



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

BASE DE DECAIMIENTO EN EL SUBESPACIO SIMÉTRICO PARA LA  
DISIPACIÓN DE  $N$  ÁTOMOS DE DOS NIVELES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
WILLIAM EDUARDO ÁLVAREZ GIRÓN

TUTOR PRINCIPAL  
DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN, IIMAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA, IF  
DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH, ICN

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO DE 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Mi primer agradecimiento va a mi familia, que ha sido y es la base fundamental de mi vida. Agradezco todo el amor y el apoyo de mis padres, Ignacio y Amalia, quiénes son los primero que me alimentan con su confianza y sus consejos. A mis hermanitos Karen y Edwin, quiénes nunca dejan de animarme y llenan de hermosos recuerdos mi vida. Y a mi tía Benjamina, que me ha otorgado su amor maternal.

Como foráneo en la gran ciudad, agradezco a Tayde con quién he compartido gran parte de esta etapa de mi vida. A todos mis amigos y compañeros del Posgrado Erik, Juan, Guillermo, Alain, Anahí, y más, quiénes compartieron conmigo más allá de sus conocimientos en la Física. Agradezco a mis vecinos en la casa “Jakkal” (Isaí, Raúl, Octavio, y otros) los calurosos momentos vividos y que han hecho muy amena mi estadía. Y al grupo de “Krav Maga Experts”, especialmente a mis instructores Isaac y Erick quiénes me han enseñado todo un estilo de vida.

Agradezco a todos los profesores que me han formado en el posgrado. Especialmente a mi tutor Dr. Pablo Barberis quién me ha apoyado y acompañado en todo este proceso. Agradezco a los miembros de mi comité tutor, Dr. Carlos Pineda y Dr. Jorge Hirsch, y a mis sinodales Dr. Héctor Moya, Dr. Asaf Paris, Dr. Daniel Sahagún y Dr. Ramón López quiénes han retroalimentaron mi investigación.

Por último agradezco el apoyo económico que ha posibilitado la realización de esta tesis: a la beca de maestría de CONACyT-México y al proyecto PAPIIT IG100518 “Estimación óptica de parámetros cuánticos y aplicaciones en información cuántica”.



## Resumen

La evolución de los sistemas cuánticos abiertos, frecuentemente, son modelados con la ecuación maestra de Lindblad. Para un sistema de  $N$  átomos de dos niveles, el operador de estado pertenece a un espacio vectorial de dimensión  $4^N$ , lo que dificulta la obtención de soluciones analíticas conforme  $N$  aumenta. Si la ecuación maestra es simétrica ante el intercambio de partículas, la evolución del estado toma lugar en el subespacio simétrico cuya dimensión crece polinomialmente con  $N$ . Usando este hecho, obtenemos soluciones algebraicas a la ecuación maestra de los átomos acoplados a un campo de radiación en equilibrio térmico para condiciones iniciales pertenecientes al subespacio simétrico. Para ello, encontramos los eigenvectores y eigenvalores del superoperador de Lindblad, y reescribimos la condición inicial usando la base de eigenvectores. Además, introducimos la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para encontrar soluciones analíticas para el proceso de emisión colectiva espontánea.

## Abstract

The evolution of open quantum systems are often modelled with the Lindblad master equation. For  $N$  two-level atoms, the state operator is defined in a vector space of dimension  $4^N$ , meaning that analytic solutions quickly become intractable. If master equation is symmetric under particle relabelling, the evolution of the state take place on the symmetric subspace that grows polynomially with  $N$ . Using this, we obtain algebraic solution of the master equation coupled to independent radiation baths for arbitrary initial state belonging to symmetric subspace. To do so, we find the eigenvalues and eigenvectors of the Lindblad superoperator, and then we expand the initial condition into this eigenvectors basis. Furthermore, we introduce the independent-time perturbation theory to find analytic solutions for collective spontaneous emission processes.



# Índice de notación

$N$	—	Número de partículas.
$\mathcal{H}_M$	—	Espacio de Hilbert para una partículas de $M$ niveles.
$\mathcal{H}_M^{\otimes N}$	—	Espacio de Hilbert para $N$ partículas de $M$ niveles.
$ \psi\rangle$	—	Ket $\psi$ o estado vector $\psi$ .
$\langle\psi $	—	Bra $\psi$ o dual de $ \psi\rangle$ .
$\hat{A}$	—	Operador A.
$\mathcal{L}_{M^2}$	—	Espacio de Liouville de una partícula de $M$ niveles.
$\mathcal{L}_{M^2}^{\otimes N}$	—	Espacio de Liouville de $N$ partículas de $M$ niveles.
$\mathcal{S}(\mathcal{L}_{M^2}^{\otimes N})$	—	Subespacio simétrico del espacio de Liouville de $N$ partículas de $M$ niveles.
$ B\rangle$	—	Notación tipo Dirac, B pertenece al espacio de Liouville.
$\langle B $	—	Dual de $ B\rangle$ .
$ \rho\rangle$	—	Operador de estado u operador de densidad, en algunos casos solo será denotado como $\hat{\rho}$ .
$ mn\rangle$	—	Producto exterior $ m\rangle\langle n $ .
$\check{L}$	—	Superoperador L.
$\hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}$	—	Elemento de la base de operadores simétricos para $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$
$\check{L}_{10}$	—	Superoperador del canal de disipación independiente.
$\check{L}_c$	—	Superoperador del canal de disipación colectivo.
$ \alpha, \delta\rangle_n$	—	Eigenvector izquierdo de $\check{L}_{10}$ , con $\alpha = n_{00} + n_{11}$ , $\alpha \geq \delta \geq 0$ y $n = n_{10}$ .
${}_n \langle \alpha, \delta $	—	Eigenvector derecho de $\check{L}_{10}$ , definiendo $n = n_{01}$ .
$\lambda_{\alpha, \delta}$	—	Eigenvalor de $\check{L}_{10}$ relacionado con el eigenvector $ \alpha, \delta\rangle_n$ .





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Descripción de sistemas cuánticos cerrados</b>	<b>11</b>
1.1. Repaso del formalismo en el espacio de Hilbert . . . . .	11
1.2. Formalismo del operador de densidad . . . . .	12
1.2.1. Sistemas compuestos . . . . .	14
1.3. Descripción de partículas idénticas . . . . .	15
1.3.1. N partículas no-interactuantes . . . . .	15
1.3.2. Estados de Dicke . . . . .	16
<b>2. Descripción de sistemas cuánticos abiertos</b>	<b>19</b>
2.1. El espacio de Liouville . . . . .	19
2.2. El subespacio simétrico de Liouville . . . . .	20
2.3. Dinámica para los sistemas cuánticos abiertos . . . . .	22
<b>3. Eigenvalores en el subespacio simétrico</b>	<b>27</b>
3.1. Base de decaimiento . . . . .	27
3.2. Descripción de la disipación individual . . . . .	28
3.3. Eigenvectores derechos para $\check{L}_{10}$ . . . . .	29
3.4. Eigenvectores izquierdos para $\check{L}_{10}$ . . . . .	31
3.5. Relación de dualidad para la base de decaimiento . . . . .	32
3.6. Evolución temporal de los operadores simétricos . . . . .	34
3.7. Solución tomando en cuenta la parte del Hamiltoniano . . . . .	35
<b>4. Aplicaciones de la base de decaimiento</b>	<b>37</b>
4.1. Disipación colectiva . . . . .	37
4.2. Una solución exacta . . . . .	39
4.3. Perturbación independiente del tiempo . . . . .	41
4.4. Ejemplo: Sistema de tres átomos . . . . .	45
4.5. Perturbación “térmica” para la disipación individual . . . . .	51
<b>Conclusión</b>	<b>53</b>
<b>A. Mapeo a superoperadores colectivos</b>	<b>55</b>
<b>B. Acción de la disipación colectiva</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



# Índice de figuras

2.1. Representación esquemática de la disipación individual y la disipación colectiva. . . . .	26
4.1. Evolución temporal del promedio de átomos excitados en el sistema tomando como condición inicial estados simétricos de un átomo excitado. La línea sólida es la solución para el estado mixto y la línea discontinua corresponde al estado puro. Se tomó $\gamma = 0,1$ .	42
4.2. Evolución temporal de las componentes del operador densidad, descrito en la base de los operadores simétricos, para distintas condiciones iniciales (estados simétricos mixtos). La línea solida muestra la evolución del sistema con la disipación individual, y la línea discontinua representa la evolución agregando la disipación colectiva como perturbación. Se toma $\gamma = 0,08$ . . . . .	50
4.3. Evolución temporal de las componentes del operador de densidad tomando como condición inicial un estado simétrico mixto de tres átomos excitados. La línea solida muestra la evolución de la disipación individual a $N_0 = 0$ , mientras que la línea discontinua muestra la perturbación usando $N_0 = 0,05$ . . . . .	52



# Introducción

Entender la interacción de la luz con la materia ha sido de vital importancia en el desarrollo de la Mecánica Cuántica. Fenómenos descritos con el formalismo matemático han sido observados en sistemas físicos, por ejemplo: en conjuntos de átomos confinados en cavidades ópticas (CQED, por sus siglas en inglés) en los cuales se han podido efectuar investigaciones sobre conceptos elementales como las desigualdades de Bell o gatos de Schrödinger [29, 30], además de otras de gran interés como el acoplamiento fuerte de sistemas de muchos cuerpos con la radiación [8], y en la aplicaciones a la computación [14] e información cuántica [15]. De manera reciente, una alternativa a CQED se ha dado con sistemas atómicos alrededor de nanofibras, en donde los átomos están acoplados a los modos continuos del campo evanescente [2, 23].

Al tratar la interacción radiación-materia, la primera aproximación que podemos hacer es considerar a la materia como un sistema cuántico de estados discretos, siendo el problema más simple, un sistema de dos niveles. Uno de los modelos teóricos para el estudio de un átomo de dos niveles y un modo de radiación cuantizado se conoce como *de Jaynes-Cummings* [21], el cual es generalizado a un sistema de  $N$  átomos por el modelo de Dicke [13]. Ambos consideran al sistema como uno cerrado. Para el estudio y la aplicación de sistemas cuánticos de muchos cuerpos es importante tomar en cuenta los procesos que destruyen la coherencia cuántica de los estados, que de manera general son inevitables debido a la interacción de los sistemas con sus alrededores (o ambiente). En esta situación la evolución de los sistemas cuánticos abiertos están dados por *ecuaciones maestras*, que describen la evolución temporal del operador de estado. Éste forma parte de un conjunto de operadores que actúan sobre los vectores de estado. Matemáticamente el conjunto de operadores forma un espacio de Hilbert, y recibe el nombre de *espacio de Liouville*.

Si consideramos la solución de sistemas multipartículas rápidamente se vuelve difícil tener resultados, analíticos o numéricos, ya que el número de grados de libertad del sistema incrementan de manera exponencial con el número de partículas. Por ejemplo, al resolver las ecuaciones maestras de un sistema de  $N$  átomos a través de simulaciones numéricas, debemos especificar una cantidad de coeficientes, que crece exponencial con  $N$ , para identificar al operador de estado. Al estudiar conjuntos con mayor número de partículas, es más complicado almacenar y manejar los números presentes en el computo. Consecuentemente, apenas es posible tratar problemas con  $N \sim 10$  mientras que experimentalmente la nube de átomos suele ser  $N \sim 10^{10}$  [10]. Para reducir el número de grados de libertad, podemos restringirnos a estudiar las soluciones a un subespacio. En este trabajo nos enfocaremos en el subespacio formado con los operadores totalmente simétricos, entre otras cosas, debido a que el operador del estado base pertenece a él. Para ello Chase y Geremia [10] ha encontrado que la dimensión de la base del subespacio crece de manera polinomial con  $N$ . Por otro lado, Xu *et al* [35] han descrito al subespacio simétrico para sistemas de dos niveles, con transformaciones de simetría de  $SU(4)$ . Proponen como base del subespacio combinaciones lineales de los multipletes del grupo, y reescriben los mapeos lineales del espacio (también llamados *superoperadores*) en términos de los generadores de  $SU(4)$ , lo que permite realizar simulaciones numéricas más eficientes. Haciendo uso de estos resultados, Hartmann [18] ha encontrado algunas soluciones analíticas, así como algunos eigenvectores para un superoperador que describe la disipación individual de  $N$  átomos, i.e., el acoplamiento de cada átomo a un baño térmico independiente del de los demás. Otras soluciones analíticas se han dado para la

disipación de un átomo [5], o para dos átomos [25], y de manera general para un sistema de  $N$  átomos restringido a tener un átomo excitado como condición inicial [24].

Motivados por el estudio del problema en el subespacio simétrico del espacio de Liouville y generalizando los resultados de [35], en la referencia [3] se ha construido un mapeo para los superoperadores del subespacio a superoperadores colectivos para sistemas multipartículas de  $M$ -niveles, los cuales actúan sobre base una del subespacio simétrico llamada *base de operadores simétricos*. El presente trabajo tiene como objetivo encontrar soluciones algebraicas para el estudio del decaimiento espontáneo colectivo de un sistema atómico de dos niveles, inmerso en un campo de radiación térmico. Para esto se calculó una base del subespacio formado con eigenvectores del superoperador que describe la disipación individual (al cual denominamos *base de decaimiento*). Luego, se introdujo como una perturbación al sistema, el superoperador que describe la disipación cuando existe acoplamiento entre átomos mediado por el campo de radiación (disipación colectiva), y mostramos la perturbación de la base de decaimiento. Dada la base es posible encontrar la evolución temporal del estado para el proceso de disipación, describiendo las condiciones iniciales en términos de los eigenvectores. Los resultados expuestos servirán al estudio de los procesos de disipación, principalmente para sistemas de átomos-nanofibras, en donde la disipación colectiva vista como una perturbación es posible [34].

El presente escrito se estructura de la siguiente manera. En los primeros dos capítulos se presentan los conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo de éste trabajo. Así, en el capítulo 1 se presenta el formalismo para la evolución de sistemas cuánticos cerrados. Se revisa algunos elementos del estudio de sistemas de partículas idénticas donde se introducen los estados de Dicke. En el capítulo 2 describimos el formalismo de los sistemas cuánticos abiertos, introducimos el espacio de Liouville y se resumimos algunos resultados presentados en [3]. Los últimos dos capítulos presentan los resultados originales del proyecto. En el capítulo 3 se reescribe el superoperador de la disipación individual en términos de los superoperadores colectivos. A partir de esto se resuelve la ecuación de eigenvalores para encontrar el conjunto de eigenvectores. Se muestra que la dimensión del conjunto corresponde a la dimensión del subespacio y comprobamos la ortogonalidad entre eigenestados, demostrando con esto, que el conjunto de eigenvectores es base. Finalmente mostramos la expresión algebraica de los elementos de la base de operadores simétricos en términos de la base de decaimiento. En el capítulo 4 introducimos la disipación colectiva, y mostramos el mapeo del superoperador de la disipación en términos de los superoperadores colectivos. Mostramos una solución exacta para el sistema con disipación colectiva e individual, y de manera general se muestra la solución de la disipación colectiva como una perturbación a la disipación individual. Todo esto es aplicado explícitamente para el caso  $N = 3$ . Los resultados expuestos en los últimos dos capítulos no han sido encontrados en la literatura.

# Capítulo 1

## Descripción de sistemas cuánticos cerrados

### 1.1. Repaso del formalismo en el espacio de Hilbert

El formalismo expuesto a continuación está basado en [12, 27], y tiene como finalidad repasar la solución a la ecuación de Schrödinger mediante la base de eigenvectores del hamiltoniano, ya que la base de decaimiento es el símil de esta idea con el formalismo del operador de densidad.

En la Mecánica Cuántica la descripción de estados físicos está representado por vectores  $|\psi\rangle$  pertenecientes a un espacio de Hilbert complejo, que denotaremos por  $\mathcal{H}$ . Aquellas cantidades que pueden medirse (observables) están asociados a operadores hermitianos (autoadjuntos) que actúan sobre los elementos de  $\mathcal{H}$ . El hecho de que  $A$  sea un operador de  $\mathcal{H}$  será denotado como  $\hat{A}$ . Como el espacio es de Hilbert, está dotado de un producto interno, por tanto podemos definir el espacio dual denotado  $\mathcal{H}^*$ . Si  $\psi \in \mathcal{H}^*$ , es un elemento del espacio dual, entonces será representado como  $\langle\psi|$ . Hay una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de ambos espacios  $|\psi\rangle \leftrightarrow \langle\psi|$ . El producto interno entre  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$  será representado como  $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$ .

Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial, por lo que es posible definir una base  $\{|i\rangle\}$  en  $\mathcal{H}$ , que sea ortogonal y completa

$$\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}, \quad \sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{I}, \quad (1.1)$$

así todo vector perteneciente al espacio puede ser representado mediante una combinación lineal de elementos de la base

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle. \quad (1.2)$$

Mediante el producto interno es posible encontrar los coeficientes del desarrollo, para el caso anterior tendremos  $c_i = \langle i|\psi\rangle$ . Para la descripción de estados cuánticos solo es necesario especificar la dirección del vector  $|\psi\rangle$ , esto nos permite tomar por convención vectores normalizados

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \implies \quad \sum_i |c_i|^2 = 1.$$

También es posible dar una representación de los operadores usando la base del espacio

$$\hat{A} = \sum_{i,j} \langle i|\hat{A}|j\rangle |i\rangle\langle j|, \quad (1.3)$$

donde los coeficientes  $\langle i|\hat{A}|j\rangle$  forman la *representación matricial* de  $\hat{A}$ . Cabe resaltar que la expresión (1.3) implica que los productos externos  $|i\rangle\langle j| \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$  forman una base para el espacio de los operadores que actúan sobre  $\mathcal{H}$ . Con el producto interno es posible definir el *valor de expectación* para una observable  $\hat{A}$ . Si nuestro sistema se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$ , el valor de expectación para el operador  $\hat{A}$  es  $\langle A \rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle$ .

Se postula que la evolución temporal de un estado  $|\psi(t)\rangle$ , con el cual describimos al sistema completo a un tiempo  $t$ , está dado por la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.4)$$

siendo  $\hat{H}(t)$  el operador Hamiltoniano del sistema físico. Si tal operador no tiene una dependencia explícita en el tiempo, la solución de la ecuación de Schrödinger es

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}. \quad (1.5)$$

El operador de evolución  $\hat{U}(t, t_0)$  es un *operador unitario* (que satisface  $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}$ , con  $U^\dagger$  el adjunto de  $U$ ), por lo que la evolución temporal anterior es una *transformación unitaria*. Por convención, en este trabajo tomaremos  $t_0 = 0$ .

De manera particular podemos usar como base del espacio  $\mathcal{H}$  al conjunto de eigenvectores del hamiltoniano  $\hat{H}$ ,  $\{|E_n\rangle\}$ , vectores que satisfacen  $\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$ , siendo  $E_n$  un número real. Debido a que el hamiltoniano es un operador autoadjunto (que satisface  $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ ) tendremos que tal conjunto forma directamente una base del espacio, a menos que halla degeneración en el espectro, donde necesitaremos ver la independencia lineal de los vectores para asegurarnos la base [17]. Si desarrollamos el estado inicial con la base de eigenvectores, tendremos que al tiempo  $t$  la solución a la ecuación de Schrödinger es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \sum_n c_n |E_n\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} |E_n\rangle. \quad (1.6)$$

## 1.2. Formalismo del operador de densidad

Nuestra finalidad es describir a un conjunto de  $N$  átomos de dos niveles inmersos en un campo de radiación, lo que provoca que los átomos emitan fotones hacia el campo. Al hablar de disipación en este trabajo nos referimos a este fenómeno. Al tener pérdida de información (la emisión de fotones) estamos tratando con un sistema cuántico abierto, cuya descripción la haremos con el formalismo del operador de densidad  $\hat{\rho}$ . Además, ya que el sistema permite emisión de fotones, estamos considerando un conjunto de partículas distinguibles, por lo que los resultados pueden aplicarse a partículas bosónicas o fermiónicas.

De manera general tenemos un sistema de interés  $\mathbf{S}$  (los átomos) en contacto con otro sistema mucho más grande  $\mathbf{A}$  (el ambiente, que para nuestro caso es un campo de radiación en equilibrio térmico). Inicialmente describimos al sistema total con el operador  $\hat{\rho}_{SA}$ , que considera a  $\mathbf{S}$  y a  $\mathbf{A}$ . Debido a que solo nos interesa obtener información de  $\mathbf{S}$ , reduciremos la información de  $\hat{\rho}_{SA}$ , a  $\hat{\rho}_S$ , un operador que lidia solo con los grados de libertad del sistema de interés. Más aún, queremos una evolución que involucre solo los grados de libertad de  $\mathbf{S}$

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S = \check{L}\hat{\rho}_S. \quad (1.7)$$

La ecuación anterior es conocida como *ecuación maestra de Lindblad*, y nos referiremos al mapeo  $\check{L}$  como *lindbladiano*. Esta ecuación es de primer grado, al igual que la de Schrödinger, y ya que el



operador de densidad  $\hat{\rho}$  vive en un espacio vectorial, optaremos por tener soluciones analíticas de (1.7) encontrando una base de eigenvectores de  $\check{L}$  con el que reescribamos cualquier condición inicial. Ya que  $\check{L}$  no es un mapeo lineal hermitiano, debemos demostrar que el conjunto de eigenvectores que proponamos forma base del espacio al que pertenece  $\hat{\rho}$ .

Para empezar describamos un poco el formalismo del operador de densidad.

En la sección anterior introdujimos la descripción del sistema cuántico mediante los vectores de estado  $|\psi\rangle$ . Dado el estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , el operador de densidad asociado es simplemente el proyector del vector

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.8)$$

Este objeto contiene la misma información que  $|\psi\rangle$ , y las reglas del formalismo cuántico en el espacio de Hilbert pueden expresarse en un formalismo con el operador densidad. Por ejemplo, el valor de expectación de la observable  $\hat{A}$  está dado por

$$\langle\hat{A}\rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{A}). \quad (1.9)$$

De vital importancia es conocer la expresión de la evolución temporal para los operadores de densidad. Si el fenómeno físico está descrito por el hamiltoniano  $\hat{H}(t)$ , la evolución del operador de densidad puede obtenerse de la ecuación de Schrödinger, y está dado de acuerdo a la ecuación

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \quad (1.10)$$

expresión llamada ecuación de Liouville-von Neumann. Tal evolución es una transformación unitaria de la forma

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0).$$

Si el operador densidad está dado por el proyector de un estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  decimos que tenemos un *estado puro*.

Pero el formalismo del operador densidad no solo nos permite describir estados puros, y su utilidad radica en que nos permite describir ensambles estadísticos de estados puros, llamados *estados mixtos*. Consideremos como sistema una colección de estados puros  $|\psi_n\rangle$ , cada uno con probabilidad  $p_n$ . Para tal sistema el operador de densidad es

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \quad (1.11)$$

Esta descripción encaja perfectamente en el estudio de los sistemas cuánticos abiertos, debido a que al interaccionar el sistema  $\mathbf{S}$  con sus alrededores  $\mathbf{A}$  tendremos una incertidumbre estadística para conocer el estado del sistema, y sólo tendremos acceso a las probabilidades de que el estado se encuentre en alguno de los vectores del ensamble.

Debido al carácter estadístico del operador de densidad, pediremos que los operadores que representen estados físicos satisfagan las siguientes propiedades matemáticas

- El operador sea hermitico, i.e.  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ .
- El estado esté normalizado:  $Tr(\hat{\rho}) = 1$ .
- $\hat{\rho}$  sea un operador definido no-negativo, i.e. para todo  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  se satisface que  $\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0$ .
- $Tr(\hat{\rho}^2) \leq 1$ . La igualdad se satisface si y sólo si el estado es estado puro.

### 1.2.1. Sistemas compuestos

Ya que queremos estudiar un sistema compuesto por dos subsistemas (**S** y **A**), es necesario introducir dos conceptos que usaremos en la discusión de la ecuación maestra en el siguiente capítulo. El primero es el de *estado enredado* y el segundo definir el *operador de densidad reducido*. Ambos conceptos pueden ser revisados en [28].

Sea el sistema bipartito compuesto por **S** y **A**, cada uno por separado esta descrito por los vectores  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$ , respectivamente. Así el estado del sistema conjunto está expresado por el producto

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle, \quad (1.12)$$

el cual es elemento del espacio  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ . Cuando los subsistemas interactúan, el estado total puede tener correlación entre sus subsistemas, por lo que de manera general el vector del sistema tiene la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} \gamma_{ij} |i_S\rangle \otimes |j_A\rangle \quad (1.13)$$

Si no existen  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$ ,  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A$  tal que la expresión anterior se reduzca a (1.12) diremos que el estado es *enredado*. Cabe resaltar que esta definición aplica a estados puros.

Si queremos describir al sistema bipartito en el formalismo del operador densidad, de manera directa tendremos para el estado puro  $|\Psi\rangle$  el operador densidad  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Así, en el ejemplo en el que  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  tendremos  $\hat{\rho}_\Psi = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|$ . Esto se puede generalizar si el subsistema **S** está en el estado  $\hat{\rho}_S$  y el subsistema **A** en el estado  $\hat{\rho}_A$ , el sistema conjunto es el producto  $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_A$ , que no necesariamente corresponde a un estado puro.

Las cosas se ponen más interesantes si queremos describir estados enredados. Aunque tengamos el estado (1.13), que puede ser muy complicado, directamente tenemos el operador densidad asociado  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Pero de manera general podemos tener estados mixtos, de estados  $|\Psi_i\rangle$  enredados, que toman la forma

$$\hat{\rho}_{SA} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \quad (1.14)$$

donde  $0 \leq p_i \leq 1$  y  $\sum_i p_i = 1$ . En algunos casos el estado anterior puede reescribirse como

$$\hat{\rho}_{SA} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{Si} \otimes \hat{\rho}_{Ai}. \quad (1.15)$$

Cuando esto sucede decimos que el estado es *separable*. Más aún, cuando el estado es separable puede escribirse como una descomposición de estados puros

$$\hat{\rho}_{SA} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \quad (1.16)$$

Los coeficientes  $p_i$  de (1.16) no necesariamente son los mismos de (1.15). Para estados mixtos, diremos que el estado es enredado si no es separable. Esta definición es a la que usaremos en futuras referencias.

Ahora revisemos el concepto de *operador de densidad reducido*. Aunque tengamos un sistema compuesto cuyo operador de densidad es  $\hat{\rho}_{SA}$ , nosotros solo estamos interesados en obtener información sólo del subsistema **S**. Para lograr esto, es posible obtener un operador densidad para el subsistema **S** al tomar la traza parcial sobre **A**

$$\hat{\rho}_S = Tr_A(\hat{\rho}_{SA}), \quad (1.17)$$

recordando que la traza parcial para un operador sobre el espacio bipartito es

$$Tr_A \left( \sum_j \hat{M}_j \otimes \hat{N}_j \right) = \sum_j Tr(\hat{N}_j) \hat{M}_j, \quad (1.18)$$

donde los operadores  $\hat{M}_j$  actúan sobre el espacio  $\mathcal{H}_S$  mientras que los  $\hat{N}_j$  lo hacen sobre  $\mathcal{H}_A$ . El operador  $\hat{\rho}_S$  es llamado *operador de densidad reducido* para el subsistema S.

### 1.3. Descripción de partículas idénticas

Debido a que el objetivo de este trabajo es describir una colección de  $N$  átomos es deseable hablar un poco sobre la teoría para sistemas multipartículas. A diferencia de la Mecánica Clásica, en donde aunque se tengan objetos idénticos, es posible distinguir cada componente durante la evolución del sistema ya que es posible rastrear las trayectorias, en un sistema cuántico cerrado las partículas idénticas son fundamentalmente indistinguibles.

#### 1.3.1. N partículas no-interactuantes

Supongamos un sistema de  $N$  partículas idénticas que se encuentra en el estado  $|\Psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N}\rangle$  con energía  $E$ , tal como lo mostrado en [27], de manera explícita

$$\hat{H}|\Psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N}\rangle = E|\Psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N}\rangle. \quad (1.19)$$

Usamos las etiquetas  $\alpha_i$  para describir el estado de la partícula  $i$ . Si no hay interacción entre partículas, la ecuación de Schrödinger es separable, i.e. podemos asumir

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mu=1}^N \hat{H}^{(\mu)}, \\ |\Psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N}\rangle &= |\phi_{\alpha_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_{\alpha_N}\rangle =: |\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle, \end{aligned} \quad (1.20)$$

y donde se satisface

$$\hat{H}^{(i)}|\phi_{\alpha_i}\rangle = \varepsilon_i|\phi_{\alpha_i}\rangle.$$

De lo anterior, se puede describir al sistema de muchos cuerpos mediante el producto de eigenestados de una partícula  $|\phi_{\alpha}\rangle$ . Más aún, podemos tener como base para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^{\otimes N} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(1)}$  a los estados (1.20), ya que tales estados satisfacen completez

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}\rangle \langle \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}| = \mathbb{I}, \quad (1.21)$$

y ortogonalidad

$$\langle \Psi_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N} | \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \rangle = \delta_{\alpha'_1, \alpha_1} \dots \delta_{\alpha'_N, \alpha_N}.$$

Para estados multipartículas podemos definir el operador de intercambio, tal que

$$\hat{P}_{ij}|\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_i}, \dots, \phi_{\alpha_j}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle = |\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_j}, \dots, \phi_{\alpha_i}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle. \quad (1.22)$$

Definiremos como *estados bosónicos* o *simétricos* aquellos que satisfacen que  $\hat{P}_{ij}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, N$ . Los *estados fermiónicos* o *antisimétricos* serán aquellos que cumplan  $\hat{P}_{ij}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$ . La importancia de estos dos tipos de estados radica en que son los únicos que puede tomar un sistema de partículas indistinguibles, resultado que se conoce como *Postulado de simetrización*.

Concentrémonos en los estados simétricos. Dado el estado (1.20), es posible obtener un vector simétrizado de la forma

$$|\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^S\rangle = \frac{1}{N!} \sum_P \hat{P} |\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle, \quad (1.23)$$

donde la suma sobre  $P$  indica tomar en cuenta todas las permutaciones de partículas posibles. El estado construido sólo está normalizado si los vectores  $|\phi_{\alpha_i}\rangle$  tienen distintos números cuánticos  $\alpha_i$ . Por ello es mejor introducir la representación de los estados de ocupación. Supongamos que los eigenestados para una partícula son  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots\}$ . Por tanto, si la partícula  $i$  tiene etiqueta  $\alpha_i = k$  significa que se encuentra en el estado  $|k\rangle$ . Además usaremos  $n_j$  para denotar el número de partículas que se encuentran en  $|j\rangle$ , y formaremos para el sistema el vector  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  el cual consideramos simétrizado y normalizado. La relación de los estados en la representación de ocupación y los estados (1.23) es

$$\sqrt{n_1! n_2! \dots} |n_1, n_2, \dots\rangle = |\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^S\rangle. \quad (1.24)$$

El hecho de que el estudio de nuestro sistema este restringido a los estados simétricos nos permite introducir operadores bosónicos de creación-aniquilación. Tendremos operadores  $\hat{a}_i$ , que mapea estados de  $N$  partículas a estados de  $N - 1$  partículas, que actúan sobre estados en la representación de ocupación como

$$\hat{a}_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle. \quad (1.25)$$

Los operadores de creación  $\hat{a}_i^\dagger$  mapean estados de  $N$  partículas a estados de  $N + 1$  partículas

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle. \quad (1.26)$$

Cabe recordar que tales operadores satisfacen el álgebra bosónica

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger], \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}. \quad (1.27)$$

Esto nos permite observar que la representación de los estados de ocupación está dado mediante productos de estados de Fock  $|n_i\rangle$ . Todo lo introducido anteriormente para la descripción del sistema multipartícula, es posible si nos restringimos al subespacio simétrico del espacio de Hilbert, donde al final, podemos reescribir a los operadores del sistema en términos de operadores bosónicos.

Podemos dar una descripción semejante en el formalismo del operador densidad. El uso de mapeos bosónicos en el espacio en el que viven los operadores densidad, así como la descripción de la base en los que actúan han sido descritos en [3], y se abordaran en el siguiente capítulo.

### 1.3.2. Estados de Dicke

Uno de los ejemplos más usados sobre estados multipartícula y la resolución de problemas en el subespacio simétrico, es el de los estados de Dicke.

Para motivar la introducción de los estados de Dicke, introduzcamos primeramente el hamiltoniano de Tavis-Cummings como en la referencia [22]. Este describe la interacción de partículas idénticas de dos niveles, interactuando con un modo cuantizado de radiación, y el cual hace uso de la aproximación de onda rotante (RWA). La expresión del hamiltoniano es

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{J}_3 + \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\hbar \Omega}{2} (\hat{a} \hat{J}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{J}_-). \quad (1.28)$$

Primeramente es posible reconocer los operadores bosonicos para el campo de radiación  $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ , los cuales actúan sobre estados de Fock. Por otro lado tenemos los operadores colectivos en términos de los operadores atómicos

$$\hat{J}_\pm = \sum_\mu \hat{\sigma}_\pm^{(\mu)}, \quad \hat{J}_3 = \frac{1}{2} \sum_\mu \hat{\sigma}_3^{(\mu)}. \quad (1.29)$$

Recordando que para una partícula del sistema tenemos el estado excitado  $|1\rangle$  y el estado base  $|0\rangle$ , definimos los operadores atómicos como

$$\hat{\sigma}_+ = |1\rangle\langle 0|, \quad \hat{\sigma}_- = |0\rangle\langle 1|, \quad \hat{\sigma}_3 = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|. \quad (1.30)$$

En orden de solucionar el hamiltoniano de Tavis-Cummings es requerible tener la base sobre los que actúan los operadores colectivos. Estos estados son conocidos como *estados de Dicke*, los cuales denotaremos como  $|N, k\rangle$ , que representa al sistema de  $N$  partículas con  $k$  partículas excitadas. Al actuar sobre estos estados con los operadores colectivos tendremos el mapeo

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |N, k\rangle &= \sqrt{(k+1)(N-k)} |N, k+1\rangle, \\ \hat{J}_- |N, k\rangle &= \sqrt{k(N-k+1)} |N, k-1\rangle, \\ \hat{J}_3 |N, k\rangle &= \left(k - \frac{N}{2}\right) |N, k\rangle, \\ \hat{J}^2 |N, k\rangle &= \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1\right) |N, k\rangle, \end{aligned}$$

donde además hemos introducido el *operador de Casimir*  $\hat{J}^2 = \hat{J}_3^2 + (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+)/2$ . Es de apreciar el hecho de que el mapeo de los operadores colectivos sobre los estados de Dicke es cerrado. En términos de productos de estados de una partícula los estados de Dicke adquieren la forma

$$|N, k\rangle = \sqrt{\frac{k!(N-k)!}{N!}} \sum_P \hat{P} \left( |1\rangle^{\otimes k} \otimes |0\rangle^{\otimes (N-k)} \right), \quad (1.31)$$

nuevamente la suma sobre  $P$  denota todas las permutaciones de átomos posibles para el estado  $|1 \dots 1 0 \dots 0\rangle$  de  $k$  átomos en el estado excitado y  $N - k$  en el estado base. Estos estados forman una base para el subespacio simétrico, el cual nos ayuda a resolver la dinámica del hamiltoniano de Tavis-Cummings cuando el estado inicial se encuentra en el subespacio citado.

En la sección anterior vimos que al restringirnos al subespacio simétrico es posible introducir operadores bosónicos y reescribir los estados con vectores de Fock. Para el caso de los estados de Dicke es posible introducir dos modos ficticios de bosones cuyos operadores de creación podemos denotar como  $\hat{b}_1$  y  $\hat{b}_2$ , de tal forma de que se satisface

$$\hat{J}_3 = \frac{\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1}{2}, \quad \hat{J}_+ = \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger, \quad \hat{J}_- = \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2, \quad (1.32)$$

mapeo conocido como *realización de Schwinger* [9]. Los operadores  $\hat{b}_1, \hat{b}_2$  satisfacen un álgebra igual a (1.27). Cada uno tiene asociado un espacio de Fock, con elementos de la forma  $|m\rangle_1, |n\rangle_2$  respectivamente. Si formamos un producto tensorial  $|m\rangle_1 |n\rangle_2$  se tendrán las siguientes acciones

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 |m\rangle_1 |n\rangle_2 &= \sqrt{m} |m-1\rangle_1 |n\rangle_2, & \hat{b}_1^\dagger |m\rangle_1 |n\rangle_2 &= \sqrt{m+1} |m+1\rangle_1 |n\rangle_2, \\ \hat{b}_2 |m\rangle_1 |n\rangle_2 &= \sqrt{n} |m\rangle_1 |n-1\rangle_2, & \hat{b}_2^\dagger |m\rangle_1 |n\rangle_2 &= \sqrt{n+1} |m\rangle_1 |n+1\rangle_2. \end{aligned}$$

Con los estados anteriores podemos reescribir los estados de Dicke como

$$|N, k\rangle = |N-k\rangle_1 |k\rangle_2. \quad (1.33)$$

El uso de los estados de Dicke ha permitido encontrar fenómenos interesantes como la *subrradiancia* y la *superradiancia*. Estos hacen referencia a efectos colectivos encontrados especialmente en sistemas de electrodinámica cuántica de cavidades (CQED). De manera simplificada, estos fenómenos derivan de efectos de interferencia cuántica que provocan que la amplitud de la probabilidad de la emisión de un fotón (o la tasa de emisión de un fotón) del sistema de  $N$  átomos sea menor o mayor que el emitido por un sistema sin correlaciones.

## Capítulo 2

# Descripción de sistemas cuánticos abiertos

Ya comentamos que la descripción de sistemas cuánticos abiertos está dado con el formalismo del operador de densidad  $\hat{\rho}$ . Estos son elementos de un espacio llamado *de Liouville*, cuyo tamaño crece exponencialmente con el número de partículas, por lo que nos limitaremos a observar la dinámica perteneciente a su subespacio simétrico. En este capítulo introducimos los elementos necesarios para entender al espacio de Liouville, al subespacio simétrico y la ecuación que gobierna la evolución temporal del sistema que queremos estudiar: la ecuación maestra de Lindblad.

### 2.1. El espacio de Liouville

El espacio de Liouville es un espacio vectorial formado por los operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  del sistema, y que está equipado con un producto escalar. De manera más específica tenemos la siguiente definición matemática tomada de [33]

**Definición 2.1.1.** *Un espacio de Liouville  $\mathcal{L}$  es un conjunto de operadores lineales, los cuales satisfacen las siguientes propiedades*

1  $\mathcal{L}$  es un espacio lineal.

2 Si  $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{L}$ , el producto escalar entre estos elementos está definido como  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \text{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})$ .

3  $\mathcal{L}$  es un espacio normado y completo, cuya norma para  $\hat{A} \in \mathcal{L}$  es  $\|\hat{A}\| = \sqrt{\langle \hat{A}, \hat{A} \rangle}$ .

Consideremos el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_M$ , cuya base es  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |M\rangle\}$ , por lo que la dimensión de tal espacio es  $M$ . De este espacio consideramos los operadores lineales que actúan sobre él, especialmente tendremos los operadores de densidad  $\hat{\rho}$ , que describen estados puros o mixtos. Estos operadores viven en un espacio de Liouville, que denotaremos  $\mathcal{L}_{M^2}$ , el cual tiene dimensión  $M^2$ . Adoptaremos una notación semejante a la Dirac, así, el hecho de que  $\hat{A} \in \mathcal{L}_{M^2}$  será expresado por  $|A\rangle$ . De aquí en adelante denotaremos los operadores densidad  $\hat{\rho}$  como  $|\rho\rangle$ . Debido a que  $\mathcal{L}_{M^2}$  es un espacio vectorial, normado y completo, tendremos asociado a él un espacio dual,  $\mathcal{L}_{M^2}^*$ . Siguiendo con la notación, si  $\hat{B}$  pertenece al espacio dual será representado como  $\langle B|$ . De las definiciones previa tendremos que el producto escalar será expresado por  $\langle B|A\rangle = \text{Tr}(\hat{B}^\dagger \hat{A})$ .

Los mapeos lineales  $\check{T} : \mathcal{L}_{M^2} \rightarrow \mathcal{L}_{M^2}$  son llamados *superoperadores*. Si  $\{|\alpha\rangle\}_\alpha, \{|\beta\rangle\}_\beta$  son bases ortonormales de  $\mathcal{L}_{M^2}$  podemos tener una representación matricial para  $\check{T}$ ,

$$\check{T} = \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle \langle \beta|,$$

donde  $T_{\alpha, \beta} := \langle \alpha | \check{T} | \beta \rangle$  son llamados *elementos de supermatriz*.

Considerando la base  $\{|i\rangle\}_{i=1, \dots, M}$  de  $\mathcal{H}_M$ , es posible inducir una base en el espacio de Liouville, igual a  $\{|mn\rangle = |m\rangle \langle n|\}_{m, n \in \{1, \dots, M\}}$ . Por tanto es posible hacer la identificación  $\mathcal{L}_{M^2} = \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_M^*$ .

## 2.2. El subespacio simétrico de Liouville

Sea  $\mathcal{L}_{M^2}$  el espacio de Liouville de una partícula. Para un sistema de  $N$  partículas idénticas tendremos el espacio  $\mathcal{L}_{M^2}^{\otimes N}$ . Sobre este espacio podemos definir un superoperador de intercambio de partículas  $\check{P}_{ij}$ , el cual intercambia las etiquetas entre las partículas  $i, j$  para el operador sobre el cual actúe. Al subespacio formado por los operadores invariantes ante los superoperadores de intercambio la llamaremos *subespacio simétrico* del espacio de Liouville. Tal subespacio será denotado como  $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{M^2}^{\otimes N})$ .

En la referencia [3] se introduce para  $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{M^2}^{\otimes N})$ , un conjunto de superoperadores colectivos, de manera tal que todo mapeo lineal entre elementos del subespacio, sea reescrito en términos de estos. Para identificar la expresión de un superoperador del subespacio simétrico en términos de superoperadores colectivos, introduciremos superoperadores de creación/aniquilación. Cabe resaltar que la introducción de estos superoperadores bosónicos es solo una herramienta algebraica que facilitará la tarea. Ejemplificaremos el proceso de bosonización para el caso  $M = 2$ , i.e., partículas de dos niveles. Consideremos el superoperador  $\mathbb{I}^L \hat{\sigma}_+^R$  actuando sobre operadores que actúan sobre  $\mathcal{H}_2$ , el espacio de un átomo de dos niveles. Los superíndices  $L, R$  indican que el superoperador actúa a la izquierda o a la derecha de un operador, respectivamente. El espacio  $\mathcal{L}_4$  admite como base el conjunto  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , así que al actuar sobre esta base, tenemos los siguientes mapeos distintos de cero

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^L \hat{\sigma}_+^R |11\rangle &= \mathbb{I}|1\rangle \langle 1| \hat{\sigma}_+ = |10\rangle, \\ \mathbb{I}^L \hat{\sigma}_+^R |01\rangle &= \mathbb{I}|0\rangle \langle 1| \hat{\sigma}_+ = |00\rangle, \end{aligned}$$

donde usamos el hecho de que  $\hat{U}^L \hat{V}^R |ij\rangle = \hat{U}|i\rangle \langle j| \hat{V}$ .

Ahora introduzcamos los superoperadores bosónicos  $\check{b}_{ij}, \check{b}_{ij}^\dagger$ . El superoperador  $\check{b}_{ij}$  aniquila al estado  $|ij\rangle$  mientras que el superoperador  $\check{b}_{ij}^\dagger$  lo crea. Para hacer explícito esto, para los elementos de la base de  $\mathcal{L}_4$  usamos la notación  $|(\alpha_{00})^{\alpha_{00}} (\alpha_{01})^{\alpha_{01}} (\alpha_{10})^{\alpha_{10}} (\alpha_{11})^{\alpha_{11}}\rangle$  con  $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \{0, 1\}$ . Así

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |(00)^1 (01)^0 (10)^0 (11)^0\rangle, \\ |01\rangle &= |(00)^0 (01)^1 (10)^0 (11)^0\rangle, \\ |10\rangle &= |(00)^0 (01)^0 (10)^1 (11)^0\rangle, \\ |11\rangle &= |(00)^1 (01)^0 (10)^0 (11)^1\rangle. \end{aligned}$$

Para ejemplificar, veremos que  $\check{b}_{10}, \check{b}_{10}^\dagger$  actúan como

$$\begin{aligned} \check{b}_{10}^\dagger |(\alpha_{00})^{\alpha_{00}} (\alpha_{01})^{\alpha_{01}} (\alpha_{10})^{\alpha_{10}} (\alpha_{11})^{\alpha_{11}}\rangle &= \sqrt{\alpha_{10} + 1} |(\alpha_{00})^{\alpha_{00}} (\alpha_{01})^{\alpha_{01}} (\alpha_{10})^{\alpha_{10}+1} (\alpha_{11})^{\alpha_{11}}\rangle, \\ \check{b}_{10} |(\alpha_{00})^{\alpha_{00}} (\alpha_{01})^{\alpha_{01}} (\alpha_{10})^{\alpha_{10}} (\alpha_{11})^{\alpha_{11}}\rangle &= \sqrt{\alpha_{10}} |(\alpha_{00})^{\alpha_{00}} (\alpha_{01})^{\alpha_{01}} (\alpha_{10})^{\alpha_{10}-1} (\alpha_{11})^{\alpha_{11}}\rangle. \end{aligned}$$

Tendremos reglas semejantes para los restantes superoperadores bosónicos.



Usando lo anterior nos daremos cuenta que el superoperador  $\mathbb{I}^L \hat{\sigma}_+^R$  admite el mapeo

$$\mathbb{I}^L \hat{\sigma}_+^R \rightarrow \check{b}_{10}^\dagger \check{b}_{11} + \check{b}_{00}^\dagger \check{b}_{01}.$$

Todo lo dicho ha sido para una partícula. Para el sistema de  $N$  partículas introduciremos los superoperadores colectivos, los cuales definiremos como

$$\check{A}_+^{ij mn} = \sum_{\mu=1}^N \check{b}_{ij}^{\dagger(\mu)} \check{b}_{mn}^{(\mu)}, \quad \check{A}_-^{ij mn} = \sum_{\mu=1}^N \check{b}_{mn}^{\dagger(\mu)} \check{b}_{ij}^{(\mu)}, \quad \check{A}_3^{ij mn} = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{2} \left( \check{b}_{ij}^{\dagger(\mu)} \check{b}_{ij}^{(\mu)} - \check{b}_{mn}^{\dagger(\mu)} \check{b}_{mn}^{(\mu)} \right). \quad (2.1)$$

Para nuestro ejemplo llegamos a

$$\sum_{\mu} \mathbb{I}^{L(\mu)} \hat{\sigma}_+^{R(\mu)} = \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00}.$$

Los superoperadores colectivos introducidos actúan sobre operadores que viven en  $\mathcal{S}(\mathcal{L}_{M^2}^{\otimes N})$ . Para el caso del sistema de  $N$  átomos de dos niveles podemos tener como base operadores definidos como

$$\hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} = \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \sum_P \check{P} \left( |00\rangle^{\otimes n_{00}} |01\rangle^{\otimes n_{01}} |10\rangle^{\otimes n_{10}} |11\rangle^{\otimes n_{11}} \right), \quad (2.2)$$

donde la suma sobre  $P$  corresponde a todas las posibles permutaciones entre partículas. Ya que  $Tr(|11\rangle) = 1 = Tr(|00\rangle)$  y  $Tr(|01\rangle) = 0 = Tr(|10\rangle)$  se tiene que los estados anteriores están normalizados solo cuando  $n_{10} = 0 = n_{01}$ . Cuando esto ocurre podemos considerar a estos operadores como operadores de densidad, i.e., con una realidad física. Por otro lado, cuando  $n_{10} \neq 0$  o  $n_{01} \neq 0$  la traza del operador es cero, por tanto no representan un estado físico. De ahora en adelante nos referiremos a los operadores definidos en (2.2) como *operadores simétricos*, los cuales juegan un rol semejante al de la representación de estados de ocupación, repasados anteriormente, y cumplen con la restricción  $N = n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}$ . A modo de ejemplo consideremos

$$\hat{Q}_{0 \ 1}^{2 \ 0} = \frac{1}{3} \left( |00\rangle |00\rangle |11\rangle + |00\rangle |11\rangle |00\rangle + |11\rangle |00\rangle |00\rangle \right),$$

que representa el estado mixto de dos átomos en el estado base y uno en el estado excitado.

Ya que para un partícula se tiene

$$Tr \left( (|ij\rangle^\dagger |mn\rangle) Tr (|j\rangle \langle i| |m\rangle \langle n|) = \delta_{im} Tr (|j\rangle \langle n|) = \delta_{im} \delta_{jn}$$

se desprende que

$$Tr \left( \check{P}' \left( |00\rangle^{\dagger \otimes n'_{00}} |01\rangle^{\dagger \otimes n'_{01}} |10\rangle^{\dagger \otimes n'_{10}} |11\rangle^{\dagger \otimes n'_{11}} \right) \check{P} \left( |00\rangle^{\otimes n_{00}} |01\rangle^{\otimes n_{01}} |10\rangle^{\otimes n_{10}} |11\rangle^{\otimes n_{11}} \right) \right) = \dots \\ \dots = \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}} \delta_{\check{P}', \check{P}},$$

donde  $\check{P}, \check{P}'$  son superoperadores de intercambio de partículas. Así podemos calcular el producto interno entre operadores simétricos

$$Tr \left( \hat{Q}_{n'_{10} n'_{11}}^{n'_{00} n'_{01}} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \right) = \frac{n'_{00}! n'_{01}! n'_{10}! n'_{11}!}{N!} \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}} \sum_{P'} \sum_P \delta_{\check{P}', \check{P}} \\ = \left( \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \right)^2 \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}} \sum_P 1 \\ = \left( \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \right)^2 \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}} \frac{N!}{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!} \\ = \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}}.$$

Vemos que tenemos una relación de dualidad que no está normalizada. De lo anterior, para el caso de los estados de traza uno tendremos

$$\frac{n_{00}!n_{11}!}{N!} = \text{Tr} \left( \hat{Q}^\dagger \begin{matrix} n_{00} & 0 \\ 0 & n_{11} \end{matrix} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & 0 \\ 0 & n_{11} \end{matrix} \right) = \text{Tr} \left( \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & 0 \\ 0 & n_{11} \end{matrix} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & 0 \\ 0 & n_{11} \end{matrix} \right) = \text{Tr} \left( \left[ \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & 0 \\ 0 & n_{11} \end{matrix} \right]^2 \right).$$

El valor anterior es menor a uno cuando  $n_{11} = N$  ó  $n_{00} = N$ , por lo que los operadores simétricos  $\hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & 0 \\ 0 & n_{11} \end{matrix}$  corresponden a estados mixtos, mientras que  $\hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$  y  $\hat{Q} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{matrix}$  son estados puros, y representan el estado de todos los átomos en el estado base o todos los átomos excitados respectivamente.

Si aplicamos el superoperador  $\check{A}_+^{ij}$  a un operador simétrico obtenemos a  $\hat{Q}$  disminuido en uno la etiqueta  $n_{kl}$  y aumentado en uno la etiqueta  $n_{ij}$ , multiplicado por el número  $n_{ij}$ . Al aplicar el superoperador  $\check{A}_-^{ij}$  aumentaremos en uno la etiqueta  $n_{ij}$  y disminuirémos en uno la etiqueta  $n_{kl}$ , multiplicado por  $n_{kl}$ . El superoperador  $\check{A}_3^{ij}$  tendrá como eigenvector a los operadores  $\hat{Q}$ 's, con eigenvalor

$$\frac{1}{2} (n_{ij} - n_{kl}).$$

Como ejemplo tenemos

$$\begin{aligned} \check{A}_+^{11} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} &= n_{10} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}-1 & n_{11}+1 \end{matrix}, \\ \check{A}_-^{11} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} &= n_{11} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}+1 & n_{11}-1 \end{matrix}, \\ \check{A}_3^{11} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} &= \frac{1}{2} (n_{11} - n_{10}) \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix}, \end{aligned}$$

Finalmente cabe mencionar que la dimensión del subespacio  $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ , reportado por Sarkar y Satchell [32] y Hartmann [18], es

$$D(N) = \binom{N+3}{N} = \frac{1}{6} (N+1)(N+2)(N+3),$$

por lo el espacio en el que describimos al sistema crece como  $\mathcal{O}(N^3)$ , en vez de  $4^N$  con el que crece el espacio completo. Así, lidiamos con un menor número de grados de libertad, por tanto es más fácil obtener soluciones en el subespacio simétrico.

### 2.3. Dinámica para los sistemas cuánticos abiertos

Los operadores de densidad nos ayudarán a representar estados de sistemas cuánticos abiertos. La evolución de estos objetos, pertenecientes al espacio de Liouville, son descritos por mapeos lineales que denominamos superoperados. Pero necesitamos saber las características que queremos satisfagan tales mapeos para que puedan modelar dinámicas físicas, i.e. dado inicialmente un operador de densidad  $|\rho\rangle$  queremos que la transformación  $\check{T}(|\rho\rangle)$  también sea un operador de densidad [28]. Si recordamos las propiedades de un operador densidad, introducidos en el capítulo anterior, nuestros mapeos deben satisfacer

- $\check{T}(\alpha |\rho\rangle + \beta |\rho'\rangle) = \alpha \check{T}(|\rho\rangle) + \beta \check{T}(|\rho'\rangle)$ .
- $\check{T}(|\rho\rangle)^\dagger = \check{T}(|\rho\rangle)$ .

- $Tr(\check{T}(|\rho\rangle)) = 1.$
- $\langle \phi | \check{T}(|\rho\rangle) | \phi \rangle \geq 0, \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}.$

Un último requerimiento es el llamado *completamente positivo*. Supongamos un sistema  $A$  que previamente interactuó con un sistema  $B$  por lo que el sistema  $AB$  está enredado y está descrito por  $|\rho_{AB}\rangle$ . Si sobre el sistema  $A$  actúa el superoperador  $\check{T}_A$ , sobre el sistema completo actuará el mapeo  $\check{T}_A \otimes \check{\mathbb{I}}_B$ . Así, pediremos que el mapeo completo sea positivo

$$\langle \phi_{AB} | \check{T}_A \otimes \check{\mathbb{I}}_B | \rho_{AB} \rangle | \phi_{AB} \rangle \geq 0, \quad \forall |\phi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (2.3)$$

Recalquemos que, con lo anterior, hemos definido las propiedades que buscamos en los mapeos lineales que describan evoluciones físicas, es decir, dado inicialmente un operador de densidad queremos que la transformación temporal dé como resultado, otro operador densidad. A estos mapeos los denominaremos *mapeos cuánticos*.

Para una operación cuántica sobre un sistema  $S$  tenemos un resultado importante conocido como *representación de suma de operadores* en el cual cualquier mapeo cuántico puede ser expresado como una suma de términos de la forma

$$\check{T}(|\rho\rangle) = \sum_k \hat{E}_k |\rho\rangle \hat{E}_k^\dagger, \quad k \leq M^2 \quad (2.4)$$

siendo los  $\hat{E}_k$  operadores del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_S$ . El número de términos  $k$  solo depende de la dimensión de espacio de nuestro sistema  $S$ , y es independiente del tamaño del ambiente  $A$  con el que esté interactuando. Esta representación podemos aplicarla cuando mapeamos estados inicialmente no enredados, o de otra forma, que al hacer el mapeo no haya enredamiento entre el sistema  $S$  y el ambiente  $A$ . A los operadores  $\hat{E}_k$  presentes en la representación se les conoce como *operadores de Kraus* y cumplen la normalización

$$\sum_k \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k = \mathbb{I}, \quad (2.5)$$

lo cual asegura que la traza del operador densidad sea preservada durante el mapeo. Cabe mencionar que esta representación no es única.

Describamos la evolución de un sistema  $S$  en interacción con un ambiente (reservatorio)  $A$ , en equilibrio térmico, si inicialmente el estado es separable. Supongamos que podemos tener una ecuación diferencial de primer orden para la evolución temporal de  $|\rho_S\rangle$ . La derivada es proporcional al incremento  $|\rho_S(t + \tau)\rangle - |\rho_S(t)\rangle$ , siendo  $\tau$  el intervalo de tiempo en el que queremos comparar. Queremos poder usar la representación de suma de operadores para escribir el mapeo  $|\rho_S(t + \tau)\rangle$ , veamos las condiciones para que esto sea posible.

Aunque solo hablamos de  $|\rho_S(t)\rangle$ , en realidad describimos un sistema  $S + A$  en el que hemos trazado parcialmente los grados de libertad del ambiente, pero de manera completa al iniciar la comparación (al tiempo  $t$ ) pedimos que sea un estado separable

$$|\rho_{SA}(t)\rangle = |\rho_S(t)\rangle \otimes |\rho_A\rangle, \quad (2.6)$$

siendo  $|\rho_A\rangle$  un estado estacionario debido al equilibrio térmico del reservatorio. Al dejar evolucionar  $S + A$  un tiempo  $\tau$ , de manera general no obtenemos algo separable. Si no imponemos condiciones a nuestro sistema no podemos asegurar que  $|\rho_{SA}(t + \tau)\rangle = |\rho_S(t + \tau)\rangle \otimes |\rho_A\rangle$ , lo que nos hace imposible usar la representación con operadores de Kraus para escribir la evolución temporal.

La condición que necesitamos imponer es conocida como *aproximación de Markov*, que asegura que la evolución sea local en el tiempo, i.e., que  $|\rho_S(t + \tau)\rangle$  este determinada solamente por  $|\rho_S(t)\rangle$ , pues de manera general también pueden haber contribuciones de  $|\rho_S\rangle$  de tiempos anteriores. Recordemos que

al querer tratar un sistema disipativo, existe información del estado  $S$  que fluye hacia el ambiente  $A$ . Esta información puede ser retenida por el ambiente durante cierto tiempo, pudiendo fluir nuevamente del ambiente al sistema  $S$ . Por lo que la idea clave es que el intervalo de tiempo en el consideramos la evolución, el cual denotabamos por  $\tau$ , sea mucho mayor al tiempo que le toma al ambiente “olvidar” la información recibida del sistema. El tratamiento de la aproximación Markoviana puede ser encontrado en Carmichael [7] y Breuer [4].

Si es posible usar la aproximación de Markov en el caso que estudiamos, la derivada temporal del operador de densidad  $S$  es

$$\frac{d}{dt} |\rho_S(t)\rangle \simeq \frac{|\rho_S(t+\tau)\rangle - |\rho_S(t)\rangle}{\tau} = \frac{\check{L}_\tau |\rho_S(t)\rangle - |\rho_S(t)\rangle}{\tau}. \quad (2.7)$$

Sea  $N_k$ , el número de términos en la representación de  $\check{L}_\tau$ , entonces mediante operadores de Kraus tenemos la expresión

$$\check{L}_\tau |\rho_S(t)\rangle = \sum_{k=0}^{N_k-1} \hat{E}_k(\tau) |\rho_S(t)\rangle \hat{E}_k^\dagger(\tau). \quad (2.8)$$

Tomemos  $\tau$  como un parámetro infinitesimal. Entonces al desarrollar a primer orden tendremos  $|\rho_S(t+\tau)\rangle = |\rho_S(t)\rangle + \tau |\delta\rho_S\rangle$ . Por tanto tenemos la igualdad

$$\sum_{k=0}^{N_k-1} \hat{E}_k(\tau) |\rho_S(t)\rangle \hat{E}_k^\dagger(\tau) = |\rho_S(t)\rangle + \tau |\delta\rho_S\rangle. \quad (2.9)$$

La expresión anterior hace evidente que uno de los  $\hat{E}_k$  debe contener a la identidad  $\mathbb{I}$ . Sin pérdida de generalidad hagamos

$$\hat{E}_0(\tau) = \mathbb{I} - i\hat{K}\tau + \hat{O}(\tau^2), \quad (2.10)$$

con  $\hat{K}$  un operador independiente de  $\tau$ . Consideremos las partes hermíticas y anti-hermíticas de  $\hat{K}$  dados por

$$\hat{H} = \hbar \frac{\hat{K} + \hat{K}^\dagger}{2} \quad y \quad \hat{J} = i \frac{\hat{K} - \hat{K}^\dagger}{2} \quad \implies \quad \hat{K} = \frac{\hat{H}}{\hbar} - i\hat{J}. \quad (2.11)$$

De lo anterior, hasta primer orden tendremos

$$\hat{E}_0(\tau) |\rho_S(t)\rangle \hat{E}_0^\dagger(\tau) = |\rho_S(t)\rangle - \frac{i\tau}{\hbar} [\hat{H}, |\rho_S(t)\rangle] - \tau \{ \hat{J}, |\rho_S(t)\rangle \}. \quad (2.12)$$

Para los demás elementos  $\hat{E}_k$  con  $k \neq 0$ , la suma de Kraus son del orden de  $\tau$ , por lo que hacemos la identificación

$$\hat{E}_k(\tau) = \sqrt{\tau} \hat{B}_k, \quad (2.13)$$

con  $\hat{B}_k \neq \hat{B}_k(\tau)$ . Usando la condición de normalización (2.5) llegamos a que

$$\mathbb{I} = \sum_{k=0}^{N_k-1} \hat{E}_k(\tau) \hat{E}_k^\dagger(\tau) = \mathbb{I} - 2\tau \hat{J} + \tau \sum_{k \neq 0} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \quad \implies \quad \hat{J} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k. \quad (2.14)$$

Uniendo todo lo anterior en (2.7) llegamos a la forma para la ecuación maestra, llamada *de Lindblad*, es

$$\frac{d}{dt} |\rho_S\rangle = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, |\rho_S\rangle] + \sum_{k \neq 0} \left( \hat{B}_k |\rho_S\rangle \hat{B}_k^\dagger - \frac{1}{2} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k |\rho_S\rangle - \frac{1}{2} |\rho_S\rangle \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \right). \quad (2.15)$$

Esta derivación, que puede encontrarse en [19], solo hace uso de la aproximación de Markov y de la representación de suma de operadores de Krauss, los cuales son de carácter general y no dependen del sistema física que se esté modelando. Los operadores  $\hat{B}_k$ , de modo heurístico, pueden ser visualizados como 'operadores de salto cuántico'. El primer término, que corresponde a la parte hermítica de  $\hat{E}_0$  es una contribución del tipo hamiltoniano que vimos para sistemas cerrados. Este término desplaza los niveles de energía debido al acoplamiento del sistema con el ambiente. En lo futuro absorberemos este hamiltoniano efectivo dentro del hamiltoniano del sistema  $\mathcal{S}$ .

Para finalizar tratemos de forma heurística la forma de la ecuación para describir un átomo de dos niveles inmerso en un campo de radiación en equilibrio térmico. Para identificar los operadores  $\hat{B}_k$  debemos de ver que saltos cuánticos pueden afectar el sistema  $\mathcal{S}$ , y directamente podemos ver que las posibilidades son, que el átomo pase del estado base al excitado dado por  $\hat{\sigma}_+$ , o que pase del estado excitado al estado base, donde participa  $\hat{\sigma}_-$ . Debemos de introducir la evolución unitaria dada por el hamiltoniano del átomo libre. Finalmente debemos introducir coeficientes que pesen estos eventos, y que estarán ligados con los modos del ambiente  $\mathcal{A}$  que se encuentren en cuasi-resonancia con la transición entre niveles. La ecuación maestra de Lindblad toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\rho_S\rangle &= -\frac{i\omega_{10}}{2} [\hat{\sigma}_3, |\rho_S\rangle] + \gamma(1 + n_{vo}) \left( \hat{\sigma}_- |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_-^\dagger - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_-^\dagger \hat{\sigma}_- |\rho_S\rangle - \frac{1}{2} |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_-^\dagger \hat{\sigma}_- \right) \\ &\quad + \gamma n_{vo} \left( \hat{\sigma}_+ |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_+^\dagger - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^\dagger \hat{\sigma}_+ |\rho_S\rangle - \frac{1}{2} |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_+^\dagger \hat{\sigma}_+ \right) \\ &= -\frac{i\omega_{10}}{2} [\hat{\sigma}_3, |\rho_S\rangle] + \gamma(1 + n_{vo}) \left( \hat{\sigma}_- |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_+ - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- |\rho_S\rangle - \frac{1}{2} |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \right) \\ &\quad + \gamma n_{vo} \left( \hat{\sigma}_+ |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_- - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ |\rho_S\rangle - \frac{1}{2} |\rho_S\rangle \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

El proceso que describimos en el segundo término del lado derecho es la emisión de fotones por parte de la desexcitación del átomo. En la tasa de emisión observamos el coeficiente  $(1 + n_{vo})$ , donde el 1 implica procesos de emisión espontánea y el  $n_{vo}$  la emisión estimulada donde el átomo emite modos que contienen  $n_{vo}$  fotones térmicos en promedio. El tercer término de la expresión corresponde a la absorción de modos para la excitación del átomo.

Es posible extender lo anterior cuando consideramos un sistema  $N$  átomos de dos niveles. La ecuación maestra para este caso es

$$\frac{d}{dt} |\rho\rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu} [\hat{H}^{\mu}, |\rho\rangle] + \sum_{\mu, \nu} \check{L}^{\mu, \nu} |\rho\rangle,$$

donde tenemos los lindbladianos (definimos  $N_0^+ := N_0 + 1$ )

$$\begin{aligned} \check{L}^{\mu, \nu} |\rho\rangle &= N_0^+ \gamma_{10}^{\mu\nu} \left( \hat{\sigma}_-^{\nu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_+^{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{\mu} \hat{\sigma}_-^{\nu} |\rho\rangle - \frac{1}{2} |\rho\rangle \hat{\sigma}_+^{\mu} \hat{\sigma}_-^{\nu} \right) \\ &\quad + N_0 \gamma_{10}^{\mu\nu} \left( \hat{\sigma}_+^{\nu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_-^{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_-^{\nu} \hat{\sigma}_+^{\mu} |\rho\rangle - \frac{1}{2} |\rho\rangle \hat{\sigma}_-^{\nu} \hat{\sigma}_+^{\mu} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

hemos etiquetado a las partículas del sistema con  $\mu, \nu$ . Dentro de la expresión tenemos la constante

$$N_0 := N(\omega_0) = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_0) - 1} \quad (2.18)$$

que corresponde al número promedio de fotones en el modo  $\omega_0$ , frecuencia de transición entre los niveles del átomo. Por otro lado tenemos las tasas de emisión espontánea  $\gamma_{ij}^{\mu\mu}$  los cuales corresponden a la emisión espontánea del átomos  $\mu$  de manera independiente. De manera aproximada, estos términos son los únicos que contribuyen si los átomos se encuentran alejados, a una distancia mucho mayor en comparación a la longitud de onda de la luz emitida. Además tenemos los *coeficientes de acoplamiento*

entre átomos,  $\gamma_{10}^{\mu\nu}$  con  $\mu \neq \nu$ , que, valiéndose de la redundancia, describen el acoplamiento entre los átomos del sistema, mediados a través de los modos del ambiente y que conduce a efectos colectivos como la superradiancia. En la Figura 2.1 se representa esquemáticamente la emisión de los átomos de manera independiente (disipación individual, rayos azules), donde de manera general los fotones emitidos se propagan en cualquier dirección, y la emisión de los átomos de manera colectiva (disipación colectiva, flecha roja), donde para el caso de una cavidad, la dirección de emisión se da en el modo de resonancia de esta.

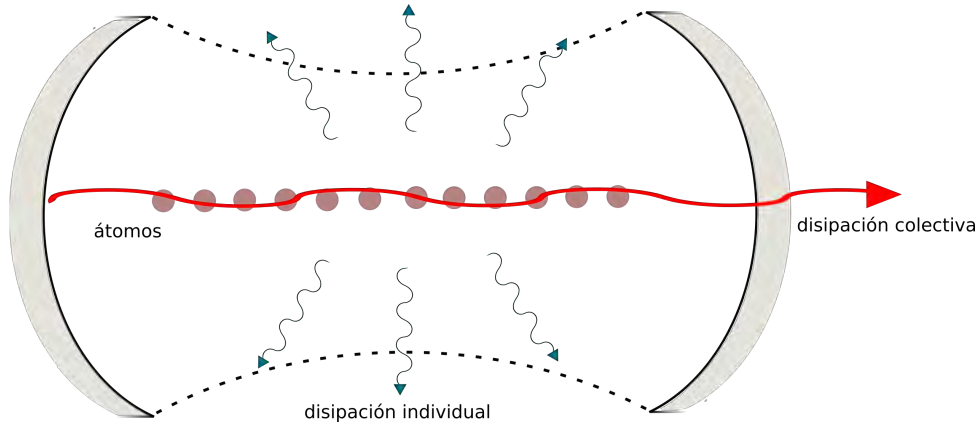


Figura 2.1: Representación esquemática de la disipación individual y la disipación colectiva.

## Capítulo 3

# Eigenvalores en el subespacio simétrico

Los resultados mostrados en este capítulo y el siguiente forman la contribución original de este trabajo. Comenzamos calculando el conjunto de eigenvectores para el lindbladiano para disipación de  $N$  átomos de dos niveles acoplados a baños térmicos independientes. Encontrando los duales de los eigenvectores mostraremos que el conjunto es ortogonal, y veremos que su dimensión coincide con la del subespacio simétrico de Liouville. Finalmente presentamos la solución analítica para la disipación individual.

### 3.1. Base de decaimiento

Empecemos describiendo la utilidad de tener una base de eigenvectores de un lindbladiano, el cual también es denominada *base de decaimiento*. La discusión planteada la podemos encontrar en Briegel [5].

Supongamos que al describir la dinámica del sistema en el esquema de interacción la evolución de nuestro sistema depende sólo de la aplicación del superoperador disipativo, es decir,  $|\dot{\rho}\rangle = \check{L}|\rho\rangle$ . Queremos encontrar en el espacio de Liouville un operador  $|P\rangle$  que satisfaga

$$\check{L}|P\rangle = \lambda|P\rangle, \quad (3.1)$$

con  $\lambda$ , número complejo, pues recordemos,  $\check{L}$  no es hermitiano. De forma más ambiciosa buscamos una colección de eigenvalores  $\lambda$  con sus respectivos eigenestados  $|P_\lambda\rangle$  que formen una base para el espacio de Liouville. Recordemos que el superoperador disipativo  $\check{L}$  no es un mapeo lineal hermítico, por lo que puede no tener un conjunto de eigenvectores que forme una base del espacio. Con esto recalcamos que la base de decaimiento no necesariamente existe o puede ser una base sobrecompleta.

En caso de que exista la base de decaimiento, podemos resolver de manera directa la evolución del sistema. Consideremos el estado inicial  $|\rho(0)\rangle$ , este se podrá escribir como una combinación lineal de los eigenestados de la forma

$$|\rho(0)\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} |P_{\lambda}\rangle, \quad (3.2)$$

y por tanto el estado a cualquier tiempo  $t$  es

$$|\rho(t)\rangle = e^{\check{L}t} |\rho(0)\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} e^{\lambda t} |P_{\lambda}\rangle. \quad (3.3)$$

Una vez obtenida la base  $\{|P_\lambda\rangle\}$ , resolver la evolución de nuestro estado se reduce a encontrar los coeficientes  $c_\lambda$  de la expansión. Para ello es necesario encontrar los estados  $(P_\lambda|$ , los cuales satisfacen la relación de dualidad

$$(P_{\lambda'}|P_\lambda) = \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (3.4)$$

Teniendo los eigenestados y sus duales, los coeficientes de la expansión simplemente serán iguales a

$$c_\lambda = (P_\lambda|\rho(0)). \quad (3.5)$$

Los eigenestados  $|P_\lambda\rangle$ , los cuales denominaremos *eigenestados derechos*, son encontrados mediante la relación (3.1). Ahora necesitamos un método para encontrar los estados duales. Dada la naturaleza del superoperador  $\check{L}$  y dado un operador  $\hat{O}$  del espacio de Liouville, es posible que el superoperador actúe a la izquierda del operador,  $\check{L}\hat{O}$  ó que la acción se dé del lado derecho  $\hat{O}\check{L}$ . Sea  $(P_\lambda|$ , un objeto tal que

$$(P_\lambda|\check{L} = (P_\lambda|\lambda, \quad (3.6)$$

nuevamente con  $\lambda$  un número complejo. A los objetos  $(P_\lambda|$  los llamaremos *eigenestados izquierdos*.

Chequemos que al definir  $|P_\lambda\rangle$  como en (3.6), llegamos a la relación de dualidad. Si consideramos la relación  $(P_{\lambda'}|\check{L}|P_\lambda\rangle)$  podemos tener dos resultados. Primeramente usando el hecho de que  $|P_\lambda\rangle$  es eigenestado derecho llegamos a la igualdad

$$(P_{\lambda'}|\check{L}|P_\lambda\rangle) = \lambda(P_{\lambda'}|P_\lambda\rangle).$$

El otro resultado se obtiene actuando  $\check{L}$  sobre el eigenvector izquierdo, lo que nos produce

$$(P_{\lambda'}|\check{L}|P_\lambda\rangle) = \lambda'(P_{\lambda'}|P_\lambda\rangle).$$

Restando ambas expresiones llegamos a que  $(\lambda' - \lambda)(P_{\lambda'}|P_\lambda\rangle) = 0$ . Directamente tenemos la relación de ortogonalidad,

$$(P_{\lambda'}|P_\lambda\rangle) = 0, \quad \lambda \neq \lambda',$$

Al igual que en el espacio de Hilbert, tomamos de manera convencional la normalidad de los estados, así llegamos a la relación de dualidad, cuando el eigenestado derecho e izquierdo tengan el mismo eigenvalor

$$(P_{\lambda'}|P_\lambda\rangle) = \delta_{\lambda',\lambda}.$$

Cabe resaltar, que no necesariamente se satisface que  $(P_\lambda| = |P_\lambda\rangle^\dagger$  debido a que el superoperador  $\check{L}$  es no-hermitiano. Por lo mismo, no podemos asegurar que cualquier conjunto de eigenvectores forme una base para el espacio de Liouville, esto debe demostrarse específicamente para cada caso.

La discusión planteada obedece al caso no-degenerado. Al igual que en el espacio de Hilbert, para el caso degenerado debemos de diagonalizar el subespacio correspondiente. El como relacionar los eigenestados derechos e izquierdos para este caso, se discutirá más adelante.

En la misma referencia [5] se muestran algunos cálculos de bases de decaimiento. Se muestra el resultado de la disipación de un átomo de dos niveles y la disipación de fotones, los cuales han servido para simular, entre otras cosas, el modelo del laser de un átomo.

## 3.2. Descripción de la disipación individual

Aunque la observación anterior sobre la base de decaimiento se dió para todo el espacio de Liouville, la discusión se satisface para todo subespacio del mismo, especialmente para el subespacio simétrico sobre el cuál se centra este trabajo.



Como hemos recalado anteriormente, obtendremos la base de decaimiento considerando la disipación individual de los átomos. Para el caso de  $N$  átomos de dos niveles el lindbladiano general involucra la forma (2.17). Primeramente consideremos el caso  $\gamma_{10}^{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$ , i.e., no consideramos acoplamientos entre átomos. Los únicos coeficientes distintos de cero son,  $\gamma_{10}^{\mu\mu} = \gamma_{10}$  para  $\mu = 1, \dots, N$ . Así, el lindbladiano con el que trabajaremos es

$$\sum_{\mu} \check{L}_{10}^{\mu} = \check{L}_{10} + N_0 \left( \check{L}_{10} + \check{L}_{10}^{\beta} \right), \quad (3.7)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} \check{L}_{10} |\rho\rangle &:= \gamma_{10} \sum_{\mu} \left( \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle - \frac{1}{2} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} \right), \\ \check{L}_{10}^{\beta} |\rho\rangle &:= \gamma_{10} \sum_{\mu} \left( \hat{\sigma}_{+}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{-}^{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} |\rho\rangle - \frac{1}{2} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{-}^{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \right). \end{aligned}$$

Simplificaremos aún más nuestro tratamiento al hacer  $N_0 = 0$  y, al adherirnos a un esquema de interacción, la evolución temporal de nuestro estado solo estará gobernado por  $\check{L}_{10}$ .

$\check{L}_{10}$  es un superoperador que es invariante ante intercambio de partículas, por lo que podemos reescribirlo en términos de los superoperadores colectivos  $\check{A}_{+}^{ij}$ . En el Apéndice A se presenta el mapeo de algunos superoperadores a superoperadores colectivos que nos ayudarán en la traducción. La expresión matemática de  $\check{L}_{10}$  es reescrita como

$$\begin{aligned} \check{L}_{10} |\rho\rangle &= \gamma_{10} \left[ \sum_{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} \right] \\ &= \gamma_{10} \left[ \check{A}_{+}^{00} - \frac{1}{2} \left( \check{A}_{+}^{11} + \check{A}_{+}^{10} \right) - \frac{1}{2} \left( \check{A}_{+}^{11} + \check{A}_{+}^{01} \right) \right] |\rho\rangle \\ &= \gamma_{10} \left[ \check{A}_{+}^{00} - \check{A}_{+}^{11} - \frac{1}{2} \left( \check{A}_{+}^{10} + \check{A}_{+}^{01} \right) \right] |\rho\rangle. \end{aligned}$$

### 3.3. Eigenvectores derechos para $\check{L}_{10}$

Reescrito  $\check{L}_{10}$  en base a superoperadores colectivos, podemos usar como base del subespacio simétrico a los operadores simétricos,  $\hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}$ . Primeramente buscaremos los eigenestados derechos de la base de decaimiento, así que proponemos la ecuación de eigenvalores

$$\check{L}_{10} |\rho_{sym}\rangle = \lambda |\rho_{sym}\rangle,$$

donde buscamos que la parte real de  $\lambda$  sea un número no-positivo debido al decaimiento que deseamos modelar. Los eigenestados serán combinación lineal de los operadores simétricos

$$|\rho_{sym}\rangle = \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01} n_{10} n_{11}} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}. \quad (3.8)$$

Sustituyamos está forma en la ecuación de eigenvalores

$$\begin{aligned} \check{L}_{10} |\rho_{sym}\rangle &= \gamma_{10} \left[ \check{A}_{+}^{00} - \check{A}_{+}^{11} - \frac{1}{2} \left( \check{A}_{+}^{10} + \check{A}_{+}^{01} \right) \right] |\rho_{sym}\rangle \\ &= \gamma_{10} \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01} n_{10} n_{11}} \left[ n_{11} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}-1}^{n_{00}+1 n_{01}} - n_{11} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} - \frac{n_{10} + n_{01}}{2} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \right] \\ &= \lambda \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01} n_{10} n_{11}} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Debido a la completéz de la base podemos reagrupar los términos usando los estados  $\hat{Q}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}}$  e igualar los coeficientes a cero. Haciendo esto llegamos a la recurrencia

$$(n_{11} + 1)c^{\begin{smallmatrix} n_{00}-1 & n_{01} \\ n_{10} & n_{11}+1 \end{smallmatrix}} - \left( n_{11} + \frac{n_{10} + n_{01}}{2} + \frac{\lambda}{\gamma_{10}} \right) c^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} = 0.$$

Al usar la constricción  $n_{01} + n_{10} = N - n_{11} - n_{00}$ , la recurrencia queda reescrita como

$$c^{\begin{smallmatrix} n_{00}-1 & n_{01} \\ n_{10} & n_{11}+1 \end{smallmatrix}} = \frac{1}{n_{11} + 1} \left( \frac{N}{2} + \frac{n_{11} - n_{00}}{2} + \frac{\lambda}{\gamma_{10}} \right) c^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}}. \quad (3.10)$$

Supongamos que la relación de recurrencia anterior puede obtener por la forma

$$c^{\begin{smallmatrix} n_{00}-1 & n_{01} \\ n_{10} & n_{11}+1 \end{smallmatrix}} = \frac{n_{11} - \delta}{n_{11} + 1} c^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}}, \quad (3.11)$$

siendo  $\delta$  un entero no-negativo. Nuestro plan al hacer esto es usar a  $\delta$  para cortar la relación de recurrencia para cierto valor de  $n_{11}$ , así para valores de  $n_{11} > \delta$ , los coeficientes son cero. Para lograr lo anterior necesitamos que  $\lambda$  tome el valor

$$\lambda_{\alpha, \delta} = -\gamma_{10} \left[ \frac{N - \alpha}{2} + \delta \right], \quad (3.12)$$

donde  $\alpha := n_{00} + n_{11}$ , y el cual es constante dado el eigenvalor. En función de  $\alpha$ , la relación (3.11) se reduce a la expresión

$$c^{\begin{smallmatrix} \alpha-(n_{11}+1) & n_{01} \\ n_{10} & n_{11}+1 \end{smallmatrix}} = \frac{n_{11} - \delta}{n_{11} + 1} c^{\begin{smallmatrix} \alpha-n_{11} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}}.$$

Recordemos que  $\delta$  será un parámetro que nos permita cortar la relación de recurrencia para los valores que pueda tomar  $n_{11}$ , por tanto se satisface  $0 \leq \delta \leq \alpha$ . Para resolver la recurrencia tomemos como condición inicial  $c^{\begin{smallmatrix} \alpha & n_{01} \\ n_{10} & 0 \end{smallmatrix}} = 1$ , con lo cual llegamos a la solución

$$c^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} = c^{\begin{smallmatrix} \alpha-n_{11} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}} = \begin{cases} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} & \text{si } n_{11} \leq \delta \\ 0 & \text{si } n_{11} > \delta \end{cases}.$$

El eigenvalor estará fijado por  $\alpha$  y  $\delta$ , por lo que habrá una degeneración dado por los valores que puedan tomar  $n_{10}$ ,  $n_{01}$ . Si designamos  $n = n_{10}$ , se tendrá  $n_{01} = N - \alpha - n$ . Los eigenestados que obtenemos son

$$|\alpha, \delta\rangle_n = \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \hat{Q}^{\begin{smallmatrix} \alpha-n_{11} & N-\alpha-n \\ n & n_{11} \end{smallmatrix}}.$$

¿Cuántos estados tenemos? Observemos que para cada etiqueta  $\alpha$ ,  $\delta$  tenemos  $N - \alpha + 1$  estados. Esto para  $\alpha + 1$  valores de  $\delta$ , y  $0 \leq \alpha \leq N$ . Por tanto el número total de eigenestados que construimos es

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\delta=0}^{\alpha} (N + 1 - \alpha) &= \sum_{\alpha=0}^N (\alpha + 1)(N + 1 - \alpha) = (N + 1) + \sum_{\alpha=1}^N (\alpha + 1)(N + 1 - \alpha) \\ &= (N + 1) + \frac{N(N + 1)(N + 1)}{2} + N(N + 1) - \frac{N(N + 1)}{2} - \frac{N(N + 1)(2N + 1)}{6} \\ &= \frac{(N + 1)(N + 2)(N + 3)}{6}, \end{aligned}$$

que es la dimensión del subespacio simétrico (2.3). De momento tenemos un conjunto de eigenestados derechos con la misma dimensión del espacio vectorial. Si demostramos que estos forman un conjunto ortogonal habremos asegurado que realmente es una base para  $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$ .

Otra interrogante sobre estos eigenestados es si representan operadores de densidad, y por tanto, estados físicos del sistema. Para ello, primero veamos si pueden ser normalizados. Tenemos

$$Tr(|\alpha, \delta\rangle_n) = \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} Tr\left(\hat{Q} \begin{matrix} \alpha-n_{11} & N-\alpha-n \\ n & n_{11} \end{matrix}\right).$$

Los operadores simétricos con  $n_{10}, n_{01} \neq 0$  tiene traza cero, por lo que si en lo anterior  $n \neq 0$  o  $N \neq \alpha$ , la traza es cero. En caso contrario se tendrá

$$\begin{aligned} Tr(|N, \delta\rangle_0) &= \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} = (-1)^{\delta} \binom{\delta}{\delta} + \sum_{n_{11}=0}^{\delta-1} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \\ &= (-1)^{\delta} \binom{\delta}{\delta} - (-1)^{\delta} \binom{\delta-1}{\delta-1} = 0, \end{aligned}$$

excepto cuando  $\delta = 0$ , donde tendremos que lo anterior es 1. El único eigenestado derecho que podemos adjudicarle una realidad física es  $|N, 0\rangle_0 = \hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ , el cual representa el estado base (todos los átomos desexcitados). Aún así, si demostramos que el conjunto de los operadores  $|\alpha, \delta\rangle_n$  forma una base, cualquier estado físico  $|\rho\rangle$  podrá representarse con una combinación de estos operadores, y el resultado de la evolución, que también será una combinación de estos eigenvectores, representará un estado físico.

Tenemos un conjunto de eigenestados con la misma cardinalidad de la base. Para que realmente podamos demostrar que es una base del subespacio necesitamos conocer los eigenestados duales, y calcular el producto interior entre eigenvectores.

### 3.4. Eigenvectores izquierdos para $\check{L}_{10}$

Antes de calcular los eigenestados izquierdos, necesitamos estudiar la acción de los superoperadores colectivos al actuar del lado derecho de un operador simétrico. Recordemos nuevamente, con un ejemplo, la acción de los superoperadores colectivos atómicos  $\check{A}_-^{ij}$ , al actuar del lado izquierdo

$$\check{A}_-^{11} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} = n_{11} \hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}+1 & n_{11}-1 \end{matrix} \implies \hat{Q}^\dagger \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} \check{A}_-^{11} = n_{11} \hat{Q}^\dagger \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}+1 & n_{11}-1 \end{matrix}.$$

Si usamos la definición de los superoperadores colectivos en términos de los superoperadores bosónicos podemos calcular la adjunta de  $\check{A}_-^{ij}$ . Haciendo esto explícitamente veremos que

$$\check{A}_-^{mn} = \sum_{\mu=1}^N \check{b}_{mn}^{\mu\dagger} \check{b}_{ij}^{\mu} \implies \check{A}_-^{\dagger ij} = \left( \sum_{\mu} \check{b}_{mn}^{\mu\dagger} \check{b}_{ij}^{\mu} \right)^\dagger = \sum_{\mu} \check{b}_{ij}^{\mu\dagger} \check{b}_{mn}^{\mu} = \check{A}_+^{ij},$$

por tanto

$$\hat{Q}^\dagger \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} \check{A}_+^{11} = n_{11} \hat{Q}^\dagger \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10}+1 & n_{11}-1 \end{matrix}.$$

Esto nos da la operación por la derecha de los superoperadores colectivos sobre los operadores simétricos, con los que podremos calcular los eigenestados izquierdos. Aunque lo anterior es para el caso específico  $\check{A}_+^{11}$ , el mismo razonamiento puede ser aplicado para encontrar la acción por la derecha de cualquier  $\check{A}_+^{ij}$ .

Hecha la exposición anterior es posible ir directo al cálculo de los eigenestados izquierdos. Queremos resolver la ecuación

$$(\rho_{sym} | \check{L}_{10} = \lambda^L (\rho_{sym} |.$$

De momento no suponemos que el conjunto de los  $\lambda^L$  sea igual al de los  $\lambda_{\alpha,\delta}$ . Propongamos

$$(\rho_{sym} | = \sum_{ij} c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}},$$

que al actuar del lado izquierdo de  $\check{L}_{10}$  nos dará

$$\begin{aligned} (\rho_{sym} | \check{L}_{10} &= \gamma_{10} \sum_{ij} c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \left[ \check{A}_+^{00} - \check{A}_+^{11} - \frac{1}{2} \left( \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{01} \right) \right] \\ &= \gamma_{10} \sum_{ij} c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \left[ n_{00} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00}-1 n_{01}} - n_{11} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} - \frac{n_{10} + n_{01}}{2} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \right] \\ &= \gamma_{10} \sum_{ij} c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \left[ n_{00} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00}-1 n_{01}} - \frac{N + n_{11} - n_{00}}{2} \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \right] \\ &= \lambda^L (\rho_{sym} |. \end{aligned}$$

De la independencia lineal de los  $\hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}$  se obtiene la ecuación de recurrencia

$$(n_{00} + 1) c_{n_{10} n_{11}-1}^{n_{00}+1 n_{01}} = \left( \frac{N}{2} + \frac{n_{11} - n_{00}}{2} + \frac{\lambda^L}{\gamma_{10}} \right) c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}.$$

Inspirados en el caso de los eigenvectores derechos, hacemos que lo anterior tome la forma

$$c_{n_{10} n_{11}-1}^{n_{00}+1 n_{01}} = \frac{n_{11} - \delta}{n_{00} + 1} c_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}, \quad (3.13)$$

con lo que los eigenvalores posibles son

$$\lambda_{\alpha,\delta}^L = -\gamma_{10} \left[ \frac{N - \alpha}{2} + \delta \right].$$

Notemos que hemos encontrado el mismo conjunto de eigenvalores para los eigenestados izquierdo y derechos. Considerando la solución de (3.13) con la condición  $c_{n_{10} n_{11}}^{\alpha-\delta n_{01}} = 1$ , los eigenestados izquierdos encontrados son

$${}_n(\alpha, \delta | = \sum_{n_{11}=\delta}^{\alpha} \binom{\alpha - \delta}{\alpha - n_{11}} \hat{Q}^\dagger_{N-\alpha-n n_{11}}^{\alpha-n_{11} n} = \sum_{n_{11}=\delta}^{\alpha} \binom{\alpha - \delta}{\alpha - n_{11}} \hat{Q}^{\alpha-n_{11} N-\alpha-n}_{n n_{11}},$$

donde por conveniencia tomamos  $n = n_{01}$ , a diferencia de los eigenestados derechos.

### 3.5. Relación de dualidad para la base de decaimiento

Ahora estamos en condiciones de calcular el producto interno entre eigenvectores izquierdos y derechos, pero antes recordemos nuevamente la condición de ortogonalidad para los operadores simétricos

$$Tr \left( \hat{Q}^\dagger_{n_{10} n_{11}}^{n'_{00} n'_{01}} \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}} \right) = \frac{n_{00}! n_{01}! n_{10}! n_{11}!}{N!} \delta_{n'_{00}, n_{00}} \delta_{n'_{01}, n_{01}} \delta_{n'_{10}, n_{10}} \delta_{n'_{11}, n_{11}},$$

del cual directamente calculamos

$$\begin{aligned}
n'(\alpha', \delta' | \alpha, \delta)_n &= Tr \left( \sum_{n'_{11}=\delta'}^{\alpha'} \binom{\alpha' - \delta'}{\alpha' - n'_{11}} \hat{Q}^\dagger \begin{matrix} \alpha' - n'_{11} & N - \alpha' - n' \\ n'_{11} & \end{matrix} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \hat{Q} \begin{matrix} \alpha - n_{11} & N - \alpha - n \\ n_{11} & \end{matrix} \right) \\
&= \sum_{n'_{11}=\delta'}^{\alpha'} \binom{\alpha' - \delta'}{\alpha' - n'_{11}} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} Tr \left( \hat{Q}^\dagger \begin{matrix} \alpha' - n'_{11} & N - \alpha' - n' \\ n'_{11} & \end{matrix} \hat{Q} \begin{matrix} \alpha - n_{11} & N - \alpha - n \\ n_{11} & \end{matrix} \right) \\
&= \sum_{n'_{11}=\delta'}^{\alpha'} \binom{\alpha' - \delta'}{\alpha' - n'_{11}} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \frac{(\alpha' - n'_{11})! n'_{11}! n'! (N - \alpha' - n')!}{N!} \delta_{n, n'} \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{n_{11}, n'_{11}} \\
&= \delta_{n, n'} \delta_{\alpha, \alpha'} \sum_{n_{11}=\delta'}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \binom{\alpha - \delta'}{\alpha - \delta} \frac{(\alpha - n_{11})! n_{11}! n! (N - \alpha - n)!}{N!}.
\end{aligned}$$

Inmediatamente se desprende la ortogonalidad entre los estados para las etiquetas  $n$  y  $\alpha$ . Nótese que  $n$  identifica a los estados degenerados, y directamente hemos obtenido la ortogonalidad sobre el subespacio degenerado. Falta encontrar la ortogonalidad en  $\delta$ . Lo primero que podemos concluir de la relación anterior es que si  $\delta' > \delta$  tendremos  $n'(\alpha', \delta' | \alpha, \delta)_n = 0$ . Para el caso  $\delta' \leq \delta$  nos servirá tener que

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha - \delta'}{\alpha - n_{11}} \frac{(\alpha - n_{11})! n_{11}! n! (N - \alpha - n)!}{N!} &= \frac{(\alpha - \delta')! n_{11}! n! (N - \alpha - n)!}{N! (n_{11} - \delta')!} \\
&= \frac{(\alpha - \delta')! \delta'! n! (N - \alpha - n)!}{N!} \binom{n_{11}}{\delta'} \\
&= \frac{(\alpha - \delta')! \delta'! n! (N - \alpha - n)! \alpha! (N - \alpha)!}{\alpha (N - \alpha)! N!} \binom{n_{11}}{\delta'} \\
&= \left[ \binom{N}{\alpha} \binom{N - \alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta'} \right]^{-1} \binom{n_{11}}{\delta'},
\end{aligned}$$

así, para el caso en que  $\delta' \leq \delta$  nuestro producto interno se reduce a

$$\begin{aligned}
n'(\alpha', \delta' | \alpha, \delta)_n &= (-1)^{\delta'} \delta_{n, n'} \delta_{\alpha, \alpha'} \left[ \binom{N}{\alpha} \binom{N - \alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta'} \right]^{-1} \sum_{n_{11}=\delta'}^{\delta} (-1)^{n_{11} + \delta'} \binom{\delta}{n_{11}} \binom{n_{11}}{\delta'} \\
&= (-1)^{\delta} \left[ \binom{N}{\alpha} \binom{N - \alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \right]^{-1} \delta_{n, n'} \delta_{\alpha', \alpha} \delta_{\delta, \delta'},
\end{aligned}$$

por lo que llegamos a una relación de dualidad entre los eigenestados izquierdos y derechos. Por convención normalicemos la relación anterior redefiniendo nuestros eigenestados derechos como

$$|\alpha, \delta\rangle_n = (-1)^{\delta} \binom{N}{\alpha} \binom{N - \alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \hat{Q} \begin{matrix} \alpha - n_{11} & N - \alpha - n \\ n_{11} & \end{matrix},$$

con lo que

$$n'(\alpha', \delta' | \alpha, \delta)_n = \delta_{n, n'} \delta_{\alpha', \alpha} \delta_{\delta, \delta'}.$$

De manera directa, lo primero que podríamos hacer es calcular la descripción de los operadores simétricos en términos de la base de decaimiento. Debido al producto interno y a la forma de los eigenvectores derechos, podemos conjeturar la relación

$$\hat{Q} \begin{matrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{matrix} = \hat{Q} \begin{matrix} \alpha - n_{11} & N - \alpha - n \\ n & \end{matrix} = \sum_{k=0}^{n_{11}} c_k |\alpha, k\rangle_n.$$

El valor de los coeficientes  $c_k$  puede ser encontrado proyectando la relación previa con los  ${}_n(\alpha, \delta|$ , así de manera explicita

$$\begin{aligned}
{}_n(\alpha, k| \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} N-\alpha-n &= c_k \\
\sum_{n'_{11}=k}^{\alpha} \binom{\alpha-\delta}{\alpha-n'_{11}} Tr \left( \hat{Q}^{\alpha-n'_{11}} N-\alpha-n & \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} N-\alpha-n \right) = \\
\frac{n_{11}!(\alpha-n_{11})!n!(N-\alpha-n)!}{N!} \binom{\alpha-k}{\alpha-n_{11}} &= \\
\frac{n_{11}!(\alpha-n_{11})!n!(N-\alpha-n)! \alpha!(N-\alpha)!}{\alpha! (N-\alpha)! N!} \binom{\alpha-k}{\alpha-n_{11}} &= \\
\left[ \binom{\alpha}{n_{11}} \binom{N-\alpha}{n} \binom{N}{\alpha} \right]^{-1} \binom{\alpha-k}{\alpha-n_{11}} &=
\end{aligned}$$

de esta manera, obtenemos el resultado

$$\hat{Q}^{\alpha-n_{11}} N-\alpha-n = \left[ \binom{\alpha}{n_{11}} \binom{N-\alpha}{n} \binom{N}{\alpha} \right]^{-1} \sum_{k=0}^{n_{11}} \binom{\alpha-k}{\alpha-n_{11}} |\alpha, k\rangle_n. \quad (3.14)$$

### 3.6. Evolución temporal de los operadores simétricos

Retomando la discusión del inicio de este capítulo, una vez obtenidos los eigenestados derechos e izquierdos de  $\check{L}_{10}$ , podemos solucionar la evolución del estado en la disipación individual. Recordemos que la ecuación maestra que tenemos es

$$\frac{\partial}{\partial t} |\rho\rangle = \check{L}_{10} |\rho\rangle \implies |\rho(t)\rangle = e^{\check{L}_{10}t} |\rho(0)\rangle.$$

Consideremos como estado inicial uno de los operadores simétricos,  $|\rho(0)\rangle = \hat{Q}^{\alpha-\delta} N-\alpha-n$ . Como ya hemos visto, podemos escribir a los operadores simétricos como combinación lineal de eigenestados de  $\check{L}_{10}$

$$\hat{Q}^{\alpha-\delta} N-\alpha-n = \sum_{k=0}^{\delta} c_k |\alpha, k\rangle_n.$$

El estado al tiempo  $t$  estará dado por

$$|\rho(t)\rangle = e^{\check{L}_{10}t} \sum_{k=0}^{\delta} c_k |\alpha, k\rangle_n = \exp\left(-\frac{N-\alpha}{2}\gamma_{10}t\right) \sum_{k=0}^{\delta} e^{-k\gamma_{10}t} c_k |\alpha, k\rangle_n.$$

Podemos proyectar lo anterior a los operadores simétricos

$$\begin{aligned}
Tr \left( \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} N-\alpha-n |\hat{\rho}(t)\rangle \right) &= \exp\left(-\frac{N-\alpha}{2}\gamma_{10}t\right) \sum_{k=0}^{\delta} e^{-k\gamma_{10}t} c_k Tr \left( \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} N-\alpha-n |\alpha, k\rangle_n \right) \\
&= \exp\left(-\frac{N-\alpha}{2}\gamma_{10}t\right) \sum_{k=n_{11}}^{\delta} c_k e^{-k\gamma_{10}t} (-1)^{n_{11}} \binom{k}{n_{11}} \frac{n_{11}!(\alpha-n_{11})!n!(N-\alpha-n)!}{N!}.
\end{aligned}$$

Esto nos permite ver la evolución temporal nuevamente en la base de operadores simétricos. Tal ecuación es

$$|\rho(t)\rangle = \exp\left(-\frac{N-\alpha}{2}\gamma_{10}t\right) \frac{n!(N-\alpha-n)!}{N!} \sum_{i=0}^{\delta} d_i(t) \hat{Q}_n^{\alpha-i} \hat{Q}_i^{N-\alpha-n},$$

donde

$$d_i(t) = \sum_{j=i}^{\delta} (-1)^i c_j \binom{j}{i} i! (\alpha-i)! e^{-j\gamma_{10}t}. \quad (3.15)$$

### 3.7. Solución tomando en cuenta la parte del Hamiltoniano

La evolución dada solo por el lindbladiano  $\check{L}_{10}$  es posible si la descripción del problema se hace en el esquema de interacción. Si no usamos tal esquema debemos de considerar la parte del hamiltoniano. El hamiltoniano para una sola partícula está dado por

$$\hat{H}^\mu = \tilde{E} \hat{\sigma}_3^\mu,$$

donde  $\tilde{E} = 2(E_1 - E_0)$ , siendo  $E_i$  la energía del nivel  $i$ . La parte que debemos agregar a la evolución del operador densidad está dado por

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu=1}^N [\hat{H}^\mu, |\rho\rangle] &= -\frac{i\tilde{E}}{\hbar} \left[ \sum_{\mu} \hat{\sigma}_3^\mu |\rho\rangle \hat{H}^\mu - \sum_{\mu} \hat{H}^\mu |\rho\rangle \hat{\sigma}_3^\mu \right] \\ &= -\frac{i\tilde{E}}{2\hbar} \left[ \hat{A}_+^{11} + \hat{A}_+^{10} - \hat{A}_+^{01} - \hat{A}_+^{00} - \hat{A}_+^{11} + \hat{A}_+^{10} - \hat{A}_+^{01} + \hat{A}_+^{00} \right] |\rho\rangle \\ &= -\frac{i\tilde{E}}{\hbar} \left( \hat{A}_+^{10} - \hat{A}_+^{01} \right) |\rho\rangle. \end{aligned}$$

Si lo anterior actúa sobre un estado simétrico tendremos

$$-\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu=1}^N [\hat{H}^\mu, \hat{Q}_{n_{10} n_{00}}^{n_{00} n_{01}}] = -\frac{i\tilde{E}}{\hbar} (n_{10} - n_{01}) \hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}},$$

por tanto, ya no es necesario diagonalizar la nueva contribución, ya que la base de decaimiento  $|\alpha, \delta\rangle_n$  también es eigenestado de la parte libre del Hamiltoniano con ecuación de eigenvalores

$$-\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu=1}^N [\hat{H}^\mu, |\alpha, \delta\rangle_n] = -\frac{i\tilde{E}}{\hbar} (N - \alpha - 2n) |\alpha, \delta\rangle_n.$$

Si no nos adherimos al esquema de interacción, la evolución temporal del operador densidad es

$$\frac{d}{dt} |\rho\rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mu=1}^N [\hat{H}^\mu, |\rho\rangle] + \check{L}_{10} |\rho\rangle,$$

que para la condición inicial  $|\rho(0)\rangle = \hat{Q}_n^{\alpha-\delta} \hat{Q}_\delta^{N-\alpha-n}$  tenemos el resultado

$$|\rho(t)\rangle = \exp\left(-\frac{N-\alpha}{2}\gamma_{10}t - \frac{i\tilde{E}}{\hbar}(N-\alpha-2n)t\right) \frac{n!(N-\alpha-n)!}{N!} \sum_{i=0}^{\delta} d_i(t) \hat{Q}_n^{\alpha-i} \hat{Q}_i^{N-\alpha-n},$$

donde los coeficientes  $d_i(t)$  están dados en (3.15).





## Capítulo 4

# Aplicaciones de la base de decaimiento

Una vez encontrada la base de decaimiento de  $\check{L}_{10}$  podemos utilizarla para resolver la evolución temporal de la disipación de átomos acoplados a baños térmicos independientes. La resolución de este problema no es nuevo, ya que puede ser resuelto para un átomo individual y tomar los productos tensoriales de estos estados para el sistema multipartícula. El motivo de introducir la base de decaimiento es la de poder resolver el problema de la emisión espontánea colectiva del sistema de  $N$  átomos, así además de tomar en cuenta el canal de disipación individual debemos incluir el canal de la disipación colectiva.

### 4.1. Disipación colectiva

En la Figura 2.1 representamos el proceso descrito por  $\check{L}_{10}$  (disipación individual) como la disipación de cada átomo a cualquier dirección (rayos azules). Parte de esa disipación se da a lo largo del modo de la cavidad (rayo rojo), que debido al acoplamiento entre átomos mediados por el modo, se puede dar un cambio en la tasa de emisión, fenómeno conocido como *disipación colectiva*.

Centremonos nuevamente en la forma general (2.17). Ahora al hacer que las tasas de emisión y de acoplamiento entre átomos sean iguales,  $\gamma_{10}^{\mu\nu} = \gamma_c$  para  $\mu, \nu = 1, \dots, N$ , tenemos que el lindbladiano toma la forma

$$\begin{aligned}\check{L}_c |\rho\rangle &= \gamma_c \sum_{\mu, \nu} \left( \hat{\sigma}_-^\nu |\rho\rangle \hat{\sigma}_+^\mu - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^\mu \hat{\sigma}_-^\nu |\rho\rangle - \frac{1}{2} |\rho\rangle \hat{\sigma}_+^\mu \hat{\sigma}_-^\nu \right) \\ &= \gamma_c \left[ \hat{J}_- |\rho\rangle \hat{J}_+ - \frac{1}{2} \hat{J}_+ \hat{J}_- |\rho\rangle - \frac{1}{2} |\rho\rangle \hat{J}_+ \hat{J}_- \right].\end{aligned}$$

Nuevamente podemos hacer la descripción del lindbladiano en términos de los superoperadores

colectivos. En el Apéndice A se muestra el mapeo de los superoperadores  $\hat{J}_+$ ,  $\hat{J}_-$ . Así tendremos

$$\begin{aligned} \check{L}_c |\hat{\rho}\rangle &= \gamma_c \left[ \left( \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \right) \left( \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00} \right) - \frac{1}{2} \left( \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{11} \right) \left( \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \check{A}_+^{11} + \check{A}_+^{01} \right) \left( \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00} \right) \right] |\rho\rangle \\ &= \gamma_c \left[ \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{01} \check{A}_+^{00} - \frac{1}{2} \left( \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{11} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{00} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \check{A}_+^{01} \check{A}_+^{01} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{11} + \check{A}_+^{00} \check{A}_+^{01} \right) \right] |\rho\rangle \end{aligned}$$

Tratemos de encontrar eigenvectores derechos para este operador. Para ello actuemos  $\check{L}_c$  sobre el estado (3.8)

$$\begin{aligned} \check{L}_c |\rho_{sym}\rangle &= \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} \gamma_c \left[ n_{11}(n_{10} + 1) \hat{Q}^{n_{00}+1 n_{01}}_{n_{10} n_{11}-1} + n_{10} n_{01} \hat{Q}^{n_{00}+2 n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}} + n_{11}(n_{11} - 1) \times \right. \\ &\quad \times \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10}+1 n_{11}-2} + n_{01} n_{11} \hat{Q}^{n_{00}+1 n_{01}}_{n_{10} n_{11}-1} - \frac{1}{2} \left( n_{10}(n_{00} + 1) \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} + n_{11} n_{00} \hat{Q}^{n_{00}-1 n_{01}+1}_{n_{10}+1 n_{11}-1} \right. \\ &\quad \left. + n_{10} n_{01} \hat{Q}^{n_{00}+1 n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}+1} + n_{11}(n_{01} + 1) \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} + n_{11}(n_{10} + 1) \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} + n_{01} n_{10} \times \right. \\ &\quad \left. \times \hat{Q}^{n_{00}+1 n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}+1} + n_{11} n_{00} \hat{Q}^{n_{00}-1 n_{01}+1}_{n_{10}+1 n_{11}-1} + n_{01}(n_{00} + 1) \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} \right) \left. \right] \\ &= \gamma_c \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} \left[ n_{11}(n_{10} + n_{01} + 1) \hat{Q}^{n_{00}+1 n_{01}}_{n_{10} n_{11}-1} + n_{10} n_{01} \hat{Q}^{n_{00}+2 n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}} + n_{11}(n_{11} - 1) \times \right. \\ &\quad \times \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10}+1 n_{11}-2} - \frac{(n_{10} + n_{01})(n_{00} + 1) + n_{11}(n_{01} + n_{10} + 2)}{2} \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} - n_{11} n_{00} \hat{Q}^{n_{00}-1 n_{01}+1}_{n_{10}+1 n_{11}-1} \\ &\quad \left. - n_{10} n_{01} \hat{Q}^{n_{00}+1 n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}+1} \right] \\ &= \lambda \sum_{n_{ij}} c^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} \hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}}. \end{aligned}$$

Si hacemos uso de la completez de la base de operadores simétricos, agrupamos en términos de  $\hat{Q}^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}}$  e igualamos los coeficientes a cero. Además, al considerar la constricción  $n_{10} + n_{01} = N - n_{11} - n_{00}$ , llegaremos a la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} &(n_{11} + 1)(N + 1 - n_{11} - n_{00}) c^{n_{00}-11 n_{01}}_{n_{10} n_{11}+1} + (n_{10} + 1)(n_{01} + 1) c^{n_{00}-2 n_{01}+1}_{n_{10}+1 n_{11}} + (n_{11} + 2)(n_{11} + 1) \times \\ &\times c^{n_{00} n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}+2} - \left[ \frac{(N - n_{11} - n_{00})(n_{00} + 1) + n_{11}(N + 2 - n_{11} - n_{00})}{2} + \frac{\lambda}{\gamma_c} \right] c^{n_{00} n_{01}}_{n_{10} n_{11}} - (n_{11} + 1) \times \\ &\times (n_{00} + 1) c^{n_{00}+1 n_{01}-1}_{n_{10}-1 n_{11}+1} - (n_{10} + 1)(n_{01} + 1) c^{n_{00}-1 n_{01}+1}_{n_{10}+1 n_{11}-1} = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

relación que parece difícil de solucionar analíticamente. Aún así, es posible tratar el problema de la disipación individual y colectiva si consideramos a ésta última como un término perturbativo.

Antes de resolver el problema de la perturbación veamos como actúa el superoperador  $\check{L}_c$  sobre los

elementos de la base de decaimiento  $|\alpha, \delta\rangle_n$

$$\begin{aligned}
\gamma_c^{-1} \check{L}_c |\alpha, \delta\rangle_n &= (-1)^\delta \binom{N}{\alpha} \binom{N-\alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \left[ n_{11}(N+1-\alpha) \hat{Q}^{\alpha-n_{11}+1} \binom{N-\alpha-n}{n_{11}-1} + \right. \\
&\quad n(N-\alpha-n) \left( \hat{Q}^{\alpha-n_{11}+2} \binom{N-\alpha-n-1}{n_{11}} - \hat{Q}^{\alpha-n_{11}+1} \binom{N-\alpha-n-1}{n_{11}+1} \right) + n_{11}(n_{11}-1) \times \\
&\quad \times \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} \binom{N-\alpha-n+1}{n_{11}-2} - \frac{(N-\alpha)(\alpha+1) + 2n_{11}}{2} \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} \binom{N-\alpha-n}{n_{11}} - n_{11}(\alpha-n_{11}) \times \\
&\quad \left. \times \hat{Q}^{\alpha-n_{11}-1} \binom{N-\alpha-n+1}{n_{11}-1} \right] \\
&= (N+1-\alpha)(\alpha-\delta+1) |\alpha, \delta-1\rangle_n + (\alpha-\delta+2)(\alpha-\delta+1)(N-\alpha)(N-\alpha-1)^2 \times \\
&\quad (N-\alpha-2) |\alpha+2, \delta\rangle_{n-1} + (n+1)(N-\alpha-n+1) |\alpha-2, \delta-2\rangle_{n+1} - \frac{(N-\alpha)}{2} \times \\
&\quad \times (\alpha+1) |\alpha, \delta\rangle_n + (-1)^\delta \binom{N}{\alpha} \binom{N-\alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \left[ -\frac{n}{\binom{\alpha+2}{n_{11}+1}} \times \right. \\
&\quad \times \frac{N-\alpha-n}{\binom{N-\alpha-2}{n-1} \binom{N}{\alpha+2}} \sum_{k=0}^{n_{11}+1} \binom{\alpha-k+2}{\alpha-n_{11}+1} |\alpha+2, k\rangle_{n-1} - \frac{2n_{11}}{\binom{\alpha}{n_{11}} \binom{N-\alpha}{n} \binom{N}{\alpha}} \sum_{k=0}^{n_{11}} \binom{\alpha-k}{\alpha-n_{11}} \times \\
&\quad \left. \times |\alpha, k\rangle_n - \frac{n_{11}(\alpha-n_{11})}{\binom{\alpha-2}{n_{11}-1} \binom{N-\alpha+2}{n+1} \binom{N}{\alpha-2}} \sum_{k=0}^{n_{11}-1} \binom{\alpha-k-2}{\alpha-n_{11}-1} |\alpha-2, k\rangle_{n+1} \right],
\end{aligned}$$

que de igual forma es una relación complicada.

## 4.2. Una solución exacta

En trabajos sobre sistemas de  $N$  átomos de dos niveles se hace mención de una solución analítica exacta, por ejemplo [24], que es cuando se considera como condición inicial al estado simétrico puro de un átomo excitado y los demás en el estado base. Solucionemos este problema con el formalismo que hemos introducido. Por facilidad consideremos como condición inicial el estado simétrico mixto de un átomo excitado

$$|\rho_M(0)\rangle = \hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = |N, 0\rangle_0 + \frac{1}{N} |N, 1\rangle_0.$$

Bajo el superoperador  $\check{L}_{10}$  el estado  $|N, 0\rangle_0$  tiene eigenvalor 0, y los estados  $|N, 1\rangle_0, |N-2, 0\rangle_1$  tienen eigenvalor  $-\gamma_{10}$ . Si a los estados anteriores les aplicamos el superoperador  $\check{L}_c$ , nuestros eigenestados se transforman como

$$\begin{aligned}
\check{L}_c |N, 0\rangle_0 &= 0, \\
\check{L}_c |N, 1\rangle_0 &= -\gamma_c |N, 1\rangle_0 - \gamma_c |N-2, 0\rangle_1, \\
\check{L}_c |N-2, 0\rangle_1 &= -\gamma_c(N-1) |N, 1\rangle_0 - \gamma_c(N-1) |N-2, 0\rangle_1.
\end{aligned}$$

En el subespacio  $\{|N, 1\rangle_0, |N-2, 0\rangle_1\}$ , la supermatriz asociada al superoperador  $\check{L}_c$  es

$$-\gamma_c \begin{pmatrix} 1 & N-1 \\ 1 & N-1 \end{pmatrix},$$

el cual es diagonalizable y admite el eigensistema

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= -N\gamma_c & |\phi_+\rangle &= |N-2, 0\rangle_1 + |N, 1\rangle_0 & (\phi_+| &= \frac{1}{N} \left[ {}_1(N-2, 0| - {}_0(N, 1| \right], \\ \lambda_- &= 0 & |\phi_-\rangle &= |N-2, 0\rangle_1 - (N-1)|N, 1\rangle_0 & (\phi_-| &= \frac{1}{N} \left[ -(N-1) {}_1(N-2, 0| + {}_0(N, 1| \right]. \end{aligned}$$

Usando lo anterior podemos solucionar la evolución de nuestro estado inicial bajo la acción de  $\check{L}_{10} + \check{L}_c$ . El estado para cualquier tiempo  $t$  está dado por

$$\begin{aligned} |\rho_m(t)\rangle &= |N, 0\rangle_0 + \frac{e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t}}{N} \left[ \frac{|\phi_+\rangle - |\phi_-\rangle}{N} \right] \\ &= |N, 0\rangle_0 + \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N^2} (N-1 + e^{-N\gamma_c t}) |N, 1\rangle_0 - \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N^2} (1 - e^{-N\gamma_c t}) |N, 1\rangle_0 \\ &= \left[ 1 - \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N} (N-1 + e^{-N\gamma_c t}) \right] \hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} + \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N} (N-1 + e^{-N\gamma_c t}) \hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ &\quad - \frac{(N-1)e^{-\gamma_{10}t}}{N} (1 - e^{-N\gamma_c t}) \hat{Q} \begin{matrix} N-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Hemos resuelto el problema para el estado mixto  $\hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ . Ahora supongamos que el estado inicial es el estado puro

$$|N, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_P \hat{P}(|1\rangle \otimes |0\rangle^{\otimes(N-1)}).$$

El operador densidad asociado a  $|N, 1\rangle$  es

$$|\rho_1\rangle = |N, 1\rangle\langle N, 1| = \hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} + (N-1) \hat{Q} \begin{matrix} N-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = |N, 0\rangle_0 + \frac{1}{N} |N, 1\rangle_0 + \frac{1}{N} |N-2, 0\rangle_1.$$

Ya conocemos la evolución de los primeros dos términos que también se encuentran en el estado mixto, así que solo necesitamos ver la evolución de la última parte. Tendremos

$$\begin{aligned} \frac{e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t}}{N} |N-2, 0\rangle_1 &= \frac{e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t}}{N} \left[ \frac{(N-1)|\phi_+\rangle + |\phi_-\rangle}{N} \right] \\ &= \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N^2} \left[ \left( (N-1)e^{-N\gamma_c t} + 1 \right) |N-2, 0\rangle_1 - (N-1) \left( 1 - e^{-N\gamma_{10}t} \right) |N, 1\rangle_0 \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, si nuestro estado inicial es  $|\rho_1\rangle$ , la evolución temporal del estado es

$$\begin{aligned} |\rho_p(t)\rangle &= |N, 0\rangle_0 + \frac{e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t}}{N} \left[ |N, 1\rangle_0 + |N-2, 0\rangle_1 \right] \\ &= \left[ 1 - e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t} \right] \hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} + e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t} \hat{Q} \begin{matrix} N-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} + (N-1) e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t} \hat{Q} \begin{matrix} N-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ &= \left[ 1 - e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t} \right] \hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} + e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t} |\rho_1\rangle, \end{aligned}$$

que es la solución encontrada en la literatura. Para comparar con el estado mixto  $|\rho_m(t)\rangle$ , reescribamos a este utilizando el estado  $|\rho_1\rangle$ , con lo que llegamos a

$$\begin{aligned} |\hat{\rho}_m(t)\rangle &= \left[ 1 - \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N} (N-1 + e^{-N\gamma_c t}) \right] \hat{Q} \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} + \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N} (N-1 + e^{-N\gamma_c t}) |\rho_1\rangle \\ &\quad - (N-1) e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t} \hat{Q} \begin{matrix} N-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Puede resultar difícil el comparar las soluciones, del estado inicial mixto y el estado inicial puro, solo comparando los operadores densidad. Aunque en la evolución del estado mixto nos aparezca el término  $\hat{Q} \begin{smallmatrix} N-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$ , el cual no aparece en la evolución del estado puro, recordemos que por si mismo este término no corresponde a un estado físico pues su traza es cero, por lo que la comparación pueda ser más factible mediante algunos valores esperados.

La importancia de los operadores de densidad radica en su utilización para calcular valores esperados los cuales pueden contrastarse con mediciones experimentales. Uno de estos valores es el promedio de átomos excitados en el sistema, el cual está dado por

$$\langle n_e \rangle = \left\langle \sum_{\mu} \hat{\sigma}_{10}^{\mu\dagger} \hat{\sigma}_{10}^{\mu} \right\rangle = \left\langle \check{A}_{10}^{10} + \check{A}_{11}^{11} \right\rangle = \left\langle \check{A}_{11}^{11} \right\rangle. \quad (4.2)$$

Calculando lo anterior para el estado mixto  $|\rho_m(t)\rangle$  y para el estado puro  $|\rho_p(t)\rangle$  obtenemos

$$\langle n_e^{(m)} \rangle = \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{N} (N - 1 + e^{-N\gamma_c t}), \quad \langle n_e^{(p)} \rangle = e^{-(\gamma_{10} + N\gamma_c)t}. \quad (4.3)$$

Vemos que el comportamiento de ambos resultados es significativamente diferente, ya que cuando consideramos  $N \rightarrow \infty$ ,  $\langle n_e^{(M)} \rangle \rightarrow e^{-\gamma_{10}t}$  mientras que  $\langle n_e^{(1)} \rangle \rightarrow 0$ , con lo cual el decaimiento de los átomos tiende ser más rápido en el estado puro, lo cual era de esperarse ya que este, es un ejemplo típico de estado superradiante. En la Figura 4.1 se comparan ambos valores esperados para distintos valores de  $N$ .

### 4.3. Perturbación independiente del tiempo

Aunque haya algunos casos en los que es fácil resolver de manera exacta un sistema con disipación individual y colectiva, de manera general podría no ser así, por lo que una primera forma de resolver el problema es considerando la disipación colectiva como un término perturbativo. Es decir, de la forma general (2.17), tendremos  $\gamma_{10}^{\mu,\mu} = \gamma_{10} + \gamma_c$  y  $\gamma_{10}^{\mu,\nu} = \gamma_c$  para  $\mu \neq \nu$ , donde  $\gamma_{10} \gg \gamma_c$ . Entre los sistemas físicos que se ajustan a estos parámetros tenemos átomos acoplados a nanofibras, donde se ha reportado  $\gamma_c/\gamma_{10} \sim 0,05$  [34], por lo que el tratamiento que se presenta a continuación puede ser contrastado con métodos experimentales.

Veamos como se aplica la teoría de perturbación independiente del tiempo para nuestro problema.

Para facilitar la discusión usaremos la etiqueta  $k = \{\alpha, \delta\}$  y denotaremos como  $\check{L}_{c10}$  a un superoperador  $\check{L}_c$  en donde reemplazamos  $\gamma_c$  con  $\gamma_{10}$ , de esta forma se satisface

$$\check{L}_{10} + \check{L}_c = \check{L}_{10} + \gamma \check{L}_{c10},$$

donde  $\gamma = \gamma_c/\gamma_{10}$ . Este será nuestro parametro de perturbación.

La discusión que expondremos a continuación es la que se encuentra para los vectores en el espacio de Hilbert y es tratada en distintos libros como [31]. Acá la recrearemos para dejar en claro el método a seguir e introduciremos los cambios que necesitamos para la situación. Hasta ahora hemos resuelto el problema

$$\check{L}_{10} |k\rangle_n = \lambda^{(0)} |k\rangle_n.$$

Queremos introducir la disipación colectiva como una perturbación a la disipación individual. Al introducir tal perturbación buscaremos tener

$$\left( \check{L}_{10} + \gamma \check{L}_{c10} \right) |\phi_{k,n}\rangle = \lambda_{k,n} |\phi_{k,n}\rangle.$$

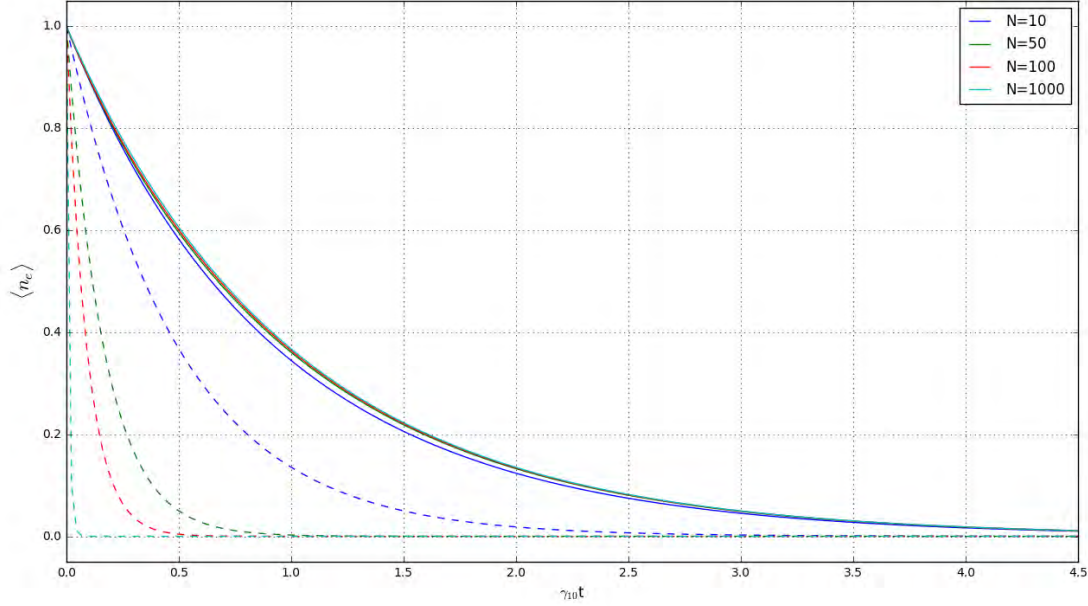


Figura 4.1: Evolución temporal del promedio de átomos excitados en el sistema tomando como condición inicial estados simétricos de un átomo excitado. La línea sólida es la solución para el estado mixto y la línea discontinua corresponde al estado puro. Se tomó  $\gamma = 0,1$ .

Si  $\gamma \ll 1$  podemos hacer la expansión

$$\begin{aligned} |\phi_{k,n}\rangle &= |\phi_{k,n}^{(0)}\rangle + \gamma |\phi_{k,n}^{(1)}\rangle + \gamma^2 |\phi_{k,n}^{(2)}\rangle + \dots \\ \lambda_{k,n} &= \lambda_{k,n}^{(0)} + \gamma \lambda_{k,n}^{(1)} + \gamma^2 \lambda_{k,n}^{(2)} + \dots, \end{aligned}$$

donde  $|\phi_{k,n}^{(0)}\rangle = |k\rangle_n$ . Por facilidad definamos

$$\Delta_{k,n} = \gamma \lambda_{k,n}^{(1)} + \gamma^2 \lambda_{k,n}^{(2)} + \dots$$

Usando lo anterior los eigenvalores del sistema perturbado toman la forma

$$\left( \check{L}_{10} + \gamma \check{L}_{c10} \right) |\phi_{k,n}\rangle = \left( \lambda_{k,n}^{(0)} + \Delta_{k,n} \right) |\phi_{k,n}\rangle \implies \left( \lambda_{k,n}^{(0)} - \check{L}_{10} \right) |\phi_{k,n}\rangle = \left( \gamma \check{L}_{c10} - \Delta_{k,n} \right) |\phi_{k,n}\rangle.$$

Si lo anterior es proyectado con  ${}_n \langle k|$ , tendremos cero del lado izquierdo, y se cumplirá

$$0 = \gamma {}_n \langle k| \check{L}_{c10} |\phi_{k,n}\rangle - {}_n \langle k| \Delta_{k,n} |\phi_{k,n}\rangle = \gamma {}_n \langle k| \check{L}_{c10} |\phi_{k,n}\rangle - \Delta_{k,n} {}_n \langle k| \phi_{k,n}\rangle,$$

o despejando llegamos a

$$\Delta_{k,n} = \gamma \frac{{}_n \langle k| \check{L}_{c10} |\phi_{k,n}\rangle}{{}_n \langle k| \phi_{k,n}\rangle} \approx \gamma \frac{{}_n \langle k| \check{L}_{c10} |\phi_{k,n}\rangle}{{}_n \langle k| k\rangle_n} = \gamma {}_n \langle k| \check{L}_{c10} |\phi_{k,n}\rangle.$$

Sustituyendo  $\Delta_{k,n}$  y  $|\phi_{k,n}\rangle$ , y agrupando en potencias de  $\gamma$  llevamos a la siguiente relación para los eigenvalores perturbados

$$\lambda_{k,n}^{(r)} = {}_n \left( k \left| \check{L}_{c10} \right| \phi_{k,n}^{(r-1)} \right).$$

Ahora queremos encontrar los eigenestados perturbados. Para ello podemos resolver

$$\left( \lambda_{k,n}^{(0)} - \check{L}_{10} \right) |\phi_{k,n}\rangle = \left( \gamma \check{L}_{c10} - \Delta_{k,n} \right) |\phi_{k,n}\rangle.$$

Fijemos que en la base  $\{|k\rangle_n\}$  el operador  $\lambda_{k,n}^{(0)} - \check{L}_{10}$  no tiene inversa definida, ya que tenemos estados degenerados.

Consideremos el eigenvalor  $\lambda_{\kappa,\nu}^{(0)}$  cuyas estados degenerados son  $\{|k'\rangle_{n'}\}$ . Definamos los proyectores

$$\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} = \sum_{k',n'} |k'\rangle_{n'} \langle k'|, \quad \mathbb{P}_{\kappa,\nu} = \mathbb{I} - \mathbb{Q}_{\kappa,\nu},$$

los cuales satisfacen

$$\mathbb{Q}_{\kappa,\nu}^2 = \mathbb{Q}_{\kappa,\nu}, \quad \mathbb{P}_{\kappa,\nu}^2 = \mathbb{P}_{\kappa,\nu}, \quad \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} = \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \quad y \quad \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu} = \mathbb{I},$$

ademas de que ambos proyectores conmutan con  $\check{L}_{10}$ . Usando los proyectores tendremos

$$\begin{aligned} \left( \check{L}_{10} + \gamma \check{L}_{c10} \right) (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) |\phi_{k,n}\rangle &= \lambda_{k,n} (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) |\phi_{k,n}\rangle, \\ \implies (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) \check{L}_{10} |\phi_{k,n}\rangle + \gamma \check{L}_{c10} (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) |\phi_{k,n}\rangle &= \lambda_{k,n} (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) |\phi_{k,n}\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

De lo anterior podemos obtener dos ecuaciones.

1 Si multiplicamos la ecuación (4.4) por  $\mathbb{P}_{\kappa,\nu}$  obtendremos

$$\mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{10} |\phi_{k,n}\rangle + \gamma \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) |\phi_{k,n}\rangle = \lambda_{k,n} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} |\phi_{k,n}\rangle.$$

2 Si a (4.4) lo multiplicamos por  $\mathbb{Q}_{\kappa,\nu}$  llegamos a

$$\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_{10} |\phi_{k,n}\rangle + \gamma \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} (\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} + \mathbb{P}_{\kappa,\nu}) |\phi_{k,n}\rangle = \lambda_{k,n} \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} |\phi_{k,n}\rangle.$$

Para un mejor manejo de las expresiones anteriores definamos  $|\psi_{k,n}\rangle = \mathbb{P}_{\kappa,\nu} |\phi_{k,n}\rangle$  y  $|\xi_{k,n}\rangle = \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} |\phi_{k,n}\rangle$ , así las expresiones encontradas pueden ser reecritas como

$$\gamma \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_c |\xi_{k,n}\rangle = \left( \lambda_{k,n} - \check{L}_{10} - \gamma \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \right) |\psi_{k,n}\rangle, \quad (4.5)$$

$$\gamma \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_c |\psi_{k,n}\rangle = \left( \lambda_{k,n} - \check{L}_{10} - \gamma \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \right) |\xi_{k,n}\rangle. \quad (4.6)$$

Para este caso podemos asegurar que el operador  $\left( \lambda_{k,n} - \check{L}_{10} - \gamma \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \right)$  esta bien definido, por lo que de (4.5) podemos obtener

$$|\psi_{k,n}\rangle = \gamma \left( \lambda_{k,n} - \check{L}_{10} - \gamma \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \right)^{-1} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} |\xi_{k,n}\rangle,$$

que al sustituir en (4.6) nos da

$$\left( \lambda_{k,n} - \check{L}_{10} - \gamma \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \right) |\xi_{k,n}\rangle = \gamma^2 \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \left( \lambda_{k,n} - \check{L}_{10} - \gamma \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \right)^{-1} \mathbb{P}_{\kappa,\nu} \check{L}_{c10} |\xi_{k,n}\rangle. \quad (4.7)$$

Si aproximamos la ecuación (4.7) a primer orden en  $\gamma$  la ecuación se reduce a

$$\left( \lambda_{k,n} - \lambda_{\kappa,\nu}^{(0)} - \gamma \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \right) |\xi_{k,n}\rangle = 0. \quad (4.8)$$

Comentemos las implicaciones de (4.8). Buscamos un conjunto de operadores derechos  $\{|a\rangle\}_{a \in A}$  e izquierdos  $\langle a|\}_{a \in A}$ , los cuales satisfacen la condición de dualidad

$$\langle a'|a\rangle = \delta_{a',a},$$

y de tal forma de que se cumpla

$$\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} = \sum_{a \in A} a |a\rangle \langle a|,$$

i.e. el conjunto  $\{|a\rangle\}_{a \in A}$  diagonaliza al superoperador  $\mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\kappa,\nu}$ . De esta forma podemos satisfacer la ecuación (4.8) haciendo que los eigenvalores perturbados a primer orden en  $\lambda$  sean

$$\lambda_{k,n} = \lambda_{\kappa,\nu}^{(0)} + \gamma a.$$

Los eigenestado  $|a\rangle$  y  $\langle a|$  corresponden a la corrección a orden cero de los eigenestados derechos e izquierdos respectivamente. Cabe explicitar que los elementos de la supermatriz a diagonalizar están dados por  ${}_n \langle \alpha', \delta' | \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\kappa,\nu} | \alpha, \delta \rangle_n$ .

Introduzcamos un poco de la teoría de la diagonalización y la eigendescomposición para los mapeos lineales [20]. Supongamos que queremos diagonalizar la matriz  $\mathbf{A}$ . Definamos la matriz cuadrada  $\mathbf{Q}$  cuyas columnas sean los eigenvectores linealmente independientes de  $\mathbf{A}$ ,  $\{|v_k\rangle\}_{k=1,\dots,n}$ ,

$$\mathbf{Q} := [|v_1\rangle \quad |v_2\rangle \quad \dots \quad |v_n\rangle].$$

Esta matriz satisface que

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\Lambda,$$

siendo  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y  $\lambda_n$  el eigenvalor asociado a  $|v_n\rangle$ . Debido a que las columnas de  $\mathbf{Q}$  son linealmente independientes entonces  $\mathbf{Q}$  es invertible y se tiene

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \Lambda.$$

Usualmente al diagonalizar una matriz encontramos los eigenvectores derechos  $|v_n\rangle$  y formamos la matriz  $\mathbf{Q}$ . Los eigenvectores izquierdos de  $\mathbf{A}$  serán los vectores fila de  $\mathbf{Q}^{-1}$ , que por construcción son duales a los eigenvectores derechos.

Ahora explicitemos toda la discusión anterior para la disipación colectiva. Al considerar la degeneración identificaremos dos casos:

- a. **El eigenvalor  $\lambda_{\alpha,\delta}$  es único.** Para cada eigenvalor por defecto tenemos eigenestados degenerados, esta degeneración está etiquetada por  $n$ . El subespacio degenerado es  $\{|\alpha, \delta\rangle_n\}_{n=0}^{N-\alpha}$ . Por tanto el proyector del subespacio es

$$\mathbb{Q}_{\alpha,\delta} = \sum_{n=0}^{N-\alpha} |\alpha, \delta\rangle_n \langle n, \alpha, \delta|,$$



con lo cual podemos formar el superoperador

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\alpha,\delta} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\alpha,\delta} &= \sum_{n'=0}^{N-\alpha} |\alpha, \delta\rangle_{n'} \langle n' | \check{L}_c \sum_{n=0}^{N-\alpha} |\alpha, \delta\rangle_n \langle n | \\
&= \sum_{n'=0}^{N-\alpha} \sum_{n=0}^{N-\alpha} |\alpha, \delta\rangle_{n'} \langle n' | \check{L}_c |\alpha, \delta\rangle_n \langle n | \\
&= \sum_{n'=0}^{N-\alpha} \sum_{n=0}^{N-\alpha} -\gamma_c \left[ \frac{(N-\alpha)(\alpha+1)}{2} + 2\delta \right] \delta_{n',n} |\alpha, \delta\rangle_{n'} \langle n | \\
&= \sum_{n=0}^{N-\alpha} -\gamma_c \left[ \frac{(N-\alpha)(\alpha+1)}{2} + 2\delta \right] |\alpha, \delta\rangle_n \langle n |,
\end{aligned}$$

el cual ya es diagonal. Así hasta primer orden los eigenvalores son

$$-\frac{\lambda_{\alpha,\delta,n}}{\gamma_{10}} = \frac{N-\alpha}{2} + \delta + \gamma \left[ \frac{(N-\alpha)(\alpha+1)}{2} + 2\delta \right].$$

Notemos que los eigenvalores siguen degenerados a primer orden. Los eigenestados hasta orden cero siguen siendo los de la base de decaimiento

$$|\phi_{\alpha,\delta,n}\rangle = |\alpha, \delta\rangle_n.$$

- b. **El eigenvalor  $\lambda_{\alpha,\delta}$  no es único.** Dado la forma de los eigenvalores se satisface que  $\lambda_{\alpha,\delta} = \lambda_{\alpha-2m,\delta-m}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . Tal relación es permitida si  $m$  satisface que  $0 \leq \alpha - 2m \leq N$  y  $0 \leq \delta - m \leq \alpha - 2m$ . Al conjunto de las etiquetas que satisfacen lo anterior lo denotaremos por  $\{\alpha, \delta\}$ . El proyector del subespacio degenerado toma la forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\alpha,\delta} &= \sum_m \sum_{n=0}^{N-(\alpha-2m)} |\alpha - 2m, \delta - m\rangle_n \langle n | \\
&=: \sum_{\{\alpha,\delta\}} \sum_{n=0}^{N-\alpha} |\alpha, \delta\rangle_n \langle n |
\end{aligned}$$

Así tendremos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{\alpha,\delta} \check{L}_c \mathbb{Q}_{\alpha,\delta} &= -\gamma_c \sum_{\{\alpha,\delta\}} \sum_{n=0}^{N-\alpha} \left[ (\delta+1)(\alpha-\delta+1) |\alpha+2, \delta+1\rangle_{n-1} + \left\{ \frac{(N-\alpha)(\alpha+1)}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\delta \right\} |\alpha, \delta\rangle_n + (n+1)(N-\alpha-n+1) |\alpha-2, \delta-1\rangle_{n+1} \right] \langle n |,
\end{aligned}$$

que no es diagonal, pero es un operador factible de diagonalizar.

## 4.4. Ejemplo: Sistema de tres átomos

Tratemos de aplicar lo expuesto con anterioridad de forma poco más concreta. Para ello trabajaremos con el caso de tres átomos, i.e.,  $N = 3$ . Podemos comprobar que los eigenestados y los eigenvalores

de  $\check{L}_{10}$  son

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,0} = -\frac{3\gamma_{10}}{2} : & \quad |0,0\rangle_0 = \hat{Q}_{00}^{03}, \quad |0,0\rangle_1 = 3\hat{Q}_{10}^{02}, \quad |0,0\rangle_2 = 3\hat{Q}_{20}^{01}, \quad |0,0\rangle_3 = \hat{Q}_{30}^{00} \\
\lambda_{1,0} = -\gamma_{10} : & \quad |1,0\rangle_0 = 3\hat{Q}_{00}^{12}, \quad |1,0\rangle_1 = 6\hat{Q}_{10}^{11}, \quad |1,0\rangle_2 = 3\hat{Q}_{20}^{10} \\
\lambda_{1,1} = -2\gamma_{10} : & \quad |1,1\rangle_0 = -3\left(\hat{Q}_{00}^{12} - \hat{Q}_{00}^{21}\right), \quad |1,1\rangle_1 = -6\left(\hat{Q}_{10}^{11} - \hat{Q}_{10}^{11}\right), \quad |1,1\rangle_2 = -3\left(\hat{Q}_{20}^{10} - \hat{Q}_{20}^{01}\right) \\
\lambda_{2,0} = -\frac{\gamma_{10}}{2} : & \quad |2,0\rangle_0 = 3\hat{Q}_{00}^{21}, \quad |2,0\rangle_1 = 3\hat{Q}_{10}^{20} \\
\lambda_{2,1} = -\frac{3\gamma_{10}}{2} : & \quad |2,1\rangle_0 = -6\left(\hat{Q}_{00}^{21} - \hat{Q}_{00}^{11}\right), \quad |2,1\rangle_1 = -6\left(\hat{Q}_{10}^{20} - \hat{Q}_{10}^{11}\right) \\
\lambda_{2,2} = -\frac{5\gamma_{10}}{2} : & \quad |2,2\rangle_0 = 3\left(\hat{Q}_{00}^{21} - 2\hat{Q}_{00}^{11} + \hat{Q}_{00}^{02}\right), \quad |2,2\rangle_1 = 3\left(\hat{Q}_{10}^{20} - 2\hat{Q}_{10}^{11} + \hat{Q}_{10}^{02}\right) \\
\lambda_{3,0} = 0 : & \quad |3,0\rangle_0 = \hat{Q}_{00}^{30} \\
\lambda_{3,1} = -\gamma_{10} : & \quad |3,1\rangle_0 = -3\left(\hat{Q}_{00}^{30} - \hat{Q}_{00}^{20}\right) \\
\lambda_{3,2} = -2\gamma_{10} : & \quad |3,2\rangle_0 = 3\left(\hat{Q}_{00}^{30} - 2\hat{Q}_{00}^{20} + \hat{Q}_{00}^{10}\right) \\
\lambda_{3,3} = -3\gamma_{10} : & \quad |3,3\rangle_0 = -\left(\hat{Q}_{00}^{30} - 3\hat{Q}_{00}^{20} + 3\hat{Q}_{00}^{10} - \hat{Q}_{00}^{00}\right)
\end{aligned}$$

Teniendo los eigenvalores, es posible calcular la perturbación de  $\check{L}_c$ . Para eigenvalores únicos ya tenemos la perturbaciones correspondientes, por lo que es más interesante tratar el caso no-único. Los eigenvalores de  $\check{L}_{10}$  no únicos son:  $\lambda_{0,0} = -3\gamma_{10}/2 = \lambda_{2,1}$ ,  $\lambda_{1,0} = -\gamma_{10} = \lambda_{3,1}$  y  $\lambda_{1,1} = -2\gamma_{10} = \lambda_{3,2}$ . Calculemos de manera explícita como se perturban los eigenvalores a primer orden para el caso  $\lambda = -3\gamma_{10}/2$ .

El subespacio degenerado para el eigenvalor  $\lambda$  es  $\{|0,0\rangle_0, |0,0\rangle_1, |0,0\rangle_2, |0,0\rangle_3, |2,1\rangle_0, |2,1\rangle_1\}$ . El proyector de tal subespacio tiene la expresión

$$\mathbb{Q}_\lambda = |0,0\rangle_0 \langle 0,0| + |0,0\rangle_1 \langle 0,0| + |0,0\rangle_2 \langle 0,0| + |0,0\rangle_3 \langle 0,0| + |2,1\rangle_0 \langle 2,1| + |2,1\rangle_1 \langle 2,1|.$$

En el Apéndice B vemos la acción del superoperador  $\check{L}_c$  sobre los eigenvectores de  $\check{L}_{10}$  para el caso  $N = 3$ . Usando tales resultados encontraremos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_\lambda \check{L}_c \mathbb{Q}_\lambda &= -\frac{1}{2}\gamma_c \left[ 3|0,0\rangle_0 \langle 0,0| + 3|0,0\rangle_1 \langle 0,0| + 3|0,0\rangle_2 \langle 0,0| + 3|0,0\rangle_3 \langle 0,0| + \right. \\
&\quad \left. 5|2,1\rangle_0 \langle 0,0| + 5|2,1\rangle_1 \langle 2,1| + 2|2,1\rangle_0 \langle 0,0| + 2|2,1\rangle_1 \langle 0,0| + 4|0,0\rangle_1 \langle 2,1| \right. \\
&\quad \left. + 4|0,0\rangle_2 \langle 2,1| \right],
\end{aligned}$$

o en su representación matricial se tiene

$$-\frac{1}{2}\gamma_c \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

Los eigenvalores de tal supermatriz nos dan la perturbación a primer orden, y los eigenvectores serán las correcciones a orden cero. La eigendescomposición de tal matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De lo anterior extraemos los eigenvalores hasta primer orden y los eigenvectores izquierdos y derechos a orden cero

$$\begin{array}{lll}
\lambda_{0,0,0} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}(1+\gamma) & |\phi_{0,0,0}\rangle = |0,0\rangle_0 & (\phi_{0,0,0}| = {}_0\langle 0,0| \\
\lambda_{0,0,3} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}(1+\gamma) & |\phi_{0,0,3}\rangle = |0,0\rangle_3 & (\phi_{0,0,3}| = {}_3\langle 0,0| \\
\lambda_{0,0,1+} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{7}{3}\gamma\right) & |\phi_{0,0,1+}\rangle = |0,0\rangle_1 + |2,1\rangle_0 & (\phi_{0,0,1+}| = \frac{1}{3}{}_1\langle 0,0| + \frac{2}{3}{}_0\langle 2,1| \\
\lambda_{0,0,1-} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{1}{3}\gamma\right) & |\phi_{0,0,1-}\rangle = -2|0,0\rangle_1 + |2,1\rangle_0 & (\phi_{0,0,1-}| = -\frac{1}{3}{}_1\langle 0,0| + \frac{1}{3}{}_0\langle 2,1| \\
\lambda_{0,0,2+} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{7}{3}\gamma\right) & |\phi_{0,0,2+}\rangle = |0,0\rangle_2 + |2,1\rangle_1 & (\phi_{0,0,2+}| = \frac{1}{3}{}_2\langle 0,0| + \frac{2}{3}{}_1\langle 2,1| \\
\lambda_{0,0,2-} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{1}{3}\gamma\right) & |\phi_{0,0,2-}\rangle = -2|0,0\rangle_2 + |2,1\rangle_1 & (\phi_{0,0,2-}| = -\frac{1}{3}{}_2\langle 0,0| + \frac{1}{3}{}_1\langle 2,1|
\end{array}$$

Esto lo hacemos con los demás subespacios degenerados. El espectro perturbado restante es

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{0,0,0} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}(1+\gamma), & |\phi_{0,0,0}\rangle = |0,0\rangle_0 \\
\lambda_{0,0,3} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}(1+\gamma), & |\phi_{0,0,3}\rangle = |0,0\rangle_3 \\
\lambda_{0,0,1+} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{7}{3}\gamma\right), & |\phi_{0,0,1+}\rangle = |0,0\rangle_1 + |2,1\rangle_0 \\
\lambda_{0,0,1-} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{1}{3}\gamma\right), & |\phi_{0,0,1-}\rangle = -2|0,0\rangle_1 + |2,1\rangle_0 \\
\lambda_{0,0,2+} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{7}{3}\gamma\right), & |\phi_{0,0,2+}\rangle = |0,0\rangle_2 + |2,1\rangle_1 \\
\lambda_{0,0,2-} = -\frac{3}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{1}{3}\gamma\right), & |\phi_{0,0,2-}\rangle = -2|0,0\rangle_2 + |2,1\rangle_1 \\
\lambda_{1,0,0} = -\gamma_{10}(1+2\gamma), & |\phi_{1,0,0}\rangle = |1,0\rangle_0 \\
\lambda_{1,0,2} = -\gamma_{10}(1+2\gamma), & |\phi_{1,0,2}\rangle = |1,0\rangle_2 \\
\lambda_{1,0,+} = -\gamma_{10}(1+3\gamma), & |\phi_{1,0,+}\rangle = |1,0\rangle_1 + |3,1\rangle_0 \\
\lambda_{1,0,-} = -\gamma_{10}, & |\phi_{1,0,-}\rangle = |1,0\rangle_1 - 2|3,1\rangle_0 \\
\lambda_{1,1,0} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{3}{2}\gamma\right), & |\phi_{1,1,0}\rangle = |1,1\rangle_0 \\
\lambda_{1,1,2} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{3}{2}\gamma\right), & |\phi_{1,1,2}\rangle = |1,1\rangle_2 \\
\lambda_{1,1,+} = -2\gamma_{10}(1+2\gamma), & |\phi_{1,1,+}\rangle = |1,1\rangle_1 + |3,2\rangle_0 \\
\lambda_{1,1,-} = -2\gamma_{10}\left(1+\frac{1}{2}\gamma\right), & |\phi_{1,1,-}\rangle = |1,1\rangle_1 - 2|3,2\rangle_0 \\
\lambda_{2,0,0} = -\frac{1}{2}\gamma_{10}(1+3\gamma), & |\phi_{2,0,0}\rangle = |2,0\rangle_0 \\
\lambda_{2,0,1} = -\frac{1}{2}\gamma_{10}(1+3\gamma), & |\phi_{2,0,1}\rangle = |2,0\rangle_1 \\
\lambda_{2,2,0} = -\frac{5}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{7}{5}\gamma\right), & |\phi_{2,2,0}\rangle = |2,2\rangle_0 \\
\lambda_{2,2,1} = -\frac{5}{2}\gamma_{10}\left(1+\frac{7}{5}\gamma\right), & |\phi_{2,2,1}\rangle = |2,2\rangle_1 \\
\lambda_{3,0,0} = 0, & |\phi_{3,0,0}\rangle = |3,0\rangle_0 \\
\lambda_{3,3,0} = -3\gamma_{10}(1+\gamma), & |\phi_{3,3,0}\rangle = |3,3\rangle_0.
\end{array}$$

Teniendo el espectro es posible encontrar la evolución temporal del sistema. Siguiendo en el caso

$N = 3$  mostraremos de manera explícita la evolución temporal cuando en el sistema tenemos inicialmente el estado de tres átomos excitados. A  $t = 0$ , el operador densidad del sistema es

$$|\rho(0)\rangle = \hat{Q}_{0\ 3}^{0\ 0} = |3, 0\rangle_0 + |3, 1\rangle_0 + |3, 2\rangle_0 + |3, 3\rangle_0.$$

Cuando solamente consideramos la disipación individual descrito por  $\check{L}_{10}$ , la evolución temporal del estado está dado por

$$|\rho(t)\rangle = e^{\check{L}_{10}t} |\rho(0)\rangle = |3, 0\rangle_0 + e^{-\gamma_{10}t} |3, 1\rangle_0 + e^{-2\gamma_{10}t} |3, 2\rangle_0 + e^{-3\gamma_{10}t} |3, 3\rangle_0.$$

Si introducimos en nuestra descripción a la disipación colectiva como una perturbación debemos buscar como se modifica los operadores de la base de decaimiento durante la evolución. Recordemos que el estado  $|3, 0\rangle_0$  es estado estacionario de  $\check{L}_{10} + \check{L}_c$ , así que solo debemos ver la evolución de  $|3, 1\rangle_0$ ,  $|3, 2\rangle_0$  y  $|3, 3\rangle_0$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} |3, 1\rangle_0 &= e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} \frac{1}{3} \left[ |\phi_{1,0,+}\rangle - |\phi_{1,0,-}\rangle \right] \\ &\approx \frac{e^{-\gamma_{10}t}}{3} \left[ e^{-3\gamma_c t} (|1, 0\rangle_1 + |3, 1\rangle_0) - (|1, 0\rangle_1 - 2|3, 1\rangle_0) \right] \\ &= e^{-\gamma_{10}t} \frac{2 + e^{-3\gamma_c t}}{3} |3, 1\rangle_0 - e^{-\gamma_{10}t} \frac{1 - e^{-3\gamma_c t}}{3} |1, 0\rangle_1, \\ e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} |3, 2\rangle_0 &= e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} \frac{1}{3} \left[ |\phi_{1,1,+}\rangle - |\phi_{1,1,-}\rangle \right] \\ &\approx \frac{e^{-2\gamma_{10}t}}{3} \left[ e^{-4\gamma_c t} (|1, 1\rangle_1 + |3, 2\rangle_0) - e^{-\gamma_c t} (|1, 1\rangle_1 - 2|3, 2\rangle_0) \right] \\ &= e^{-2\gamma_{10}t} \frac{2e^{-\gamma_c t} + e^{-4\gamma_c t}}{3} |3, 2\rangle_0 - e^{-\gamma_{10}t} \frac{e^{-\gamma_c t} - e^{-4\gamma_c t}}{3} |1, 1\rangle_1, \\ e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} |3, 3\rangle_0 &\approx e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} |3, 3\rangle_0. \end{aligned}$$

Usando estos cálculos llegaremos a que la evolución temporal del estado es

$$\begin{aligned} |\rho(t)\rangle &= e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} |\rho(0)\rangle \\ &\approx |3, 0\rangle_0 + e^{-\gamma_{10}t} \frac{2 + e^{-3\gamma_c t}}{3} |3, 1\rangle_0 + e^{-2\gamma_{10}t} \frac{2e^{-\gamma_c t} + e^{-4\gamma_c t}}{3} |3, 2\rangle_0 + e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} |3, 3\rangle_0 \\ &\quad - e^{-\gamma_{10}t} \frac{1 - e^{-3\gamma_c t}}{3} |1, 0\rangle_1 - e^{-\gamma_{10}t} \frac{e^{-\gamma_c t} - e^{-4\gamma_c t}}{3} |1, 1\rangle_1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vemos que además de tener modificaciones en los coeficientes como cabría esperar, aparecen en la descripción de la emisión colectiva espontánea la participación de nuevos operadores,  $|1, 0\rangle_0$  y  $|1, 1\rangle_0$ . Debido a que los operadores  $|\alpha, \delta\rangle_n$  carecen de realidad física (no representan operadores de densidad) es mejor cambiar la descripción de la evolución temporal en la base de los operadores simétricos. Así, si reescribimos la ecuación (4.9) en la base de los operadores simétricos obtenemos

$$\begin{aligned} |\rho(t)\rangle &= \left[ 1 - e^{-\gamma_{10}t} (2 + e^{-3\gamma_c t}) + e^{-2\gamma_{10}t} (2e^{-\gamma_c t} + e^{-4\gamma_c t}) - e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} \right] \hat{Q}_{0\ 0}^{3\ 0} + \left[ e^{-\gamma_{10}t} (2 + e^{-3\gamma_c t}) - 2e^{-2\gamma_{10}t} (2e^{-\gamma_c t} + e^{-4\gamma_c t}) + 3e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} \right] \hat{Q}_{0\ 1}^{2\ 0} \\ &\quad + \left[ e^{-2\gamma_{10}t} (2e^{-\gamma_c t} + e^{-4\gamma_c t}) - 3e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} \right] \hat{Q}_{0\ 2}^{1\ 0} + e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} \hat{Q}_{0\ 3}^{0\ 0} + 2e^{-\gamma_{10}t} \left( -1 + e^{-\gamma_c t} + e^{-3\gamma_c t} - e^{-4\gamma_c t} \right) \hat{Q}_{1\ 0}^{1\ 1} \\ &\quad - 2e^{-\gamma_{10}t} \left( e^{-\gamma_c t} - e^{-4\gamma_c t} \right) \hat{Q}_{1\ 1}^{0\ 1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

De manera directa, vemos que si  $t \rightarrow \infty$  entonces  $|\rho(t)\rangle \rightarrow \hat{Q}_{00}^{30}$ , que corresponde al estado base.

Otras de las observables que nos pueden interesar son las intensidades de emisión en el canal colectivo y en el canal independiente [11]. Para el canal colectivo tenemos

$$I_c = \gamma_c \langle \hat{J}_+ \hat{J}_- \rangle = \gamma_c \left\langle \left( \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right) \left( \check{A}_+^{00} + \check{A}_+^{01} \right) \right\rangle. \quad (4.11)$$

Para explicitar un poco el cálculo de  $I_c$  para el estado (4.10), reescribamos al operador de densidad de la forma

$$|\rho(t)\rangle = A \hat{Q}_{00}^{30} + B \hat{Q}_{01}^{20} + C \hat{Q}_{02}^{10} + D \hat{Q}_{03}^{00} + E \hat{Q}_{10}^{11} + F \hat{Q}_{11}^{01},$$

así tendremos que

$$\begin{aligned} I_c &\propto B \text{Tr} \left[ 2\hat{Q}_{10}^{11} + \hat{Q}_{01}^{20} \right] + C \text{Tr} \left[ 2\hat{Q}_{11}^{01} + 2\hat{Q}_{02}^{10} \right] + D \text{Tr} \left[ \hat{Q}_{03}^{00} \right] + E \text{Tr} \left[ \hat{Q}_{10}^{11} + \hat{Q}_{01}^{20} \right] \\ &\quad + F \text{Tr} \left[ 2\hat{Q}_{11}^{01} + \hat{Q}_{02}^{10} \right] \\ &= B + 2C + 3D + E + F. \end{aligned}$$

Si susituimos los coeficientes acorde a la expresión (4.10) obtenemos

$$I_c = 3\gamma_c e^{-(\gamma_{10} + 3\gamma_c)t}. \quad (4.12)$$

La intensidad del canal independiente,  $I_{10}$ , está dado por

$$\begin{aligned} I_{10} &= \gamma_{10} \left\langle \sum_{\mu} \hat{\sigma}_+^{\mu} \hat{\sigma}_-^{\mu} \right\rangle = \gamma_{10} \left\langle \check{A}_+^{10} + \check{A}_+^{11} \right\rangle = \gamma_{10} (B + 2C + 3D) \\ &= \gamma_{10} (2 + e^{-3\gamma_c t}) e^{-\gamma_{10} t}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La importancia de estas observables es que pueden ser contrastadas experimentalmente.

En la Figura 4.2 se comparan las componentes de los  $\hat{Q}_{n_{10} n_{11}}^{n_{00} n_{01}}$  en la evolución del estado con disipación individual y para el proceso colectivo de disipación, para distintas condiciones iniciales.

Para finalizar podemos considerar la evolución de un sistema enredado. Para ello tomemos como condición inicial un estado GHZ [28],

$$|GHZ\rangle := \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}$$

El operador densidad de tal estado es

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle &= \frac{|000\rangle\langle 000| + |000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \hat{Q}_{00}^{30} + \hat{Q}_{00}^{03} + \hat{Q}_{30}^{00} + \hat{Q}_{03}^{00} \right]. \end{aligned}$$

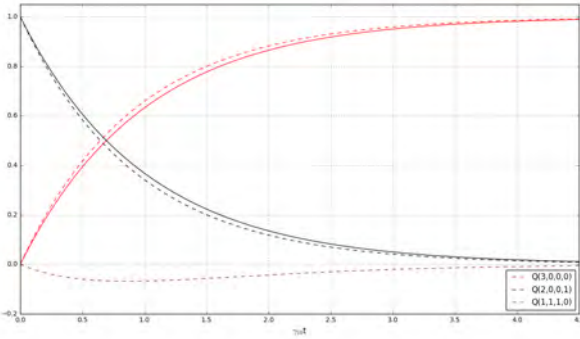
Como ya sabemos  $\hat{Q}_{00}^{30}$  es un estado estacionario del sistema. Además ya hemos calculado la evolución del estado con tres partículas excitadas,  $\hat{Q}_{03}^{00}$ , así que solo debemos de calcular la evolución de  $\hat{Q}_{00}^{03} = |0,0\rangle_0$  y  $\hat{Q}_{30}^{00} = |0,0\rangle_3$ , que no resultan ser complicados

$$\begin{aligned} e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} |0,0\rangle_0 &\approx e^{-\frac{3}{2}(\gamma_{10} + \gamma_c)t} |0,0\rangle_0, \\ e^{(\check{L}_{10} + \check{L}_c)t} |0,0\rangle_3 &\approx e^{-\frac{3}{2}(\gamma_{10} + \gamma_c)t} |0,0\rangle_3. \end{aligned}$$

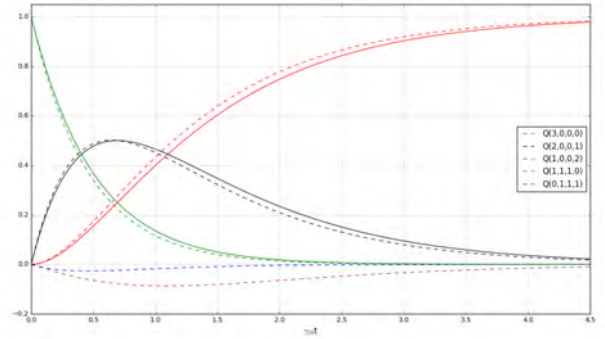
Así tenemos la evolución del estado GHZ está dado por la expresión

$$\begin{aligned}
 |\rho_{GHZ}(t)\rangle \approx & \frac{1}{2} \left[ 2|3,0\rangle_0 + e^{-\gamma_{10}t} \frac{2 + e^{-3\gamma_c t}}{3} |3,1\rangle_0 + e^{-2\gamma_{10}t} \frac{2e^{-\gamma_c t} + e^{-4\gamma_c t}}{3} |3,2\rangle_0 + \right. \\
 & e^{-3(\gamma_{10} + \gamma_c)t} |3,3\rangle_0 - e^{-\gamma_{10}t} \frac{1 - e^{-3\gamma_c t}}{3} |1,0\rangle_1 - e^{-\gamma_{10}t} \frac{e^{-\gamma_c t} - e^{-4\gamma_c t}}{3} |1,1\rangle_1 \\
 & \left. + e^{-\frac{3}{2}(\gamma_{10} + \gamma_c)t} (|0,0\rangle_0 + |0,0\rangle_3) \right].
 \end{aligned}$$

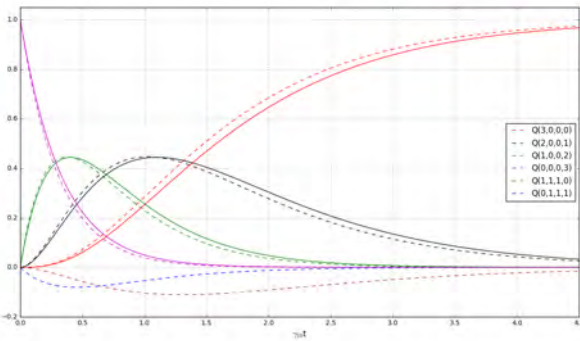
Aunque no mostramos de manera explícita la expresión anterior en la base de operadores simétricos, si graficamos las componentes de la evolución temporal en la base de operadores simétricos nuevamente en la Figura 4.2.



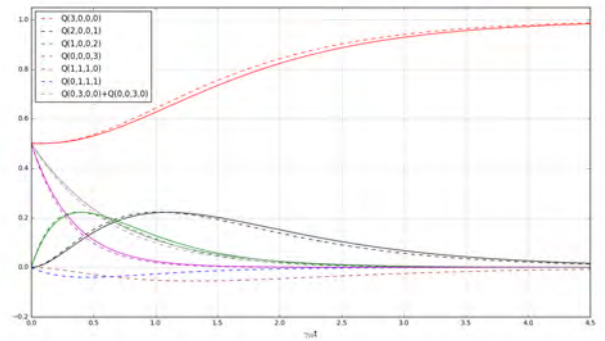
a) Estado de un átomo excitado como condición inicial.



b) Estado de dos átomos excitados como condición inicial.



c) Estado de tres átomos excitados como condición inicial.



d) Estado  $|GHZ\rangle$  como condición inicial.

Figura 4.2: Evolución temporal de las componentes del operador densidad, descrito en la base de los operadores simétricos, para distintas condiciones iniciales (estados simétricos mixtos). La línea sólida muestra la evolución del sistema con la disipación individual, y la línea discontinua representa la evolución agregando la disipación colectiva como perturbación. Se toma  $\gamma = 0,08$ .

## 4.5. Perturbación “térmica” para la disipación individual

Recordemos que para la disipación individual tenemos de manera completa la expresión (3.7). La base de disipación se obtuvo para el caso  $N_0 = 0$ . Ya que hemos descrito el método perturbativo independiente del tiempo en el subespacio simétrico, podemos usarlo para el caso  $N_0 \ll 1$  de (3.7).

Chequemos la acción del superoperador  $\check{L}_{10}^\beta$  sobre los estados propios de  $\check{L}_{10}$

$$\begin{aligned}
\check{L}_{10}^\beta |\alpha, \delta\rangle_n &= (-1)^\delta \binom{N}{\alpha} \binom{N-\alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \check{L}_{10}^\beta \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} \hat{Q}^{N-\alpha-n}_{n_{11}} \\
&= (-1)^\delta \gamma_{10} \binom{N}{\alpha} \binom{N-\alpha}{n} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \left[ (\alpha - n_{11}) \hat{Q}^{\alpha-n_{11}-1} \hat{Q}^{N-\alpha-n}_{n_{11}+1} \right. \\
&\quad \left. - (\alpha - n_{11}) \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} \hat{Q}^{N-\alpha-n}_{n_{11}} - \frac{N-\alpha}{2} \hat{Q}^{\alpha-n_{11}} \hat{Q}^{N-\alpha-n}_{n_{11}} \right] \\
&= (-1)^\delta \gamma_{10} \binom{\alpha}{\delta} \sum_{n_{11}=0}^{\delta} (-1)^{n_{11}} \binom{\delta}{n_{11}} \left[ \frac{\alpha - n_{11}}{\binom{\alpha}{n_{11}+1}} \sum_{k=0}^{n_{11}+1} \binom{\alpha-k}{\alpha - n_{11} - 1} |\alpha, k\rangle_n + \right. \\
&\quad \left. \frac{n_{11}}{\binom{\alpha}{n_{11}}} \sum_{k=0}^{n_{11}} \binom{\alpha-k}{\alpha - n_{11}} |\alpha, k\rangle_n \right] - \gamma_{10} \frac{N+\alpha}{2} |\alpha, \delta\rangle_n.
\end{aligned}$$

El superoperador  $\check{L}_{10}^\beta$  mantiene a  $\alpha$  y a  $n$  y solo acopla al operador  $|\alpha, \delta\rangle_n$  con distintos valores de  $\delta$ . Así, a primer orden los superoperadores  $\mathbb{Q} \check{L}_{10}^\beta \mathbb{Q}$  son diagonales, donde los elementos de la diagonal son

$$\begin{aligned}
{}_n \langle \alpha, \delta | \check{L}_{10}^\beta | \alpha, \delta \rangle_n &= (-1)^\delta \gamma_{10} \binom{\alpha}{\delta} \left[ (-1)^\delta \binom{\delta}{\delta} \left\{ \frac{\alpha - \delta}{\binom{\alpha}{\delta+1}} \binom{\alpha - \delta}{\alpha - \delta - 1} + \frac{\delta}{\binom{\alpha}{\delta}} \binom{\alpha - \delta}{\alpha - \delta} \right\} + \right. \\
&\quad \left. (-1)^{\delta-1} \binom{\delta}{\delta-1} \left\{ \frac{\alpha - (\delta-1)}{\binom{\alpha}{(\delta-1)+1}} \binom{\alpha - \delta}{\alpha - (\delta-1) - 1} \right\} \right] - \gamma_{10} \frac{N+\alpha}{2} \\
&= \gamma_{10} (\alpha - \delta) - \gamma_{10} \frac{N+\alpha}{2} = -\gamma_{10} \left[ \delta + \frac{N-\alpha}{2} \right].
\end{aligned}$$

Por lo que el espectro perturbado de  $\check{L}_{10} + N_0 \left( \check{L}_{10} + \check{L}_{10}^\beta \right)$  es

$$\lambda_{\alpha, \delta, \phi} = -\gamma_{10} (1 + 2N_0) \left[ \frac{N-\alpha}{2} + \delta \right], \quad |\phi_{\alpha, \delta, n}\rangle = |\alpha, \delta\rangle_n.$$

En la Figura 4.3 mostramos la evolución de la componentes  $\hat{Q}^{\begin{smallmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{smallmatrix}}$ , cuando la condición inicial es  $\hat{Q}^{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}}$ .

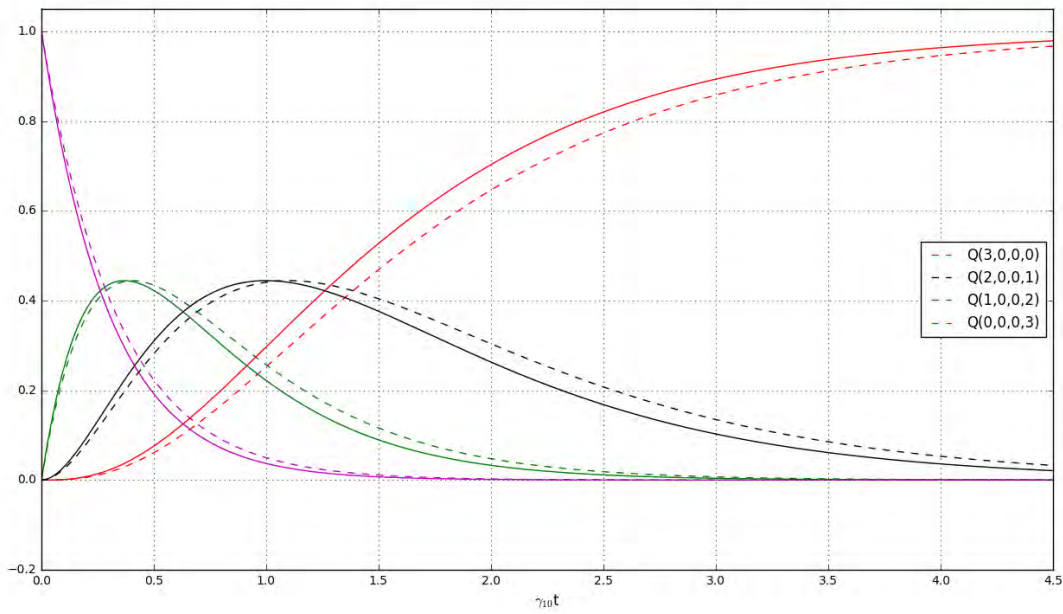


Figura 4.3: Evolución temporal de las componentes del operador de densidad tomando como condición inicial un estado simétrico mixto de tres átomos excitados. La línea sólida muestra la evolución de la disipación individual a  $N_0 = 0$ , mientras que la línea discontinua muestra la perturbación usando  $N_0 = 0,05$ .



# Conclusión

Los resultados expuestos en este trabajo tienen como finalidad obtener soluciones algebraicas al problema de la emisión espontánea colectiva para  $N$  átomos de dos niveles, donde la evolución del operador de estado está descrito por la ecuación maestra de Lindblad. Debido a que el número de grados de libertad del sistema escalan exponencialmente con  $N$ , nos limitamos al estudio de problemas cuya evolución pertenezca al subespacio simétrico, el cual tiene un crecimiento polinomial. Para obtener soluciones algebraicas de la ecuación maestra nos enfocamos al cálculo de una base del subespacio simétrico, formado con eigenvectores del superoperador lindbladiano de la ecuación de Lindblad. Cabe resaltar que debido al proceso disipativo, tratamos con un conjunto de partículas distinguibles, por lo que su aplicación puede ser tanto para sistemas bosónicos y/o fermiónicos.

Inicialmente solo consideramos el canal de disipación individual de los  $N$  átomos, y calculamos la base de eigenvectores del lindbladiano. Para ello, primeramente introdujimos el uso de operadores simétricos como base del subespacio simétrico, tal como está descrito en [3]. En la misma referencia se introducen los superoperadores colectivos, los cuales tienen un mapeo cerrado sobre el conjunto de los operadores simétricos. Así, reescribimos al superoperador de la disipación individual en términos de los superoperadores colectivos. Esto nos permitió proponer como eigenvectores a combinaciones lineales de operadores simétricos. Seguido a esto, se resolvió la ecuación de eigenvalores para obtener los eigenvectores derechos (cuando el eigenvector se sitúa a la derecha del superoperador). Ya que la evolución temporal está dado por un superoperador no-hermítico, para el cálculo de los operadores duales se encontró el conjunto de eigenvectores izquierdos (donde el superoperador actúa del lado derecho del eigenvector).

Ya que el conjunto de eigenvectores corresponde a un mapeo lineal no-hermítico, no necesariamente forma una base completa del subespacio. Por tanto se procedió a verificar que la cardinalidad del conjunto correspondía a la dimensión del subespacio simétrico, con lo que se verificó la validez de la base de decaimiento. Se obtuvieron las expresiones de los operadores simétricos en términos de la base de decaimiento, con lo cual se pudo resolver la evolución de la disipación individual con condiciones iniciales pertenecientes al subespacio simétrico. Aunque la solución de la disipación individual es conocida, la base de decaimiento del sistema no se encuentra en la literatura.

Lo anterior tiene validez cuando la separación entre átomos vecinos es mayor a la longitud de la luz emitida. Cuando se consideran separaciones menores existe un acoplamiento entre los átomos mediado por el campo de radiación, lo que conduce a que haya otro canal de disipación en el que toman parte los efectos colectivos.

El objetivo de este proyecto, fue la de obtener soluciones algebraicas tomando en cuenta el canal de disipación individual y el canal de disipación colectiva, por tanto procedimos a trabajar con la evolución de la disipación colectiva. Escribimos el superoperador de la disipación colectiva en términos de los superoperadores colectivos. Mostramos la ecuación de recurrencia para encontrar los eigenvectores de tal superoperador, la cual no resolvemos.

Para el caso de la disipación colectiva e individual, se pudo obtener la solución exacta para el caso particular de un sistema de  $N$  átomos limitados a tener un átomo excitado en el sistema. Se pudo corroborar la solución de la evolución del operador densidad cuando inicialmente tenemos el estado puro y simétrico de un átomo excitado. Esta solución es acorde a lo publicado en [24]. Además se

mostró la solución cuando el estado inicial es un estado mixto. El calcular el número promedio de átomos en el sistema demostró la superradiancia que se presenta en el estado puro y que aumenta con el número de átomos  $N$ , en contraposición a la solución con el estado mixto, en donde la tasa de decaimiento tiende a la de un sistema donde sólo hay disipación individual conforme  $N$  aumenta. Esto ayudó a confirmar el funcionamiento del método expuesto en este trabajo.

Para resolver casos más generales, se introdujo el método perturbativo independiente del tiempo. Con él se calculó la perturbación de la base de decaimiento de la disipación individual al introducir el canal de disipación colectiva. Por la construcción de la base de decaimiento, cada eigenvalor está degenerado. Pero además, aunque distintos eigenvalores tengan distintas etiquetas, los eigenvalores pueden tener el mismo valor. Por lo que decimos que los eigenvalores son únicos o no-únicos. Para el subespacio degenerado de los eigenvalores no-únicos, mostramos la expresión analítica de las componentes de la supermatriz que necesitamos diagonalizar para obtener la perturbación. Por otro lado, para el subespacio degenerado de eigenvalor único se encontró la expresión analítica de la perturbación. Así, se encontró la perturbación a orden cero de los eigenvectores y a primer orden de los eigenvalores. Lo descrito en este párrafo no está presente en la literatura, y puede ser aplicado a sistemas átomos-nanofibras, donde el canal colectivo de disipación puede tratarse como una perturbación ( $\gamma_c/\gamma_{10} \sim 0,05$ ) [34].

Todo lo anterior se aplicó de manera explícita para un sistema de tres átomos.

Cabe recordar que los cálculos mostrados hasta ahora corresponden a un sistema a temperatura  $T = 0$ . Se aprovechó el método perturbativo para obtener la perturbación de la base de decaimiento cuando se tiene perturbaciones en el superoperador de disipación individual debido a la temperatura. A orden cero la base de decaimiento no se modifica y a primer orden no se rompe la degeneración de los eigenvalores.

El cálculo de las bases de decaimiento no es un método novedoso ya que ha sido empleado para la disipación de fotones, y la disipación de un sólo átomo [5]. Pero parte del aporte original de este trabajo consiste en la introducción de la base de decaimiento del sistema atómico de  $N$  átomos, con el que se puedan simular la interacción de fotones y sistemas multipartículas en cavidades o nanofibras disipativas. Es deseable para trabajos posteriores solucionar la recurrencia (4.1), y encontrar la base de decaimiento para el superoperador de disipación colectivo, con el cuál será posible estudiar la disipación de qubits superconductores o puntos cuánticos acoplados a guías de onda ( $\gamma_c/\gamma_{10} \gg 1$ ) [1]. Además de tener, en un caso más deseable, soluciones exactas para el problema de la emisión espontánea en procesos colectivos, que nos permitirá abarcar mayores problemas físicos, como la disipación de átomos acoplados a cristales fotónicos ( $\gamma_c/\gamma_{10} \sim 1$ ) [16].

Otros aspectos que puedan motivar futuros proyectos son, primeramente la programación de códigos para automatizar el cálculo de la perturbación para subespacios degenerados de eigenvalores no-únicos, con lo cuál se lograría la simulación de sistemas para distintos valores de  $N$ . Por otro lado, también es requerible encontrar bases de decaimiento para sistemas multinivel (qudits), especialmente para sistemas de tres niveles, los cuales pueden ser más estables ante la decoherencia bajo ciertos ambientes [26] y/o ser más seguros en algunos protocolos de información cuántica [6], entre otros.

## Apéndice A

# Mapeo a superoperadores colectivos

A continuación se muestra el mapeo de algunos operadores de Kraus de  $\mathcal{S}(\mathcal{L}_4^{\otimes N})$  a superoperadores colectivos.

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} &= \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}0} |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{-}^{\mu} &= \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{0}0} |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \hat{\sigma}_{3}^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} &= \frac{1}{2} \left( \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}1} + \check{A}_{+}^{\check{1}0\check{1}0} - \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{0}1} - \check{A}_{+}^{\check{0}0\check{0}0} \right) |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{3}^{\mu} &= \frac{1}{2} \left( \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}1} - \check{A}_{+}^{\check{1}0\check{1}0} + \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{0}1} - \check{A}_{+}^{\check{0}0\check{0}0} \right) |\rho\rangle \\
\hat{J}_{+} |\rho\rangle &= \sum_{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{1}0\check{0}0} + \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{0}1} \right) |\rho\rangle \\
|\rho\rangle \hat{J}_{+} &= \sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}0} + \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{0}0} \right) |\rho\rangle \\
\hat{J}_{-} |\rho\rangle &= \sum_{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{0}0\check{1}0} + \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{1}1} \right) |\rho\rangle \\
|\rho\rangle \hat{J}_{-} &= \sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{-}^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}0} + \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{0}0} \right) |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} &= \sum_{\mu} (|1\rangle\langle 1|)^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{1}0\check{1}0} + \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}1} \right) |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{+}^{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} &= \sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle (|1\rangle\langle 1|)^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{0}1} + \check{A}_{+}^{\check{1}1\check{1}1} \right) |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \hat{\sigma}_{-}^{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} &= \sum_{\mu} (|0\rangle\langle 0|)^{\mu} |\rho\rangle \mathbb{I}^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{0}1\check{0}1} + \check{A}_{+}^{\check{0}0\check{0}0} \right) |\rho\rangle \\
\sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle \hat{\sigma}_{-}^{\mu} \hat{\sigma}_{+}^{\mu} &= \sum_{\mu} \mathbb{I}^{\mu} |\rho\rangle (|0\rangle\langle 0|)^{\mu} = \left( \check{A}_{+}^{\check{1}0\check{1}0} + \check{A}_{+}^{\check{0}0\check{0}0} \right) |\rho\rangle
\end{aligned}$$



## Apéndice B

# Acción de la disipación colectiva

A continuación se muestra la acción del superoperador de disipación colectiva sobre la base de eigenvectores  $\{|\alpha, \delta\rangle_n\}$  para el caso  $N = 3$ . La cardinalidad de la base es 20.

$$\begin{aligned}
 \check{L}_c |0, 0\rangle_0 &= -\frac{3}{2}\gamma_c |0, 0\rangle_0 & \check{L}_c |0, 0\rangle_1 &= \gamma_c \left[ -\frac{3}{2} |0, 0\rangle_1 - |2, 1\rangle_0 \right] \\
 \check{L}_c |0, 0\rangle_2 &= \gamma_c \left[ -\frac{3}{2} |0, 0\rangle_2 - |2, 1\rangle_1 \right] & \check{L}_c |0, 0\rangle_3 &= -\frac{3}{2}\gamma_c |0, 0\rangle_3 \\
 \check{L}_c |1, 0\rangle_0 &= -2\gamma_c |1, 0\rangle_0 & \check{L}_c |1, 0\rangle_1 &= -2\gamma_c \left[ |1, 0\rangle_1 + |3, 1\rangle_0 \right] \\
 \check{L}_c |1, 0\rangle_2 &= -2\gamma_c |1, 0\rangle_2 & \check{L}_c |1, 1\rangle_0 &= \gamma_c \left[ 2 |1, 0\rangle_0 - 3 |1, 1\rangle_0 \right] \\
 \check{L}_c |1, 1\rangle_1 &= \gamma_c \left[ 2 |1, 0\rangle_1 - 3 |1, 1\rangle_1 - 2 |3, 2\rangle_0 \right] & \check{L}_c |1, 1\rangle_2 &= \gamma_c \left[ 2 |1, 0\rangle_2 - 3 |1, 1\rangle_2 \right] \\
 \check{L}_c |2, 0\rangle_0 &= -\frac{3}{2}\gamma_c |2, 0\rangle_0 & \check{L}_c |2, 0\rangle_1 &= -\frac{3}{2}\gamma_c |2, 0\rangle_1 \\
 \check{L}_c |2, 1\rangle_0 &= \gamma_c \left[ -2 |0, 0\rangle_1 + 2 |2, 0\rangle_0 - \frac{5}{2} |2, 1\rangle_0 \right] & \check{L}_c |2, 1\rangle_1 &= \gamma_c \left[ -2 |0, 0\rangle_2 + 2 |2, 0\rangle_1 - \frac{5}{2} |2, 1\rangle_1 \right] \\
 \check{L}_c |2, 2\rangle_0 &= \gamma_c \left[ 4 |0, 0\rangle_1 + |2, 1\rangle_0 - \frac{7}{2} |2, 2\rangle_0 \right] & \check{L}_c |2, 2\rangle_1 &= \gamma_c \left[ 4 |0, 0\rangle_2 + |2, 1\rangle_1 - \frac{7}{2} |2, 2\rangle_1 \right] \\
 \check{L}_c |3, 0\rangle_0 &= 0 & \check{L}_c |3, 1\rangle_0 &= -\gamma_c \left[ |1, 0\rangle_1 + |3, 1\rangle_0 \right] \\
 \check{L}_c |3, 2\rangle_0 &= \gamma_c \left[ 2 |1, 0\rangle_1 - |1, 1\rangle_1 - 2 |3, 2\rangle_0 \right] & \check{L}_c |3, 3\rangle_0 &= \gamma_c \left[ 2 |1, 1\rangle_1 - 3 |3, 3\rangle_0 \right]
 \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] ARCARI, M. E. A. Near-unity coupling efficiency of a quantum emitter to a photonic crystal waveguide. *Phys. Rev. Lett.* *113* (2014), 093603.
- [2] BAJCSY, M. E. A. Efficient all-optical switching using slow light within a hollow fiber. *Phys. Rev. Lett.* *102* (May 2009), 203902.
- [3] BOLANOS, M. Y BARBERIS, P. Algebraic solution of the Lindblad equation for a collection of multilevel systems coupled to independent environments. *J. Phys. A: Math. Theor.* *48* (2014), 445301.
- [4] BREUER, H. Y PETRUCCIONE, F. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [5] BRIGEL, H. Y ENGLERT, B. Quantum optical master equations: The use of damping bases. *Phys. Rev. A* *47* (1993), 3311.
- [6] BRUSS, D. Y MACCHIAVELLO, C. Optimal eavesdropping in cryptography with three-dimensional quantum states. *Phys. Rev. Lett.* *88* (Mar 2002), 127901.
- [7] CARMICHAEL, H. *Statistical Methods in Quantum Optics 1*. Texts and Monographs in Physics. Wiley-VCH, 1999.
- [8] CARUSOTTO, I., AND CIUTI, C. Quantum fluids of light. *Rev. Mod. Phys.* *85* (Feb 2013), 299.
- [9] CHAICHIAN, M. Y DEMICHEV, A. *Introduction to Quantum Groups*. World Scientific, 1996.
- [10] CHASE, B. A. Y GEREMIA, J. M. Collective processes of an ensemble of spin-1/2 particles. *Phys. Rev. A* *78* (2008), 052101.
- [11] CLEMENS, J. P. Y CARMICHAEL, H. J. Stochastic initiation of superradiance in a cavity: An approximation scheme within quantum trajectory theory. *Phys. Rev. A* *65* (2002), 023815.
- [12] COHEN-TANNOUJDI, C. Y DIU, B. Y. L. F. *Quantum Mechanics*. No. v. 1 in Quantum Mechanics. Wiley, 1991.
- [13] DICKE, R. H. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.* *93* (Jan 1954), 99–110.
- [14] DOMOKOS, P. E. A. Simple cavity-QED two-bit universal quantum logic gate: The principle and expected performances. *Phys. Rev. A* *52* (1995), 3554.
- [15] DUAN, L.-M., AND MONROE, C. Colloquium: Quantum networks with trapped ions. *Rev. Mod. Phys.* *82* (Apr 2010), 1209.
- [16] GOBAN, A. E. A. Superradiance for Atoms Trapped along a Photonic Crystal Waveguide. *Phys. Rev. Lett.* *104* (2010), 203603.

- [17] HALL, B. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.
- [18] HARTMANN, S. Generalized dicke states.
- [19] HAVEL, T. F. Robust procedures for converting among Lindblad, Kraus and matrix representations of quantum dynamical semigroups. *J. Math. Phys.* *44* (2003), 534.
- [20] HORN, R. A. Y JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2012.
- [21] JAYNES, E. T. Y CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE* *51* (1963), 89.
- [22] KLIMOV, A.B. Y CHUMAKOV, S. *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag, 2009.
- [23] LE-KIEN, F. Y RAUSCHENBEUTEL, A. Propagation of nanofiber-guided light through an array of atoms. *Phys. Rev. A* *90* (Dec 2014), 063816.
- [24] LE KIEN, F. Y HAKUTA, K. Cooperative enhancement of channeling of emission from atoms into nanofiber. *Phys. Rev. A* *77* (2008), 013801.
- [25] LEHMBERG, R. H. Radiation from an  $n$ -atom system. ii. spontaneous emission from a pair of atoms. *Phys. Rev. A* *2* (1970), 889.
- [26] MELIKIDZE, A. E. A. Parity effects in spin decoherence. *Phys. Rev. B* *70* (2004), 014435.
- [27] MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1998.
- [28] NIELSEN, M. Y CHUANG, I. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [29] PARK, J. E. A. Bell-inequality tests with entanglement between an atom and a coherent state in a cavity. *Phys. Rev. A* *85* (2012), 022120.
- [30] PARK, J. E. A. Generation of macroscopic Schrödinger-cat states in qubit-oscillator systems. *Phys. Rev. A* *85* (2012), 022120.
- [31] SAKURAI, J. *Modern Quantum Mechanics. Revised Edition*. Addison-Wesley, 1994.
- [32] SARKAR, S. Y SATCHELL, J. S. Solution of master equations for small bistable systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General* *20*, 8 (1987), 2147.
- [33] TARASOV, V. *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*. Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. Elsevier, 2008.
- [34] VETSCH, E. E. A. Optical interface created by laser-cooled atoms trapped in the evanescent field surrounding an optical nanofiber. *Phys. Rev. Lett.* *115* (2015), 063601.
- [35] XU, M. E. A. Simulating open quantum systems by applying SU(4) to quantum master equations. *Phys. Rev. A* *20* (2013), 062101.