



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
ENERGÍA-SISTEMAS ENERGÉTICOS

**ESTUDIO NUMÉRICO DE FLUJOS  
MAGNETOHIDRODINÁMICOS DE METAL LÍQUIDO  
EN DUCTOS PARA EL MEJORAMIENTO  
DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRA EN INGENIERÍA**

P R E S E N T A:  
**ING. VERONICA SOLANO OLIVARES**

TUTOR PRINCIPAL:  
**DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA**  
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES-UNAM

Temixco, Morelos - Junio 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **AGRADECIMIENTOS:**

A Dios.

A mi familia por el apoyo incondicional que siempre me han mostrado.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en particular al Instituto de Energías Renovables por permitirme realizar mis estudios de maestría en sus instalaciones.

A CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), por brindarme el financiamiento económico para realizar mis estudios de maestría, y por el apoyo del proyecto de Ciencia Básica 240785.

En especial al Dr. Sergio Cuevas García por guiarme durante el posgrado, dedicar tiempo para compartir su conocimiento conmigo, el apoyo que me brindó y por sus consejos.

Al Dr. James Pérez Barrera por su apoyo, tiempo que dedicó para compartir su conocimiento conmigo, por sus consejos y valiosas aportaciones.

Al Dr. Mariano López de Haro, Dr. Guillermo Barrios del Valle, Dr. Fernando Zenaido Sierra Espinosa, y al Dr. Aldo Figueroa Lara, por sus observaciones y consejos para enriquecer mi trabajo.

A todos aquellos que han contribuido en mi formación académica y personal.



## DEDICATORIA:

*A todos aquellos que llenan de alegría mi vida.*



---

# Resumen

---

En este trabajo se presenta un estudio numérico de la dinámica y la transferencia de calor de flujos de metal líquido en un ducto de sección transversal rectangular a través de distribuciones de campo magnético no homogéneo. La utilización del forzamiento electromagnético de fluidos eléctricamente conductores en particular el metal líquido, puede ser capaz de propiciar agitación del fluido con lo cual se puede lograr un incremento en la transferencia de calor. El estudio del flujo se realiza bajo la aproximación de número de Reynolds magnético pequeño que desprecia el efecto del campo magnético inducido. Para resolver numéricamente las ecuaciones que describen a los fenómenos mencionados se utiliza el método de volumen finito. Los términos difusivos se discretizan usando diferencias centrales, mientras que el tiempo se discretiza utilizando el método de Euler. Es importante destacar que con la finalidad de abarcar la complejidad de los flujos magnetohidrodinámicos (MHD) estudiados y los efectos en la transferencia de calor, se implementan los modelos bidimensional, cuasi-bidimensional y tridimensional lo que permite una comprensión gradual de la física involucrada de los fenómenos mencionados, además de que esto abre la posibilidad de comparar resultados obtenidos con distintas aproximaciones. Se muestra cómo la existencia de un campo magnético intenso y localizado genera una fuerza de Lorentz que se opone al flujo y actúa como un obstáculo de manera no intrusiva, y con ello es posible la generación de vorticidad aguas abajo del obstáculo magnético que puede mejorar la transferencia de calor. Un campo magnético no uniforme da lugar a diferentes patrones de flujo, se presentan distintos patrones de flujo obtenidos como consecuencia de la variación de los números Hartmann ( $Ha$ ) y Reynolds ( $Re$ ), tales como un flujo tipo chorro, un flujo dipolar, o un desprendimiento periódico de vórtices. En relación a los modelos implementados se encuentra que la fuerte influencia de las paredes en el ducto debido a la fricción producida entre las paredes y el fluido propicia una diferencia considerable entre un modelo bidimensional y tridimensional. Por otra parte, en este estudio se muestra que es posible mejorar la transferencia



de calor al incrementar el número de Ha para un número de Re dado, o bien mediante la aplicación de diversos campos magnéticos localizados, esto apoya al uso de distribuciones de campos magnéticos no homogéneo para propiciar un mejoramiento en la transferencia de calor.

**Palabras clave:** Magnetohidrodinámica, MHD, metal líquido, transferencia de calor.

---

---

# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulación del problema y modelación matemática</b>	<b>7</b>
2.1	Formulación del problema . . . . .	7
2.2	Ecuaciones adimensionales . . . . .	8
2.3	Implementación del campo magnético . . . . .	11
2.3.1	Formulación B ( $Rm \ll 1$ ) . . . . .	12
2.3.2	Formulación $\phi$ ( $Rm \ll 1$ ) . . . . .	13
2.4	Modelo bidimensional . . . . .	15
2.4.1	Ecuaciones para la resolución con la aproximación 2D . . . . .	16
2.4.2	Condiciones de frontera . . . . .	16
2.4.3	Campo magnético aplicado 2D . . . . .	17
2.5	Modelo cuasi bidimensional . . . . .	19
2.5.1	Determinación de la función $f$ . . . . .	19
2.5.2	Ecuaciones para la resolución con la aproximación Q2D . . . . .	21
2.6	Modelo tridimensional . . . . .	22
2.6.1	Ecuaciones para la resolución 3D . . . . .	23
2.6.2	Condiciones de frontera . . . . .	24
2.6.3	Campo magnético aplicado 3D . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>27</b>
3.1	Dinámica del flujo . . . . .	27
3.1.1	Modelo 2D . . . . .	27
3.1.2	Modelo Q2D (Formulación B) . . . . .	44
3.1.3	Modelo 3D (Formulación $\phi$ ) . . . . .	47
3.1.4	Discusión de resultados . . . . .	54
3.2	Transferencia de calor . . . . .	59
3.2.1	Comparación de soluciones numérica y analítica . . . . .	60
3.2.2	Efectos en la transferencia de calor 2D . . . . .	62

3.2.3	Efectos en la transferencia de calor Q2D . . . . .	68
3.2.4	Efectos en la transferencia de calor 3D . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>

---

# Introducción

---

El uso de interacciones electromagnéticas para el control de fluidos eléctricamente conductores, particularmente los metales líquidos, ha dado lugar a una gran variedad de tecnologías con diversas aplicaciones en ciencias e ingeniería que han impactado de manera positiva a las industrias metalúrgica, química y nuclear, entre otras. En este sentido, las interacciones electromagnéticas proveen una manera versátil y no intrusiva de manipular y controlar a los fluidos eléctricamente conductores, permitiendo realizar de manera efectiva y eficiente tareas como el bombeo, agitación, mezclado, amortiguamiento, moldeo, calentamiento y monitoreo de los mismos, entre otras.

En cuanto al ámbito energético, desde finales del siglo pasado se ha explorado el uso de fuerzas electromagnéticas para mejorar la transferencia de calor, principalmente en el desarrollo de los reactores de fusión nuclear. Para ello se hace uso de flujos magnetohidrodinámicos (MHD), es decir, un flujo dominado por fuerzas magnéticas surgidas de la interacción del campo magnético con las corrientes eléctricas inducidas por el movimiento del metal líquido dentro del mismo. En este contexto, se han realizado extensos programas de investigación que buscan mejorar sustancialmente la transferencia de calor en estos sistemas [Modestov *et al.* (2017)]. Sin embargo, el mejoramiento de la transferencia de calor mediante flujos MHD no se limita a los sistemas de fusión nuclear. La versatilidad que proporciona el uso de campos magnéticos puede dar lugar al diseño de dispositivos novedosos que encuentren aplicación en diferentes ámbitos, incluso en sistemas termosolares.

Como antecedente se tiene que estudios realizados por diversos investigadores han mostrado que es posible mejorar la transferencia de calor cuando se presenta convección en un flujo MHD, ya sea a través de generación de turbulencia o creando campos de velocidad con vórtices [Hamid *et al.* (2016)]. La generación de vortices se logra por la interacción de un flujo eléctricamente conductor no magnetizable con campos magnéticos

localizados espacialmente, para lograr generar vorticidad un aspecto muy importante es la consideración de los efectos no inerciales y la no uniformidad electromagnética en los gradientes de campo magnético aplicado [Beltrán (2006), Cuevas *et al.* (2006)]. Más explícitamente, cuando se tiene un flujo MHD, el movimiento del metal líquido bajo un campo magnético localizado así como el inducido por un imán permanente, da lugar a corrientes eléctricas inducidas que al interactuar con el mismo campo producen una fuerza magnética o fuerza de Lorentz que se opone al flujo incidente, esencialmente en la región donde el campo es más intenso. Dicha fuerza actúa como un obstáculo para el flujo y bajo ciertas condiciones, puede dar lugar a la formación de vórtices estacionarios, al desprendimiento periódico de vórtices e incluso a turbulencia. La agitación así producida, similar a la que se crea mediante aletas en intercambiadores de calor convencionales [Fiebig (1997)], puede aprovecharse para incrementar sustancialmente la transferencia de calor. De esta manera, en el contexto de los intercambiadores de calor convencionales, es sabido que a medida que se tiene una mayor razón de bloqueo debido a la presencia de obstáculos sólidos, se tiene una mayor incremento de temperatura en las paredes del ducto, pero también se obtiene una mayor caída de presión [Hussam *et al.* (2013)], lo cual resulta análogo a la intensidad de campo magnético. Adicionalmente, en cuando a parámetros críticos del flujo MHD, como es el caso del Reynolds hidrodinámico, estudios han mostrado que en ausencia de campo magnético la transferencia de calor incrementa con el número Reynolds ( $Re$ ), sin embargo, cuando se tiene un número de  $Re$  constante la transferencia de calor incrementa con la intensidad del campo magnético [Goharkhah *et al.* (2014)].

Lo que ha motivado para la realización de este estudio se debe a que el uso de fluidos eléctricamente conductores bajo distintas distribuciones de campo magnético propician la creación de vorticidad de una manera no intrusiva, con lo cual se puede lograr mejorar la transferencia de calor, lo cual abre la posibilidad de estudiar diferentes distribuciones de campos magnéticos localizados impuestos en el exterior del ducto. Dichas distribuciones se obtienen de las expresiones analíticas proporcionadas por Furlani (2001) que ya han sido comparadas por Pérez-Barrera (2018) con datos experimentales y han mostrado reproducir campos magnéticos producidos por imanes permanentes de una manera bastante aproximada.

El principal objetivo de este trabajo es desarrollar simulaciones numéricas de

la dinámica y la transferencia de calor de flujos de metal líquido en un ducto de sección transversal rectangular bajo la acción de campos magnéticos no homogéneos, mediante el método de volumen finito, para determinar las condiciones que permitan lograr un mejoramiento de la transferencia de calor. Asimismo adquirir un entendimiento profundo de los fenómenos involucrados. Para lograrlo se requiere del desarrollar herramientas de cómputo para la simulación de la dinámica de flujos MHD así como para la transferencia de calor en los flujos MHD, posteriormente validar las herramientas de cómputo desarrolladas mediante soluciones analíticas existentes, analizar los resultados numéricos y explorar configuraciones de campo magnético no homogéneo que maximicen la transferencia de calor en ductos bajo condiciones de flujo dadas.

En la presente tesis se realiza un estudio numérico empleando aproximaciones bidimensional, quasi bidimensional y tridimensional de la dinámica de flujos MHD en un ducto, así como los efectos en la transferencia de calor. La gran complejidad del estudio de flujos MHD motiva al uso de dichas aproximaciones que permiten un entendimiento gradual de la física involucrada en este fenómeno. La implementación se realiza con la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones del campo electromagnético en la aproximación MHD.

En la primera parte de este trabajo se formula el problema estudiado en términos generales y se presentan las ecuaciones fundamentales de la dinámica de flujos y la aproximación MHD, se presentan dos formulaciones distintas para la implementación del campo magnético, la primera formulación es basada en el campo magnético inducido y la segunda formulación basada en el potencial eléctrico y se muestran los modelos matemáticos que describen a las aproximaciones mencionadas.

En la última parte de este trabajo se muestran los resultados más relevantes obtenidos para la dinámica del flujo, así como los correspondientes a la transferencia de calor, en una primera etapa se estudiará el problema puramente dinámico, y se estudia el efecto de las perturbaciones producidas por las diferentes distribuciones de campo magnético. En la segunda etapa, se discute el problema de transferencia de calor utilizando los flujos obtenidos previamente y explorando diferentes condiciones térmicas de frontera que resultan de interés para aplicaciones concretas de intercambio de calor.

Finalmente se encuentran las conclusiones del trabajo realizado.

---

# Formulación del problema y modelación matemática

---

En este capítulo se describe con detalle los casos estudiados, se incluye un problema magnetohidrodinámico y otro de transferencia de calor. Se muestra la geometría empleada, la configuración de los elementos involucrados.

Se presentan también los modelos matemáticos que describen a la dinámica del flujo, el campo magnético y la transferencia de calor, utilizando las aproximaciones bidimensional, cuasi-bidimensional y tridimensional, así como condiciones iniciales y de frontera específicas.

## 2.1. Formulación del problema

En esta tesis se realiza un estudio numérico de la dinámica y la transferencia de calor en un flujo magnetohidrodinámico. Como fluido de trabajo se considera un metal líquido, en particular, es de interés el metal líquido Galinstan, el cual es una aleación eutéctica de los elementos galio, indio y estaño (68.5 % Ga, 21.5 % In, 10 % Sn) con un  $Pr=0.053$ , dicha propiedad termofísica tomada de Li (2017). Se considera el flujo de metal líquido a través de un ducto con sección transversal rectangular uniforme en presencia de un campo magnético aplicado no uniforme. El campo magnético es generado por la presencia de imanes permanentes, los cuales son localizados de manera no intrusiva, muy cerca a una de las paredes que confina al flujo.

La presencia de un campo magnético intenso y localizado actúa como un obstáculo para el flujo debido a la aparición de una fuerza de Lorentz que se opone a él, lo cual propicia la generación de vorticidad mediante caudas aguas abajo del obstáculo magnético. El principal interés de este estudio es



## **8Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática**

conocer el efecto que produce el campo de velocidad modificado debido a la presencia del campo magnético en la transferencia de calor, se explora diferentes campos magnéticos localizados que son capaces de intensificar la vorticidad con la finalidad de mostrar que es posible lograr un mejoramiento en la transferencia de calor.

### **2.2. Ecuaciones adimensionales**

En esta sección se presenta las ecuaciones fundamentales que describen al movimiento de un fluido eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético, para describir el fenómeno completo se requiere de las ecuaciones de la dinámica de fluidos, así como las ecuaciones de la MHD.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos describen desde un punto de vista macroscópico al movimiento de un fluido como un medio hipotético continuo, el cual es afectado por la acción fuerzas (de superficie y/o volumen) presentes. Bajo la hipótesis del continuo, leyes de la física clásica como la segunda ley de Newton y primera Ley de la Termodinámica, permiten describir matemáticamente al movimiento de fluidos, así como la transferencia de calor. Para el caso particular de un fluido newtoniano incompresible, donde la densidad permanece constante, la ecuación de conservación de masa se reduce para obtener la ecuación de continuidad (ecuación 2.2). De la ecuación de cantidad de movimiento, para un fluido incompresible y con viscosidad constante se obtiene la ecuación de Navier-Stokes (2.3), donde el último término que aparece es una fuerza de volumen (o de cuerpo) que para el caso planteado se trata de una fuerza electromagnética, conocida como fuerza de Lorentz. A partir de la primera ley de la Termodinámica se obtiene una ecuación escalar que describe a transferencia de calor en un fluido, además cuando hay interacción electromagnética la ecuación toma la forma de 2.4, los últimos dos términos de izquierda a derecha indican, disipación Óhmica y disipación viscosa. Donde  $\Phi$ , de acuerdo con Curri (2007) esta dado por

$$\begin{aligned} \Phi = 2\mu & \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Las ecuaciones del campo electromagnético comprenden las ecuaciones de Maxwell, la ecuación para la fuerza de Lorentz y ecuaciones constitutivas que caracterizan al campo, tal como la Ley de Ohm, asociada a un proceso irreversible pues da lugar a disipación. Las ecuaciones mencionadas se presentan bajo la aproximación MHD. Las consideraciones básicas para esta aproximación son: las velocidades del fluido involucradas son mucho menores que la velocidad de la luz  $|\mathbf{u}| \ll \mathbf{c}$ , se trata de flujos no relativistas, pues los efectos relativistas no son relevantes en MHD, se tiene fenómenos de baja frecuencia, es decir fenómenos cuasi-estacionarios, los campos eléctricos inducidos son del orden de la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida por el movimiento del fluido  $\mathbf{E} \sim \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ . Bajo estas consideraciones, la ecuación 2.5 corresponde a ley de Gauss para el campo magnético, con lo cual se establece la inexistencia de monopolos magnéticos. La ecuación 2.6 es la llamada Ley de inducción de Faraday, expresa que la variación del campo magnético en el tiempo induce un campo eléctrico. La ecuación 2.7 establece que puede producir un campo magnético a partir de una corriente eléctrica. La ecuación 2.8 es la Ley de Ohm, que considera el campo eléctrico efectivo, es decir la suma del campo eléctrico que se tiene en reposo y la contribución que se hace debido al movimiento del fluido conductor dentro de un campo magnético en un sistema de laboratorio. Además si se obtiene la divergencia de la Ley de Ampère se obtiene  $\nabla \cdot \mathbf{J}$ , lo cual indica que la carga se conserva.

En forma adimensional, el conjunto de ecuaciones es el siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + N \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{Pe} (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T + \text{Ha}^2 \text{PrEc} \mathbf{J}^2 + \text{PrEc} \Phi \quad (2.4)$$

## 10 Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.8)$$

Las variables dependientes velocidad  $\mathbf{u}$ , presión  $P$ , densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ , campo magnético aplicado  $\mathbf{B}$ , la temperatura  $T$ , campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , potencial eléctrico  $\phi$ , han sido normalizadas con  $U$ ,  $\rho U^2$ ,  $\sigma U B_{max}$ , y  $B_{max}$ ,  $\frac{T_1 - T_0}{\Delta T}$ ,  $U B_{max}$ ,  $L_c U B_{max}$  respectivamente. Por su parte las variables independientes como las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  han sido normalizadas con  $L_c$  y para el tiempo  $t$  se considera un tiempo inercial y se normaliza con  $L_c/U$ , pero el tiempo que aparece en la ecuación de transferencia de calor se adimensionaliza considerando un tiempo difusivo  $L_c^2/\alpha$ . En la adimensionalización es importante señalar que la longitud característica  $L_c$  corresponde a la longitud lateral de un imán cuadrado que se ocupa para producir el campo magnético.

En las ecuaciones aparecen los siguientes parámetros adimensionales:

El número de Reynolds que se define como:

$$\text{Re} = \frac{U L_c}{\nu} = \frac{\rho U L_c}{\mu} \quad (2.9)$$

Donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\rho$  es la densidad y  $\nu$  es la viscosidad cinemática. Este número adimensional compara las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas o bien, el transporte convectivo de cantidad de movimiento con el transporte difusivo de esta cantidad. También aparece el número de Stuart, también llamado parámetro de interacción que se define como:

$$\text{N} = \frac{\sigma B_{max}^2 U}{\rho \frac{U^2}{L_c}} = \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \quad (2.10)$$

Este número da una estimación de la magnitud de la fuerza magnética comparada con la fuerza inercial. Donde el número de Hartmann se define como:

$$\text{Ha} = (\text{NRe})^{1/2} = B_{max} L_c \left( \frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

y ofrece una estimación de las fuerzas magnéticas comparadas con las fuerzas viscosas. El parámetro adimensional que aparece en el término convectivo de la ecuación de transferencia de calor se conoce como número de Péclet y se define como:

$$\text{Pe} = \frac{UL_c}{\alpha} \quad (2.12)$$

Este parámetro da una estimación del transporte convectivo y de transporte de calor por difusión. También se puede expresar como la relación de números adimensionales como  $\text{Pe} = \text{Re Pr}$ . Por su parte, el número de Prandtl, se define como:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.13)$$

y compara el transporte difusivo de cantidad de movimiento el transporte difusivo de calor. También se encuentra una cantidad conocida como número de Eckert:

$$\text{Ec} = \frac{U^2}{C_p \Delta T} \quad (2.14)$$

Proporciona la relación de la energía cinética del fluido y su entalpía.

## 2.3. Implementación del campo magnético

En los flujos MHD existen diferentes formulaciones para la implementación del campo magnético, dependiendo de las variables dependientes que se elijan para la descripción del flujo, las dos formulaciones más utilizadas son las llamadas B y  $\phi$ , las cuales son equivalentes pero una de ellas se basa en el campo magnético inducido y la otra en el potencial eléctrico. Una de las diferencias básicas entre las dos formulaciones es la manera en la cual se calculan las corrientes inducidas. En la formulación B se calculan usando la ley de Ampère mientras que en la  $\phi$  se calculan usando la ley de Ohm.

### 2.3.1. Formulación B ( $R_m \ll 1$ )

Esta formulación se basa en el campo magnético inducido. Cuando se aplica esta formulación, las ecuaciones fundamentales de la MHD tienen como variables dependientes a la velocidad, presión y el campo magnético inducido.

De manera adimensional el campo magnético total es la contribución de dos partes [Moreau (1990)].

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + R_m \mathbf{b} \quad (2.15)$$

La primera contribución es debida al campo magnético aplicado y la segunda es por el campo magnético inducido por el flujo del fluido dentro del campo  $\mathbf{B}_0$ . El  $R_m$  que acompaña al campo inducido es una cantidad adimensional conocida como Reynolds magnético. Esta forma del campo es una buena aproximación cuando  $R_m$  es pequeño, el término  $R_m \mathbf{b}$  es una perturbación que modifica ligeramente al campo aplicado debido al movimiento del fluido.

El número de Reynolds magnético se define como:

$$R_m = \frac{UL_c}{\gamma} \quad (2.16)$$

Donde  $\gamma = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$  representa la difusividad magnética. Este parámetro compara al campo magnético inducido con el campo magnético aplicado.

El campo magnético se comporta muy diferente dependiendo de la conductividad eléctrica del medio. En la aproximación a  $R_m \ll 1$ , la velocidad  $\mathbf{u}$  tiene poca influencia en el campo magnético. Con esta aproximación, debido a la alta resistividad del circuito; la corriente y por lo tanto el campo magnético inducido son muy pequeños, y este último es despreciable comparado con el campo magnético aplicado [Davidson (2017)].

El campo magnético aplicado debe de satisfacer las ecuaciones magnetostáticas

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.17)$$

Con lo que también se garantiza el carácter solenoidal e irrotacional de  $\mathbf{B}_0$ . El campo magnético inducido también se debe de satisfacer la condición que garantiza que las líneas de campo magnético son trayectorias cerradas

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (2.18)$$

También se debe cumplir el principio de conservación de la carga

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.19)$$

La ecuación de inducción también llamada ecuación de transporte para el campo magnético, se obtiene de la combinación de la ley de Ohm, la ley de Faraday y la ley Ampère, ésta expresión permite relacionar al campo magnético con el campo de velocidad, al considerar que el campo no varía con el tiempo y bajo la aproximación  $R_m$  pequeño se obtiene una ecuación de Poisson (2.22) para el campo magnético inducido. Una vez que se calcula  $\mathbf{b}$ , la ley de Ampère (2.23) permite calcular la corriente eléctrica. El sistema de ecuaciones completo bajo esta aproximación es el siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + N \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{b} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{J} \quad (2.23)$$

Las variables dependientes velocidad  $\mathbf{u}$ , presión  $\mathbf{P}$ , densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ , campo magnético inducido  $\mathbf{b}$ , han sido normalizadas con  $U$ ,  $\rho U^2$ ,  $\sigma U B_{max}$ , y  $R_m B_{max}$  respectivamente. Por su parte las variables independientes las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y el tiempo  $t$ , han sido normalizadas con  $L_c$  y  $L_c/U$  respectivamente.

### 2.3.2. Formulación $\phi$ ( $\text{Rm} \ll 1$ )

Esta formulación se basa en el potencial eléctrico escalar. Cuando se aplica esta formulación, las ecuaciones fundamentales de la MHD tienen como variables dependientes a las velocidad, presión y potencial eléctrico.

Bajo la aproximación  $R_m \ll 1$  el campo magnético total es aproximadamente igual al campo magnético aplicado ya que éste no se altera por el

## 1Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática

movimiento del fluido de manera que, dado que dicho campo no varía con el tiempo, la ley de inducción de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.24)$$

Donde

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.25)$$

La corriente inducida se calcula con la ley de Ohm; por lo que la ecuación de inducción de corriente está dada por:

$$\mathbf{J} = -\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.26)$$

Se debe cumplir el principio de conservación de la carga.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.27)$$

El campo magnético aplicado debe satisfacer las ecuaciones de la magnetostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.28)$$

El sistema de ecuaciones completo bajo esta aproximación es el siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + N \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (2.31)$$

La ecuación de Poisson para el potencial eléctrico (2.31), se obtiene tras sacar la divergencia de la ecuación de inducción de corriente y aplicar la conservación de la carga. Al sustituir la ecuación de inducción de corriente en la ecuación de Navie-Stokes, se obtiene explícitamente la fuerza de Lorentz que está dada como

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 \times \nabla\phi - \mathbf{B}_0^2 \mathbf{u}_\perp$$

Las variables dependientes velocidad  $\mathbf{u}$ , presión  $\mathbf{P}$ , densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ , potencial eléctrico  $\phi$ , han sido normalizadas con  $U$ ,  $\rho U^2$ ,  $\sigma U B_{max}$ , y  $L_c U B_{max}$  respectivamente. Por su parte las variables independientes las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y el tiempo  $t$ , han sido normalizadas con  $L_c$  y  $L_c/U$  respectivamente. Como puede observarse, el sistema de ecuaciones que se obtiene está fuertemente acoplado y tiene que ser resuelto simultáneamente.

## 2.4. Modelo bidimensional

Con la consideración de que se tiene una capa muy delgada de fluido se realiza una primera aproximación puramente bidimensional, para ello se desprecia la componente  $w$  de la velocidad, por lo que el campo de velocidad resultante es

$$\mathbf{u} = \langle u(x, y, t), v(x, y, t), 0 \rangle \quad (2.32)$$

Se considera que la componente  $z$  del campo magnético es la única que tiene un efecto sobre el fluido, componente transversal al flujo.

$$\mathbf{B}_0 = \langle 0, 0, B_z(x, y) \rangle \quad (2.33)$$

### ■ Con formulación $\mathbf{B}$

El campo magnético inducido en la misma dirección del campo magnético aplicado.

$$\mathbf{b} = \langle 0, 0, b_z(x, y) \rangle \quad (2.34)$$

La densidad de corriente inducida se obtiene a partir de la ley de Ampère

$$\mathbf{J} = \langle J_x, J_y, 0 \rangle \quad (2.35)$$

Donde

$$J_x = \frac{\partial b_z}{\partial y} \quad J_y = -\frac{\partial b_z}{\partial x}$$

### ■ Con formulación $\phi$

El potencial eléctrico

$$\nabla\phi = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\rangle \quad (2.36)$$

$$\nabla^2\phi = B_0 \frac{\partial v}{\partial x} - B_0 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.37)$$

La densidad de corriente inducida se obtiene a partir de la ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \langle J_x, J_y, 0 \rangle \quad (2.38)$$



Donde

$$J_x = vB_0 - \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad J_y = - \left( uB_0 + \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)$$

### 2.4.1. Ecuaciones para la resolución con la aproximación 2D

Explícitamente las ecuaciones que describen el problema bidimensional usando la formulación B o  $\phi$ , se resumen de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + \frac{Ha^2}{Re} J_y B_0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{Ha^2}{Re} J_x B_0 \quad (2.41)$$

Donde el valor de  $J_x$  y  $J_y$  se calcula de manera distinta dependiendo de la formulación que se aplique. El valor de las componentes de la corriente inducida incluye explícitamente la parte representativa de cada formulación.

### 2.4.2. Condiciones de frontera

Para la dinámica del flujo, en la entrada del canal se impone un flujo uniforme en la dirección de la coordenada  $x$

$$u = 1, \quad v = 0 \quad (2.42)$$

En la salida del canal se tiene un flujo completamente desarrollado.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.43)$$

Para las paredes del ducto se impone la condición de no deslizamiento

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.44)$$

Para el campo inducido se consideran paredes eléctricamente aislantes [Müller and Bühler (2001)]

$$\mathbf{b} = 0 \quad (2.45)$$

Para el potencial eléctrico se consideran paredes eléctricamente aislantes

$$\phi = 0 \quad (2.46)$$

### 2.4.3. Campo magnético aplicado 2D

Para la colocación de un campo magnético localizado se hace uso de la ecuación propuesta por Furlani (2001), la cual está hecha para representar la distribución del campo en una determinada región producida por imán permanente con geometría rectangular. Para el caso bidimensional se considera que la principal contribución del campo magnético es a través de la componente  $z$ . El campo magnético aplicado  $B_z$ , decae a 0.6 en el límite de la placa magnetizada cuando la distancia al centro es dos veces la longitud lateral de la superficie cuadrada. La componente  $B_z$  del campo está dada por:

$$\begin{aligned} B_z(x, y, z) &= \frac{\mu_o M_s}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+n+m} \times \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{(x - x_n)(y - y_n)}{(z - z_k)} g(x, y, z, x_n, y_n, z_k) \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Donde:

$$g(x, y, z, x_n, y_n, z_k) = \frac{1}{((x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_k)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

En la figura 2.1 se muestra una vista isométrica del campo magnético aplicado descrito anteriormente, y en la figura 2.2 se muestra la vista superior de las isolíneas del campo magnético aplicado, así como el decaimiento del mismo.

## Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática

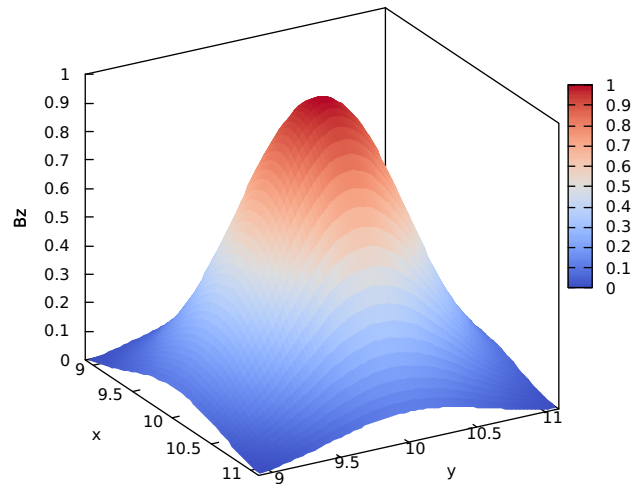
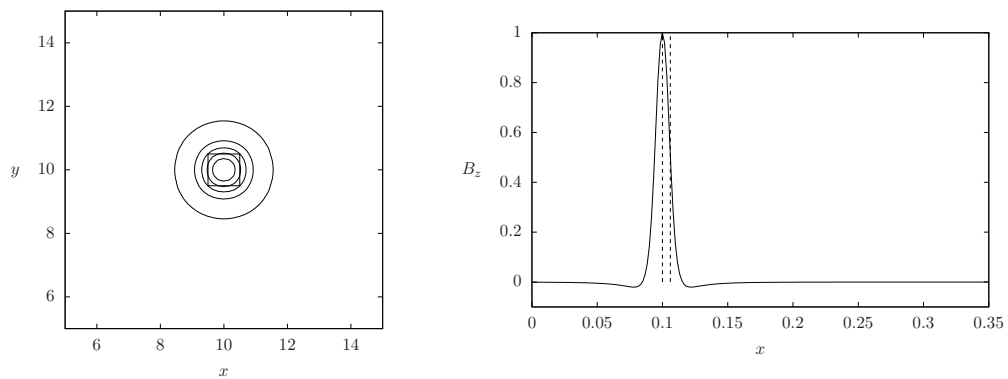


Figura 2.1: Vista isométrica del campo magnético aplicado normalizado.



(a) Vista superior de isolíneas del campo magnético aplicado. (b) Decaimiento gaussiano del campo magnético aplicado.

Figura 2.2: Componente  $B_z$  del campo magnético aplicado: (a) Vista superior de isolíneas del campo magnético aplicado, (b) Decaimiento gaussiano del campo magnético aplicado.

## 2.5. Modelo cuasi bidimensional

Este modelo consiste realizar un promediado de las ecuaciones de la dinámica del fluido de tal manera que sean considerados los efectos de fricción que se producen por la presencia de paredes del fondo y de la parte superior del ducto, perpendiculares al campo magnético aplicado, dichas paredes con una separación entre ellas menor que la longitud característica del problema. El modelo Q2D considera que el transporte de momento en dirección  $z$  es esencialmente difusivo, es decir, no hay componente de la velocidad que transporte momento en dirección  $z$ .

Con las consideraciones:

- La velocidad en  $x$  depende de  $z$ , es decir,  $u = f(z)$ .
- Hay una gradiente de presión constante que mueve al fluido.
- La fuerza de Lorentz actúa en dirección  $x$ .

Se obtiene que la ecuación de movimiento a resolver es:

$$f''(z) - B_0^2 \text{Ha}^2 f(z) = \text{Re} \frac{dP}{dx} \quad (2.48)$$

Que es una ecuación diferencial lineal, no homogénea de segundo orden. Cuya solución está dada por:

$$f(z) = -\frac{\text{Re} \frac{dP}{dx}}{B_0^2 \text{Ha}^2} + c_1 e^{\text{BoHa}z} + c_2 e^{-\text{BoHa}z} \quad (2.49)$$

La función  $f$  debe satisfacer las condiciones de frontera de no deslizamiento en la pared del fondo y la pared superior, por lo que deben evaluarse las condiciones de frontera:

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(h) = 0$$

### 2.5.1. Determinación de la función $f$

Al resolver la ecuación diferencial con las condiciones de frontera se determina la función  $f$ , la cual representa la variación de la velocidad del flujo en a dirección normal al plano  $x - y$ , es decir, en dirección  $z$ .

## 20 Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} \frac{dP}{dx} \left( -\tanh\left(\frac{B_0 h \operatorname{Ha}}{2}\right) \sinh(B_0 \operatorname{Ha} z) + \cosh(B_0 \operatorname{Ha} z) - 1 \right)}{B_0^2 \operatorname{Ha}^2} \quad (2.50)$$

Se parte de las ecuaciones para el campo de velocidad mostradas a continuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + N B_0 J_y \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \nabla^2 v - N B_0 J_x \quad (2.52)$$

Se deriva respecto a  $y$  a la ecuación de la componente  $u$  y, se deriva respecto a  $x$  a la ecuación de la componente  $v$ . A la ecuación de  $v$  se le resta la ecuación de  $u$ . Recordando que la componente  $z$  de la vorticidad está dada por:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.53)$$

Se obtiene la ecuación de transporte de vorticidad.

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) - N \left( \frac{\partial J_y B_0}{\partial y} + \frac{\partial J_x B_0}{\partial x} \right) \quad (2.54)$$

Aplicando la ecuación de conservación de carga se encuentra la componente que relaciona a  $J_z$ , quedando la ecuación de transporte de vorticidad como:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) + N \left( B_0 \frac{J_z}{\partial z} - J_y \frac{\partial B_0}{\partial y} - J_x \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) \quad (2.55)$$

Se define un promedio sobre el grosor de la capa de fluido.

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{h} \int_0^h f dz \quad (2.56)$$

Se debe satisfacer que:

$$\frac{1}{h} \int_0^h f dz = 1 \quad (2.57)$$

Se normaliza la función  $f$  dividiendo por su integral a lo largo del grosor de la capa de fluido.

$$\bar{f} = \frac{f}{\int_0^h f dz} \quad (2.58)$$

La función  $\bar{f}$  queda como:

$$\bar{f} = \frac{B_0 h \text{Ha} \left( \tanh\left(\frac{B_0 h \text{Ha}}{2}\right) \sinh(B_0 \text{Ha} z) - \cosh(B_0 \text{Ha} z) + 1 \right)}{B_0 h \text{Ha} - 2 \tanh\left(\frac{B_0 h \text{Ha}}{2}\right)} \quad (2.59)$$

En la figura ?? se muestra la función  $f$  empleada para calcular los respectivos valores de  $K$  y  $\tau^{-1}$ , se puede observar que se modela el flujo de Hartmann en la región de campo magnético intenso, así como el perfil de Poiseuille en la región donde se tiene un campo magnético débil o nulo.

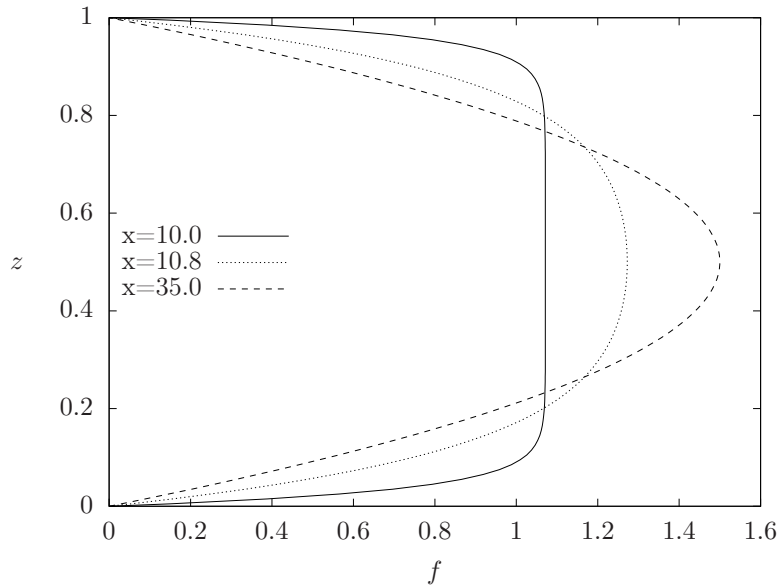


Figura 2.3: Función  $f$  calculada en la región del imán, fuera de la región y muy lejos de la región del imán.

### 2.5.2. Ecuaciones para la resolución con la aproximación Q2D

Integrando cada parte de la ecuación de transporte de vorticidad, se obtienen las ecuaciones de movimiento promediadas.

## 2Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) K = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + \frac{u}{\tau} + \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} j_y B_z \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) K = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v + \frac{v}{\tau} - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} j_x B_z \quad (2.62)$$

Donde  $K$  y  $\tau^{-1}$ , de acuerdo con Beltrán (2010) se determinan como se muestra a continuación:

$$K = \frac{1}{h} \int_0^h f^2 dz \quad y \quad \tau^{-1} = \frac{1}{h} \left( \frac{df}{dz} \right)_0^h$$

Sustituyendo el valor de  $f$  en  $K$  y  $\tau$  se obtienen sus respectivos valores, estas variables representan la fricción presente debido al contacto del fluido con las paredes.

$$\tau^{-1} = -\frac{2B_0^2 \text{Ha}^2 \tanh\left(\frac{B_0 h \text{Ha}}{2}\right)}{B_0 h \text{Ha} - 2 \tanh\left(\frac{B_0 h \text{Ha}}{2}\right)}$$

$$K = \frac{B_0 h \text{Ha} (B_0 h \text{Ha} (\cosh(B_0 h \text{Ha}) + 2) - 3 \sinh(B_0 h \text{Ha}))}{2 \left( B_0 h \text{Ha} \cosh\left(\frac{B_0 h \text{Ha}}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{B_0 h \text{Ha}}{2}\right) \right)^2}$$

### 2.6. Modelo tridimensional

Para esta modelación se emplea la formulación  $\phi$  por la simplicidad que representa resolver una ecuación escalar en lugar de una vectorial con sus tres componentes como es el caso de la formulación B.

El campo de velocidad está dado de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \langle u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t) \rangle \quad (2.63)$$

Se consideran todas las componente del campo magnético aplicado.

$$\mathbf{B}_0 = \langle B_x(x, y, z), B_y(x, y, z), B_z(x, y, z) \rangle \quad (2.64)$$

El potencial eléctrico

$$\nabla\phi = \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\rangle \quad (2.65)$$

La densidad de corriente inducida se obtiene a partir de la ley de Ohm

$$J = \langle J_x, J_y, J_z \rangle \quad (2.66)$$

Donde

$$J_x = vB_z - wB_y - \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$J_y = wB_x - uB_z - \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$J_z = uB_y - vB_x - \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

### 2.6.1. Ecuaciones para la resolución 3D

Explícitamente las ecuaciones que describen el problema tridimensional usando la formulación  $\phi$ , se resumen de la siguiente manera

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + \frac{Ha^2}{Re} (J_y B_z - J_z B_y) \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v + \frac{Ha^2}{Re} (J_z B_x - J_x B_z) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w + \frac{Ha^2}{Re} (J_x B_y - J_y B_x) \quad (2.70)$$



## **2Capítulo 2. Formulación del problema y modelación matemática**

### **2.6.2. Condiciones de frontera**

Para la dinámica del flujo en la entrada del ducto se impone un flujo uniforme en la dirección  $x$

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (2.71)$$

En la salida del ducto se tiene un flujo completamente desarrollado.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.72)$$

En las paredes se impone la condición de no deslizamiento

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.73)$$

Para el potencial eléctrico se consideran paredes eléctricamente aislantes

$$\phi = 0 \quad (2.74)$$

### **2.6.3. Campo magnético aplicado 3D**

Para la colocación de un campo magnético localizado se hace uso de la ecuación propuesta por Furlani (2001), la cual está hecha para representar la distribución del campo en una determinada región producida por imán permanente con geometría rectangular.

La componente  $B_x$  del campo está dada por:

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_o M_s}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+m} \times \ln(F(x, y, z, x_m, y_1, y_2, z_k)) \quad (2.75)$$

Donde:

$$F(x, y, z, x_m, y_1, y_2, z_k) = \frac{(y - y_1) + ((x - x_m)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_k)^2)^{\frac{1}{2}}}{(y - y_2) + ((x - x_m)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_k)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

La componente  $B_y$  del campo está dada por:

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_o M_s}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+m} \times \ln(H(x, y, z, x_1, x_2, y_m, z_k)) \quad (2.76)$$

Donde:

$$H(x, y, z, x_1, x_2, y_m, z_k) = \frac{(x - x_1) + ((x - x_1)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_k)^2)^{\frac{1}{2}}}{(x - x_2) + ((x - x_2)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_k)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

La componente  $B_z$  del campo está dada por:

$$\begin{aligned} B_z(x, y, z) &= \frac{\mu_o M_s}{4\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{k+n+m} \times \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{(x - x_n)(y - y_n)}{(z - z_k)} g(x, y, z, x_n, y_n, z_k) \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Donde:

$$g(x, y, z, x_n, y_n, z_k) = \frac{1}{((x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_k)^2)^{\frac{1}{2}}}$$



---

# Resultados

---

## 3.1. Dinámica del flujo

En primer lugar se presentan los resultados obtenidos en relación a la pura dinámica del flujo magnetohidrodinámico de metal líquido, resulta conveniente comenzar con la implementación de un modelo bidimensional, posteriormente se realiza una aproximación quasi-bidimensional, hasta finalmente llegar al caso más general para lo cual se desarrolla una solución completamente tridimensional de la dinámica del flujo.

### 3.1.1. Modelo 2D

Para entender la dinámica del flujo de metal líquido, resulta práctico comenzar con un modelo bidimensional, esta aproximación es válida cuando se asume que se tiene una capa muy delgada de fluido, es decir; el espesor de la capa de fluido es muy pequeño comparado con el largo y ancho del ducto. En este estudio se considera que el flujo fluye entre paredes laterales paralelas de área longitudinal, no se considera el efecto de las paredes superior e inferior ya que se asume que se encuentran muy alejadas de la región del flujo estudiado.

#### Validación de la hidrodinámica del flujo

Con la finalidad de validar el código numérico implementado para la solución 2D de la dinámica del flujo, se compara una solución analítica con la solución numérica obtenida. Cuando un flujo laminar y estacionario de un fluido viscoso e incompresible fluye entre líneas rectas paralelas infinitas, y se asume que se tiene flujo solo en la dirección  $x$ , las ecuaciones de Navies-Stokes se reducen a una sola ecuación escalar y es posible obtener una solución exacta, la ecuación a resolver es:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (3.1)$$

Donde  $u$  es la velocidad del flujo en dirección  $x$ ,  $\frac{dP}{dx}$  el gradiente de presión que mueve al fluido. En las paredes del ducto se considera condiciones de no deslizamiento y con ello se obtiene la expresión 3.2, que representa el perfil del flujo hidrodinámico. Un flujo con esta distribución parabólica es conocida como flujo de Poiseuille plano (en una dimensión).

$$u(y) = -\frac{\Delta P}{2\mu} y(y-h) \quad (3.2)$$

Donde  $h$  es la distancia que separa a las líneas paralelas a través de las cuales fluye el fluido. Al superponer la solución analítica normalizada del flujo de Poiseuille unidimensional con la solución numérica bidimensional obtenida cuando en el ducto se tiene un flujo completamente desarrollado, se observa en la figura 3.1 con línea continua la solución numérica y línea discontinua la solución analítica, se puede ver claramente que las soluciones numérica y analítica normalizadas coinciden de manera muy similar, y con esto es posible validar la implementación del código numérico para la solución de la hidrodinámica de un flujo bidimensional.

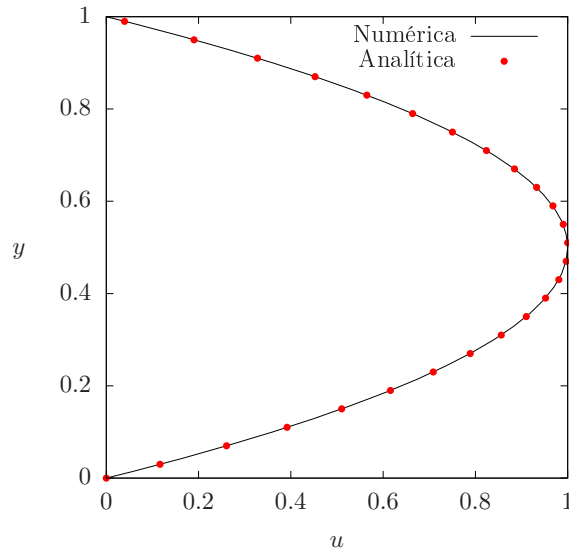


Figura 3.1: Se muestran una comparación del flujo de Poiseuille obtenido analítica y numéricamente.

### Comparación de solución numérica con trabajo previo

Con el propósito de validar la implementación del campo magnético, se realiza una comparación de los resultados obtenidos para caso bidimensional de un flujo MHD de metal líquido en un canal rectangular usando la técnica de volumen finito, con los resultados que presenta Beltrán (2006) usando la técnica de diferencias finitas. De acuerdo con la descripción dada por Beltrán, se estudia un flujo que se hace pasar por un canal, el dominio estudiado cuenta con las dimensiones  $35 \times 20$  unidades en las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente. Externo al flujo se coloca un imán permanente de geometría cadrada con tamaño de una unidad de longitud por lado, cuyo centro es localizado en la coordenada  $(10,10)$  en los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente, la presencia de dicho imán colocado a  $6.3E-3$  unidades por debajo de la placa sobre la cual fluye el fluido, produce un campo magnético que tiene un rápido decaimiento, decae de 0.6 en el límite de la placa magnetizada hasta uno de sus extremos.

Como se observa en la figura 3.2, en la entrada del canal se impone un flujo uniforme y en su salida se tiene un flujo completamente desarrollado, para realizar este estudio se utilizó una malla de  $212 \times 201$ .

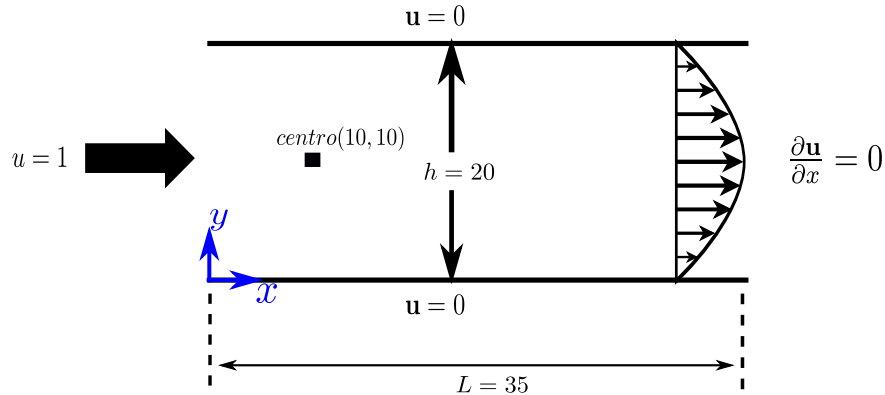


Figura 3.2: Dominio computacional para la dinámica del flujo.

Las paredes que confinan al fluido son eléctricamente aislantes y se impone en ellas condiciones de tipo simétricas, simulando que no hay fricción, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0 \quad (3.3)$$

La interacción del flujo con dirección  $x$  positiva y el campo magnético aplicado dirigido hacia afuera del plano de la pantalla (dirección  $z$ ), induce una corriente eléctrica, la cual de acuerdo con la ley de Ampère da lugar a un campo magnético inducido que perturba al campo magnético original. Cuando la corriente eléctrica interactúa con el campo magnético, se genera una fuerza de Lorentz con dirección opuesta al flujo del fluido, lo cual ocasiona un retardo en el flujo.

Se realiza una comparación cualitativa del campo de velocidad obtenido numéricamente y el reportado por Beltrán para un  $Re=10$  y  $Ha=15$ . En la figura 3.3 se hace un acercamiento en la región donde se localiza en imán cuyo campo magnético que modifica al flujo produciendo un dipolo en esa zona y un retardo en el flujo, dicho flujo continúa mayormente por las regiones laterales al obtáculo con lo que se forma una estela aguas abajo.

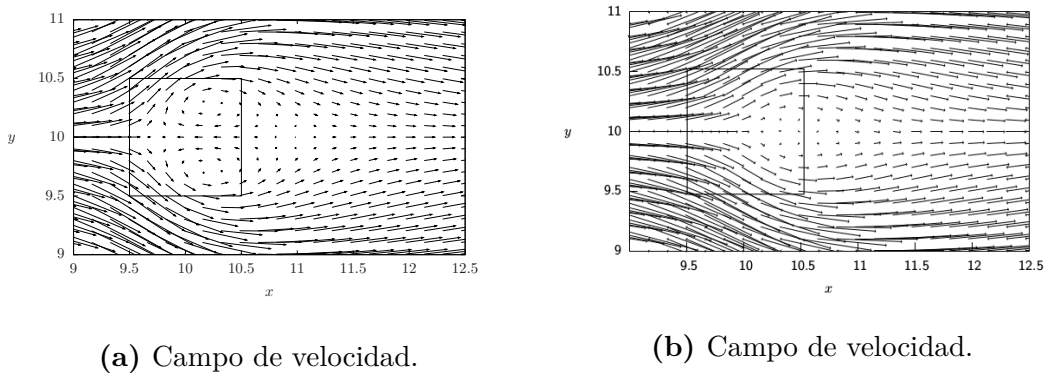


Figura 3.3: Para un  $Re=10$  y  $Ha=15$ , (a) Campo de velocidad obtenido numéricamente, (b) Campo de velocidad reportado por Beltrán (2006).

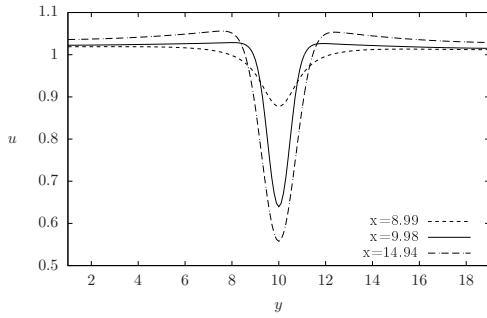
Adicionalmente se realiza una comparación de algunos perfiles obtenidos con las componentes de la velocidad y la vorticidad, lo anterior con la finalidad de comparar cualitativamente los resultados obtenidos con trabajo previo y así poder validar la implementación del campo magnético. En ambos casos la implementación del campo se realiza usando la formulación B, es decir, formulación basada en el campo magnético inducido.

En la figura 3.4 se hace la comparación cualitativa entre distintos perfiles de velocidad y vorticidad obtenidos cuando se tiene un  $Re=50$  y  $Ha=10$ , del lado

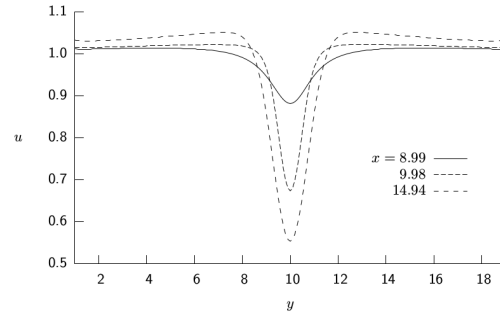
---

izquierdo se muestran los perfiles obtenidos numéricamente y del lado derecho se muestran los perfiles reportados por Beltrán. En (a) y (b) se muestra la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$ , para diferentes posiciones en  $x$ . En (c) y (d) se muestra la componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para distintos valores de  $x$ . En (e) y (f) se muestra la componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función de la coordenada  $y$  para distintos valores de  $x$ . Como puede observarse en cada par de casos, se tiene esencialmente el mismo comportamiento de los perfiles de velocidad y vorticidad, al ser equivalentes los resultados, se valida el código numérico implementado. Cabe mencionar que en esta sección no se realiza una interpretación de los resultados debido a que la finalidad es esencialmente corroborar la adecuada implementación del código numérico.

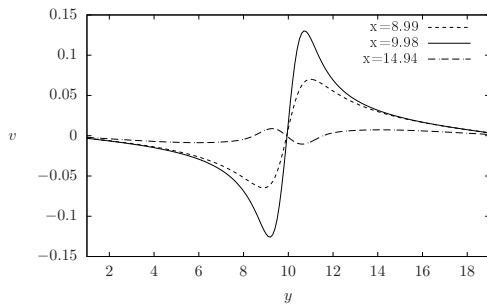




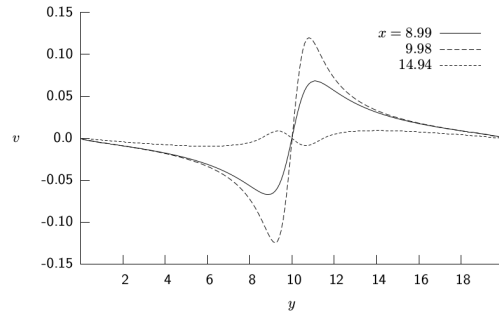
(a) Componente  $u$  de la velocidad obtenida numéricamente.



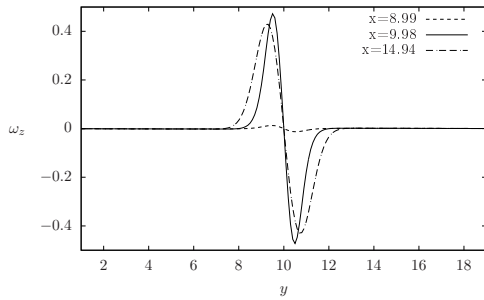
(b) Componente  $u$  de la velocidad reportada por Beltrán.



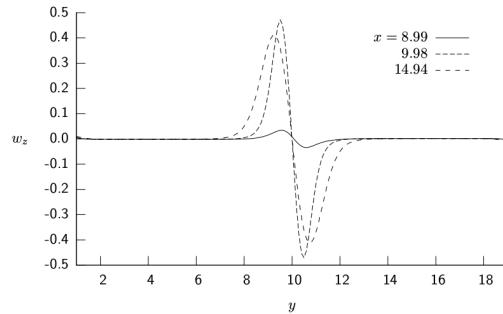
(c) Componente  $v$  de la velocidad obtenida numéricamente.



(d) Componente  $v$  de la velocidad reportada por Beltrán.



(e) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad obtenida numéricamente.



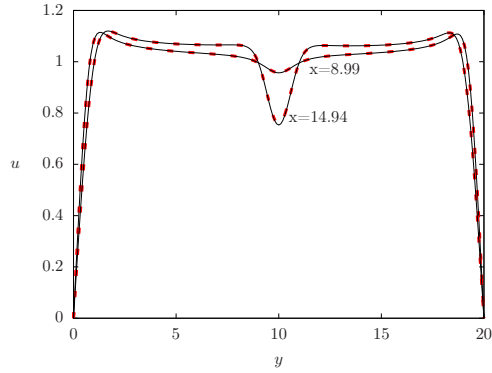
(f) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad reportada por Beltrán.

Figura 3.4: Perfiles de velocidad y vorticidad obtenidos numéricamente y los reportados en la literatura por Beltrán (2006), para los parámetros  $Re=50$  y  $Ha=10$ .

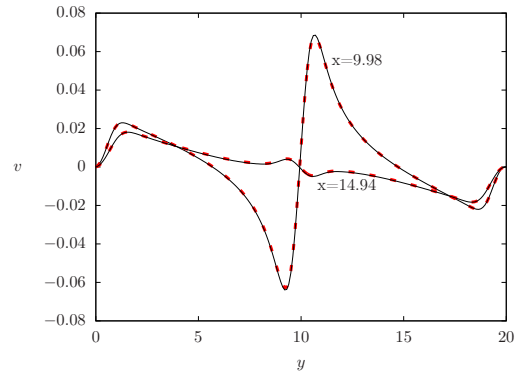
### Comparación de las formulaciones $\mathbf{B}$ y $\phi$

El propósito de este estudio es comprobar la equivalencia de las formulaciones  $\mathbf{B}$  y  $\phi$ , además, de este modo se puede tener la certeza de la correcta implementación del campo magnético. Para realizar este estudio, se conserva la geometría descrita en la sección anterior, sin embargo, para este estudio se realiza una modificación en las condiciones de frontera, ahora se considera condiciones de no deslizamiento en las paredes.

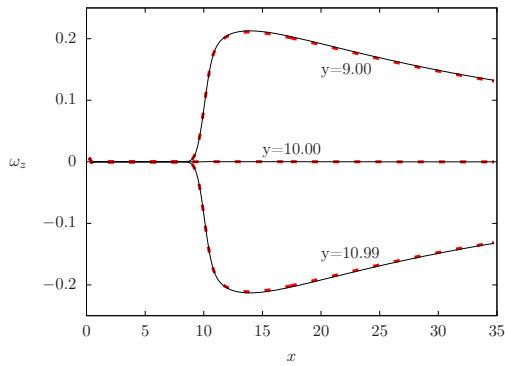
En particular, se muestra la comparación de diferentes perfiles de velocidad, vorticidad y presión obtenidos con la formulación  $\mathbf{B}$  y la formulación  $\phi$  para un  $Re=100$  y  $Ha=10$ , lo cual corresponde a un  $N=1$ , lo cual implica que la fuerza magnética es del mismo orden de magnitud que la fuerza inercial. En la figura 3.5 los resultados obtenidos empleando la formulación  $\phi$  se muestran con líneas continuas mientras que los resultados obtenidos al emplear la formulación  $\mathbf{B}$  se presentan con líneas discontinuas. Se muestra el perfil de la componente axial  $u$  y la componente transversal  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para diferentes posiciones en la coordenada  $x$ ; podemos destacar que en (a) se observa una disminución de la componente  $u$  de la velocidad en la región donde se localiza el obstáculo magnético, por otra parte en (b), se tiene un incremento considerable de la componente  $v$  donde se localiza el obstáculo y, como consecuencia de considerar el no deslizamiento en las paredes se observa claramente los efectos de la fricción en las paredes. En la figura (c) se muestra la componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función de la coordenada  $x$ , aquí se observa simetría en la vorticidad, lo cual implica la formación de una estela que disminuye su amplitud aguas abajo del obstáculo, adicionalmente justo donde se localiza el imán, la vorticidad es nula debido a la simetría de la estela producida. En (d) se tiene la componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función de la coordenada  $y$ , aquí se puede notar que debido a las paredes se tiene un incremento considerable de vorticidad.



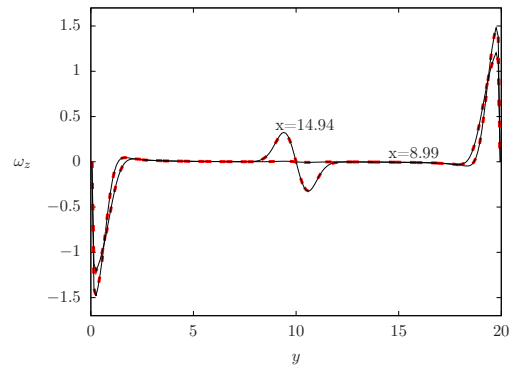
(a) Componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$ .



(b) Componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$ .



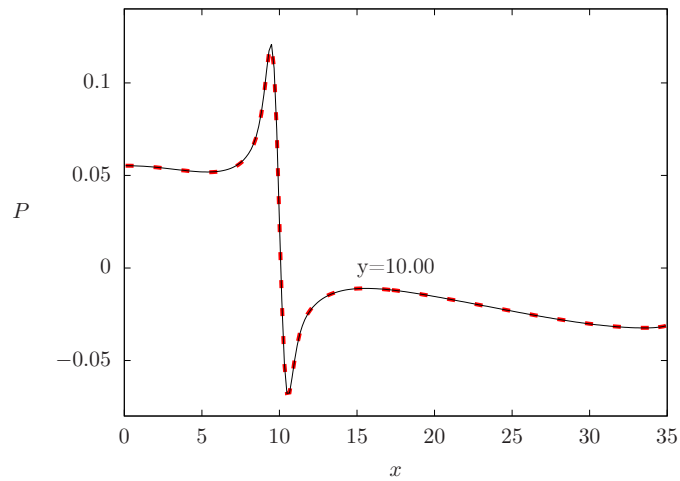
(c) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función de la coordenada  $x$ .



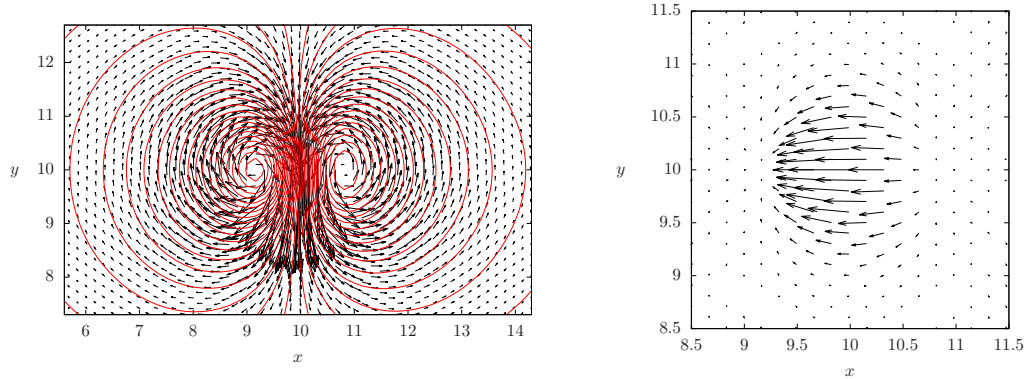
(d) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función de la coordenada  $y$ .

Figura 3.5: Perfis de velocidade y vorticidad obtenidos al emplear la formulacion  $\phi$  (línea continua) y la formulación B (línea discontinua) para un flujo con un obstáculo magnético localizado para un  $Re=100$  y  $Ha=10$ .

Es importante señalar que debido a la fuerza de Lorentz se opone al movimiento del fluido, como consecuencia se tiene un incremento de la presión aguas arriba y un decremento notable aguas abajo del obstáculo magnético como se observa en la figura 3.6 que se tiene a la presión como una función de la coordenada  $x$ .

Figura 3.6: Presión en función del eje  $x$ .

Por otro lado, en cuanto al campo inducido podemos corroborar que actúa como una función de corriente para la corriente, lo cual se puede observar en la figura 3.7, donde se superponen las isolíneas de campo inducido así como los vectores de la corriente inducida obtenidos para un  $Re=50$  y  $Ha=10$ , es decir  $N=2$ , lo que implica que los efectos convectivos son menores que los magnéticos, es por ello que se puede ver una gran simetría en la gráfica, se puede apreciar cómo las isolíneas de campo inducido indican la trayectoria de los vectores de la densidad de corriente inducida, adicionalmente se muestra la fuerza de Lorentz producida actuando en sentido opuesto al flujo.



(a) Campo magnético y corriente inducidos. (b) Fuerza de Lorentz.

Figura 3.7: Isolíneas de campo magnético inducido, vectores de corriente inducida y fuerza de Lorentz para un  $Re=50$  y  $Ha=10$  con un imán localizado.

Para una mejor apreciación del efecto que produce colocar más de un campo magnético localizado, en la figura 3.8 se muestra que cuando se colocan dos imanes cercanos entre ellos, los campos magnéticos inducidos y la densidad de corriente inducida interactúan entre ellos, modificando mutuamente el comportamiento que producirían individualmente.

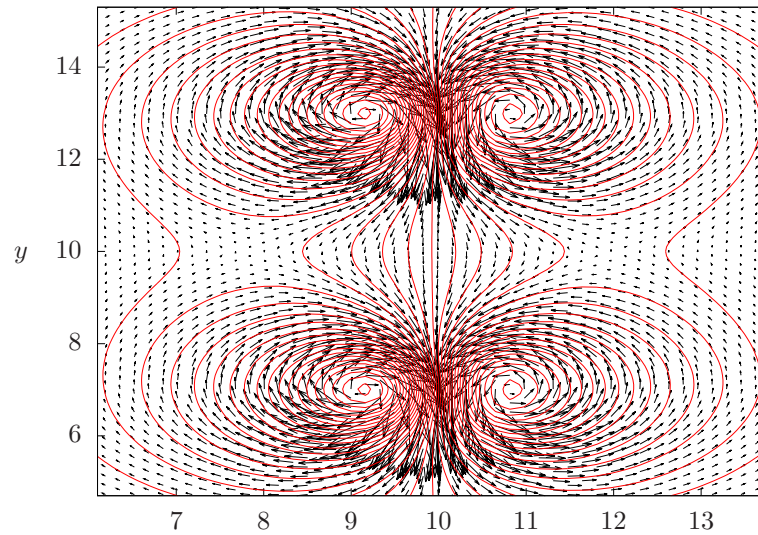


Figura 3.8: Isolíneas de campo inducido<sup>x</sup> y la trayectoria de la corriente para un  $Re=50$  y  $Ha=10$  con dos imanes localizados.

### Simulación numérica 2D (Formulación B)

En particular se realiza un estudio que considera el efecto de modificar el número de Reynolds cuando se tiene un número de Hartmann constante y viceversa. Para ello se plantean los casos cuando se tiene un  $Re=10$  y  $Ha=30$ ,  $Re=100$  y  $Ha=30$  así como  $Re=100$  y  $Ha=60$ . Se comparan diferentes perfiles de velocidad obtenidos bajo estas condiciones. En la geometría empleada como puede verse en la figura 3.9 se considera un ducto rectangular de sección transversal uniforme con las dimensiones  $35 \times 10$  unidades en las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente, y el imán se localiza en la coordenada  $(10,5)$ .

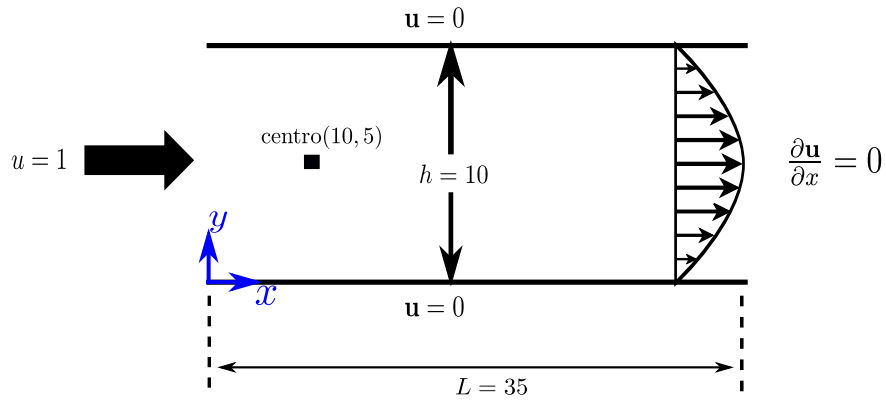


Figura 3.9: Dominio computacional de la dinámica del flujo.

Los parámetros críticos para la dinámica del flujo son los números  $Re$  y  $Ha$ , dependiendo de sus valores es posible observar distintos patrones de flujo, los cuales pueden ser desde flujo estacionario a través de un obstáculo donde esencialmente lo rodea y se forma una estela, lo anterior debido a que los efectos cortantes presentes al rededor del obstáculo magnético son despreciables. También se puede tener el caso donde se tiene un flujo en transición, o bien, puede darse el caso donde se tiene flujo con desprendimiento periódico vórtices. En la figura 3.10 se observa que pese a que el  $Ha$  es un número grande, debido a que se tiene un  $Re$  pequeño, debido a que los efectos convectivos son muy pequeños se obtiene un flujo estacionario.

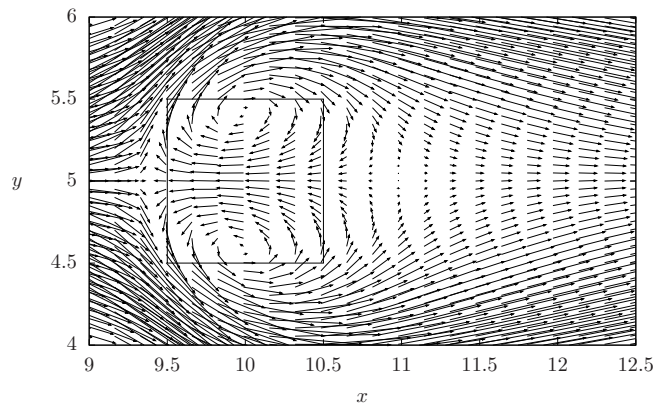
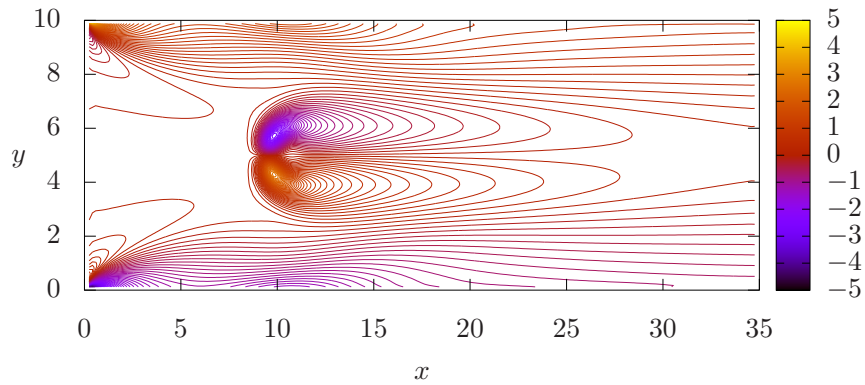
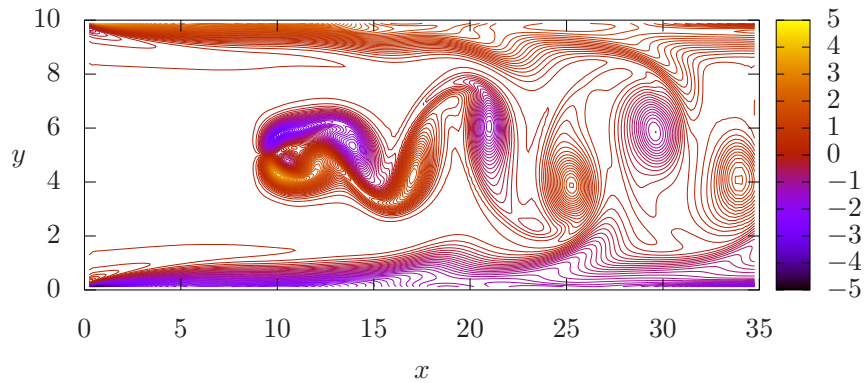


Figura 3.10: Campo de velocidad para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .

Asimismo se muestran isolíneas de vorticidad, ésta es producida debido a la presencia de efectos viscosos importantes. El efecto que produce la vorticidad es un mezclado del fluido cuando es transportada por el flujo. En la figura 3.11 se observan dos casos, en (a) con un  $Re=10$  y  $Ha=30$  se forma una cauda para un flujo estacionario y en (b) para los parámetros  $Re=100$  y  $Ha=60$  se tiene un flujo periódico con desprendimiento de vórtices, además de observa como la vorticidad producida por el obstáculo interactúa con la vorticidad producida debido a las paredes.



(a) Vorticidad para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



(b) Vorticidad para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.11: Isolíneas de la componente  $\omega_z$  de la vorticidad cuando se tiene un obstáculo magnético.

Para tener un mejor entendimiento del efecto del campo magnético producido por la presencia del imán así como la variación de los parámetros  $Re$  y  $Ha$ ,



se muestran perfiles de velocidad obtenidos para los parámetros indicados con anterioridad, en la figura 3.12 se comparan los perfiles obtenidos para la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para distintas posiciones en la coordenada  $x$ , se observa en todos los casos que justamente cuando el perfil se toma en la posición  $x = 10$  que corresponde a donde se localiza el centro del imán, se observa un mayor decaimiento en la velocidad debido a que en esa región la fuerza de Lorentz es más intensa, en (a) con un  $Re=100$  y  $Ha=30$ , el flujo alcanza una velocidad mayor en la región lateral al imán debido a que los efectos cortantes presentes al rededor del obstáculo magnético no son notables cuando los efectos convectivos son pequeños, en (c) con un  $Re=100$  y  $Ha=30$ , se observa una amplitud menor de la velocidad como consecuencia de que ahora los efectos convectivos son muy intensos, además por el desfaseamiento de los perfiles se observa que en este régimen se tiene desprendimiento de vórtices, en (e) con un  $Re=100$  y  $Ha=60$ , se observa que se tiene perfiles de velocidad con una amplitud mayor que el caso anterior y desprendimiento de vórtices, lo cual es un indicativo de un mejor mezclado. De igual forma se analiza la componente transversal de la velocidad, cuya intensidad es menor comparada con la componente axial, se consigue un mayor incremento de esta componente cuando el número de Hartmann es mayor, en la componente  $v$  se refleja el efecto de un flujo cortante producido por la formación de un dipolo en la región donde se localiza el obstáculo magnético, además en (b), se observa la estabilidad del flujo a diferencia de (d) y (f) donde se observa inestabilidad del flujo justo después de atravesar la zona donde se localiza el imán.

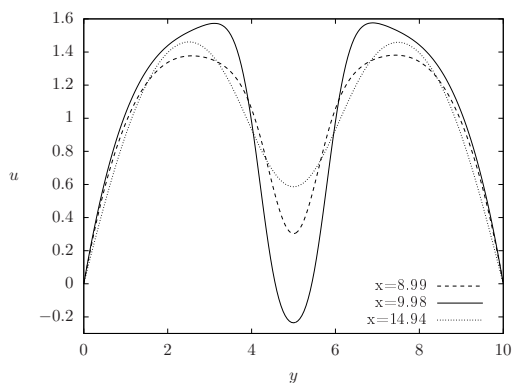
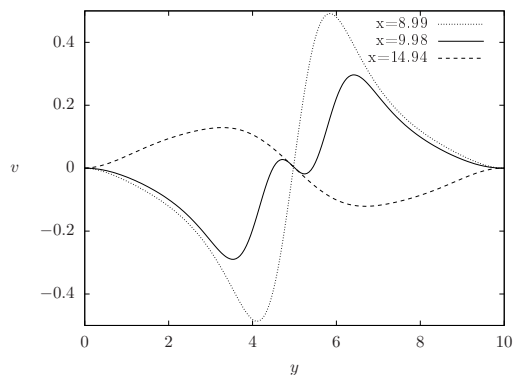
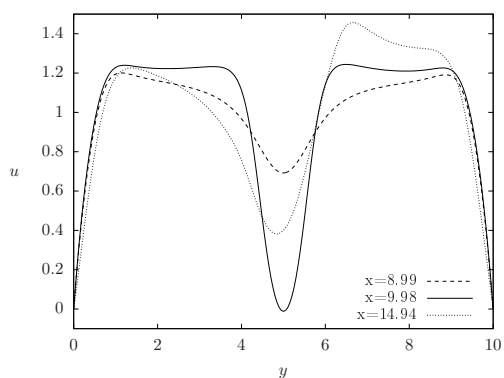
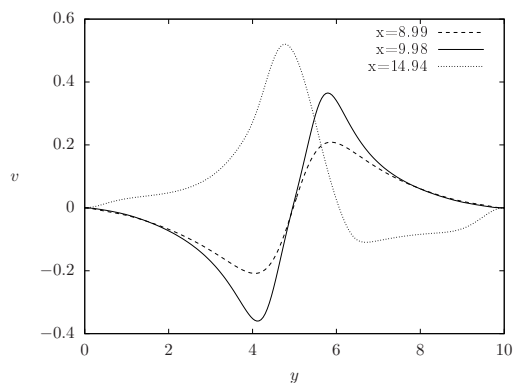
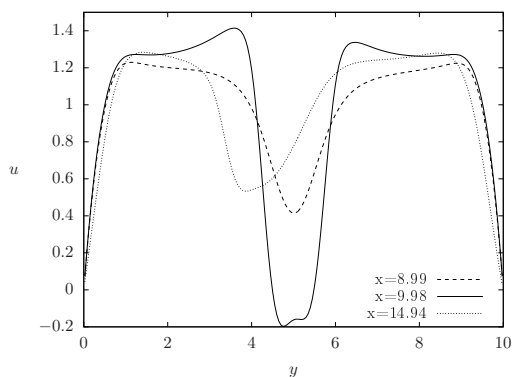
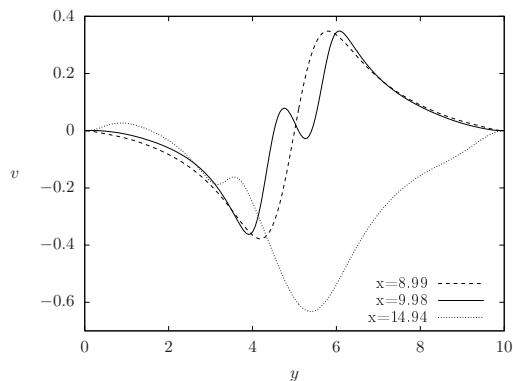
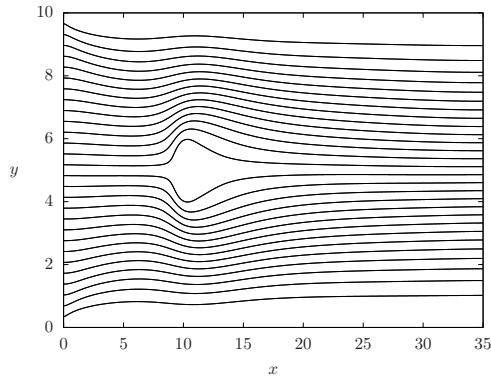
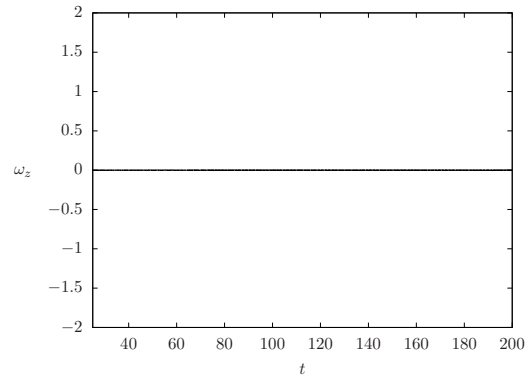
(a) Componente  $u$  de la velocidad para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .(b) Componente  $v$  de la velocidad para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .(c) Componente  $u$  de la velocidad para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .(d) Componente  $v$  de la velocidad para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .(e) Componente  $u$  de la velocidad para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .(f) Componente  $v$  de la velocidad para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.12: Perfiles de las componentes  $u$  y  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para distintos números de  $Re$  y  $Ha$ .

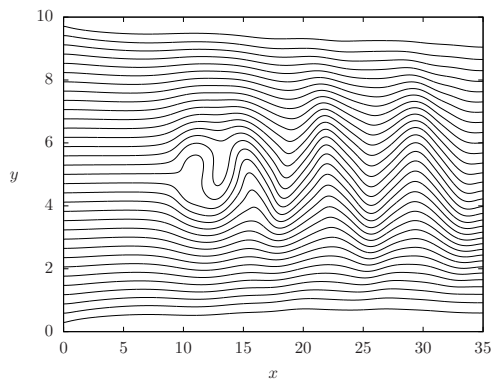
Dentro del análisis, también se muestran líneas de corriente instantáneas para apreciar completamente lo que ocurre en la región de estudio, por otra parte se muestra la componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función del tiempo tomada tres unidades aguas abajo del centro del obstáculo magnético, con la finalidad de conocer cómo se comporta el flujo conforme transcurre el tiempo, en la figura 3.13 en (a) se puede notar como las líneas de corriente se separan justamente donde se localiza el obstáculo no se observan recirculaciones, una vez pasando el obstáculo se cierran nuevamente, por lo que en (b) se tiene ausencia de vorticidad, es decir, el flujo es estacionario, en (c) se observa una inestabilidad en las líneas de corriente instantáneas, por lo cual en (d) se observa un desprendimiento periódico de vórtices, la amplitud de la vorticidad alcanza 1.5 unidades, en (e) se observa un flujo con desprendimiento de vórtices y en (f) se corrobora que el flujo se vuelve inestable a un tiempo menor comparado con el caso anterior, además, la amplitud de la vorticidad debido a la perturbación es mayor al alcanzar 1.8 unidades.



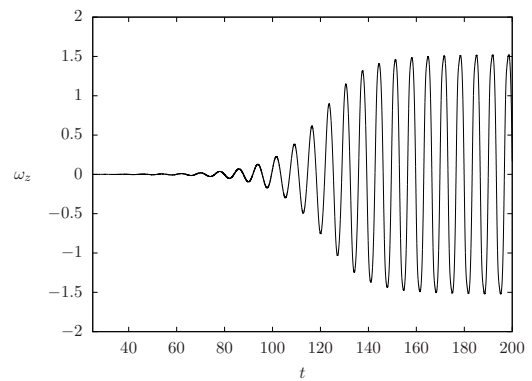
(a) Líneas de corriente para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



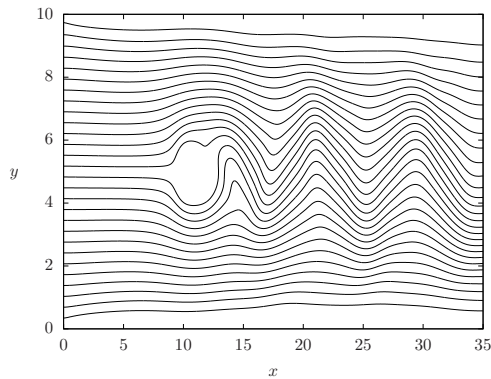
(b) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



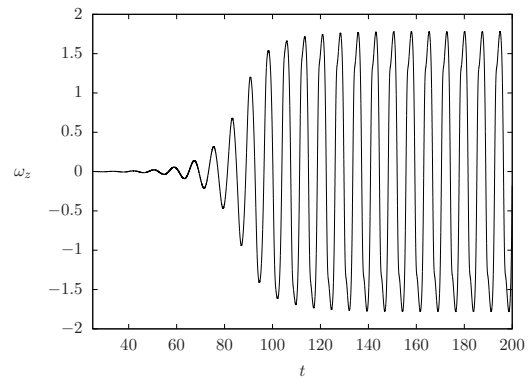
(c) Líneas de corriente para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(d) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(e) Líneas de corriente para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .



(f) Componente  $\omega_z$  de la vorticidad para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.13: Líneas de corriente instantáneas y componente  $\omega_z$  de la vorticidad como una función del tiempo para distintos números de  $Re$  y  $Ha$ .

### 3.1.2. Modelo Q2D (Formulación B)

Con la finalidad de realizar un estudio en el cual se tome en cuenta no solo el efecto de fricción de las paredes laterales entre las cuales fluye el fluido sino también considerar el efecto de la fricción entre el flujo y las paredes superior e inferior que confinan al flujo, resulta conveniente realizar una aproximación cuasi-bidimensional, para ello se estudian los mismos casos analizados en la aproximación bidimensional. En particular, se realiza el estudio para el caso donde se tiene un espesor de capa de fluido de 0.4 unidades en el eje  $z$ .

#### Simulación numérica Q2D

Anticipándose a los resultados, es de esperar que al contar con la presencia de las paredes que confinan al flujo cercanas a la región de estudio, se vea reflejada la fricción entre el flujo y las paredes. En la región de la capa límite debida a las paredes se ocasiona vorticidad, además de la producida debido a la presencia del obstáculo magnético. En la figura 3.14, se muestra cómo el flujo sólo rodea al obstáculo magnético, sin llegar a desestabilizarse, por lo que se puede enfatizar que los parámetros que modifican el régimen del flujo son distintos cuando se considera el efecto de la fricción de todas las paredes que confinan al flujo a diferencia del modelo 2D.

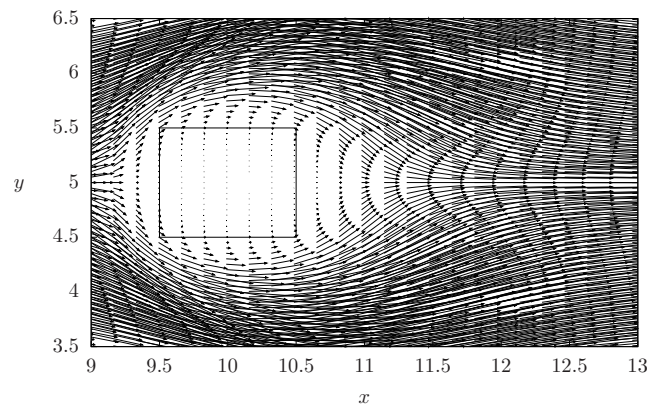
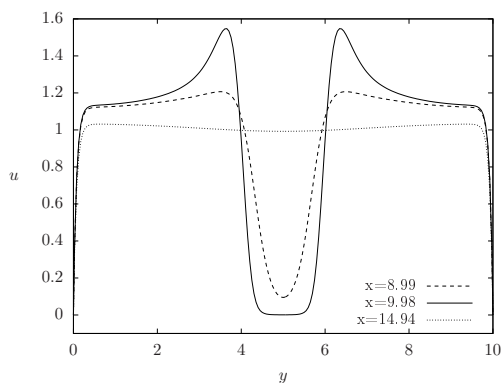


Figura 3.14: Campo de velocidad para un  $Re=100$  y  $Ha=30$ .

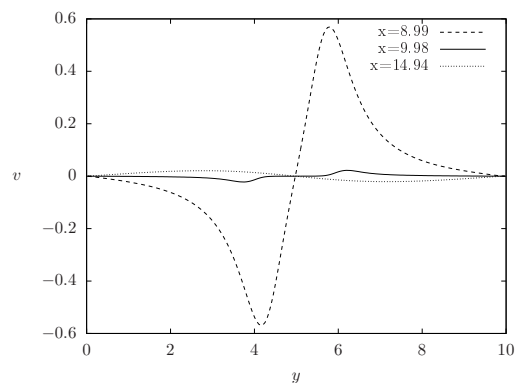
A continuación se realiza un análisis de los perfiles obtenidos de la componente  $u$  y  $v$  de velocidad. En la figura 3.15 se muestran perfiles de la componente

---

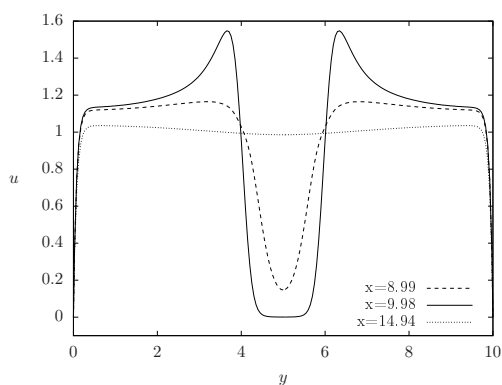
$u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  en distintas posiciones de la coordenada  $x$  para diferentes valores de  $Re$  y  $Ha$ , como es de esperarse, en todos los casos se observa un mayor decaimiento de la componente  $u$  de la velocidad justamente donde se tiene el centro del imán, se puede destacar que para los parámetros mostrados, en ningún caso se aprecia desprendimiento de vórtices, en (c) se observa una amplitud menor en los perfiles de velocidad debido a que los efectos convectivos son más intensos, la principal variación es en la amplitud de los perfiles de velocidad la cual es notoriamente más grande en (e). También se muestra la componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para distintas posiciones de la coordenada  $x$ , donde también alcanza una mayor amplitud en (f), como en el caso bidimensional.



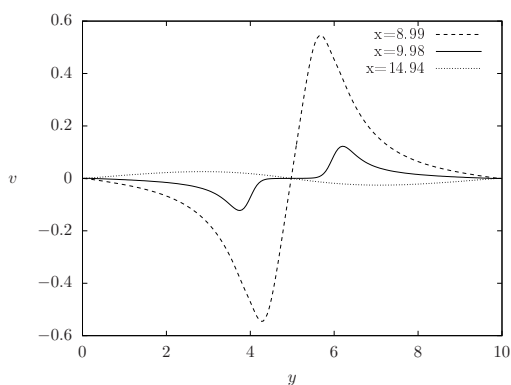
(a) Componente  $u$  de la velocidad para un  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



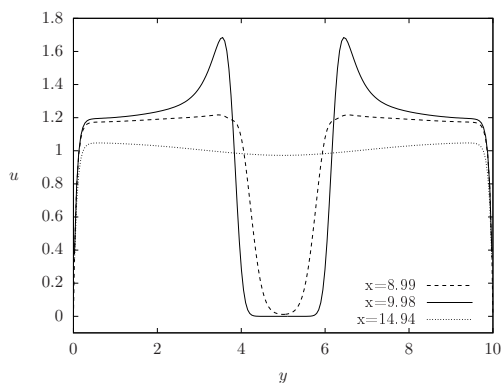
(b) Componente  $v$  de la velocidad para un  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



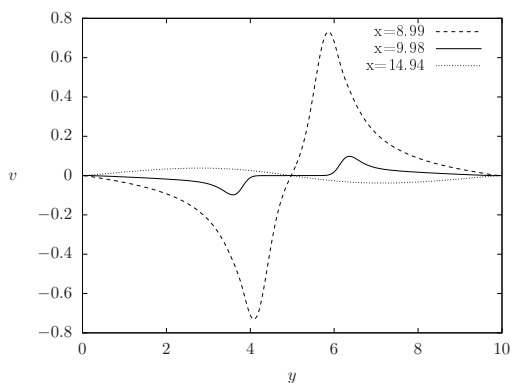
(c) Componente  $u$  de la velocidad para un  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(d) Componente  $v$  de la velocidad para un  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(e) Componente  $u$  de la velocidad para un  $Re=100$  y  $Ha=60$ .



(f) Componente  $v$  de la velocidad para un  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.15: Componentes  $u$  y  $v$  de la velocidad para diferentes valores de  $Re$  y  $Ha$ .

### 3.1.3. Modelo 3D (Formulación $\phi$ )

En esta sección se realiza un estudio preliminar de la aproximación tridimensional del flujo de metal líquido a través de un campo magnético localizado, es el caso ideal de estudio, sin embargo es importante destacar que para su implementación se requiere más trabajo de cómputo comparado con las aproximaciones previamente descritas lo que no hace muy accesible su implementación.

#### Validación de la hidrodinámica del flujo 3D

Con la finalidad de validar la implementación de la hidrodinámica del flujo, se compara una solución analítica existente con la solución numérica implementada. Para determinar la solución analítica de la hidrodinámica del flujo bidimensional se considera que se tiene un fluido Newtoniano e incompresible en una geometría rectangular con un flujo laminar y estacionario. Se asume que el flujo a la salida de un canal rectangular se encuentra completamente desarrollado, de manera que el perfil de la velocidad del flujo está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} = \text{constante} \quad (3.4)$$

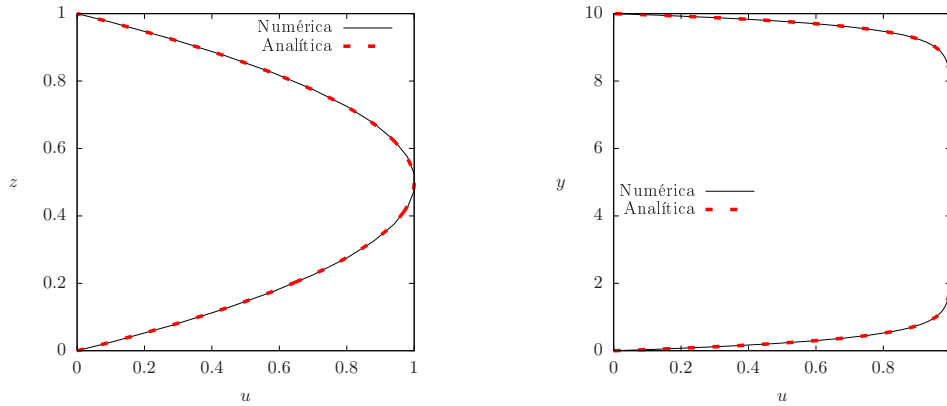
Donde  $u(y, z)$ ,  $\frac{dP}{dx}$  y  $\mu$  son la velocidad del flujo, gradiente de presión y viscosidad del fluido a la salida de canal. Imponiendo condiciones de no deslizamiento en las paredes del canal [Lee *et al.* (2006)] obtiene la siguiente solución.

$$u(y, z) = \frac{4h^2}{\mu\pi^3} \left( -\frac{dP}{dx} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \left\{ 1 - \frac{\cosh [(2n+1)\pi y/h]}{\cosh [(2n+1)\pi\omega_0/2h]} \right\} \frac{\cos [(2n+1)\pi z/h]}{(2n+1)^3} \quad (3.5)$$

Para llevar a cabo la validación de la implementación numérica se compara a la solución analítica bidimensional del perfil de velocidad obtenido a la salida de un canal rectangular con la solución tridimensional del perfil de velocidad a la salida del canal, donde el perfil es tomado justo en el centro del ducto porque es donde se tiene flujo completamente desarrollado, además, de no tomar el perfil en el centro del ducto, éste se vería influenciado por la condición de no deslizamiento impuesta en las paredes que confinan al flujo. En



la figura 3.16 en (a) se muestra el perfil de la velocidad como una función de la coordenada  $z$ , y en (b) se muestra el perfil de la velocidad como una función de la coordenada  $y$ , la solución numérica se presenta con línea continua y la solución analítica con línea discontinua, al superponer las soluciones analítica y numérica normalizadas se observa que en los dos perfiles obtenidos ambas soluciones coinciden, lo cual nos indica que la solución numérica se ha implementado adecuadamente.



(a) Perfil de velocidad como una función de la coordenada  $z$ .

(b) Perfil de de velocidad como una función de la coordenada  $y$ .

Figura 3.16: Perfil de flujo completamente desarrollado en un ducto rectangular obtenido analítica (2D) y numéricamente (3D).

### Validación del campo magnético 3D

La implementación del campo magnético tridimensional se valida al hacer una comparación cualitativa con resultados obtenidos por Furlani (2001), en la figura 3.17 se muestra la componente  $B_z$  del campo magnético producido por un imán de dimensiones  $10 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$  en las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente, se observa el campo magnético producido por un imán que se coloca a una distancia de  $5 \text{ mm}$ , haciendo una comparación cualitativa de la figura (a) y (b) se observa que son muy similares, lo cual nos indica que se ha implementado apropiadamente.

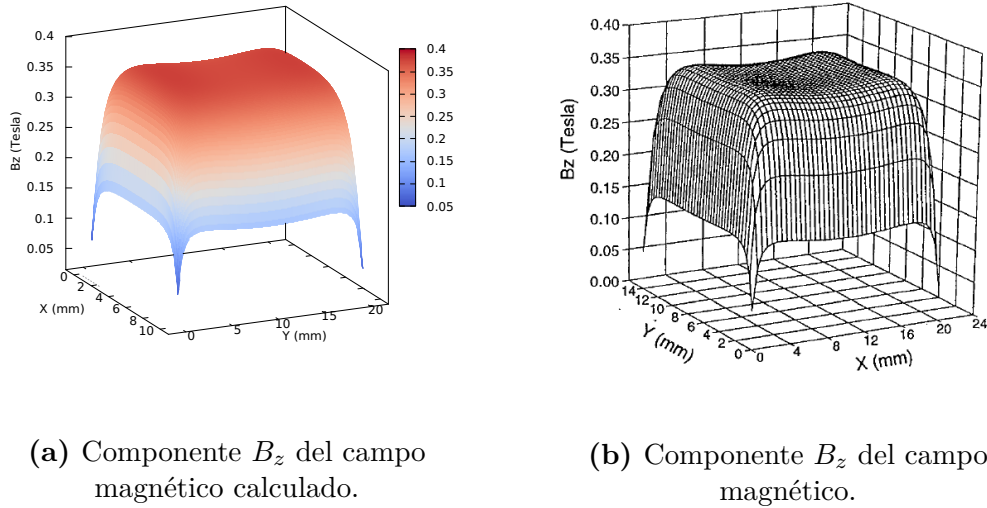


Figura 3.17: Campo magnético tridimensional producido por un imán a una distancia de 5 mm (a) calculado numéricamente, (b) reportado por Furlani.

### Simulación numérica 3D

Para tener un entendimiento más realista del problema, se realiza un estudio completamente tridimensional de la dinámica del flujo de metal líquido en presencia de un campo magnético localizado. El ducto a través del cual fluye el fluido conserva la geometría rectangular con dimensiones  $35 \times 10 \times 0.4$  unidades en los ejes  $x$ - $y$ - $z$  respectivamente. En la figura 3.18 se muestra un esquema tridimensional para la dinámica del flujo, en la entrada del ducto se impone un flujo de fluido constante. Las paredes son eléctricamente aislantes y en ellas la condición de no deslizamiento. En la salida del ducto se tiene un flujo completamente desarrollado. Para este caso se considera que el efecto del campo magnético tridimensional producido por un imán permanente descrito previamente, el cual es colocado por debajo de la placa sobre la cual fluye el fluido.

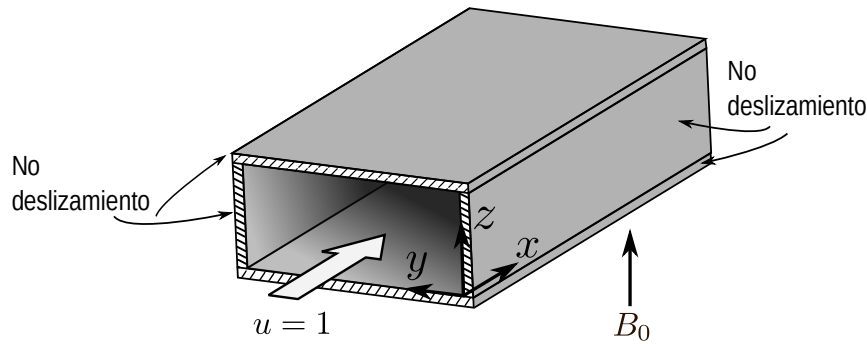


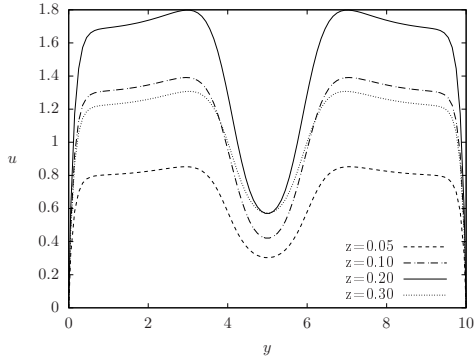
Figura 3.18: Esquema tridimensional para la dinámica del flujo.

Se muestran diferentes perfiles de velocidad obtenidos para los casos estudiados previamente bajo la aproximación quasi bidimensional, considerando una espesor de la capa de fluido de  $z=0.4$  unidades. En la figura 3.19 se muestra el perfil de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para diferentes valores de  $z$ , en la posición de  $x = 10$  que es donde se encuentra localizado el centro del imán. En todos los casos vemos como el decaimiento del campo magnético se ve reflejado en los perfiles de velocidad, siendo más intenso el efecto del campo en la parte inferior del ducto, y más débil en la parte superior, sin embargo debido a la condición de no deslizamiento en las paredes, donde se observa mayormente el efecto del obstáculo magnético en el centro del ducto, el centro corresponde a la posición  $z = 0.25$  donde se alcanza una velocidad mayor comparado con los perfiles obtenidos a una  $z$  distinta, lo anterior debido a que es donde menos influencia refleja las condiciones de no deslizamiento impuestas en las paredes del ducto. Se observa que a una distancia en la coordenada  $z$  de 0.1 unidades y 0.3 unidades, es decir, a una separación de 0.1 unidad de la pared del ducto, los perfiles muestran diferencias significativas, de manera que en  $z = 0.1$  se puede apreciar que el efecto del imán es más intenso lo que significa una disminución mayor de la velocidad en la región del obstáculo y por lo tanto una amplitud mayor en la velocidad para que se cumpla la conservación de masa y en  $z = 0.3$  el efecto del campo es menor.

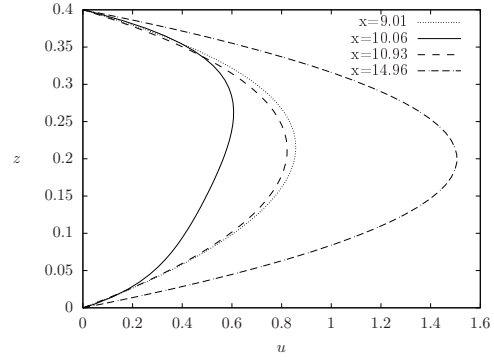
En la figura 3.19 se muestra también a la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$ , los perfiles se han tomado en distintas posi-

ciones de  $x$ , justo antes del obstáculo, sobre el obstáculo y un poco después de él, exactamente a la mitad de la coordenada  $y$  donde se encuentra localizado el centro del imán. Se observa que justamente donde está el obstáculo ocurre un desfaseamiento del perfil de velocidad, inclinándolo hacia donde decrece el capo magnético, además, en todos los casos la amplitud de la componente  $u$  se ve disminuida justamente donde se localiza el obstáculo magnético lo cual significa un retardo en el flujo.

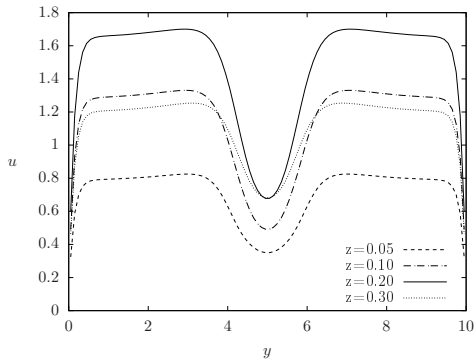
En la figura 3.20 se tiene a la componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$ , y los perfiles son tomados en distintas posiciones de  $x$ , justo a la mitad de la coordenada  $z$ , se observa como el mayor incremento de la velocidad se tiene precisamente en (e) seguido de (a) y (c) debido a que los efectos convectivos en este casos son mucho mayores y los esfuerzos cortantes no ejercen mayor influencia, para un mismo número de  $Re$  lo que ocasiona un incremento en la componente  $v$  es el incremento del número de  $Ha$ . También se muestra la componente  $w$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  en  $y = 10$ , para distintas posiciones de  $x$ , observamos el efecto de las condiciones de no deslizamiento en las paredes, y también como el perfil de la velocidad tiene una mayor amplitud en los bordes del imán, además de que los perfiles son desfasados hacia donde decrece la intensidad del campo magnético. También se observa que la magnitud de la velocidad de la componente  $w$  es muy pequeña comparada con la velocidad que se alcanza con la componente  $u$  de la velocidad.



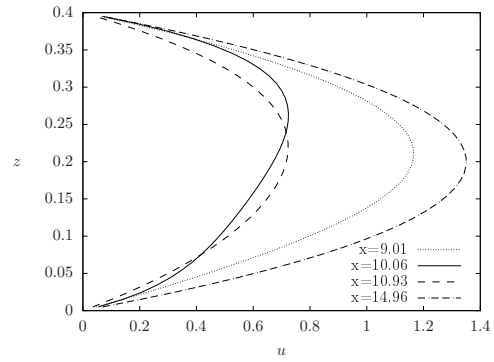
(a) Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



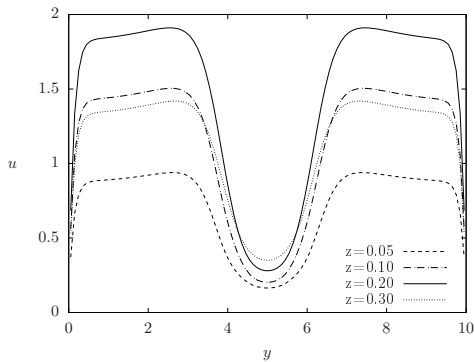
(b) Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



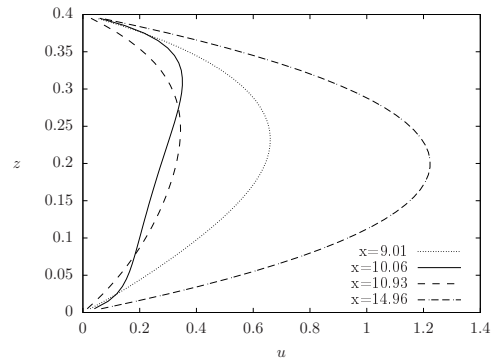
(c) Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(d) Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .

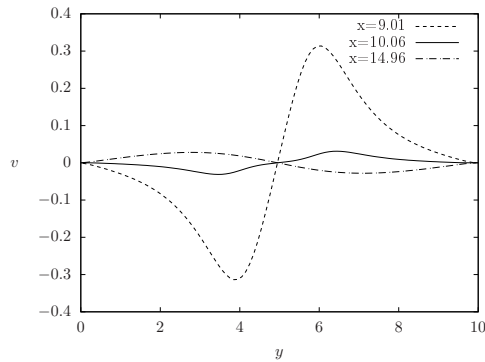


(e) Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

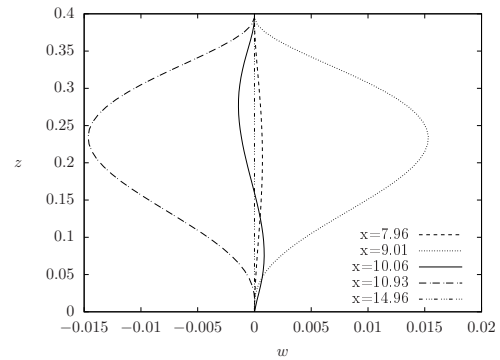


(f) Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

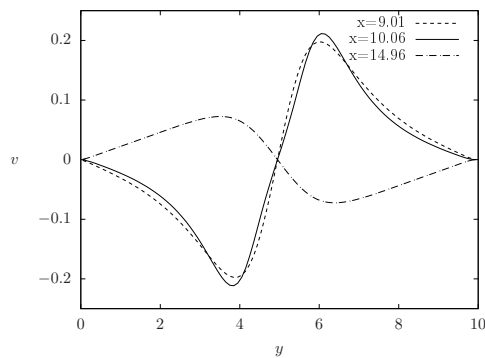
Figura 3.19: Perfiles de la componente  $u$  de la velocidad para distintos números de  $Re$  y  $Ha$ .



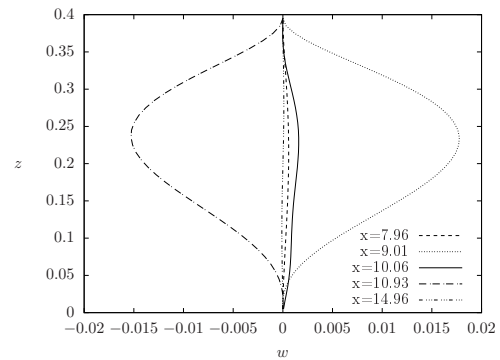
(a) Perfiles de la componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



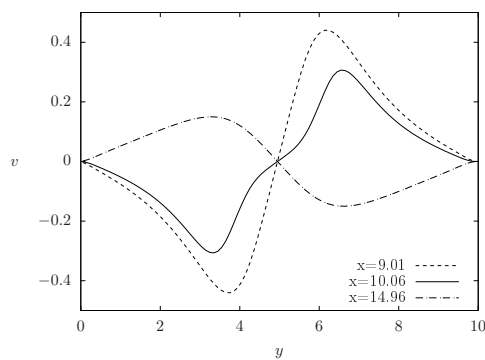
(b) Perfiles de la componente  $w$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



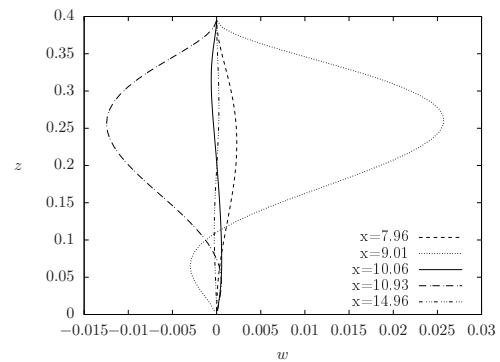
(c) Perfiles de la componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(d) Perfiles de la componente  $w$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(e) Perfiles de la componente  $v$  de la velocidad como una función de la coordenada  $y$  para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .



(f) Perfiles de la componente  $w$  de la velocidad como una función de la coordenada  $z$  para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.20: Perfiles de las componentes  $v$  y  $w$  de la velocidad para distintos números de  $Re$  y  $Ha$ .

### 3.1.4. Discusión de resultados

En esta sección se presentaron dos aproximaciones equivalentes para la implementación del campo magnético, para los modelos 2D y Q2D se utilizó la bormulación B y para el modelo 3D por conveniencia se empleó la formulación  $\phi$ . Se presentaron tres casos en los cuales se variaron los parámetros Re y Ha, con la finalidad de identificar la influencia que ocasiona al flujo su variación. Los casos estudiados fueron Re=100 y Ha=30, si disminuye el número de Reynolds se tiene el caso Re=10 y Ha=30, o bien, si se incrementa el número de Hartmann se tiene el caso Re=100 y Ha=60.

Para el caso en el que se tiene un Re=10 y Ha=30, lo cual se traduce a un N=90, claramente la fuerza magnética es grande comparada con la fuerza inercial, con este número de Re los efectos convectivos no son significativos y es por ello que los esfuerzos cortantes en la vecindad del obstáculo magnético no ejercen mayor influencia para alcanzar a desestabilizar al flujo. Bajo estas condiciones se tiene un flujo estable en los casos 2D, Q2D y 3D, asimismo se aprecia una velocidad máxima donde el campo magnético es más intenso, al realizar una comparación entre los perfiles obtenidos con los 3 modelos mencionados observamos que la amplitud máxima de la componente  $u$  de la velocidad como función de la coordenada  $y$  es muy similar en los tres casos.

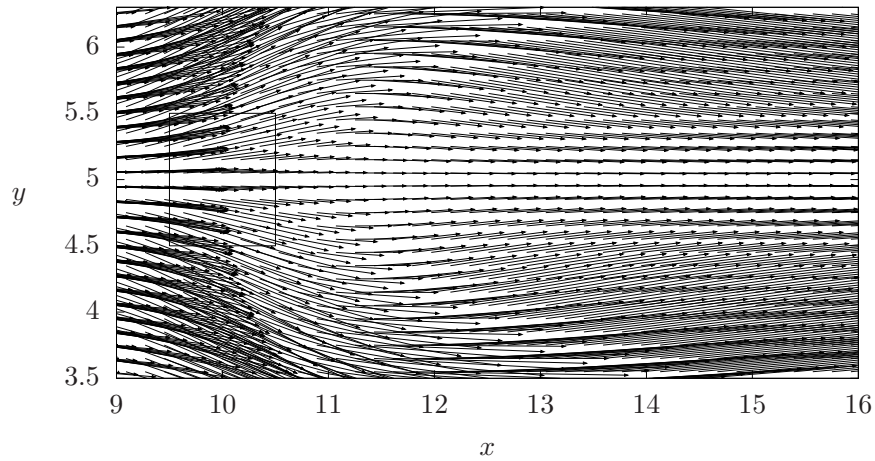
Para el caso con Re=100 y Ha=30, se tiene un N=9. Se observa que a pesar de incrementar el número de Reynolds la velocidad máxima alcanzada en la componente  $u$  no aumenta, incrementar el Re significa un aumento en las fuerzas convectivas e inerciales, y con ello los vórtices producidos y la fuerza magnética presente son arrastradas en dirección del flujo, lo que podría propiciar una elongación de vórtices presentes pero sobre todo que el efecto del obstáculo magnético no sea tan marcado para tener una mayor velocidad para que se cumpla la conservación de la masa. Es importante destacar que una diferencia muy notable entre los modelos 2D, Q2D y 3D es que para estas condiciones en el modelos 2D hay desprendimiento de vórtices, lo cual no ocurre en los modelos Q2D y 3D debido al efecto de la fricción producida por la presencia de las paredes que confinan al flujo.

Para el caso donde se cuenat con un Re=100 y Ha=60, se obtiene un N=36, el incremento del número de Ha se traduce en un aumento de la intensidad de la fuerza magnética. Como se menciona en le caso anterior, en el modelo 2D se obtiene desprendimiento de vórtices a diferencia del modelo Q2D y 3D

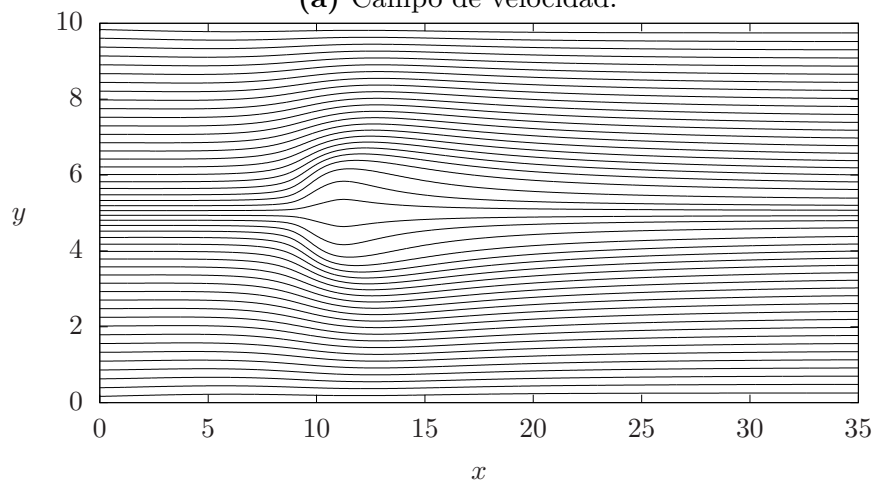
donde se tiene un flujo estable. Sin embargo, en los modelos Q2D y 3D se observa un incremento en la velocidad máxima alcanzada por la componente  $u$  de la velocidad debido a que la oposición de la fuerza de Lorentz al flujo es mayor y, es necesario tener un incremento en la velocidad para que se cumpla la conservación de la masa.

Para tener una idea del efecto de la fricción en las paredes del ducto, se muestran campos de velocidad con sus respectivas líneas de corriente en el plano  $x-y$  a diferentes alturas en  $z$  para un  $Re=1000$  y  $Ha=100$ , en la figura 3.21 se muestra el perfil de velocidad con sus respectivas líneas de corriente obtenidos a una altura  $z = 0.1$  cuando el ducto tiene una altura total en  $z$  de 0.4, se observa que cuando el flujo pasa el obstáculo magnético básicamente lo hace fluyendo por sus alrededores. En cambio si se modifica un poco la geometría, modificando únicamente la altura del ducto en  $z$ , para un ducto con una altura total en  $z$  de 2 unidades en la figura 3.22 se muestra el campo de velocidad y sus líneas de corriente en el plano  $x-y$  a una altura de  $z = 0.1$ , en este caso se observa la presencia de cuatro vórtices donde la intensidad del campo magnético es mayor, y se observa que conforme incrementa  $z$  el campo de velocidad cambia considerablemente, ahora si se visualiza el campo de velocidad a una altura distinta, en la figura 3.23 se observa que a una altura de  $z = 0.2$  solo se cuenta con dos vórtices, cuando se incrementa aún más la altura del plano visualizado, en la figura 3.24 se muestra que a una altura  $z = 0.4$  también se observan dos vórtices, pero a diferencia de la figura anterior ahora se encuentran muy elongados. Debido al decaimiento de la intensidad del campo magnético su efecto en la dinámica del flujo decae poco a poco.



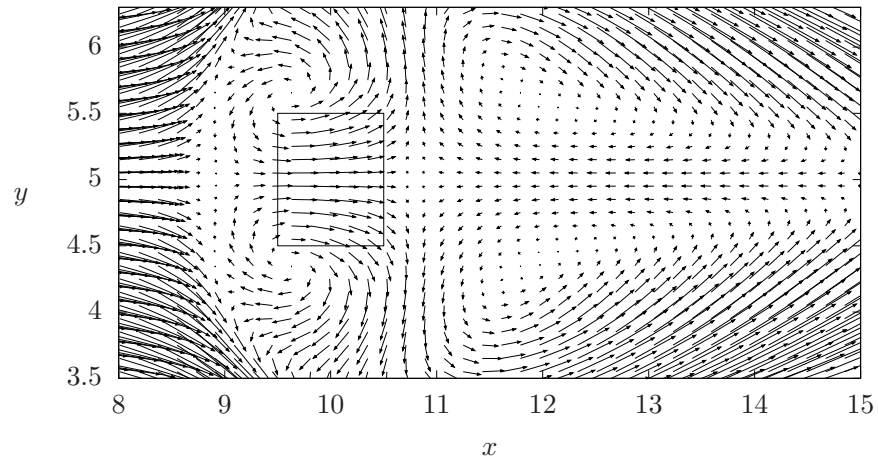


(a) Campo de velocidad.

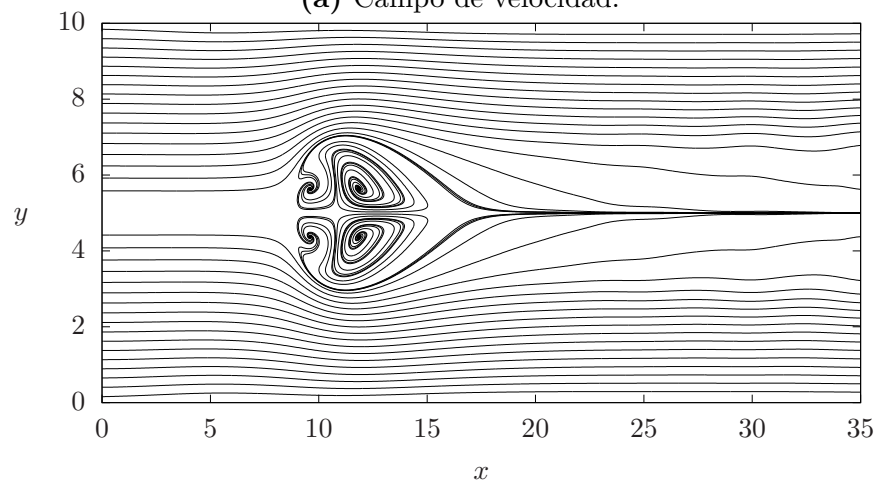


(b) Líneas de corriente .

Figura 3.21: Campo de velocidad y líneas de corriente para  $Re=1000$  y  $Ha=100$  en  $z = 0.1$  cuando se tiene un obstáculo magnético.

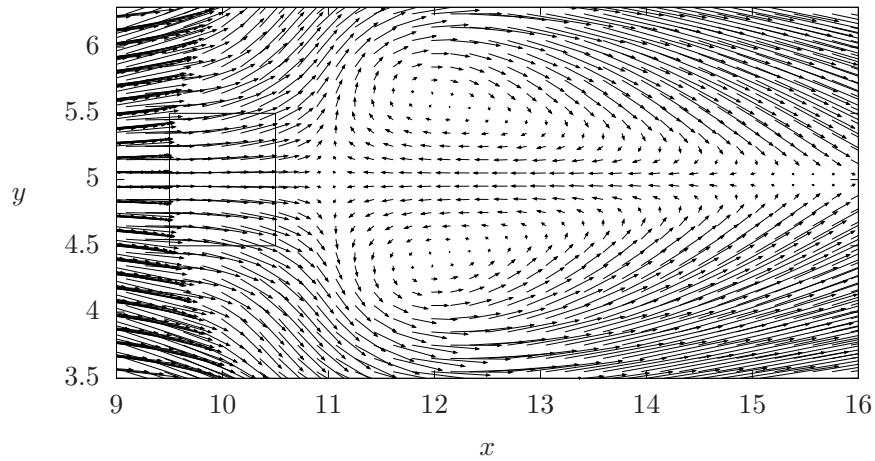


(a) Campo de velocidad.

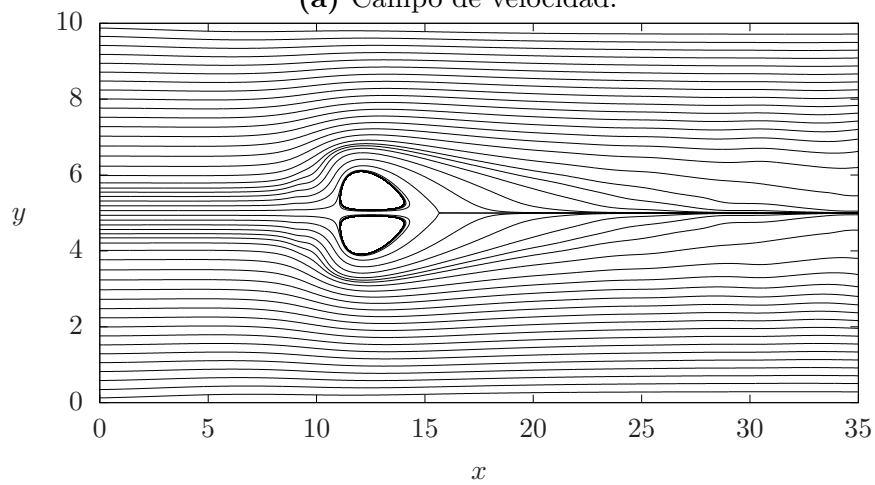


(b) Líneas de corriente.

Figura 3.22: Campo de velocidad y líneas de corriente para  $Re=1000$  y  $Ha=100$  en  $z = 0.1$  cuando se tiene un obstáculo magnético.

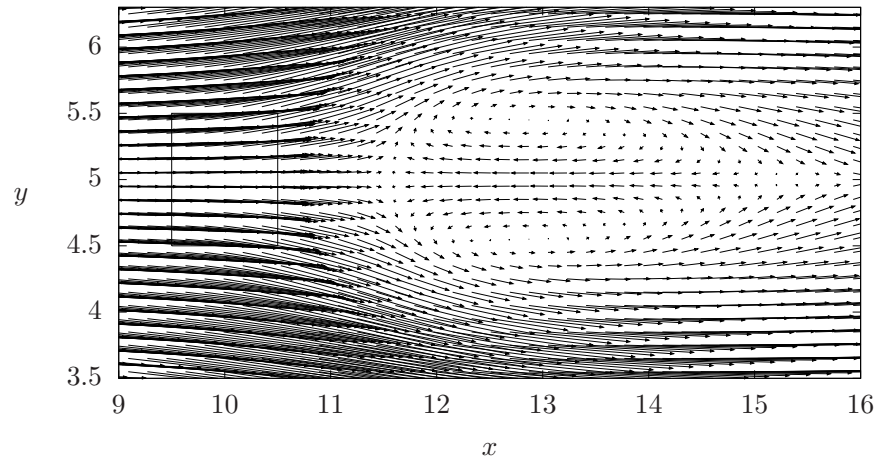


(a) Campo de velocidad.

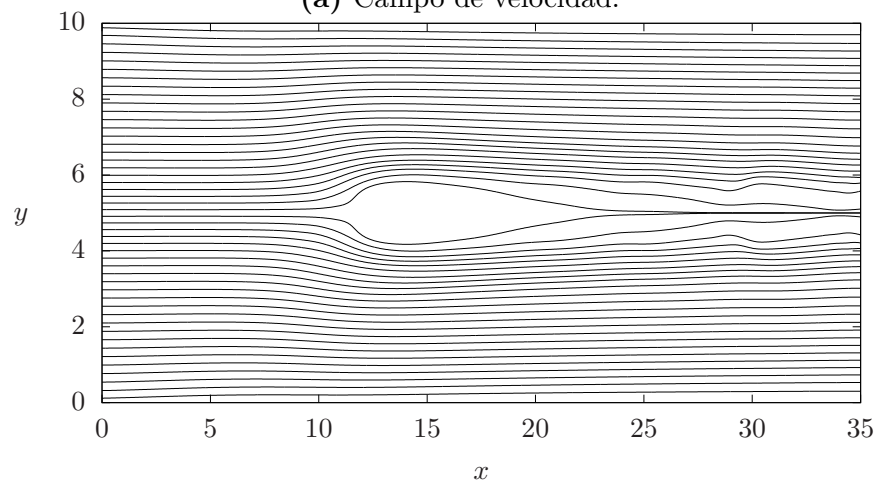


(b) Líneas de corriente.

Figura 3.23: Campo de velocidad y líneas de corriente para  $Re=1000$  y  $Ha=100$  en  $z = 0.2$  cuando se tiene un obstáculo magnético..



(a) Campo de velocidad.



(b) Líneas de corriente.

Figura 3.24: Campo de velocidad y líneas de corriente para  $Re=1000$  y  $Ha=100$  en  $z = 0.4$  cuando se tiene un obstáculo magnético..

## 3.2. Transferencia de calor

El estudio de la transferencia de calor en flujos MHD significa esencialmente resolver la ecuación de conservación de energía, pero con una característica

particular que es la presencia de fuentes de generación de calor dentro del fluido debidas a la disipación Óhmica y viscosa presentes. Para realizar este estudio se consideran los casos donde se tiene un flujo de calor constante como fuente de calor y, cuando se tiene paredes con una temperatura uniforme, para ello se hace uso de las condiciones de primer y segundo tipo.

### 3.2.1. Comparación de soluciones numérica y analítica

Con la finalidad de comprobar la adecuada resolución numérica del problema de transferencia de calor se hace una comparación con una solución analítica bidimensional obtenida por [Carslaw and Jeager (1959)] para la transferencia de calor en una pared de una placa rectangular. De manera similar a Cuevas (2012) se hace unos cambios de variable a la solución analítica original para obtener un modelo que permita obtener la transferencia de calor en un flujo viscoso en un ducto rectangular con un flujo de calor uniforme impuesto en una de sus paredes. Para este problema en particular, se tiene un flujo tapón, es decir  $u = 1$  y la componentes  $v = w = 0$ , de esta manera el problema se vuelve esencialmente bidimensional. La solución dada por Carslaw and Jeager desprecia la transferencia de calor a lo largo del eje  $x$  y únicamente la considera en  $z$ , en su solución se considera el eje de coordenadas justo en el centro del ducto, de esta manera el flujo de calor es aplicado en  $z = 1$  corresponde a una de las superficies del ducto. Una una importante consideración realizada es que la pared de la superficie calentada es muy delgada por lo que la temperatura de la pared será la temperatura del fluido en  $z = 1$ . En términos de las variables adimensionales se tiene:

$$T(x, z) = 2\sqrt{\frac{x}{Pe}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{((2n+1)-z)^2}{4x/Pe} \right] - \frac{((2n+1)-z)}{2\sqrt{x/Pe}} \operatorname{erfc} \left[ \frac{((2n+1)-z)}{2\sqrt{x/Pe}} \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{((2n+1)+z)^2}{4x/Pe} \right] - \frac{((2n+1)+z)}{2\sqrt{x/Pe}} \operatorname{erfc} \left[ \frac{((2n+1)+z)}{2\sqrt{x/Pe}} \right] \right\}. \quad (3.6)$$

El flujo de calor incide sobre la superficie en  $z = 1$ , por lo que al evaluar los primeros dos términos de la ecuación previa se obtiene:

$$T(x, 1) = 2 \left\{ \sqrt{\frac{x}{\pi Pe}} \left[ 1 + 2 \exp\left(-\frac{1}{x/Pe}\right) + \exp\left(-\frac{4}{x/Pe}\right) + \dots \right] - \left[ 2\text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{x/Pe}}\right) + 2\text{erfc}\left(\frac{2}{\sqrt{x/Pe}}\right) + \dots \right] \right\}. \quad (3.7)$$

En la figura 3.25 se muestra un esquema tridimensional para el problema de la transferencia de calor, como puede verse en la figura, se tiene un flujo de calor constante en la superficie en el límite del eje  $z$ , mientras que el resto de las paredes se consideran adiabáticas. Las dimensiones del ducto son  $35 \times 2 \times 2$ , en los ejes  $x$ - $y$ - $z$  respectivamente.

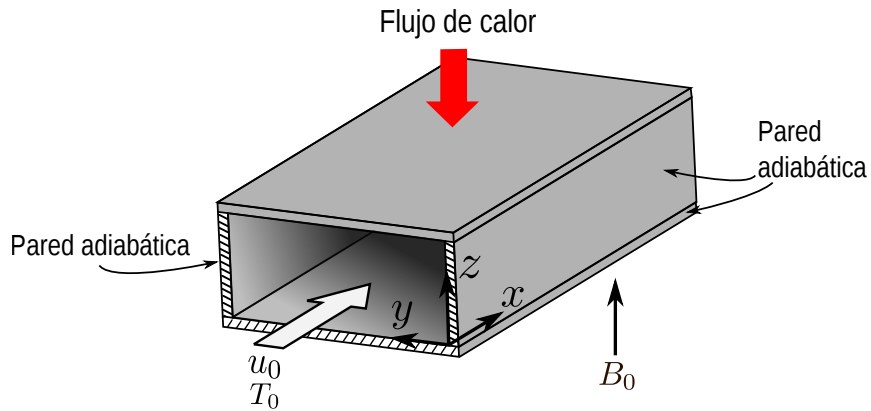


Figura 3.25: Esquema tridimensional para la transferencia de calor.

Bajo las condiciones dadas, para el caso numérico la ecuación de conservación de energía en forma adimensional se reduce a la siguiente ecuación que es resuelta con las condiciones de frontera mencionadas previamente.

$$Pe \left( u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.8)$$

Al realizar la implementación numérica, se procede con la comparación de los perfiles de temperatura obtenidos justo en la pared de un ducto rectangular para distintos números de Péclet, en la figura 3.26 se compara la temperatura obtenida en la pared como una función de la coordenada  $x$ , se

muestra a la solución analítica con línea continua y a la solución numérica con línea discontinua, ambas soluciones son comparadas para los casos con  $Pe=250$ ,  $Pe=500$  y  $Pe=2500$ , en los tres casos los perfiles empatan, lo cual indica que la solución numérica para la transferencia de calor se implementó apropiadamente.

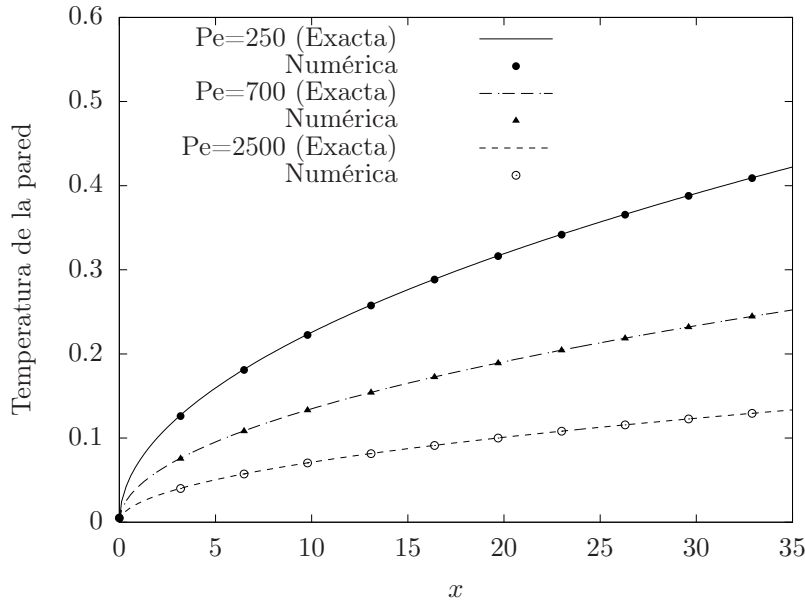


Figura 3.26: Perfiles de temperatura de un flujo viscoso calculados numéricamente y analíticamente sobre la pared calentada.

### 3.2.2. Efectos en la transferencia de calor 2D

Por la practicidad del modelo bidimensional, es conveniente comenzar con la resolución del problema de transferencia de calor en 2D. Se presentan los casos de estudio en los cuales se añade la transferencia de calor al problema magnetohidrodinámico descrito previamente. Los casos estudiados varían de acuerdo con la fuente de calor impuesta. Se consideran los casos donde se impone un flujo de calor constante a lo largo de una superficie del ducto y donde se tiene una temperatura constante en las paredes.

Caso 1 de transferencia de calor: Se estudia el caso particular en el que es

se impone una temperatura uniforme  $T = 0$  en la entrada del canal, un flujo de calor incide en la pared superior de una pared, dicho flujo de calor es arrastrado por el fluido a la salida del canal, se considera que la pared restante es térmicamente aislante, el dominio de estudio es de  $35 \times 10$  unidades en los ejes  $x$ - $y$  respectivamente (véase figura 3.27).

Caso 2 de transferencia de calor: Para este estudio se impone una temperatura uniforme  $T = 0$  en la entrada del canal, en las paredes laterales a través de las cuales fluye el fluido se impone una temperatura constante  $T = 1$ , similar a como propone Román (2012) y en la salida del canal se usan condiciones de frontera de gradiente cero como lo sugiere Rashidi *et al.* (2015), el dominio de estudio es de  $50 \times 10$  unidades en los ejes  $x$ - $y$  respectivamente (véase figura 3.28).

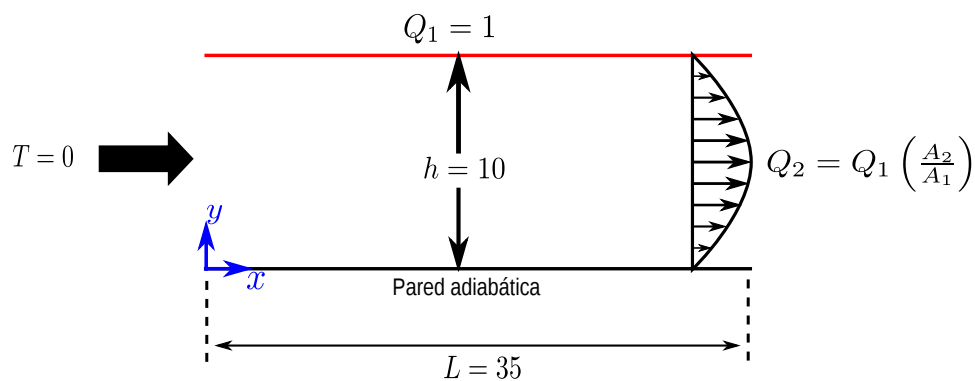


Figura 3.27: Dominio computacional para la transferencia de calor.



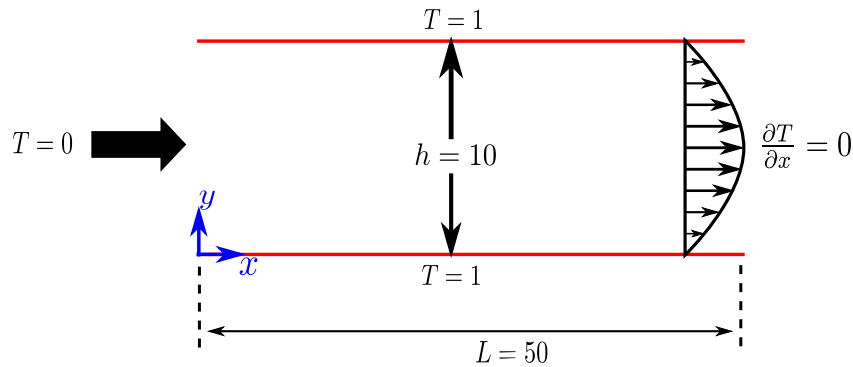


Figura 3.28: Dominio computacional para la transferencia de calor.

### CASO 1

Para realizar este estudio se coloca un imán muy cercano a la pared sobre la cual incide el flujo de calor en la coordenada (10,9) y se compara con el efecto que tiene en la transferencia de calor comparado con el que se tendría al colocar dos imanes muy cercanos a la pared expuesta al flujo de calor los centros de los imanes se localizan en las coordenadas (10,9) y (10,8), dado que los imanes se encuentran colocados consecutivamente sin espacio que los separe, actúan como si se tratara de un solo imán de geometría rectangular. Los arreglos de campos localizados descritos son comparados con el caso donde no se tiene un campo magnético para diferentes números de  $Ha$  y  $Re$ , se presentan los mismos casos tratados en la sección de la dinámica del flujo, los cuales son  $Re=10$  y  $Ha=30$ ,  $Re=100$  y  $Ha=30$ , así como  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Para un mejor entendimiento del efecto de colocar campos magnéticos localizados cerca de la pared calentada, en la figura 3.29 para un  $Re=100$  y  $Ha=30$ , en (a) se muestra la vorticidad que se obtiene cuando son colocados dos imanes en las posiciones anteriormente descrita, se tiene la interacción de la vorticidad producida debido a las paredes así como la producida por la presencia del obstáculo magnético, en (b) se muestra el campo de temperatura que se obtiene donde se aprecia una perturbación producida por la presencia del campo magnético y cómo es arrastrado el flujo de calor en dirección del flujo del fluido.

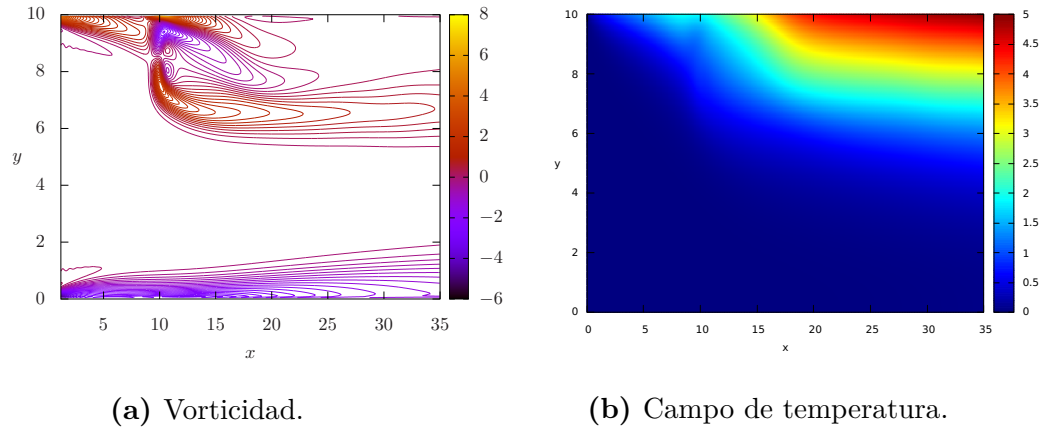
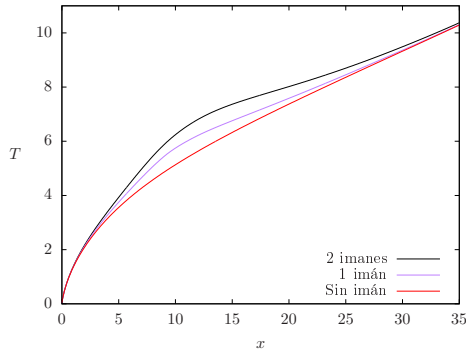
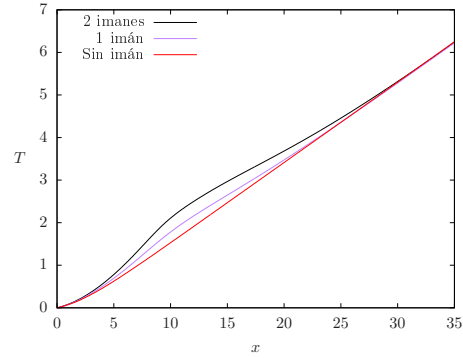


Figura 3.29: Vorticidad y campo de temperatura con dos imanes localizados para un flujo con  $Pe=5.3$  y  $Ha=30$ .

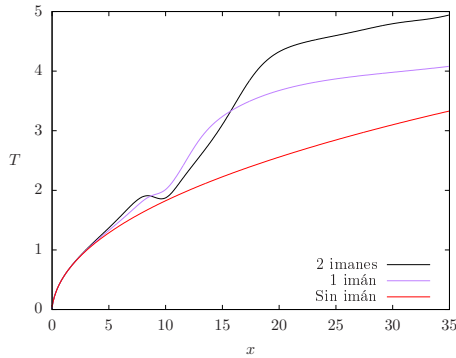
A continuación se presenta perfiles de temperatura del fluido obtenidos en la pared, así como en el centro del ducto a lo largo de la coordenada  $x$ . Es importante recordar que el metal líquido utilizado es el Galinstan con un  $Pr=0.053$ . El primer conjunto de parámetros que se utilizan para (a) y (b) es  $Pe=0.53$ ,  $Re=10$  y  $Ha=10$ , un Péclet muy bajo indica que el transporte convectivo es muy pequeño comparado con el transporte de calor por difusión, sin embargo, en los perfiles de temperatura se aprecia un incremento en la temperatura cuando se coloca un imán y un incremento aún mayor cuando se colocan dos imanes por el efecto que tienen en la dinámica del flujo, de acuerdo con el comportamiento mostrado en la figura 3.26, un fluido viscoso puede alcanzar una temperatura mayor en la pared cuando se tiene un número de  $Pe$  menor. En (c) y (d) para los parámetros  $Pe=5.3$ ,  $Re=100$  y  $Ha=30$  se muestran perfiles de temperatura correspondientes a cuando se coloca un imán, dos imanes y cuando hay ausencia de campo magnético. Claramente se puede ver que a diferencia de cuando no hay campo magnético, si se coloca un imán se alcanza una temperatura mayor en la pared, en cambio, cuando se colocan dos imanes la temperatura incrementa aún más. En (e) y (f) para los parámetros  $Pe=5.3$ ,  $Re=100$  y  $Ha=60$  puede observarse un comportamiento similar al anterior pero es aquí donde se ve reflejado claramente el efecto de tener un campo magnético más intenso, el cual es alcanzar una temperatura más alta comparada con la alcanzada con un  $Ha=30$ .



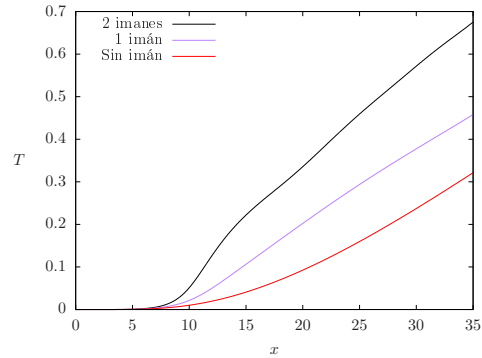
(a) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Pe=0.53$  y  $Ha=30$ .



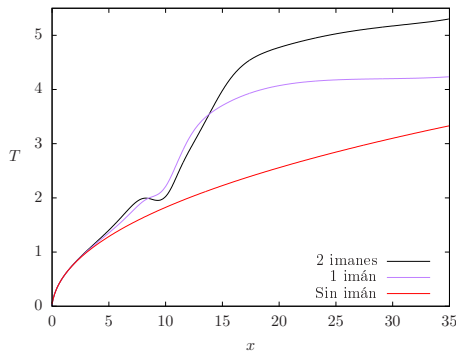
(b) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Pe=0.53$  y  $Ha=30$ .



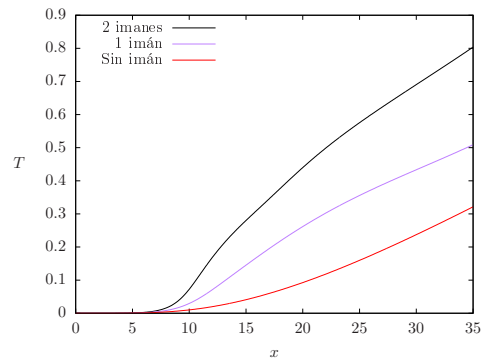
(c) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Pe=5.3$  y  $Ha=30$ .



(d) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Pe=5.3$  y  $Ha=30$ .



(e) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Pe=5.3$  y  $Ha=60$ .



(f) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Pe=5.3$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.30: Perfiles de temperatura de la pared calentada y del centro del ducto para distintos números de  $Pe$  y  $Ha$ .

**CASO 2**

Para llevar a cabo el estudio donde las paredes laterales tienen una temperatura uniforme, se analizan los casos coloca un imán en la coordenada (10,1) y el caso donde se colocan en la coordenada (10,2), dos imanes juntos como si se tratara de un imán largo. En la figura 3.31 se muestra la vorticidad que se produce por la presencia de un imán, así como el campo de temperatura modificado por la vorticidad producida, para un flujo con  $Re=1000$  y  $Ha=100$ .

En la figura 3.32 en (a) se muestra la temperatura de bulto como una función de la coordenada  $x$  y en (b) se muestra el Nusselt local como una función de la coordenada  $x$ .

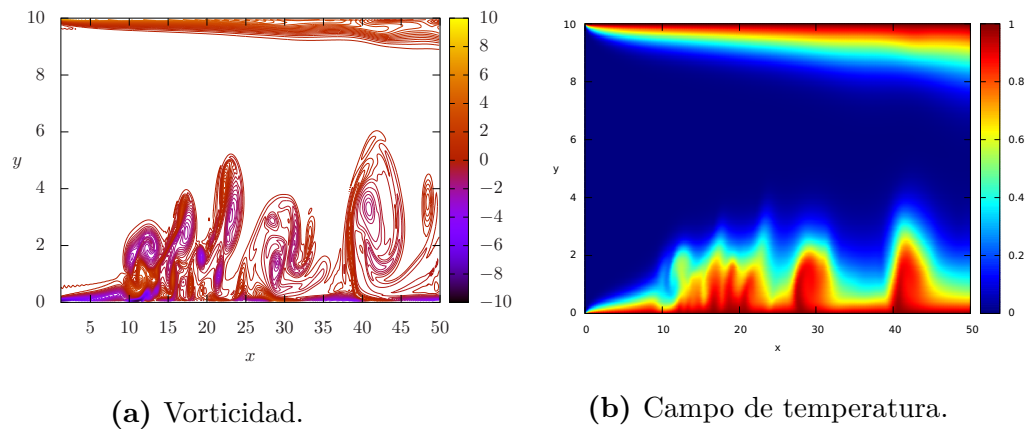


Figura 3.31: Vorticidad y campo de temperatura con un imán para un flujo con  $Re=1000$  y  $Ha=100$ .

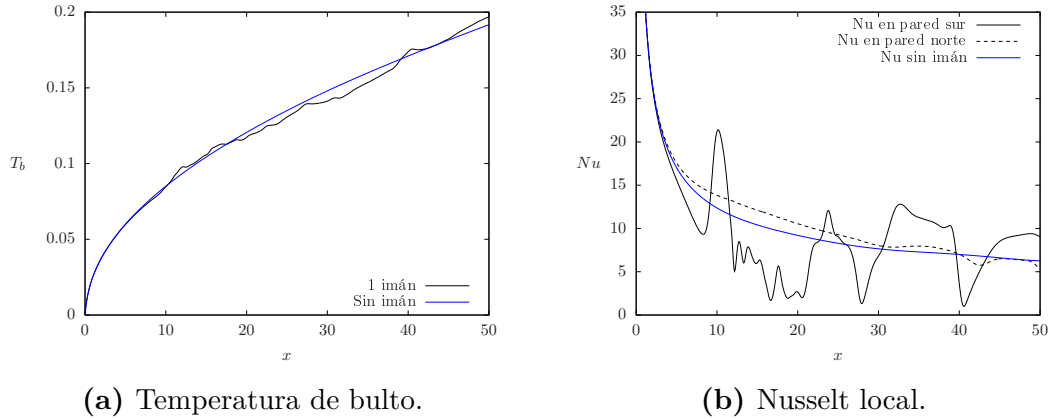


Figura 3.32: Temperatura de bulto y Nusselt local con un imán para un flujo con  $Re=1000$  y  $Ha=100$ .

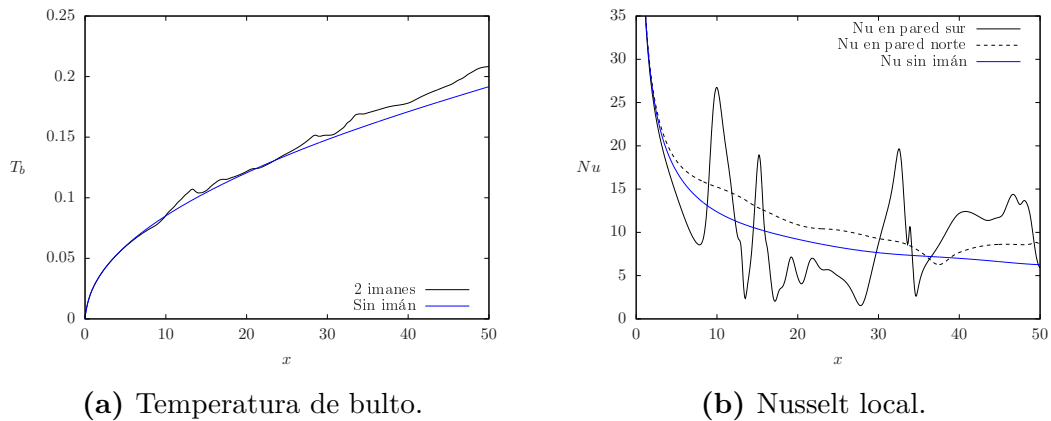
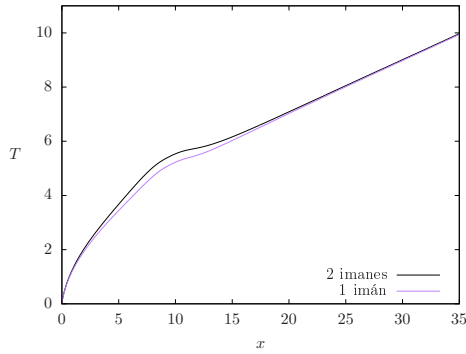


Figura 3.33: Temperatura de bulto y Nusselt local con dos imanes para un flujo con  $Re=1000$  y  $Ha=100$ .

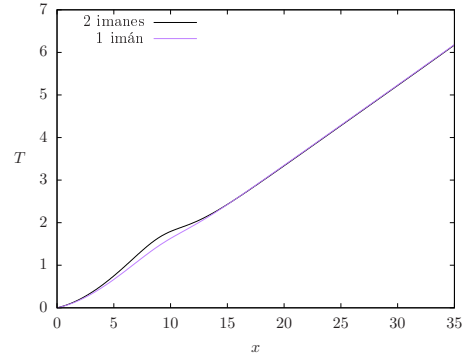
### 3.2.3. Efectos en la transferencia de calor Q2D

Para el modelo Q2D, en la figura 3.34 se muestran perfiles de la temperatura de la pared cuando se coloca un imán en la coordenada (10,9) y cuando se colocan dos imanes en las coordenadas (10,9) y (10,8), dos imanes consecutivos que actúan como si se tratara de un solo imán, en (a) y (b), para un  $Pe=0.53$  y  $Ha=30$  se observa que el comportamiento que presenta los perfiles

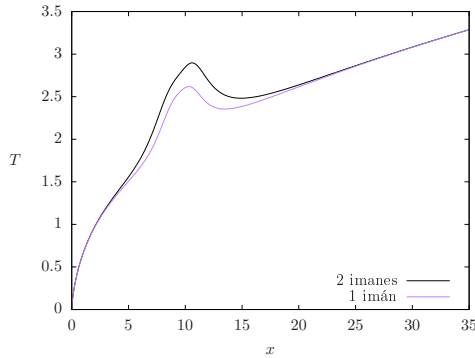
de temperatura a los largo de la coordenada  $x$  tanto en la pared calentada como en el centro del ducto, son bastante aproximados a los obtenidos con el modelo 2D debido a que con un  $Pe$  pequeño predominan los efectos difusivos y la dinámica del fluido no es tan reelevante en la transferencia de calor. En (c) y (d) para un  $Pe=5.3$ , el transporte convectivo se vuelve significativo comparado con el transporte difusivo por lo que la temperatura máxima alcanzada disminuye de acuerdo con la figura 3.26. A diferencia del modelo 2D, se produce un incremento abrupto de la temperatura en la región donde se tiene el campo magnético más intenso y, después de pasar el obstáculo magnético, independientemente de la cantidad de imanes, se obtiene la misma temperatura en  $x = 35$ . En (e) y (f) para un  $Pe=5.33$  y  $Ha=60$ , se observa que debido a que se tiene un  $N=36$ , las fuerzas magnéticas predominan sobre las fuerzas inerciales por lo que se ralentiza el flujo en la zona de mayor intensidad de campo magnético, permitiendo que se alcance una temperatura mayor en esa región, en  $x = 35$  la temperatura alcanzada es casi idéntica a la alcanzada cuando se tiene un  $N=9$  debido a que la perturbación producida por el campo magnético solo es significativa cerca del imán.



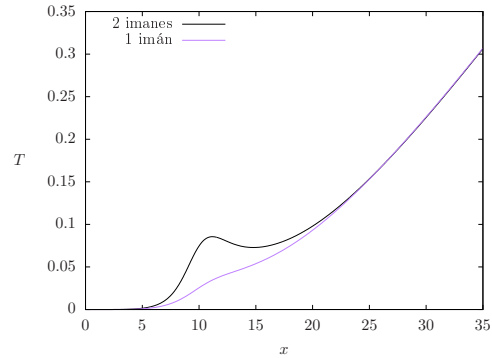
(a) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Pe=0.53$  y  $Ha=30$ .



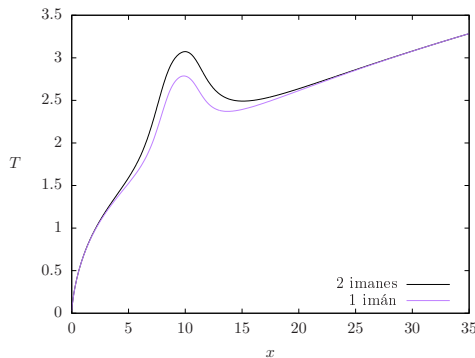
(b) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Pe=0.53$  y  $Ha=30$ .



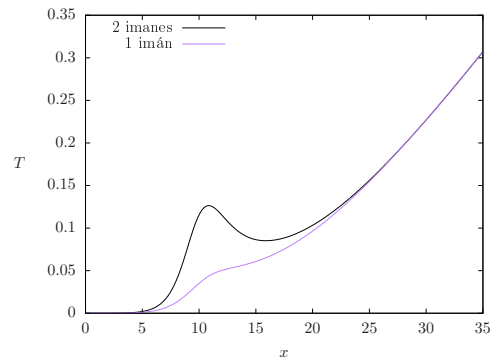
(c) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Pe=5.3$  y  $Ha=30$ .



(d) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Pe=5.3$  y  $Ha=30$ .



(e) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Pe=5.3$  y  $Ha=60$ .



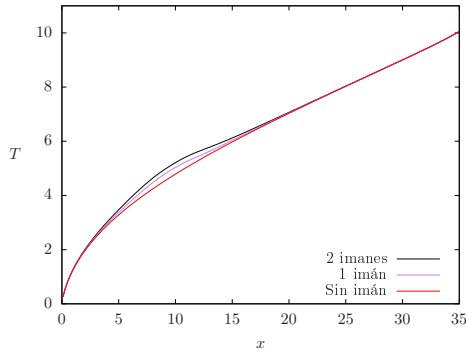
(f) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Pe=5.3$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.34: Perfiles de temperatura de la pared calentada y del centro del ducto para distintos números de  $Re$  y  $Ha$ .

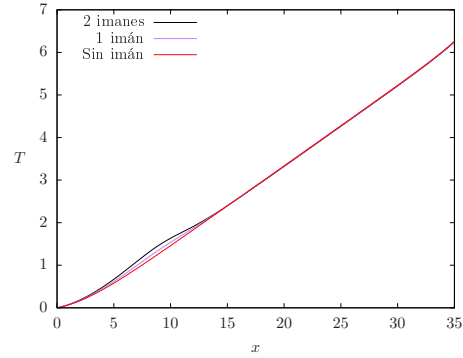
### 3.2.4. Efectos en la transferencia de calor 3D

Para el estudio de la transferencia de calor en 3D se muestran los perfiles de temperatura obtenidos a lo largo del ducto, en la pared calentada que corresponde a  $y = 10$ , así como del centro del ducto en  $y = 4.95$  a una altura en  $z$  de  $z = 0.19$ . En la figura 3.35 se puede ver que en (a) y (b) esencialmente se tiene el mismo comportamiento que en el modelo 2D y Q2D, en (c) y (d) se alcanza al final de ducto una temperatura menor que el el caso Q2D debido a que el modelo Q2D tiende a sobrevalorar la fricción en las vecindad del obstáculo magnético así como la de las paredes. Por último en (e) y (f) es notorio que debido a las fuerzas magnéticas que tienden a retardar el flujo se tiene un incremento considerable de temeptratura justamente donde el campo magnético es más intenso.

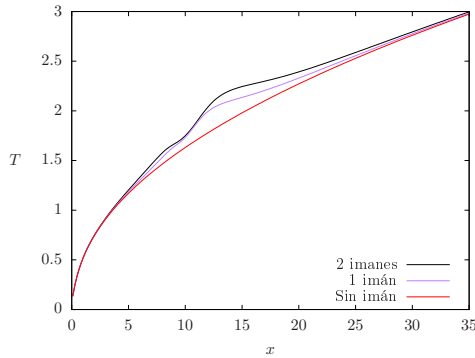




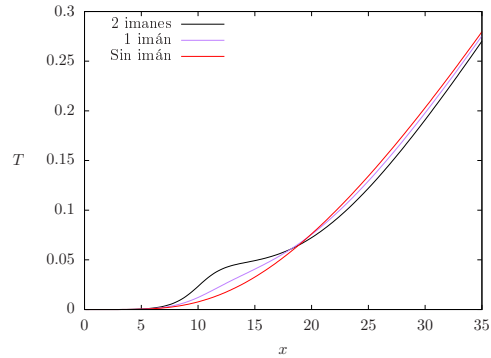
(a) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



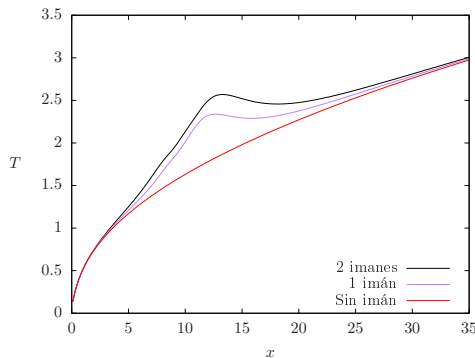
(b) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Re=10$  y  $Ha=30$ .



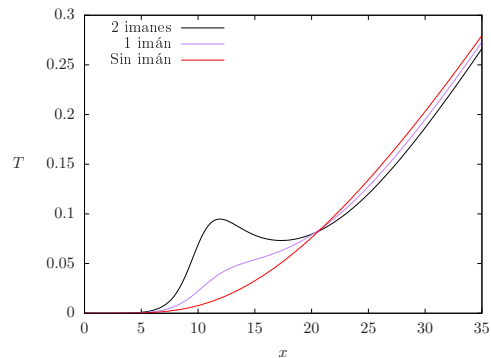
(c) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(d) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Re=100$  y  $Ha=30$ .



(e) Perfil de temperatura de la pared calentada para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .



(f) Perfil de temperatura del centro del ducto para  $Re=100$  y  $Ha=60$ .

Figura 3.35: Perfiles de temperatura de la pared calentada y del centro del ducto para distintos números de  $Re$  y  $Ha$ .

## Conclusiones

---

En esta sección se presentan los resultados de la transferencia de calor en un ducto rectangular de sección transversal uniforme a través del cual fluye metal líquido con un  $Pr=0.053$ . El estudio se realiza con modelos 2D, Q2D y 3D. En lo que respecta al primer caso de transferencia de calor se obtiene resultados bastante similares entre los tres modelos cuando se tiene un  $Pe=0.53$  y  $Ha=30$ , sin embargo, el modelo 2D se aleja considerablemente de los resultados que se obtienen con los modelos Q2D y 3D, por su parte el modelo Q2D y 3D arrojan resultados semejantes cuyas variaciones son menores de una unidad.



---

# Bibliografía

---

- Beltrán, A. (2006), “Flujo de líquidos conductores en campos magnéticos localizados”. Tesis de maestría, UNAM.
- Beltrán, A. (2010). “Dinámica de flujos en obstáculos magnéticos”. PhD Thesis, Centro de Investigación en Energía, UNAM.
- Carslaw, H. S. and Jeager, J.C. (1958). *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, Oxford.
- Cuevas, S. (1992). “Dinámica y transferencia de calor en flujos de metales líquidos en campos magnéticos intensos”. PhD Tesis. UNAM.
- Cuevas, S., Smolentsev, S., & Abdou, M. (2006). *Vorticity generation in creeping flow past a magnetic obstacle. Physical Review E*, 74(5), 056301.
- Currie, I. G. (2007). “*Fundamental mechanics of fluids*”. Cambridge. Third edition.
- Davidson, P. A. Introduction to magnetohydrodynamics, Cambridge, 2017.
- Fiebig, M. (1997) *Vortices and heat transfer. ZAMM-Zangew. Math. Mech*, 77,3-18.
- Furlani, E. P. (2001). “*Permanent Magnet and Electromechanical Devices*”. Academic Press.
- Goharkhah, M., & Ashjaee, M. (2014). *Effect of an alternating nonuniform magnetic field on ferrofluid flow and heat transfer in a channel. Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 362, 80-89.

Hamid, A. H., Hussam, W. K., & Sheard, G. J. (2016). *Combining an obstacle and electrically driven vortices to enhance heat transfer in a quasi-two-dimensional MHD duct flow*. *Journal of Fluid Mechanics*, 792, 364-396.

Hussam, W. K., & Sheard, G. J. (2013). *Heat transfer in a high Hartmann number MHD duct flow with a circular cylinder placed near the heated side-wall*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 67, 944-954.

Lee, G. B., Chang, C. C., Huang, S. B., & Yang, R. J. (2006). The hydrodynamic focusing effect inside rectangular microchannels. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16(5), 1024.

Li, Z., Li, J., Li, X., & Ni, M. J. (2017). Free surface flow and heat transfer characteristics of liquid metal Galinstan at low flow velocity. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 82, 240-248.

Modestov, M., Kolemen, E., Fisher, A. E., & Hvasta, M. G. (2017). “*Electromagnetic control of heat transport within a rectangular channel filled with flowing liquid metal*”. *Nuclear Fusion*, 58(1), 016009.

Moreau, R. (1990) *Magnetohydrodynamics*. Kluwer.

Müller, U. y Bühler, L. (2001). *Magnetofluidynamics in Channels and Containers*. Springer.

Pérez-Barrera, J. (2018). *Experimental and Numerical Study of Magnetohydrodynamic Flow Instabilities in a Cylindrical Cavity*. PhD Thesis, IER-UNAM.

Rashidi, S., & Esfahani, J. A. (2015). *The effect of magnetic field on instabilities of heat transfer from an obstacle in a channel*. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 391, 5-11.

Román, J. J. (2012). “*Estudio numérico de la transferencia de calor en un flujo a través de arreglos de obstáculos magnéticos*”. Master Thesis, Centro de Investigación en Energía, UNAM.



