



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Modelos de redistribución de riqueza con cotas
máximas, análogos a sistemas termodinámicos con
temperaturas negativas.**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN FÍSICA
P R E S E N T A:**

ALAN ROBERTO VILLAGÓMEZ MANRIQUE



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARCELO DEL CASTILLO MUSSOT**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno:

Villagómez
Manrique
Alan Roberto
5561263401
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
306330186

2. Datos del tutor:

Dr
Marcelo
del Castillo
Mussot

3. Datos del sinodal 1:

Dr
Gerardo
García
Naumis

4. Datos del sinodal 2:

Dr
Luis Antonio
Pérez
López

5. Datos del sinodal 3:

Dr
Luis Antonio
Pérez
López

6. Datos del sinodal 4:

Dr
Luis Antonio
Ricón
Solis

7. Datos del trabajo escrito:

Modelos de redistribución de riqueza con cotas máximas, análogos a sistemas termodinámicos con temperaturas negativas.

47 p
2018

CONTENIDO

I.	Lista de tablas y gráficas.....	IV
I.	Marco teórico.....	1
I.1.	Introducción.....	1
I.1.1.	Econofísica: un nuevo campo de investigación.....	1
I.1.2.	Modelos de intercambio económico.....	1
I.1.3.	Modelos con cotas: sistemas con temperaturas negativas.....	1
I.2.	Objetivo.....	2
I.2.1.	Relevancia.....	2
I.3.	Índice de Gini.....	2
I.4.	Entropía y la segunda ley de la termodinámica.....	3
I.5.	Modelo simple de intercambio.....	4
I.6.	Modelo con propensión al ahorro.....	6
I.7.	Modelo de intercambio con cotas superiores.....	7
I.8.	Temperaturas negativas en sistemas paramagnéticos.....	8
II.	Diseño metodológico.....	9
II.1.	Modelo inicial.....	9
II.2.	Estandarización del sistema.....	10
II.3.	Modelo con tendencia al ahorro.....	10
II.4.	Modelo con cotas superiores.....	10
II.5.	Modelo económico con temperaturas negativas.....	11
III.	Resultados.....	11
IV.	Discusión y Conclusiones.....	24
IV.1.	Discusión.....	24
IV.2.	Conclusiones.....	27
V.	Referencias.....	28
VI.	Anexos.....	29
VI.1.	Anexo 1. Programa desarrollado.....	29
VI.2.	Anexo 2. Publicación en la RMF.....	40

Lista de Tablas y Gráficas

Fig. 1. <i>Representación gráfica del índice de Gini.</i>	3
Fig. 2. <i>Distribuciones de riqueza con factor de ahorro λ.</i>	7
Fig. 3. <i>Diagrama de flujo de intercambios con cota.</i>	8
Fig. 4. <i>Gráfica esquemática de S vs. E.</i>	9
Fig. 5. <i>Distribución de riqueza del modelo de Dragulescu & Yakovenko.</i>	11
Fig. 6. <i>Gráfica semi-log de la distribución de Dragulescu & Yakovenko.</i>	12
Fig. 7. <i>Entropía de la distribución de Dragulescu & Yakovenko.</i>	12
Fig. 8. <i>Distribuciones: modelo simple con 3000 agentes.</i>	13
Fig. 9. <i>Entropías del modelo simple con 3000 agentes.</i>	14
Fig. 10. <i>Distribuciones: modelo simple con R=10.</i>	14
Fig. 11. <i>Entropías del modelo simple con R=10.</i>	15
Fig. 12. <i>Distribuciones: asignación uniforme vs. aleatoria.</i>	16
Fig. 13. <i>Entropías: asignación uniforme vs. aleatoria.</i>	16
Fig. 14. <i>Simulaciones con factor de ahorro λ.</i>	17
Fig. 15. <i>Entropías: simulaciones con diferente λ.</i>	18
Fig. 16. <i>Distribuciones: factor de ahorro parcial.</i>	18
Fig. 17. <i>Entropías: factor de ahorro parcial.</i>	19
Fig. 18. <i>Distribuciones con $\lambda=0.9$: ahorradores vs. no ahorradores.</i>	20
Fig. 19. <i>Distribuciones: modelo con cotas CS.</i>	20
Fig. 20. <i>Entropías: modelo con cotas CS.</i>	21
Fig. 21. <i>Curvas S vs. E: modelo con cotas.</i>	22
Fig. 22. <i>Función de temperatura: CS=6.</i>	22
Fig. 23. <i>Función de temperatura: CS=5.</i>	23
Fig. 24. <i>Función de temperatura: CS=3.</i>	23

I. Marco teórico

I.1 Introducción

I.1.1 La Econofísica: un nuevo campo de investigación.

Durante siglos, las teorías físicas han influenciado a diversas áreas de la ciencia, incluyendo a la economía. Por ejemplo, Hetherington (1983) afirma que los esfuerzos de Adam Smith para establecer las leyes generales de la economía, están motivados por el logro de Newton: la formulación de las leyes fundamentales del movimiento. Durante las últimas décadas, los físicos han estudiado satisfactoriamente los sistemas económicos, dando origen a una nueva disciplina llamada *Econofísica*; la cual utiliza los conceptos y métodos de la física para contribuir al entendimiento de los sistemas económicos (Chatterjee, Yarlagadda, & Chakrabarti, 2005; de Area Leão Pereira, da Silva, & Pereira, 2017; Gallegati, Keen, Lux, & Ormerod, 2006; Mantegna, Stanley, & Chriss, 2000; McCauley, 2006; H. E. Stanley et al., 1999; H. Eugene Stanley et al., 1996).

I.1.2 Modelos de intercambio económico.

A principios de la década anterior, se propuso un modelo básico de intercambio económico en el cual el dinero (al igual que la energía) se conserva en cada interacción (Dragulescu & Yakovenko, 2000). Como resultado de dicho modelo, se obtiene una distribución de riqueza idéntica a la distribución de Boltzmann-Gibbs para la energía; de tal manera que el equivalente económico de la temperatura (para los sistemas físicos) es la energía media del sistema.

Basados en el principio de conservación del dinero, se realizaron múltiples trabajos en los cuales se implementaron mecanismos como la tendencia al ahorro, recaudación de impuestos o una dinámica para apoyar a la población más pobre (Chakraborti & Chakrabarti, 2000; Guala, 2009; Pianegonda & Iglesias, 2004). Estos mecanismos condujeron a distribuciones de riqueza diferentes a la exponencial y a una reducción en las desigualdades económicas.

Por otro lado, ya que resulta de gran importancia conocer el grado de desigualdad y de orden, así como determinar la estabilidad de una distribución dada, se utilizan el índice de Gini y la función de entropía como parámetros para caracterizar la distribución final de riqueza de los modelos analizados.

I.1.3 Modelos con cotas: sistemas con temperaturas negativas.

En el marco de los intercambios conservativos, proponemos un modelo con cotas superiores que limita la cantidad de riqueza que los agentes pueden poseer. Este límite produce el agrupamiento de los agentes en un número reducido de estados, ocasionando un mayor grado de orden en el sistema y una menor desigualdad.

De acuerdo con la teoría, cuando la cota superior impuesta es muy cercana a la energía media del sistema, se observa una transición a sistemas con *temperaturas negativas*. Tales temperaturas negativas existen formalmente en materiales paramagnéticos expuestos a campos magnéticos externos, como resultado de que la pendiente de la entropía como función de la energía total del sistema es negativa. Asimismo, se ha observado la existencia de temperaturas negativas en sistemas sociales, en un modelo conocido como el modelo de influencia social de Axelrod (Villegas-Febres & Olivares-Rivas, 2008).

I.2 **Objetivo.**

El objetivo del presente trabajo de tesis es mostrar numéricamente que cuando el valor de la cota superior impuesta está cerca de la riqueza media del sistema, se observa una transición a sistemas con *temperaturas negativas* como resultado de un ordenamiento del sistema.

I.2.1 Relevancia.

El estudio de las diferentes distribuciones de riqueza, así como de los orígenes y consecuencias de la desigualdad, han sido de interés científico desde hace varios años (Chakrabarti, Chakraborti, Chakravarty, & Chatterjee, 2013). Actualmente, se conocen pocas clases de modelos de intercambio económico (Chakrabarti et al., 2013), por lo cual el presente trabajo aportará un nuevo modelo que exhibe el fenómeno de las temperaturas negativas, fortaleciendo la comprensión de los modelos de intercambio económico.

I.3 **Índice de Gini.**

En el estudio de las distribuciones de ingreso y riqueza en economía, uno de los indicadores de desigualdad más utilizados es el índice de Gini (*GI*) dado por:

$$GI = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j|}{2NM} \quad (1)$$

Donde x_i y x_j son los valores de riqueza de los agentes i y j , respectivamente; M es la riqueza total y N es el número de agentes económicos del sistema. Si los agentes poseen riqueza no negativa, el índice de Gini pertenece al intervalo cerrado de 0 a 1.

Usualmente, el índice de Gini se define en términos de la curva de Lorenz que representa la proporción de la riqueza total del sistema $\%y$ que es poseída por la fracción $\%x$ de agentes con menor riqueza del sistema (ver Fig. 1). Entonces, la línea con pendiente igual a uno representa el estado de igualdad perfecta. De manera que el índice de Gini se define como la razón del área entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz (A), y el área total bajo la línea de igualdad ($A + B$), es decir:

$$GI = \frac{A}{A+B} \quad (2)$$

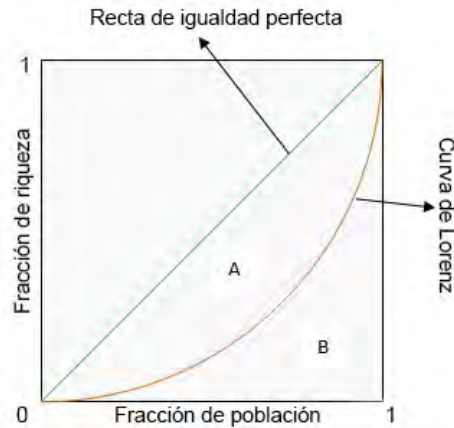


Fig. 1. Representación gráfica del índice de Gini.

Así, GI igual a cero expresa un estado de igualdad perfecta, en la que todos los agentes tienen la misma riqueza; y GI igual a uno significa que hay un grado máximo de desigualdad, el cual ocurre cuando un solo agente tiene toda la riqueza del sistema y los demás, por lo tanto, tienen una riqueza igual a cero.

I.4 Entropía y la segunda ley de la termodinámica.

La segunda ley de la termodinámica establece irrefutablemente la existencia de procesos irreversibles. Ya que afirma que existen procesos que ocurren en una sola dirección y, en los cuales, no es posible restaurar al universo termodinámico al estado inicial. Lo anterior, obliga la introducción de una nueva variable: la entropía S ; cuyo comportamiento es tal que, si en el interior de un sistema aislado ocurren procesos irreversibles, entonces el valor de la entropía crece (Carmona, 2012). De esta manera, es posible afirmar que un sistema aislado que no se encuentra en equilibrio pasará de un estado de menor entropía a otro de mayor entropía hasta alcanzar el valor máximo posible; y es entonces cuando el sistema entra en completo equilibrio (Landau & Lifshitz, 1960). Por consiguiente, la función de entropía indica cuando un sistema ha alcanzado un estado de equilibrio, al permanecer constante en el tiempo.

Por otro lado, la función de entropía de Boltzmann, definida en términos de los microestados de un sistema termodinámico es:

$$S(E, V, N) = k_B \ln(\Omega(E, V, N)) \quad (3)$$

Donde E , V y N son las variables macroscópicas de energía, volumen y número de partículas respectivamente; $k_B = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ es la constante de Boltzmann y Ω es el número de microestados accesibles al sistema. Así, la Eq. 3 representa el puente entre la termodinámica y la física estadística, ya que es una relación entre las variables macroscópicas del sistema (E , V y N) y los microestados accesibles.

Se puede demostrar que la función de entropía puede escribirse en términos de las probabilidades que tiene una partícula del sistema de encontrarse en un estado particular (p_i); de tal manera que, en términos de dichas probabilidades, la función de entropía se define como:

$$S(E, V, N) = -Nk_B \sum_i p_i \ln(p_i) \quad (4)$$

Donde la suma se realiza sobre todos los microestados accesibles al sistema. Asimismo, se pueden obtener diversas variables macroscópicas del sistema a partir de la función de entropía, entre ellas la temperatura, la cual se obtiene como resultado de una derivada:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E} \right)_{V, N} \quad (5)$$

De modo que la pendiente de la curva de entropía S como función de la energía del sistema E , es inversamente proporcional a la temperatura de dicho sistema.

1.5 Modelo simple de intercambio.

Los modelos simples de intercambio económico se componen de un gran número de *agentes* y un conjunto de ecuaciones de transferencia de *riqueza* que rigen los intercambios económicos de un sistema. Tales sistemas son semejantes a los sistemas físicos en los cuales se transfiere energía mediante colisiones entre partículas; como en el caso de las colisiones en un gas ideal.

Así, en el modelo económico simple, se establece un número fijo de agentes N ; a los cuales se les asigna cierta riqueza $\{m_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, N\}$ que en todo momento es no negativa. En cada interacción, un agente i elegido aleatoriamente intercambia parte de su riqueza con otro agente j , que también es elegido aleatoriamente. Dichos intercambios (o colisiones económicas) se realizan de tal manera que la riqueza total del sistema $M = \sum_i m_i$ se mantiene constante y, por lo tanto, la riqueza media del sistema $SAW = (M/N)$ se mantiene constante.

De tal modo que, después de cada interacción (o *paso*) las riquezas finales de los agentes son:

$$\begin{aligned} m'_j &= m_j + \Delta x; \\ m'_i &= m_i - \Delta x \end{aligned} \quad (6)$$

Donde m'_i y m'_j son las riquezas finales de los agentes i y j , respectivamente; y Δx es la cantidad de riqueza intercambiada. La forma de la cantidad intercambiada, que en general

es una función de las riquezas iniciales de los agentes $\Delta x = \Delta x(m_i, m_j)$, determina la dinámica del modelo (Chakrabarti et al., 2013). Cabe resaltar que, dependiendo de cómo ocurra la colisión, la ganancia o pérdida de riqueza pueden ser abrupta (como en el caso de una colisión frontal) o muy pequeña (como en una colisión con un gran ángulo de desviación). De tal modo que, un agente puede volverse “rico” (o muy “pobre”) en una sola interacción.

En relación con una simulación, se define una *realización* como la ejecución de un número definido de pasos o intercambios, de acuerdo con las reglas de intercambio y bajo los parámetros establecidos. De manera que, aun cuando dos realizaciones tienen las mismas condiciones iniciales (o parámetros), son diferentes por la naturaleza aleatoria de la elección de los agentes y de la cantidad de riqueza intercambiada Δx . Por lo tanto, una simulación consta de n realizaciones, todas con el mismo número de pasos y las mismas condiciones iniciales.

Finalmente, para un modelo en el cual los intercambios de riqueza se regulan siguiendo el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} m'_j &= k(m_j + m_i); \\ m'_i &= (1 - k)(m_j + m_i) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde k es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y 1; se obtiene una distribución final de tipo exponencial decreciente; análoga a la distribución de energía de Boltzmann-Gibbs (Dragulescu & Yakovenko, 2000), cuya función de probabilidad se define como:

$$P(m) = \left(\frac{1}{T}\right) e^{-m/T} \quad (8)$$

De donde se deduce que la temperatura corresponde con la energía media del sistema:

$$T = \frac{M}{N} = SAW \quad (9)$$

En relación con la forma de la distribución, un método para determinar que una distribución es de tipo exponencial consiste en aplicar la función logaritmo a la distribución:

$$\ln(P(m)) = \ln\left(\left(\frac{1}{T}\right) e^{-m/T}\right) \quad (10)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{T}\right) - \frac{m}{T} \ln(e) \quad (11)$$

$$= -\ln(T) - \frac{1}{T}m \quad (11)$$

La cual es la ecuación de una recta decreciente:

$$y = a - bm \quad (12)$$

De manera que, si se se obtiene una recta al graficar los datos obtenidos bajo la función logaritmo, entonces podemos asegurar que se trata de una distribución exponencial; a este proceso se le conoce como gráfica *semi-log* de la distribución.

I.6 Modelo con propensión al ahorro.

El modelo simple de intercambio propuesto por Yakovenko es un modelo ideal que sirvió como referencia para el análisis de otros más realistas. Con base en ello, Chakraborti & Chakrabarti (2000) implementaron un modelo en el cual incluyen un factor de ahorro λ , que llamaron *propensión marginal a ahorrar*. En este modelo, los agentes ganan o pierden sólo una fracción de su riqueza total en cada interacción, protegiéndolos de perder toda su riqueza en un solo intercambio.

En el nuevo modelo con propensión al ahorro, el número total de agentes N y la cantidad total de riqueza M son fijos y los intercambios se realizan de manera que en cada paso M se mantiene constante. De manera semejante al modelo simple (ver Eq. 6), las ecuaciones que rigen los intercambios entre dos agentes i y j elegidos al azar son:

$$\begin{aligned} m'_j &= \lambda m_j + k(1 - \lambda)(m_j + m_i); \\ m'_i &= \lambda m_i + (1 - k)(1 - \lambda)(m_j + m_i) \end{aligned} \quad (13)$$

Y, por consiguiente, las variaciones en la riqueza de los agentes están dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta m_j &= k(1 - \lambda)(m_j + m_i); \\ \Delta m_i &= (1 - k)(1 - \lambda)(m_j + m_i) \end{aligned} \quad (14)$$

Donde m'_i y m'_j son las riquezas finales de los agentes i y j , respectivamente; y Δm_j y Δm_i son sus respectivas variaciones de riqueza; λ (que es el factor de ahorro) tiene un valor definido entre 0 y 1 y k es un valor entre 0 y 1 elegido aleatoriamente.

Los intercambios regulados por las Eq. 14, se realizaron hasta obtener una distribución estable de la riqueza. Así, Chakraborti & Chakrabarti (2000) ejecutaron, en promedio, 2000 realizaciones (es decir, obtuvieron 2000 distribuciones estables) para obtener una

distribución suave de la riqueza. Asimismo, analizaron las distribuciones de equilibrio $P(m)$ para diferentes valores del factor de ahorro λ .

Esta modificación previene que un agente pueda perder toda su riqueza en un solo intercambio (excepto en el caso cuando $\lambda = 0$), lo cual modifica la naturaleza de la distribución final de riqueza. Pasando de una distribución de Gibbs (obtenida cuando $\lambda = 0$) a una distribución asimétrica tipo Gaussiana (ver Fig. 2).

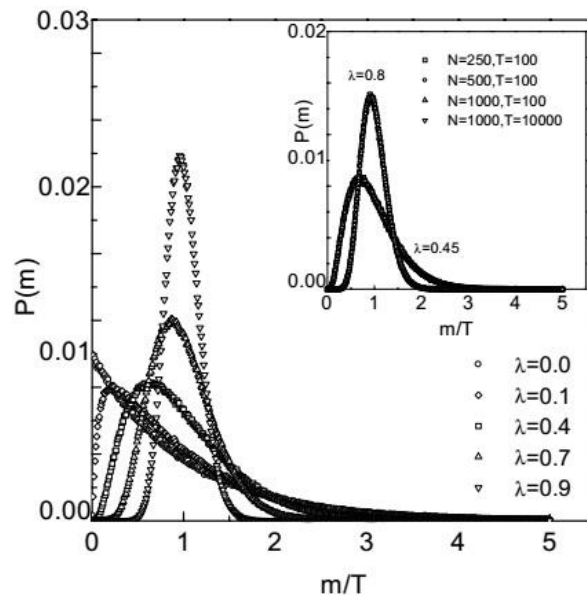


Fig. 2. Distribuciones estables de riqueza $P(m)$, como función de los valores de riqueza normalizados m/T , obtenidas con diferentes valores del factor de ahorro λ . La figura interior muestra que las distribuciones obtenidas no dependen del número de agentes N , ni de la riqueza media inicial T . Tomada de: Chakraborti, A., & Chakrabarti, B. K. (2000). Statistical mechanics of money: how saving propensity affects. *The European Physical Journal B*, 17, 167–170.

Además, se comprobó que la distribución obtenida es muy robusta y no depende ni de la cantidad de agentes del sistema N ni de la distribución inicial de riqueza de los agentes. También, los autores señalan que tales distribuciones manifiestan cierto grado de orden como resultado del “auto interés” de cada agente.

1.7 Modelo de intercambio con cotas superiores.

El modelo de intercambios económicos en los que se impone una cota superior CS consiste en establecer un límite a la cantidad de riqueza que los agentes del sistema pueden poseer. El proceso que se seguirá para obtener dicho resultado se muestra en la Fig.3.

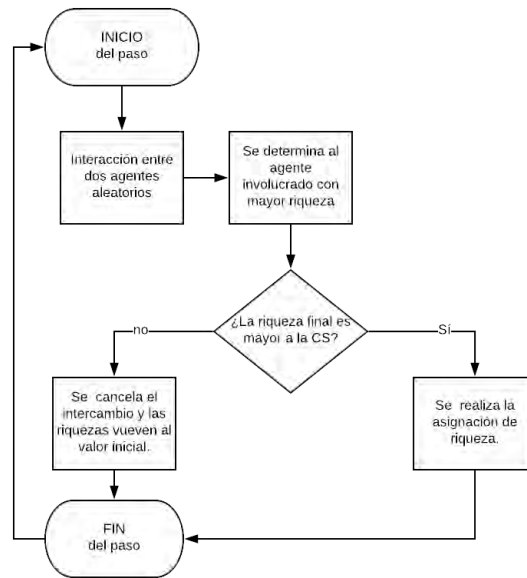


Fig.3. Diagrama de flujo de proceso que sigue el modelo de intercambios económicos con cuota.

Después de realizar la interacción, de la forma descrita en la sección I.5, se verifica que el agente con mayor riqueza no tenga una riqueza superior a la cuota; si su riqueza es menor, la interacción se realizar normalmente; en cambio, si la riqueza es mayor, se cancela la interacción y las riquezas de los agentes regresan a sus valores iniciales. Finalmente, se realiza un conteo de las interacciones rechazadas en toda la simulación.

La imposición de estas cuotas limita la cantidad de estados que son accesibles al sistema; esta limitante también se ha observado en los niveles accesibles a los momentos de los materiales paramagnéticos expuestos a campos magnéticos externos.

I.8 Temperaturas negativas en sistemas paramagnéticos.

Los materiales paramagnéticos son aquellos cuyos momentos magnéticos ($\vec{\mu}$) tienden a alinearse en presencia de un campo magnético externo (\vec{B}) que modifica la energía interna del sistema. Así, a medida que aumenta la intensidad del campo magnético, la energía del sistema se modifica de acuerdo con:

$$E = - \vec{\mu} * \vec{B} \quad (15)$$

Ocasionando que los momentos magnéticos pasen a niveles o estados energéticos superiores. Al tener un mayor número de estados disponibles para acomodarse, la entropía del sistema aumenta de acuerdo con la fórmula de la entropía de Gibbs, hasta alcanzar el punto de máxima entropía (ver Fig. 4). Entonces, dado que los niveles energéticos son limitados y a medida que el incremento de energía continua, los momentos comienzan a

acomodarse en el estado de mayor energía (E_{max}). En ese caso, la entropía del sistema disminuye como consecuencia de alcanzar un estado de mayor orden. Por consiguiente, la entropía se convierte en una función decreciente de la energía total del sistema y, en consecuencia, su temperatura es negativa (Landau & Lifshitz, 1960). Dicha variable está definida por la Eq. 5, que representa el valor inverso de la pendiente de la curva de entropía.

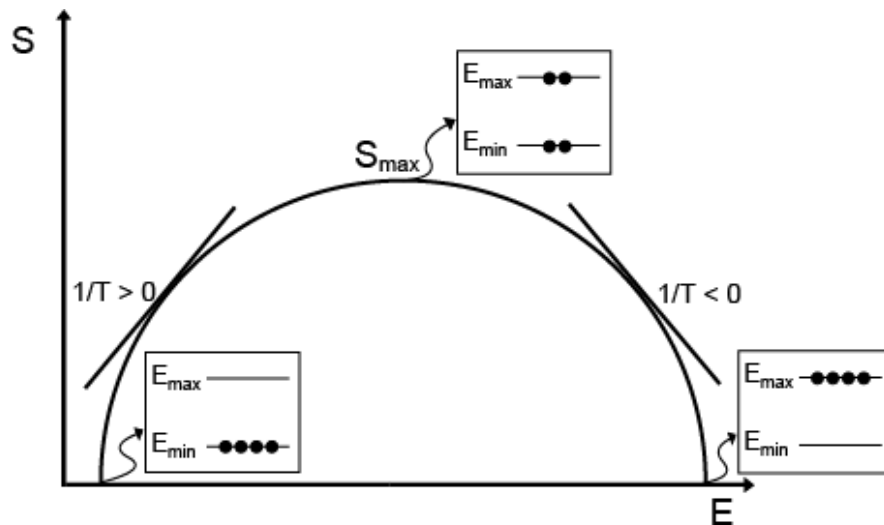


Fig. 4. Gráfica esquemática de entropía S vs energía total E . Sólo se muestran cuatro espines o partículas para ilustrar algunos casos de ordenamiento en dos niveles.

Este fenómeno continúa hasta que todos los momentos se encuentran alineados con el campo magnético externo, es decir, cuando todos se hallan en el estado de máxima entropía y, por consiguiente, se alcanza un estado de máximo orden en el que la entropía es mínima.

II. Diseño metodológico.

Para mostrar numéricamente que mediante la imposición de cotas superiores a la riqueza de los agentes se puede observar una transición a *temperaturas negativas* como resultado del ordenamiento del sistema; se desarrollaron los siguientes puntos:

II.1 Modelo inicial.

II.1.1 Se realizó el programa para hacer las simulaciones de intercambios económicos utilizando el software Matlab® versión R2016b (ver Anexo 1). En cada realización, el programa realiza los intercambios económicos de acuerdo con el modelo estudiado, a la vez que calcula el índice de Gini de la distribución final y construye la curva de entropía como función del número de pasos.

- II.1.2 Se comprobó la validez de los resultados realizando una simulación con las condiciones del modelo de Dragulescu & Yakovenko y comparando los resultados.
- II.1.3 Se modificó el programa para que ejecutara n número de realizaciones, guardando la información de la distribución final, el índice de Gini y la función de entropía de cada realización; para mostrar como resultado el promedio de la información guardada y la desviación estándar del índice de Gini.

II.2 Estandarización del sistema.

- II.2.1 Se realizaron 5 simulaciones con 500, 1000, 3000, 5000 y 10000 agentes. En cada una de ellas se ejecutaron 30 realizaciones con el número de pasos proporcional al número de agentes. Esta proporción: $R = \text{número pasos} / \text{número de agentes}$, fue modificada en cada simulación tomando los valores: $R=1, 5, 10, 15$ y 20.
- II.2.2 Se compararon las distribuciones finales, las curvas de entropía y los valores de Gini obtenidos en las diferentes simulaciones.
- II.2.3 Se realizaron dos simulaciones adicionales con las mismas condiciones excepto por la asignación de riqueza inicial. En la primera, la riqueza inicial se asigna de forma uniforme: dando a cada agente una unidad de riqueza; en la segunda, la asignación de riqueza fue de forma aleatoria, en la cual la variable de riqueza tiene una distribución uniforme en el intervalo 0 a 2.
- II.2.4 Se compararon las distribuciones finales y los valores de Gini obtenidos en las diferentes simulaciones.

II.3 Modelo con tendencia al ahorro.

- II.3.1 Se realizaron simulaciones con un factor de ahorro (λ) para toda la población con los siguientes valores: 0.2, 0.5, 0.7 y 0.9. Para cada simulación se ejecutaron 30 realizaciones con 3000 agentes que interaccionan 1.5×10^5 veces.
- II.3.2 Se compararon los resultados con los obtenidos por Chakraborti & Chakrabarti.
- II.3.3 Se realizaron simulaciones en las que solo el 20% de la población tiene un factor de ahorro diferente de cero: $\lambda=0.2, 0.5, 0.7, 0.9$. Para cada simulación se ejecutaron 30 realizaciones con 3000 agentes que interaccionan 1.5×10^5 veces.
- II.3.4 Se analizaron las distribuciones en relación con la obtenidas en la sección II.3.1.

II.4 Modelo con cotas superiores.

- II.4.1 Se realizaron simulaciones de sistemas económicos a los cuales se les impusieron cotas superiores (CS= 10, 2, 1.5, 1.3 y 1.1) a la riqueza máxima que se puede poseer. Lo sistemas están compuestos por 3000 agentes que interactúan 3×10^5 veces con una riqueza inicial de 1 unidad. En cada simulación se ejecutan 30 realizaciones.
- II.4.2 Se analizaron las distribuciones obtenidas, en relación con las distribuciones anteriores, en términos de orden, igualdad y estabilidad.

II.5 Modelo económico con temperaturas negativas.

- II.5.1 Se realizaron simulaciones de diversos sistemas económicos en los que se impone una cota superior de riqueza CS en 6, 5 y 3 unidades. Cada simulación consta de 30 realizaciones en las que 3000 agentes interactúan 3×10^5 veces. El resultado de cada simulación es el valor promedio de la entropía máxima de cada distribución final de riqueza.
- II.5.2 Se calcularon, a partir de las curvas de entropía, las curvas de temperatura como función de la energía.
- II.5.3 Se analizaron las curvas obtenidas en relación con la teoría de Landau & Lifshitz.

III. Resultados.

Las curvas obtenidas con el programa realizado de acuerdo con la sección II.1, con el modelo simple de Dragulescu & Yakovenko, se muestran a continuación:

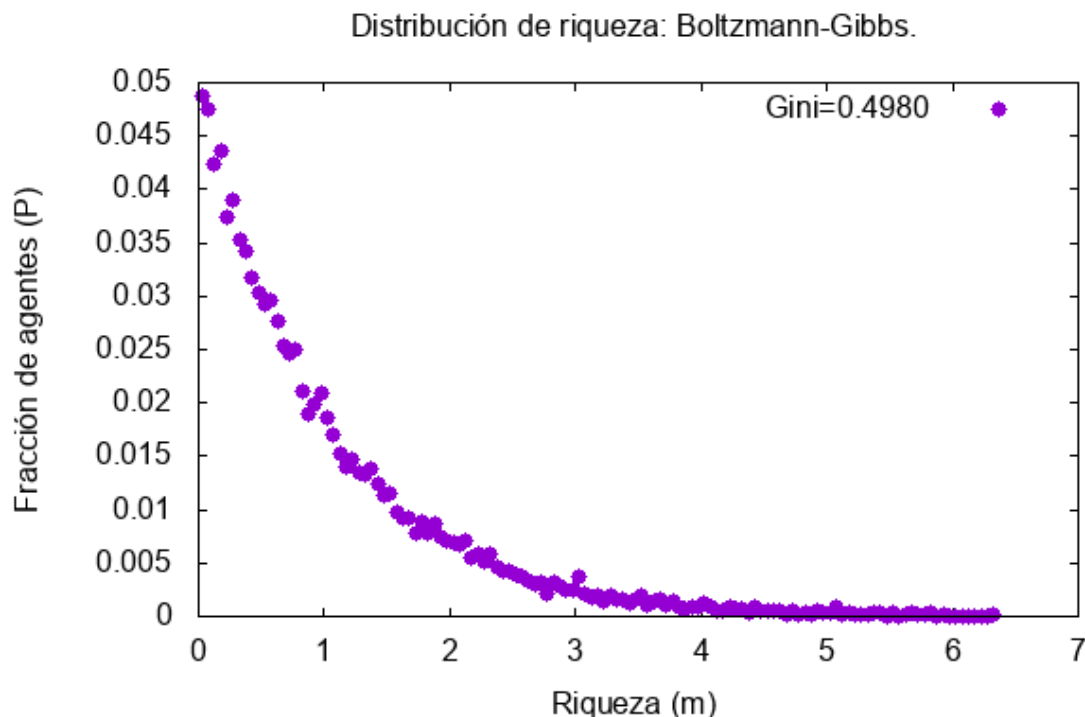


Fig. 5. Distribución de riqueza obtenida con el modelo de Dragulescu & Yakovenko.

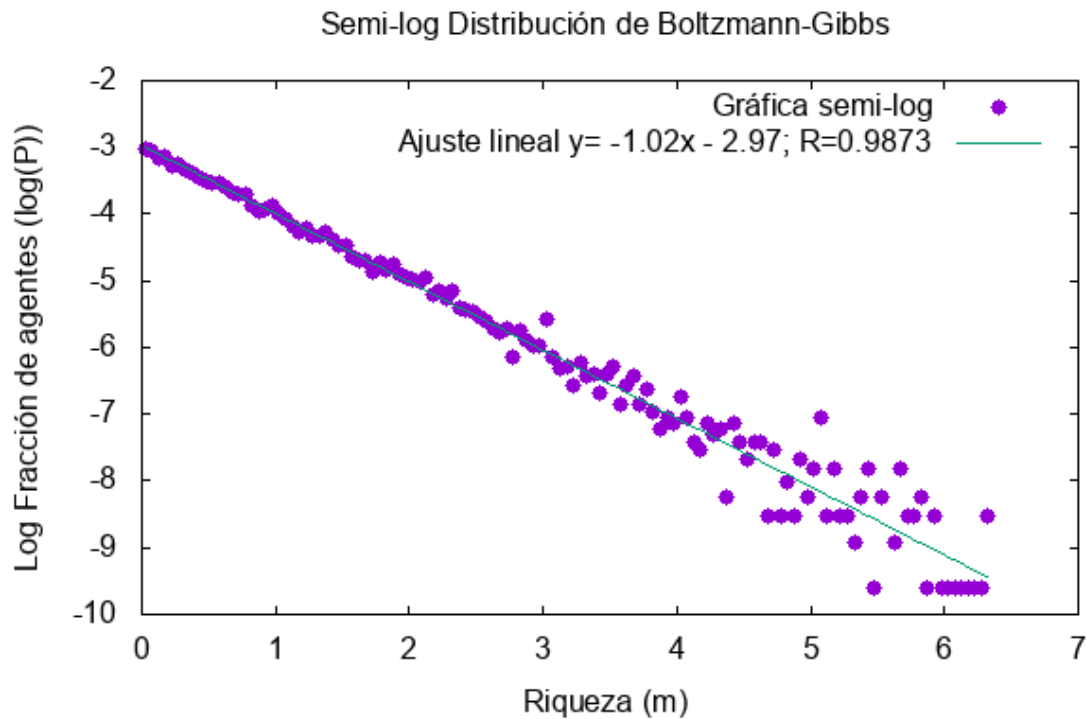


Fig. 6. Gráfica semi-log de la distribución de riqueza resultante del modelo Dragulescu & Yakovenko.

En las gráficas anteriores se puede observar que, efectivamente, se obtiene una distribución exponencial de acuerdo con la Eq. 7.

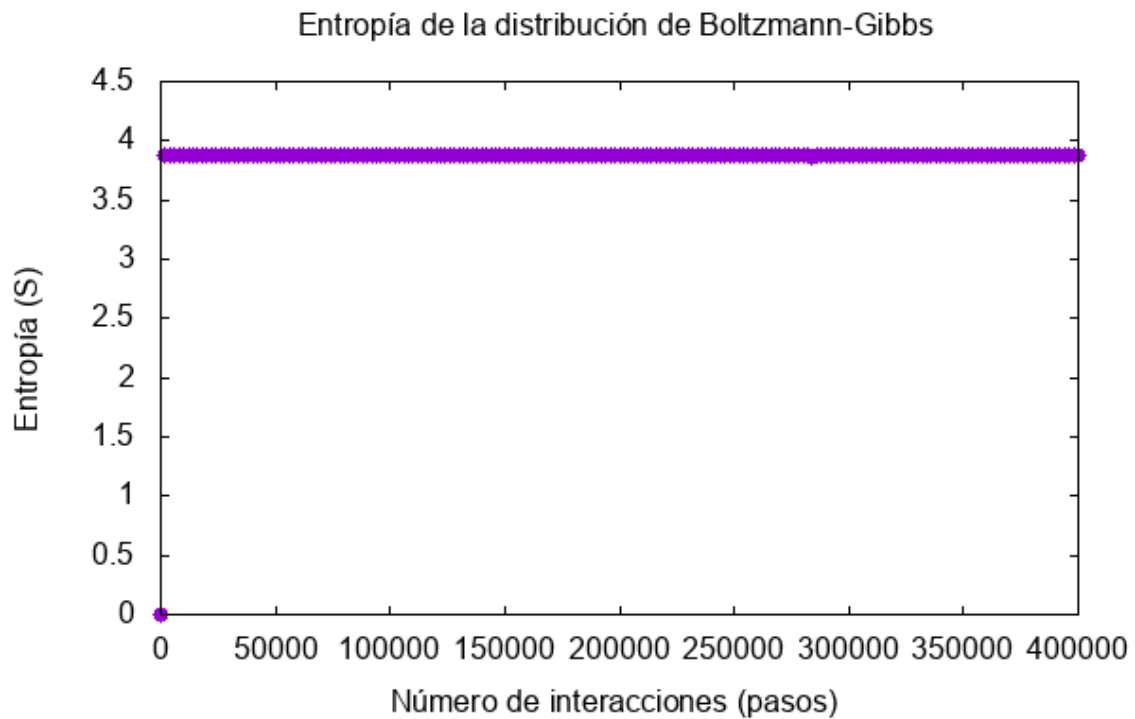


Fig. 7. Curva de entropía como función del número de pasos obtenida del Dragulescu & Yakovenko.

La función de entropía muestra que el sistema alcanza un estado estable o de “equilibrio económico”. Además, como resultado de las simulaciones propuestas en la sección II.2.1 se muestra las siguientes figuras como los resultados más representativos:

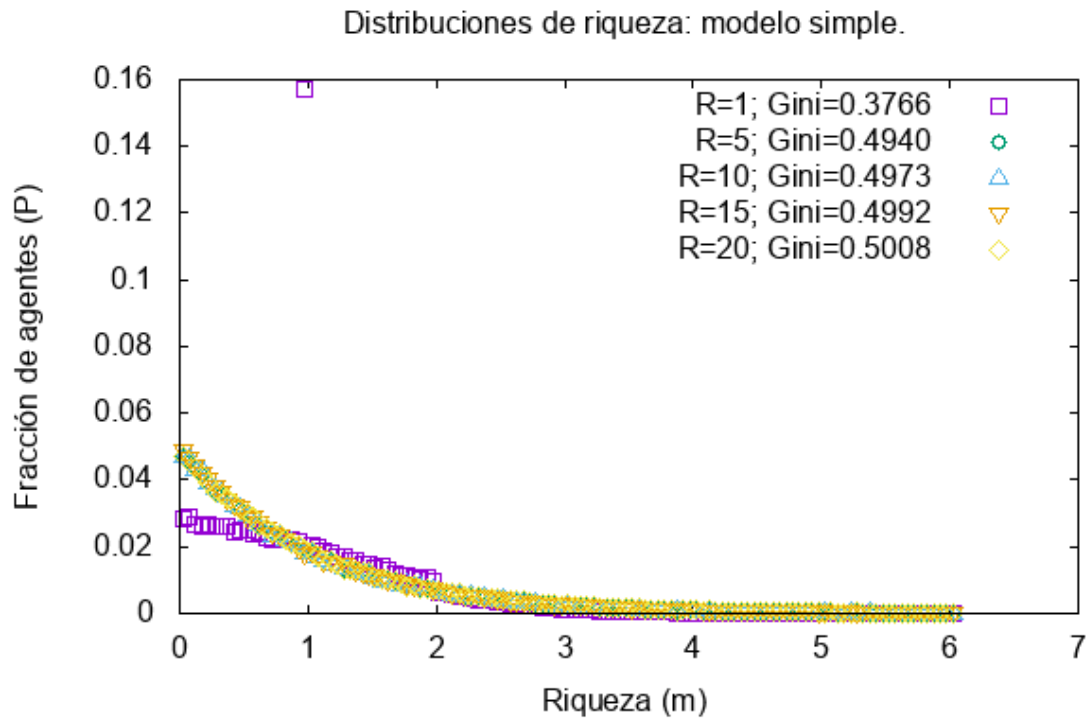


Fig. 8. Distribuciones de riqueza obtenidas con 3000 agentes y número de pasos diferente. Cada curva es el promedio de 30 realizaciones.

De modo que, se seleccionó como modelo base, la distribución con $R=10$ por tener un número de pasos adecuado y eficiente para la distribución de riqueza. Las curvas de entropía, las cuales muestran la estabilidad de los sistemas, se observan en la Fig. 9.

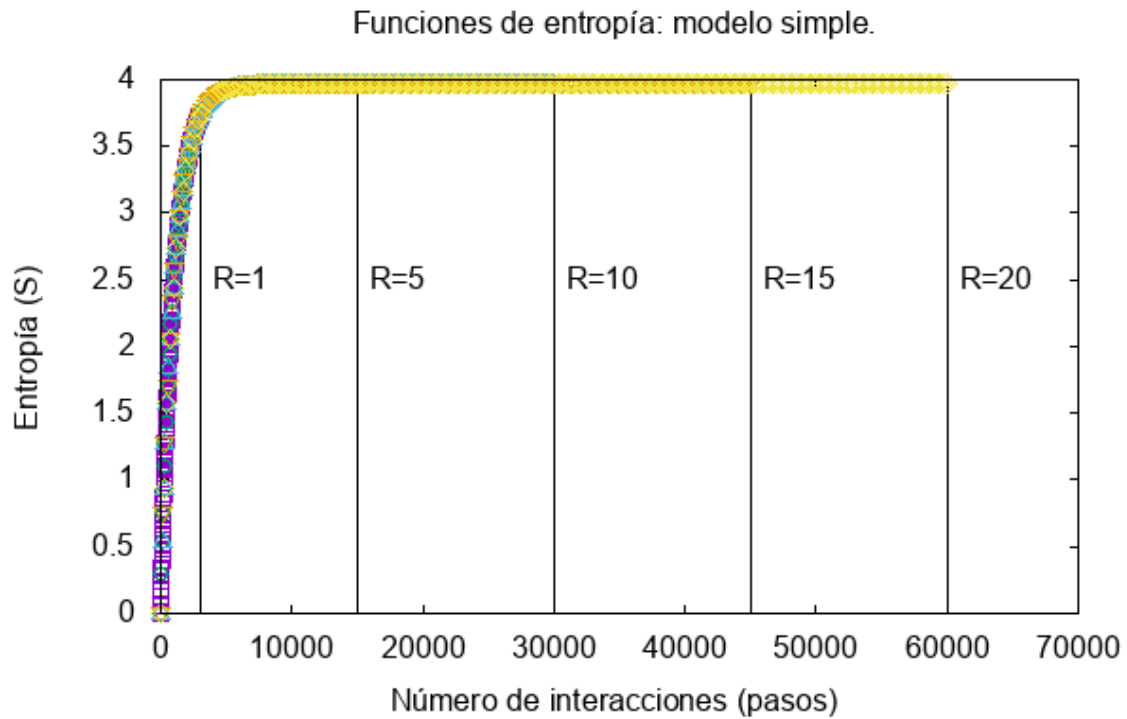


Fig. 9. Curvas de entropía de las distribuciones de riqueza obtenidas. Cada curva es el promedio de 30 realizaciones.

Se puede observar que la curva para R=10 alcanza el estado de equilibrio. Además, al graficar las simulaciones obtenidas con R=10, pero con diferente número de agentes se obtienen las siguientes distribuciones:

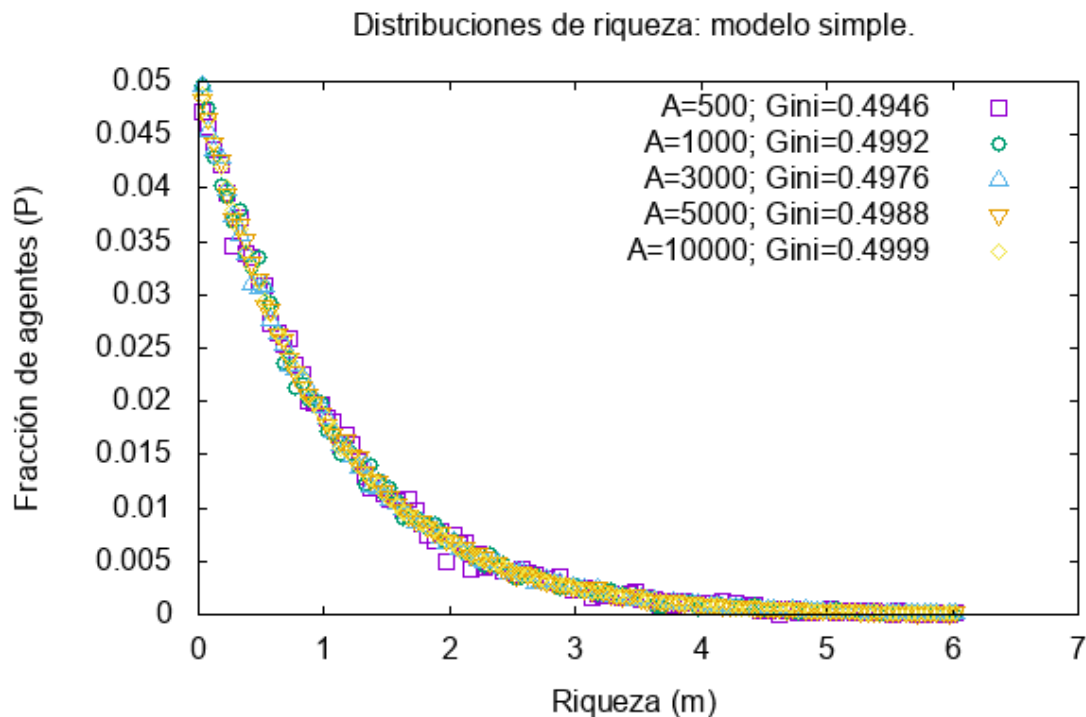


Fig. 10. Distribuciones de riqueza obtenidas con diferente número de agentes y una relación de 1:10 con el número de pasos. Cada curva es el promedio de 30 realizaciones.

Las funciones de entropía de estas distribuciones se muestran a continuación:

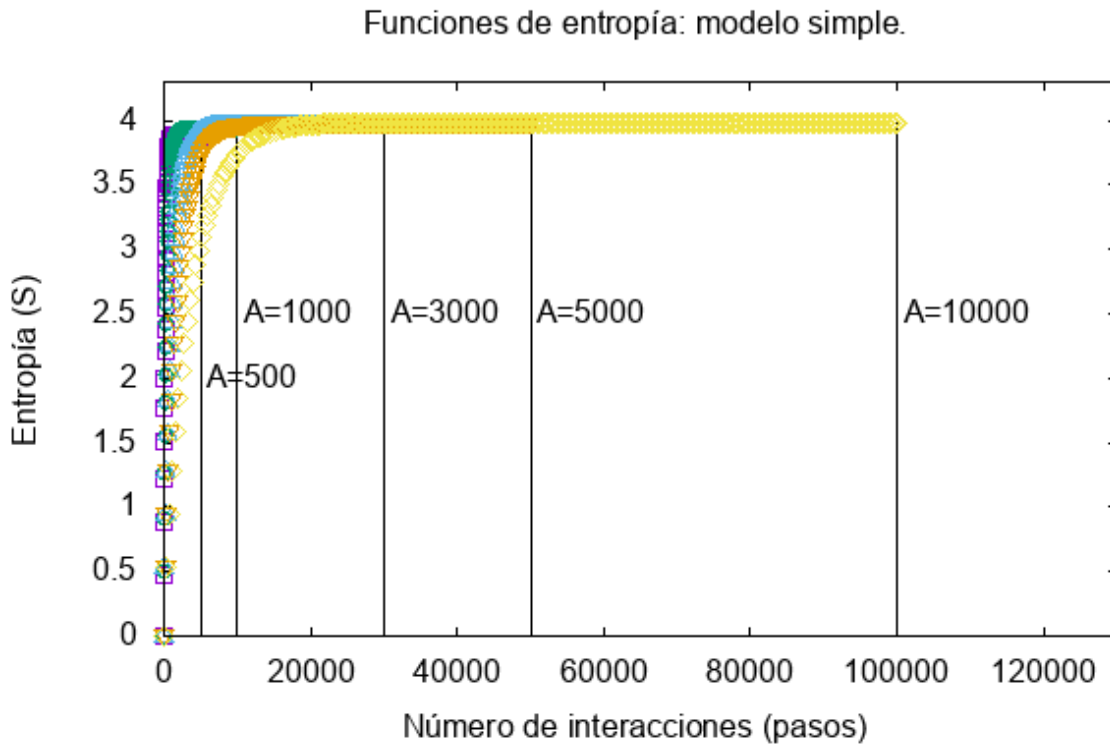


Fig. 11. Curvas de entropía de las distribuciones de riqueza obtenidas con diferente número de agentes y $R=10$. Cada curva es el promedio de 30 realizaciones.

Finalmente, se compararon las distribuciones obtenidas con asignación de riqueza inicial uniforme (a cada agente se le asignó una unidad) y con asignación aleatoria (a cada agente se asignó una riqueza con un valor aleatorio entre 0 y 2). Los resultados se muestran a continuación:

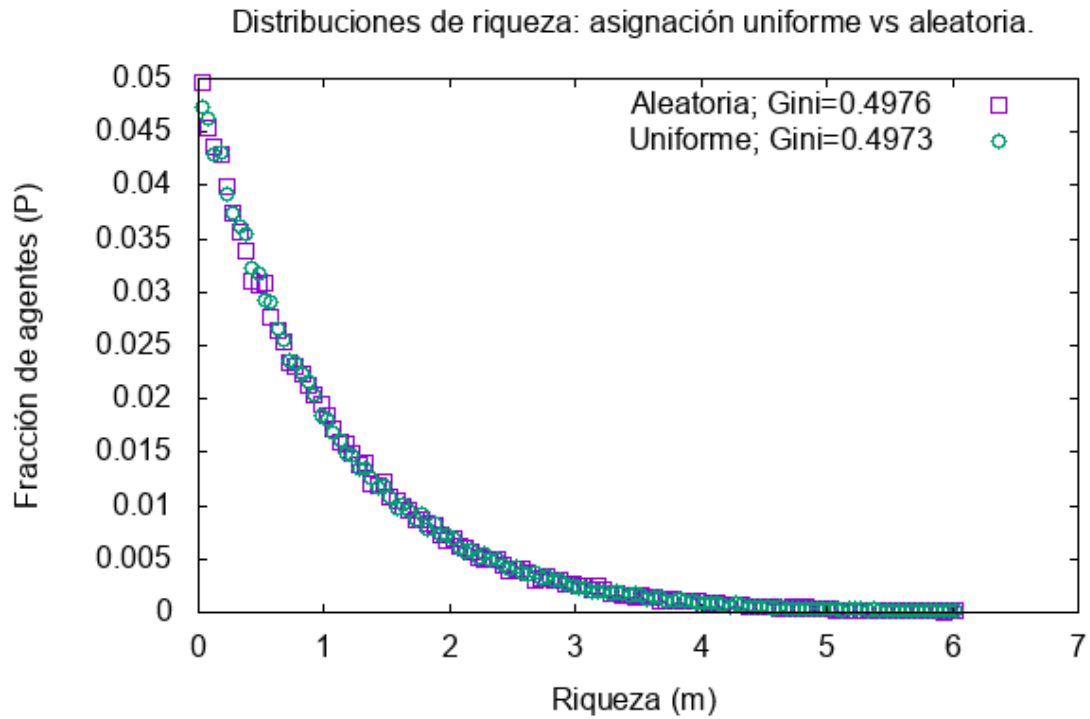


Fig. 12. Distribuciones promedio de riqueza: con asignación inicial uniforme y aleatoria. Las simulaciones constan de 30 realizaciones cada una, con 3000 agentes y 3×10^4 pasos.

Las respectivas curvas de entropía se muestran en seguida:

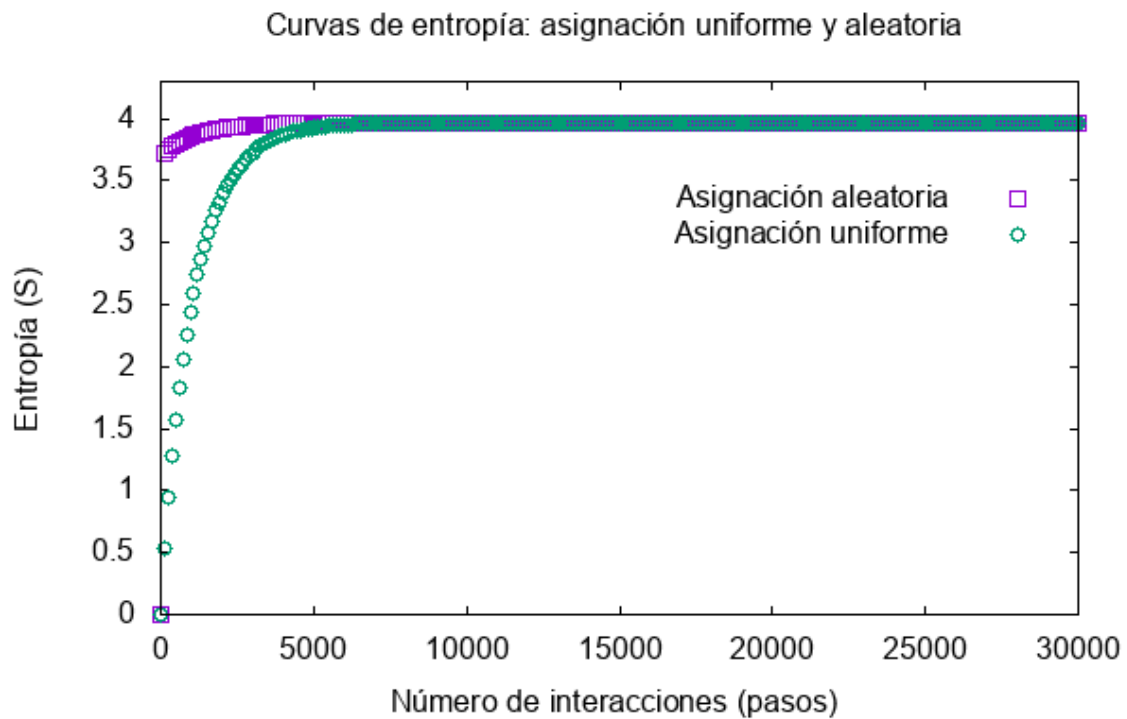


Fig. 13. Curvas de entropía de las distribuciones de riqueza obtenidas: con asignación inicial uniforme y aleatoria. Las simulaciones constan de 30 realizaciones cada una, con 3000 agentes y 3×10^4 pasos.

Como resultado de las simulaciones realizadas en la sección II.3.1 se obtuvieron las distribuciones que se muestran a continuación:

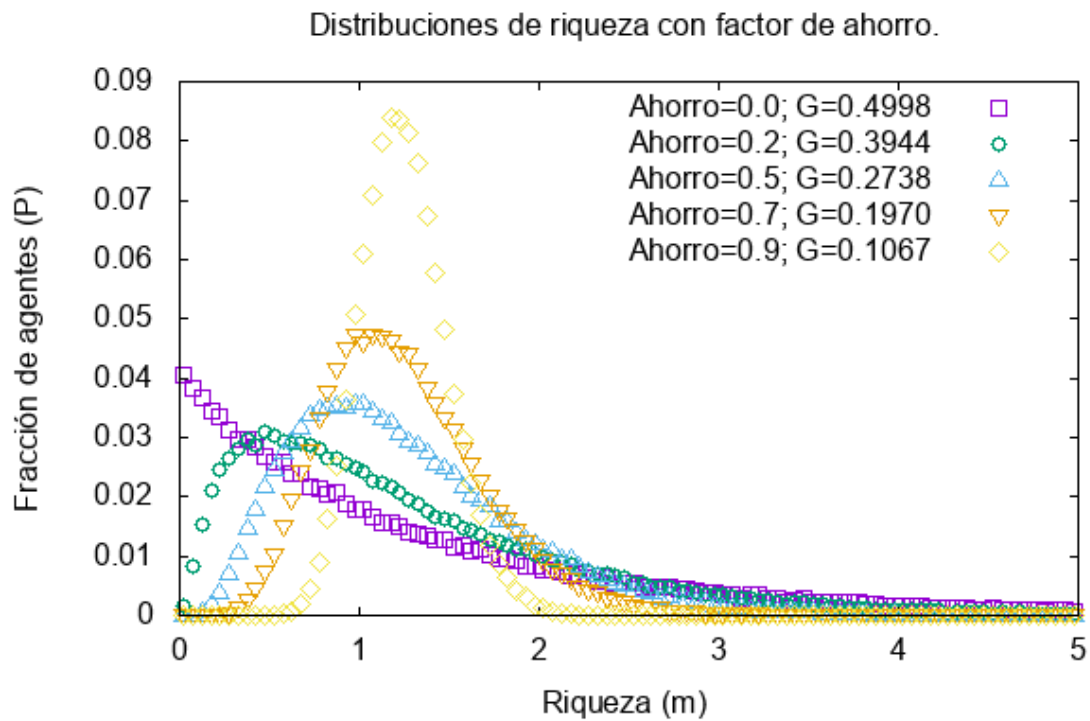


Fig. 14. Distribuciones medias de riqueza con diferente factor de ahorro (λ). El eje de las abscisas está cortado.

Las respectivas funciones de entropía se muestran en la Fig. 15.

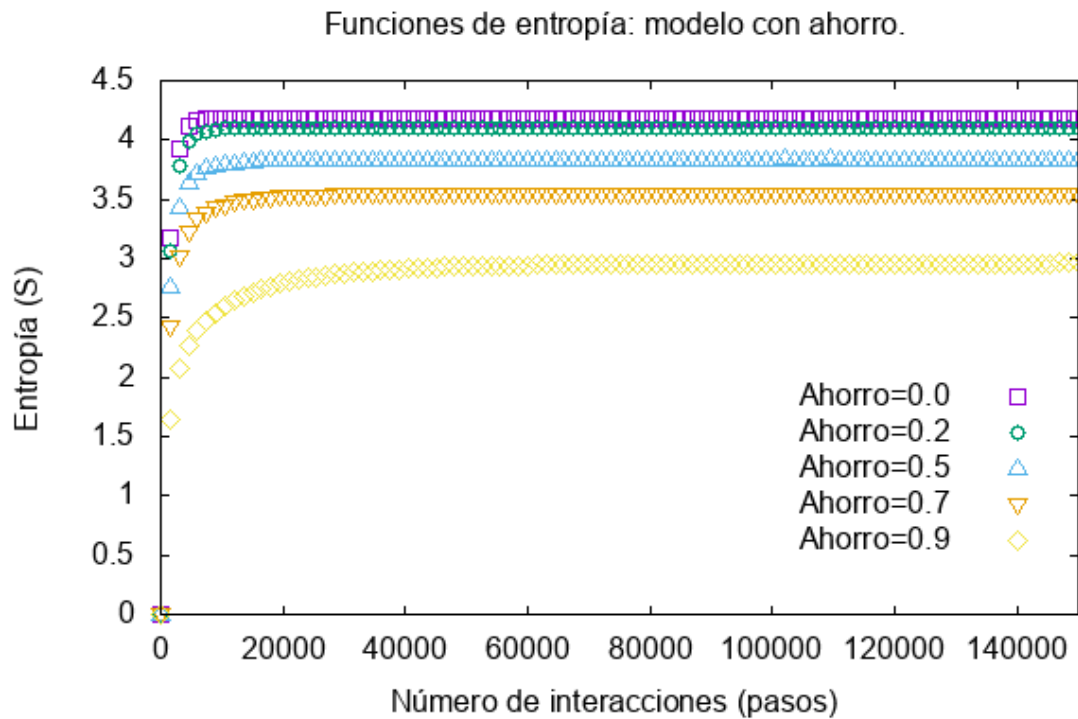


Fig. 15. Curvas de entropía de las distribuciones de riqueza obtenidas con diferente factor de ahorro (λ). Cada curva es el promedio de 30 realizaciones.

Luego, las distribuciones obtenidas para las simulaciones en las que sólo una fracción de los agentes ahorra (ver sección II.3.3) se muestran en la siguiente figura.

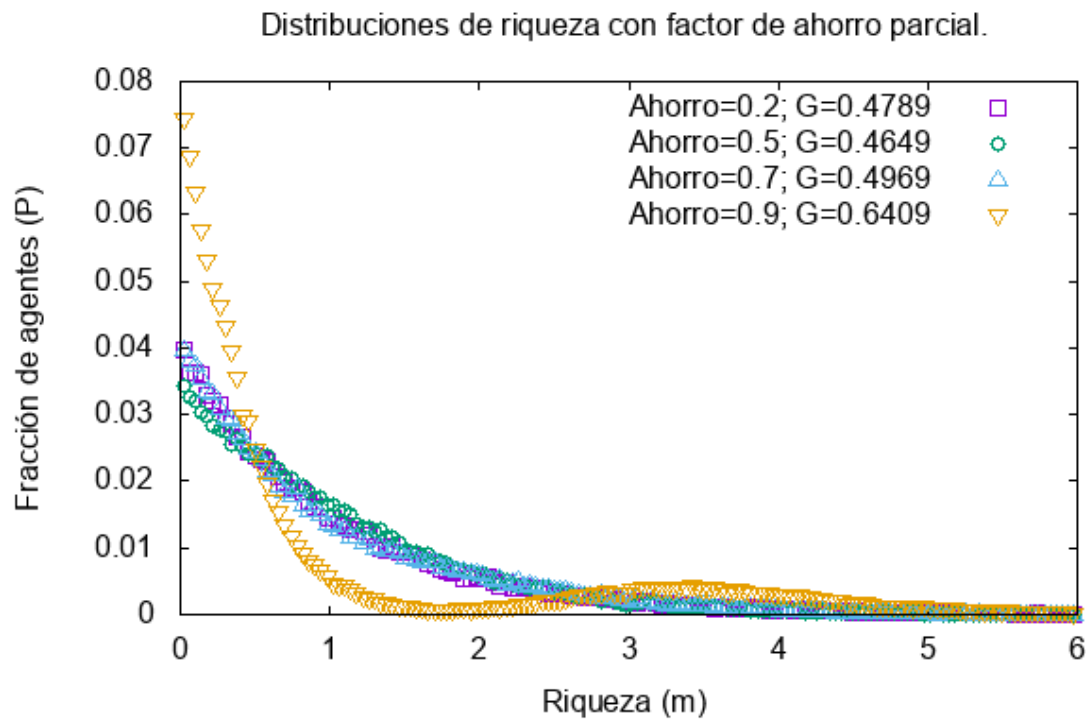


Fig. 16. Distribuciones medias de riqueza para diferentes factores de ahorro (λ). Únicamente el 20% de la población tiene factor de ahorro (λ) diferente de cero.

Las correspondientes curvas de entropía que muestran la estabilidad de los sistemas se muestran en la siguiente figura.

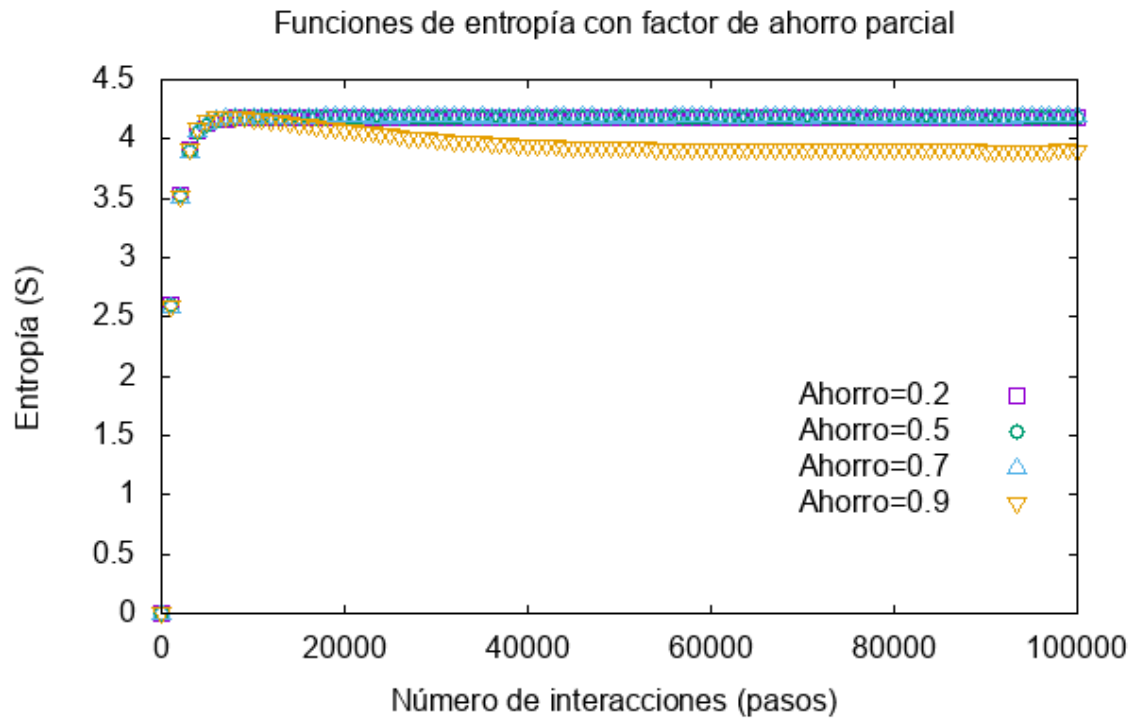


Fig. 17. Curvas de entropía de las distribuciones de riqueza obtenidas con factor de ahorro parcial (sólo el 20% de la población ahorra). Cada curva es el promedio de 30 realizaciones.

Asimismo, se muestran las distribuciones de riqueza de las dos poblaciones que componen el sistema con $\lambda=0.9$: la población ahorradora y no ahorradora.

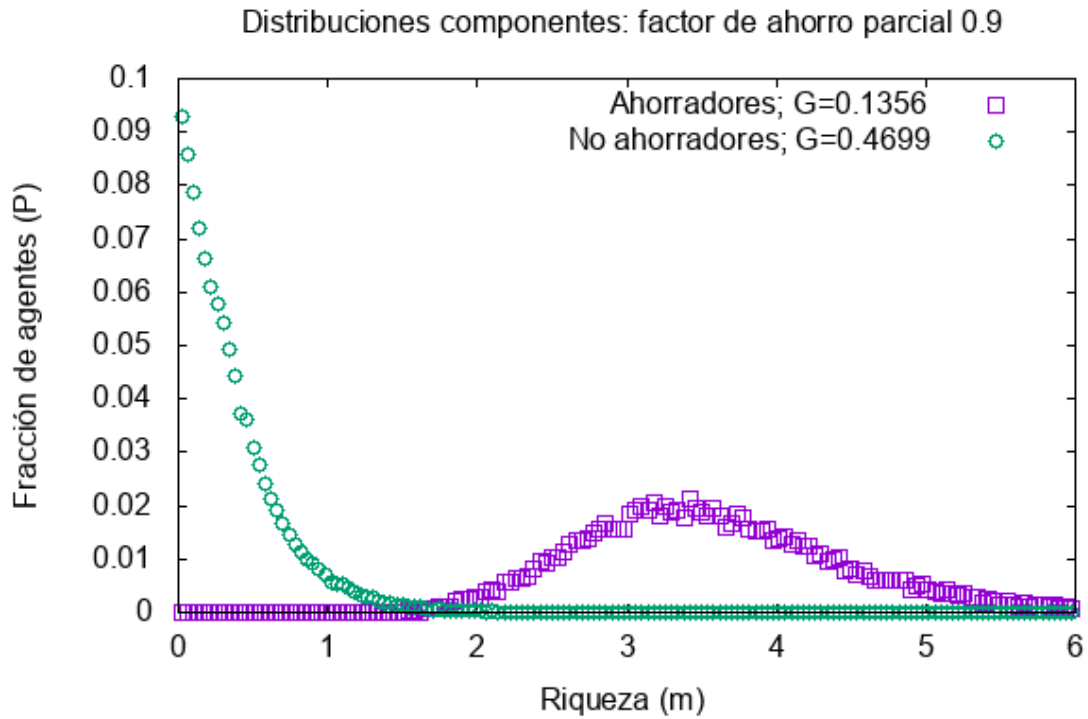


Fig. 18. Distribuciones componentes de distribución con factor de ahorro parcial $\lambda=0.9$: población ahorradora y no ahorradora.

Posteriormente, los resultados de las simulaciones de los sistemas económicos con cotas, que se describen en la sección II.4.1, se muestran en la Fig. 19.

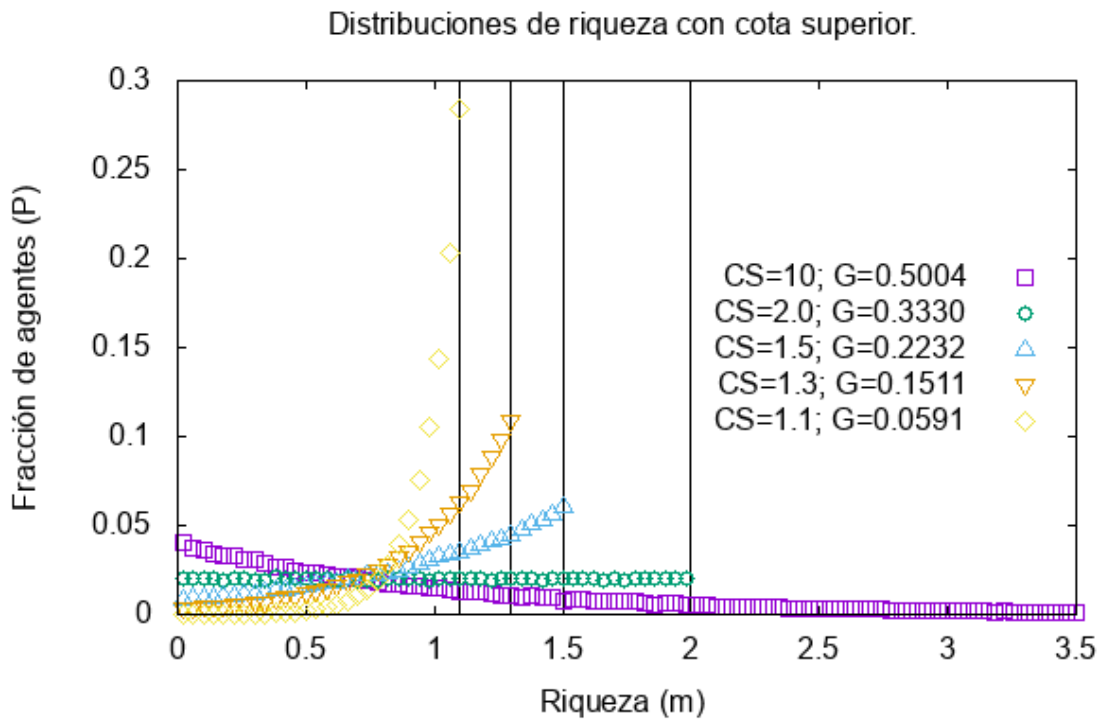


Fig. 19. Distribuciones medias de riqueza con cotas superiores de riqueza en 10, 2, 1.5, 1.3 y 1.1. El eje de las abscisas está cortado.

Adicionalmente, las curvas de entropía que muestran la estabilidad y ordenamiento de los sistemas se pueden observar en la Fig. 20.

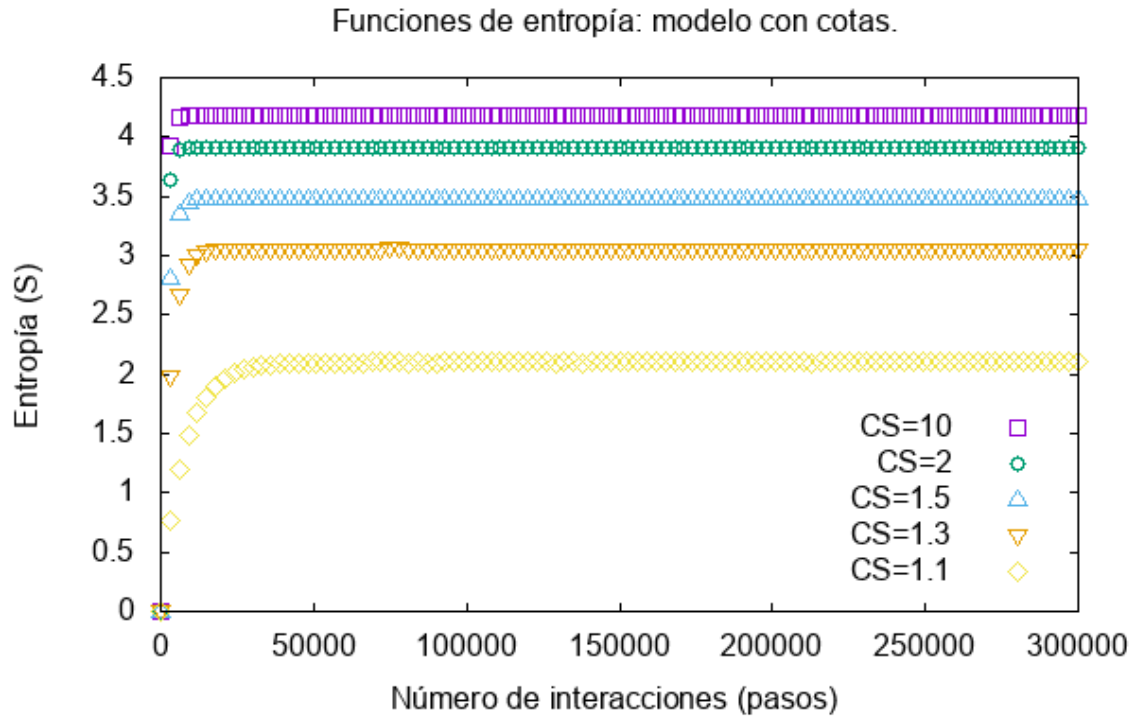


Fig. 20. Curvas de entropía de las distribuciones de riqueza con cotas (CS).

Las funciones de entropía como función de la energía descritas en la sección II.5.1 se observan a continuación:

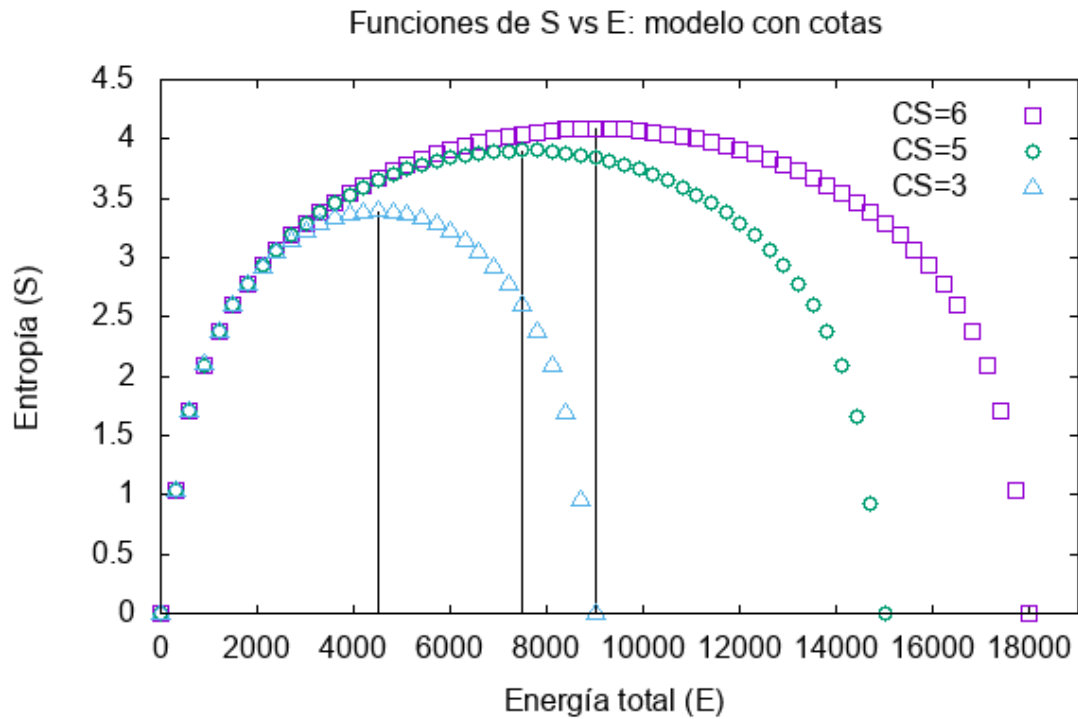


Fig. 21. Se muestra la curva de S vs E, para sistemas con CS en 6, 5 y 3 unidades. Cada punto representa el promedio de 30 realizaciones.

Finalmente, las curvas de temperatura obtenidas de las funciones de entropía se muestran en las Figs. 22, 23 y 24.

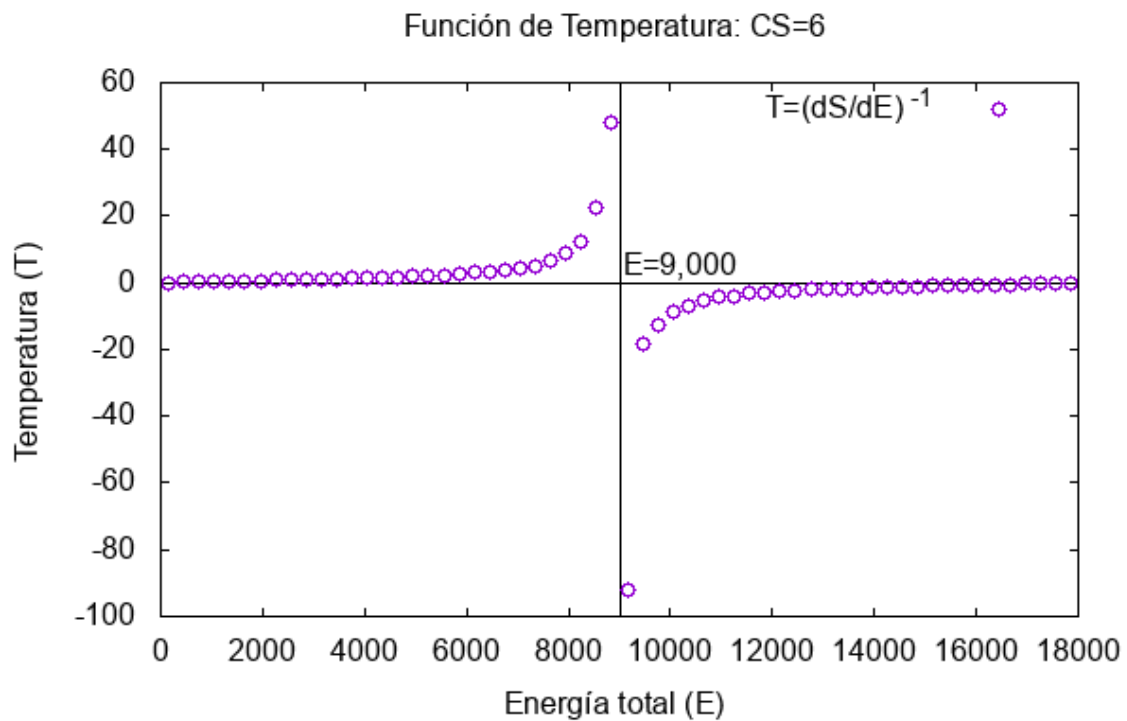


Fig. 22. Se muestra la función de temperatura obtenida de la curva de entropía con CS=6. La energía de transición es a 9000 unidades.

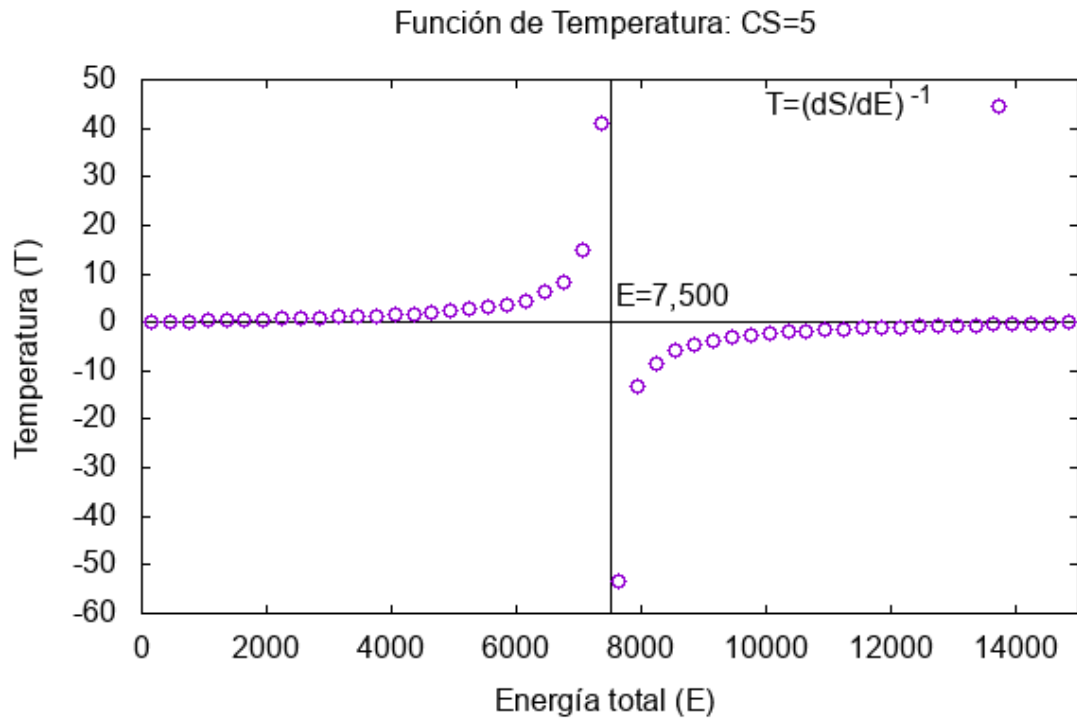


Fig. 23. Se muestra la función de temperatura obtenida de la curva de entropía con CS=5. La energía de transición es a 7,500 unidades.

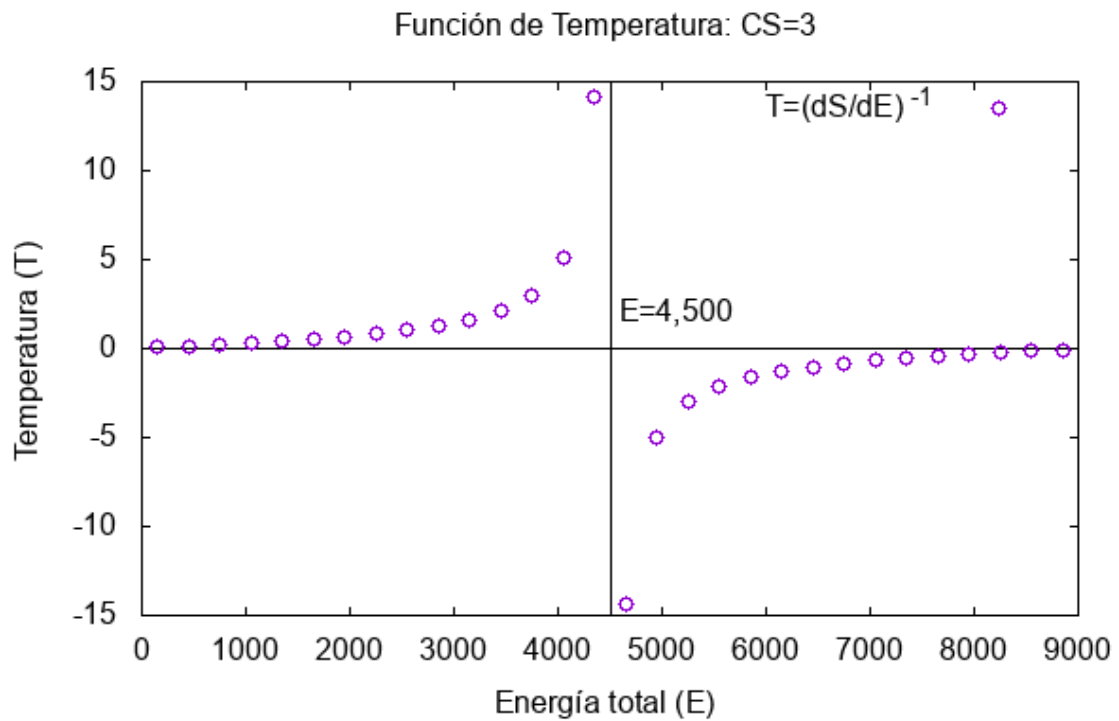


Fig. 24. Se muestra la función de temperatura obtenida de la curva de entropía con CS=3. La energía de transición es a 4,500 unidades.

Los resultados mostrados en esta sección muestran el fenómeno de temperaturas negativas en sistemas económicos con cotas superiores de riqueza. El análisis y discusión de resultados se presenta en la siguiente sección.

IV. Discusión y Conclusiones.

IV.1 Discusión

Fue necesario determinar un conjunto de parámetros adecuados, los cuales garantizaran una adecuada y eficiente distribución de riqueza, así como la estabilidad de la distribución en los modelos analizados. De tal manera que, de los resultados obtenidos de las simulaciones descritas en II.2.1 se determina que: para $R=1$ no hay suficientes interacciones para que se produzca una completa distribución de la riqueza, ya que el 16% de la población aún mantiene una riqueza igual a la inicial. Además, la falta de distribución también se comprueba al observar que la curva de entropía (ver Fig. 9) no alcanza un valor máximo constante. El resto de las gráficas ($R=5, 10, 15$ y 20) muestran una distribución similar y se obtiene un índice de Gini promedio $G=(0.4978 \pm 0.0038)$; más se eligió $R=10$ por considerarse un número suficiente, pero no innecesariamente grande de interacciones. De igual manera, al considerar diferente número de agentes, pero con una proporción de interacciones de 1:10 se obtiene un comportamiento muy similar, alcanzando el estado de equilibrio.

Así mismo, al comparar las distribuciones con diferente método de asignación de riqueza inicial: aleatoria y uniforme; no se observó un comportamiento significativamente diferente. Puesto que, para la distribución uniforme el índice de Gini es de (0.4973 ± 0.0045) y el 63.20% de la población tiene una riqueza menor a la riqueza inicial (de una unidad). En el caso de la distribución con riqueza inicial aleatoria, la riqueza promedio del sistema es de (0.9985 ± 0.0112) , el índice de Gini obtenido de la distribución final es (0.4976 ± 0.0039) y el 63.01% de la población tiene una riqueza menor a la riqueza media del sistema. Con esto, se puede concluir que es adecuado utilizar el modelo con 3000 agentes y 30,000 interacciones como modelo base para el resto de las simulaciones, sin que por ello se alteren los resultados obtenidos, con base en lo previamente obtenido por Dragulescu & Yakovenko (2000).

Una vez estandarizado el modelo a utilizar, se pueden estudiar otros modelos con la certeza de que los resultados no dependerán de la configuración seleccionada de las simulaciones. Así, se comenzó a estudiar el modelo con tendencia al ahorro, en el que se observa que cuando el factor de ahorro λ es diferente de cero, se modifica el tipo de distribución de riqueza obtenida. Adicionalmente, el análisis de la función de entropía demuestra la estabilidad de los sistemas y el índice de Gini exhibe una mayor igualdad en la distribución

de la riqueza a medida que el valor de λ se acerca a la unidad; todo lo esto de acuerdo con (Chakraborti & Chakrabarti, 2000).

Para el sistema estudiado en este trabajo, el valor máximo de probabilidad para la distribución con factor de ahorro $\lambda=0$ es 0.0403 en el intervalo de riqueza $[0,0.4)$; lo que es congruente con el hecho de que en una distribución exponencial el máximo se encuentra en el nivel más bajo de riqueza. Para $\lambda=0.2$ el valor máximo es 0.0310 en el intervalo $[0.36,0.40)$. En el caso de $\lambda=0.5$ los valores correspondientes son 0.0356 en $[0.64,0.68)$. Asimismo, para $\lambda=0.7$ se obtiene un máximo de 0.0473 en $[0.76,0.80)$. Finalmente, para $\lambda=0.9$ se obtiene un máximo de probabilidad de 0.0838 en el intervalo $[0.92,0.96)$, en este caso se observa que la distribución de riqueza se mantiene muy uniforme, como lo demuestra el índice de Gini $G=0.1067$ cercano a la unidad.

También, se analizó el efecto de asignar un factor de ahorro diferente de cero, únicamente al 20% de la población. Para los casos con $\lambda=0.2, 0.5$ y 0.7 , el máximo de probabilidad se encuentra en el nivel de máxima pobreza (intervalo $[0,0.4)$), situación que contrasta con los resultados obtenidos cuando el factor de ahorro es general. Sus respectivos valores máximos: 0.0323, 0.0342, 0.0397 son similares a aquellos obtenidos con el factor generalizado. Por otro lado, los índices de Gini (0.4789 ± 0.0047), (0.4649 ± 0.0052) y (0.4969 ± 0.0059) están cerca del valor de 0.5 correspondiente a la distribución exponencial.

Sin embargo, el caso correspondiente a $\lambda=0.9$ revela el fenómeno que ocurre en esta nueva distribución: la riqueza de la población ahorradora es significativamente superior a la de los no ahorradores. En la Fig. 16 se observa la aparición de dos máximos locales: el primero en el intervalo $[0,0.4)$ con valor máximo de 0.0743, y el segundo en intervalo $[3.40,3.46)$ con un valor máximo de 0.0214. En la Fig. 17 se muestran las distribuciones de riqueza de los ahorradores (con factor de ahorro $\lambda=0.9$) y los no ahorradores. En ella se puede observar la diferencia de la distribución de riqueza como consecuencia del factor de ahorro. Para los no ahorradores, la riqueza promedio es de (0.3572 ± 0.0048) y el índice de Gini es (0.4699 ± 0.0051); en contraste, la riqueza promedio de la población con factor de ahorro es (3.5711 ± 0.0192) y el índice de Gini es (0.4699 ± 0.0051); es decir, la riqueza promedio de los ahorradores es 10 veces mayor y la distribución de riqueza es mucho más uniforme, como lo indica el bajo índice de Gini. Para el caso de la población no ahorradora, cerca del 95% tienen una riqueza menor a la unidad, que es valor de la riqueza inicial. Respectivamente, ninguno de los agentes ahorradores tiene una riqueza por debajo de 1.40. Este hecho permite suponer que los agentes ahorradores se enriquecen a raíz de que hay muchos más agentes en estado de pobreza (que no ahorran) de los cuales obtienen riqueza.

Por otra parte, la gráfica de la función de entropía para la distribución con $\lambda=0.9$ (ver Fig. 17) muestra que, a los 7000 pasos, se obtiene un máximo local de 4.1830; a partir de ese momento, la función se vuelve una función decreciente del número de pasos hasta alcanzar un valor constante de 3.904 a partir de los 70000 pasos. Esto significa que la distribución final alcanza un estado de mayor orden de las distribuciones con diferentes valores de λ ; y

que la distribución comienza a ordenarse a partir de los 7000 pasos, entonces los agentes ahorradores comienzan a acomodarse en los estados de mayor riqueza, mientras que los agentes que no ahorran se agrupan en los estados de riqueza más bajos, en proceso de organización del sistema causado del factor de ahorro parcial.

Como se ha observado en las diferentes distribuciones, existen procesos que tienen como resultado la organización del sistema económico, esto es, el acomodo de los agentes en menos niveles de riqueza; esta característica se refleja en una disminución del valor de la entropía del sistema. Entonces, se afirma que es posible obtener sistemas económicos más organizados a través de diferentes elementos como la introducción de un factor de ahorro o la imposición de cotas a la riqueza máxima que un agente puede poseer.

En el caso de las distribuciones de riqueza en las cuáles se impone una cota superior, que es un límite a la cantidad de riqueza que los agentes pueden poseer, se observa en la Fig. 19 que no hay ningún agente con una riqueza superior al valor de la CS, lo cual indica la validez del modelo y permite fundamentar los resultados del modelo en la eficacia de las cotas superiores. Cuando un el resultado de una interacción es que un agente tenga una riqueza superior a la CS, esta interacción es rechazada y se guarda la información en un contador; así, el índice de rechazo para la distribución con CS=10 es 0 porque la cota es significativamente mayor a la riqueza promedio del sistema y el sistema no es afectado; para CS=2 el índice de rechazo es 0.226, para CS=1.5 es 0.465, para CS=1.3 es 0.642 y para CS=1.1 es 0.871; en este último caso, el índice de rechazo es considerablemente alto por la cercanía del valor con la energía media del sistema (de 1 unidad). Por consiguiente, el número de interacciones permitidas se reduce y la actividad económica del sistema es mucho menor a pesar de tener la misma energía promedio que en los otros casos.

Respecto a la naturaleza de las distribuciones en la Fig. 19, se puede apreciar que para CS=10 el índice de Gini es similar al de la distribución de Boltzmann-Gibbs $G=0.5004$ puesto que la CS no afecta significativamente la distribución de la riqueza. Para CS=2 la forma de la distribución y el índice de Gini $G=0.3330$, corresponden a una distribución uniforme en la que todos los estados tienen la misma probabilidad, es decir, todos los estados tienen el mismo número de agentes. Sin embargo, a partir de ese valor, las funciones de probabilidad se convierten en funciones crecientes, en las que el máximo se encuentra en el valor de la cota y con un índice de Gini que disminuye al ajustar el valor de la CS. De esta manera, para CS= 1.5 el máximo es 0.0602 en el intervalo [1.48,1.5]; para CS=1.3 el máximo es de 0.1087 en el intervalo [1.28,1.3]; y para CS=1.1 el máximo es de 0.2844 está en el intervalo [1.08,1.1].

Lo anterior refleja el hecho de que, después cierto punto de transición, los agentes se agrupan en el estado de mayor riqueza permitido, cambiando la pendiente de las distribuciones de negativa a positiva. Así, a medida que la CS se acerca al valor de riqueza media, la distribución final de riqueza se vuelve más ordenada, como lo demuestran las curvas de entropía que se observan en la Fig. 20. En dicha figura, se pueden observar dos características de vital importancia: que las distribuciones son estables y que tienen un mayor grado de orden cuando la CS es más ajustada.

El fenómeno de ordenamiento exhibido por la existencia de las cotas de riqueza es análogo al analizado por Landau & Lifshitz (1960); en este sistema físico analiza la función de entropía obtenida de un proceso de alineación de los momentos de un material paramagnético expuesto a un campo variable. Para simular tal fenómeno en el sistema económico, se procedió a variar la energía de un sistema que intercambia riqueza en el que se ha impuesto una cota superior de riqueza. Los resultados que se observan en la Fig. 21 son análogos a los obtenidos por Landau en los sistemas físicos. Cuando la riqueza del sistema es muy baja, no hay posibilidad de realizar muchos intercambios económicos, por lo cual la temperatura es cercana a cero. Asimismo, cuando la riqueza promedio del sistema es igual a la riqueza de la cota, ninguna interacción es permitida y, por consiguiente, la temperatura del sistema también es cero.

Las Fig. 22, 23 y 24 muestra las funciones de temperatura obtenidas de las curvas de entropía. En dichas gráficas se observa con claridad que la temperatura del sistema es negativa después del correspondiente valor de energía de transición; antes de ese valor la temperatura incrementa con la energía del sistema, hasta que abruptamente cambia a valores muy negativos. Para el caso del sistema con $CS=6$ la energía de transición se encuentra en las 9000 unidades, que corresponde al punto en que el sistema tiene una energía media igual a la mitad de la CS . Para los otros casos se obtienen resultados análogos, lo cual confirma el comportamiento obtenido.

Cabe mencionar que el proceso de estandarización realizado en la sección II.2 permite afirmar con seguridad que los resultados obtenidos no cambiarán al variar el tamaño del sistema o el número de interacciones utilizadas.

Finalmente, sobre el significado de la temperatura en los sistemas económicos, Dragulescu & Yakovenko (2000) encontraron que la temperatura corresponde con la riqueza media del sistema. Más, los resultados obtenidos en este trabajo muestran que la temperatura está relacionada con la variación del número de intercambios realizados en un sistema que varía su riqueza. En otras palabras, la temperatura es una propiedad que está relacionada con la actividad económica del sistema, de modo que temperaturas igual a cero significan que no hay actividad económica en el sistema, independiente de si tienen riqueza media igual a cero o no. De igual manera, una temperatura negativa puede entenderse en este mismo marco como un proceso en el que la actividad económica del sistema se ve reducido al inyectar riqueza al sistema.

IV.2 Conclusiones

La temperatura ha sido considerada como un indicador del ingreso o la riqueza del sistema, mientras que cualquier índice de desigualdad y la entropía de la distribución correspondiente arrojan información sobre la dispersión o ampliación asociada. Las simulaciones muestran claramente cómo la entropía S cambia en función, tanto de la energía total, como del valor límite superior. La entropía mide cuánto orden hay en el sistema en el sentido de que más agentes con la misma energía o riqueza representan valores de entropía más bajos. En el modelo propuesto, si el límite superior es mucho mayor que la riqueza promedio del sistema, los agentes más ricos son "menos afectados" por la condición limitante y pueden interactuar más libremente, pero si el valor del límite

superior es menor, entonces la entropía S y el índice de Gini GI disminuyen, lo que indica un orden que se observa como una menor dispersión en la distribución. En otras palabras, el límite superior impone una "barrera impermeable" que evita que los agentes vayan más allá de la barrera en el eje de riqueza.

Pensando en el dinero como un análogo a la energía, entonces las temperaturas negativas existen en el nivel teórico de la física, como consecuencia del hecho de que la función de entropía con respecto a la energía (riqueza) del sistema disminuye. En el modelo de intercambios económicos que conservan energía, se obtuvo que al bajar el límite superior se obtiene un índice de Gini y una entropía más bajos.

El modelo, es un caso extremo particular de cómo se reduce la entropía al imponer fuertes restricciones al sistema para obtener temperaturas negativas. En otras palabras, las temperaturas negativas implican más restricciones para los intercambios, especialmente para los agentes más ricos que no pueden aumentar su riqueza. Estas restricciones o limitaciones de las energías accesibles en el modelo recuerdan al demonio de Maxwell que selecciona aquellas partículas que pueden o no pasar una cierta barrera.

El modelo con cotas no es fácil de implementar en sistemas físicos como los gases de partículas. Sin embargo, la contraparte económica es verosímil a través de una política fiscal fuerte dirigida a los sectores económicos superiores. Este mecanismo impositivo evita que los agentes tengan una riqueza mayor a límite predefinido. No obstante, como en realidad no es posible aplicar una política tan estricta, se podría modelar un límite superior permeable que permita a algunos agentes atravesar la barrera y tener mayor riqueza e investigar las propiedades de la distribución final, especialmente en el punto de transición a temperaturas negativas.

El presente trabajo, fue enviado para su evaluación y publicación en la *Revista Mexicana de Física*. Siendo aceptado el 30 de octubre del 2017 y publicado en el 2018 vol. 64 No. 1 (ver anexo 2).

V. Referencias.

- Carmona, G. (2012). *Termodinámica Clásica*. Las prensas de ciencias, 2ª Ed.
- Chakrabarti, B. K., Chakraborti, A., Chakravarty, S. R., & Chatterjee, A. (2013). *Econophysics of Income and Wealth Distributions*.
- Chakraborti, A., & Chakrabarti, B. K. (2000). Statistical mechanics of money : how saving propensity affects. *The European Physical Journal B*, 17, 167–170. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s100510070173>**
- Chatterjee, A., Yarlagadda, S., & Chakrabarti, B. K. (2005). *Econophysics of Wealth Distributions*. Springer-Verlag Itali 2005.
- de Area Leão Pereira, E. J., da Silva, M. F., & Pereira, H. B. B. (2017). Econophysics: Past and present. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 473, 251–261. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.007>

- Dragulescu, A., & Yakovenko, V. M. (2000). Statistical mechanics of money. *The European Physical Journal B*, 17(4), 723–729.
<https://doi.org/10.1007/s100510070114>
- Gallegati, M., Keen, S., Lux, T., & Ormerod, P. (2006). Worrying trends in econophysics. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 370(1), 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.04.029>
- Guala, S. (2009). Taxes in a Wealth Distribution Model by Inelastically Scattering of Particles. *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, 7(1), 1–7.
 Retrieved from <http://hrcak.srce.hr/76798>
- Hetherington, N. S. (1983). Isaac Newton’s Influence on Adam Smith’s Natural Laws in Economics.** *Journal of the History of Ideas*, 44(3), 497–505.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1960). *Statistical Physics. Journal of Applied Mechanics* (Vol. 27). Pergamon Press. <https://doi.org/10.1115/1.3644010>
- Mantegna, R., Stanley, H. E., & Chriss, N. A. (2000). *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Physics Today* (Vol. 53). <https://doi.org/10.1063/1.1341926>
- McCauley, J. L. (2006). Response to “Worrying Trends in Econophysics.”** *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 371(2), 601–609.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.05.043>
- Pianegonda, S., & Iglesias, J. R. (2004). Inequalities of wealth distribution in a conservative economy. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 342(1–2 SPEC. ISS.), 193–199. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.04.078>
- Stanley, H. E., Afanasyev, V., Amaral, L. A. N., Buldyrev, S. V., Goldberger, A. L., **Havlin, S., ... Viswanathan, G. M. (1996). Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics.** *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 224(1–2), 302–321.
[https://doi.org/10.1016/0378-4371\(95\)00409-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(95)00409-2)
- Stanley, H. E., Amaral, L. A. N., Canning, D., Gopikrishnan, P., Lee, Y., & Liu, Y. (1999). Econophysics: Can physicists contribute to the science of economics? *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 269(1), 156–169.
[https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(99\)00185-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(99)00185-5)
- Villegas-Febres, J. C., & Olivares-Rivas, W. (2008). The existence of negative **absolute temperatures in Axelrod’s social influence model.** *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 387(14), 3701–3707.
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.02.001>

VI. Anexos.

VI.1 Anexo 1. Programa desarrollado.

A continuación, se muestra el código utilizado para la realización de todas las simulaciones descritas en el presente trabajo. El programa desarrollado utilizando el software Matlab® versión R2016b.

```

%%Inicio de programa%%

%%El siguiente programa realiza interacciones económicas en las cuales
%%cierto número de agentes ahorra una fracción de su riqueza y el resto
lo
%%pone en intercambio aleatorio con el resto de agentes. Además calcula
la
%%entropía del sistema, el índice de Gini, se pueden poner cotas
(estrictas o permeables) a la riqueza,
%%se obtienen gráficas y se exportan los datos a archivos en excel

clear %Comando utilizado para borrar todas las variables en uso
clc %Comando para limpiar la información que muestra en pantalla

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Parámetros de ejecución%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Dim=3000; %Número de agentes
ahorradores=0; %Cantidad de agentes ahorradores
a=0; %Factor de ahorro
interacciones=300000; %Número de interacciones
n=30; %Número de repeticiones de simulación
cota=1.12; %Cota máxima de riqueza
puntos_entrop=101; %Número de puntos de la gráfica de entropía
prob=1; %Probabilidad de que un agente NO atravesase la cota

x=linspace(0.02,5.02,126); %Propiedades del ancho de las barras
dat=zeros(n,length(x)); %Creación de la matriz para guardar datos
his_ahorradores=zeros(n,length(x));%Matriz para guardar la información de
los ahorradores
his_NO_ahorradores=zeros(n,length(x)); %Matriz para guardar la
información de los NO ahorradores
ginis=zeros(1,n); %Vector para guardar información del índice de gini de
toda la población
ginis_ahorradores=zeros(1,n); %Vector para guardar información del índice
de gini de los ahorradores
ginis_NO=zeros(1,n); %Vector para guardar información del índice de gini
de los no ahorradores
riquezas_ahorradores=zeros(1,n); %Vector para guardar información de las
riquezas de los ahorradores
riquezas_NO=zeros(1,n); %Vector para guardar información de las riquezas
de los no ahorradores
s_x=linspace(0,interacciones,puntos_entrop); %Definición del tamaño del
vector de entropía y de los puntos a calcularla
s=zeros(n,puntos_entrop); %Vector para guardar información de los valores
de la entropía de cada ciclo
rechazo=zeros(1,n); %Variable usada para guardar el índice de rechazo de
cada realización

```

```

tunelaje=zeros(1,n); %Vector que guarda la fracción de interacciones que
logran atravesar la barrera.
mean_riq=zeros(1,n); %Creación del vector de riqueza media

for m=1:n

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Asignación de riqueza%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%Aleatoria%%
    % R=2*rand(1,Dim); %Asignación de riqueza aleatoria

    %%Uniforme%%
    R=ones(1,Dim); %Creación del vector de riqueza

    %Parámetros de realización
    j=2; %Se define el valor inicial del índice para el cálculo de
entropía
    contador=0; %Se define el valor inicial del contador de interacciones
prohibidas
    contador2=0; %Contador del número de interacciones que atraviesan la
barrera
    contador_limite=0; %Contador del número de interacciones que intentan
atravesar la barrera.

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Interacciones económicas%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    for i=1:interacciones

        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
        %%Instrucciones para el cálculo de la entropía del sistema%%
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

        if i==s_x(j) %Condición pra que el sistema calcule la entropía

            datos_hist(1,:)=hist(R,x); %Generación de un histograma para el
cálculo de probabilidades
            datos_hist(2,:)=datos_hist(1,:)/(Dim); %Normalización de los
datos (cálculo de probabilidades)

            %%Cálculo de la entropía valor por valor%%

            for l=1:length(x)

                if datos_hist(2,l)~=0 %Condición para que sólo tome en cuenta
los valores distintos de cero

                    s(m,j)=s(m,j) - datos_hist(2,l)*log(datos_hist(2,l));
%Fórmula de entropía

                else

```

```

        %Si el valo es cero, pasa a la siguiente posición
    end

end

j=j+1; %Se mueve el índice al siguiente valor

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Agentes ahorradores y Factores de ahorro%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

agentes=randsample(1:Dim,2); %Se eligen los agentes de manera
aleatoria

if agentes(1)<=ahorradores %Condición para que el agente 1 ahorre

    ahorros(1) = a*R(agentes(1)); %Ahorro del agente 1

else %En caso de que el agente no sea el adecuado, no ahorra.

    ahorros(1)=0;

end

if agentes(2)<=ahorradores %Condición para que el agente 2 ahorre

    ahorros(2) = a*R(agentes(2)); %Ahorro del agente 2

else %En caso de que el agente no sea el adecuado, no ahorra.

    ahorros(2)=0;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Redistribución de riqueza%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%Instrucciones para el cálculo de ganancia probable total%%
riquezas_ini=[R(agentes(1)) R(agentes(2))]; %Riquezas asociadas a los
agentes
apuesta_total=sum(riquezas_ini-ahorros); %Cálculo de la ganancia
probable

%%Instrucciones de distribución de la riqueza%%
k=rand; %Factor de distribución de riqueza
reparto=[k (1-k)]; %Vector de reparto de apuestas
riquezas_fin=apuesta_total*reparto + ahorros; %Distribución de las
nuevas riquezas

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%Imposición de cotas%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if max(riquezas_fin)<=cota %Condición para permitir la interacción

    %Asignación de las nuevas riquezas al vector%%
    R(agentes(1))=riquezas_fin(1);
    R(agentes(2))=riquezas_fin(2);

else %En caso de que las riquezas excedan las cotas, no se realiza la
nueva asignación
    contador_limite=contador_limite+1;
    k_pass=rand;
    if k_pass>=prob

        R(agentes(1))=riquezas_fin(1);
        R(agentes(2))=riquezas_fin(2);
        contador2=contador2+1;

    else

        contador=contador+1; %Contador utilizado para conocer la
fracción de interacciones prohibidas

    end

end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%Guardado de la información para estadística%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

mean_riq(m)=mean(R); %Guardado de la información de riqueza media
tunelaje(m)=contador2/contador_limite;
rechazo(m)=contador/interacciones; %Se calcula la fracción de
interacciones prohibidas y se guarda la información en el vector rechazo
dat(m,:)= datos_hist(1,:); %Aquí se guarda la información de cada
histograma de toda la población
    if (0<ahorradores)&&(ahorradores<Dim) %Condición para calcular datos
de ahorradores y NO ahorradores

        his_ahorradores(m,:)=hist((R(1:ahorradores)),x); %Se guarda la
información de los histogramas de los ahorradores
        his_NO_ahorradores(m,:)= hist(R(ahorradores+1:Dim),x); %Se guarda
la información de los histogramas de los NO ahorradores

        riquezas_ahorradores(m)=mean(R(1:ahorradores)); %Se calcula la
riqueza promedio de los ahorradores y se guarda en un vector
        riquezas_NO(m)=mean(R(ahorradores+1:Dim)); %Se calcula la riqueza
promedio de los NO ahorradores y se guarda en un vector

end

```

```

    %Ya que se tiene la información de los histogramas de las
distribuciones se calculan los

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Índices de Gini%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Población Total%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    i=0;
    clear sum_riq %Se limpia la variable sum_riq

    %%Eliminación de ceros y normalización de datos%%

    for l=1:length(x) %Análisis elemento por elemento de los histogramas
con la información

        if datos_hist(1,l)~=0 %Condición para considerar la información
que sea distinta de cero

            sum_riq(1,l-i)=datos_hist(1,l)/sum(datos_hist(1,:)); %Se
guarda la información en el primer renglón de la matriz sum_riq y se
normaliza respecto al número total de agentes
            sum_riq(2,l-i)=x(l)*datos_hist(1,l)/dot(datos_hist(1,:),x);
%Se guarda la información en el segundo renglón de la matriz sum_riq y se
normaliza respecto a la riqueza total

            else

                i=i+1; %Contador introducido para pegar adecuadamente la
información

            end

        end

        end

    %Cálculo de las fracciones acumuladas a utilizar%
    if length(sum_riq(1,:))=1 %Caso en que todos los agentes tengan la
misma riqueza

        ginis(m)=0;

    else %Caso de distribución de la riqueza

        for l=2:length(sum_riq(1,:)) %Se comienza en el segundo elemento
para logara la suma recursiva

            sum_riq(1,l)= sum_riq(1,l-1)+ sum_riq(1,l); %Cálculo de la
fracción de agentes acumulada
            sum_riq(2,l)= sum_riq(2,l-1)+ sum_riq(2,l); %Cálculo de la
fracción de riqueza acumulada

        end

```

```

    %Cálculo de los términos de la fórmula para el índice de Gini
    term_gini=zeros(1,length(sum_riq)-1); %Construcción del vector
    que guardará los términos de la fórmula para el índice de Gini

    for l=1:(length(sum_riq(1,:))-1)

        term_gini(l)=(sum_riq(1,l+1)-
sum_riq(1,l))*(sum_riq(2,l+1)+sum_riq(2,l)); %Fórmula recursiva para el
índice de gini

    end

    ginis(m)= 1-sum(term_gini); % Se realiza el cálculo final para
    obtener el índice de Gini de toda la población y se guarda en el vector
    ginis

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Ahorradores y NO ahorradores%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if (0<ahorradores)&&(ahorradores<Dim) %Condición para calcular datos
de ahorradores y NO ahorradores

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Ahorradores%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    i=0;
    clear sum_riq %Se limpia la variable sum_riq

    %%Eliminación de ceros y normalización de datos%%

    for l=1:length(x) %Análisis elemento por elemento de los
    histogramas con la información

        if his_ahorradores(m,l)~=0 %Condición para considerar la
        información que sea distinta de cero

            sum_riq(1,l-
i)=his_ahorradores(m,l)/sum(his_ahorradores(m,:)); %Se guarda la
información en el primer renglón de la matriz sum_riq y se normaliza
respecto al número total de agentes
            sum_riq(2,l-
i)=x(l)*his_ahorradores(m,l)/dot(his_ahorradores(m,:),x); %Se guarda la
información en el segundo renglón de la matriz sum_riq y se normaliza
respecto a la riqueza total

        else

            i=i+1; %Contador introducido para pegar adecuadamente la
información

```



```

        end

    end

    %Cálculo de las fracciones acumuladas a utilizar%
    if length(sum_riq(1,:))=1 %Caso en que todos los agentes tengan
la misma riqueza

        ginis_ahorradores(m)=0;

    else %Caso de distribución de la riqueza

        for l=2:length(sum_riq(1,:)) %Se comienza en el segundo
elemento para logara la suma recursiva

            sum_riq(1,l)= sum_riq(1,l-1)+ sum_riq(1,l); %Cálculo de
la fracción de agentes acumulada
            sum_riq(2,l)= sum_riq(2,l-1)+ sum_riq(2,l); %Cálculo de
la fracción de riqueza acumulada

        end

        %Cálculo de los términos de la fórmula para el índice de Gini
clear term_gini %Limpieza del vector que guardará los
términos de la fórmula para el índice de Gini

        for l=1:(length(sum_riq(1,:))-1)

            term_gini(l)=(sum_riq(1,l+1)-
sum_riq(1,l))*(sum_riq(2,l+1)+sum_riq(2,l)); %Fórmula recursiva para el
índice de gini

        end

        ginis_ahorradores(m)= 1-sum(term_gini); % Se realiza el
cálculo final para obtener el índice de Gini de los ahorradores y se
guarda en el vector ginis_ahorradores

    end

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%NO Ahorradores%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    i=0;
clear sum_riq %Se limpia la variable sum_riq

    %%Eliminación de ceros y normalización de datos%%

    for l=1:length(x) %Análisis elemento por elemento de los
histogramas con la información

        if his_NO_ahorradores(m,l)~=0 %Condición para considerar la
información que sea distinta de cero

```

```

        sum_riq(1,l-
i)=his_NO_ahorradores(m,l)/sum(his_NO_ahorradores(m,:)); %Se guarda la
información en el primer renglón de la matriz sum_riq y se normaliza
respecto al número total de agentes
        sum_riq(2,l-
i)=x(1)*his_NO_ahorradores(m,l)/dot(his_NO_ahorradores(m,:),x); %Se
guarda la información en el segundo renglón de la matriz sum_riq y se
normaliza respecto a la riqueza total

    else

        i=i+1; %Contador introducido para pegar adecuadamente la
información

    end

end

%Cálculo de las fracciones acumuladas a utilizar%
if length(sum_riq(1,:))=1 %Caso en que todos los agentes tengan
la misma riqueza

    ginis_NO(m)=0;

else %Caso de distribución de la riqueza

    for l=2:length(sum_riq(1,:)) %Se comienza en el segundo
elemento para logara la suma recursiva

        sum_riq(1,l)= sum_riq(1,l-1)+ sum_riq(1,l); %Cálculo de
la fracción de agentes acumulada
        sum_riq(2,l)= sum_riq(2,l-1)+ sum_riq(2,l); %Cálculo de
la fracción de riqueza acumulada

    end

    %Cálculo de los términos de la fórmula para el índice de Gini
clear term_gini %Limpieza del vector que guardará los
términos de la fórmula para el índice de Gini

    for l=1:(length(sum_riq(1,:))-1)

        term_gini(l)=(sum_riq(1,l+1)-
sum_riq(1,l))*(sum_riq(2,l+1)+sum_riq(2,l)); %Fórmula recursiva para el
índice de gini

    end

    ginis_NO(m)= 1-sum(term_gini); % Se realiza el cálculo final
para obtener el índice de Gini de los NO ahorradores y se guarda en el
vector ginis_NO

end

```

```

end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%Histograma%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if n==1

    datos_hist(1,:)=dat(1,:); %Generación del histograma de la
distribución de toda la población

else

    datos_hist(1,:)=mean(dat); %Generación del histograma de la
distribución de toda la población

end
datos_hist(2,:)=datos_hist(1,:)/(Dim); %Normalización de los datos
datos_hist(7,:)=x;

if (0<ahorradores)&&(ahorradores<Dim) %Condición para calcular datos de
ahorradores y NO ahorradores

    datos_hist(3,:)=mean(his_ahorradores);
    datos_hist(4,:)=datos_hist(3,:)/(ahorradores);
    datos_hist(5,:)=mean(his_NO_ahorradores); %Generación del histograma
de los NO ahorradores
    datos_hist(6,:)=datos_hist(5,:)/(Dim-ahorradores); %Normalización de
los datos

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%Distribuciones%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%Ploteo%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

bar(x, datos_hist(2,:)); %Gráfica de barras con los datos normalizados
%plot(s_x,mean(s),'*') %Gráfica de puntos de la entropía
xlabel('Riqueza'); %Nombre del eje x
ylabel('Fracción de agentes'); %Nombre del eje y
title('Distribución de Riqueza'); %Título del gráfico

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%Parámetros relevantes%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('\n\nEl índice de Gini promedio para esta distribución es:
%f',mean(ginis))
fprintf('\n\nCon una desviación estándar de: %f',std(ginis))

```

```

fprintf('\n\nLa fracción de interacciones rechazadas es:
%f',mean(rechazo))
fprintf('\n\nLa fracción de interacciones que atraviesan la barrera es:
%f',mean(tunelaje))

if (0<ahorradores)&&(ahorradores<Dim) %Condición para calcular datos de
ahorradores y NO ahorradores

    fprintf('\n\nLa riqueza media de los ahorradores es:
%f',mean(riquezas_ahorradores))
    fprintf('\n\nCon una desviación estándar de:
%f',std(riquezas_ahorradores))
    fprintf('\n\nEl índice de Gini promedio de los ahorradores es:
%f',mean(ginis_ahorradores))
    fprintf('\n\nCon una desviación estándar de:
%f',std(ginis_ahorradores))

    fprintf('\n\nLa riqueza media de los NO ahorradores es:
%f',mean(riquezas_NO))
    fprintf('\n\nCon una desviación estándar de: %f',std(riquezas_NO))
    fprintf('\n\nEl índice de Gini promedio de los NO ahorradores es:
%f',mean(ginis_NO))
    fprintf('\n\nCon una desviación estándar de: %f',std(ginis_NO))

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Salida de información%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Datos del histograma de la distribución general
xlswrite('cotas.xlsx',datos_hist,'cota_10');
xlswrite('cotas.xlsx',mean(ginis),'cota_10','A10');
xlswrite('cotas.xlsx',std(ginis),'cota_10','A11');
xlswrite('cotas.xlsx',mean(rechazo),'cota_10','A12');
xlswrite('cotas.xlsx',mean(tunelaje),'cota_10','A13');
xlswrite('cotas.xlsx',mean(mean(mean_riq)),'cota_10','A13');

%Datos de la entropía como función de las interacciones
xlswrite('cotas.xlsx',mean(s),'cota_10','A30');
xlswrite('cotas.xlsx',s_x,'cota_10','A31');

if (0<ahorradores)&&(ahorradores<Dim) %Condición para calcular datos de
ahorradores y NO ahorradores

    %Datos de los ahorradores
    xlswrite('cotas.xlsx',mean(riquezas_ahorradores),'cota_10','B10');
    xlswrite('cotas.xlsx',std(riquezas_ahorradores),'cota_10','B11');
    xlswrite('cotas.xlsx',mean(ginis_ahorradores),'cota_10','B12');
    xlswrite('cotas.xlsx',std(ginis_ahorradores),'cota_10','B13');

    %Datos de los NO ahorradores
    xlswrite('cotas.xlsx',mean(riquezas_NO),'cota_10','C10');
    xlswrite('cotas.xlsx',std(riquezas_NO),'cota_10','C11');
    xlswrite('cotas.xlsx',mean(ginis_NO),'cota_10','C12');
    xlswrite('cotas.xlsx',std(ginis_NO),'cota_10','C13');

```

end

Anexo 2. Publicación en la Revista Mexicana de Física.

Adicionalmente, se presenta el artículo publicado como resultado del trabajo en la *Revista Mexicana de Física* vol. 64 No. 1; ISSN: 0035-001X. Enlace: <https://rmf.smf.mx/ojs/rmf/article/view/101/23>

RESEARCH

Revista Mexicana de Física 64 (2018) 51–54

JANUARY-FEBRUARY 2018

Simulating negative temperatures by imposing wealth upper-bounds in exchanges

A.R. Villagómez-Manrique and M. del Castillo-Mussot
*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, 04510, Ciudad de México, México.*

Received 28 July 2017; accepted 30 October 2017

We impose an upper bound to the amount of agents wealth in binary exchanges, but when the upper bound is continuously lowered, then the entropy S decreases because the system exhibits more order. Furthermore, negative temperatures can mathematically be obtained when the slope of the entropy as a function of the total energy ($T = (dS/dE)^{-1}$) is negative.

Keywords: Temperature; entropy; econophysics.

PACS: 0.5; 89.90.+n

1. Introduction

For centuries, physical theories have influenced various areas of science, including economics. For example, Hetherington states that the efforts of Adam Smith to establish the general laws of economics are motivated by the Newton's achievement in establishing the fundamental laws of motion [1]. During the last decades, physicists have successfully studied economic systems, giving rise to a new discipline called Econophysics [2-8].

A simple model of economic exchange was proposed in which money, as energy, is conserved in each interaction, resulting in a wealth distribution identical to the Boltzmann-Gibbs distribution for energy, where the temperature corresponds to the average money or energy of the system [9]. Based on conserving money, multiple works were carried out in which mechanisms such as savings, taxes and dynamics to support the poorest population were implemented [10-12] yielding distributions which are not longer pure exponentials and tend to decrease wealth inequalities.

Within the spirit of conservative exchanges, here we propose a model with upper bounds that limits the amount of wealth agents can possess. This limit produces a piling up of agents in fewer states causing more ordering of the system or less wealth inequality. When the imposed upper bound is too close to the average wealth, then we will numerically show a transition to systems with *negative temperatures*. Negative temperatures formally exist in paramagnetic materials exposed to external magnetic fields because mathematically the slope (which is proportional to the temperatures) of the entropy as a function of the total energy is negative. Also, the existence of negative temperatures has been studied in social systems in Axelrod's social influence model [13].

2. Economic Exchange Interaction Model With Upper Bounds

In the study of income and wealth distributions in economics, one of the most used inequality indicators is the Gini index (GI) given by

$$GI = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |x_i - x_j|}{2NM} \quad (1)$$

Here x_i and x_j are the wealth values of agents i and j , respectively, M is the total wealth and N is the number of economic agents. Thus, GI equal to zero expresses perfect equality, where all values are the same (for example, where everyone has the same wealth) and $GI = 1$ (or 100%) expresses maximal inequality among values (e.g., occurring when only one person has all the wealth, and all others have none).

Since we can safely assume that money is conserved in short periods of time when billions of economic interactions (or steps) amongst agents occur, we use a model which consists of a closed economic system composed of fixed total wealth M and number of economic agents N . To each i -agent is assigned an initial amount of wealth m_i that can be conservatively exchanged with other agents. The iterative interactions are made between two agents i and j selected randomly, which exchange wealth obeying the following expressions:

$$\begin{aligned} m_j' &= k(m_j + m_i); \\ m_i' &= (1 - k)(m_j + m_i) \end{aligned} \quad (2)$$

Here m_i' y m_j' are the final wealth of agents i and j , respectively, and k is a random value between 0 and 1. Although here we choose $N = 3000$, it can be shown that such relatively small number yields fortunately the same qualitative results than larger and more realistic economic models. A particular "realization" is defined as a system that follows the rules given by Eq. 2, but two realizations are different because the randomness of the choice of agents and the value of k . This dynamics is exactly the same as that occurring in a physical system of collisions between particles so that depending on how collision occurs, the energy gain or loss of a given particle may be abrupt (if it is near a head-on collision) or very small (if the angle of deflection is large). Therefore, in the economics analogy an agent can become rich or poor in one or many interactions. A savings model [10], in which

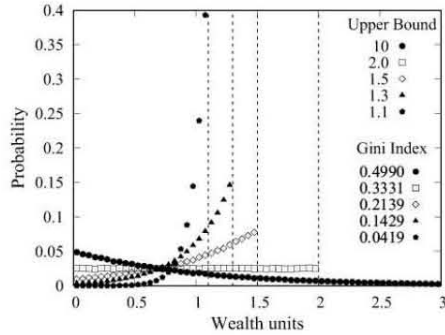


FIGURE 1. Probability distributions P with different UB values with 3000 agents interacting 8×10^8 times according to Eq. 2 with an initial wealth of 1 unit per agent. The horizontal scale is cut.

the agents gain or lose a fraction of their wealth in each interaction, is a more realistic model of commerce or economic exchanges.

In order to reduce the economic inequality of the system, we establish wealth upper bounds (UB) to forbid the existence of “too rich” agents. That is, economic interactions that result in an agent whose final wealth exceeds an established limit are canceled. We assign an initial wealth of $m_0 = 1$ unit to each agent and, therefore, the system average wealth ($SAW = M/N$) is equal to 1. With these values, we show in Fig. 1 the results of a series of simulations with m_0 as a wealth unit, $UB = 10, 2, 1.5, 1.3$ and 1.1 , averaging over 30 realizations.

As can be seen, there are no agents beyond the bound because the UB strictly forbids agents to have a wealth greater than the UB ; therefore, this barrier reduces inequality as the UB decreases as shown by the GI . Notice how distributions in Fig. 1 change their slope as the UB decreases. When the bound is large ($UB = 10$), then $GI = 0.4990$ which is very similar to the value of 0.5 corresponding to the exponential Maxwell-Boltzmann distribution obtained from Eq. 2 without imposing any upper bound; which means that the system is unaffected by an UB set well above the SAW and therefore, the agents can freely increase his wealth according to the random value k . But when UB is too close to SAW then the distribution P becomes very narrow and peaked. It’s important to mention that our results are very robust since they don’t depend on the initial wealth conditions; that is, we could have started with a random distribution of wealth or, in an extreme case, assigning all the wealth to only one agent and the results would be the same.

For the same values of UB , the associated time evolution of entropy $S = -\sum P(m) \ln[P(m)]$ is shown in Fig. 2.

The constant values of S show that distributions are stable. When the UB is lowered, the maximum entropy value decreases taking longer to reach stability. GI and S are tools

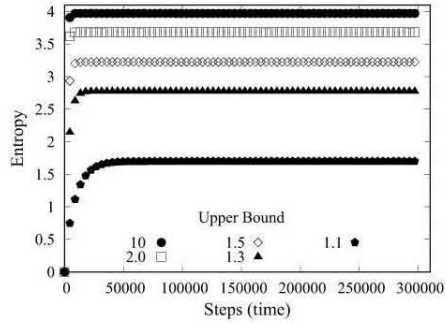


FIGURE 2. Entropy as a function of time.

that analyze the disorder of a given distribution, however, the GI compares the form of the distribution with an equity distribution and determines the amount of relative inequality, while S which arises naturally from physical laws, can also determine whether the system is in equilibrium or not. This ordering phenomenon, characterized by a decrease in entropy, has similarities with the alignment of the magnetic moments of a paramagnetic material subjected to a variable external field studied by Landau mentioned in next section [14].

3. Paramagnetic Materials and Exchange Model Exhibit Negative Temperatures

Now we will discuss the appearance of negative temperatures in paramagnetic materials and in our system. A partial alignment of the atomic magnetic moments is observed in paramagnetic materials when they are subjected to external magnetic fields modifying the system energy. As the intensity of the external magnetic field increases, the magnetic moments move to a higher energy levels, increasing the entropy of the system, until reaching the point of maximum entropy. Then,

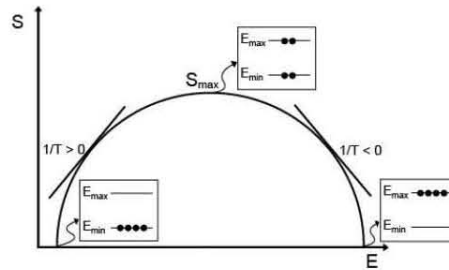


FIGURE 3. Schematic plot of Entropy S vs. total Energy E . Only four spins or particles are shown to illustrate some cases of ordering in two levels.

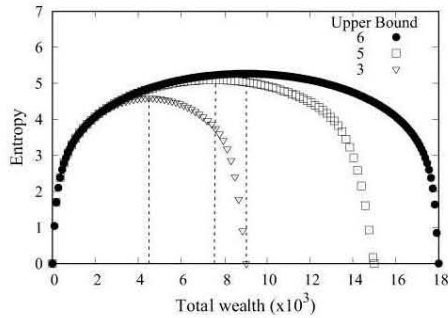


FIGURE 4. Entropy S for different values of UB as a function of the system total wealth M . Each point represents the average equilibrium entropy of 30 realizations and the lines show the point of maximum entropy in each case.

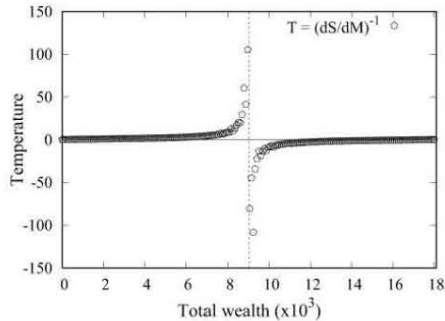


FIGURE 5. Temperature T as a function of the total wealth M .

an increase in the system energy causes the moments to begin to settle into the highest energy level (E_{max}), because the allowed energy levels are limited. In that case, the entropy decreases because the system is more ordered and its temperature ($T = (dS/dE)^{-1}$), which is the inverse of the slope of the entropy curve as a function of energy, is negative, as shown esquematically in Fig. 3.

In order to achieve the phenomenon of negative temperatures in our economic case, we make simulations with the same number of agents $N = 3000$, but with different total wealth and three values of the upper bound ($UB = 6, 5$ and 3), up to 3×10^6 interactions according to Eq. 2. Figure 4 shows the corresponding results averaged over 30 realizations.

Notice that these curves show the same qualitative behavior and are similar to the schematic diagram shown in Fig. 3. When UB is too low then most interactions are not allowed, and in the limit when UB is equal to SAW there is no economic activity in the system, and therefore the system is perfectly ordered and the temperature is zero. According to

$T = (dS/dM)^{-1}$, Fig. 5 shows the corresponding exotic temperature behavior when $UB = 6$.

As can be seen, there is a transition in temperature which goes from positive to negative when the system has a wealth of 9×10^3 units, i.e., when the SAW is equal to 3 units which is half the value of the UB .

4. Discussions

In econophysics, the temperature has been considered as an indicator of system income or wealth, while any inequality index and the entropy of the corresponding distribution yields information on the associated dispersion or broadening. Our simulations clearly show how the entropy S changes as a function of both the total energy and the upper bound value. Entropy measures how much order exist in the system in the sense that more agents with the same energy or wealth represent lower entropy values. In our model, if the upper bound is much greater than the system average wealth, then the richest agents are “less affected” by the limiting condition and can interact more freely, but if the value of the upper bound is lower, then the entropy S and the Gini index GI decrease, indicating an ordering, which is observed as a lower dispersion in distribution. In other words, the upper bound imposes an “impermeable barrier” which prevents agents to go beyond the barrier in the wealth axis. Thinking of money as energy, then negative temperatures exist at the theoretical physics level, as a consequence of the fact that the entropy function with respect to the energy (wealth) of the system becomes decreasing. In our model of economic exchanges that conserve energy, we obtained that lowering the upper bound yields lower Gini index and entropy. In the extreme case that the upper bound is very close to the system average wealth, then the distribution is very peaked and narrow at the expense of forbidding some kind of economic exchanges. Ours is a particular *extreme case* of how entropy is lowered by imposing strong restrictions on the system to get negative temperatures. In other words, negative temperatures imply more restrictions for exchanges especially for wealthier agents who can not increase their wealth.

These restrictions or limitations of accessible energies in our model remind us Maxwell’s demon that selects those particles that may or may not pass a certain barrier. Our model is not easy to implement in physical systems such as particle gases. However, the economic counterpart is plausible through a strong tax policy aimed at the upper economic sectors. This taxing mechanism prevents the agents from having a wealth greater than a predefined limit. However, since in reality it is not possible to apply such a strict policy, then a permeable upper bound could be modeled which allows some agents to go through the barrier and have greater wealth and to investigate the properties of the final distribution especially at the point of transition to negative temperatures.

We hope that this work may stimulate further research in income or wealth distributions in econophysics and negative temperatures in novel systems.

Acknowledgments

We acknowledge the partial financial support provided by DGAPA-UNAM, Mexico, through Grants No. IN105814 and

IN101817, and thank J.D.A. Islas-García for useful discussions.

-
1. N. Hetherington, *Journal of The History of Ideas* **44** (1983).
 2. E. de Area Leão Pereira, M. da Silva and H. Pereira, *Phys. A* **473** (2017).
 3. H. Stanley *et al.*, *Phys. A* **224** (1996).
 4. H. Stanley *et al.*, *Phys. A* **269** (1999).
 5. R. Mantegna and E. Stanley, *An introduction to econophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000), p. 149.
 6. M. Gallegati, S. Keen, T. Lux, P. Ormerod, *Phys. A* **370** (2006).
 7. J. McCauley, *Phys. A* **371** (2006).
 8. A. Chatterjee, S. Yarlagadda and B. Chatterjee, *Econophysics of wealth distributions* (Springer-Verlag Italia, Milan, 2005).
 9. A. Dragulescu and V.M. Yakovenko, *Eur. Phys. J.B* **17** (2000).
 10. A. Chakraborti and B. Chakrabarti, *Eur. Phys. J. B* **17** (2000).
 11. S. Pianegonda and J. Iglesias, *Phys. A* **342** (2004).
 12. S. Guala, *Interdisciplinary Description of Complex Systems* **7** (2009).
 13. J.C. Villegas-Febres and W. Olivares-Rivas, *Phys. A* **387** (2008).
 14. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1958).