  y  $g$  series formales en  $\mathbb{C}[[x, y]]$  sin factores en común. Definimos la *multiplicidad de intersección entre  $f$  y  $g$*  como

$$D_f \cdot D_g = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle_F, \quad (3.3.1)$$

donde  $\langle f, g \rangle_F$  es el ideal generado por  $f$  y  $g$  en el anillo  $\mathbb{C}[[x, y]]$  y denotando por  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle_F$  a la dimensión del cociente  $\mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle_F$  visto como espacio vectorial sobre los complejos.

1-forma Veamos que esta definición realmente extiende la definición de multiplicidad de intersección entre divisores locales en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Proposición 3.43.** Sean  $f$  y  $g$  gérmenes de funciones holomorfas sin factores en común en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  y veámoslas como series de potencias convergentes en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ . Tenemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / \langle f, g \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle_F, \quad (3.3.2)$$

donde  $\langle f, g \rangle_F$  es el ideal generado por  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{C}[[x, y]]$  y  $\langle f, g \rangle$  al ideal generado por  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ .

**Demostración.** Como  $\{f = 0\} \cap \{g = 0\} = \{0\}$  y  $g$  no tienen factores en común en  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , tenemos de la proposición 3.18 que la intersección de  $\{f = 0\}$  y  $\{g = 0\}$  es igual a 0. Por Nullsetellensatz tenemos que existen  $k, l \in \mathbb{N}^*$  de forma que  $x^k, y^l \in \langle f, g \rangle \subset \langle f, g \rangle_F$ .

Desarrollando a  $f$  en serie de potencias

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} x^i y^j,$$

definimos

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} c_{i,j} x^i y^j.$$

De forma análoga definimos  $\tilde{g}(x, y)$ .

Tenemos que  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  así definidas cumplen

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle \tilde{f}, \tilde{g}, x^k, y^l \rangle, \\ \langle f, g \rangle_F &= \langle \tilde{f}, \tilde{g}, x^k, y^l \rangle_F. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Consideremos la transformación lineal sobre  $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}\{x, y\} / \langle f, g \rangle &\rightarrow \mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle_F \\ h + \langle f, g \rangle &\mapsto h + \langle f, g \rangle_F, \quad h \in \mathbb{C}\{x, y\} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

De las igualdades (3.3.3) tenemos que  $\phi$  es un isomorfismo lineal.  $\square$

**Proposición 3.44.** *Consideremos  $H$  un biholomorfismo formal de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  en sí mismo visto como un automorfismo invertible de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ . Tenemos que para  $f$  y  $g$  series de potencias sin factores en común en  $\mathbb{C}[[x, y]]$ , la multiplicidad de intersección entre ellos satisface:*

$$D_f \cdot D_g = D_{H(f)} \cdot D_{H(g)}.$$

**Demostración.** Como  $H$  es un isomorfismo de  $\mathbb{C}[[x, y]]$  a  $\mathbb{C}[[x, y]]$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle &\simeq \mathbb{C}[[x, y]] / H(\langle f, g \rangle) \\ &\simeq \mathbb{C}[[x, y]] / \langle H(f), H(g) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto la multiplicidad de intersección entre las series de potencias  $f$  y  $g$  satisface

$$\begin{aligned} D_f \cdot D_g &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle f, g \rangle \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle H(f), H(g) \rangle \\ &= D_{H(f)} \cdot D_{H(g)}. \end{aligned}$$

$\square$

### 3.4. Multiplicidad de un punto singular

Consideremos una foliación holomorfa singular  $\mathcal{F}$  definida por la ecuación de Pfaff  $\omega = 0$  con  $\omega$  una 1-forma holomorfa  $\omega = f dx + g dy$  equivalentemente definida por el campo vectorial holomorfo  $-g \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}$  en una vecindad del punto singular aislado en el origen. Esta condición implica que  $D_f$  y  $D_g$  tienen intersección aislada.

**Definición 3.45.** Sea  $\omega = f dx + g dy$  una 1-forma formal definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , tal que  $f$  y  $g$  no tienen factores en común en  $\mathbb{C}[[x, y]]$ . La *multiplicidad*  $\mu_0(\omega)$  de  $\omega$  en 0 es la multiplicidad de intersección  $D_f \cdot D_g$ .

**Proposición 3.46.** *Sea  $\omega = f dx + g dy$  una 1-forma formal definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , tal que  $f$  y  $g$  no tienen factores en común en  $\mathbb{C}[[x, y]]$  y  $H = (H_1, H_2)$  un biholomorfismo formal de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  en sí mismo. Tenemos que la multiplicidad de  $\omega$  en 0 coincide con la multiplicidad de la 1-forma inducida por  $\omega$  a través de  $H$ , esto es:*

$$\mu_0(\omega) = \mu_0(H^*\omega).$$

**Demostración.** Tenemos

$$\begin{aligned} H^*\omega &= f \circ HdH_1 + g \circ HdH_2 \\ &= f \circ H\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}dx + \frac{\partial H_1}{\partial y}dy\right) + g \circ H\left(\frac{\partial H_2}{\partial x}dx + \frac{\partial H_2}{\partial y}dy\right) \\ &= (f \circ H\frac{\partial H_1}{\partial x} + g \circ H\frac{\partial H_2}{\partial x})dx + (f \circ H\frac{\partial H_1}{\partial y} + g \circ H\frac{\partial H_2}{\partial y})dy. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &\mu_0(H^*\omega) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[x, y]] / \langle f \circ H\frac{\partial H_1}{\partial x} + g \circ H\frac{\partial H_2}{\partial x}, f \circ H\frac{\partial H_1}{\partial y} + g \circ H\frac{\partial H_2}{\partial y} \rangle. \end{aligned}$$

Como el ideal  $\langle f \circ H\frac{\partial H_1}{\partial x} + g \circ H\frac{\partial H_2}{\partial x}, f \circ H\frac{\partial H_1}{\partial y} + g \circ H\frac{\partial H_2}{\partial y} \rangle$  está contenido en el ideal  $\langle f \circ H, g \circ H \rangle$  tenemos que

$$\mu_0(f \circ Hdx + g \circ Hdy) \leq \mu_0(H^*\omega) \quad (3.4.1)$$

De la proposición tenemos que

$$\mu_0(fdx + gdy) = \mu_0(f \circ Hdx + g \circ Hdy) \quad (3.4.2)$$

De las desigualdades 3.4.1 y 3.4.2 tenemos que

$$\mu_0(\omega) \leq \mu_0(H^*\omega) \quad (3.4.3)$$

Finalmente de la desigualdad (3.4.3) para la forma inducida de  $H^*\omega$  con la transformación  $H^{-1}$ , junto con  $H^{-1*}(H^*\omega) = (H \circ H^{-1})^*\omega = \omega$  tenemos

$$\mu_0(H^*\omega) \leq \mu_0(\omega) \quad (3.4.4)$$

Y por tanto de las desigualdades (3.4.3) y (3.4.4) se sigue que

$$\mu_0(\omega) = \mu_0(H^*\omega).$$

□

**Definición 3.47.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que el 0 es una singularidad aislada, definida por la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$ , donde  $\omega$  es una 1-forma definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Definimos la *multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0* como la multiplicidad de la 1-forma  $\omega$  en 0. Denotamos la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 como  $\mu_0(\mathcal{F})$ , con esta notación:

$$\mu_0(\mathcal{F}) := \mu_0(\omega)$$

**Observación 3.48.** Una primera observación que podemos hacer de la definición de multiplicidad es que es invariante bajo cambios de coordenadas por la proposición 3.46.

**Proposición 3.49.** *Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  dos foliaciones singulares en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada. Si  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  son analíticamente equivalentes entonces las multiplicidades respectivas en 0 satisfacen:*

$$\mu_0(\mathcal{F}) = \mu_0(\mathcal{F}'). \quad (3.4.5)$$

**Demostración.** Consideremos la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  que describe a la foliación  $\mathcal{F}$  en 0, donde  $\omega$  es una 1-forma definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Como  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  son foliaciones analíticamente equivalentes, existe un biholomorfismo  $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  de forma que la ecuación de Pfaff  $\{\phi^*\omega = 0\}$  describe a la foliación  $\mathcal{F}'$ . Finalmente de la proposición 3.46 tenemos que las multiplicidades de las 1-formas respectivas en 0 satisfacen:

$$\mu_0(\omega) = \mu_0(\phi^*\omega)$$

y por definición

$$\mu_0(\mathcal{F}) = \mu_0(\mathcal{F}').$$

□

**Proposición 3.50.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada. Si la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es igual a 1 entonces el 0 es un punto singular elemental (con un valor propio distinto de 0 en la parte lineal del campo vectorial o de la 1-forma que la define).*

**Demostración.** Sea  $\omega$  una 1-forma que describe a la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 a través de la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$ ,  $\omega = fdx + gdy$  con  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Se sigue de la proposición 3.23 que la transformación  $(f, g)$  es invertible en 0 y por tanto ambos valores propios de la parte lineal de  $\omega$  son distintos de 0, ya que el producto de los valores propios de la parte lineal de  $(f, g)$  es distinto de 0. Con lo que probamos que el punto singular 0 es una singularidad elemental. □

**Observación 3.51.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada. Notemos que si 0 es una singularidad elemental, esto no implica que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 sea igual a 1. Por ejemplo, consideremos la foliación  $\mathcal{F}$  asociada a la ecuación de Pfaff  $\{xdy + y^2dx = 0\}$ . De la observación 3.21 tenemos que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es igual a 2.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular de codimensión 1 con sólo singularidades aisladas, definida en una variedad compleja  $M$  de dimensión 2. El siguiente teorema nos ayuda a comparar la suma de todas las multiplicidades de la foliación  $\mathcal{F}$  en los puntos singulares de ella con la suma de las de todas las multiplicidades de una explosión simple de  $\mathcal{F}$  en los puntos singulares respectivos.

Para hacer esto es suficiente considerar el caso donde  $\mathcal{F}$  tiene una singularidad aislada en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y su resolución dada por la transformación monoidal estándar  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Teorema 3.52.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada y  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con la explosión simple  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Si 0 es un punto singular no dicrítico de orden  $n$ , se tiene la igualdad*

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) = \mu_0(\mathcal{F}) - n^2 - 1 + n. \quad (3.4.6)$$

**Demostración.** En lo siguiente, para  $r$  un germe de función holomorfa en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  denotaremos por  $r_m$  al polinomio homogéneo de grado  $m$  que aparece en la expansión en series de potencias de  $r$  alrededor de 0. Consideremos dos casos; dependiendo de si 0 es o no una singularidad dicrítica.

Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada no dicrítica de orden  $n$ . Sea  $\omega = f dx + g dy$  una 1-forma holomorfa en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  de forma que la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  describa a la foliación  $\mathcal{F}$  alrededor de 0. Sea  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión simple de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0. Sin pérdida de generalidad, bajo un cambio de coordenadas lineal de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  supongamos que el punto  $(0, 0)$  de la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  es un punto no singular de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$ , esta condición es equivalente a pedir que  $x$  no divida al germe de función holomorfa  $h_{n+1}(x, y) = x f_n(x, y) + y g_n(x, y)$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

Del lema 2.13 tenemos que la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita en la carta  $(U_1, (x, u))$  por la 1-forma:

$$\tilde{\omega}_1 = x^{-(n+1)}[(\sigma_1^* h) dx + (\sigma_1^* x^2 g) du], \quad (3.4.7)$$

Por definición y gracias a la distributividad del índice de intersección en  $\mathbb{M}$  tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) &= \sum_a D_{x^{-(n+1)} \sigma_1^* h} \cdot^a D_{x^{-(n-1)} \sigma_1^* g} \\ &= D_{x^{-(n+1)} \sigma_1^* h} \cdot D_{x^{-(n-1)} \sigma_1^* g} \\ &= (D_{x^{-(n+1)}} + D_{\sigma_1^* h}) \cdot (D_{x^{-(n-1)}} + D_{\sigma_1^* g}) \\ &= (-(n+1)\mathbb{E} + \sigma^{-1}(D_h)) \cdot (-(n-1)\mathbb{E} + \sigma^{-1}(D_g)) \\ &= (n-1)(n+1)\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} - (n+1)(\mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_g)) \\ &\quad - (n-1)(\mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_h)) + \sigma^{-1}(D_g) \cdot \sigma^{-1}(D_h). \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Del teorema 3.40 tenemos que  $\mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_g) = \mathbb{E} \cdot \sigma^{-1}(D_h) = 0$ , y como  $x$  no divide a  $g$  al no dividir a  $g_n$ , los gérmenes de función holomorfa  $h = fx + gy$  y  $g$  no tienen factores en común en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , por tanto del teorema 3.40 tenemos que  $\sigma^{-1}(D_g) \cdot \sigma^{-1}(D_h) = D_g \cdot^0 D_h$ . Sustituyendo en la ecuación (3.4.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) &= -(n-1)(n+1) + 0 + 0 + D_g \cdot^0 D_h \\ &= D_g \cdot D_h - (n-1)(n+1). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Para calcular  $D_g \cdot^0 D_h$  primero observemos que  $D_g \cdot^0 D_h = (D_f + D_x) \cdot^0 D_g$  pues los ideales  $\langle h, g \rangle = \langle xf + yg, g \rangle$  y  $\langle xf, g \rangle$  son iguales.

Calculemos  $D_x \cdot^0 D_g$ ; dado que  $\phi(t) = (0, t)$  parametriza a  $\mathbb{E} = \{x = 0\}$ , tenemos del lema 3.32 que

$$D_x \cdot^0 D_g = \text{ord}_0 g \circ \phi(t) = \text{ord}_0 g(0, t)$$

Como  $x$  no divide a  $g_n$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  tenemos que

$$D_x \cdot^0 D_g = \text{ord}_0 g(0, t) = n.$$

Por distributividad tenemos

$$\begin{aligned} D_g \cdot^0 D_h &= (D_f + D_x) \cdot^0 D_g \\ &= D_f \cdot^0 D_g + D_x \cdot^0 D_g \\ &= \mu_0(\mathcal{F}) + n \end{aligned}$$

Junto con la ecuación (3.4.9), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) &= \mu_0(\mathcal{F}) + n - (n+1)(n-1) \\ &= \mu_0(\mathcal{F}) - n^2 + n + 1. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

□

**Teorema 3.53.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada y  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con la explosión simple  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Si 0 es un punto singular dicrítico de orden  $n$ , se tiene la igualdad*

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) = \mu_0(\mathcal{F}) - n^2 - n + 1. \tag{3.4.11}$$

**Demostración.** Sea  $\omega = f dx + g dy$  una 1-forma que describa a la foliación  $\mathcal{F}$  en 0. Si 0 es una singularidad dicrítica, notamos que la condición

$$h_{n+1}(x, y) = x f_n(x, y) + y g_n(x, y) = 0,$$

implica tanto el orden de  $f$  como el orden de  $g$  es igual a  $n$ , pues alguno de los germenos de función holomorfa  $f$  o  $g$  tiene orden  $n$  al ser 0 una singularidad de orden  $n$ . Con esta observación, en la carta  $(U_1, (x, u), u = \frac{y}{x})$  de la variedad compleja  $\mathbb{M}$ , la explosión de  $\mathcal{F}$  es descrita por la 1-forma  $\tilde{\omega}_1$  donde

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{x^{n+1}} [(f(x, ux) + u g(x, ux)) dx + x g(x, ux) du] \\ &= \frac{1}{x} [\tilde{f}(x, u) + u \tilde{g}(x, u)] dx + \tilde{g}(x, u) du \end{aligned}$$

con  $\tilde{f}$  el transformado estricto (explosión) del germen de función holomorfa  $f$  y  $\tilde{g}$  el transformado estricto del germen de función holomorfa  $g$ .

De forma análoga, en la carta  $(U_2, (v, y))$ ,  $v = \frac{x}{y}$  de la variedad  $\mathbb{M}$ , la explosión  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita por la 1-forma  $\tilde{\omega}_2$  donde

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{f}(v, y)dv + \frac{1}{y}[v\tilde{f}(v, y) + \tilde{g}(v, y)]dy.$$

Por tanto, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{E}} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) &= \sum_{t \in \mathbb{C}} D_x \frac{(0,t)}{\cdot} [\tilde{f}(x,u) + u\tilde{g}(x,u)] D_{\tilde{g}(x,u)} \\ &\quad + D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_y \frac{(0,t)}{\cdot} [v\tilde{f}(v,y) + \tilde{g}(v,y)] \\ &= - \sum_{t \in \mathbb{C}} D_x \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)} + \sum_{t \in \mathbb{C}} D_{\tilde{f}(x,u) + u\tilde{g}(x,u)} \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)} \\ &\quad - D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_y + D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_{[v\tilde{f}(v,y) + \tilde{g}(v,y)]}. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Para expresar de otra forma la ecuación (3.4.12) observemos que se tiene la igualdad

$$D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_{[v\tilde{f}(v,y) + \tilde{g}(v,y)]} = D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_{\tilde{g}(v,y)}$$

Pues los ideales  $\langle \tilde{f}(v, y), v\tilde{f}(v, y) + \tilde{g}(v, y) \rangle$  y  $\langle \tilde{f}(v, y), \tilde{g}(v, y) \rangle$  coinciden en el anillo  $\mathcal{O}(U_2, (0, 0))$ .

De forma análoga, tenemos la ecuación

$$D_{\tilde{f}(x,u) + u\tilde{g}(x,u)} \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)} = D_{\tilde{f}(x,u)} \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)}.$$

Por otro lado, observamos que

$$D_{\tilde{f}} \cdot D_{\tilde{g}} = \sum_{t \in \mathbb{C}} D_{\tilde{f}(x,u)} \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)} + D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_{\tilde{g}(v,y)}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.4.12), tenemos

$$\sum_{p \in \mathbb{E}} \mu(\tilde{\mathcal{F}}) = D_{\tilde{f}} \cdot D_{\tilde{g}} - D_{\tilde{f}(v,y)} \frac{(0,0)}{\cdot} D_y - \sum_{t \in \mathbb{C}} D_x \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)}. \quad (3.4.13)$$

Por definición, tenemos

$$\mathbb{E} \cdot D_{\tilde{g}} = \sum_{t \in \mathbb{C}} D_x \frac{(0,t)}{\cdot} D_{\tilde{g}(x,u)} + D_y \frac{(0,0)}{\cdot} D_{\tilde{g}(v,y)} \quad (3.4.14)$$

Calculemos  $D_y \frac{(0,0)}{\cdot} D_{\tilde{g}(v,y)}$  y  $D_y \frac{(0,0)}{\cdot} D_{\tilde{f}(v,y)}$ . Para ello consideremos  $\phi(t) = (t, 0)$  una parametrización local de  $\{y = 0\}$ . En virtud del lema 3.32 tenemos que

$$\begin{aligned} D_y \frac{(0,0)}{\cdot} D_{\tilde{f}(v,y)} &= \text{ord}_0 \tilde{f} \circ \phi(t) \\ &= \text{ord}_0 \tilde{f}(t, 0) \\ &= \text{ord}_0 f_n(t, 1) + 0(\dots) \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

De forma análoga, tenemos la igualdad

$$D_y \cdot^{(0,0)} D_{\tilde{g}(v,y)} = \text{ord}_0 g_n(t, 1) \quad (3.4.16)$$

Sustituyendo las igualdades (3.4.14), (3.4.15) y (3.4.16) en la ecuación (3.4.13) tenemos

$$\sum_{p \in \mathbb{E}} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = D_{\tilde{f}} \cdot D_{\tilde{g}} - \text{ord}_0 f_n(t, 1) - \mathbb{E} \cdot D_{\tilde{g}} + \text{ord}_0 g_n(t, 1). \quad (3.4.17)$$

Finalmente, calculemos cada término de la ecuación (3.4.17). Por el corolario 3.41, tenemos

$$\begin{aligned} D_{\tilde{f}} \cdot D_{\tilde{g}} &= D_f \cdot D_g - \text{ord}_0 g \cdot \text{ord}_0 f \\ &= D_f \cdot D_g - n^2 \\ &= \mu_0(\mathcal{F}) - n^2 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Del lema 3.39, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \cdot D_{\tilde{g}} &= \text{ord}_0 g \\ &= n \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Al ser 0 un punto singular dicrítico tenemos  $f_n(x, y)x + g_n(x, y)y = 0$ , evaluando en  $(t, 1)$  obtenemos la igualdad

$$g_n(t, 1) = t f_n(t, 1)$$

y por tanto

$$\text{ord}_0 g_n(t, 1) = \text{ord}_0 f_n(t, 1) + 1 \quad (3.4.20)$$

Finalmente sustituyendo cada término de la ecuación (3.4.17) con las igualdades (3.4.18), (3.4.19) y (3.4.20) obtenemos la ecuación (3.4.11).  $\square$

**Corolario 3.54.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada de orden mayor que uno y  $\tilde{\mathcal{F}}$  su explosión simple en 0. De los teoremas 3.52 y 3.53 tenemos que la suma de las multiplicidades de las singularidades en  $\tilde{\mathcal{F}}$  contadas con multiplicidad satisfacen la desigualdad*

$$\sum_{a \in \mathbb{M}} \mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) < \mu_0(\mathcal{F}).$$

*Más aún, dado que la multiplicidad de cada punto es no negativa, tenemos que la multiplicidad de cada punto singular  $a \in \mathbb{E}$  de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  es estrictamente menor que la multiplicidad de 0 en la foliación  $\mathcal{F}$  esto es:*

$$\mu_a(\tilde{\mathcal{F}}) < \mu_0(\mathcal{F}).$$

Ahora estudiemos qué pasa con la multiplicidad de puntos singulares de orden uno.

**Proposición 3.55.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada de orden uno. Si 0 es una singularidad dicrítica entonces la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es igual a uno y además la explosión simple de  $\mathcal{F}$  es una foliación no singular.*

**Demostración.** Sea  $\omega = fdx + gdy$  una 1-forma tal que la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  describe a la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  en 0. Escribamos a  $f$  y a  $g$  como suma de polinomios homogéneos que aparecen en la expansión en series de potencias de  $f$  y  $g$  alrededor de 0

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots \\ g(x, y) &= g_1(x, y) + g_2(x, y) + \cdots \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

donde  $f_i$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$ . Gracias a que 0 es un punto singular dicrítico tenemos que  $f_1(x, y)x + g_1(x, y)y = 0$ . Como consecuencia tenemos que los polinomios homogéneos de orden uno satisfacen simultáneamente  $g_1(x, y) = -cx$  y  $f_1(x, y) = cy$  para alguna  $c \in \mathbb{C}$ . Dado que el orden de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es uno, tenemos que  $c \neq 0$ , por tanto  $(f, g)$  es invertible localmente y de la proposición 3.23 se sigue que la multiplicidad de  $\mathcal{F}$  en 0 es igual a uno,  $\mu_0(\mathcal{F}) = 0$ .

Finalmente, la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  es no singular como consecuencia del lema 2.13 ya que  $f_1(v, 1) = c$  y  $g_1(1, u) = -c$  son polinomios constantes distintos de 0.  $\square$

Notemos que si 0 es una singularidad aislada no dicrítica de orden uno en una foliación holomorfa no singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , tenemos, del teorema 3.52, que la suma de las multiplicidades de los puntos singulares de la explosión de  $\mathcal{F}$  será uno mayor que la multiplicidad de  $\mathcal{F}$  en 0. Por tanto no podemos asegurar que las multiplicidades en las singularidades de la explosión de  $\mathcal{F}$  sean menores que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0.

**Proposición 3.56.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada de orden uno no elemental.*

- a) *Si la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es igual a dos, entonces después de tres explosiones simples consecutivas de  $\mathcal{F}$  sobre las singularidades de las foliaciones obtenidas en cada explosión simple obtenemos una foliación con sólo puntos singulares elementales.*
- b) *Si la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 es mayor que dos, entonces después de dos explosiones simples consecutivas de  $\mathcal{F}$  sobre las singularidades de las foliaciones obtenidas en cada explosión simple obtenemos una foliación tal que la multiplicidad de cada punto singular es menor que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0.*

**Demostración.** Sea  $\omega$  una 1-forma holomorfa que describa a la foliación  $\mathcal{F}$  en una vecindad de 0 a través de la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$ . De la proposición 1.46 tenemos que  $\omega$  es formalmente equivalente a una 1-forma holomorfa  $\nu$  descrita por la ecuación:

$$\nu = ydy + [a(x) + yb(x)]dx \quad a(x), b(x) \in \mathbb{C}[[x]], \quad (3.4.22)$$

donde el orden de  $b(x)$  es al menos uno y el orden de  $a(x)$  es al menos dos.

Notemos que la multiplicidad de la 1-forma  $\nu$  en 0 es igual al orden de la serie de potencias  $a(x)$ ,  $\text{ord}_0 a(x) = \mu_0(\nu)$ . En efecto tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_0(\omega) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle y, a(x) + yg(x) \rangle \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]] / \langle y, a(x) \rangle \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]] / \langle a(x) \rangle \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]] / \langle x^{\text{ord}_0 a(x)} \rangle \\ &= \text{ord}_0 a(x). \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Como la multiplicidad es un invariante formal, se tiene que  $\mu_0(\mathcal{F}) = \mu(\nu)$  (ver proposición 3.46). Como consecuencia de ello, si desarrollamos a la serie de potencias  $a(x) = a_2 x^2 + \dots$  tenemos que la condición de que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  sea dos o mayor que dos es equivalente a que el término  $a_2 x^2$  sea distinto o igual a 0.

**Caso (a):**  $\mu_0(\mathcal{F}) = 2$ .

Queremos probar que después de tres explosiones consecutivas de la foliación  $\mathcal{F}$  en los puntos singulares que aparecen en cada explosión, obtenemos una foliación con sólo singularidades elementales en el divisor excepcional  $S$ .

Tenemos que la forma tangente de la 1-forma  $\nu$  es el polinomio  $0x + y^2 = y^2$ . Por tanto, el único punto singular de la explosión de la 1-forma  $\nu$ ,  $\tilde{\nu}$  es el punto  $p$  descrito por el punto  $(0, 0)$  en la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  de la variedad  $\mathbb{M}$  (ver observación 2.14). En esta carta la explosión de  $\nu$  es descrita por la ecuación:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &= \frac{1}{x} ([a(x) + uxb(x) + u^2x]dx + ux^2 du) \\ &= (a_2 x + a_3 x^2 + b_1 x u + u^2) dx + x u du + \dots \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

donde  $a(x) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$  y  $b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ ,  $a_2 \neq 0$  y los puntos denotan términos de orden mayor que dos.

La forma tangente de la 1-forma  $\tilde{\nu}$  es el polinomio  $a_2 x^2 + 0u = a_2 x^2$ , entonces el único punto singular de la explosión de  $\tilde{\nu}$  en  $p$ ,  $\tilde{\tilde{\nu}}$ , es el punto  $q$  descrito por el punto  $(0, 0)$  en la carta  $(U_{1,2}, (z, u))$ ,  $z = \frac{x}{u}$  de la explosión simple de  $\mathbb{M}$  con centro en  $p$  (ver observación 2.14). En esta carta la 1-forma  $\tilde{\tilde{\nu}}$  es descrita por la ecuación:

$$\tilde{\tilde{\nu}} = (a_2 z u + u^2) dz + (a_2 z^2 + 2uz) du + \dots \tag{3.4.25}$$

Finalmente, tenemos que la forma tangente  $(a_2 z u + u^2)z + (a_2 z^2 + 2uz)u$  de  $\tilde{\tilde{\nu}}$  en  $q$  es el polinomio  $zu(2a_2 z + 3u)$ . Por tanto la explosión de  $\tilde{\tilde{\nu}}$  en  $q$  tiene tres puntos singulares elementales (Ver proposición 2.15). Lo que termina la prueba en el caso (a).

**Caso (b):**  $\mu_0(\mathcal{F}) > 2$ .

Queremos probar que después de dos explosiones consecutivas sobre los puntos singulares de las foliaciones correspondientes la multiplicidad de cada punto singular sea estrictamente menor que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0.

De forma análoga al caso (a), la explosión de  $\nu$  tiene una singularidad  $p$  descrita por la ecuación (3.4.24) con  $a_2 = 0$ , en la carta  $(U_1, (x, u))$ .

$$\tilde{\nu} = (a_3x^2 + b_1xu + u^2)dx + xudu + \dots$$

En este caso, el punto singular  $p$  tiene orden 2. Del teorema 3.52  $p$  tiene multiplicidad

$$\mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = \mu_0(\mathcal{F}) - 1 + 1 + 1 = \mu_0(\mathcal{F}) + 1$$

Y la forma tangente a  $\tilde{\nu}$  en  $p$  en estas coordenadas es igual a

$$(a_3x^2 + b_1xu + u^2)x + (xu)u = (a_3x^2 + b_1xu + 2u^2)x$$

Como  $x$  no divide a  $a_3x^2 + b_1xu + 2u^2$  tenemos que la explosión de  $\tilde{\nu}$  en  $p$  tiene al menos dos puntos singulares (ver observación 2.14). Del teorema 3.52, tenemos que la multiplicidad de estos puntos singularidades satisface

$$\sum_{q \in \mathcal{S}} \mu_q(\tilde{\mathcal{F}}) = \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) - 4 + 2 + 1 = \mu_0(\mathcal{F}).$$

Finalmente, se sigue que la multiplicidad de cada punto singular de la explosión de  $\tilde{\nu}$  en  $p$  será estrictamente menor que  $\mu_0(\mathcal{F})$ . Lo que prueba que si explotamos la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 y luego explotamos los puntos singulares que aparezcan en el divisor excepcional  $\mathbb{E}$ , la multiplicidad de las singularidades de estos puntos será estrictamente menor que la multiplicidad de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0.  $\square$

**Demostración.** [del teorema de desingularización 2.17] Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular holomorfa definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada, construiremos una sucesión de explosiones que resuelvan una singularidad aislada. Para ello consideremos  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$  y  $M_0 \cong (\mathbb{C}^2, 0)$ . Construimos de forma inductiva  $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  la explosión simple de todos los puntos singulares no elementales  $\Sigma_{k-1} \subset M_{k-1}$  de la foliación  $\mathcal{F}_{k-1}$  obtenida en la superficie  $M_{k-1}$ . Sea  $(T, A)$  un árbol, el conjunto de vértices  $T$  consiste de las singularidades de cada foliación singular  $\mathcal{F}_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Conectamos cada singularidad con su descendiente en una explosión simple, esto es para una singularidad  $a \in \mathcal{F}_{k+1}$  conectamos al vértice  $a$  con el vértice  $\pi_{k+1}(a)$ .

Sea  $\mu_0(\mathcal{F})$  la multiplicidad del punto singular 0 en la foliación  $\mathcal{F}$ , veamos que cada singularidad a distancia  $2\mu_0(\mathcal{F}) + 1$  del vértice 0 en el árbol  $(T, A)$  es una singularidad elemental. Para ello consideremos una rama  $R$  que empiece en el vértice correspondiente a 0,  $a_0 = 0, a_1 \in \Sigma_1, a_2 \in \Sigma_2, \dots$ . Veamos que para algún  $k \leq 2\mu_0(\mathcal{F}) + 1$   $a_k$  es un punto singular elemental. En lo siguiente denotamos por  $\mu_i$  a la multiplicidad de los puntos singulares  $a_i$ . Las multiplicidades

$\mu_i$  satisfacen que:

- (i) Si  $a_i$  es de orden mayor que 1  $\mu_{i+1} \leq \mu_i$  por el corolario 3.54.
- (ii) Si  $a_i$  es de orden 1, no es un punto singular elemental y  $\mu_i > 2$ , entonces  $\mu_{i+2} < \mu_i$  por el inciso (b) de la proposición 3.56.
- (iii) Si  $a_i$  es de orden 1, no es un punto singular elemental y  $\mu_i > 2$  entonces  $a_{i+3}$  es un punto singular elemental por el inciso (a) de la proposición 3.56.
- (iv) Si la multiplicidad  $\mu_i$  es igual a 1 entonces  $a_i$  es un punto singular elemental de la proposición 3.50.

De esta forma el punto singular elemental a menor distancia del vértice 0 en la rama  $R$  esta a distancia menor o igual a  $2(\mu_0 - 1) + 3 = 2\mu_0 + 1$ . Junto con el hecho de que un punto singular de la explosión de un punto singular elemental vuelve a ser elemental gracias al corolario 2.16, tenemos que las singularidades a distancia  $2\mu_0 + 1$  tienen que ser singularidades elementales.

Con esto probamos que después de  $k$  explosiones simples consecutivas con  $k \leq 2\mu_0 + 1$ , la foliación  $\mathcal{F}_k$  tiene solo singularidades elementales.

Sea  $\pi = \pi_k \circ \dots \circ \pi_1 : (M, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , la aserción sobre el divisor  $D = \pi^{-1}(0)$  (la preimagen del origen) se puede verificar inductivamente. Para la base de inducción  $k = 1$  tenemos  $\sigma^{-1}(0) = \mathbb{E} \simeq \mathbb{P}^1$ .

Para la hipótesis de inducción, supongamos que  $\pi^{-1}(D)$  es la unión de curvas biholomorficamente equivalentes a  $\mathbb{P}^1$  con intersección aislada.

Para el paso inductivo consideremos  $\gamma \subset M$  una curva no singular biholomorficamente equivalente a  $\mathbb{P}^1$  y  $a \in \gamma$  el centro de la explosión simple  $\pi : M' \rightarrow M$ . Dado que  $\pi$  es un biholomorfismo fuera de  $a$  entonces la preimagen de  $\gamma$  bajo  $\pi$  es una curva no singular  $\tilde{\gamma}$  biholomorficamente equivalente a  $\gamma$  intersección  $\pi^{-1}(a) \simeq \mathbb{P}^1$  en el punto donde explotamos, lo que prueba el paso inductivo.

De todo lo anterior tenemos que para una foliación singular holomorfa  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  existe una explosión  $\pi$  compuesta de explosiones simples de forma que las singularidades de explosión de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0 a través de  $\pi$  son singularidades elementales contenidas en una curva  $D = \pi^{-1}(0)$  que es unión de curvas equivalentes a la línea proyectiva  $\mathbb{P}^1$  con intersección transversal dos a dos.

□

De la prueba del teorema, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.57.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular definida en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada. Si 0 tiene multiplicidad  $\mu$ , entonces después de  $2\mu + 1$  explosiones simples en los puntos singulares correspondientes a cada foliación obtenemos una foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$ , tal que todos los puntos singulares de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  en el divisor evanescente  $S$  respectivo a la explosión sean elementales.*

## Capítulo 4

# Problema local de Poincaré

Dada una foliación holomorfa singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con singularidad aislada en el 0 podemos preguntarnos cuántas separatrices irreducibles tiene  $\mathcal{F}$  en 0. A esta pregunta se le conoce como el problema local de Poincaré.

En este capítulo se introducirán las herramientas necesarias para dar una respuesta parcial al problema local de Poincaré. En el caso en el que número de separatrices de  $\mathcal{F}$  en 0 sea finito podemos dar una cota del número de separatrices a través del orden de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0; éste es un invariante bajo biholomorfismos siguiendo las ideas expuestas en [CS].

La siguiente proposición nos da una forma de contar separatrices a través de un criterio de divisibilidad.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada, generada localmente por el campo vectorial holomorfo  $F = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ , y sea  $f$  el germen de una función analítica irreducible, en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Tenemos que la curva  $\{f = 0\}$  parametriza a una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  en 0 si y sólo si  $f$  divide a la derivada de Lie  $L_F f = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .*

**Demostración.** Primero supongamos que  $\{f = 0\}$  parametriza a una separatriz de  $\mathcal{F}$  en 0. Como  $f$  es un germen holomorfo irreducible, tenemos que probar que la condición de que  $f$  divida a  $L_F f$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  es equivalente a probar que  $\{f = 0\} \subset \{L_F f = 0\}$ , por el lema de Study.

Para probar que  $\{f = 0\} \subset \{L_F f = 0\}$ , consideremos  $\phi(t)$  una parametrización local inyectiva holomorfa de  $\{f = 0\}$  dada por el teorema de parametrización de Puiseux. Derivando  $f \circ \phi(t) = 0$  con respecto a  $t$  tenemos por la regla de la cadena, que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f \circ \phi(t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)) \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

La ecuación (4.0.1) nos dice que el vector  $\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t))$  es ortogonal al vector  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$  en  $\mathbb{C}^2$ . Como  $\{f = 0\}$  parametriza a una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  y  $F$  es un campo vectorial holomorfo que genera a  $\mathcal{F}$ , tenemos que  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$  es un vector paralelo a  $F(\phi(t))$  para toda  $t$  en una vecindad de 0 y por tanto tenemos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t))$  es ortogonal a  $F(\phi(t))$ , esto es

$$L_F f(\phi(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)) \cdot F(\phi(t)) = 0.$$

Finalmente, como  $\phi(t)$  parametriza a  $\{f = 0\}$  se sigue que  $f$  divide a  $L_F f$  en el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en 0  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

Para el regreso supongamos que  $f$  divide a  $L_F f$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , y como antes  $\phi(t)$  la parametrización local holomorfa inyectiva de  $\{f = 0\}$ . Como  $f$  divide a  $L_F f$  tenemos que  $L_F f(\phi(t)) = 0$  y por tanto  $F(\phi(t))$  es ortogonal a  $\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t))$ .

Por otro lado derivando la igualdad  $\frac{\partial f \circ \phi(t)}{\partial t} = 0$  tenemos, de la ecuación (4.0.1), que  $\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t))$  es ortogonal a  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$ . El hecho de que el vector  $\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t))$  sea ortogonal a los vectores  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$  y a  $F(\phi(t))$  nos dice que el vector  $F(\phi(t))$  tiene que ser paralelo a el vector  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$  pues la dimensión compleja del plano tangente en un punto es 2.

Por último que el vector  $F(\phi(t))$  sea paralelo al vector  $\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$  nos dice que  $\phi(t)$  parametriza a una hoja de la foliación que define  $F$ , lo que prueba que  $\{f = 0\}$  es separatriz de  $\mathcal{F}$  en 0.  $\square$

**Definición 4.2.** Si  $C_1, \dots, C_r$  son diferentes separatrices analíticas irreducibles con intersección aislada en 0 de  $\mathcal{F}$  en 0 con ecuaciones locales reducidas (sin términos cuadráticos)  $\{f_k = 0\}$ ,  $f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , entonces la unión  $C = \bigcup_k C_k$  es una *separatriz analítica reducible* cuya ecuación local libre de cuadrados está dada por  $\{f = 0\}$ ,  $f = \prod_k f_k$ .

**Proposición 4.3.** Si  $C$  es una *separatriz analítica reducible* cuya ecuación local libre de cuadrados está dada por  $C = \{f = 0\}$  con  $f = \prod_k f_k$  como en la definición 4.0.1 entonces  $f$  divide a la derivada de Lie  $L_F f$  en el anillo de gérmenes de funciones holomorfas alrededor de 0,  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Demostración.** La prueba se hace inductivamente sobre el número de separatrices irreducibles  $n$  que forman a  $C$ . Para  $n = 1$ , si  $C = \{f = 0\}$  con  $f$  germen de función holomorfa irreducible tenemos de la proposición 4.1 que  $f$  divide a la derivada de Lie  $L_F f$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$

Para la hipótesis de inducción  $n = r - 1$ , supongamos que el germen  $f$  de función holomorfa, libre de cuadrados, se escribe de la forma  $f = \prod_{k=1}^{r-1} f_k$  donde  $f_i$  es un germen de función holomorfa irreducible en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  para

$i = 1, \dots, r-1$ . Supongamos que si cada  $f_i$  divide a la derivada de Lie  $L_F f_i$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , entonces el germen de función holomorfa  $f$  divide a  $L_F f$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

Para el paso inductivo supongamos que  $f$  libre de cuadrados se escribe de la forma  $f = \prod_{i=1}^r f_i$  donde  $f_i$  es un germen de función holomorfa irreducible en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  para  $i = 1, \dots, r$  y tal que cada  $\{f_i = 0\}$  es una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  en 0. Para  $g = \prod_{k=1}^{r-1} f_k$  tenemos por hipótesis de inducción que  $g$  divide a  $L_F g$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  y por tanto  $f = g f_r$  divide a  $f_r L_F g$  y por la proposición 4.1 tenemos que  $f_r$  divide a  $L_F f_r$  y por tanto  $f = g f_r$  divide a  $g L_F f_r$ . Finalmente, por la regla de Leibniz tenemos  $L_F g f_r = g L_F f_r + f_r L_F g$ , y como  $f$  divide a  $g L_F f_r$  y a  $f_r L_F g$  se sigue, que  $f$  divide a  $L_F f$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ , lo que prueba el paso inductivo.  $\square$

**Proposición 4.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfo singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad aislada, generada localmente por el campo vectorial holomorfo  $F$  y sea  $f$  un germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  libre de cuadrados. Si  $f$  divide a  $L_F f$  y  $g$  es un divisor irreducible de  $f$  en el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , entonces  $\{g = 0\}$  parametriza a una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  en 0.*

**Demostración.** De la proposición 4.1 tenemos que para ver que  $\{g = 0\}$  es una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  en 0 basta probar que  $g$  divide a la derivada de Lie  $L_F g$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Para ello escribamos a  $f$  como  $f = gh$  con  $g$  y  $h$  primos relativos en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

Si  $f$  divide a la derivada de Lie  $L_F f$  tenemos que  $g$  divide a  $L_F f$  por transitividad, por otro lado de la regla de Leibniz tenemos que

$$L_F f = L_F gh = g L_F h + h L_F g$$

y por tanto, como  $g$  divide tanto a  $g L_F h$  como a  $L_F f$ , se sigue que  $g$  divide a  $h L_F g = L_F f - g L_F h$ . Finalmente, como  $g$  y  $h$  son primos relativos, tenemos que  $g$  divide a  $L_F g$  lo que prueba que  $\{g = 0\}$  es una separatriz compleja de  $\mathcal{F}$  en 0.  $\square$

De lo anterior tenemos que el problema de contar el número de separatrices es equivalente al problema de encontrar un germen holomorfo  $f$  libre de cuadrados tal que su descomposición como producto de gérmenes de funciones holomorfas irreducibles tenga el mayor número de componentes irreducibles y que cumpla que  $f$  divide a  $L_F f$  en el anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Definición 4.5.** El orden de una curva analítica plana  $C \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  en el punto  $0 \in C$ , denotado por  $\text{ord}_0 C$ , es el grado de la parte principal homogénea de cualquier serie de Taylor reducida (libre de cuadrados)  $f$  que localmente define el germen de la curva alrededor de  $C$ .

**Proposición 4.6.** *El orden de una unión finita de gérmenes de curvas analíticas planas con intersección aislada dos a dos alrededor de 0,  $C = \bigcup_k C_k$ , es la suma de los órdenes respectivos a las curvas  $C_k$  que la componen.*

**Demostración.** Tomemos  $C_1, \dots, C_n$  curvas analíticas con intersección aislada dos a dos alrededor de 0, definidas localmente alrededor de 0 por gérmenes de funciones holomorfas  $f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  libres de cuadrados,  $i = 1, \dots, n$ , con  $C_i = \{f_i = 0\}$ . Al tener  $C_i$  intersección aislada con  $C_j$ ,  $i \neq j$ , implica que  $f_i$  no tiene factores en común con  $f_j$  y por tanto  $f_1 \cdots f_n$  es libre de cuadrados y describe a  $C$  alrededor de 0 pues

$$C = \bigcup_k C_k = \bigcup_k \{f_k = 0\} = \{f_1 \cdots f_n = 0\}.$$

Finalmente el orden de  $C$  alrededor de 0 está dado por

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 C &= \text{ord}_0 f_1 \cdots f_n \\ &= \sum_{i=1}^n \text{ord}_0 f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \text{ord}_0 C_i. \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad no dicrítica aislada. Tenemos que si la curva  $\{y = 0\}$  es separatriz de  $\mathcal{F}$ , entonces la intersección del divisor excepcional  $\mathbb{E}$  y la explosión simple (dada por la transformación monoidal canónica  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ) de la curva  $\{y = 0\}$  en 0 es una singularidad de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Donde  $\tilde{\mathcal{F}}$  es la explosión simple de la foliación  $\mathcal{F}$ .*

**Demostración.** Sea  $F = g(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - f(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  un campo vectorial holomorfo que define a  $\mathcal{F}$  localmente en 0. Si  $\{y = 0\}$  es una separatriz de  $\mathcal{F}$  tenemos de la proposición 4.1 que  $y$  divide a la derivada de Lie  $L_F y = g(x, y) \frac{\partial y}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial y}{\partial y} = f(x, y)$ . Además  $y \mid f_n(x, y)$  la componente homogénea de grado  $n$  de  $f(x, y)$  pues el término  $x^n$  no puede aparecer en la expansión en la serie de potencias de  $f(x, y)$  si  $y$  divide a  $f$ .

Tenemos que la intersección de la explosión simple de la curva  $\{y = 0\}$  con el divisor excepcional  $\mathbb{E}$  se encuentra en la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  de  $\mathbb{M}$ . En estas coordenadas la explosión de  $\{y = 0\}$  está descrita por  $\{u = 0\}$ . En esta carta la explosión simple de  $\mathcal{F}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$ , es descrita por el campo vectorial

$$\frac{1}{x^n} (x(\cdots)) \frac{\partial}{\partial x} - [f_n(1, u) + u g_n(1, u) + x(\cdots)] \frac{\partial}{\partial u}$$

con  $n$  el orden de la foliación  $\mathcal{F}$  en 0. Al ser 0 una singularidad no dicrítica de  $\mathbb{F}$  tenemos que las singularidades de  $\tilde{\mathcal{F}}$  en la carta  $U_1$  están descritas por puntos de la forma  $(0, u)$  con  $u$  raíz del polinomio  $f_n(1, u) + u g_n(1, u)$ . Finalmente notamos que la intersección de  $\mathbb{E}$  con  $\{u = 0\}$  es el punto asociado a  $(0, 0)$  en  $U_1$ , y como  $y$  divide a  $f_n(x, y)$  tenemos que  $f_n(1, 0) = 0$  y por tanto  $f_n(1, 0) + 0 g_n(1, 0) = 0$ . Así  $(0, 0)$  es una singularidad de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . □

**Observación 4.8.** De la proposición 4.7 notamos que en una foliación  $\mathcal{F}$  singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 una singularidad no dicrítica aislada tenemos a lo más tantas separatrices irreducibles de orden 1 como puntos singulares de la explosión  $\tilde{\mathcal{F}}$  de la foliación  $\mathcal{F}$  dada por la transformación monoidal canónica. Como  $\tilde{\mathcal{F}}$  tiene a lo más  $\text{ord}_0\mathcal{F} + 1$  singularidades, se sigue que el número de separatrices irreducibles de orden 1 de  $\mathcal{F}$  en 0 no excede  $\text{ord}_0\mathcal{F} + 1$ .

Sin embargo no todas las separatrices irreducibles de  $\mathcal{F}$  que pasan por el 0 tienen orden 1.

**Definición 4.9.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Decimos que 0 es un *punto singular general dicrítico* si tiene una infinidad de separatrices, esto es, hay una infinidad de curvas invariantes (hojas) de la foliación  $\mathcal{F}$  que tienen al origen en su cerradura.

El siguiente teorema nos da una cota superior al número de separatrices de una foliación en el origen, en el caso de que este sea un número finito. En lo siguiente desarrollaremos las herramientas necesarias para probarlo.

**Teorema 4.10.** *Sea  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Si 0 no es un punto general dicrítico, entonces el orden de cualquier separatriz local en 0,  $C$ , satisface la desigualdad*

$$\text{ord}_0 C \leq \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1.$$

En el siguiente ejemplo se exhibe una familia de foliaciones singulares en donde se satisface la igualdad del teorema 4.10.

**Ejemplo 4.11.** Sea  $f$  un germen de una función holomorfa libre de cuadrados de orden mayor o igual que dos en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Consideremos la 1-forma  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$  y sea  $\mathcal{H}$  la foliación dada por la ecuación de Pfaff  $\{df = 0\}$ .

Tenemos que  $\mathcal{H}$  en una vecindad de 0 es una foliación singular holomorfa, cuyas hojas están dadas por las componentes de las componentes conexas de las curvas de nivel  $\{f = c\}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . En particular  $\{f = 0\}$  es separatriz de  $f$ ; además sí  $\{g = 0\}$  es separatriz irreducible de  $\mathcal{H}$  entonces  $g$  divide a  $f$  y por tanto

$$\text{ord}_0 C = \text{ord}_0 f = \text{ord}_0 \mathcal{H} + 1. \quad (4.0.2)$$

**Demostración (del ejemplo).** Primero veamos que el 0 es una singularidad aislada de  $\mathcal{H}$ , para ello procedamos por contradicción, esto es supongamos que existe un germen de función holomorfa irreducible  $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  con  $u(0) = 0$  tal que  $u$  divide simultáneamente tanto a  $\frac{\partial f}{\partial y}$  como a  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . En este caso, para  $\phi(t)$  una parametrización local de  $\{u = 0\}$ , tenemos  $\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)) = 0$ . Consideremos la composición  $f \circ \phi(t)$ . Derivando con respecto al parámetro  $t$  tenemos

$$\frac{\partial f \circ \phi(t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t)) \right) \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = 0. \quad (4.0.3)$$

De la ecuación  $\frac{\partial f \circ \phi(t)}{\partial t} = 0$  tenemos que  $f \circ \phi(t)$  es una función constante. Como  $\phi(0) = 0$  tenemos  $f \circ \phi(t) \equiv 0$ , por tanto  $\{u = 0\} \subset \{f = 0\}$  que es equivalente, por el lema de Study, a que el germen  $u$  divide al germen  $f$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Escribiendo  $f = ug$ , donde  $g$  es un germen de función holomorfa y derivando  $f$ , tenemos de la regla de Leibniz  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial ug}{\partial x} = u \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial x}$ . Como  $u$  divide a  $\frac{\partial f}{\partial x}$  tenemos que  $u$  divide a  $g \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - u \frac{\partial g}{\partial x}$ . Como  $g$  y  $u$  no tienen factores en común se sigue que  $u$  divide a  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y por tanto  $u(x, y)$  es constante en  $x$ . De forma análoga llegamos a que  $u$  divide a  $\frac{\partial u}{\partial y}$  y por tanto que  $u(x, y)$  es constante en  $y$ . Como  $u$  es constante en  $x$  y en  $y$  tenemos que  $u$  es constante. Lo que prueba que 0 es singularidad aislada de  $\mathcal{H}$ .

Ahora veamos que las curvas de nivel de la función holomorfa  $f$  describen de manera local a las hojas de la foliación  $\mathcal{H}$ . Para ello, consideremos  $\phi(t)$  solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = H(x)$  (dada por el teorema de existencia y unicidad 1.3), donde  $H(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$  es el campo vectorial asociado a la foliación  $\mathcal{H}$ . Derivado  $f \circ \phi(t)$  respecto al parámetro  $t$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ \phi(t)}{\partial t} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t)) \right) \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t)) \right) \cdot H(\phi(t)) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t)) \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(t)), -\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(t)) \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.0.4}$$

Y por tanto  $f \circ \phi(t)$  es constante digamos  $f \circ \phi(t) = c$ , lo que significa  $\phi(t)$  está contenida en  $\{f = c\}$ .

Para ver que  $\{f = 0\}$  es una separatriz de  $\mathcal{H}$  en 0 basta con probar que el germen de función holomorfa  $f$  divide a la derivada de Lie  $L_H f$  gracias a la proposición 4.4. Como  $L_H f = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  se sigue que  $f$  divide trivialmente a  $L_H f$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Ahora veamos que si una hoja  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{H}$ , es tal que  $\mathcal{L} \cup \{0\}$  es una curva analítica entonces  $\mathcal{L} \subset \{f = 0\}$ . Notemos para cada  $c \neq 0$  hay una vecindad de 0 que no interseca a  $f = c$  ya que  $f(x) - c$  es una unidad en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ . De esta forma, si  $\{r = 0\}$  es una separatriz irreducible de  $\mathcal{H}$ , entonces  $\{r = 0\} \subset \{f = 0\}$  y por el lema de Study  $r$  divide a  $f$ , de aquí que para cada separatriz  $C$  de  $\mathcal{H}$  se cumple

$$\text{ord}_0 C \leq \text{ord}_0 f = \text{ord}_0 \mathcal{H} + 1. \tag{4.0.5}$$

En particular la igualdad se cumple para  $C = \{f = 0\}$ . □

### 4.1. Peso de una componente del divisor evanescente

Consideremos  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una explosión obtenida de componer una sucesión finita de explosiones simples empezando en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $S = \cup_k L_k$ ,  $L_i \simeq \mathbb{P}^1$ .

**Definición 4.12.** Sea  $x \in S$  un punto en el divisor evanescente. Decimos que  $x$  es un *punto medio*, si pertenece sólo a una componente  $L_i$ . En otro caso lo llamamos *punto esquina*.

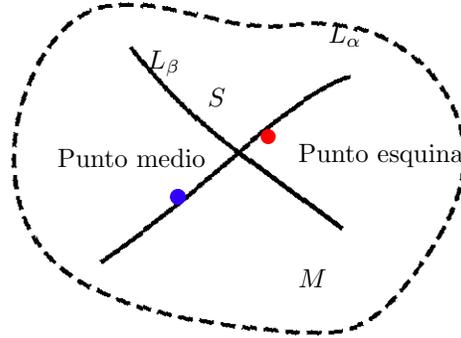


Figura 4.1: Distintos puntos en el divisor evanescente.

**Proposición 4.13.** Consideremos  $a \in L_i \subset S$  punto medio de  $L_i$  componente de  $S$  y sea  $\tau : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, a)$  una sección transversal holomorfa a  $S$  en el punto  $a \in L_i$ . Entonces  $\tau$  (la imagen de  $\tau : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, a)$ ) es el germen de una variedad analítica irreducible en  $(M, a)$ .

Más aún gracias a la proposición 2.7 tenemos que  $\pi(\tau)$  es una variedad analítica irreducible en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, tomemos coordenadas locales  $(x, y)$  en  $(M, a)$  de tal forma que  $L_i = \{x = 0\}$  en  $(M, a)$ . Si  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M, a)$  es transversal a  $\{x = 0\}$  en  $\tau(0) = a$ , entonces  $\{(0, 1), \frac{\partial \tau(t)}{\partial t}(0)\}$  debería ser un conjunto linealmente independiente. Esto sucede si  $\frac{\partial \tau_1(t)}{\partial t}(0) \neq 0$  y por tanto  $\tau_1(t)$  es invertible por el teorema de la función inversa. Considerando una reparametrización de  $\tau(t)$  con  $\tau_1^{-1}(t)$  tenemos que

$$\tau(\tau_1^{-1}(t)) = (t, \tau_2(\tau_1^{-1}(t)))$$

parametriza a  $\{\tau_2(\tau_1^{-1}(x)) - y = 0\}$  que es irreducible pues  $g(x) - y$ ,  $g(0) = 0$  es irreducible como germen de función holomorfa en  $\mathcal{O}(M, a)$ .

Para la segunda parte consideremos  $\pi = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$  la descomposición de  $\pi$  en explosiones simples. Usando un argumento inductivo, cuando  $k = 1$  la proposición 2.7 nos da el resultado. Supongamos que es cierto para  $k - 1$ ; por la proposición 2.7, la curva  $\sigma_k(\tau)$  es irreducible y por hipótesis de inducción tenemos que  $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_{k-1}(\sigma_k(\tau))$  es irreducible.  $\square$

**Lema 4.14.** *Para cualquier sección transversal holomorfa  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M, a)$  a el divisor excepcional  $S$  en un punto  $a \in L$  que pertenezca sólo a una componente  $L \subset S$  (si  $a \in L_i \cap L_j$  entonces  $i = j$ ), tenemos que el orden de la proyección  $\gamma = \pi \circ \tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  no depende de la elección de la sección transversal siempre y cuando el punto  $a$  pertenezca sólo a una componente  $L$ .*

**Demostración.** Sean  $\tau$  y  $\tau'$  dos secciones transversales a la misma componente  $L$  en dos puntos  $a, a'$  que sólo pertenezcan a la componente  $L$  y no a otra componente, y sean  $\nu$  y  $\nu'$  los ordenes respectivos a las curvas  $\gamma = \pi(\tau)$  y  $\gamma' = \pi(\tau')$  en 0 respectivamente.

Por la proposición 4.13 tenemos que tanto  $\gamma$  como  $\gamma'$  son irreducibles como gérmenes de conjuntos analíticos en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , por tanto  $\nu$  y  $\nu'$  coinciden con el número de puntos en la intersección entre las curvas  $\gamma, \gamma'$  con una línea  $l_\epsilon = \{l = \epsilon\}$  para una función lineal genérica  $l = y - ax$  y cualquier  $\epsilon$  lo suficientemente pequeña  $0 \neq \epsilon$  (ver el corolario 3.33).

Consideremos la foliación no singular  $\mathcal{G}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definida por la ecuación de Pfaff  $dl = 0$ , donde  $dl = 1dy - adx$  y  $a \in \mathbb{C}$ . Las hojas de esta foliación están descritas por las rectas  $\{l = \epsilon\}$  y por tanto la foliación  $\mathcal{G}$  sólo tiene una separatriz alrededor de 0,  $\{l = 0\}$ .

La explosión  $\tilde{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{G}$  con  $\pi$  es una foliación singular en  $M$ . Después de la primera explosión simple tenemos un punto singular  $s \in \mathbb{E}$  descrito por  $\tilde{dl} = (u - a)dx + xdu$  en la carta  $U_1$ . Escogemos una dirección  $l$  de tal forma que  $s \in \mathbb{E}$  no sea explotado de nuevo por  $\pi$ , a esta condición sobre la línea  $l$  la llamamos condición genérica. Las singularidades de  $\tilde{\mathcal{G}}$  consisten además de  $s$ , de singularidades en las intersecciones de componentes suaves del divisor excepcional pues al explotar un punto no singular que es no dicrítico obtenemos una singularidad elemental obtenemos una singularidad elemental no dicrítica, más aún como explotamos sólo puntos no dicríticos tenemos que las componentes de  $S$  son hojas de la foliación.

Tenemos que tanto  $\tau$  como  $\tau'$  son transversales a la misma hoja  $L \in \tilde{\mathcal{G}}$ . Por tanto la transformación de holonomía  $\Delta_{\tau, \tau'}$  entre  $\tau$  y  $\tau'$  a lo largo de las hojas de  $\tilde{\mathcal{G}}$  está bien definida. Por tanto el número de intersecciones entre  $C_\epsilon = \pi^{-1}(l_\epsilon)$  con cada una de las secciones transversales  $\tau, \tau'$  es la misma para cualquier  $\epsilon \neq 0$  lo suficientemente pequeña,  $\Delta_{\tau, \tau'}(C_\epsilon \cap \tau') = C_\epsilon \cap \tau$ .  $\square$

Gracias a este lema podemos asociarle un peso a cada componente.

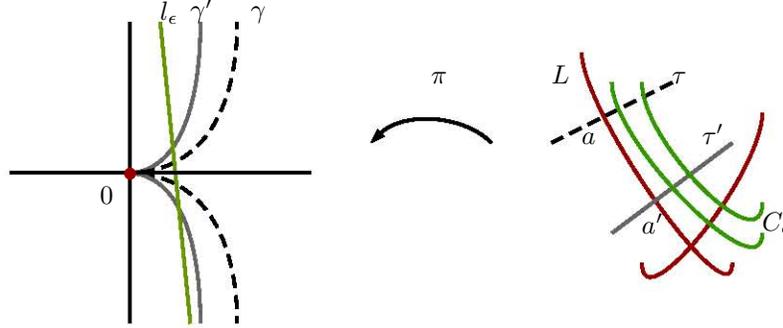


Figura 4.2: Consideramos la intersección de la perturbación de una recta canónica con las proyecciones de las transversales a  $L$ .

**Definición 4.15.** El peso  $\omega(L)$  de una componente  $L \subset S = \pi^{-1}(0)$  con respecto a la explosión  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es el orden de cualquier proyección  $\pi \circ \tau$  para cualquier sección transversal  $\tau$  en  $M$  a  $L$  en un punto que sólo esté en  $L$  pero no en otra componente.

**Observación 4.16.** De la prueba del lema 4.14 el peso  $\omega(L)$  de una componente  $L \subset \pi^{-1}(0)$  puede ser definido también como el orden de la restricción de  $\pi^*l$  en una sección transversal a  $L$  irreducible en cualquier punto medio  $a \in L$  para una función lineal genérica  $l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Los pesos de las componentes pueden ser calculados recursivamente si  $\pi$  es representado como una composición de explosiones simples.

Asumamos que  $S = \cup_{j=1}^m L_j$  es la unión de líneas proyectivas con intersecciones transversales  $S = \pi^{-1}(0)$  y tomemos un punto  $a \in S$ .

Después de una explosión simple  $\sigma$  con centro en  $a$  obtenemos una variedad  $M'$  con un nuevo divisor evanescente  $S' \in M'$  y la cadena de transformaciones

$$(M', S', \mathbb{E}) \xrightarrow{\sigma} (M, S, a) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}^2, 0, 0)$$

El divisor excepcional  $\mathbb{E} \subset M'$  es una nueva componente de  $S'$  mientras que todas las otras componentes de  $S'$  son explosiones de viejas componentes de  $S$ .

La composición  $\pi' = \sigma \circ \pi : (M', S') \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  es una explosión. Denotemos por  $\omega'(L')$  a los pesos de las componentes suaves del nuevo divisor evanescente  $S'$ , para distinguirlos a los pesos asociados con la transformación  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

El centro de la explosión  $a$  puede ser un punto esquina o un punto medio, en ambos casos tenemos que la suma de los pesos de la preimagen  $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(a)$  es la

suma de los pesos de las componentes. Más aún tenemos la siguiente afirmación,

**Lema 4.17.** *Los pesos de las componentes  $L'_j \subset S'$  que son explosión de las componentes respectivas  $L_j \subset S$ , se mantienen igual  $\omega'(L'_j) = \omega(L_j)$ .*

*El peso  $\omega'(\mathbb{E})$  del divisor excepcional  $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(a) \subset S'$  es igual a la suma de los pesos de las componentes de  $S$  que pasan por  $a$*

$$\omega'(\mathbb{E}) = \sum_{L:a \in L \subset S} \omega(L) \quad (4.1.1)$$

**Demostración.** Para la primera afirmación tomemos  $\tau'$  una sección transversal de  $L'_i$  en un punto distinto de  $a$ , que sea punto medio,  $\sigma(\tau')$  es transversal a  $L_i$  pues  $\sigma$  es un biholomorfismo fuera de  $a$ , más aún

$$\omega(L_i) = \text{ord}_0 \pi \circ \sigma \circ \tau' = \text{ord}_0 \pi' \circ \tau' = \omega'(L'_i)$$

Para la segunda afirmación, tomemos coordenadas locales alrededor de  $a$  de tal forma que la componente o las 2 componentes de  $S$  que contienen a  $a$  son ejes coordenados  $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0)$ .

Consideremos el pullback  $\pi^*l$  de una función lineal genérica  $l$  como en la prueba del lema 4.14 y tal que la explosión de  $l$  no pase por  $a$ . Veamos que en estas coordenadas

$$\pi^*l = \begin{cases} y^w h(x, y) & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto medio,} \\ x^v y^w h(x, y) & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto esquina.} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

$h(0, 0) \neq 0$ , donde  $v$  y  $w$  son los pesos de las componentes respectivas  $\{x = 0\}$ ,  $\{y = 0\}$  del divisor evanescente  $S$ .

Tenemos que  $\{x = \epsilon\}$  es transversal a  $\{y = 0\}$ , y más aún podemos tomar  $\epsilon \neq 0$  lo suficientemente chico para que  $(0, \epsilon)$  sea un punto medio de la componente correspondiente a  $\{y = 0\}$  y así  $w = \text{ord}_0 \pi^*l(x, y)|_{\{x=\epsilon\}}$  y por tanto  $y^w$  divide a  $\pi^*l(x, y)$ .

Análogamente cuando  $\{x = 0\}$  parametriza localmente a otra componente del divisor evanescente con peso  $v$  tenemos que  $x^v$  divide a  $\pi^*l(x, y)$ .

Falta ver que  $h(0, 0) \neq 0$ . si  $h(0, 0) = 0$  entonces la curva de nivel  $\{\pi^*l = 0\}$  en una vecindad de  $a$  tendrá una rama tal que su proyección es una separatriz compleja de la foliación  $dl = 0$  lo que contradice la elección de  $l$ .

Para completar la prueba del lema tomemos una sección transversal  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M', a')$  al divisor excepcional  $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(a) \subset M'$  en un punto medio  $a' \in \mathbb{E}$ . Sin pérdida de generalidad tomemos  $a'$  de forma que podemos parametrizar una vecindad de  $a'$  con coordenadas  $(x, u)$  de tal forma que  $\{x = 0\} = \mathbb{E}$

localmente y  $\sigma(x, u) = (x, ux)$ , en estas cartas podemos tomar la transversal  $\tau(t) = (t, c)$  tal que  $\tau(0) = a \ c \neq 0$ .

Tenemos que  $\sigma(\tau(t)) = (t, ct)$  y por tanto tenemos de la observación 4.16

$$\omega(\mathbb{E}) = \text{ord}_0(\pi')^*l \big|_{\tau} = \text{ord}_0\pi^*l \big|_{\sigma \circ \tau} = \text{ord}_0\pi^*l(t, ct)$$

y de 4.14 tenemos que

$$\omega(\mathbb{E}) = \begin{cases} w & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto medio,} \\ v + w & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto esquina.} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

□

**Proposición 4.18.** Consideremos  $\sigma(\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  la transformación monoidal estándar, tenemos que

$$\omega(\mathbb{E}) = 1$$

**Demostración.** Consideremos la carta  $(U_1, (x, u))$ ,  $u = \frac{y}{x}$  y sea  $\tau = \{u = c\}$  transversal a  $\{x = 0\}$  tenemos  $\sigma(\tau) = \{y - cx = 0\}$ , por definición

$$\omega(\mathbb{E}) = \text{ord}_0\{y - cx = 0\} = \text{ord}_0y - cx = 1.$$

□

Un caso particular de curvas transversales a  $S$  son hojas de una foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  cuya cerradura sea transversal a  $S$  en un punto medio pues su proyección es una separatriz, del lema 4.14 tenemos la siguiente observación.

**Observación 4.19.** Consideremos una foliación singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\pi$  una explosión compuesta de explosiones simples, si tenemos una hoja  $\mathcal{L}$  transversal al divisor evanescente  $S$  en un punto medio de una componente  $L$  entonces su proyección  $\pi(\mathcal{L})$  es una separatriz irreducible de orden  $\omega(L)$ , esto sucede por ejemplo si  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con  $\pi$  tiene un punto singular de tipo silla en un punto medio de  $S$ .

Con esta observación podemos ver que una foliación  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con un punto singular dicrítico 0 tiene una infinidad de separatrices en 0 (hojas de la foliación cuya cerradura es una curva analítica que pasa por 0).

**Proposición 4.20.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\tilde{\mathcal{F}}$  su explosión en  $(\mathbb{M}, \mathbb{E})$  con la transformación monoidal canónica  $\sigma$ . Si 0 es una singularidad dicrítica, podemos encontrar una infinidad de puntos en el divisor excepcional  $\mathbb{E}$  tales que para cada punto  $a \in I$  la hoja en  $\tilde{\mathcal{F}}$  que pasa por  $a$  es transversal al divisor excepcional  $\mathbb{E}$ .

**Demostración.** Consideremos una foliación holomorfa singular dicrítica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  definida por la ecuación de Pfaff  $\{\omega = 0\}$  con  $\omega = fdx + gdy$  una

1-forma holomorfa. Consideremos  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de  $\mathcal{F}$  dada por la transformación monoidal canónica  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ .

En la carta  $(U_1, (x, u))$  de la variedad  $\mathbb{M}$  tenemos que  $\tilde{\mathcal{F}}$  es descrita por la 1-forma  $\tilde{\omega} = 0$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(x, u) &= \frac{1}{x^{n+1}} [(f(x, ux) + ug(x, ux)dx)dx + xg(x, ux)du] \\ &= (f_{n+1}(1, u) + ug_{n+1}(1, u) + x(\cdots))dx + (g_n(1, u) + x(\cdots))du\end{aligned}$$

donde  $f_i$  denota al polinomio homogéneo de grado  $i$  que aparece en la expansión en serie de potencias de  $f$ . Gracias a que el origen es un punto singular dicrítico de la foliación  $\mathcal{F}$ , tenemos que el polinomio  $g(1, t)$  es distinto de 0 y por tanto  $g_n(1, a) \neq 0$  para una infinidad de valores  $a$  complejos.

Sea  $\phi(t)$  la solución de la ecuación diferencial asociada a la 1-forma  $\tilde{\omega}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(g_n(1, u) + x(\cdots)) \\ \dot{u} &= (f_{n+1}(1, u) + ug_{n+1}(1, u) + x(\cdots))\end{aligned}$$

en el punto  $(0, a)$  de la carta  $(U_1, (x, u))$  ( $\phi(t)$  dada por el teorema de existencia y unicidad). Derivado  $\phi(t)$  respecto a  $t$  tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, a) = \lambda [-g_n(1, a) \frac{\partial}{\partial x} + (f_{n+1}(1, a) + ag_{n+1}(1, a)) \frac{\partial}{\partial u}]$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , distinto de cero.

Finalmente, si  $g_n(1, a) \neq 0$ , tenemos que los vectores  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, a)$  y  $\frac{\partial}{\partial u}$  son ortogonales en el plano tangente a  $(0, a)$  en la variedad  $\mathbb{M}$ , por tanto  $\phi(t)$  es transversal a el divisor excepcional  $\mathbb{E}$ .  $\square$

**Corolario 4.21.** *Consideremos una foliación holomorfa singular  $\mathcal{F}$  en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Si existe una explosión  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  formada por explosiones simples, tal que la explosión de  $\mathcal{F}$  con  $\pi$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$ , tiene un punto singular dicrítico en el divisor evanescente  $S$  entonces 0 es un punto singular general dicrítico (con una infinidad de separatrices).*

**Demostración.** Para  $p$  un punto singular dicrítico de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  en el divisor evanescente  $S$ . Consideramos la explosión simple con centro en  $p$

$$\sigma : (M', S', \mathbb{E}) \rightarrow (M, S, p).$$

y la explosión con centro en  $p$  de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\sigma^* \tilde{\mathcal{F}}$ . En virtud de la proposición 4.20, tenemos que una infinidad de hojas de la foliación  $\sigma^* \tilde{\mathcal{F}}$  cortan de manera transversal a la componente  $\sigma^{-1}(p) = \mathbb{E}$  del divisor evanescente  $S'$ . La proyección bajo la explosión  $\sigma \circ \pi$  de cada una de estas hojas es una separatriz de orden  $\omega(\sigma^{-1}(p))$  (Ver observación 4.19).  $\square$

## 4.2. Orden evanescente

**Definición 4.22.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , para una separatriz de orden 1,  $\gamma$ , en 0 escogemos coordenadas  $(x, y)$  de forma que  $\gamma = \{y = 0\}$  en estas coordenadas tenemos que un campo vectorial que define a  $\mathcal{F}$  tiene la forma

$$F(x, y) = x^n P(x) + yQ(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + yR(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

con  $P(0) \neq 0$ .

Definimos el *orden evanescente de  $\gamma$  en  $\mathcal{F}$* ,  $\varkappa_0(\mathcal{F}, \gamma) := n$ .

Para otro campo vectorial  $G$  que defina a  $\mathcal{F}$  tenemos que  $G = \mu F$  con  $\mu(0) \neq 0$  por lo que  $\varkappa(\mathcal{F}, \gamma)$  no depende de la elección del campo que defina a  $\mathcal{F}$ .

**Teorema 4.23.** Sea  $\mathcal{F}$  el germen de una foliación holomorfa singular no dicrítica en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\tilde{\mathcal{F}}$  su explosión generada con la transformación monoidal estándar  $\sigma : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Entonces

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \varkappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}) = \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1. \quad (4.2.1)$$

Y si  $\gamma$  es una separatriz irreducible de  $\mathcal{F}$  de orden 1 en 0 y  $\tilde{\gamma}$  es su explosión que interseca a  $\mathbb{E}$  en el punto  $a = \tilde{\gamma} \cap \mathbb{E}$ , entonces

$$\varkappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\gamma}) = \varkappa_0(\mathcal{F}, \gamma) - \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1. \quad (4.2.2)$$

**Demostración.** Sea  $F = g(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - f(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  un campo vectorial holomorfo que genera a  $\mathcal{F}$  alrededor de 0. Denotemos  $F_n = g_n(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - f_n(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  a la parte principal homogénea de orden  $n = \text{ord}_0 \mathcal{F}$  del campo  $F$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que todas las singularidades de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  están descritas por la carta  $(U_1, (x, u))$   $u = \frac{y}{x}$  de  $\mathbb{M}$  haciendo previamente un cambio de coordenadas de forma que  $g_n(x, y)$  sea regular en  $y$  (y por tanto  $xf_n(x, y) + yg_n(x, y)$  sea regular en  $y$ ), en esta carta el campo vectorial  $F'$  que define a  $\tilde{\mathcal{F}}$  toma la forma

$$F'(x, u) = [f_n(1, u) + ug_n(1, u) + x(\cdots)] \frac{\partial}{\partial u} - x[g_n(1, u) + \cdots] \frac{\partial}{\partial x}.$$

Como en  $(U_1, (x, u))$   $\mathbb{E}$  es igual a  $\{x = 0\}$ , de esta forma

$$\varkappa_{(0,a)}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}) = \text{ord}_a f_n(1, u) + ug_n(1, u). \quad (4.2.3)$$

Sumando sobre todas las  $a \in \mathbb{C}$  tenemos

$$\begin{aligned} \sum_a \varkappa_{(0,a)}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{E}) &= \sum_a \text{ord}_a f_n(1, u) + ug_n(1, u) \\ &= \text{grad} f_n(1, u) + ug_n(1, u) \\ &= \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Para la segunda parte tomamos coordenadas  $(x, y)$  de forma que  $\gamma = \{y = 0\}$ , en estas coordenadas un campo vectorial  $F$  que defina a  $\mathcal{F}$  alrededor de 0 tiene la forma

$$F(x, y) = x^m P(x) + yQ(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + yR(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.2.5)$$

con  $P(0) \neq 0$ ,  $m = \varkappa_0(\mathcal{F}, \gamma)$ .

En  $(U_1, (x, u))$  tenemos  $\tilde{\gamma} = \{u = 0\}$  y  $\tilde{\mathcal{F}}$  es generado por el campo vectorial

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^n} F(x, ux) &= \frac{1}{x^n} (xF_1(x, ux) \frac{\partial}{\partial x} + [F_2(x, ux) - uF_1(x, ux)] \frac{\partial}{\partial u}) \\ &= \frac{1}{x^n} ([x^{m+1}P(x) + u(\cdots)] \frac{\partial}{\partial x} + u(\cdots) \frac{\partial}{\partial u}) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

con  $n = \text{ord}_0 \mathcal{F}$ . Por tanto

$$\varkappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\gamma}) = m + 1 - n = \varkappa_0(\mathcal{F}, \gamma) + 1 - \text{ord}_0 \mathcal{F} \quad (4.2.7)$$

□

**Definición 4.24.** Consideremos  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una explosión compuesta de explosiones simples y  $\mathcal{F}$  una foliación en  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

Sea  $S = \bigcup L_i$  la descomposición del divisor evanescente de la explosión  $\pi$  y  $\tilde{\mathcal{F}}$  la explosión de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$ .

Para  $a \in S$  tenemos  $a \in L_i$  para  $i$ , definimos:

$$\kappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, L_i) = \begin{cases} \varkappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, L_i) & \text{si } a \text{ es un punto medio,} \\ \varkappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, L_i) - 1 & \text{si } a \text{ es un punto esquina.} \end{cases}$$

**Teorema 4.25.** Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  y  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una explosión compuesta de explosiones simples, de forma que en cada explosión simple no explotamos puntos singulares dicríticos de la foliación obtenida en la explosión correspondiente de  $\mathcal{F}$ .

Entonces la suma de todos los órdenes evanescentes de  $\mathcal{F}'$  a lo largo de todas las componentes del divisor excepcional cumple la igualdad

$$\sum_{L_j} \sum_{a \in L_j} \omega(L_j) \kappa_a(\mathcal{F}', L_j) = \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1 \quad (4.2.8)$$

**Demostración.** Por inducción sobre el número  $k$  de explosiones simples que componen a  $\pi = \pi_k \circ \pi_{k-1} \cdots \circ \pi_1$ .

**Base de inducción.** El caso  $k = 1$  corresponde al teorema 4.23.

**Hipótesis de inducción.** Supongamos que para una explosión

$$\pi' : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

se cumple que

$$\sum_{L_j} \sum_{a \in L_j} \omega(L_j) \kappa_a(\mathcal{F}', L_j) = \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1. \quad (4.2.9)$$

**Paso inductivo.** Los términos que contribuyen algo a la suma son los puntos singulares, por tanto son los únicos puntos que estudiaremos. Tomemos un punto singular  $b \in S$  de  $\mathcal{F}'$  no dicrítico y consideremos la explosión simple de  $M$  en  $b$

$$\sigma : (M', S', \mathbb{E}) \rightarrow (M, S, b).$$

Consideremos  $\mathcal{F}''$  la explosión de  $\mathcal{F}$  con la explosión  $\pi = \sigma \circ \pi'$  y denotemos por  $L'_j$  a la explosión simple de la componente  $L_j$  a través de la explosión  $\sigma$ ,  $S' = \bigcup L'_j \cup \mathbb{E}$ .

Queremos probar que se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in \mathbb{E}} \omega(\mathbb{E}) \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) + \sum_{L'_j} \sum_{a \in L'_j} \omega(L'_j) \kappa_a(\mathcal{F}'', L'_j) \\ &= \sum_{L_j} \sum_{a \in L_j} \omega(L_j) \kappa_a(\mathcal{F}', L_j). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Tenemos dos casos para  $b \in S$ ; si  $b$  es un punto medio o un punto esquina del divisor evanescente  $S$ .

**Caso 1 (b es un punto medio)** Si  $b \in L_i$  entonces  $\mathbb{E}$  interseca a  $L'_i$  en un punto esquina singular  $b' \in L'_i$  y tenemos  $\omega(\mathbb{E}) = \omega(L_i)$  (ver lema 4.17).

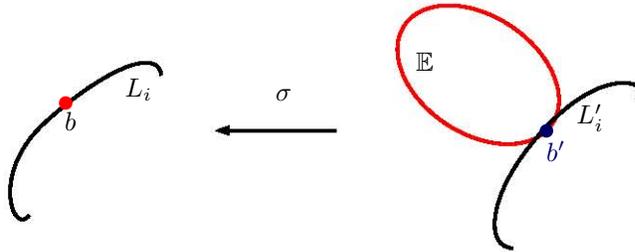


Figura 4.3: Explosión de un punto medio.

Dado que  $b'$  es un punto esquina y el único punto esquina en la componente  $\sigma^{-1}(b) = \mathbb{E}$  del divisor evanescente  $S'$  tenemos las igualdades

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) = \sum_{a \in \mathbb{E}} \varkappa_a(\mathcal{F}'' \mathbb{E}) - 1. \quad (4.2.11)$$

y

$$\kappa_{b'}(\mathcal{F}'') = \varkappa_{b'}(\mathcal{F}'', L'_i) - 1. \quad (4.2.12)$$

En virtud del teorema 4.23, tenemos las igualdades

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \varkappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) = \text{ord}_b \mathcal{F}' + 1. \quad (4.2.13)$$

y

$$\kappa_{b'}(\mathcal{F}'', L'_i) = \varkappa_b(\mathcal{F}', L_i) - \text{ord}_b \mathcal{F}' + 1 \quad (4.2.14)$$

De las ecuaciones (4.2.11) y (4.2.13) se sigue la ecuación

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) &= \sum_{a \in \mathbb{E}} \varkappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) - 1 \\ &= (\text{ord}_b \mathcal{F}' + 1) - 1 \\ &= \text{ord}_b \mathcal{F}'. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

De las ecuaciones (4.2.12) y (4.2.14) tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} \kappa'_b(\mathcal{F}'', L'_i) &= \varkappa'_b(\mathcal{F}'', L'_i) - 1 \\ &= (\varkappa_b(\mathcal{F}', L_i) - \text{ord}_b \mathcal{F}' + 1) - 1 \\ &= \varkappa_b(\mathcal{F}', L_i) - \text{ord}_b \mathcal{F}'. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Sumando las ecuaciones (4.2.16) y (4.2.16) junto con el hecho de que se cumple la igualdad  $\omega(\mathbb{E}) = \omega(L_i) = \omega(L'_i)$  al ser  $b$  punto medio en la componente  $L_i$  (ver lema 4.17)

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) \omega(\mathbb{E}) + \kappa'_b(\mathcal{F}'', L'_i) \omega(L'_i) &= \varkappa_b(\mathcal{F}', L_i) \omega(L_i) \\ &= \kappa_b(\mathcal{F}', L_i) \omega(L_i). \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Finalmente gracias a que  $\sigma$  es un biholomorfismo fuera de  $b$ , lo que prueba el paso inductivo en el caso 1, tenemos que para los puntos  $a \in S' / \{b\}$ ,  $a$  en la componente  $L_j$  se cumple

$$\kappa_a(\mathcal{F}', L_j) \omega(L_j) = \kappa_a(\mathcal{F}'', L'_j) \omega(L'_j) \quad (4.2.18)$$

donde  $a' = \sigma^{-1}(a) \in L'_j$ .

Sumando sobre todos los puntos  $a \in S' / \{b\}$  la ecuación (4.2.18) más la ecuación (4.2.17) tenemos la ecuación (4.2.10).

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in \mathbb{E}} \omega(\mathbb{E}) \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) + \sum_{L'_j} \sum_{a \in L'_j} \omega(L'_j) \kappa_a(\mathcal{F}'', L'_j) \\ &= \sum_{L_j} \sum_{a \in L_j} \omega(L_j) \kappa_a(\mathcal{F}', L_j). \end{aligned}$$

Lo que prueba el paso inductivo en el caso de que el punto  $b$  sea un punto medio.

**Caso 2 (b es un punto esquina)** Si  $b \in L_1 \cap L_2$  entonces la componente  $\mathbb{E}$  interseca a la componente  $L'_1$  en un punto esquina  $b_1 \in L'_1$  e interseca a la componente  $L'_2$  en un punto esquina  $b_2 \in L'_2$ .

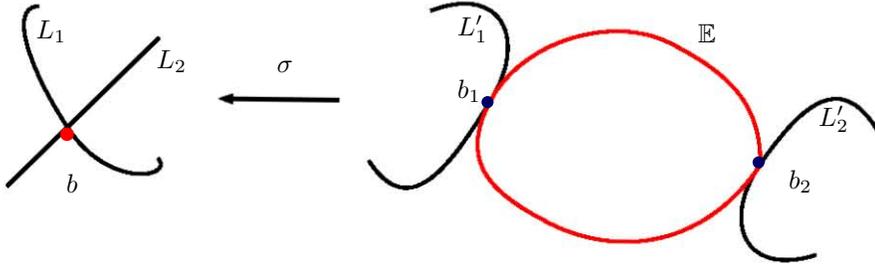


Figura 4.4: Explosión de un punto esquina.

De forma análoga al caso 1 para probar que se cumple la ecuación (4.2.10), es suficiente ver que se cumple la ecuación

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) \omega(\mathbb{E}) + \kappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) \omega(L'_1) + \kappa_{b_2}(\mathcal{F}'', L'_2) \omega(L'_2) \\ &= \kappa_b(\mathcal{F}', L_1) \omega(L_1) + \kappa_b(\mathcal{F}', L_2) \omega(L_2). \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Veamos que se cumple la ecuación (4.2.19)

En virtud del lema 4.17, los pesos correspondientes satisfacen las ecuaciones  $\omega(\mathbb{E}) = \omega(L_i) + \omega(L_j)$ ,  $\omega(L_i) = \omega(L'_i)$  y  $\omega(L_j) = \omega(L'_j)$ . Por tanto, tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) \omega(\mathbb{E}) + \kappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) \omega(L'_1) + \kappa_{b_2}(\mathcal{F}'', L'_2) \omega(L'_2) \\ &= \sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) (\omega(L_1) + \omega(L_2)) + \kappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) \omega(L_1) + \kappa_{b_2}(\mathcal{F}'', L'_2) \omega(L_2). \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Dado que  $b_1$  y  $b_2$  son los únicos puntos esquina en la componente  $\mathbb{E}$  tenemos la igualdad

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) = \sum_{a \in \mathbb{E}} \varkappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) - 2. \quad (4.2.21)$$

En virtud del teorema 4.23 , tenemos la igualdad

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \varkappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) = \text{ord}_b \mathcal{F}' + 1. \quad (4.2.22)$$

Sustituyendo la igualdad (4.2.22) en la igualdad (4.2.21) tenemos la ecuación

$$\sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E}) = \text{ord}_b \mathcal{F}' - 1. \quad (4.2.23)$$

Por otro lado, dado que  $b_1$  es un punto esquina en la componente  $L_1$  tenemos por definición

$$\kappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) = \varkappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) - 1. \quad (4.2.24)$$

En virtud del teorema 4.23, tenemos la ecuación

$$\varkappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) = \varkappa_b(\mathcal{F}', L_1) - \text{ord}_b \mathcal{F}' + 1. \quad (4.2.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.2.24) y (4.2.25) en la ecuación (4.2.23), tenemos la igualdad

$$\kappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1) = \varkappa_b(\mathcal{F}', L_1) - \text{ord}_b \mathcal{F}'. \quad (4.2.26)$$

De forma análoga para  $b_2$  tenemos

$$\kappa_{b_2}(\mathcal{F}'', L'_2) = \varkappa_b(\mathcal{F}', L_2) - \text{ord}_b \mathcal{F}'. \quad (4.2.27)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (4.2.23), (4.2.25) y (4.2.26) en la ecuación (4.2.20), obtenemos la ecuación (4.2.19).

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in \mathbb{E}} \kappa_a(\mathcal{F}'', \mathbb{E})\omega(\mathbb{E}) + \kappa_{b_1}(\mathcal{F}'', L'_1)\omega(L'_1) + \kappa_{b_2}(\mathcal{F}'', L'_2)\omega(L'_2) \\ &= (\text{ord}_b \mathcal{F}' - 1)(\omega(L_1) + \omega(L_2)) + (\varkappa_b(\mathcal{F}', L_1) - \text{ord}_b \mathcal{F}')\omega(L_1) \\ & \quad + (\varkappa_b(\mathcal{F}', L_2) - \text{ord}_b \mathcal{F}')\omega(L_2) \\ &= (\varkappa_b(\mathcal{F}', L_1) - 1)\omega(L_1) + (\varkappa_b(\mathcal{F}', L_2) - 1)\omega(L_2) \\ &= \kappa_b(\mathcal{F}', L_1)\omega(L_1) + \kappa_b(\mathcal{F}', L_2)\omega(L_2) \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Lo que prueba el paso inductivo en el caso de que el punto  $b$  sea un punto medio.  $\square$

Volviendo al problema local de Poincaré tenemos que si  $\mathcal{F}$  es una foliación singular con un número finito de separatrices que pasan por el 0, en cualquier sucesión de explosiones simples no aparecen puntos dicríticos (por la proposición 4.21) y por tanto podemos aplicar el teorema 4.25 a cualquier explosión de  $\mathcal{F}$ .

La idea de la prueba del teorema 4.10 es comparar la ecuación (4.2.8) con una foliación apropiada.

**Demostración.** [del teorema 4.10] Sea  $\mathcal{F}$  una foliación singular en  $(\mathbb{C}^2, 0)$  con 0 un punto singular aislado general no dicrítico, esto es con un número finito de separatrices que pasan por 0, y  $C$  una de estas separatrices descrita por  $\{f = 0\}$  con  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$  libre de cuadrados.

Consideremos la foliación  $\mathcal{H}$  definida por la ecuación de Pfaff  $\{df = 0\}$ .

Por construcción  $C$  es una separatriz común de  $\mathcal{F}$  y de  $\mathcal{H}$ , más aún  $\{f = 0\}$  es una separatriz que contiene todas las separatrices de  $\mathcal{H}$ .

Consideremos  $\pi : (M, S) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  una explosión que desingulariza a  $\mathcal{H}$  dada por el teorema de desingularización 2.17 y sean  $\tilde{\mathcal{H}}$  y  $\tilde{\mathcal{F}}$  las explosiones de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{H}$  respectivamente.

Como cada singularidad  $a \in S$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$  es elemental y en una vecindad de  $a$  la foliación  $\tilde{\mathcal{H}}$  es integrable (proposición 2.31), tenemos que cada singularidad  $a \in S$  es una singularidad de tipo silla resonante (proposición 2.30).

Por lo tanto, para todo punto singular  $a$  de la explosión  $\tilde{\mathcal{H}}$ , en una componente  $L$  de  $S$  tenemos

$$\varkappa_a(\tilde{\mathcal{H}}, L) = 1. \quad (4.2.29)$$

De esta forma

$$\kappa_a(\tilde{\mathcal{H}}, L) = \begin{cases} 1 & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto medio,} \\ 0 & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto esquina.} \end{cases} \quad (4.2.30)$$

Si  $a$  es una singularidad de la explosión  $\tilde{\mathcal{H}}$  en un punto medio del divisor evanescente  $S$  entonces  $a$  es una singularidad de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , esto ya que por  $a$  pasan dos separatrices de la explosión de  $\tilde{\mathcal{H}}$  transversales entre sí al ser  $a$  punto silla resonante (ver teorema de Hadamard-Perron (1.35)). Como el divisor evanescente  $S$  es separatriz de la explosión  $\tilde{\mathcal{H}}$  en el punto  $a$ , tenemos una separatriz  $\gamma$  de la explosión  $\tilde{\mathcal{H}}$  transversal al divisor evanescente  $S$  en el punto  $a$ .  $\gamma$  es separatriz de la explosión  $\tilde{\mathcal{F}}$  pues cuando la proyectamos con  $\pi$  nos da una separatriz de la foliación  $\mathcal{H}$  que por construcción es una separatriz de la foliación  $\mathcal{F}$ .

Para cada punto singular  $b \in S$  de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}$  se cumple la desigualdad

$$\kappa_b(\tilde{\mathcal{H}}, L) \geq \begin{cases} 1 & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto medio,} \\ 0 & \text{en el caso de que } a \text{ sea punto esquina.} \end{cases} \quad (4.2.31)$$

donde  $L$  es una componente del divisor evanescente  $S$  que contiene al punto  $b$ .

Por tanto se tiene que para todo punto  $b \in S$  se cumple la desigualdad

$$\kappa_b(\tilde{\mathcal{F}}, L) \geq \kappa_b(\tilde{\mathcal{H}}, L) \quad (4.2.32)$$

Finalmente, en virtud de que las foliaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{H}$  tienen un número finito de separatrices, nunca explotamos puntos singulares dicríticos (ver corolario 4.21) y por tanto del teorema 4.25 junto con la desigualdad (4.2.32) tenemos la desigualdad

$$\text{ord}_0 \mathcal{H} + 1 = \sum_L \sum_{a \in L} \omega(L) \kappa_a(\tilde{\mathcal{H}}, L) \leq \sum_L \sum_{a \in L} \omega(L) \kappa_a(\tilde{\mathcal{F}}, L) = \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1.$$

Con esto hemos probado que si  $C$  es una separatriz de una foliación  $\mathcal{F}$  con un número finito de separatrices en 0, entonces se cumple la desigualdad

$$\text{ord}_0 C = \text{ord}_0 \mathcal{H} + 1 \leq \text{ord}_0 \mathcal{F} + 1. \quad (4.2.33)$$

□

Lo que finaliza esta tesis.

# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Gérmenes de funciones holomorfas

**Definición A.1 (Función analítica).** Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subseteq \mathbb{C}^n$  un subconjunto abierto, es llamada *holomorfa* o *analítica* en  $D$  si cada punto  $w \in D$  tiene una vecindad abierta  $U$ ,  $w \in U \subseteq D$  tal que la función  $f$  tiene expansión en series de potencias

$$f(z) = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_n=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_n} (z_1 - w_1)^{v_1} \dots (z_n - w_n)^{v_n} \quad (\text{A.1.1})$$

que converge para toda  $z \in U$ .

Al conjunto de todas las funciones holomorfas en  $D$  lo denotaremos  $\mathcal{O}(D)$ .

**Ejemplo A.2.** Los polinomios con variables  $z_1, z_2, \dots, z_n$  son holomorfos en todo  $\mathbb{C}^n$ .

**Observación A.3.** Si restringimos  $z_j = a_j$  para  $j \neq i$ ,  $f(a_1, \dots, z_j, \dots, a_n)$  es una función holomorfa en la variable  $z_i$ , lo cual tiene como consecuencia que  $f(z)$  sea continua en  $z_i$ , variando  $i = 1, \dots, n$  tenemos que  $f(z)$  es continua.

Más aún tenemos que la derivada de la función holomorfa respecto a cada una de las variables está bien definida y será denotada por  $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Resulta que si  $f(z)$  es holomorfa en cada una de las variables  $z_i$  por separado entonces es holomorfa

**Teorema A.4 (Lema de Osgood).** Si una función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es continua en un conjunto abierto  $D \subset \mathbb{C}^n$ , y holomorfa en cada variable por separado, entonces  $f$  es holomorfa en  $D$ .

**Demostración.** Ver [[GR], Págs. 2-3]. □

**Teorema A.5 (Teorema de la composición).** Si  $f$  es una función holomorfa en  $D'$  y  $G : D \rightarrow D'$  es una transformación holomorfa entonces  $f \circ G$  es una función holomorfa en  $D$ .

**Demostración.** Ver [[GR], Pág. 5]

**Teorema A.6 (Teorema de la identidad).** Si  $f$  y  $g$  son funciones holomorfas en un conjunto abierto conexo  $D \subset \mathbb{C}^n$  de forma que  $f(z) = g(z)$  para todos los puntos  $z$  en un subconjunto abierto no vacío  $U \subset D$ , entonces  $f(z) = g(z)$  para todos los puntos  $z \in D$ .

**Demostración.** Ver [[GR], Págs. 6-7]. □

**Definición A.7.** Dos funciones holomorfas  $f$  y  $g$  serán llamadas *equivalentes* en el punto  $w$  si existe una vecindad abierta de  $w$   $W$  tal que  $w \in W \subset U \cap V$  con  $U$  dominio de  $f$  y  $V$  dominio de  $g$  y  $f(z) = g(z)$  para toda  $z \in W$

Una clase de equivalencia para tales funciones será llamada un *germen holomorfo* de una función en el punto  $w$ .

Al conjunto de gérmenes de funciones holomorfas podemos darles la estructura de anillo de la siguiente forma.

Para cualesquiera dos gérmenes holomorfos  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  en  $w \in \mathbb{C}^n$  escogemos funciones  $f_U$  y  $g_V$  que los representen respectivamente.

La función suma  $f_U + g_V$  y producto  $f_U \cdot g_V$  están definidos en el abierto  $U \cap V$ ; de esta forma definimos  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$  como el germen asociado a  $f_U + g_V$  y  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$  al germen asociado a  $f_U \cdot g_V$ .

Denotaremos por  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, w)$  al anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un punto  $w \in \mathbb{C}^n$ .

**Teorema A.8.** El anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, w)$  es isomorfo al anillo de series convergentes centradas en  $w$ ,  $\mathbb{C}\{z_1 - w_1, \dots, z_n - w_n\}$ .

**Demostración.** El isomorfismo entre los dos anillos  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, w)$  y  $\mathbb{C}\{z_1 - w_1, \dots, z_n - w_n\}$  está dado por la transformación

$$\varphi : \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, w) \rightarrow \mathbb{C}\{z_1 - w_1, \dots, z_n - w_n\}.$$

Donde  $\varphi(\mathbf{f})$  es la serie convergente que representa a  $f_U$  en el punto  $w$  como en la definición A.1 con  $f$  un representante de  $\mathbf{f}$ . □

**Proposición A.9.** El anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  es un dominio entero.

**Demostración.** Tomemos  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  tales que  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0}$  y sean  $f$  y  $g$  representantes holomorfos en una vecindad  $U$  del origen, respectivamente. Entonces  $f(z)g(z) = 0$  en una vecindad  $V \subset U$  del origen. Si  $f(w) \neq 0$  para un punto  $w \in V$  entonces por continuidad  $f(z) \neq 0$  en una vecindad de  $w$  y por tanto  $g(z) = 0$  en esa vecindad. Por el teorema de la identidad A.6 se sigue que  $g(z) = 0$  en  $V$ , y por tanto  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ . □

Como  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  es un dominio entero, podemos considerar su campo de fracciones  $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, 0)$  al que llamaremos el campo de gérmenes de funciones meromorfas.

**Proposición A.10.** *Las unidades en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  son gérmenes de funciones que no son cero en el origen.*

**Demostración.** Supongamos que  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$  tiene un representante  $f$  tal que  $f(0) \neq 0$ . Por continuidad  $f(z) \neq 0$  en una vecindad  $U$  del origen;  $\frac{1}{f(z)}$  es continua en  $U$  y es holomorfa en cada variable, por el lema de Osgood  $\frac{1}{f(z)}$  es holomorfa en el origen, por tanto  $\frac{1}{\mathbf{f}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  y por tanto  $\mathbf{f}$  es unidad.  $\square$

Si  $\mathbf{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$  pero tiene un representante con  $f(0) = 0$  no puede ser unidad, pues para todo  $\mathbf{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ , tenemos  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \neq \mathbf{id}$  debido a que todos los representantes  $h$  de  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$  son tales que

$$h(0) = f(0)g(0) = 0g(0) = 0.$$

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.  $\square$

**Proposición A.11.** *El anillo  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  es un anillo local en el cual las no unidades forman el ideal máximo.*

Para las siguientes construcciones denotaremos  ${}_n\mathcal{O}$  para referirnos a  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ .  $\square$

**Definición A.12.** Una función  $f$  holomorfa en una vecindad del origen se dice *regular de orden  $k$  en  $z_n$*  si  $f(0, \dots, 0, z_n)$  como función de  $z_n$  tienen un cero de orden  $k$  en  $z_n = 0$ .

Decimos que el germen  $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}$  es *regular de orden  $k$  en  $z_n$*  si existe un representante  $f$  del germen que sea regular de orden  $k$  en  $z_n$  en el origen.

**Lema A.13.** *Si  $f$  es una función holomorfa de orden  $k < \infty$  en el punto  $w$ , entonces bajo un cambio de coordenadas lineal no singular en  $\mathbb{C}^n$  la función será regular de orden  $k$  en  $z_n$  en el punto  $w$ .*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $w = 0 \in \mathbb{C}^n$ . La función  $f$  tiene una expansión en polinomios homogéneos de la forma

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} f_j(z) \quad f_k(z) \neq 0$$

Tomemos un punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$  tal que  $f_k(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ; como  $a \neq 0$  existen constantes  $b_{ij}$  tales que el cambio de coordenadas lineal

$$z_i = a_i \zeta_n + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \zeta_j$$

es no singular. En estas nuevas coordenadas la función  $g(\zeta) = f(z(\zeta))$  tiene orden  $k$ , y más aún  $g_k(0, \dots, 0, 1) = f_k(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ; entonces  $g$  es regular de orden  $k$  en  $\zeta_n$  en el origen.  $\square$

**Observación A.14.** Cada germen  $f \in {}_n\mathcal{O}$  puede pensarse regular en  $z_n$  bajo un cambio lineal de coordenadas no singular en  $\mathbb{C}^n$ .

**Definición A.15.** Un *polinomio de Weierstrass* de grado  $k > 0$  en  $z_n$  es un elemento  $h \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  de la forma

$$h = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \dots + a_{k-1} z_n + a_k$$

donde los coeficientes  $a_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}$  no son unidades  $j = 1, \dots, k$ .

**Teorema A.16 (Teorema de preparación de Weierstrass).** Si  $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}$  es regular de orden  $k$  en  $z_n$  entonces existe un único polinomio de Weierstrass  $\mathbf{h} \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  de grado  $k$  tal que  $\mathbf{f} = \mathbf{u}\mathbf{h}$  para alguna unidad  $\mathbf{u} \in {}_n\mathcal{O}$

**Demostración.** Ver [[GR], Págs. 68 – 70].  $\square$

**Teorema A.17 (Teorema de la división de Weierstrass).** Sea  $\mathbf{h} \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  un polinomio de Weierstrass en  $z_n$  de grado  $k$ . Entonces cualquier germen de función holomorfa  $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}$  puede ser representado de manera única en la forma  $\mathbf{f} = \mathbf{g}\mathbf{h} + \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{g} \in {}_n\mathcal{O}$  y  $\mathbf{r} \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  es un polinomio de grado menor que  $k$ . Más aún, si  $\mathbf{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  entonces  $\mathbf{g} \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ .

**Demostración.** Ver [[GR], Págs. 70 – 71].

Una consecuencia directa del teorema de preparación de Weierstrass es el teorema de la función implícita.

**Teorema A.18 (de la función implícita).** Sea  $f \in \mathbb{C} \langle X_1, \dots, X_n, Y \rangle$  con  $f(0) = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial Y}(0) \neq 0$ . Existe una única serie  $\phi \in \mathbb{C} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$  tal que  $\phi(0) = 0$  y  $f(X_1, \dots, X_n, \phi(X_1, \dots, X_n)) = 0$ .

**Demostración.** Como  $\frac{\partial f}{\partial Y}(0) \neq 0$ , tenemos que  $f$  es regular en  $Y$  de orden 1, por tanto del teorema de preparación de Weierstrass  $f = uh$  con  $u$  una unidad del anillo  ${}_n\mathcal{O}$  y  $h$  de la forma

$$h = Y - \phi(X_1, \dots, X_n)$$

con  $\phi(0, \dots, 0) = 0$ . Dado que  $f = uh$  con  $u$  una unidad, tenemos que  $f = 0$  si y sólo si  $h = 0$ , esto es  $Y = \phi(X_1, \dots, X_n)$  y por tanto

$$f(X_1, \dots, X_n, \phi(X_1, \dots, X_n)) = 0.$$

La unicidad de  $\phi$  se sigue de la unicidad del teorema de preparación de Weierstrass.  $\square$

**Lema A.19.** Un polinomio de Weierstrass  $h \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  es reducible sobre  ${}_n\mathcal{O}$  si y sólo si es reducible sobre  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ . Más aún, si  $h$  es reducible, entonces todos sus factores son polinomios de Weierstrass, módulo unidades de  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ .

**Demostración.** Para la primera parte supongamos que  $h = g_1g_2$  tal que  $g_j \in {}_n\mathcal{O}$  no es una unidad para  $j = 1, 2$ . Como  $h$  es un polinomio de Weierstrass,  $h$  es regular en  $z_n$  y por tanto  $g_1$  y  $g_2$  son regulares en  $z_n$ . Aplicando el teorema de preparación de Weierstrass podemos escribir a  $g_j$  de la forma  $g_j = u_jh_j$  donde  $u_j \in {}_n\mathcal{O}$  son unidades y  $h_j$  son polinomios de Weierstrass para  $j = 1, 2$ .

Por tanto  $h = (u_1u_2)(h_1h_2)$ . Como  $h_1h_2$  es un polinomio de Weierstrass la unicidad del teorema de preparación nos asegura que  $u_1u_2 = 1$  y  $h = h_1h_2$ . Por tanto  $h$  se descompone en polinomios de Weierstrass.

Para la otra implicación, si  $h = g_1g_2$  con  $g_i$  no unidades en  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  para  $i = 1, 2$ . En este caso, si  $g_1$  fuera unidad en  ${}_n\mathcal{O}$ , tendríamos  $g_2 = hg_1^{-1}$ , por el teorema de la división de Weierstrass se sigue que  $g_1^{-1} \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ , pues  $g_2 \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  y  $h$  es un polinomio de Weierstrass, lo cual es una contradicción. De forma análoga  $g_2$  no es unidad en  ${}_n\mathcal{O}$  y por tanto  $h$  es reducible en  ${}_n\mathcal{O}$ .  $\square$

**Teorema A.20.** *Los anillos locales  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$   $n \neq 0$  son dominios de factorización única.*

**Demostración.** La prueba será por inducción sobre la dimensión  $n$ . Cuando  $n = 0$  el anillo  ${}_0\mathcal{O} = \mathbb{C}$  es un campo y por tanto es un dominio de factorización única.

Asumamos que  ${}_{n-1}\mathcal{O}$  es de factorización única. Por el teorema de Gauss tenemos que  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  también es de factorización única.

Consideremos  $f \in {}_n\mathcal{O}$ , haciendo un cambio lineal de coordenadas supongamos que  $f$  es regular en  $z_n$ . Entonces, por el teorema de preparación de Weierstrass, escribimos  $f = uh$  donde  $u \in {}_n\mathcal{O}$  es una unidad y  $h \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  es un polinomio de Weierstrass. El polinomio  $h$  puede ser escrito de manera única salvo orden y unidades en  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  como producto de polinomios irreducibles. Se sigue del lema A.19 que estos factores proveen de una factorización única a  $f$  en  ${}_n\mathcal{O}$  salvo orden y unidades en  ${}_n\mathcal{O}$ , probando el teorema.  $\square$

**Teorema A.21.** *Los anillos locales  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$   $n \neq 0$  son anillos Noetherianos.*

**Demostración.** La prueba será por inducción sobre la dimensión  $n$ . Cuando  $n = 0$  el anillo  ${}_0\mathcal{O} = \mathbb{C}$  es un campo y por tanto es anillo Noetheriano.

Asumamos que  ${}_{n-1}\mathcal{O}$  es Noetheriano. Por el teorema de la base de Hilbert tenemos que  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  también es de Noether.

Consideremos un ideal  $I \subset \mathcal{O}$ , y tomemos  $g \in I$ ,  $g \neq 0$ . Después de un cambio de coordenadas en  $\mathbb{C}^n$  si fuera necesario, podemos asumir que  $g$  es regular en  $z_n$ . Por el teorema de preparación de Weierstrass se sigue que, después de la multiplicación por una unidad en  ${}_n\mathcal{O}$  podemos asumir que  $g \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  es un polinomio de Weierstrass. La intersección  $I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  es un ideal en el

anillo  ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ , por hipótesis de inducción,  $I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$  es generado por un número finito de elementos digamos  $g_1, \dots, g_k$  con  $g_i \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ . Afirmamos que  $g, g_1, \dots, g_k$  generan al ideal  $I$ .

Para  $f \in I$ , aplicando el teorema de la división de Weierstrass, escribimos  $f = gh + r$ , donde  $r \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ ,  $r = f - gh \in I$  y por tanto  $r \in I \cap {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ , de esta forma  $r = h_1g_1 + \dots + h_kg_k$  con  $h_i \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ , de esta forma  $f = gh + h_1g_1 + \dots + h_kg_k$  lo que prueba que  $I$  es generado por  $g, g_1, \dots, g_k$  y de esta forma  ${}_n\mathcal{O}$  es Noetheriano.  $\square$

## A.2. Gérmenes de conjuntos analíticos

**Definición A.22 (Conjunto analítico).** Un subconjunto  $X \in \mathbb{C}^n$  es un *subconjunto analítico* si en una vecindad de cada punto  $a \in X$  es la intersección finita de conjuntos de la forma  $\{f = 0\}$  con  $f$  una función analítica. Conjuntos analíticos son llamados también *variedades analíticas*.

**Definición A.23. [Subvariedad analítica]** Un conjunto es una *subvariedad analítica de codimensión  $k$*  si alrededor de cada punto  $a \in X$  es la intersección de los ceros de  $k$  funciones analíticas en  $a$  con diferenciales (sobre  $\mathbb{C}$ ) linealmente independientes.

**Definición A.24.** Sea  $D = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid 0 \leq |x_i| < \epsilon_i\}$  un polidisco, y sea  $M \subset D$ .  $M$  es llamado un *conjunto analítico principal* si existe  $f \in \mathbb{C} \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  que converge en  $D$  y satisface

$$V_D(f) := \{x \in D \mid f(x) = 0\} = M.$$

Como ser una unidad en  $\mathbb{C} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$  es equivalente a que  $f(0) \neq 0$  y por tanto  $0 \notin V_D(f)$ . Esto no nos dice nada acerca de  $V_D(f)$  lejos del origen, sin embargo en una vecindad de  $V_D(f)$  (localmente en 0) coincide con el conjunto vacío.

Este es el primer paso para relacionar contenciones de conjuntos analíticos con la noción de divisibilidad de gérmenes de funciones analíticas.

**Definición A.25.** Sean  $X, Y$  subconjuntos de  $\mathbb{C}^n$ . Los conjuntos  $X$  y  $Y$  se dicen *equivalentes* en  $a$  si existe una vecindad  $U$  de  $a$  tal que  $X \cap U = Y \cap U$ . A una clase de equivalencia de conjuntos es llamada el *germen de un conjunto*.

Sea  $\mathbf{f}$  el germen de una función holomorfa, denotamos por  $V(\mathbf{f})$  al germen en 0 definido por el conjunto analítico  $\{x \in U \mid f(x) = 0\}$  donde  $f$  es un representante del germen  $\mathbf{f}$ .

Como en el caso de gérmenes de funciones, la colección de gérmenes de conjuntos heredan la estructura que tienen los conjuntos en el siguiente sentido. Si  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  son gérmenes de conjuntos  $X, Y$ , definimos  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$  y  $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$  como los

gérmenes asociados a  $X \cap Y$  y  $X \cup Y$  respectivamente.

Decimos que  $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$  si hay representantes  $X$  de  $\mathbf{X}$  y  $Y$  de  $\mathbf{Y}$  tales que  $X \subset Y$ .

**Observación A.26.** Con esta notación tenemos que  $\mathbf{f}$  es una unidad en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  si y sólo si  $V(\mathbf{f}) = \emptyset$ .

**Lema A.27 (Lema de Study).** Sean  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ . Si  $\mathbf{f}$  es irreducible en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  y los gérmenes satisfacen la contención de conjuntos  $V(\mathbf{f}) \subset V(\mathbf{g})$  entonces el germen de función holomorfa  $\mathbf{f}$  es un divisor de  $\mathbf{g}$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ .

**Demostración.** Ver [[Fis], Págs. 121 – 122].

**Definición A.28.** Un germen de un conjunto analítico es llamado *reducible* si existen conjuntos  $V(f_1)$  y  $V(f_2)$  tales que  $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$ ,  $V(f_i) \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ , que satisfagan

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2).$$

**Lema A.29.** Sea  $V(f)$  un germen de un conjunto analítico.  $V(f)$  es irreducible si y sólo si existe un germen irreducible  $\mathbf{g}$  y  $k \in \mathbb{N}^*$  en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  tal que  $\mathbf{f} = \mathbf{g}^k$ .

**Demostración.** Se sigue del lema de Study.  $\square$

**Teorema A.30.** Sea  $V(f)$  un germen de un conjunto analítico principal. Entonces  $V(f)$  admite una descomposición

$$V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_k)$$

donde cada  $V(f_i)$  es irreducible. Esta descomposición es única salvo en el orden en el que aparezcan los componentes llamados componentes irreducibles de  $V(f)$ .

**Demostración.** Ver [[GR], Págs. 89 – 90].

**Definición A.31.** Un germen  $X$  es el germen de una variedad si existen elementos  $f_1, \dots, f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$  tales que

$$X = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_j).$$

$X$  se dice *irreducible* si  $X = V_1 \cup V_2$  con  $V_1, V_2$  variedades implica  $V = V_1$  o  $V = V_2$ .

**Definición A.32.** Sea  $g \in \mathbb{C} \langle X, Y \rangle$  y  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C} \langle T \rangle$  dados. La pareja  $\phi = (\varphi_1, \varphi_2)$  es llamada una *parametrización local* del germen  $V(g)$  si existen vecindades del origen  $V \subset \mathbb{C}^2$  y  $U \subset \mathbb{C}^2$  tales que

- 1)  $\varphi_1, \varphi_2$  son convergentes en  $V$  y  $g$  es convergente en  $U$ ,
- 2)  $\phi(V) \subset C := V(g) \subset U$ ,
- 3)  $\phi : V \rightarrow C$  es biyectiva.

**Teorema A.33.** *Cada germe de una curva irreducible admite una parametrización local. Cualesquiera dos parametrizaciones locales  $(\varphi_1, \varphi_2)$  y  $(\tau_1, \tau_2)$  del mismo germe  $V(g)$  son equivalentes; esto es, existe una serie  $\beta \in \mathbb{C} \langle T \rangle$  tal que  $\text{ord} \beta = 1$  y  $\tau_i(\beta(T)) = \varphi_i(T)$  para  $i = 1, 2$ .*

**Demostración.** Ver [[Fis], Págs. 155 – 156].

**Definición A.34.** Sea  $V$  un germe de una variedad analítica. El *ideal de  $V$*  está definido por el conjunto

$$I(V) = \{f \in {}_n\mathcal{O} \mid f \text{ se anula en } V\}.$$

Para un subconjunto  $A \subset {}_n\mathcal{O}$ . El *conjunto de ceros* de  $A$  está definido como

$$V(A) = \bigcap_{f \in A} V(f).$$

**Proposición A.35.** *Para  $V$  un germe de una variedad analítica y  $A$  un subconjunto de  ${}_n\mathcal{O}$  tenemos:*

(i)  $I(V)$  es un ideal de  ${}_n\mathcal{O}$ .

(ii)  $V(A)$  es un germe de variedad bien definido.

**Demostración.** (i) Si  $f, g \in {}_n\mathcal{O}$  se anulan en  $V$ , entonces también  $f + g$  y  $fh$  para cualquier  $h \in {}_n\mathcal{O}$ .

(ii) Sea  $I$  el ideal generado por  $A$ . Como  ${}_n\mathcal{O}$  es Noetheriano,  $I$  finitamente generado, digamos por  $g_1, \dots, g_t$ . Afirmamos  $V(A) = V(g_1, \dots, g_t)$ .

Para cada elemento de  $A$  se anula en  $V(A)$ , por tanto cada elemento de  $I$  se anula en  $V(A)$ . En particular  $g_1, \dots, g_t \in I$ . Así  $V(A) \subset V(g_1, \dots, g_t)$ .

Cada elemento del ideal  $I$  generado por  $g_1, \dots, g_t$  se anula en  $V(g_1, \dots, g_t)$ , como  $A \subset I$ ,  $V(g_1, \dots, g_t) \subset V(A)$ .  $\square$

**Definición A.36.** Si  $I$  es un ideal en el anillo  $R$ , definimos el *radical de  $I$*  como el ideal

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } x^n \in I\}$$

**Teorema A.37.** [Nullstellensatz] *Sea  $J$  un ideal del anillo  ${}_n\mathcal{O}$ .  $J$  satisface la igualdad*

$$I(V(J)) = \sqrt{J}.$$

**Demostración.** Ver [[GR], Págs. 92 – 97].  $\square$

Esto nos dice que para  $F_1, \dots, F_r, G \in {}_n\mathcal{O}$ , si  $G$  se anula donde se anulan  $F_1, \dots, F_r$  entonces para algún  $N > 0$  tenemos

$$G^N = A_1 F_1 + \dots + A_r F_r, \quad A_i \in {}_n\mathcal{O} \quad i = 1, \dots, r.$$

### A.3. Formas en $\mathbb{C}^2$

**Definición A.38.** Una 1-forma es una función lineal  $\omega : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  viendo a  $\mathbb{C}^n$  como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ .

En virtud de que la dimensión de  $\mathbb{C}^n$  sobre  $\mathbb{C}$  es  $n$ , tenemos que el espacio de 1-formas de dimensión  $n$  con las operaciones de suma y producto por escalares usuales para funciones es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

Notando que las proyecciones  $x_i(\eta) = \eta_i, i = 1, \dots, n, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  son linealmente independientes tenemos que  $\{x_1, \dots, x_n\}$  forman una base para el espacio de 1-formas en  $\mathbb{C}^n$ , de esta forma cualquier 1-forma  $\omega$  se puede escribir como

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad a_i = \omega(e_i), x_j(e_i) = \delta_{i,j} \quad (\text{A.3.1})$$

**Definición A.39.** Una 2-forma en  $\mathbb{C}^2$  es una función  $\omega^2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  que es bilineal y antisimétrica.

$$\begin{aligned} \omega^2(\lambda\xi + \eta, \mu) &= \lambda\omega^2(\xi, \mu) + \omega^2(\eta, \mu) \\ \omega^2(\eta, \mu) &= -\omega^2(\mu, \eta) \end{aligned}$$

Definimos el producto y suma de 2-formas con las operaciones usuales de funciones.

**Definición A.40.** Sean  $\omega_1, \omega_2$  dos 1-formas en  $\mathbb{C}^2$ , definimos el *producto exterior* de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ ,  $\omega_1 \wedge \omega_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , como

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\eta, \mu) = \det \begin{bmatrix} \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \\ \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \end{bmatrix}, \quad \eta, \mu \in \mathbb{C}^2. \quad (\text{A.3.2})$$

**Proposición A.41.** Para  $\omega_1, \omega_2$  1-formas definidas en  $\mathbb{C}^2$ , el producto exterior  $\omega_1 \wedge \omega_2$  es una 2-forma.

**Demostración.** Tenemos que para  $\xi, \eta, \mu \in \mathbb{C}^2, \lambda \in \mathbb{C}$  se cumple

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(\lambda\xi + \eta, \mu) &= \det \begin{bmatrix} \omega_1(\lambda\xi + \eta) & \omega_2(\lambda\xi + \eta) \\ \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda\omega_1(\xi) + \omega_1(\eta) & \lambda\omega_2(\xi) + \omega_2(\eta) \\ \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \end{bmatrix} \\ &= (\lambda\omega_1(\xi) + \omega_1(\eta))\omega_2(\mu) - (\lambda\omega_2(\xi) + \omega_2(\eta))\omega_1(\mu) \\ &= \lambda[\omega_1(\xi)\omega_2(\mu) - \omega_2(\xi)\omega_1(\mu)] + [\omega_1(\eta)\omega_2(\mu) - \omega_2(\eta)\omega_1(\mu)] \\ &= \lambda \det \begin{bmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \\ \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi, \mu) + (\omega_1 \wedge \omega_2)(\eta, \mu) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(\omega_1 \wedge \omega_2)(\eta, \mu) &= \det \begin{bmatrix} \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \\ \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \end{bmatrix} \\
&= - \det \begin{bmatrix} \omega_1(\mu) & \omega_2(\mu) \\ \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \end{bmatrix} \\
&= - (\omega_1 \wedge \omega_2)(\mu, \eta).
\end{aligned}$$

□

**Proposición A.42.** Para  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  1-formas definidas en  $\mathbb{C}^2$  se tiene

$$\begin{aligned}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3, \\
\omega_1 \wedge \omega_2 &= - \omega_2 \wedge \omega_1.
\end{aligned}$$

**Proposición A.43.** Tenemos que  $\{x_1 \wedge x_2\}$  es una base del espacio vectorial de 2-formas en  $\mathbb{C}^2$ .

**Demostración.** Sea  $\omega^2$  una 2-forma definida en  $\mathbb{C}^2$ , Consideremos  $\{e_1, e_2\}$  la base canónica de  $\mathbb{C}^2$ . Para  $\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$  y  $\eta = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$  en  $\mathbb{C}^2$  se tiene

$$\begin{aligned}
\omega(\xi, \eta) &= \omega^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2) \\
&= \xi_1 \eta_1 \omega^2(e_1, e_1) + \xi_1 \eta_2 \omega^2(e_1, e_2) + \xi_2 \eta_1 \omega^2(e_2, e_1) + \xi_2 \eta_2 \omega^2(e_2, e_2) \\
&= (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \omega^2(e_1, e_2) \\
&= \omega^2(e_1, e_2)(x_1 \wedge x_2)(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Por tanto la 2-forma  $\omega^2$  es un múltiplo escalar de  $x_1 \wedge x_2$ , lo que prueba que  $\{x_1 \wedge x_2\}$  es una base del espacio vectorial de 2-formas en  $\mathbb{C}^2$ . □

**Definición A.44.** Sea  $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  una función lineal,  $\omega_1$  una 1-forma y  $\omega_2$  una 2-forma definidas en  $\mathbb{C}^2$ , definimos la *forma inducida por  $L$* ,  $L^* \omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , como

$$\begin{aligned}
L^* \omega_1(\eta) &= \omega_1(L(\eta)), \\
L^* \omega_2(\mu, \eta) &= \omega_2(L(\mu), L(\eta)).
\end{aligned}$$

Notemos que  $L^* \omega_1$  es una 1-forma y  $L^* \omega_2$  es una 2-forma pues al ser  $L$  lineal  $L^* \omega_1$  preserva la linealidad y  $L^* \omega_2$  la bilinealidad.

**Proposición A.45.** Sean  $f, g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  funciones lineales y  $\omega_1, \omega_2$  dos 1-formas definidas en  $\mathbb{C}^2$ . Entonces se satisfacen las siguientes igualdades:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \quad (\text{A.3.3})$$

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^* \omega_1) \wedge (f^* \omega_2). \quad (\text{A.3.4})$$

**Demostración.** Para (A.3.3) tomemos una 1-forma y una 2-forma  $\omega^2$  definidas en  $\mathbb{C}^2$ . Tenemos para  $\eta, \mu \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned}
f^* \circ g^* \omega(\eta) &= g^* \omega(f(\eta)) = \omega(g(f(\eta))) = (g \circ f)^* \omega(\eta), \\
f^* \circ g^* \omega^2(\eta, \mu) &= g^* \omega^2(f(\eta), f(\mu)) = \omega^2(g(f(\eta)), g(f(\mu))) = (g \circ f)^* \omega^2(\eta, \mu).
\end{aligned}$$

Para (A.3.4) tenemos

$$\begin{aligned}
f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(\eta, \mu) &= (\omega_1 \wedge \omega_2)(f(\eta), f(\mu)) \\
&= \det \begin{bmatrix} \omega_1(f(\eta)) & \omega_2(f(\eta)) \\ \omega_1(f(\mu)) & \omega_2(f(\mu)) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} f^*\omega_1(\eta) & f^*\omega_2(\eta) \\ f^*\omega_1(\mu) & f^*\omega_2(\mu) \end{bmatrix} \\
&= (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)(\eta, \mu).
\end{aligned}$$

□

## A.4. Variedades complejas y formas holomorfas

**Definición A.46.** Consideremos una topología  $(X, \tau)$  Hausdorff segundo numerable, decimos que  $(X, \tau)$  es una *variedad compleja (analítica)* de dimensión  $n$  si existe una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  de  $X$  y homeomorfismos  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  a abiertos de  $\mathbb{C}^n$  que sean consistentes, esto es que para cada pareja de funciones  $\phi_\alpha$  y  $\phi_\beta$  se satisfaga que

$$\phi_\beta \circ (\phi_\alpha)^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{A.4.1}$$

sea holomorfa.

**Definición A.47.** Una *carta* de  $X$   $(U, \phi)$  consiste de un abierto  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  junto con un homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$  con  $V$  abierto de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definición A.48.** Un *atlas (analítico)* de  $X$  es una familia de cartas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  tal que  $\{\phi_\alpha(U_\alpha)\}$  sea una cubierta de  $X$  y cualesquiera 2 cartas sean consistentes.

**Definición A.49.** Una *estructura de variedad analítica* es una clase de equivalencia de atlas. Dos atlas se dicen equivalentes si su unión es de nuevo un atlas.

**Observación A.50.** Para ver que  $(X, \tau)$  es una variedad analítica basta con proponer un atlas  $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$   $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  a lo más numerable que satisfaga que para cada dos puntos  $x, y \in X$  o bien  $x, y$  corresponden a cartas ajenas o exista una carta en la cual  $x$  y  $y$  tengan imagen.

**Demostración.** Como ser segundo numerable se preserva bajo homeomorfismos y  $\mathbb{C}^n$  es segundo numerable (tomamos como base los polidiscos centrados en  $n$ -adas de complejos  $x + iy$  con  $x, y$  racionales de poliradio racional), tenemos que  $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$  tiene una base numerable  $\{U_{\alpha,\beta}\}_\beta$ , y por tanto variando sobre cada abierto  $V_\alpha$  del atlas  $\{U_{\alpha,\beta}\}_{\beta,\alpha}$  es una base numerable de  $X$ .

Para ver que es Hausdorff, tomemos dos puntos  $x, y$  distintos en  $X$ . Si  $x$  está en  $V_\alpha$  y  $y$  está en  $V_\beta$  con  $V_\alpha$  y  $V_\beta$  ajenos, ya encontramos dos abiertos que

los separen. Si  $x$  y  $y$  están en  $V_\alpha$  tenemos que  $\phi_\alpha(x), \phi_\alpha(y) \in U_\alpha$ , aquí podemos encontrar dos abiertos  $U_1, U_2 \subset U_\alpha$  ajenos tales que  $\phi_\alpha(x) \in U_1, \phi_\alpha(y) \in U_2$  pues  $U_\alpha$  es Hausdorff. Así  $x \in \phi_\alpha^{-1}(U_1), y \in \phi_\alpha^{-1}(U_2)$  son 2 abiertos ajenos de  $X$  que contienen a  $x$  y  $y$  respectivamente, por tanto  $X$  es Hausdorff.  $\square$

**Ejemplo A.51.**  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  con la topología inducida como subconjunto de  $\mathbb{C}^3$  es una 2 variedad analítica.

**Demostración.** Para ver que  $S$  es una 2 variedad analítica basta con proponer un atlas pues es Hausdorff y segundo numerable al tener la topología inducida como subconjunto de  $\mathbb{C}^3$ .

Para ello definamos una carta para cada punto de  $S$  y luego veamos que cualesquiera dos cartas son consistentes.

Tomemos  $p = (a, b, c) \in S$  bajo una traslación  $\phi(x, y, z) = (x - a, y - b, z - c)$   $S$  tiene la forma

$$\begin{aligned} S &= \{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1\} \\ &= \{x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 = 1\} \quad (\text{A.4.2}) \\ &= \{x^2 - 2ax + y^2 - 2by + z^2 - 2cz = 0\}. \end{aligned}$$

Si  $a \neq 0$  tenemos que  $f_p(x, y, z) = x^2 - 2ax + y^2 - 2by + z^2 - 2cz$  es regular de orden 1 en  $x$ . Por el teorema de la función implícita tenemos que existe una única función holomorfa  $\phi_p : U_p \rightarrow W_p$ ,  $U_p$  una vecindad de  $(0, 0)$  y  $W_p$  una vecindad de 0, tal que  $\phi_p(0, 0) = 0$  y  $f_p(x, y, z) = 0$  con  $(x, y, z) \in V_p \times W_p$  si y sólo si  $\phi_p(y, z) = x$ .

$\varphi_p : U_p \rightarrow S$   $\varphi_p(y, z) = (\phi_p(y, z), y, z)$  es un homeomorfismo pues es continua y la inversa  $\varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p) \rightarrow U_p$  esta dada por  $\varphi_p^{-1}(x, y, z) = (y, z)$  es continua.

De forma análoga, cuando  $a = 0$  y  $b \neq 0$  tenemos que  $f_p$  es regular en  $y$  definimos  $\varphi_p : U_p \rightarrow S$ ,  $\varphi_p(x, z) = (x, \phi_p(x, z), z)$   $\varphi_p^{-1}(x, y, z) = (x, z)$ .

Finalmente, cuando  $a = 0, b = 0$  y  $c \neq 0$  tenemos que  $f_p$  es regular en  $z$  definimos  $\varphi_p : U_p \rightarrow S$ ,  $\varphi_p(x, y) = (x, y, \phi_p(x, y))$   $\varphi_p^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ .

Veamos que la familia  $\{(U_p, \varphi_p^{-1})\}$  es un atlas, por construcción  $p \in \varphi_p(U_p)$  y por tanto  $\{\varphi_p(U_p)\}$  es una cubierta de  $S$ . Para ver que son consistentes, supongamos que  $\varphi_p(U_p) \cap \varphi_q(U_q) \neq \emptyset$ , tenemos nueve casos dependiendo de cual sea la primera entrada de izquierda a derecha distinta de 0. Escribamos  $p = (a_1, a_2, a_3)$  y  $q = (b_1, b_2, b_3)$ . Queremos ver que

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p : \varphi_p^{-1}(W_p \cap W_q) \rightarrow \varphi_q^{-1}(W_p \cap W_q)$$

es holomorfa.

**Caso 1** Cuando  $a_1 \neq 0$  y  $b_1 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(y, z) = \varphi_q^{-1}(\phi_p(y, z), y, z) = (y, z).$$

**Caso 2** Cuando  $a_1 \neq 0$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_2 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(y, z) = \varphi_q^{-1}(\phi_p(y, z), y, z) = (\phi_p(x, z), z).$$

**Caso 3** Cuando  $a_1 \neq 0$ ,  $b_1, b_2 = 0$  y  $b_3 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(y, z) = \varphi_q^{-1}(\phi_p(y, z), y, z) = (\phi_p(x, z), y).$$

**Caso 4** Cuando  $a_1 = 0$ ,  $a_2 \neq 0$  y  $b_1 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x, z) = \varphi_q^{-1}(x, \phi_p(x, z), z) = (\phi_p(x, z), z).$$

**Caso 5** Cuando  $a_1 = 0$ ,  $a_2 \neq 0$  y  $b_1 = 0$ ,  $b_2 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x, z) = \varphi_q^{-1}(x, \phi_p(x, z), z) = (x, z).$$

**Caso 6** Cuando  $a_1 = 0$ ,  $a_2 \neq 0$ ,  $b_1 = b_2 = 0$  y  $b_3 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x, z) = \varphi_q^{-1}(x, \phi_p(x, z), z) = (x, \phi_p(x, z)).$$

**Caso 7** Cuando  $a_1, a_2 = 0$ ,  $a_3 \neq 0$  y  $b_1 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x, y) = \varphi_q^{-1}(x, y, \phi_p(x, y)) = (y, \phi_p(x, y)).$$

**Caso 8** Cuando  $a_1, a_2 = 0$ ,  $a_3 \neq 0$ ,  $b_1 = 0$  y  $b_2 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x, y) = \varphi_q^{-1}(x, y, \phi_p(x, y)) = (x, \phi_p(x, y)).$$

**Caso 9** Cuando  $a_1, a_2 = 0$ ,  $a_3 \neq 0$ ,  $b_1 = b_2 = 0$  y  $b_3 \neq 0$  tenemos

$$\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p(x, y) = \varphi_q^{-1}(x, y, \phi_p(x, y)) = (x, y).$$

En cada caso la función de transición resulto ser holomorfa y por tanto  $\{U_p, \varphi_p^{-1}\}$  es un atlas, junto con el hecho de que  $S$  es Hausdorff y segundo numerable se sigue que  $S$  es una 2 variedad analítica.  $\square$

**Observación A.52.** Consideremos una función holomorfa  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  con  $V$  abierto en  $\mathbb{C}^n$  podemos preguntarnos cuando  $\{f = 0\}$  es una  $n - 1$  variedad analítica, tenemos que  $\{f = 0\}$  con la topología inducida por  $\mathbb{C}^n$  es Hausdorff y segundo numerable. Por tanto, para ver si  $\{f = 0\}$  es una  $n - 1$  variedad analítica basta con encontrar un atlas para  $\{f = 0\}$ , este atlas se puede construir de manera análoga al ejemplo anterior si en cada punto  $a \in \{f = 0\}$  tenemos que  $\{f = 0\}$  es de orden 1 en  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, a)$ .

**Ejemplo A.53.**  $\{x^2 + y^2 = 0\}$  no es una 1-variedad analítica.

**Demostración.** Veamos que no hay ninguna vecindad del origen con la topología inducida por  $\mathbb{C}^2$  homeomorfa a una vecindad de  $\mathbb{C}$ . Dado que tenemos la igualdad  $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$  tenemos la igualdad en conjuntos

$$\{x^2 + y^2 = 0\} = \{x + iy = 0\} \cup \{x - iy = 0\}.$$

Por tanto,

$$\{x^2 + y^2 = 0\} \setminus \{0\} = \{x + iy = 0\} \setminus \{0\} \cup \{x - iy = 0\} \setminus \{0\}.$$

Si tal homeomorfismo existiera tendríamos que la imagen inversa de una vecindad conexa de la imagen de 0 sin el 0 seguiría siendo conexa, sin embargo ninguna vecindad de 0 en  $\{x^2 + y^2 = 0\}$  sin el 0 es conexa pues  $\{x^2 + y^2 = 0\} \setminus \{0\}$  no es conexo pues  $\{x + iy = 0\} \setminus \{0\}$  y  $\{x - iy = 0\} \setminus \{0\}$  son abiertos ajenos con la topología inducida por  $\mathbb{C}^2$ .  $\square$

**Ejemplo A.54 (El espacio proyectivo).** Consideremos el espacio  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  digamos que dos puntos  $a, b \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  son equivalentes,  $a \sim b$ , si existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $a = \alpha b$ . En otras palabras, dos puntos son equivalentes si están en la misma recta compleja que pasa por el origen.

Definimos el  $n$ -espacio proyectivo,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , como el espacio topológico inducido por la relación de equivalencia  $\sim$  con la topología de  $\mathbb{C}^{n+1} / \{0\}$ .

Tenemos que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad analítica de dimensión  $n$ .

**Demostración.** Denotemos a la clase de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con la relación de equivalencia  $\sim$  como  $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ , consideremos  $W_i \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$   $i = 1, \dots, n$  dado por

$$W_i = \{x_1 : x_2 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n \mid x_i \neq 0\}. \quad (\text{A.4.3})$$

$\{W_i\}$  forma una cubierta de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \cup_{i=1}^n W_i$ , veamos que cada  $W_i$  es abierto en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Consideremos la función que define la topología de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  (una identificación),  $f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ , que envía cada punto a la clase de equivalencia a la que pertenece.

Por definición,  $V$  es abierto de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  si y sólo si  $f^{-1}(V)$  es abierto de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Tenemos  $f^{-1}(W_i) = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{x_i = 0\}$  es un abierto de  $\mathbb{C}^{n+1}$  y por tanto un abierto de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  lo que prueba que  $W_i$  es un abierto de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Consideremos la funciones  $\varphi_i : W_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  dadas por

$$\varphi_i(x_1 : x_2 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Están bien definidas, para puntos que estén sobre la misma recta

$$tx = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_i(tx_1 : \cdots : tx_n) &= \left( \frac{tx_1}{tx_i}, \dots, \frac{tx_{i-1}}{tx_i}, \frac{tx_{i+1}}{tx_i}, \dots, \frac{tx_n}{tx_i} \right) \\ &= \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ &= \varphi_i(x_1 : \cdots : x_n).\end{aligned}\tag{A.4.4}$$

$\varphi_i$  es biyectiva con inversa dada por  $\varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow W_i$

$$\varphi_i^{-1}(a_1, \dots, a_n) = a_1 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_i : a_{i+1} : \cdots : a_n.$$

Consideremos la función  $\phi_i : f^{-1}(W_i) \rightarrow \mathbb{C}^n$  dada por

$$\phi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, x_{n+1} \right),$$

$\phi_i$  es continua y abierta pues  $\frac{x_j}{x_i}$  es continua para cada  $j = 1, \dots, n+1$ . Dado que  $\varphi_i$  es constante sobre las fibras  $f^{-1}(x)$   $x \in W_i$  y  $\varphi_i \circ f^{-1}$ , en virtud del lema de la transgresión, se sigue que  $\varphi_i = \phi_i \circ f^{-1} : W_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  es continua y abierta. Lo que prueba que  $\varphi_i$  es un homeomorfismo al ser invertible, continua y abierta.

Ahora veamos que  $\{(\mathbb{C}^n, \varphi_i)\}_{i=1}^n$  es un atlas. Ya probamos que  $\varphi_i$  son homeomorfismos y  $\{W_i\}$  es una cubierta abierta de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , falta ver que para  $i \neq j$   $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(W_i \cap W_j) \rightarrow \varphi_i(W_i \cap W_j)$  es una transformación holomorfa.

$$\begin{aligned}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_i(x_1 : \cdots : x_{j-1} : 1 : x_j : \cdots : x_n) \\ &= \left( \frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_k}, \frac{1}{x_k}, \frac{x_{j+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right)\end{aligned}$$

con  $k = i$  si  $i < j$  y  $k = i-1$  si  $i > j$ , como cada  $\frac{x_r}{x_k}$  es holomorfa cuando  $x_k \neq 0$  se sigue que  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  es holomorfa con lo que concluimos que  $\{(\mathbb{C}^n, \varphi_i)\}_{i=1}^n$  es un atlas.

Como el atlas es finito tenemos que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es segundo numerable, falta ver que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es Hausdorff. Cuando  $a, b$  están en la misma preimagen de una carta que es homeomorfa a  $\mathbb{C}^n$  terminamos pues  $\mathbb{C}^n$  es Hausdorff y es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos. Cuando están en preimagenes de diferentes cartas digamos  $a \in W_i \setminus W_j$ ,  $b \in W_i \setminus W_i$  con  $a = a_1 : \cdots : a_{n+1}$ ,  $a_i = 1$ ,  $a_j = 0$ ,  $b = b_1 : \cdots : b_{n+1}$ ,  $b_j = 1$ ,  $b_i = 0$ ,  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$   $k = 1, \dots, n+1$ , consideremos  $V \in W_i$ ,  $W \in W_j$  con

$$\begin{aligned}V &= \{x_1 : \cdots : x_{n+1} \mid x_i = 1, |x_k - a_k| < \frac{1}{2}, k = 1, \dots, n+1\} \\ W &= \{y_1 : \cdots : y_{n+1} \mid y_j = 1, |y_k - b_k| < \frac{1}{2}, k = 1, \dots, n+1\}\end{aligned}\tag{A.4.5}$$

Tenemos que  $V$  y  $W$  son abiertos de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  pues  $\varphi_i(V)$  y  $\varphi_j(W)$  son abiertos de  $\mathbb{C}^n$  y tenemos  $a \in V$ ,  $b \in W$  falta ver que  $V \cap W = \emptyset$ . Supongamos que

$x \in V \cap W$ , como  $x \in V$  podemos escribir a  $x$  como  $x = x_1 : \cdots : x_{n+1}$   $x_i = 1$  y como  $x \in W$  escribimos  $x = y_1 : \cdots : y_{n+1}$   $y_j = 1$  Tenemos que la igualdad

$$x_1 : \cdots : x_{n+1} = y_1 : \cdots : y_{n+1}$$

implica que  $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$  pero  $\frac{|x_i|}{|y_i|} > 2$  y  $\frac{|x_j|}{|y_j|} < \frac{1}{2}$  y por tanto  $V \cap W = \emptyset$ . Lo que termina la prueba de que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es Hausdorff, junto con lo anterior  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad compleja de dimensión  $n$ .  $\square$

**Proposición A.55.** Si  $M$  es una variedad compleja de dimensión  $m$  y  $N$  es una variedad compleja de dimensión  $n$  tenemos que  $M \times N$  con la topología producto es una variedad compleja de dimensión  $m + n$

**Demostración.**  $M \times N$  es Hausdorff y segundo numerable pues son propiedades que se preservan bajo la topología producto, falta ver que  $M \times N$  admite un atlas holomorfo. Consideremos  $\{(W_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  atlas de  $M$  y  $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}$  atlas de  $N$ . Un atlas de  $M \times N$  está dado naturalmente por  $\{(W_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \phi_\beta))\}$ .  $\square$

Funciones holomorfas entre variedades complejas

**Definición A.56.** Una transformación  $f : M \rightarrow N$  entre dos variedades complejas se dice *holomorfa* si en coordenadas locales de  $M$  y  $N$  es holomorfa. En otras palabras, pedimos que si  $\varphi : V \rightarrow U_1$  es una carta de  $M$  con  $x \in V$  y  $\phi : W \rightarrow U_2$  es una carta de  $N$  con  $f(x) \in W$ ,  $\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \rightarrow U_2$  sea holomorfa.

**Definición A.57.** Un *biholomorfismo* entre dos variedades complejas  $M$  y  $N$  es una transformación  $f : M \rightarrow N$  biyectiva holomorfa y con inversa holomorfa. Si tal biholomorfismo existe decimos que  $M$  y  $N$  son *biholomorfas*.

**Definición A.58.** Una *curva (compleja)* en la variedad compleja  $M$  que pasa por el punto  $x \in M$  en el instante  $t_0 \in \mathbb{C}$  es una transformación holomorfa  $\phi : V \rightarrow M$  tal que  $V$  es un abierto conexo de  $\mathbb{C}$  con  $t_0 \in I$  tal que  $\phi(t_0) = x$ .

Al conjunto de curvas complejas que pasan por un punto  $x \in M$  podemos asociarles una relación de equivalencia de forma que las clases de equivalencia tengan estructura de espacio vectorial complejo, esto nos servirá para definir la derivada de funciones holomorfas entre variedades.

**Definición A.59.** Consideremos un punto  $x \in M$  con  $M$  una variedad analítica de dimensión  $n$ , 2 curvas  $\alpha, \beta : V \rightarrow M$  que pasan por  $x$  en el instante 0 se dicen *equivalentes* si cuando tomamos una carta  $\varphi : W \rightarrow U$  con  $x \in W$ , tenemos que  $\tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha : V \rightarrow U$  y  $\tilde{\beta} = \varphi \circ \beta : V \rightarrow U$  satisfacen

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{\beta}(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \quad (\text{A.4.6})$$

Un *vector tangente*  $\zeta$  a  $M$  en el punto  $x$  es una clase de equivalencia de curvas que pasan por  $x$ .

**Observación A.60.** La definición de equivalencia de curvas es independiente de la elección de la carta del atlas; equivalencia en una carta  $\phi_i$  implica equivalencia en cualquier carta  $\phi_j$  pues  $\phi_{ij}$  es un biholomorfismo.

**Observación A.61.** El conjunto de vectores tangentes a una variedad compleja  $M$  de dimensión  $n$  en un punto  $x \in M$  tiene estructura de espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{C}$  con la suma y producto por escalares definidos de la siguiente forma.

Para  $\zeta$  y  $\mu$  vectores tangentes  $M$  en el punto  $x$ , dados por las curvas  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha(0) = \beta(0) = x$  respectivamente. Tomemos una carta  $\varphi : M_1 \rightarrow U$  tal que  $\varphi(x) = 0$ . Tenemos que las curvas  $\tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha$  y  $\tilde{\beta} = \varphi \circ \beta$  al ser holomorfas con  $\tilde{\beta}(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$  pueden ser escritas de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t) &= t(a_1, a_2, \dots, a_n) + t^2(\dots), \\ \tilde{\beta}(t) &= t(b_1, b_2, \dots, b_n) + t^2(\dots)\end{aligned}$$

en una vecindad de  $U$ , podemos suponer que es  $U$  si de antemano restringimos la carta a esta vecindad.

Definimos  $\zeta + \mu$  como la clase de equivalencia de  $\varphi^{-1}(t(c_1, \dots, c_n))$  con  $c_i = a_i + b_i$   $i = 1, \dots, n$ .

Para  $\lambda \in \mathbb{C}$  definimos  $\lambda \cdot \zeta$  como la clase de equivalencia de  $\varphi^{-1}(t(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n))$

Una base para este espacio vectorial está dada por

$$\{[\varphi^{-1}(t(1, 0, \dots, 0))], [\varphi^{-1}(t(0, 1, \dots, 0))], \dots, \varphi^{-1}(t(0, 0, \dots, 1))]\}.$$

**Definición A.62.** Definimos el *espacio tangente* de  $M$  en  $x \in M$  denotado por  $T_x M$  al conjunto de vectores tangentes a  $M$  en  $x \in M$  visto como espacio vectorial de  $\mathbb{C}$ .

**Proposición A.63.** *La unión de espacios tangentes de la variedad compleja  $M$  de dimensión  $n$  en todos sus puntos  $TM = \cup_{x \in M} T_x M$  tiene estructura de variedad compleja de dimensión  $2n$ .*

**Demostración.** Consideremos una carta  $(U, \varphi)$  en la variedad  $M$ . Para un punto  $x \in \varphi^{-1}(U)$  escribimos  $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ . Cada vector tangente  $\zeta$  a  $M$  en el punto  $x$  es determinado por sus componentes  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  en el sistema de coordenadas dado. Esto es, si  $\gamma : V \rightarrow M$  es una curva en la dirección de  $\zeta$  con  $\gamma(0) = x$  (la clase de equivalencia de  $\gamma$  en  $x$  es  $\zeta$ ), entonces  $\zeta_i = \frac{\partial x_i(\gamma(t))}{\partial t} \Big|_{t=0}$ .

Por tanto, cada vector tangente  $\zeta$  en  $M$  en el dominio  $\varphi^{-1}(U)$  es determinado por un conjunto de  $2n$  números complejos  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ , las  $n$ -coordenadas del punto y las componentes del vector  $\zeta_i$ . De esta forma obtenemos una carta de una parte del conjunto  $TM$ .

$$\psi : TW \rightarrow \mathbb{C}^{2n}, \quad \psi(\zeta) = (x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n).$$

Las diferentes cartas para  $TM$  correspondientes a las diferentes cartas del atlas de  $M$  son consistentes.

Sea  $(y_1, \dots, y_n)$  otro sistema local de coordenadas en  $M$  y sea  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  las componentes del vector en este sistema. Entonces

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n), \quad \mu_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \zeta_j, \quad i = 1, \dots, n$$

son funciones analíticas de  $x_i$  y  $\zeta_j$ .

Finalmente  $M$  es segundo numerable, podríamos haber empezado con un atlas de  $M$  numerable y luego generar un atlas numerable de  $TM$  por tanto  $TM$  es segundo numerable, para ver que  $TM$  es Hausdorff se sigue de que si dos vectores tangentes a  $M$  son tangentes en puntos de  $M$  podemos separarlos usando que  $M$  era Hausdorff. Para vectores que empiezan en el mismo punto, usamos que  $TM_x$  es homeomorfo a  $\mathbb{C}^n$  para separarlos.

Por tanto el conjunto  $TM$  de todos los vectores tangentes a  $M$  es una variedad analítica de dimensión  $2n$ .  $\square$

**Definición A.64.** La variedad compleja  $TM$  es llamada el *espacio tangente de la variedad  $M$* .

**Proposición A.65.** Las siguientes transformaciones son holomorfas:

- a)  $p : TM \rightarrow M$ ,  $p(\zeta_x) = x$  con  $\zeta_x$  vector tangente en el punto  $x \in M$ .
- b)  $i_v : W \rightarrow TW$ ,  $i_v(x) = \phi^{-1}(\varphi(x), v)$  con  $v$  un vector en  $\mathbb{C}^n$ ,  $\varphi : W \rightarrow U$  una carta de  $M$  y  $\phi$  su carta inducida en  $TW$ .

**Demostración.** Para probar el inciso *a*, tomemos  $x \in M$  y una carta que lo represente

$$\varphi : W \rightarrow U, \quad x \in W.$$

$\varphi$  induce una carta  $\phi$  en el espacio tangente, un vector tangente  $\zeta$  a  $M$  en  $x$  está en  $TW$ . Tenemos

$$\varphi \circ p \circ \phi^{-1} : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U, \quad y \in U$$

con

$$\begin{aligned} \varphi \circ p \circ \phi^{-1}(y, a) &= \varphi \circ p(\mu_{\varphi^{-1}(y)}) \\ &= \varphi \circ \varphi^{-1}(y) \\ &= y \end{aligned}$$

es la proyección de las primeras  $n$  coordenadas y por tanto es una función holomorfa.

Para probar el inciso *b*, tenemos que

$$\phi \circ i_v \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n, \quad y \in U$$

con

$$\begin{aligned} \phi \circ i_v \circ \varphi^{-1}(y) &= \phi \circ i_v(\varphi^{-1}(y)) \\ &= \phi(\phi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(y), v))) \\ &= \phi(\phi^{-1}(y, v)) = (y, v) \end{aligned}$$

Por tanto  $\phi \circ i_v \circ \varphi^{-1}$  es holomorfa y por tanto  $i_v$  es holomorfa.  $\square$

**Observación A.66.** Un vector tangente  $\zeta$  a  $M$  en un punto  $x$  con componentes  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  puede ser escrito como

$$\zeta_1 i_{e_1}(x) + \dots + \zeta_n i_{e_n}(x)$$

**Demostración.** En efecto, para  $\phi(\zeta) = (x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  tenemos

$$\phi(\zeta_1 i_{e_1}(x) + \dots + \zeta_n i_{e_n}(x)) = (x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

por como definimos el producto y suma por escalares.  $\square$

**Definición A.67.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una transformación analítica entre dos variedades complejas. Para un punto  $x \in M$  podemos definir una transformación lineal  $f_{*x} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  de la siguiente forma: para un vector  $\zeta \in T_x M$  consideramos una curva  $\gamma : U \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = x$  de forma que la clase de equivalencia de  $\gamma$  sea  $\zeta$ ,  $f \circ \gamma : U \rightarrow N$  es una curva con  $f \circ \gamma(0) = f(x)$ . Por tanto, podemos pensar en el vector asociado a  $f \circ \gamma$  en el punto  $f(x)$  digamos  $\mu$ . De esta forma definimos  $f_{*x}(\zeta) = \mu$ .

$f_{*x}$  es llamada la diferencial de  $f$  en el punto  $x \in M$ . Variando  $x$  sobre  $M$  define una transformación  $f_*$ ,

$$f_* : T_M \rightarrow T_N \quad f_*|_{T_x M} = f_{*x}. \quad (\text{A.4.7})$$

$f_*$  es llamada la *derivada* de  $f$  en la variedad  $M$ .

$f_{*x}$  también es denotada por  $df_x$  y  $f_*$  por  $df$ .

**Observación A.68.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una variedad compleja  $M$ . La diferencial de una función  $f$  en un punto  $x \in M$  es una 1-forma en el espacio tangente  $T_x M$ .

**Definición A.69.** Una *1-forma* holomorfa definida en  $M$  es una función holomorfa  $\omega : TM \rightarrow \mathbb{C}$  tal que es lineal en cada espacio tangente de  $M$ ,  $T_x M$ .

**Ejemplo A.70.** Para  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una variedad compleja  $M$ ,  $df$  es una 1-forma analítica.

**Observación A.71.** En particular consideremos  $(U, \varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$  una carta de  $M$   $dx_i : TU \rightarrow \mathbb{C}$  es una 1-forma holomorfa. Para un vector tangente a  $M$   $\zeta$  en un punto  $x \in \varphi^{-1}(U)$  con componentes  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  tenemos  $dx_i(\zeta) = \zeta_i$ .

**Demostración.** Consideremos una curva  $\alpha(t) : V \rightarrow U$ ,  $V$  abierto conexo de  $\mathbb{C}$  que contiene a 0, definida por  $\alpha(t) = \varphi(x) + (\zeta_1, \dots, \zeta_n)t$ . El vector asociado a la curva  $\varphi^{-1} \circ \alpha$  en  $x$  es  $\zeta$ , de esta forma tenemos

$$\begin{aligned} dx_i(\zeta) &= \frac{\partial x_i(\varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\zeta_1, \dots, \zeta_n)))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x_i(\varphi^{-1}(x_1(x) + t\zeta_1, \dots, x_n(x) + t\zeta_n))}{\partial t} \\ &= \frac{\partial x_i(x) + t\zeta_i}{\partial t} \\ &= \zeta_i. \end{aligned}$$

□

**Proposición A.72.** Consideremos  $\omega : TM \rightarrow \mathbb{C}$  una 1-forma holomorfa y  $(U, \phi = (x_1, x_2, \dots, x_n))$  una carta de  $M$ . Tenemos que restringiendo  $\omega$  a  $TU$ ,  $\omega$  tiene la forma

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n \quad (\text{A.4.8})$$

con  $a_i$  funciones holomorfas de  $TU$  a  $\mathbb{C}$  que dependen sólo del punto donde esté basado el vector tangente.

**Demostración.** Tomemos  $\zeta$  un vector tangente a  $M$  en  $x$ , de las observaciones A.66 y A.71 podemos escribir a  $\zeta$  como

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 i_{e_1}(x) + \dots + \zeta_n i_{e_n}(x) \\ &= dx_1(\zeta) i_{e_1}(x) + \dots + dx_n(\zeta) i_{e_n}(x). \end{aligned}$$

Considerando la proyección  $p : TM \rightarrow M$   $p(\zeta) = x$  podemos escribir a  $\zeta$  de la forma

$$\zeta = dx_1(\zeta) i_{e_1}(p(\zeta)) + \dots + dx_n(\zeta) i_{e_n}(p(\zeta))$$

Evaluando  $\omega(\zeta)$  tenemos por linealidad

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \omega(dx_1(\zeta) i_{e_1}(p(\zeta)) + \dots + dx_n(\zeta) i_{e_n}(p(\zeta))) \\ &= dx_1(\zeta) \omega(i_{e_1}(p(\zeta))) + \dots + dx_n(\zeta) \omega(i_{e_n}(p(\zeta))). \end{aligned}$$

Finalmente, definiendo  $a_j = \omega \circ i_{e_j} \circ p$ ,  $a_j$  sólo depende del punto donde este basado el vector y para  $j = 1, \dots, n$  tenemos que es  $a_j$  es holomorfa al ser composición de funciones holomorfas. Escribimos a  $\omega$  como

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n.$$

□

**Definición A.73.** Consideremos una transformación holomorfa  $g : N \rightarrow M$  entre dos variedades holomorfas  $N$  y  $M$  y  $\omega : TM \rightarrow \mathbb{C}$  una 1-forma, definimos la 1-forma inducida por  $h$ ,  $g^*\omega : TN \rightarrow \mathbb{C}$  como  $g^*\omega = \omega \circ dg$ .

**Proposición A.74.** Para una transformación holomorfa  $g : N \rightarrow M$  entre dos variedades holomorfas  $N$  y  $M$  y  $\omega : TM \rightarrow \mathbb{C}$  una 1-forma en  $M$ , tenemos que la forma inducida  $g^*\omega$  es una 1-forma en  $N$ .

**Demostración.** Tenemos  $g^*\omega = \omega \circ dg$  es una transformación holomorfa, dado que  $dg$  y  $\omega$  son holomorfas. Para  $x \in N$ , la restricción de  $\omega \circ dg$  en  $TN_x$  es la composición de la restricción de  $\omega$  en  $TM_{g(x)}$ ,  $\omega_{g(x)}$  con  $dg$  restringida a  $TN_x$ ,  $dg_x : TN_x \rightarrow TM_{g(x)}$ . Finalmente,  $\omega \circ dg_x : TN_x \rightarrow \mathbb{C}$  es lineal pues  $\omega_{g(x)}$  y  $dg_x$  son lineales. Lo que prueba que  $g^*\omega$  es una 1-forma en  $N$ .  $\square$

**Proposición A.75.** Para  $g : N \rightarrow M$  una transformación holomorfa entre dos variedades holomorfas  $N$  y  $M$ . Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son dos 1-formas en  $M$  entonces se cumple

$$g^*(\omega_1 + \omega_2) = g^*\omega_1 + g^*\omega_2.$$

**Demostración.** Tomamos  $\mu \in TN$ , tenemos

$$\begin{aligned} g^*(\omega_1 + \omega_2)(\mu) &= (\omega_1 + \omega_2)(dg(\mu)) \\ &= \omega_1(dg(\mu)) + \omega_2(dg(\mu)) \\ &= g^*\omega_1(\mu) + g^*\omega_2(\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.4.9})$$

Lo que prueba que  $g^*(\omega_1 + \omega_2) = g^*\omega_1 + g^*\omega_2$ .  $\square$

**Proposición A.76.** Sean  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : N \rightarrow M$  transformaciones holomorfas. Tenemos la igualdad

$$g^*(df) = d(g^*f) \quad (\text{A.4.10})$$

donde  $g^*f = f \circ g$ .

**Demostración.** Tomemos  $\mu \in TN$ ,  $\mu \in TN_x$  para algún  $x \in N$ , tenemos por la regla de la cadena que

$$d_x(f \circ g) = d_{g(x)}f \circ d_xg$$

por tanto

$$\begin{aligned} g^*(df)(\mu) &= df(dg(\mu)) \\ &= d_{g(x)}f(d_xg(\mu)) \\ &= d_x(f \circ g)(\mu) \\ &= d(f \circ g)(\mu) \\ &= d(g^*f)(\mu). \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $g^*f = f \circ g$ .  $\square$

**Observación A.77.** Si escribimos a una forma  $\omega$  una 2-forma de una variedad holomorfa  $M$  localmente en coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  locales alrededor de un punto  $y$  de la forma  $\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \dots + a_n(x)dx_n$ , podemos escribir a  $g^*\omega$  en coordenadas locales de  $g(y)$ ,

$$g^*\omega = a_1(g(x))dg^*x_1 + a_2(g(x))dg^*x_2 + \dots + a_n(g(x))dg^*x_n,$$

en virtud de las proposiciones A.75 y A.76.

**Definición A.78.** Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$ . Para un punto  $x \in M$ , definimos  $TM_x^2 = TM_x \times TM_x$ , y  $TM^2 = \bigcup_{x \in M} TM_x^2$ .

$TM_x^2$  es una variedad de dimensión  $3n$ . La prueba es análoga a cuando probamos que  $TM$  era una variedad de dimensión  $2n$  (ver A.63). Con ello podemos definir lo que es una 2-forma holomorfa.

**Definición A.79.** Una 2-forma holomorfa  $\omega^2$  en una variedad compleja  $M$  es una transformación holomorfa que envía parejas de vectores tangentes a  $M$  a  $\mathbb{C}$  de forma que  $\omega_x^2 : TM_x^2 \rightarrow \mathbb{C}$  es una 2-forma, esto es una transformación bilineal antisimétrica.

**Definición A.80.** Sea  $M$  y  $N$  variedades complejas, para  $f$  una función holomorfa de  $M$  a  $N$ , definimos la 2-forma inducida por  $f$   $f^*\omega^2 : TM^2 \rightarrow \mathbb{C}$  en  $N$  de la siguiente forma, para una pareja de vectores  $(\mu, \nu)$  en  $TM^2$  basados en un punto  $x \in M$ , tenemos que  $(df_x\mu, df_x\nu)$  es una pareja de vectores en  $TN^2$  basados en  $f(x)$ , de esta forma definimos

$$f^*\omega^2(\mu, \nu) = \omega^2(df_x\mu, df_x\nu).$$

**Proposición A.81.** En la definición anterior,  $f^*\omega^2$  es una 2-forma en  $M$ .

**Demostración.** Tenemos que  $f^*\omega^2$  es holomorfa pues  $\omega^2$  y  $df$  lo son, veamos que para un punto  $x \in M$ ,  $f^*\omega_x^2 : TM_x^2 \rightarrow \mathbb{C}$  es una 2-forma.

Es antisimétrica: Para una pareja de vectores  $(\mu, \nu)$  en  $TM^2$  basados en un punto  $x \in M$  tenemos

$$\begin{aligned} f^*\omega^2(\mu, \nu) &= \omega^2(df_x\mu, df_x\nu) \\ &= -\omega^2(df_x\nu, df_x\mu) \\ &= -f^*\omega^2(\nu, \mu). \end{aligned} \tag{A.4.11}$$

Es bilineal: Como es antisimétrica basta probar que es lineal en una entrada, para  $\nu, \mu, \gamma \in TM_x$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f^*\omega^2(\lambda\mu + \gamma, \nu) &= \omega^2(df_x\lambda\mu + \gamma, df_x\nu) \\ &= \omega^2(\lambda df_x\mu + df_x\gamma, df_x\nu) \\ &= \lambda\omega^2(df_x\mu, df_x\nu) + \omega^2(df_x\gamma, df_x\nu) \\ &= \lambda f^*\omega^2(\mu, \nu) + \omega^2(\gamma, \nu). \end{aligned} \tag{A.4.12}$$

Por tanto  $f^*\omega^2$  es una 2-forma holomorfa en  $M$ . □

**Ejemplo A.82.** Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión 2. Consideremos dos vectores  $\mu$  y  $\nu$  en  $TM$  basados en el mismo punto  $x \in M$  y una carta que contenga a  $x$ ,  $(U, \varphi = (x_1, x_2))$ , esta carta nos induce una carta en  $TM$   $(TU, \phi)$  con  $\phi = (x_1, x_2, dx_1, dx_2)$ . En la carta  $(TU, \phi)$ ,  $\mu = \varphi(a_1, a_2, \mu_1, \mu_2)$  y  $\nu = \varphi(a_1, a_2, \nu_1, \nu_2)$ . Definimos  $dx_1 \wedge dx_2 : \phi(TU) \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$dx_1 \wedge dx_2(\mu, \nu) = \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4.13})$$

Para dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  la expresión (A.4.13) nos da el área del paralelogramo formado por esos vectores, resulta que  $dx_1 \wedge dx_2$  es una 2-forma holomorfa en  $\phi(TU)$  y más aún  $\{dx_1 \wedge dx_2\}$  forma una base para las 2-formas holomorfas en  $\phi(TU)$  (ver proposición A.43).

**Definición A.83.** Consideremos dos 1-formas  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , definidas en una variedad compleja  $M$  de dimensión 2. Para un punto  $x \in M$  tenemos que en una vecindad de  $x$  podemos escribir  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de la forma

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 dx_1 + a_2 dx_2 \\ \omega_2 &= b_1 dx_1 + b_2 dx_2 \end{aligned}$$

con  $a_1, a_2, b_1, b_2$  funciones holomorfas que dependen solo del punto donde este basado el vector tangente (Ver proposición A.72). Definimos el *producto exterior* de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en una vecindad de  $x$  como la 2-forma

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2. \quad (\text{A.4.14})$$

**Proposición A.84.** De manera análoga al caso de formas en  $\mathbb{C}^2$ , tenemos que para  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  1-formas en  $M$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$  una transformación holomorfa tenemos

$$(\lambda \omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \lambda(\omega_1 \wedge \omega_3) + \omega_2 \wedge \omega_3. \quad (\text{A.4.15})$$

Para  $f : N \rightarrow M$  se cumple

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2. \quad (\text{A.4.16})$$



# Bibliografía

- [Arn89] V. I. Arnold *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, New York, 1989.
- [Arn92] V. I. Arnold *Ordinary differential equations*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [AGV] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko *Singularities of differentiable maps, Volume 1*. Birkhäuser, Boston, 2012.
- [CS] C. Camacho, P. Sad. *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Ann. of Math. (2) **115** (1982), no. 3, 579-595.
- [CLS] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad. *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 143-174.
- [Fis] G. Fischer. *Plane algebraic curves*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [GM-O] X. Gómez-Mont Ávalos, L. Ortiz Bobadilla. *Sistemas Dinámicos Holomorfos en Superficies*. Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, Serie Investigación, México, 1989.
- [GR] R. Gunning, H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2009.
- [IY] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko. *Lectures on Analytic Differential Equations*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Volume 86, Providence, Rhode Island, 2008.
- [Mil] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. University press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [R] E. Reyssat *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Birkhäuser Verlag, Boston, 1989.
- [S] I. R. Shafarevich *Basic algebraic geometry*. Springer, Berlin, 2013.