



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Obtención de H -núcleos mediante particiones en
digráficas H -coloreadas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Felipe Hernández Lorenzana

TUTORA

Dra. María del Rocío Sánchez López

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Hernández
Lorenzana
Felipe
55 10 15 33 52
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
413084471
2. Datos del tutor
Dra
María del Rocío
Sánchez
López
3. Datos del sinodal 1
Dra
Hotensia
Galeana
Sánchez
4. Datos del sinodal 2
Mat
Laura
Pastrana
Ramírez
5. Datos del sinodal 3
Mat
Gerardo Miguel
Tecpa
Galván
6. Datos del sinodal 4
Dra
Ingrid Chantal
Torres
Ramos
7. Datos del trabajo escrito
Obtención de H-núcleos mediante particiones en digráficas H-coloreadas
126 p
2018

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Definiciones y resultados básicos en digráficas	5
2. Núcleos en digráficas	11
2.1. Definiciones y resultados básicos en núcleos	11
3. Digráficas m-coloreadas	19
3.1. Definiciones y resultados básicos en digráficas m -coloreadas	19
3.2. Definiciones y resultados básicos en núcleos en digráficas m -coloreadas .	22
4. Ciclos monocromáticos y trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por flechas	25
4.1. Definiciones y primeros resultados	26
4.2. Sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas	29
5. Ciclos y transitividad por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por flechas	39
5.1. Definiciones y primeros resultados	40
5.2. Sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas	49
6. Digráficas H-coloreadas	67
6.1. Definiciones y resultados básicos en digráficas H -coloreadas	69
6.2. Definiciones y resultados básicos en núcleos en digráficas H -coloreadas	70
6.3. Ciclos, H -caminos y transitividad por H -trayectorias en digráficas H -coloreadas	73
6.4. Resultados análogos: existencia de H -núcleos	109
Conclusiones	121

Introducción

Nuestro estudio se remonta a 1944, año en el cual J. von Neumann y O. Morgenstern publican su libro *Theory of games and economic behavior* en [21]. Tal vez ellos pretendían hallar principios matemáticos los cuales modelaran el comportamiento racional de los participantes de una economía social, o un juego, de manera tan general posible que fuera válido aplicarlo en cualquier situación. Fue de este estudio que surgió el concepto de solución que después, con una pequeña redefinición por parte de C. Berge en [2], daría lugar al concepto de núcleo.

De este modo, dada una digráfica D , decimos un subconjunto N de $V(D)$ es un núcleo si para cada par de vértices u y v en N no existe una flecha entre ellos y para cada vértice z en $V(D) \setminus N$ existe una zN -flecha.

La importancia de la teoría de núcleos recae en sus aplicaciones, tal como se dió cuenta de ello C. Berge en [3]. Sus aplicaciones no se hallan únicamente en la teoría de juegos, rama de las matemáticas que la vió nacer, sino también en la lógica, juegos tipo nim, teoría de las decisiones [5], por nombrar algunas. Si bien en un inicio las aplicaciones a la teoría de juegos motivaron las primeras investigaciones de la recién creada teoría de núcleos, ésta adquirió mayor fuerza enfocándose más en la investigación de la misma. Cabe mencionar que de manera general, determinar si una digráfica tiene o no núcleo es un problema NP-completo, tal como lo demostró V. Chvátal en [7].

Existen varias generalizaciones del concepto de núcleo, una de ellas, introducida por Hortensia Galeana Sánchez en [11], se define sobre digráficas cuyas flechas están coloreadas con m -colores (digráficas m -coloreadas). De este modo, dada una digráfica m -coloreada D , decimos que un subconjunto N de $V(D)$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas si para cada par de vértices u y v en N no existe una trayectoria monocromática entre ellos y para cada vértice z en $V(D) \setminus N$ existe una zN -trayectoria monocromática.

Un resultado clásico sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas fue dado por Sands, Sauer y Woodrow en [20]. En particular, ellos demostraron que toda digráfica finita 2-coloreada tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

A fin de relacionar el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas con la teoría de núcleos ya existente, Hortensia Galeana Sánchez introduce en [10] una digráfica asociada: la cerradura de una digráfica m -coloreada, la cual preserva información de la digráfica misma y de las trayectorias monocromáticas entre todo par de vértices.

Otra digráfica asociada es la digráfica de clases de color, introducida por Hortensia Galeana Sánchez en [12] con la finalidad de hallar nuevas condiciones que impliquen la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas.

Nuevos métodos han sido desarrollados recientemente para la obtención de condiciones que impliquen la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas.

En [13], Hortensia Galeana Sánchez, Guadalupe Gaytán Gómez y Rocío Rojas Monroy consideran una partición $\{C_1, C_2\}$ del conjunto de colores de D y trabajan con dos subdigráficas generadoras de D , a saber D_i , de modo que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c_D(a) \in C_i\}$. Entonces, estudian condiciones sobre D_1 y D_2 .

En [6], Enrique Casas Bautista, Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy consideran una partición $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ($k \geq 2$) del conjunto de colores de D , de modo que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que la subdigráfica G_i , definida como $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es transitiva por trayectorias monocromáticas. Posteriormente, consideran otra partición $\{\xi_1, \xi_2\}$ de ξ , y trabajan con subdigráficas generadoras de D , a saber D_i , tales que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c_D(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \text{ en } \xi_i\}$. Luego, estudian condiciones sobre D_1 y D_2 .

Una generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas y de núcleo se define sobre digráficas cuyas flechas están coloreadas con los vértices de una digráfica H (digráficas H -coloreadas). Tal concepto es el de H -núcleo, introducido por Hortensia Galeana Sánchez y Pietra Delgado Escalante en [8], motivados por el trabajo de P. Arpin y V. Linek en [1]. De este modo, dada una digráfica H -coloreada D , decimos que un subconjunto N de $V(D)$ es un H -núcleo si para cada par de vértices u y v en N no existe una H -trayectoria entre ellos y para cada vértice z en $V(D) \setminus N$ existe una zN - H -trayectoria.

En este trabajo vamos a presentar como resultado original una extensión en el contexto de la teoría de H -núcleos a los resultados dados en [13] y [6].

En el primer capítulo se presentan definiciones básicas referentes a la teoría de digráficas. También se demuestran resultados inmediatos de las definiciones, los cuales nos serán de utilidad en los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de núcleo de una digráfica y se demuestran un par de condiciones necesarias para la existencia de núcleos en familias de digráficas específicas. Comprender qué condiciones son necesarias para la existencia de núcleos nos será de utilidad para los capítulos posteriores.

El tercer capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección se presentan definiciones básicas referentes a digráficas m -coloreadas, así mismo se hacen observaciones esenciales y se introducen dos digráficas asociadas: cerradura de una digráfica y digráfica de clases de color. En la segunda sección se introduce el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas, el cual generaliza al concepto de núcleo de una digráfica.

El cuarto capítulo es un análisis del artículo titulado *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-coloured digraphs* escrito por Hortensia Galeana Sánchez, Guadalupe Gaytán Gómez y Rocío Rojas Monroy en [13].

El quinto capítulo es un análisis del artículo titulado *Cycles and transitivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs* escrito por Enrique Casas Bautista, Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy en [6].

El sexto capítulo se divide en cuatro secciones. En la primer sección se presentan definiciones básicas referentes a digráficas H -coloreadas, así mismo se hacen observaciones esenciales y se introduce el concepto de obstrucción de un camino el cual será crucial en el desarrollo del capítulo. En la segunda sección se introducen los conceptos de H -núcleo por caminos y H -núcleo en digráficas H -coloreadas, en particular, este último concepto generaliza a los conceptos de núcleo de una digráfica y núcleo por trayectorias monocromáticas en una digráfica m -coloreada. En la tercera sección de este capítulo se presenta un resultado original en el contexto de la teoría de H -núcleos, tal resultado es una extensión a los resultados expuestos en los capítulos 4 y 5. En la última sección se hace una comparación entre el resultado obtenido en la tercera sección de este capítulo y un par de resultados análogos sobre la existencia de H -núcleos.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo se presentarán las definiciones básicas que nos servirán a lo largo de este trabajo, también se muestran ejemplos de cada definición con el objetivo de facilitar el entendimiento de los conceptos al lector. De igual manera, como esta tesis es autocontenida, se enuncian y demuestran resultados básicos los cuales nos servirán para demostraciones en los capítulos posteriores.

1.1. Definiciones y resultados básicos en digráficas

Una **gráfica dirigida** (o simplemente **digráfica**) D consiste de un conjunto finito no vacío $V(D)$, cuyos elementos serán llamados **vértices**, y un conjunto finito $A(D)$ de parejas ordenadas de vértices llamadas **flechas**. Llamaremos a $V(D)$ el conjunto de vértices y a $A(D)$ el conjunto de flechas de D . Escribiremos de manera frecuente $D = (V(D), A(D))$ para referirnos a la digráfica D , con $V(D)$ y $A(D)$ su conjunto de vértices y flechas, respectivamente. A cada digráfica le podemos asociar una representación en el plano como sigue: por cada vértice colocamos de forma arbitraria un punto en el plano al cual lo etiquetamos con el respectivo vértice, y entre dos puntos u y v , habrá una flecha de u hacia v si (u, v) está en $A(D)$.

En la figura 1.1 podemos observar la representación en el plano de la digráfica $D_1 = (V(D_1), A(D_1))$ definida explícitamente como sigue: $V(D_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $A(D_1) = \{(u_4, u_1), (u_2, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_2), (u_3, u_4), (u_4, u_3), (u_4, u_4), (u_4, u_5)\}$.

El **orden** de D es el número de vértices en D y el **tamaño** es el número de flechas en D . Si el orden de una digráfica D es uno y por consiguiente su tamaño es cero, entonces diremos que D es la **digráfica trivial**.

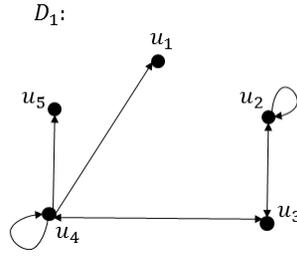


Figura 1.1: Representación en el plano de una digráfica.

Para una flecha (u, v) , el primer vértice u es su **vértice inicial** y el segundo vértice v es su **vértice final**. Si (u, v) es una flecha diremos que u domina a v (o que v es dominado por u). Una flecha (u, v) de D será llamada una S_1S_2 -flecha siempre que u esté en S_1 y v esté en S_2 , donde S_1 y S_2 son subconjuntos de $V(D)$. De igual modo, una flecha (u, v) de D será llamada una uS -flecha (respectivamente Sv -flecha) siempre que v esté en S (u esté en S), donde S es un subconjunto de $V(D)$.

Diremos que una flecha (u, v) es **simétrica** si la flecha (v, u) también pertenece a la digráfica, de otro modo (u, v) es **asimétrica**. Notemos que nuestra definición de digráficas permite que una digráfica tenga flechas simétricas o **lazos** (flechas cuya cabeza y cola coinciden), mas no permite que contenga **flechas múltiples** (pares de flechas con la misma cabeza y la misma cola). Cuando flechas múltiples son permitidas hablamos de una **multidigráfica**. Claramente, para una multidigráfica D , $A(D)$ es un multiconjunto (pues flechas múltiples resultan en elementos repetidos). De igual modo hablaremos de una **digráfica simple** para referirnos a una digráfica sin lazos. En las figuras 1.2 y 1.3 se ejemplifican una multidigráfica y una digráfica simple, respectivamente.

Luego, a menos que se especifique lo contrario, $D = (V(D), A(D))$ representará una digráfica simple.

Para un vértice v en D , usaremos la notación $N_D^+(v)$ y $N_D^-(v)$, donde:

$$N_D^+(v) = \{u \in V(D) : (v, u) \in A(D)\},$$

$$N_D^-(v) = \{w \in V(D) : (w, v) \in A(D)\}.$$

Los conjuntos $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$ y $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$ son llamados **exvecindad**, **invecindad** y **vecindad** de v , respectivamente. Así, los vértices en $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$ y $N_D(v)$ son llamados **exvecinos**, **invecinos** y **vecinos** de v , respectivamente.

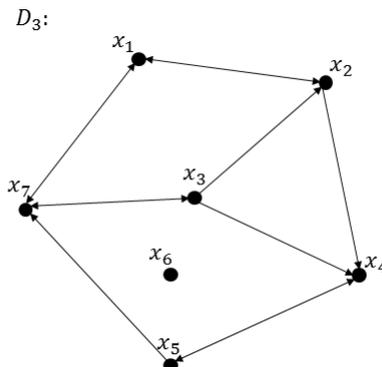
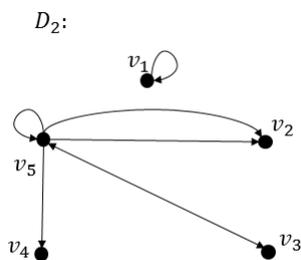


Figura 1.2: Ejemplo de una multidigráfica. Figura 1.3: Ejemplo de una digráfica simple.

El **exgrado** de v , denotado por $\delta_D^+(v)$, se define como $\delta_D^+(v) = |N_D^+(v)|$, de igual modo el **ingrado** de v , denotado por $\delta_D^-(v)$, se define como $\delta_D^-(v) = |N_D^-(v)|$. Si existe un vértice de la digráfica D , digamos v , tal que $\delta_D^+(v) = \delta_D^-(v) = 0$, entonces se dice que v es un **vértice aislado**.

De manera análoga, para un subconjunto de $V(D)$, digamos W , usaremos la notación $\Gamma_D^+(W)$ y $\Gamma_D^-(W)$, donde:

$$\Gamma_D^+(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^+(w),$$

$$\Gamma_D^-(W) = \bigcup_{w \in W} N_D^-(w).$$

Los conjuntos $\Gamma_D^+(W)$ y $\Gamma_D^-(W)$ son llamados **exvecindad** e **invecindad** de W , respectivamente. Para exgrados, ingrados, así como para otros parámetros, usualmente omitiremos el subíndice cuando sea claro a que digráfica se refiere.

De acuerdo a estas previas definiciones, en la digráfica D_3 de la figura 1.3 tenemos que $N_{D_3}^+(x_2) = \{x_1, x_4\}$ y $N_{D_3}^-(x_2) = \{x_1, x_3\}$, por lo que $\delta_{D_3}^+(x_2) = 2 = \delta_{D_3}^-(x_2)$. Como $\delta_{D_3}(x_6) = 0$, entonces x_6 es un vértice aislado de la digráfica D_3 . También se tiene que $\Gamma_{D_3}^+(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_4, x_7\}$ y $\Gamma_{D_3}^-(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2, x_3, x_7\}$.

Una digráfica H es una **subdigráfica** de una digráfica D si se tiene que $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(D)$. Para un subconjunto X de $V(D)$, la subdigráfica **inducida (por vértices) por X** es la digráfica $D[X] = (X, A')$, donde A' es el conjunto de flechas en $A(D)$ que cumplen con tener ambos extremos en X . Luego, en la figura 1.4 podemos observar que la digráfica H_1 es una subdigráfica inducida por el conjunto $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_7\}$

en D_3 (figura 1.3). Dada esta definición, si S es un subconjunto de $V(D)$, se define $D - S$ como la subdigráfica inducida por $V(D) - S$. Para un subconjunto A' de $A(D)$, la subdigráfica **inducida (por flechas) por A'** es la digráfica $D[A'] = (V', A')$, donde V' es el conjunto de vértices en $V(D)$ en los cuales inciden al menos una flecha de A' . De este modo, en la figura 1.5 se puede observar que la digráfica H_2 es una subdigráfica inducida por el conjunto $A_1 = \{(x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_7)\}$ en D_3 (figura 1.3).

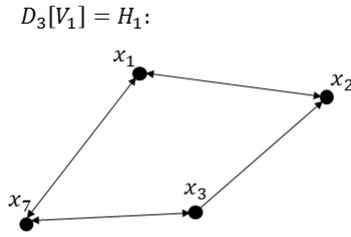


Figura 1.4: Ejemplo de una subdigráfica inducida por vértices.

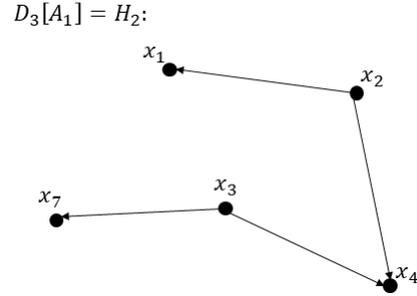
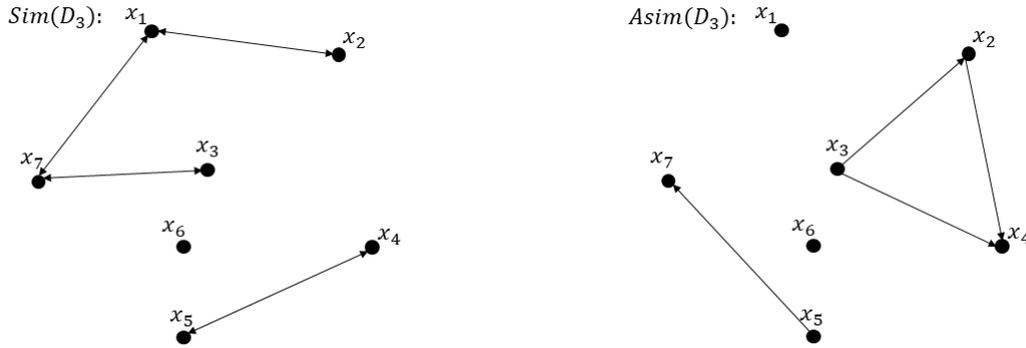


Figura 1.5: Ejemplo de una subdigráfica inducida por flechas.

Si $V(H) = V(D)$ entonces diremos que H es una **subdigráfica generadora** de D . Con esto, podemos definir las siguientes subdigráficas: $Sim(D)$ es la subdigráfica generadora de D tal que $A(Sim(D)) = \{(x, y) \in A(D) : (x, y) \text{ es una flecha simétrica}\}$ y $Asim(D)$ es la subdigráfica generadora de D tal que $A(Asim(D)) = \{(x, y) \in A(D) : (x, y) \text{ es una flecha asimétrica}\}$. Luego, en la figura 1.6 podemos observar a las digráficas $Sim(D_3)$ y $Asim(D_3)$, las cuales son ejemplos de digráficas generadoras de la digráfica D_3 (figura 1.3), como se mencionó anteriormente.

Un **camino dirigido** en D es una sucesión de vértices $W = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)$ donde se cumple que $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ para cada i en $\{0, 1, \dots, k-1\}$. De este modo, diremos que W es un camino dirigido de x_0 hacia x_k , o bien, escribiremos x_0x_k -camino dirigido. Se define la **longitud** de W como el número k . W es **cerrado** si $x_0 = x_k$, de otra manera diremos que W es **abierto**. Si W tiene todos sus vértices distintos, diremos que W es una **trayectoria dirigida**. Si los vértices x_0, x_1, \dots, x_{k-1} son distintos por parejas, con $k \geq 2$, y $x_0 = x_k$, entonces W es un **ciclo dirigido**. Ejemplos de tales definiciones las podemos observar en la figura 1.6a: en la digráfica $Sim(D_3)$ $(x_1, x_7, x_3, x_7, x_1)$ es un camino dirigido cerrado, (x_7, x_1, x_2) es una trayectoria dirigida (dado que no repite vértices) y (x_3, x_7, x_3) es un ciclo dirigido.



(a) Parte simétrica de la digráfica D_3 .

(b) Parte asimétrica de la digráfica D_3 .

Figura 1.6: Ejemplos de subdigráficas generadoras de la digráfica D_3 .

Para fines prácticos, de aquí en adelante se omitirá la palabra dirigido en la definición de camino dirigido, trayectoria dirigida y ciclo dirigido, esto se debe a que a lo largo de este escrito se trabajará en gráficas dirigidas (digráficas).

Usaremos la siguiente notación: dados $W = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ un camino y $\{x_i, x_j\}$ un subconjunto de $V(W)$, con $i < j$, el **subcamino** $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$ contenido en W se denotará por (x_i, W, x_j) . Más aún, si W es una trayectoria o un ciclo, es fácil ver que (x_i, W, x_j) es una trayectoria, si $i < j$, pues (x_i, W, x_j) no repite vértices (ni flechas); lo llamaremos **subtrayectoria** de W de x_i hacia x_j . Si dados tres vértices x, y y z tenemos un xy -camino $T_1 = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$ y un yz -camino $T_2 = (y = y_0, y_1, \dots, y_l = z)$, la unión de dichos caminos, denotada por $T_1 \cup T_2$, es el xz -camino $(x = x_0, x_1, \dots, x_k = y = y_0, y_1, \dots, y_l = z)$.

Proposición 1.1. *Si D es una digráfica y $\{x, y\}$ es un subconjunto de $V(D)$, entonces,*

1. *Todo xy -camino en D contiene una xy -trayectoria.*
2. *Todo camino cerrado en D contiene un ciclo.*

Demostración. 1. Sea $W = (x = y_0, y_1, \dots, y_k = y)$ un camino en D . Consideremos $P = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$ un xy -camino contenido en W de longitud mínima, respecto a todos los xy -caminos contenidos en W . Mostraremos que P es una xy -trayectoria. Si $x_i = x_j$ para algún $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, 1, \dots, k\}$, con $i < j$, entonces $(x_0, P, x_i) \cup (x_j, P, x_k)$ es un xy -camino contenido en W de menor longitud que P , lo cual no es posible por la elección de P . Luego, todos los vértices de P son distintos. Así P es una xy -trayectoria contenida en W .

2. Sea $W = (z_0, z_1, \dots, z_k = z_0)$ un camino cerrado. Ya que D no tiene lazos, entonces $z_k \neq z_{k-1}$. Sea $C' = (z_0, W, z_{k-1})$. Por lo visto en el párrafo anterior tenemos que C' contiene una $z_0 z_{k-1}$ -trayectoria digamos T . Luego, $T \cup (z_{k-1}, z_0)$ es un ciclo contenido en W . □

Por otra parte, diremos que una digráfica D es **acíclica** si no contiene ciclos. Un ejemplo de tal digráfica la podemos observar en la figura 1.6b. Las digráficas acíclicas son una familia de digráficas ampliamente estudiadas, en particular, una propiedad de este tipo de digráficas es la siguiente.

Proposición 1.2. *Toda digráfica acíclica contiene un vértice de exgrado cero así como un vértice de ingrado cero.*

Demostración. Sea D una digráfica acíclica. Procediendo por contradicción, supongamos que todos los vértices tienen exgrado positivo. Sea x_1 un vértice arbitrario en D . Como $\delta^+(x_1) > 0$, entonces existe un vértice x_2 tal que $(x_1, x_2) \in A(D)$. Así también, como $\delta^+(x_2) > 0$ entonces existe un vértice x_3 tal que $(x_2, x_3) \in A(D)$.

Procediendo de esta manera, construimos un camino (x_1, x_2, \dots) . Como $V(D)$ es finito, entonces existen i y k en \mathbb{N} , con i en $\{1, 2, \dots, k-1\}$, tal que $x_i = x_k$. Sea $k_1 = \min\{k : x_i = x_k \text{ para algún } i \text{ en } \{1, 2, \dots, k-1\}\}$ e i_1 en $\{1, 2, \dots, k_1-1\}$ tal que $x_{i_1} = x_{k_1}$. Notemos que i_1 es el único con esa propiedad en el conjunto $\{1, 2, \dots, k_1-1\}$, de otro modo, si existiera i'_1 en $\{1, 2, \dots, k_1-1\}$ tal que $x_{i'_1} = x_{k_1}$ entonces $x_{i'_1} = x_{i_1}$ con $i'_1 < k_1$, lo cual no es posible por la elección de k_1 . Luego, es claro que $(x_{i_1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{k_1})$ es un ciclo, lo cual no es posible pues D es acíclica. De este modo, si D es acíclica entonces existe un vértice de exgrado cero.

La demostración de que si D es acíclica entonces existe un vértice de ingrado cero, es análoga si consideramos a la digráfica D' que resulta de D al intercambiar la flecha (u, v) por la flecha (v, u) , para toda flecha (u, v) de D . □

Capítulo 2

Núcleos en digráficas

En este capítulo se introducirá el concepto de núcleo el cual tiene mucha relevancia histórica en la teoría de digráficas y otras áreas, como se mencionó en la introducción. Se demostrarán algunos resultados relacionados a la existencia de un núcleo en algunas familias de digráficas: digráficas acíclicas, digráficas simétricas. Lo anterior para comprender qué condiciones estructurales son elementales para la existencia de núcleos.

2.1. Definiciones y resultados básicos en núcleos

Para introducir el concepto de núcleo en una digráfica consideremos el siguiente juego:

Dos jugadores (A y B) colocan 10 fichas sobre una superficie. Cada jugador, en su turno, retira una o dos fichas. Gana el jugador que retire la última ficha.

De este modo nos podemos preguntar si para alguno de los jugadores es posible retirar de alguna manera específica las fichas para asegurar su victoria.

Asociemos este problema a una digráfica: pongamos un vértice con etiqueta i por cada número de fichas que puede haber sobre la mesa $(0, 1, \dots, 10)$ y coloquemos una flecha de un número i hacia un número j si es posible llegar, en un turno, de i fichas a j fichas (véase figura 2.1).

Para encontrar una posible estrategia ganadora analicemos qué debió haber pasado para que un jugador haya ganado. Claramente si alguien está en la posición 0 este sería el ganador, por lo que diremos que el 0 es una “posición ganadora”. Por lo tanto, la

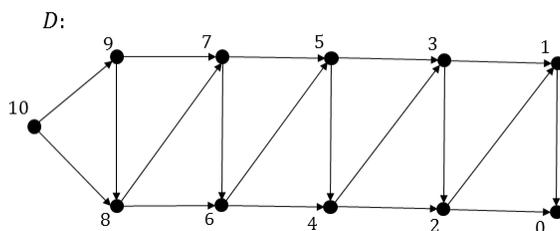


Figura 2.1: Digráfica asociada al juego de las fichas.

pregunta es ¿cómo se puede llegar a ella? Ya sea desde la posición 1 o 2. A tales posiciones las llamaremos “posiciones perdedoras”, dado que desde éstas el siguiente jugador podría ganar (de no equivocarse). Luego diremos que 3 es una posición ganadora dado que quien llegue a esta posición podrá ganar en el siguiente turno sin importar cuantas fichas retire el jugador rival. De manera general podemos decir que un vértice es una “posición ganadora” si de llegar un jugador a esa posición podría ganar el juego de jugar inteligentemente y diremos que un vértice es una “posición perdedora” si de llegar un jugador a esa posición es seguro que perderá si el rival sabe jugar inteligentemente. Siguiendo con el análisis, es fácil ver que i será una posición ganadora si el siguiente jugador llegará a una posición perdedora sin importar como juegue y también si j es una posición ganadora, entonces $j - 1, j - 2$ es una posición perdedora dado que el siguiente jugador podría llegar a una posición ganadora. Luego, los vértices en posiciones ganadoras son $X = \{0, 3, 6, 9\}$.

Hay que hacer notar que tales vértices cumplen ciertas características respecto a los que están en una posición perdedora:

1. No hay flecha entre dos vértices en X .
2. Para todo vértice en una posición perdedora hay alguna flecha a un vértice en X .

En algunos casos, en una digráfica podemos tener un conjunto de vértices con estas características, de modo que podemos introducir el siguiente concepto: diremos que un subconjunto N de $V(D)$, es un **núcleo** de D si cumple las siguientes condiciones:

1. $A(D[N]) = \emptyset$; esto es, N es un **conjunto independiente** en D .
2. Para cada z en $V(D) \setminus N$ existe una zN -flecha; esto es, N es **absorbente** en D .

Observemos la digráfica D en la figura 2.2. Afirmamos que $N = \{u_1, u_3, u_5\}$ es un núcleo para D ; en efecto, no hay una flecha entre dos vértices en N y para todo vértice en $V(D) \setminus N$ existe alguna flecha hacia un vértice de N , a saber, $(u_6, u_1), (u_4, u_5), (u_2, u_3)$.

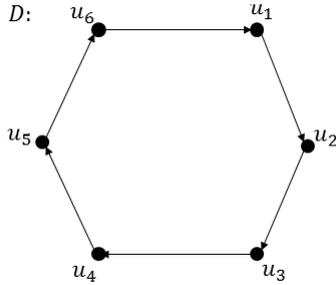


Figura 2.2: Digráfica con núcleo.

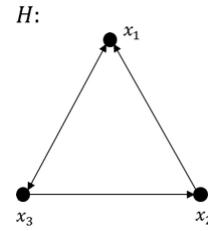


Figura 2.3: Digráfica sin núcleo.

Sin embargo, no todas las digráficas tienen núcleo y en general, determinar cuándo una digráfica tiene o no núcleo es un problema NP-completo, tal como lo demostró V. Chvátal en [7]. De hecho, en la figura 2.3 se exhibe una digráfica que no tiene núcleo; en efecto, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_3\}$ no son núcleos de D pues no son independientes y $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$ no son núcleos de D pues no son absorbentes.

Existen diversos resultados los cuales aseguran la existencia de un núcleo en ciertas familias de digráficas. Un par de estos resultados son demostrados a continuación.

Proposición 2.1. (Von Neumann [21]) *Toda digráfica acíclica tiene un núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica acíclica. Procedamos por inducción sobre la cantidad de vértices en D .

Base de inducción. Si $|V(D)| = 1$, entonces es claro que $V(D)$ es un núcleo de D .

Hipótesis de inducción. Supongamos que toda digráfica acíclica D' con menos de n vértices tiene un núcleo.

Paso inductivo. Sea D una digráfica acíclica con n vértices.

Consideremos $S = \{x \in V(D) \mid \delta_D^+(x) = 0\}$. Por proposición 1.2, $S \neq \emptyset$. Si $V(D) = S \cup \Gamma_D^-(S)$, entonces es claro que S es un núcleo de D (porque S es un conjunto independiente por definición de S y S es absorbente por definición de $\Gamma_D^-(S)$). De otro modo, consideremos $D' = D \setminus (S \cup \Gamma_D^-(S))$, la cual es una digráfica acíclica, pues D' es una subdigráfica de D ; además $|V(D')| < |V(D)| = n$. Luego, por hipótesis de inducción, D' tiene un núcleo K (véase figura 2.4).

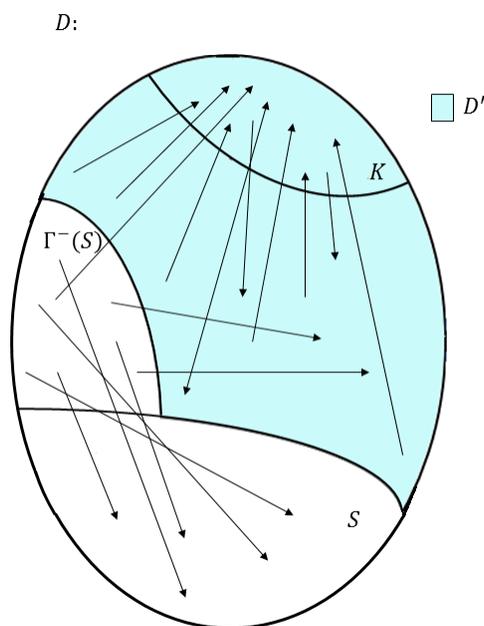


Figura 2.4

Afirmamos que $N = S \cup K$ es un núcleo para D .

Veamos que $N = S \cup K$ es independiente en D . Por contradicción, supongamos que existen x y y en N tales que $(x, y) \in A(D)$. Si x está en S , entonces $\delta_D^+(x) > 0$, lo cual no es posible por la definición de S . Además, no es posible que $\{x, y\}$ sea subconjunto de K , dado que K es núcleo de D' . Entonces, x está en K y y está en S lo que implica que $x \in \Gamma_D^-(S)$, pero esto no es posible pues $K \subseteq V(D') = V(D) \setminus (S \cup \Gamma_D^-(S))$. Por tanto, N es independiente en D .

Veamos ahora que N es absorbente en D . Sea v en $V(D) \setminus N$. Si v está en $\Gamma_D^-(S)$, entonces existe y en S tal que $(v, y) \in A(D)$; es decir, v es absorbido por un vértice de N . Ahora, si v está en $V(D') \setminus K$, al ser K núcleo de D' , existe y en K tal que $(v, y) \in A(D')$; es decir, v es absorbido por algún vértice de N .

Como N es independiente y absorbente en D , entonces $N = S \cup K$ es núcleo de D .

En cualquier caso, D tiene un núcleo, lo que termina el proceso de inducción. \square

Una digráfica D es llamada **simétrica** cuando $A(\text{Sim}(D)) = A(D)$. Respecto a esta familia de digráficas, tenemos el siguiente resultado el cual se le atribuye a C. Berge [4].

Proposición 2.2. (C. Berge [4]) *Toda digráfica simétrica tiene un núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica simétrica. Consideremos S un subconjunto independiente maximal de $V(D)$. Afirmamos que S es un núcleo de D . Veamos que S es absorbente. Sea x en $V(D) \setminus S$. Como S es un conjunto independiente maximal, entonces existe una flecha entre x y algún vértice en S (de otro modo $S \cup \{x\}$ sería un conjunto independiente con $S \subsetneq S \cup \{x\}$, contradiciendo la elección de S). Pero al ser D una digráfica simétrica, en particular existe una flecha que debe ir del vértice x hacia algún vértice en S ; esto es, S es absorbente en D . Por lo tanto, D tiene un núcleo. \square

Una digráfica D es llamada **núcleo perfecta** cuando cada subdigráfica inducida de D tiene un núcleo. En la figura 2.2 podemos observar una digráfica núcleo perfecta, esto debido a que toda subdigráfica inducida propia de D es acíclica y por la proposición 2.1, éstas tendrían un núcleo. A propósito de esta definición, tenemos el siguiente teorema el cual se atribuye a P. Duchet [9].

Teorema 2.1. (P. Duchet [9]) *Si D es una digráfica tal que todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración. Basta demostrar que la digráfica D tiene un núcleo, esto se debe a que cualquier subdigráfica inducida de D cumple con la hipótesis del teorema 2.1. Para probar esto procedamos por inducción sobre la cantidad de vértices en D .

Base de inducción. Sea D una digráfica que cumple la hipótesis del teorema 2.1, con $|V(D)| = 1$. En este caso es claro que $V(D)$ es un núcleo de D .

Hipótesis de inducción. Supongamos que toda digráfica, con menos de p vértices, en la cual todo ciclo de D tiene una flecha simétrica, tiene un núcleo.

Paso inductivo. Sea D una digráfica con p vértices tal que todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica. Podemos suponer que D tiene al menos un ciclo, de otro modo por la proposición 2.1, D tendría un núcleo.

Consideremos $S = \{v \in V(D) : \delta_{Asim(D)}^+(v) = 0\}$. Supongamos que $S = \emptyset$, entonces para todo v en $V(D)$ se tiene que el $\delta_{Asim(D)}^+(v) > 0$, y por la proposición 1.2, existe un ciclo γ contenido en $Asim(D)$, lo cual no es posible pues todo ciclo tiene una flecha simétrica. Por lo tanto, $S \neq \emptyset$.

Consideremos $H = D[S]$, la subdigráfica inducida por los vértices en S en D . Veamos que H es subdigráfica de $Sim(D)$. En efecto, pues $V(H) = S$, $S \subseteq V(D)$ y $V(D) = V(Sim(D))$. Además, si (x, y) está en $A(H)$, entonces (y, x) también está en $A(H)$, de otro modo $\delta_{Asim(D)}^+(x) > 0$, lo cual no es posible porque $x \in S$. Así, $A(H) \subseteq A(Sim(D))$. Luego, por la proposición 2.2, se tiene que H tiene un núcleo N_0 .

Si $V(D) = N_0 \cup \Gamma_D^-(N_0)$, entonces es claro que N_0 es un núcleo para D . De otro modo, consideremos $D' = D \setminus (N_0 \cup \Gamma_D^-(N_0))$, la cual es una digráfica con menos de p vértices que cumple con tener una flecha simétrica en cada ciclo de D' , pues D' es subdigráfica de D . Luego, por la hipótesis de inducción, se tiene que D' tiene un núcleo N_1 (véase figura 2.5).

Afirmamos que $N = N_0 \cup N_1$ es un núcleo de D .

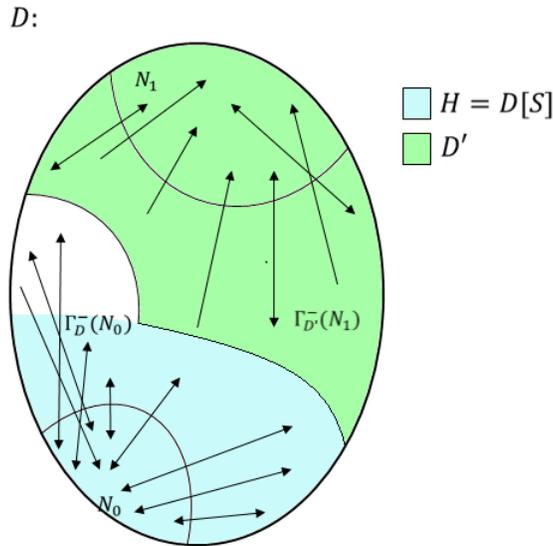


Figura 2.5

1. Veamos que N es un conjunto absorbente en D . Sea v en $V(D) \setminus N$. Notemos que $\{N_0, \Gamma_D^-(N_0), N_1, \Gamma_{D'}^-(N_1)\}$ es una partición de $V(D)$, por lo que basta analizar estos casos.
 - Si v está en $\Gamma_D^-(N_0)$, entonces existe u en N_0 tal que $(v, u) \in A(D)$.
 - Si v está en $\Gamma_{D'}^-(N_1)$, entonces existe u en N_1 tal que $(v, u) \in A(D')$.

Como en ambos casos $u \in N$, entonces N es un conjunto absorbente en D .

2. Veamos que N es un conjunto independiente en D .

Como N_0 y N_1 son independientes al ser núcleos de H y de D' , respectivamente, entonces basta ver que no existen N_0N_1 -flechas ni N_1N_0 -flechas en D .

- No existe una N_1N_0 -flecha en D , de lo contrario existirían u en N_0 y v en N_1 tal que $(v, u) \in A(D)$, entonces $v \in \Gamma_D^-(N_0)$. Pero N_1 está contenido en $V(D') = V(D) \setminus (N_0 \cup \Gamma_D^-(N_0))$, entonces $v \notin \Gamma_D^-(N_0)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe una N_1N_0 -flecha en D .
- Supongamos que existe una N_0N_1 -flecha en D , de este modo existen u en N_0 y v en N_1 tal que $(u, v) \in A(D)$. Como u está en $N_0 \subseteq S = V(H)$, entonces $\delta_{Asim(D)}^+(u) = 0$, por lo que (v, u) está en $A(D)$, pero esto no es posible por el subcaso anterior. Por lo tanto, no existen N_0N_1 -flechas en D .

Así, N es un conjunto independiente en D .

De (1) y (2), concluimos que $N = N_0 \cup N_1$ es un núcleo de D , lo que termina el proceso de inducción. \square

Capítulo 3

Digráficas m -coloreadas

En la primera sección de este capítulo se dan conceptos relevantes como digráfica m -coloreada, camino monocromático, trayectoria monocromática y ciclo monocromático, cada definición viene acompañada de un ejemplo para su mayor comprensión. Así mismo, se introducen dos digráficas asociadas: la cerradura de una digráfica D ($\mathcal{C}(D)$) y la digráfica de clases de color ($\mathcal{C}_C(D)$); ambas digráficas asociadas son de suma importancia pues la primera contiene a la digráfica original como subdigráfica y la segunda exhibe como se ligan los colores en la digráfica original.

En la segunda sección se introduce el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas, el cual resulta ser una generalización del concepto de núcleo (véase capítulo 2) y será de vital importancia para los capítulos 4 y 5.

3.1. Definiciones y resultados básicos en digráficas m -coloreadas

Sea D una digráfica arbitraria. Una **m -coloración por flechas de D** es una función $c : A(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, donde $\{1, 2, \dots, m\}$ es el **conjunto de colores** con el cual se colorean las flechas de D , de modo que si a está en $A(D)$, el **color** de a es $c_D(a)$, o bien, cuando se sobreentienda a que digráfica nos estamos refiriendo, simplemente escribiremos $c(a)$. Si D tiene asociada una m -coloración por flechas diremos que D es una **digráfica m -coloreada**. En la figura 3.1 podemos observar un ejemplo de una digráfica 3-coloreada.

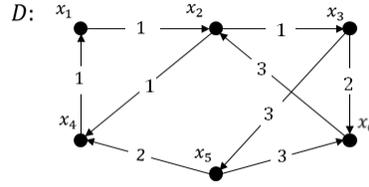


Figura 3.1: Ejemplo de una digráfica 3-coloreada.

Una trayectoria (camino, ciclo) α será llamado **trayectoria monocromática** (**camino monocromático**, **ciclo monocromático**) si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color, en cuyo caso nos referiremos por $c_D(\alpha)$ al único color representado en las flechas de α , o bien, cuando se sobreentienda a que digráfica nos estamos refiriendo, simplemente escribiremos $c(\alpha)$. En la digráfica D (figura 3.1), tenemos que $(x_2, x_4, x_1, x_2, x_3)$ es un camino monocromático en D de color 1, (x_3, x_5, x_6, x_2) es una trayectoria monocromática en D de color 3 y (x_2, x_4, x_1, x_2) es un ciclo monocromático en D de color 1. También diremos que una trayectoria (ciclo) P en D es una **trayectoria arcoíris** (**ciclo arcoíris**) si cada par de flechas en P tienen distinto color. En particular si la longitud de la trayectoria arcoíris (del ciclo arcoíris) es 3 diremos que es un \vec{P}_3 arcoíris (**triángulo arcoíris**). En la digráfica D (figura 3.1), tenemos que (x_3, x_5, x_4, x_1) es un \vec{P}_3 arcoíris y (x_3, x_6, x_2, x_3) es un triángulo arcoíris.

De manera similar a la proposición 1.1, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Si D es una digráfica m -coloreada y $\{x, y\}$ es un subconjunto de $V(D)$, entonces,*

1. *Todo xy -camino monocromático en D contiene una xy -trayectoria monocromática.*
2. *Todo camino cerrado monocromático contiene un ciclo monocromático.*

Demostración. 1. Sea $P = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$ un xy -camino monocromático en D , en particular, P es un xy -camino en D , así por la proposición 1.1, P contiene una xy -trayectoria T en D . Como $A(T) \subseteq A(P)$ y P es un xy -camino monocromático, entonces T es una xy -trayectoria monocromática contenida en P .

2. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_k = x_0)$ un camino cerrado monocromático en D , en particular, C es un camino cerrado en D , así por la proposición 1.1, C contiene un ciclo γ en D . Como $A(\gamma) \subseteq A(C)$ y C es un camino cerrado monocromático, entonces γ es un ciclo monocromático contenido en C .

□

La **cerradura** de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$, es la multidigráfica m -coloreada definida como sigue: $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ y $A(\mathcal{C}(D)) = A(D) \cup \{(u, v) \text{ de color } i : \text{ existe una } uv\text{-trayectoria monocromática de color } i \text{ en } D\}$. Dicho concepto fue introducido inicialmente por Hortensia Galeana Sánchez en [10]. En la figura 3.2 podemos observar la cerradura de la digráfica D .

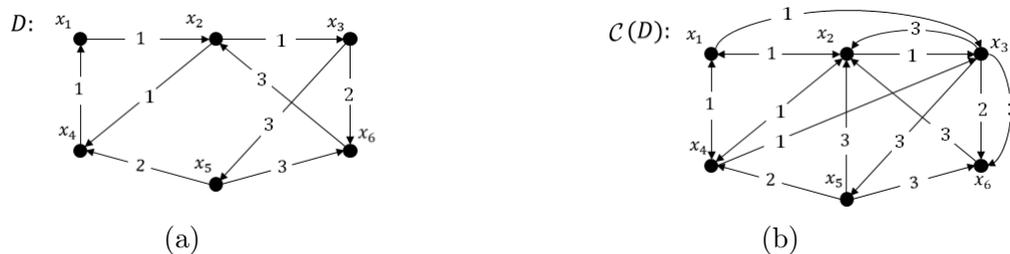


Figura 3.2: Cerradura de la digráfica D .

De la definición de cerradura de una digráfica tenemos las siguientes observaciones.

Observación 3.1. *Para cualesquiera x y y en $V(\mathcal{C}(D))$ tales que $(x, y) \in A(\mathcal{C}(D))$ se tiene que existe una xy -trayectoria monocromática de color $c_{\mathcal{C}(D)}(x, y)$ en D .*

Esto se sigue de la definición de $\mathcal{C}(D)$, pues si (x, y) está en $A(\mathcal{C}(D))$ es porque (x, y) está en $A(D)$ (en cuyo caso (x, y) es la trayectoria monocromática buscada) o bien existe una xy -trayectoria monocromática de color $c_{\mathcal{C}(D)}(x, y)$ en D .

Observación 3.2. $A(D) \subseteq A(\mathcal{C}(D))$.

Proposición 3.2. (H. Galeana Sánchez [11]) *Sea D una digráfica m -coloreada, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$.*

Demostración. Primero notemos que por definición $V(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) = V(\mathcal{C}(D))$. Sólo falta probar que $A(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) = A(\mathcal{C}(D))$. De la observación 3.2 tenemos que $A(\mathcal{C}(D)) \subseteq A(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$, por lo que sólo resta probar que $A(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) \subseteq A(\mathcal{C}(D))$. Sea (u, v) en $A(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$ de color l . De la observación 3.1 se tiene que existe una uv -trayectoria monocromática de color l en $\mathcal{C}(D)$, digamos $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$. De nuevo por la observación 3.1 tenemos que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática T_i de color l en D . Luego, $T = \bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un uv -camino monocromático de color l en D el cual contiene una uv -trayectoria monocromática de color l (proposición 3.1). Por lo tanto, (u, v) está en $A(\mathcal{C}(D))$. Así $A(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) = A(\mathcal{C}(D))$, lo que implica que $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$. \square

Otra digráfica asociada a una digráfica m -coloreada es la **digráfica de clases de color**, la cual fue introducida por Hortensia Galeana Sánchez en [12]. Dada una digráfica m -coloreada, se define la digráfica de clases de color, denotada por $\mathcal{C}_C(D)$, como sigue:

- $V(\mathcal{C}_C(D))$ es el conjunto de todos los colores representados en las flechas de D .
- $(i, j) \in A(\mathcal{C}_C(D))$ si y sólo si existen dos flechas de D , a saber (u, v) de color i y (v, w) de color j .

Notemos que $\mathcal{C}_C(D)$ puede tener lazos. Dicha digráfica asociada es de vital importancia pues guarda información sobre que transiciones de colores son observadas en la digráfica original. En la figura 3.3 podemos observar la digráfica de clases de color de una digráfica D .

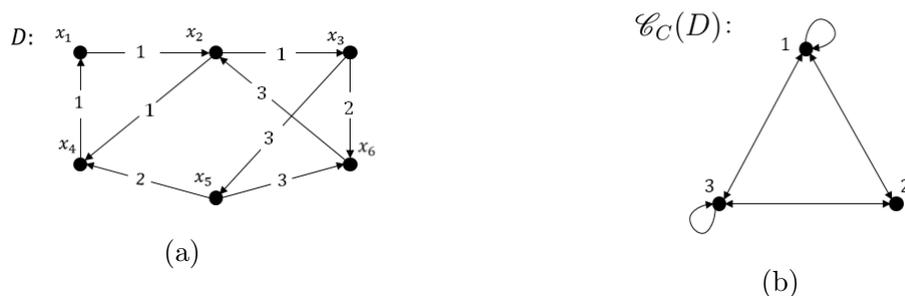


Figura 3.3: Digráfica de clases de color de la digráfica D .

3.2. Definiciones y resultados básicos en núcleos en digráficas m -coloreadas

Sea D una digráfica m -coloreada, diremos que un subconjunto N de $V(D)$ es un **núcleo por trayectorias monocromáticas** de D si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cada par de vértices distintos u y v en N , no existe una trayectoria monocromática entre ellos; esto es, N es **independiente por trayectorias monocromáticas** en D .
2. Para cada x en $V(D) \setminus N$ existe y en N tal que hay una xy -trayectoria monocromática; esto es, N es **absorbente por trayectorias monocromáticas** en D .

En la figura 3.4 tenemos una digráfica en la cual es claro que $\{y_3, y_4\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de H , pues no existe una trayectoria monocromática entre y_3 y y_4 , y (y_5, y_1, y_2, y_4) es una trayectoria monocromática (de color 2) que termina en y_4 y contiene a todos los vértices en $V(H) \setminus \{y_3, y_4\}$.

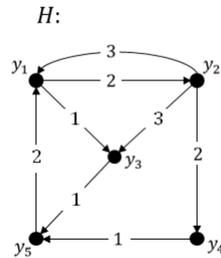


Figura 3.4

De esta última definición notemos lo siguiente:

Observación 3.3. *Dada una digráfica D consideremos una m -coloración asociada a D , de modo que cualesquiera dos flechas distintas tendrán color diferente. De este modo, las únicas trayectorias monocromáticas en D serán las inducidas por cada flecha de D , por lo que si un subconjunto N de $V(D)$, es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D , entonces N es un núcleo de D . Luego, el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica m -coloreada es una generalización del concepto de núcleo de una digráfica.*

Más aún, las definiciones de núcleo de una digráfica y núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica m -coloreada se relacionan gracias al siguiente resultado.

Proposición 3.3. *(H. Galeana Sánchez [11]) Sean D una digráfica m -coloreada y N un subconjunto de $V(D)$. N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.*

Demostración. Recordando la definición de $\mathcal{C}(D)$ y la observación 3.1 tenemos, respectivamente, que:

- Si existe una xy -trayectoria monocromática en D , entonces (x, y) forma parte de las flechas de $\mathcal{C}(D)$.
- Si (x, y) es una flecha de $\mathcal{C}(D)$, entonces existe una xy -trayectoria monocromática en D .

Luego es claro que:

- N es independiente en $\mathcal{C}(D)$ si y sólo si N es independiente por trayectorias monocromáticas en D .
- N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$ si y sólo si N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D .

De modo que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$ si y sólo si N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . \square

Un teorema clásico en cuanto a la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas fue probado en 1982 por Sands, Sauer y Woodrow [20]. Este resultado, en particular, afirma lo siguiente:

Teorema 3.1. *(Sands, Sauer y Woodrow [20]) Toda digráfica finita 2-coloreada tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Cabe mencionar que el teorema anterior fue demostrado para digráficas posiblemente infinitas añadiendo la hipótesis de que la digráfica no tenga trayectorias infinitas exteriores monocromáticas (donde una trayectoria infinita exterior en una digráfica de orden infinito, es una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vértices distintos de D tal que para cada i en \mathbb{N} , $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$).

Capítulo 4

Ciclos monocromáticos y trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por flechas

En este capítulo se hace un análisis del artículo *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-coloured digraphs* escrito por Hortensia Galeana Sánchez, Guadalupe Gaytán Gómez y Rocío Rojas Monroy en [13]. En tal artículo, se dan condiciones suficientes para la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas. Para esto consideran una partición $\{C_1, C_2\}$ del conjunto de colores de D y trabajan con dos subdigráficas generadoras de D , a saber D_i , de modo que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c_D(a) \in C_i\}$. Entonces, estudian condiciones sobre D_1 y D_2 .

De este modo, el resultado principal de este capítulo (teorema 4.2) afirma lo siguiente:

Sea D una digráfica m -coloreada. Supongamos que:

1. Para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo contenido en D_i es monocromático.
2. $\mathcal{C}(D)$ no contiene ni triángulos arcoíris ni P_3 arcoíris que utilicen colores tanto de C_1 como de C_2 .

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Para mayor comprensión de las técnicas utilizadas a lo largo de este capítulo, se ejemplifica el proceso mediante una digráfica explícita.

4.1. Definiciones y primeros resultados

Los siguientes lemas son sobre digráficas m -coloreadas en las cuales cada ciclo es monocromático. Un ejemplo de una digráfica que cumple esto lo podemos observar en la figura 4.1 (pues tal digráfica no tiene ciclos, en particular, no tiene ciclos monocromáticos), siendo $C = \{1, 2, 3\}$ el conjunto de colores de D . Esta digráfica la usaremos de ejemplo a lo largo de este capítulo.

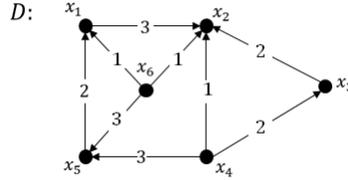


Figura 4.1: Ejemplo de una digráfica 3-coloreada en el que cada ciclo es monocromático.

Lema 4.1. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que cada ciclo en D es monocromático. Si $C = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión de $n \geq 2$ vértices, distintos por parejas, tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D , digamos T_i , entonces el conjunto de trayectorias $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$ es monocromático, es decir, las trayectorias T_i son del mismo color por parejas (los índices de los vértices son tomados módulo n).*

Demostración. Procediendo por contradicción, consideremos $\mathcal{L} = \{C_l = (x_0, x_1, \dots, x_l) : \text{existe } l \text{ en } \mathbb{N} \text{ de modo que } C_l \text{ es una sucesión de } l \geq 2 \text{ vértices distintos por parejas que cumple las hipótesis del lema 4.1 y } \bigcup_{i=0}^{l-1} T_i \text{ no es monocromática}\}$ el cual es distinto del vacío de nuestro supuesto. Sea $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ en \mathcal{L} de modo que $\ell(\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i)$ es mínima. Como el conjunto de trayectorias $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$ no es monocromático, entonces $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ no es un ciclo, de otro modo contradeciría la hipótesis del lema 4.1; además las trayectorias T_i no forman un ciclo por si mismas. Luego existe $\{i, j\}$ subconjunto de $\{0, 1, \dots, n-1\}$, $i < j$, tal que $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$. Sea v en $V(T_i) \cap V(T_j)$ (si $j = i+1$ entonces es posible elegir $v \neq u_{i+1}$). Consideremos $\gamma_1 = (v, T_i, v_{i+1}) \cup T_{i+1} \cup \dots \cup T_{j-1} \cup (v_j, T_j, v)$ y $\gamma_2 = (v, T_j, v_{j+1}) \cup T_{j+1} \cup \dots \cup T_{n-1} \cup T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{i-1} \cup (v_i, T_i, v)$, de modo que $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ (véase figura 4.2). Como $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ no es monocromático entonces γ_1 o γ_2 no es monocromático. Supongamos sin pérdida de generalidad que γ_1 no es monocromático, así $(v, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j)$ es una sucesión en \mathcal{L} donde $\ell(\gamma_1)$ es menor que $\ell(\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i)$ (pues γ_1 es subdigráfica propia de $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$), lo cual es una contradicción por la elección de $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. \square

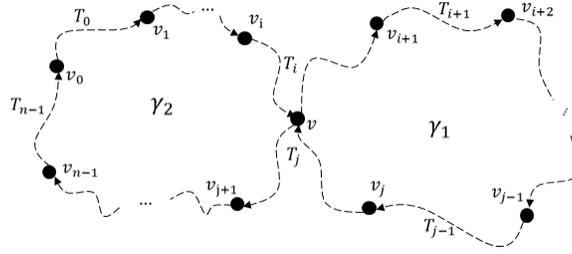


Figura 4.2

Como resultado directo del lema 4.1, tenemos los siguientes resultados:

Lema 4.2. *Si D es una digráfica m -coloreada tal que cada ciclo es monocromático, entonces en $\mathcal{C}(D)$ cada ciclo es monocromático.*

Demostración. Consideremos $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ un ciclo en $\mathcal{C}(D)$. Por la observación 3.1 tenemos que $S = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión la cual cumple las hipótesis del lema 4.1, siendo T_i una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática de color $c_{\mathcal{C}(D)}(x_i, x_{i+1})$ para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ (donde los índices son tomados módulo n). De este modo se tiene que el conjunto de trayectorias $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$ es monocromático; como las trayectorias T_i eran de color $c_{\mathcal{C}(D)}(x_i, x_{i+1})$ para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$, se sigue que el ciclo γ es monocromático. El ciclo γ fue elegido de forma arbitraria por lo que cada ciclo en $\mathcal{C}(D)$ es monocromático. \square

Lema 4.3. *Si D es una digráfica m -coloreada tal que cada ciclo es monocromático, entonces en $\mathcal{C}(D)$ cada ciclo es simétrico.*

Demostración. Como se vió en la proposición 3.2, $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$, este hecho nos será útil. Sea $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ un ciclo en $\mathcal{C}(D)$, el cual es monocromático por el lema 4.2. Ahora, notemos que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ se tiene que $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n, x_0, x_1, \dots, x_i)$ es una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática (donde los índices son tomados módulo n). De este modo, para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ se cumple que $(x_{i+1}, x_i) \in A(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$, pero como $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$, entonces tenemos que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ se cumple que $(x_{i+1}, x_i) \in A(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto, γ es simétrico en $\mathcal{C}(D)$. El ciclo γ fue elegido de forma arbitraria por lo que cada ciclo en $\mathcal{C}(D)$ es simétrico. \square

Definición 4.1. Sea D una digráfica m -coloreada. Un subconjunto S de $V(D)$ es un **seminúcleo por trayectorias monocromáticas** de D si se cumplen las siguientes condiciones:

1. S es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas.
2. Para cada z en $V(D) \setminus S$, si existe una Sz -trayectoria monocromática en D , entonces existe una zS -trayectoria monocromática en D .

Observación 4.1. Si D es una digráfica m -coloreada, entonces el conjunto vacío es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D .

Dada la definición anterior, podemos notar que en la digráfica D de la figura 4.3, el conjunto $\{x_2\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D , pues es independiente por trayectorias monocromáticas al ser un conjunto con un único vértice y $\delta_D^+(x_2) = 0$. En general se tiene el siguiente resultado.

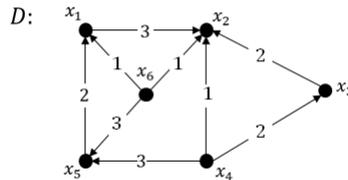


Figura 4.3

Lema 4.4. Sea D una digráfica m -coloreada tal que cada ciclo en D es monocromático. Entonces existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D .

Demostración. Supongamos, por contradicción, que D es una digráfica como en la hipótesis y que no existe un vértice x_0 que satisfice la afirmación del lema 4.4, es decir, para todo x en $V(D)$ existe y en $V(D) \setminus \{x\}$ tal que existe una xy -trayectoria monocromática en D y no existe una yx -trayectoria monocromática en D .

Sea x_0 en $V(D)$, entonces por la suposición existe x_1 en $V(D) \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1 -trayectoria monocromática en D y no existe una x_1x_0 -trayectoria monocromática en D . De nuevo, por nuestra suposición, existe x_2 en $V(D) \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2 -trayectoria monocromática en D y no existe una x_2x_1 -trayectoria monocromática en D .

Si ya tenemos elegidos a x_0, x_1, \dots, x_n , sabemos que existe x_{n+1} en $V(D) \setminus \{x_n\}$ tal que existe una $x_n x_{n+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{n+1} x_n$ -trayectoria monocromática en D . Continuando de esta manera, construimos una sucesión $S = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ de vértices de D tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, con $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = x_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i'_0} = x_{j_0}$, entonces $x_{i'_0} = x_{i_0}$, con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ de $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $x_l \neq x_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $x_l = x_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D (donde los índices son tomados módulo n). Por construcción, tenemos que $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ es un ciclo en $\mathcal{C}(D)$ el cual es asimétrico, lo cual no es posible pues en el lema 4.3 se demostró que $Asim(\mathcal{C}(D))$ no tiene ciclos.

Por lo tanto, existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D . \square

4.2. Sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas

Definición 4.2. Sean D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D . Decimos que un subconjunto S de $V(D)$ es un **seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo H** de D si S es independiente por trayectorias monocromáticas y para cada z en $V(D) \setminus S$, si existe una Sz -trayectoria monocromática contenida en $D \setminus H$, entonces existe una zS -trayectoria monocromática contenida en D , donde $D \setminus H$ es la subdigráfica generadora de D de modo que $A(D \setminus H) = A(D) \setminus A(H)$

Observación 4.2. Si D es una digráfica m -coloreada, entonces el conjunto vacío es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo H de D .

Dada la definición anterior, podemos notar que en la digráfica D de la Figura 4.4, el conjunto $\{x_3, x_5\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D , pues no existe una trayectoria monocromática entre los vértices x_3 y x_5 en D y $\delta_{D_1}^+(x_3) = 0 = \delta_{D_1}^+(x_5)$, donde $D_1 = D_2 \setminus D_2$. Más aún, todos los seminúcleos por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D son los siguientes: $\emptyset, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_5\}$.

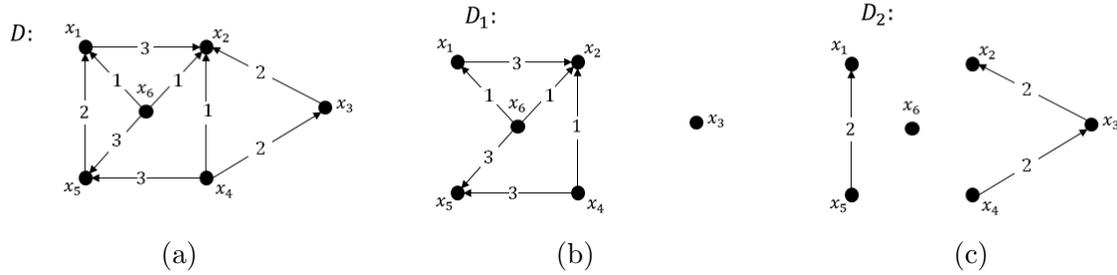


Figura 4.4

En general, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.5. *Sean D una digráfica m -coloreada y H una subdigráfica de D de modo que cada ciclo dirigido contenido en $D \setminus H$ es monocromático. Entonces existe x_0 en $V(D)$ el cual cumple con ser un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo H de D .*

Demostración. Notemos que para $D \setminus H$, subdigráfica de D , se cumple que para cada ciclo dirigido contenido en $D \setminus H$ es monocromático. Luego, por el lema 4.4, existe x_0 en $V(D \setminus H) = V(D)$ tal que para cada z en $V((D \setminus H) \setminus \{x_0\}) = V(D) \setminus \{x_0\}$ si existe una x_0z -trayectoria monocromática contenida en $D \setminus H$, entonces existe una zx_0 -trayectoria monocromática contenida en $D \setminus H \subseteq D$. Así, de la definición de seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo H de D , se tiene que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo H de D . \square

Sea D una digráfica m -coloreada. De ahora en adelante, $\{C_1, C_2\}$ será una partición de C , donde C es el conjunto de colores utilizados en las flechas de D , y D_i la subdigráfica generadora de D tal que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}$. Notemos que $D_1 \cup D_2 = D$.

Dada la digráfica D de la figura 4.4a consideremos la partición del conjunto de colores dada por $\{C_1 = \{1, 3\}, C_2 = \{2\}\}$, de este modo en las figuras 4.4b y 4.4c podemos observar las subdigráficas generadoras respectivas D_1 y D_2 .

Consideremos al conjunto $\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) : S \text{ es un seminúcleo no vacío por trayectorias monocromáticas módulo } D_2 \text{ de } D\}$.

Cuando $\mathcal{S} \neq \emptyset$, denotaremos por $D_{\mathcal{S}}$ a la digráfica definida como sigue: $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ (es decir, por cada elemento de \mathcal{S} colocamos un vértice en $D_{\mathcal{S}}$) y $(S_1, S_2) \in A(D_{\mathcal{S}})$, $S_1 \neq S_2$, si y sólo si para cada s_1 en S_1 existe s_2 en S_2 tal que $s_1 = s_2$ o hay una $s_1 s_2$ -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una $s_2 s_1$ -trayectoria monocromática contenida en D .

De lo dicho anteriormente, en la digráfica D de la figura 4.4 se tiene que, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, más aún $\mathcal{S} = \{\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_5\}\}$, por lo cual existe la digráfica $D_{\mathcal{S}}$. De hecho, en la figura 4.5 se exhibe tal digráfica asociada, donde notemos que $(\{x_3, x_5\}, \{x_2, x_5\})$ está en $A(D_{\mathcal{S}})$ pues existe una $x_3 x_2$ -trayectoria monocromática en D_2 y no existe una $x_2 x_3$ -trayectoria monocromática en D , además x_5 está en $\{x_2, x_5\}$ y en $\{x_3, x_5\}$. Así se puede justificar con cada flecha en $D_{\mathcal{S}}$ observando directamente la digráfica D_2 de la figura 4.4.

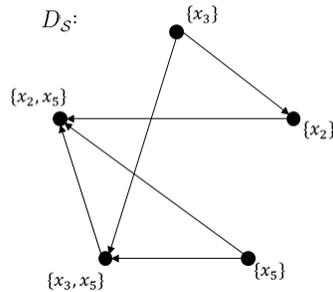


Figura 4.5: Digráfica asociada $D_{\mathcal{S}}$ de la digráfica D de la Figura 4.4.

Notemos que la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ de la figura 4.5 es acíclica. Veamos que eso se cumple en general.

Lema 4.6. *Sea D una digráfica m -coloreada. Si para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo contenido en D_i es monocromático, entonces $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica acíclica.*

Demostración. Primero observemos que por el lema 4.5, existe un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D , así $\mathcal{S} \neq \emptyset$, por lo que podemos considerar la digráfica $D_{\mathcal{S}}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que D_S contiene un ciclo, digamos $C = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_0)$ de longitud $n \geq 2$. Ya que C es un ciclo en D_S , tenemos que $S_i \neq S_j$ cuando $i \neq j$.

Afirmación 1. Existe i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} , $z \notin S_{i_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

De otra manera, para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y para cada z en S_i tenemos que $z \in S_{i+1}$, así $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0$, de modo que para cada l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $S_0 \subseteq S_l \subseteq S_0$, lo que implica que $S_i = S_j$ para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, con $i \neq j$. Así, $C = (S_0)$, lo cual es una contradicción pues la longitud de un ciclo es al menos 2.

Afirmación 2. Si existe i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} y algún w en S_{i_0+1} existe una zw -trayectoria monocromática en D , entonces existe j_0 en $\{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i_0\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$. Primero observemos que w no es elemento de $S_n = S_0$, de otra manera tendríamos una zw -trayectoria monocromática en D con $\{z, w\}$ subconjunto de S_0 , lo cual es una contradicción pues S_0 es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas. Como w está en S_1 , entonces podemos definir $j_0 = \max\{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : w \in S_i\}$. Así, $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

Ahora, de la afirmación 1 tenemos que existen i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y t_0 en S_{i_0} tales que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Pero como $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in A(D_S)$, entonces existe t_1 en S_{i_0+1} tal que hay una t_0t_1 -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una t_1t_0 -trayectoria monocromática contenida en D . De la afirmación 2, tenemos que existe i_1 en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1}$. Ya que $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in A(D_S)$, tenemos que existe t_2 en S_{i_1+1} tal que hay una t_1t_2 -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una t_2t_1 -trayectoria monocromática contenida en D . Si ya tenemos elegidos t_0, t_1, \dots, t_m , tenemos de la afirmación 2 que existe un índice i_m en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_m \in S_{i_m}$ y $t_m \notin S_{i_m+1}$ y dado que $(S_{i_m}, S_{i_m+1}) \in A(D_S)$, se sigue que existe t_{m+1} en S_{i_m+1} tal que hay una t_mt_{m+1} -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una $t_{m+1}t_m$ -trayectoria monocromática contenida en D . Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de vértices (t_0, t_1, t_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una t_it_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no existe una $t_{i+1}t_i$ -trayectoria monocromática en D .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, con $i < j$, tal que $t_i = t_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : t_j = t_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $t_{i_0} = t_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $t_{i'_0} = t_{j_0}$, entonces $t_{i'_0} = t_{i_0}$, con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ de $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $t_l \neq t_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $t_l = t_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una $t_i t_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $t_{i+1} t_i$ -trayectoria monocromática en D (donde los índices son tomados módulo n). Por construcción, tenemos que $\gamma = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_0)$ es un ciclo en $\mathcal{C}(D)$ el cual es asimétrico, lo cual no es posible pues en el lema 4.3 se demostró que $\text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ no tiene ciclos.

Por lo tanto D_S es una digráfica acíclica. □

El siguiente teorema es un caso particular del resultado principal de esta sección.

Teorema 4.1. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que cada ciclo en D es monocromático, entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Del lema 4.3 tenemos que cada ciclo en $\mathcal{C}(D)$ es simétrico. De este modo, la digráfica $\mathcal{C}(D)$ cumple las hipótesis del teorema 2.1, por lo que $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta. Así, $\mathcal{C}(D)$ tiene un núcleo, luego por la proposición 3.3 la digráfica D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. □

Teorema 4.2. *Sea D una digráfica m -coloreada. Supongamos que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en D_i es monocromático.*
2. *$\mathcal{C}(D)$ no contiene ni triángulos arcoíris ni P_3 arcoíris que utilicen colores tanto de C_1 como de C_2 .*

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Consideremos a la digráfica D_S . Ya que D_S es una digráfica finita y D_S es acíclica (lema 4.6), entonces D_S contiene al menos un vértice de exgrado cero (por la proposición 1.2). Sea $S \in V(D_S)$ tal que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$.

Probaremos por contradicción que S es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Supongamos que S no es un núcleo por trayectorias monocromáticas, entonces S no es absorbente por trayectorias monocromáticas (S es independiente por trayectorias monocromáticas, pues $S \in V(D_S)$). Sea $X = \{z \in V(D) \setminus S : \text{no existe una } zS\text{-trayectoria monocromática en } D\}$. De nuestro supuesto $X \neq \emptyset$.

Afirmación 1. Existe x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$, si existe una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 , entonces existe una zx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Por contradicción supongamos que para todo x en X existe y en $X \setminus \{x\}$ tal que existe una xy -trayectoria monocromática contenida en $D_1 \subseteq D$ y no existe una yx -trayectoria monocromática en D_1 .

Sea x_0 en X , entonces existe x_1 en $X \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1 -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una x_1x_0 -trayectoria monocromática en D_1 . De nuestra suposición, existe x_2 en $X \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2 -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una x_2x_1 -trayectoria monocromática contenida en D_1 . Si ya tenemos elegidos x_0, x_1, \dots, x_i sabemos que existe x_{i+1} en $X \setminus \{x_i\}$ tal que existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria monocromática en D_1 . Continuando de esta manera construimos una sucesión (x_0, x_1, x_2, \dots) de vértices en X tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = x_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i'_0} = x_{j_0}$, entonces $x_{i'_0} = x_{i_0}$, con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ contenido en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $x_l \neq x_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $x_l = x_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática en D_1 y no existe una $t_{i+1}t_i$ -trayectoria monocromática en D_1 (donde los índices son tomados módulo n).

Por construcción, tenemos que $\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ es un ciclo en $\mathcal{C}(D)$ el cual es asimétrico, lo cual no es posible pues en el lema 4.3 se demostró que $Asim(\mathcal{C}(D))$ no tiene ciclos.

Por lo tanto, existe x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$, si existe una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 , entonces existe una zx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Sea $T = \{z \in S : \text{no hay una } zx_0\text{-trayectoria monocromática en } D_2\}$. De la definición de T , tenemos que para cada z en $S \setminus T$ existe una zx_0 -trayectoria monocromática en D_2 . Recordemos que cada trayectoria monocromática está contenida en D_1 o D_2 .

Afirmación 2. $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas.

- T es independiente por trayectorias monocromáticas, pues $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$.
- No hay Tx_0 -trayectorias monocromáticas contenidas en D . De otro modo, por la definición de T , tal trayectoria debería estar contenida en D_1 . Ya que T está contenido en S y S es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas no vacío módulo D_2 de D , entonces hay una x_0S -trayectoria monocromática en D , lo cual contradice la definición de X .
- De la definición de X no hay x_0S -trayectorias monocromáticas en D , en particular no hay x_0T -trayectorias monocromáticas.

Así, $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Afirmación 3. Para cada z en $[V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})]$ si existe una $(T \cup \{x_0\})z$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 , entonces existe una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D .

Sea z en $V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})$ tal que existe una $(T \cup \{x_0\})z$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Tenemos dos casos:

Caso 1. Existe una Tz -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Por contradicción supongamos que no existe una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D . Ya que T está contenido en S y S en un seminúcleo por trayectorias monocromáticas no vacío módulo D_2 de D , entonces existe una zS -trayectoria monocromática contenida en D . Así, $z \notin S \cup X$. Tenemos que tal trayectoria va de z hacia $S \setminus T$ pues no hay $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D . Sea α_1 una uz -trayectoria monocromática contenida en D_1 (donde u es un vértice en T) y sea α_2 una zw -trayectoria monocromática contenida en D con w en $S \setminus T$. Como w está en $S \setminus T$, entonces la definición de T implica que hay una wx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_2 , digamos α_3 (véase figura 4.6).

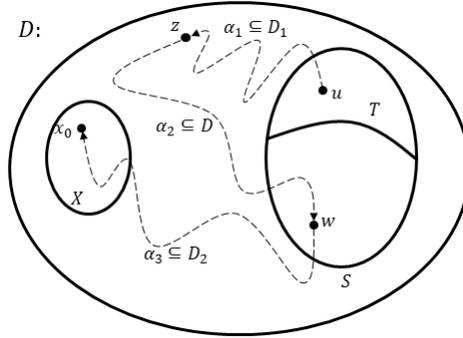


Figura 4.6: Caso 1.

Si $c(\alpha_1) = c(\alpha_2)$, entonces α_2 está contenido en D_1 , por lo que $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contiene una uw -trayectoria monocromática, lo cual es una contradicción pues $\{u, w\} \subseteq S$ y S es independiente por trayectorias monocromáticas. Entonces, $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_2)$. Además $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_3)$, pues α_1 está contenido en D_1 y α_3 está contenido en D_2 . Podemos asumir que $c(\alpha_2) \neq c(\alpha_3)$, de lo contrario α_2 está contenido en D_2 y $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0 -trayectoria monocromática, la cual es una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática, lo cual no es posible.

De este modo, tenemos que (u, z, w, x_0) es un P_3 arcoíris en $\mathcal{C}(D)$ el cual utiliza colores tanto de C_1 como de C_2 , lo cual no es posible por las hipótesis del teorema.

Así podemos concluir que hay una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D .

Caso 2. Existe una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Por contradicción supongamos que no existe una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D . Sea α_1 una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 . Si z estuviera en X , entonces de la afirmación 1 existiría una zx_0 -trayectoria monocromática en D_1 , lo cual no es posible, luego $z \notin X$ por definición de X y el hecho de que $x_0 \in X$. Entonces z no está en $X \cup S$. Luego, la definición de X implica que existe una zS -trayectoria monocromática contenida en D , digamos α_2 . Supongamos que α_2 termina en w . Si w está en T , entonces α_2 es una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática contenida en D , lo cual no es posible, por lo que w está en $S \setminus T$. Luego, de la definición de T , existe una wx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_2 , llamemos a tal trayectoria α_3 (véase figura 4.7).

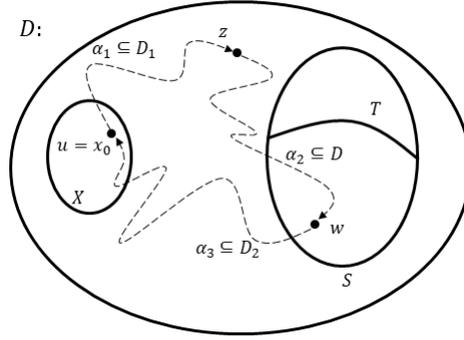


Figura 4.7: Caso 2.

Si $c(\alpha_1) = c(\alpha_2)$, entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contiene una x_0w -trayectoria monocromática, lo cual contradice la definición de X . Por lo tanto, $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_2)$. Además, $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_3)$ pues α_1 está contenido en D_1 y α_3 está contenido en D_2 . Podemos asumir que $c(\alpha_2) \neq c(\alpha_3)$, de lo contrario, α_2 está contenido en D_2 , por lo que $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0 -trayectoria monocromática la cual es una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática, lo cual no es posible.

De este modo, tenemos que (u, z, w, x_0) es un triángulo arcoíris en $\mathcal{C}(D)$ el cual utiliza colores tanto de C_1 como de C_2 , lo cual no es posible por las hipótesis del teorema.

Así podemos concluir que hay una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D .

De las afirmaciones 2 y 3 tenemos que $T \cup \{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D , es decir $T \cup \{x_0\}$ está en $\mathcal{S} = V(D_S)$.

Ahora, como T es subconjunto de S , x_0 está en X y para cada s en $S \setminus T$ hay una sx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay Sx_0 -trayectoria monocromática contenida en D . Entonces $(S, T \cup \{x_0\})$ está en $A(D_S)$, lo cual contradice el hecho que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$.

Por lo tanto, S es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D . □

Cabe mencionar que la digráfica 3-coloreada D , en la figura 4.8a, utilizada a lo largo de este capítulo para ejemplificar ciertas definiciones, cumple las hipótesis del teorema 4.2. En efecto:

1. Se considera $\{\xi_1 = \{1, 3\}, \xi_2 = \{2\}\}$ una partición de $\{1, 2, 3\}$, el conjunto de colores, y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta partición (véanse figuras 4.8b y 4.8c).
2. Como no hay ciclos contenidos en D_1 o D_2 , entonces esta digráfica cumple que para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo contenido en D_i es monocromático.
3. Por la estructura de la digráfica es claro que $\mathcal{C}(D)$ no contiene ni triángulos arcoíris ni P_3 arcoíris que utilicen colores tanto de C_1 como de C_2 .

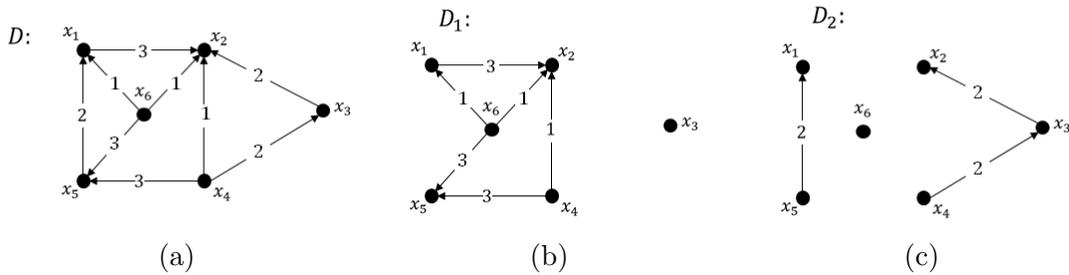


Figura 4.8: Ejemplo de una digráfica 3-coloreada que satisface las hipótesis del Teorema 4.2.

Luego, el teorema 4.2 concluye que la digráfica 3-coloreada D de la figura 4.8a tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. En efecto, es sencillo ver que $\{x_2, x_5\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas para D , donde $\delta_{D_S}^+(\{x_2, x_5\}) = 0$ en la digráfica de la figura 4.5.

Capítulo 5

Ciclos y transitividad por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas por flechas

En este capítulo se hace un análisis del artículo *Cycles and transitivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs* escrito por Enrique Casas Bautista, Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy en [6]. En tal artículo, se dan condiciones suficientes para la existencia de un núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas. Para esto, consideran una partición $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ($k \geq 2$) del conjunto de colores de D , de modo que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que la subdigráfica G_i , definida como $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es transitiva por trayectorias monocromáticas. Posteriormente, consideran otra partición $\{\xi_1, \xi_2\}$ de ξ , y trabajan con subdigráficas generadoras de D , a saber D_i , tales que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c_D(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \in \xi_i\}$. Entonces, estudian condiciones sobre D_1 y D_2 .

El resultado principal de este capítulo (teorema 5.1) afirma lo siguiente:

Sea D una digráfica m -coloreada. Supongamos que:

1. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe C_j en ξ_i tal que $c(f)$ está en C_j para cada f en $A(\gamma)$.
2. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 .
3. Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux -trayectoria monocromática en D .

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Este resultado es de suma importancia pues en particular generaliza el teorema principal del capítulo 4 (teorema 4.2).

Para mayor comprensión de las técnicas utilizadas a lo largo de este capítulo, se ejemplifica el proceso mediante una digráfica explícita.

5.1. Definiciones y primeros resultados

De ahora en adelante, D denotará una digráfica finita m -coloreada y $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ($k \geq 2$) será una partición de C , el conjunto de colores de D , tal que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que la subdigráfica G_i , definida como $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es **transitiva por trayectorias monocromáticas**; esto es, la existencia de una xy -trayectoria monocromática y una yz -trayectoria monocromática en G_i , implica la existencia de una xz -trayectoria monocromática en G_i . Note que G_i y G_j son ajenas por aristas para todo $i \neq j$.

En la figura 5.1a podemos observar una digráfica 6-coloreada siendo $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el conjunto de colores de la digráfica. Para tal coloración se considera $\xi = \{C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}, C_3 = \{5, 6\}\}$ una partición de C de manera que las subdigráficas inducidas G_1, G_2, G_3 son transitivas por trayectorias monocromáticas (véase figuras 5.1b, 5.1c y 5.1d). En efecto, en la subdigráfica G_1 (figura 5.1b) tenemos que $(x_7, x_1), (x_1, x_2), (x_7, x_2)$ son las únicas trayectorias monocromáticas en G_1 por lo que G_1 es transitiva por trayectorias monocromáticas, así también G_2 y G_3 .

Lema 5.1. *Supongamos que para cada ciclo γ de D existe C_j en ξ tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f)$ está en C_j . Si $S = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas ($n \geq 2$) tal para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D , digamos T_i , entonces existe C_j en ξ tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ $c(T_i)$ está en C_j (los índices de los vértices son tomados módulo n).*

Demostración. Para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ sea a_i el color de la trayectoria T_i . Probaremos por inducción sobre n , el número de vértices en la sucesión S ($n \geq 2$) que existe C_j en ξ tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ a_i está en C_j .

Base de inducción. Si $n = 2$, entonces $T_0 \cup T_1$ es un camino cerrado, y de la proposición 3.1, se sigue que $T_0 \cup T_1$ contiene un ciclo γ . Ahora, por hipótesis, existe C_j en ξ tal que $c(f)$ está en C_j para cada f en $A(\gamma)$. Notemos que γ contiene flechas de T_0 y T_1 , pues T_0 y T_1 no forman un ciclo por ellos mismos. Así podemos concluir que para cada i en $\{0, 1\}$ a_i está en C_j .

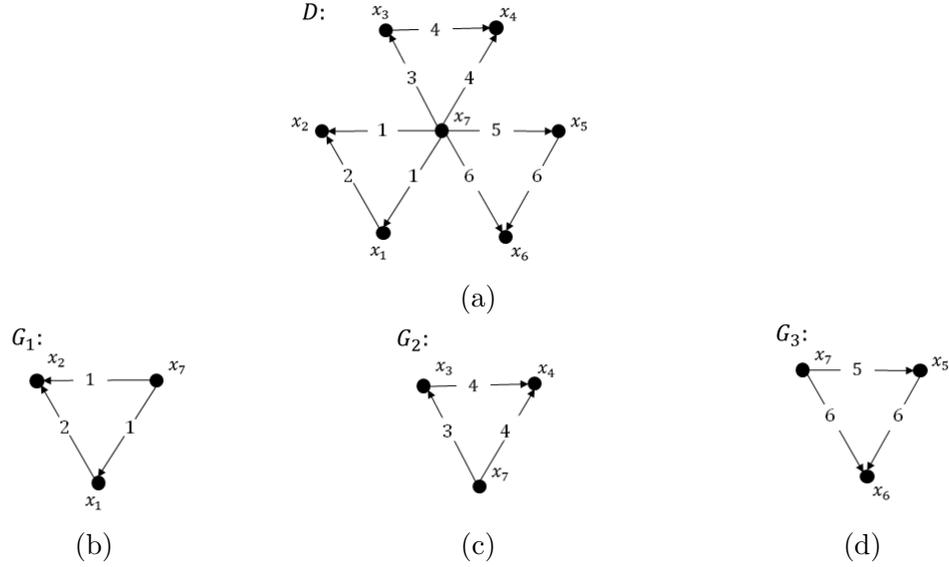


Figura 5.1: Ejemplo de una digráfica 6-coloreada con sus respectivas subdigráficas inducidas por una partición del conjunto de colores.

Hipótesis de inducción. Supongamos que si $S = (u_0, u_1, \dots, u_{l-1})$ es una sucesión de l vértices distintos por parejas ($n - 1 \geq l \geq 2$) tal para cada i en $\{0, 1, \dots, l - 1\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D , digamos T_i , entonces existe C_j en ξ tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, l - 1\}$ $c(T_i)$ está en C_j .

Paso inductivo. Sea $S = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ una sucesión de n vértices que satisface las hipótesis del lema 5.1. Analizaremos dos casos:

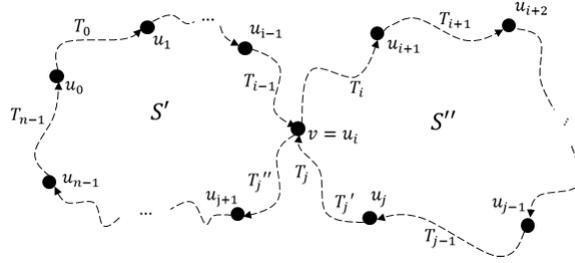
Caso 1. Hay dos trayectorias consecutivas en S coloreadas del mismo color.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_0 = a_1$, entonces $T_0 \cup T_1$ es un camino monocromático de u_0 hacia u_2 , se sigue de la proposición 3.1 que existe una trayectoria monocromática T de u_0 hacia u_2 . Consideremos $S' = (u_0, u_2, u_3, \dots, u_{n-1})$, la cual es una sucesión que satisface las hipótesis del lema 5.1, así por la hipótesis de inducción, existe C_j en ξ tal que para cada i en $\{0, 2, 3, \dots, n - 1\}$ a_i está en C_j , y como $a_0 = a_1$, entonces, para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ a_i está en C_j .

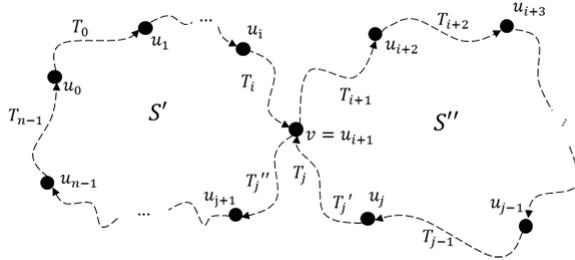
Caso 2. No existen dos trayectorias consecutivas en S que tengan el mismo color.

- Supongamos que $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) \neq \emptyset$ para algún i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Sea v en $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1})$, entonces $(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un camino cerrado el cual contiene un ciclo γ , por la proposición 3.1. Ahora, por hipótesis del lema, existe C_j en ξ tal que $c(f)$ está en C_j para cada f en $A(\gamma)$. Dado que (v, T_i, u_{i+1}) y (u_{i+1}, T_{i+1}, v) no son un ciclo por sí mismos, entonces γ contiene flechas de T_i y T_{i+1} , lo que implica que $\{a_i, a_{i+1}\} \subseteq C_j$ y T_i y T_{i+1} están contenidas en G_j . Luego, al ser G_j transitiva por trayectorias monocromáticas, entonces existe una $u_i u_{i+2}$ -trayectoria T contenida en G_j de color a'_i . Así, $S' = (u_0, u_1, \dots, u_i, u_{i+2}, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión que satisface las hipótesis del lema 5.1, de este modo, por la hipótesis de inducción, existe C_k en ξ tal que $\{a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_{n-1}\}$ está contenido en C_k . Como a'_i está en C_j y ξ es una partición tenemos que $C_j = C_k$. Por lo cual $\{a_i, a_{i+1}\}$ está contenido en C_j , y así, para cada r en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_r está en C_j .
- Supongamos que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) = \emptyset$.
 - Si $V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset$ para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $|i - j| \geq 2$, entonces $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un ciclo. La hipótesis implica que existe C_j en ξ tal que $c(f)$ está en C_j para cada f en $A(\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i)$, con lo cual para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_i está en C_j .
 - Asumamos que $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$ para algunos i y j tales que $|i - j| \geq 2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$. Sea v en $V(T_i) \cap V(T_j)$.

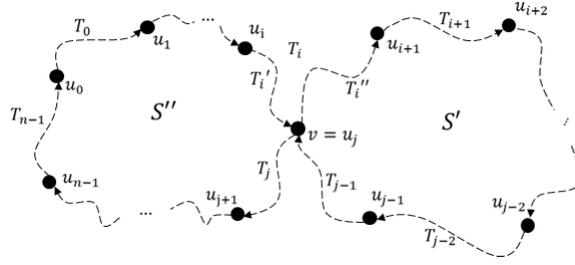
Si $v = u_i$, entonces $T'_j = (u_j, T_j, v = u_i)$ y $T''_j = (v = u_i, T_j, u_{j+1})$ son trayectorias de color a_j tales que $T'_j \cup T''_j = T_j$ (véase figura 5.2). Consideremos $S' = (u_i = v, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{i-1})$ y $S'' = (u_i = v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen C_r y C_s en ξ tal que $\{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{i-1}\} \subseteq C_r$ y $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j\} \subseteq C_s$. Como a_j está en $C_r \cap C_s$ y ξ es una partición, entonces $C_r = C_s$. Por lo que podemos concluir que, para cada l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_l está en C_r .

Figura 5.2: Caso $v = u_i$.

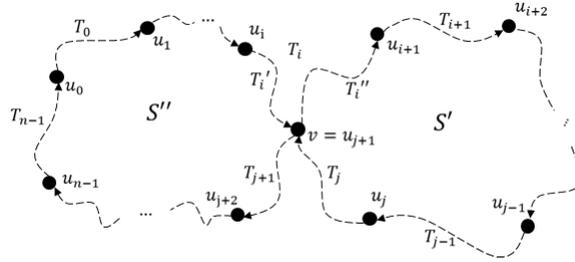
Si $v = u_{i+1}$, entonces $T'_j = (u_j, T_j, v = u_{i+1})$ y $T''_j = (v = u_{i+1}, T_j, u_{j+1})$ son trayectorias de color a_j tales que $T'_j \cup T''_j = T_j$ (véase figura 5.3). Consideremos $S' = (u_{i+1} = v, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$ y $S'' = (u_{i+1} = v, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_{j-1}, u_j)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen C_r y C_s en ξ tal que $\{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_i\} \subseteq C_r$ y $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_j\} \subseteq C_s$. Como a_j está en $C_r \cap C_s$ y ξ es una partición, entonces $C_r = C_s$. Por lo que podemos concluir que, para cada l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_l está en C_r .

Figura 5.3: Caso $v = u_{i+1}$.

Si $v = u_j$, entonces $T'_i = (u_i, T_i, v = u_j)$ y $T''_i = (v = u_j, T_i, u_{i+1})$ son trayectorias de color a_i tales que $T'_i \cup T''_i = T_i$ (véase figura 5.4). Consideremos $S' = (u_j = v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1})$ y $S'' = (u_j = v, u_{j+1}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción de modo que existen C_r y C_s en ξ tal que $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\} \subseteq C_r$ y $\{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_i\} \subseteq C_s$. Como a_i está en $C_r \cap C_s$ y ξ es una partición, entonces $C_r = C_s$. Por lo que podemos concluir que, para cada l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_l está en C_r .


 Figura 5.4: Caso $v = u_j$.

Si $v = u_{j+1}$, entonces $T'_i = (u_i, T_i, v = u_{j+1})$ y $T''_i = (v = u_{j+1}, T_i, u_{i+1})$ son trayectorias de color a_i tales que $T'_i \cup T''_i = T_i$ (véase figura 5.5). Consideremos $S' = (u_{j+1} = v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j)$ y $S'' = (u_{j+1} = v, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen C_r y C_s en ξ tal que $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\} \subseteq C_r$ y $\{a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_i\} \subseteq C_s$. Como a_i está en $C_r \cap C_s$ y ξ es una partición, entonces $C_r = C_s$. Por lo que podemos concluir que, para cada l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_l está en C_r .


 Figura 5.5: Caso $v = u_{j+1}$.

Si $v \notin \{u_i, u_{i+1}, u_j, u_{j+1}\}$, entonces $T'_i = (u_i, T_i, v)$, $T''_i = (v, T_i, u_{i+1})$, $T'_j = (u_j, T_j, v)$, $T''_j = (v, T_j, u_{j+1})$ son trayectorias tales que $T'_i \cup T''_i = T_i$, cada una de color a_i , y $T'_j \cup T''_j = T_j$, cada una de color a_j (véase figura 5.6). Consideremos $S' = (v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j)$ y $S'' = (v, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$ las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen C_r y C_s en ξ tal que $\{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\} \subseteq C_r$ y $\{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_i\} \subseteq C_s$. Como $\{a_i, a_j\}$ es subconjunto de $C_r \cap C_s$ y ξ es una partición, entonces $C_r = C_s$. Por lo que podemos concluir que, para cada l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a_l está en C_r .

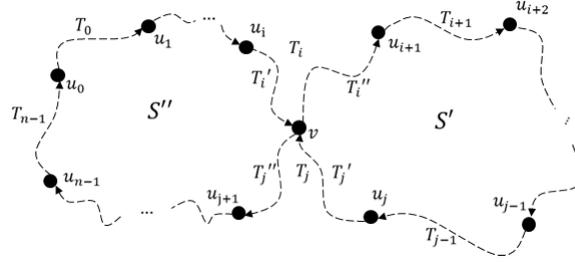


Figura 5.6: Caso $v \notin \{u_i, u_{i+1}, u_j, u_{j+1}\}$.

Concluimos de los casos *I* y *II* que existe C_j en ξ tal que a_i está en C_j para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$. \square

Lema 5.2. Consideremos l en $\{1, 2, \dots, k\}$. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{1, 2, \dots, n-1\}$ existe una $x_{i-1}x_i$ -trayectoria monocromática en G_l . Entonces, para cada m en $\{1, 2, \dots, n-1\}$ existe una x_0x_m -trayectoria monocromática contenida en G_l .

Demostración. La demostración será por inducción sobre n .

Base de inducción. Si $n = 2$, el resultado se cumple, pues por hipótesis existe una $x'_0x'_1$ -trayectoria monocromática contenida en G_l , si $C' = (x'_0, x'_1)$ es la sucesión dada en la hipótesis del lema 5.2.

Hipótesis de inducción. Sea $n \geq 2$. Supongamos que si $C' = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ es una sucesión de $m < n$ vértices que satisface las hipótesis del lema 5.2, entonces existe una $x_0x_{m'}$ -trayectoria monocromática contenida en G_l para cada m' en $\{1, 2, \dots, m-1\}$.

Paso inductivo. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ una sucesión de n vértices que satisface las hipótesis del Lema 5.2. Por la hipótesis de inducción, aplicada a la sucesión $C' = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2})$, existe una $x_0x_{m'}$ -trayectoria monocromática $T_{m'}$ contenida en G_l para cada m' en $\{1, 2, \dots, n-2\}$. Sea T una $x_{n-2}x_{n-1}$ -trayectoria monocromática contenida en G_l , de este modo T_{n-2} y T son dos trayectorias monocromáticas contenidas en G_l . Al ser G_l transitiva por trayectorias monocromáticas entonces existe una x_0x_{n-1} -trayectoria monocromática en G_l , es decir, existe una $x_0x_{m'}$ -trayectoria monocromática contenida en G_l para cada m' en $\{1, 2, \dots, n-1\}$, lo que termina el proceso de inducción. \square

Lema 5.3. *Supongamos que para cada ciclo γ de D existe C_j en ξ tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f)$ está en C_j . Entonces no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D .*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, con $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = x_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i'_0} = x_{j_0}$, entonces $x_{i'_0} = x_{i_0}$, con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ de $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $x_l \neq x_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $x_l = x_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D . Para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ sea T_i una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D (los índices son tomados módulo n), así por el lema 5.1 existe C_l en ξ tal que $c(T_i)$ está en C_l para cada i en $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Por el lema 5.1 existe una $x_0 x_{n-1}$ -trayectoria monocromática contenida en G_l , la cual es una $x_n x_{n-1}$ -trayectoria monocromática contenida en G_l , (pues los índices son tomados módulo n), lo cual es una contradicción.

Por tanto, no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en D . \square

Recordando la definición de seminúcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica (definición 4.1), podemos notar que en la digráfica D de la figura 5.1a, el conjunto $\{x_2\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D , pues es independiente por trayectorias monocromáticas al ser únicamente un vértice y $\delta_D^+(x_2) = 0$.

Para las digráficas G_r se observa lo siguiente.

Lema 5.4. *Consideremos r en $\{1, 2, \dots, k\}$. Entonces no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en G_r . Además, existe x_0 en $V(G_r)$ tal que $\{x_0\}$ es seminúcleo por trayectorias monocromáticas de G_r .*

Demostración. Sea r en $\{1, 2, \dots, k\}$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en G_r .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = x_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i'_0} = x_{j_0}$, entonces $x_{i'_0} = x_{i_0}$, con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ de $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $x_l \neq x_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $x_l = x_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en G_r . Para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ sea T_i una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en G_r (los índices son tomados módulo n).

Luego, por el lema 5.2 existe una $x_0 x_{n-1}$ -trayectoria monocromática contenida en G_r , la cual es una $x_n x_{n-1}$ -trayectoria monocromática contenida en G_r (pues los índices son tomados módulo n), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en G_r .

Para la segunda parte, procedamos de nuevo por contradicción. Supongamos que para cada x en $V(G_r)$, $\{x\}$ no es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de G_r . Entonces para cada x en $V(G_r)$ existe y en $V(G_r) \setminus \{x\}$ tal que existe una xy -trayectoria monocromática contenida en G_r y no existe una yx -trayectoria monocromática en G_r .

Sea x_0 en $V(G_r)$, entonces existe x_1 en $V(G_r) \setminus \{x_0\}$ tal que existe una $x_0 x_1$ -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_1 x_0$ -trayectoria monocromática en G_r . De nuevo, por nuestra suposición, existe x_2 en $V(G_r) \setminus \{x_1\}$ tal que existe una

x_1x_2 -trayectoria monocromática en G_r y no existe una x_2x_1 -trayectoria monocromática en G_r . Si ya tenemos elegidos a x_0, x_1, \dots, x_n , sabemos que existe x_{n+1} en $V(G_r) \setminus \{x_n\}$ tal que existe una x_nx_{n+1} -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{n+1}x_n$ -trayectoria monocromática en G_r . Continuando de esta manera, construimos una sucesión $S = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ de vértices de G_r tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria monocromática en G_r . Ésto contradice la primer parte de este lema.

Luego, existe x_0 en $V(G_r)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de G_r . □

Más aún, tenemos que se cumple lo siguiente.

Lema 5.5. *Supongamos que para cada ciclo γ de D existe C_j en ξ tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f)$ está en C_j . Entonces existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D .*

Demostración. Por contradicción, supongamos que para cada x en $V(D)$, $\{x\}$ no es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D . Así, para cada x en $V(D)$ existe y en $V(D) \setminus \{x\}$ tal que existe una xy -trayectoria monocromática en D y no existe una yx -trayectoria monocromática en D .

Sea x_0 en $V(D)$, de este modo existe x_1 en $V(D) \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1 -trayectoria monocromática en D y no existe una x_1x_0 -trayectoria monocromática en D . De nuevo, por nuestra suposición, existe x_2 en $V(D) \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2 -trayectoria monocromática en D y no existe una x_2x_1 -trayectoria monocromática en D . Si ya tenemos elegidos a x_0, x_1, \dots, x_n ; sabemos que existe x_{n+1} en $V(D) \setminus \{x_n\}$ tal que existe una x_nx_{n+1} -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{n+1}x_n$ -trayectoria monocromática en D . Continuando de esta manera, construimos una sucesión $S = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ de vértices de D tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática en D y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria monocromática en D , contradiciendo el lema 5.3.

Por lo tanto, existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D . □

5.2. Sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas

Sea D una digráfica m -coloreada. De ahora en adelante, sea $\{\xi_1, \xi_2\}$ una partición de ξ y D_i será la subdigráfica generadora de D tal que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \text{ en } \xi_i\}$ para cada i en $\{1, 2\}$. Note que para cada r en $\{1, 2, \dots, k\}$, G_r es una subdigráfica de D_1 o de D_2 .

Dada la digráfica D de la figura 5.7a consideremos la partición de ξ dada por $\{\xi_1 = \{C_1, C_2\}, \xi_2 = \{C_3\}\} = \{\xi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \xi_2 = \{\{5, 6\}\}\}$, de este modo en la figura 5.7 podemos observar las subdigráficas generadoras respectivas D_1 y D_2 .

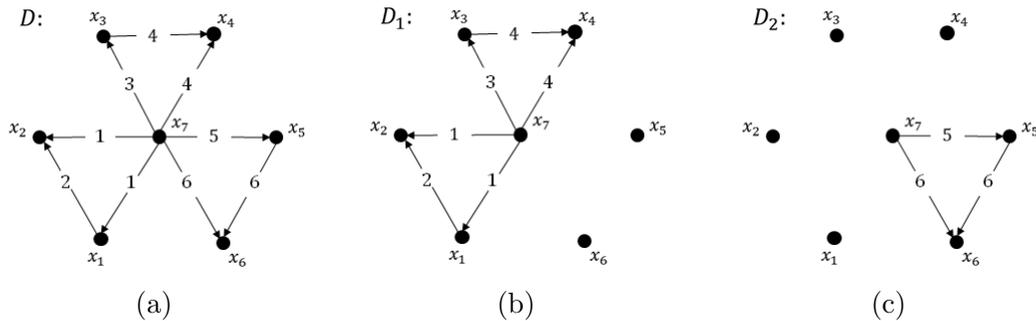


Figura 5.7: Subdigráficas generadoras de la digráfica D dada la partición $\{\xi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \xi_2 = \{\{5, 6\}\}\}$ de la partición previa $\xi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$.

Recordando la definición de seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de una digráfica (definición 4.2), podemos notar que en la digráfica D de la figura 5.7a, el conjunto $\{x_2, x_4\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D , pues no existe una trayectoria monocromática entre los vértices x_2 y x_4 en D y $\delta_{D_1}^+(x_2) = 0 = \delta_{D_1}^+(x_4)$. Más aún, todos los seminúcleos por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D son los siguientes: $\emptyset, \{x_2\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_2, x_6\}, \{x_4, x_6\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_2, x_4, x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}$.

En general, se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.6. *Supongamos que para cada ciclo γ de D existe C_j en ξ tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f)$ está en C_j . Entonces existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D .*

Demostración. Si $|\xi_1| = 1$, digamos $\xi_1 = \{C_r\}$, entonces G_r es una subdigráfica de D_1 , mas aún, D_1 es la digráfica G_r y posiblemente algunos vértices aislados. Por el lema 5.4 existe x_0 en $V(G_r)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de G_r . Así, de la definición de seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 , se tiene que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D .

Supongamos que $|\xi_1| \geq 2$, entonces para D_1 , subdigráfica de D , se cumple que para cada ciclo γ de D_1 existe C_j en ξ tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f)$ está en C_j . Luego, por el lema 5.5 existe x_0 en $V(D_1) = V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas de D_1 . Así, de la definición de seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 , se tiene que $\{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D . \square

De manera análoga a lo hecho en el capítulo 4, consideremos al conjunto $\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) : S \text{ es un seminúcleo no vacío por trayectorias monocromáticas módulo } D_2 \text{ de } D\}$.

Cuando $\mathcal{S} \neq \emptyset$, denotaremos por $D_{\mathcal{S}}$ a la digráfica definida como sigue: $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ (es decir, por cada elemento de \mathcal{S} colocamos un vértice en $D_{\mathcal{S}}$) y para $\{S_1, S_2\}$ subconjunto de \mathcal{S} , con $S_1 \neq S_2$, se tiene que $(S_1, S_2) \in A(D_{\mathcal{S}})$ si y sólo si para cada s_1 en S_1 existe s_2 en S_2 tal que $s_1 = s_2$ o hay una $s_1 s_2$ -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una $s_2 s_1$ -trayectoria monocromática contenida en D .

De lo dicho anteriormente, en la digráfica D de la figura 5.7 se tiene que, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, más aún $\mathcal{S} = \{\{x_2, x_4, x_6\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_2, x_6\}, \{x_4, x_6\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_2\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}\}$ por lo cual existe la digráfica $D_{\mathcal{S}}$. De hecho, en la figura 5.8 se exhibe tal digráfica asociada, donde notemos que $(\{x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\})$ está en $A(D_{\mathcal{S}})$ pues existe una $x_5 x_6$ -trayectoria monocromática en D_2 y no existe una $x_6 x_5$ -trayectoria monocromática en D , además x_4 está en $\{x_4, x_5\}$ y en $\{x_4, x_6\}$. Así se puede justificar con cada flecha en $D_{\mathcal{S}}$ observando directamente la digráfica D_2 de la figura 5.7c.

Es posible verificar que la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ de la figura 5.8 es acíclica. Veamos que esto se cumple en general.

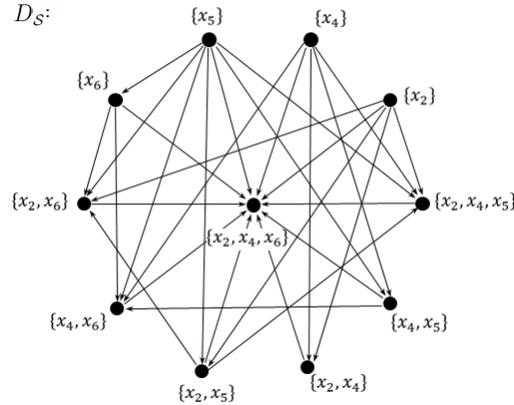


Figura 5.8: Digráfica asociada D_S de la digráfica D de la figura 5.7a.

Lema 5.7. *Supongamos que para cada ciclo γ de D existe C_j en ξ tal que $c(f)$ está en C_j para cada f en $A(\gamma)$. Entonces D_S es una digráfica acíclica.*

Demostración. Primero observemos que por el lema 5.6, existe un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D , así $\mathcal{S} \neq \emptyset$, y podemos considerar la digráfica D_S .

Procediendo por contradicción, supongamos que D_S contiene un ciclo, digamos $C = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_0)$ de longitud $n \geq 2$. Ya que C es un ciclo en D_S , tenemos que $S_i \neq S_j$ cuando $i \neq j$.

Afirmación 1. Existe i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} , $z \notin S_{i_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

De otro modo, para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y para cada z en S_i tenemos que $z \in S_{i+1}$, así $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0$, de modo que para l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $S_0 \subseteq S_l \subseteq S_0$, lo que implica que $S_i = S_j$ para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, con $i \neq j$. Así $C = (S_0)$, lo cual es una contradicción pues la longitud de un ciclo es al menos 2.

Afirmación 2. Si existe i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} y algún w en S_{i_0+1} existe una zw -trayectoria monocromática en D , entonces existe j_0 en $\{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i_0\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$. Primero observemos que w no es elemento de $S_n = S_0$, de otra manera tendríamos una zw -trayectoria monocromática en D con $\{z, w\}$ subconjunto de S_0 , lo cual es una contradicción pues S_0 es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas. Como w está en S_1 , entonces podemos definir $j_0 = \max\{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : w \in S_i\}$. Así, $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

Ahora, de la afirmación 1 tenemos que existen i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y t_0 en S_{i_0} tales que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Pero como $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in A(D_S)$, entonces existe t_1 en S_{i_0+1} tal que hay una t_0t_1 -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una t_1t_0 -trayectoria monocromática contenida en D . De la afirmación 2, tenemos que existe i_1 en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1}$. Ya que $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in A(D_S)$, tenemos que existe t_2 en S_{i_1+1} tal que hay una t_1t_2 -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una t_2t_1 -trayectoria monocromática contenida en D . Si ya tenemos elegidos t_0, t_1, \dots, t_m ; tenemos de la afirmación 2 que existe un índice i_m en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_m \in S_{i_m}$ y $t_m \notin S_{i_m+1}$ y dado que $(S_{i_m}, S_{i_m+1}) \in A(D_S)$, se sigue que existe t_{m+1} en S_{i_m+1} tal que hay una t_mt_{m+1} -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay una $t_{m+1}t_m$ -trayectoria monocromática contenida en D . Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de vértices (t_0, t_1, t_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una t_it_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no existe una $t_{i+1}t_i$ -trayectoria monocromática en D , lo cual contradice el lema 5.3 cuando $|\xi_2| \geq 2$. Si $|\xi_2| = 1$, digamos $\xi_2 = \{C_r\}$, entonces G_r es una subdigráfica de D_2 , más aún, D_2 es la digráfica G_r y posiblemente algunos vértices aislados, de modo que (t_0, t_1, t_2, \dots) es una sucesión de vértices de G_r tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una t_it_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en G_r y no existe una $t_{i+1}t_i$ -trayectoria monocromática en D . Ahora, por el lema 5.4 no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria monocromática en G_r , la existencia de la sucesión de vértices (t_0, t_1, t_2, \dots) contradice este hecho.

Por lo tanto D_S es una digráfica acíclica. □

Sean D una digráfica m -coloreada y $W = (u_0, \dots, u_l = v_0, \dots, v_m = w_0, \dots, w_n = u_0)$ un ciclo, decimos que W es una **(ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3** si $T_1 = (u_0, W, u_l)$ es una trayectoria monocromática de color a contenida en D_1 , $T_2 = (v_0, W, v_m)$ es una trayectoria monocromática de color b contenida en D y $T_3 = (w_0, W, w_n)$ es una trayectoria monocromática de color c contenida en D_2 , con $a \neq b$, $b \neq c$, y $a \neq c$.

Sea $P = (u_0, \dots, u_l = v_0, \dots, v_m = w_0, \dots, w_n)$ una trayectoria, decimos que P es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 si $T_1 = (u_0, P, u_l)$ es una trayectoria monocromática de color a contenida en D_1 , $T_2 = (v_0, P, v_m)$ es una trayectoria monocromática de color b contenida en D y $T_3 = (w_0, P, w_n)$ es una trayectoria monocromática de color c contenida en D_2 , con $a \neq b$, $b \neq c$, y $a \neq c$.

En la digráfica 4-coloreada D de la figura 5.9a podemos considerar la partición $\xi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ del conjunto de colores de D y posteriormente la partición $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{3\}\}, \xi_2 = \{\{2\}\{4\}\}\}$ de ξ . Esta última partición da lugar a las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 . Luego, $(x_4, x_5, x_7, x_1, x_2, x_8, x_3, x_4)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 en D , esto pues (x_4, x_5, x_7, x_1) es una trayectoria monocromática de color 3 en D_1 , (x_1, x_2) es una trayectoria monocromática de color 1 en D y (x_2, x_8, x_3, x_4) es una trayectoria monocromática de color 2 en D_2 . También, $(x_7, x_1, x_2, x_8, x_3)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 en D , esto pues (x_7, x_1) es una trayectoria monocromática de color 3 en D_1 , (x_1, x_2) es una trayectoria monocromática de color 1 en D y (x_2, x_8, x_3) es una trayectoria monocromática de color 2 en D_2 .

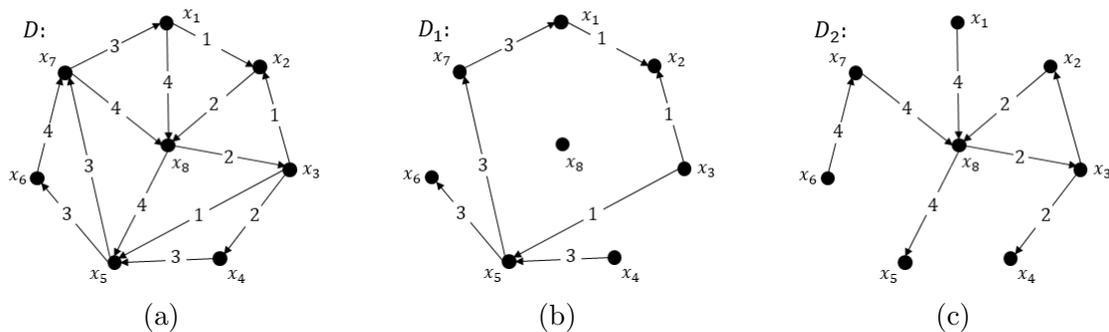


Figura 5.9

Lema 5.8. *Supongamos que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe $C_j \in \xi_i$ tal que para cada $f \in A(\gamma)$ $c(f) \in C_j$. Supongamos que α_1 es una uz-trayectoria monocromática contenida en D_1 , α_2 es una zw-trayectoria monocromática contenida en D y α_3 es una wx-trayectoria monocromática contenida en D_2 , de modo que $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_2)$, $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_3)$ y $c(\alpha_2) \neq c(\alpha_3)$ (note que u puede ser x). Adicionalmente, supongamos que D no tiene uw-trayectorias monocromáticas, zx-trayectorias monocromáticas y zu-trayectorias monocromáticas. Entonces existe una ux-trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 o existe una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 .*

Demostración. De las hipótesis tenemos las siguientes observaciones:

1. $u \notin V(\alpha_2)$, de otra manera (u, α_2, w) sería una uw -trayectoria monocromática.
2. $z \notin V(\alpha_3)$, de lo contrario (z, α_3, x) sería una zx -trayectoria monocromática.
3. $w \notin V(\alpha_1)$, de otro modo (u, α_1, w) sería una uw -trayectoria monocromática.
4. $x \notin V(\alpha_2)$, en otro caso (z, α_2, x) sería una zx -trayectoria monocromática.

Notemos que α_2 está contenido en D_1 o en D_2 , por lo cual tenemos los siguientes casos:

Caso 1. α_2 está contenido en D_1 .

Si $((V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\}) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contiene un ciclo γ formado con flechas de α_1 y α_2 , el cual está contenido en D_1 . Por hipótesis tenemos que existe C_j en ξ_1 tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f) \in C_j$, lo que implica que α_1 y α_2 están contenidos en G_j . Como G_j es transitiva por trayectorias monocromáticas entonces existe una uw -trayectoria monocromática contenida en G_i , lo cual es una contradicción pues no existen uw -trayectorias monocromáticas. Así podemos asumir que $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Si $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, entonces tenemos los siguientes casos:

(1.1.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Notemos que $u \neq x$, porque $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$. Luego tenemos que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de $\overrightarrow{P_3}$ (véase figura 5.10).

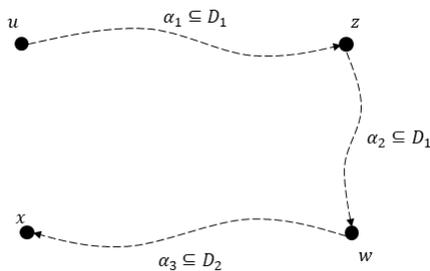


Figura 5.10: Caso 1.1.

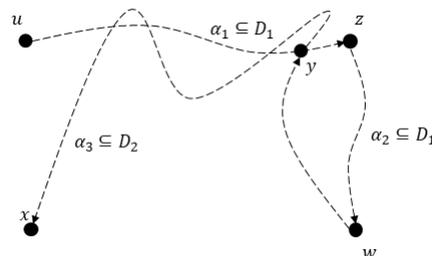


Figura 5.11: Caso 1.2.

(1.2.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea y el último vértice de α_1 que está en α_3 , de las observaciones 2 y 3, tenemos que $y \neq z$ y $y \neq w$, respectivamente, entonces $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 , con z, w, y (véase figura 5.11).

Si $((V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\}) \neq \emptyset$ tenemos los siguientes casos:

(1.3.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Sea y el primer vértice de α_2 que está en α_3 (de las observaciones 2 y 4, $y \neq z, y \neq x$, respectivamente), entonces $\alpha_1 \cup (z, \alpha_2, y) \cup (y, \alpha_3, x)$ es una ux -trayectoria (pues $u \neq x$) la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 (véase figura 5.12).

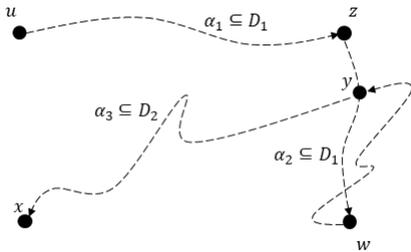


Figura 5.12: Caso 1.3.

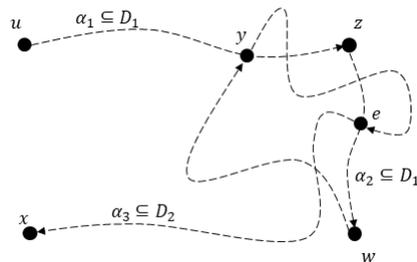


Figura 5.13: Caso 1.4(a).

(1.4.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sean y y e el primer vértice y el último vértice de α_3 , que está en α_1 o en α_2 , respectivamente.

Si $y \in V(\alpha_1)$ tenemos que $y \neq z$ (observación 2) y también que $y \neq w$ (observación 3). Entonces $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 (véase figura 5.13).

Si $y \in V(\alpha_2)$ y $e \in V(\alpha_1)$, así $y \neq e$. Sean a el último vértice de α_3 que está en α_2 , a existe porque $y \in V(\alpha_2)$, y b el primer vértice de (a, α_3, x) que está en α_1 , b existe porque $e \in V(\alpha_1)$ y $e \in V((a, \alpha_3, x))$. Notemos que $b \neq z$ y $a \neq z$ (observación 2), $a \neq x$ (observación 4), $a \neq u$ (observación 1), y $b \neq w$ (observación 3). También $a \neq b$, porque estamos asumiendo que $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ y $a \neq z$ y $b \neq z$. Así $(b, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, a) \cup (a, \alpha_3, b)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 (véase figura 5.14).

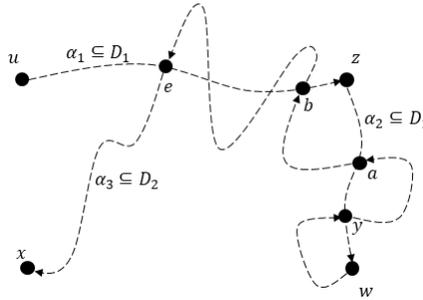


Figura 5.14: Caso 1.4(b).

Ahora suponemos que $e \in V(\alpha_2)$ (y $y \in V(\alpha_2)$). Tenemos que $z \neq e$, $e \neq x$ (por observaciones 2 y 4, respectivamente), de esto $V(\alpha_1) \cap V((e, \alpha_3, x)) = \emptyset$, de otro modo existe u en $V(\alpha_1) \cap V((e, \alpha_3, x))$, lo cual contradice la elección de e . Luego $\alpha_1 \cup (z, \alpha_2, e) \cup (e, \alpha_3, x)$ es una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{F}_3 (véase figura 5.15).

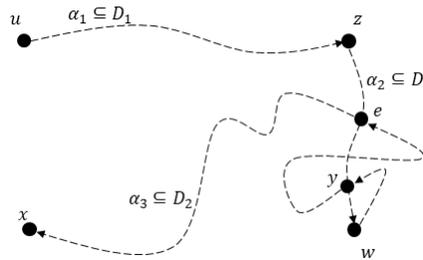


Figura 5.15: Caso 1.4(c).

Caso 2. α_2 está contenido en D_2 .

Si $((V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\}) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene un ciclo γ que contiene flechas de α_2 y α_3 , el cual está contenido en D_2 . Luego por hipótesis existe C_i en ξ_2 tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f) \in C_i$, así $\alpha_2 \cup \alpha_3$ está contenido en G_i . Como G_i es transitiva por trayectorias monocromáticas, entonces existe zx -trayectoria monocromática lo cual no es posible. Así podemos asumir que $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$.

Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ entonces tenemos los siguientes casos:

(2.1.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Notemos $u \neq x$, porque $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$. Entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \overrightarrow{P}_3 (véase figura 5.16).

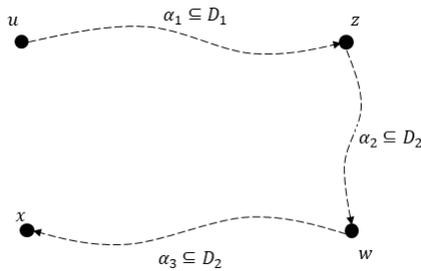


Figura 5.16: Caso 2.1.

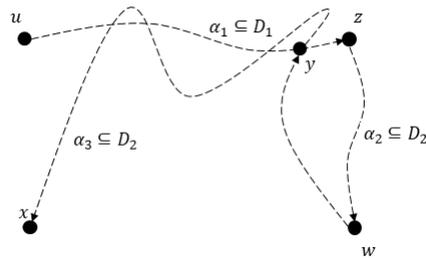


Figura 5.17: Caso 2.2.

(2.2.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea y el último vértice de α_1 que está en α_3 . Tenemos que $y \neq z$, $y \neq w$ (por las observaciones 2 y 3, respectivamente), entonces $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \overrightarrow{C}_3 (véase figura 5.17).

Si $((V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\}) \neq \emptyset$, tenemos los siguientes casos:

(2.3.) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) = \emptyset$.

Sea y el primer vértice de α_1 que está en α_2 , note que $y \neq z$ por la suposición de este caso, tenemos que $y \neq u, y \neq w$ (por las observaciones 1 y 3, respectivamente). Entonces $(u, \alpha_1, y) \cup (y, \alpha_2, w) \cup \alpha_3$ es una ux -trayectoria ($u \neq x$ porque $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) = \emptyset$) la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 (véase figura 5.18).

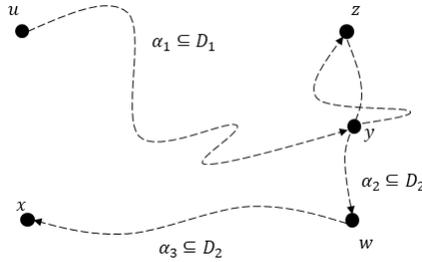


Figura 5.18: Caso 2.3.

(2.4.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea y el último vértice de α_1 que está en α_3 , tenemos que $y \neq z, y \neq w$ (por las observaciones 1 y 3, respectivamente). Sea x' el primer vértice de (y, α_1, z) que está en α_2 (notemos que x' puede ser z). Tenemos que $x' \neq w$ (observación 3) y $x' \neq y$, porque estamos asumiendo que $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $y \neq w$. Ahora $(y, \alpha_1, x') \cup (x', \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 (véase figura 5.19).

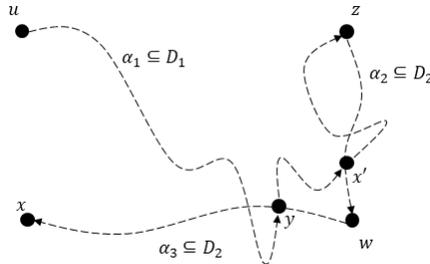


Figura 5.19: Caso 2.4.

□

Teorema 5.1. *Sea D una digráfica m -coloreada. Supongamos que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe C_j en ξ_i tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f)$ está en C_j .*
2. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 .*
3. *Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux -trayectoria monocromática en D .*

Entonces D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Demostración. Consideremos la digráfica D_S . Ya que D_S es una digráfica finita y D_S es acíclica (lema 5.7), así D_S contiene al menos un vértice de exgrado cero (por la proposición 1.2). Sea $S \in V(D_S)$ tal que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$. Probaremos, por contradicción, que S es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D .

Como $S \in V(D_S)$, entonces S es independiente por trayectorias monocromáticas. Supongamos que S no es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D , entonces S no es absorbente por trayectorias monocromáticas en D . Sea $X = \{z \in V(D) \setminus S : \text{no existe una } zS\text{-trayectoria monocromática en } D\}$. De nuestro supuesto $X \neq \emptyset$.

Afirmación 1. Existe x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$, si existe una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 , entonces existe una zx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Por contradicción, supongamos que para todo x en X existe y en $X \setminus \{x\}$ tal que existe una xy -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una yx -trayectoria monocromática en D_1 .

Sea x_0 en X , de este modo existe x_1 en $X \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1 -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una x_1x_0 -trayectoria monocromática en D_1 . De nuestra suposición, existe x_2 en $X \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2 -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una x_2x_1 -trayectoria monocromática contenida en D_1 . Si ya tenemos elegidos x_0, x_1, \dots, x_i sabemos que existe x_{i+1} en $X \setminus \{x_i\}$ tal que existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria monocromática en D_1 . Continuando de esta manera construimos una sucesión (x_0, x_1, x_2, \dots) de vértices en X tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} -trayectoria monocromática contenida en D_1 y no existe una $x_{i+1}x_i$ -trayectoria

monocromática contenida en D_1 . Sin embargo, por el lema 5.3 aplicado a la subdigráfica D_1 , cuando $|\xi_2| \geq 2$, sabemos que no existe una sucesión (x_0, x_1, x_2, \dots) de vértices en $V(D_1) = V(D)$ tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática. Si $|\xi_1| = 1$, digamos $\xi_1 = \{C_r\}$, entonces G_r es una subdigráfica de D_1 , más aún, D_1 es la digráfica G_r y posiblemente algunos vértices aislados; de modo que $S = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ es una sucesión de vértices en X tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática contenida en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática contenida en G_r . Sin embargo, por el lema 5.4 no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria monocromática en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ -trayectoria monocromática en G_r , lo cual también es una contradicción.

Por lo tanto existe x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$, si existe una $x_0 z$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 , entonces existe una $z x_0$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Sea $T = \{z \in S : \text{no hay una } z x_0\text{-trayectoria monocromática en } D_2\}$. De la definición de T , tenemos que para cada z en $S \setminus T$ existe una $z x_0$ -trayectoria monocromática en D_2 . Recordemos que cada trayectoria monocromática está contenida en D_1 o D_2 .

Afirmación 2. $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

- T es independiente por trayectorias monocromáticas en D , pues $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$.
- No hay $T x_0$ -trayectorias monocromáticas contenidas en D . De otro modo, por la definición de T , tal trayectoria debería estar contenida en D_1 . Ya que T está contenido en S y S es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas no vacío módulo D_2 de D , entonces hay una $x_0 S$ -trayectoria monocromática en D , lo cual contradice la definición de X .
- De la definición de X no hay $x_0 S$ -trayectorias monocromáticas en D , en particular no hay $x_0 T$ -trayectorias monocromáticas.

Así $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Afirmación 3. Para cada z en $[V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})]$ si existe una $(T \cup \{x_0\})z$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 , entonces existe una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D .

Sea z en $V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})$ tal que existe una $(T \cup \{x_0\})z$ -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Tenemos dos casos:

Caso 1. Existe una Tz -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Por contradicción, supongamos que no existe una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D . Ya que T está contenido en S y S en un seminúcleo por trayectorias monocromáticas no vacío módulo D_2 de D , entonces existe una zS -trayectoria monocromática contenida en D . Así $z \notin S \cup X$. Tenemos que tal trayectoria va de z hacia $S \setminus T$ pues no hay $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D . Sea α_1 una uz -trayectoria monocromática contenida en D_1 con u en T y sea α_2 una zw -trayectoria monocromática contenida en D con w en $S \setminus T$. Como w está en $S \setminus T$, entonces la definición de T implica que hay una wx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_2 , digamos α_3 (véase figura 5.20).

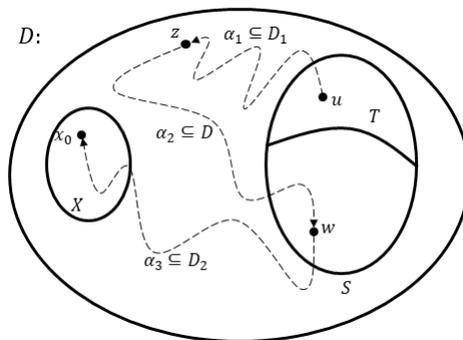


Figura 5.20: Caso 1.

Si $c(\alpha_1) = c(\alpha_2)$, entonces $\alpha_2 \subseteq D_1$, por lo que $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contiene una uw -trayectoria monocromática, lo cual es una contradicción pues $\{u, w\} \subseteq S$ y S es independiente por trayectorias monocromáticas. Entonces, $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_2)$. Además $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_3)$, pues α_1 está contenido en D_1 y α_3 está contenido en D_2 . Podemos asumir que $c(\alpha_2) \neq c(\alpha_3)$, de lo contrario α_2 está contenido en D_2 y $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0 -trayectoria monocromática, la cual es una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria, lo cual no es posible.

Hagamos notar que:

- No existen uw -trayectorias monocromáticas en D . Esto se tiene pues $\{u, w\}$ es subconjunto de S y S es independiente por trayectorias monocromáticas.
- No existen zx_0 -trayectorias monocromáticas ni zu -trayectorias monocromáticas en D , pues no existen $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectorias monocromáticas en D .

De este modo, D , α_1 , α_2 , α_3 satisfacen las hipótesis del lema 5.8, así:

- Existe una ux_0 -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 o
- Existe una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 .

En el primer caso, de la hipótesis tenemos que habría una trayectoria monocromática de u hacia x_0 , lo cual contradice que $T \cup \{x_0\}$ sea independiente por trayectorias monocromáticas. El segundo caso no es posible pues D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 .

Así podemos concluir que hay una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D .

Caso 2. Existe una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 .

Por contradicción, supongamos que no existe una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D . Sea α_1 una x_0z -trayectoria monocromática contenida en D_1 . Si z estuviera en X entonces de la afirmación 1 existiría una zx_0 -trayectoria monocromática en D_1 , lo cual no es posible, luego $z \notin S$ por definición de X y el hecho de que $x_0 \in X$. Entonces z no está en $X \cup S$. Luego, la definición de X implica que existe una zS -trayectoria monocromática contenida en D , digamos α_2 . Supongamos que α_2 termina en w . Si w está en T , entonces α_2 es una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática contenida en D , lo cual no es posible, por lo que w está en $S \setminus T$. Luego, de la definición de T , existe una wx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_2 , llamemos a tal trayectoria α_3 (véase figura 5.21).

Si $c(\alpha_1) = c(\alpha_2)$, entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contiene una x_0w -trayectoria monocromática, lo cual contradice la definición de X . Entonces $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_2)$. Además, $c(\alpha_1) \neq c(\alpha_3)$ pues α_1 está contenido en D_1 y α_3 está contenido en D_2 . Podemos asumir que $c(\alpha_2) \neq c(\alpha_3)$, de lo contrario α_2 está contenido en D_2 por lo que $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene una zx_0 -trayectoria monocromática la cual es una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática, lo cual no es posible.

Sea $u = x_0$, notemos que:

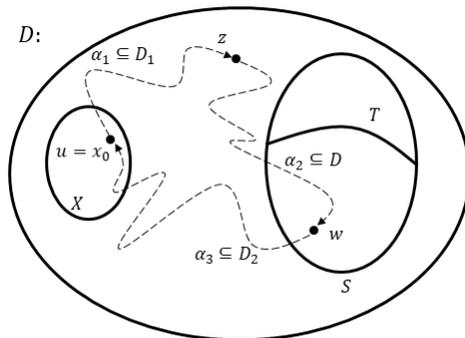


Figura 5.21: Caso 2.

- No hay uw -trayectorias monocromáticas en D . Lo cual se tiene de la definición de X .
- No hay zu -trayectorias monocromáticas en D , porque no hay $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectorias monocromáticas en D y como $u = x_0$ tampoco hay zx_0 -trayectorias monocromáticas.

De este modo, D , α_1 , α_2 , α_3 satisfacen las hipótesis del lema 5.8, así:

- Existe una ux_0 -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 o
- Existe una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 .

En el primer caso, de la hipótesis tenemos que habría una ux_0 -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 , lo cual no es posible pues $u = x_0$. El segundo caso no es posible pues D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 . Así podemos concluir que hay una $z(T \cup \{x_0\})$ -trayectoria monocromática en D .

De las afirmaciones 2 y 3 tenemos que $T \cup \{x_0\}$ es un seminúcleo por trayectorias monocromáticas módulo D_2 de D , es decir, $T \cup \{x_0\}$ está en $\mathcal{S} = V(D_S)$.

Ahora, ya que T es subconjunto de S , x_0 está en X y para cada s en S tal que s no está en T hay una sx_0 -trayectoria monocromática contenida en D_2 y no hay Sx_0 -trayectoria monocromática contenida en D . Entonces, $(S, T \cup \{x_0\}) \in A(D_S)$, lo cual contradice el hecho que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$.

Por lo tanto, S es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D .

□

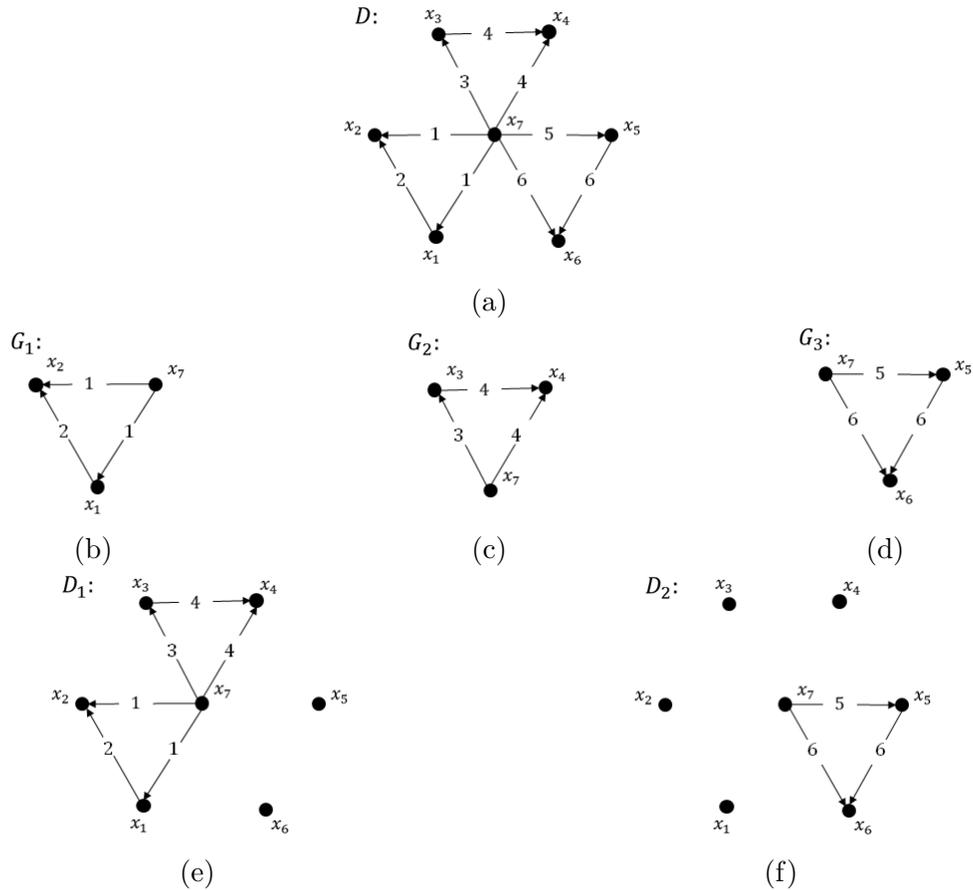


Figura 5.22: Ejemplo de una digráfica 6-coloreada que satisface las hipótesis del teorema 5.1.

Cabe mencionar que la digráfica 6-coloreada D , en la figura 5.22a, utilizada a lo largo de este capítulo para ejemplificar ciertas definiciones, cumple las hipótesis del teorema 5.1. En efecto:

1. Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}, C_3 = \{5, 6\}\}$ una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el conjunto de colores, de manera que las subdigráficas G_1 , G_2 y G_3 inducidas por esta partición son transitivas por trayectorias monocromáticas (véanse figuras 5.22b , 5.22c y 5.22d).
2. Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \xi_2 = \{\{5, 6\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véanse figuras 5.22e y 5.22f).

5.2. SOBRE LA EXISTENCIA DE NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONO... 65

3. Como no hay ciclos contenidos en D_1 o D_2 , entonces esta digráfica cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe C_j en ξ_i tal que $c(f) \in C_j$ para cada f en $A(\gamma)$.
4. Por la estructura de la digráfica es claro que D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 (véase figura 5.22).
5. También D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 , por lo que cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux -trayectoria monocromática en D (véase figura 5.22).

Luego el teorema 5.1 concluye que la digráfica 6-coloreada D de la figura 5.22a tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas; efectivamente, es sencillo ver que $\{x_2, x_4, x_6\}$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas para D , donde $\delta_{D_S}^+(\{x_2, x_4, x_6\}) = 0$ en la digráfica de la figura 5.8.

También podemos hacer notar lo siguiente.

Observación 5.1. *El teorema 5.1 es una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow (en el caso finito).*

Hagamos notar que:

1. *En la digráfica 2-coloreada podemos considerar la partición $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}\}$ y las digráficas inducidas por esta partición H_1 y H_2 , respectivamente, las cuales resultan ser transitivas por trayectorias monocromáticas pues tales digráficas son monocromáticas.*
2. *Ahora se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}\}, \xi_2 = \{\{2\}\}\}$ una partición de ξ en la digráfica 2-coloreada, y las digráficas generadoras de modo que $A(D_1) = \{a \in A(D) : c(a) = \text{color } 1\}$ y $A(D_2) = \{a \in A(D) : c(a) = \text{color } 2\}$, notemos D_1 y D_2 son monocromáticas.*
3. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y cada ciclo γ de D contenido en D_i existe C_j en ξ tal que $c(f) \in C_j$ para cada f en $A(\gamma)$, pues D_i es monocromático.*

Ahora, ya que D sólo utiliza dos colores, tenemos que:

4. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 y*

5. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 . Por lo cual cumple que, si (u, v, w, x) es una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 , entonces existe una trayectoria monocromática entre u y x en D .

Ya que cada digráfica 2-coloreada D cumple las hipótesis del teorema principal, podemos concluir que el teorema 5.1 es una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow en el caso finito.

Observación 5.2. El teorema 5.1 es una extensión del teorema 4.2.

Sea D una digráfica la cual cumple las hipótesis del teorema 4.2. Ahora:

1. Supongamos que el conjunto de colores de D es $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\{C_1 = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}, C_2 = \{c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_m\}\}$ es la partición del conjunto de colores considerada en el teorema 4.2, con D_i la subdigráfica generadora de D de modo que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in B \text{ para algún } B \in C_i\}$. Ahora sea $\xi = \{\{c_1\}, \{c_2\}, \dots, \{c_m\}\}$ la primer partición considerada para el teorema 5.1.
2. Para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ sucede que la gráfica H_i , definida como $H_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in \{c_i\}\}]$ es transitiva por trayectorias monocromáticas pues H_i es monocromático.
3. Sea $\{\xi_1 = \{\{c_1\}, \dots, \{c_k\}\}, \xi_2 = \{\{c_{k+1}\}, \dots, \{c_m\}\}\}$ una partición de ξ y para cada i en $\{1, 2\}$ D'_i será la subdigráfica generadora de D tal que $A(D'_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in \{c_j\} \text{ para algún } c_j \in \xi_i\}$.

Note que $D_1 = D'_1$ y $D_2 = D'_2$. Por lo que:

4. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ contenido en D'_i existe $\{c_j\}$ en ξ_i tal que para cada f en $A(\gamma)$ $c(f) = c_j$, porque cada ciclo en D_i es monocromático.
5. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 o una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 , de otro modo $\mathcal{C}(D)$ contendría un triángulo arcoíris o un \vec{P}_3 arcoíris que utilice colores tanto de C_1 como de C_2 .

Ya que D cumple las hipótesis del teorema 5.1, tenemos que éste es una extensión del teorema 4.2.

Capítulo 6

Digráficas H -coloreadas

Este es el capítulo principal del trabajo mismo, el cual está conformado por cuatro secciones.

En la primera sección se establecen definiciones básicas, a saber: H -coloración por flechas, digráfica H -coloreada, H -camino, H -trayectoria y obstrucción de un camino. Este último concepto resulta de vital importancia dado que muchos resultados en digráficas y digráficas m -coloreadas no serán válidos en digráficas H -coloreadas por la existencia de obstrucciones en caminos.

En la segunda sección se dan los conceptos de H -núcleo y H -núcleo por camino de una digráfica H -coloreada, cuya importancia se estableció en la Introducción. Así mismo, se dan observaciones pertinentes a tales definiciones, como el hecho de que el concepto de H -núcleo en una digráfica H -coloreada generaliza al de núcleo en una digráfica y al de núcleo por trayectorias monocromáticas en una digráfica m -coloreada.

En la tercera sección de este capítulo se hace una extensión de los resultados principales de los capítulos 4 y 5 (teoremas 4.2 y 5.1) de modo que se dan condiciones suficientes para la existencia de un H -núcleo en digráficas H -coloreadas. El camino a seguir es similar a lo realizado en los capítulos 4 y 5: primeramente se considera una partición $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ($k \geq 2$) de $V(H)$, el conjunto de colores de D , de modo que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que la subdigráfica G_i , definida como $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es transitiva por H -trayectorias. Posteriormente, se considera otra partición $\{\xi_1, \xi_2\}$ de ξ , y se trabaja con digráficas generadoras de D , a saber D_i , tal que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c_D(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \text{ en } \xi_i\}$. Entonces, se estudian condiciones sobre D_1 y D_2 .

Así, el resultado principal de este capítulo (teorema 6.1) afirma lo siguiente:

Sea D una digráfica H -coloreada. Supongamos que:

1. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m .
2. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
3. Si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.
4. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .
5. Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Entonces D tiene un H -núcleo.

Para mayor comprensión de las técnicas utilizadas a lo largo de esta sección, se ejemplifica el proceso mediante una digráfica explícita.

Para finalizar esta sección, se exhiben ejemplos de digráficas H -coloreadas las cuales muestran que cada una de las condiciones del teorema 6.1 son indispensables, mostrando de esta manera que tal teorema es lo más exacto posible.

Finalmente, en la cuarta sección se hace una comparación entre el resultado obtenido en este capítulo y otros resultados similares sobre la existencia de H -núcleos en digráficas H -coloreadas. Para comprender estos resultados análogos, se introducen las definiciones necesarias, tales como: transitividad de una digráfica, H -ciclo, H -separación, H - C_3 fuertemente arcoíris, H - P_3 fuertemente arcoíris en una digráfica H -coloreada, entre otras.

6.1. Definiciones y resultados básicos en digráficas H -coloreadas

Sean H un digráfica posiblemente con lazos y D una digráfica simple finita. Una **H -coloración por flechas de D** es una función $c : A(D) \rightarrow V(H)$, es decir, $V(H)$ es el **conjunto de colores** con el cual se colorean las flechas de D . De este modo, si a está en $A(D)$, el **color** de a es $c_D(a)$, o bien, cuando no haya confusión sobre a que digráfica nos estamos refiriendo simplemente escribiremos $c(a)$. Si D tiene asociada una H -coloración por flechas diremos que D es una **digráfica H -coloreada**. En la figura 6.1 podemos observar a una digráfica H -coloreada D , donde $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el conjunto de colores.

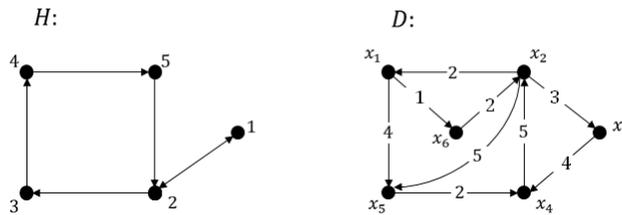


Figura 6.1: Ejemplo de una digráfica H -coloreada D .

Observación 6.1. *Note que si H es la digráfica definida por $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ y $A(H)$ un conjunto arbitrario, entonces toda H -coloración de D es una m -coloración de D . Luego toda digráfica m -coloreada se puede asociar a una digráfica H -coloreada al considerar la digráfica H definida anteriormente, de modo que la definición de H -coloración de una digráfica es una generalización de la definición de m -coloración de una digráfica.*

Sea D una digráfica H -coloreada. Un camino (trayectoria) (v_1, v_2, \dots, v_n) en D , es un **H -camino (H -trayectoria)** si y sólo si $(c_D(v_1, v_2), c_D(v_2, v_3), \dots, c_D(v_{n-1}, v_n))$ es un camino en H . Si u y v son dos vértices distintos de D , denotaremos por uv - H -camino (respectivamente uv - H -trayectoria) para referirnos a un H -camino (respectivamente H -trayectoria) del vértice u hacia el vértice v . Un H -camino (H -trayectoria) $(x = v_1, v_2, \dots, v_n = y)$ en D será llamada una S_1S_2 - H -camino (S_1S_2 - H -trayectoria) siempre que x esté en S_1 y y esté en S_2 , donde S_1 y S_2 son subconjuntos de $V(D)$. De igual modo, un H -camino (H -trayectoria) $(x = v_1, v_2, \dots, v_n = y)$ en D será llamada un xS - H -camino (xS - H -trayectoria) siempre que y esté en S , donde S es un subconjunto de $V(D)$. De manera análoga se definen Sy - H -camino y Sy - H -trayectoria.

Observación 6.2. *Notemos que la existencia de un xy - H -camino T no implica que deba existir una xy - H -trayectoria contenida en T , tal como sucedía en digráficas (proposición 1.1) y en digráficas m -coloreadas (proposición 3.1). De hecho, en la digráfica H -coloreada D de la figura 6.1, tenemos que $P = (x_6, x_2, x_3, x_4, x_2, x_1)$ es un x_6x_1 - H -camino en D (pues $(2, 3, 4, 5, 2)$ es un camino en H), el cual no contiene una x_6x_1 - H -trayectoria, dado que (x_6, x_2, x_1) es la única x_6x_1 -trayectoria contenida en P y ésta no es una x_6x_1 - H -trayectoria pues $(2, 2) \notin A(H)$.*

Observación 6.3. *Si T_1 es una xy - H -trayectoria y T_2 es una yz - H -trayectoria, esto no implica necesariamente que $T_1 \cup T_2$ es un xz - H -camino, tal como sucedía en digráficas y en digráficas m -coloreadas (en particular cuando T_1 y T_2 eran trayectorias monocromáticas). En efecto, en la digráfica H -coloreada D de la figura 6.1, tenemos que $T_1 = (x_3, x_4, x_2)$ es una x_3x_2 - H -trayectoria en D (pues $(4, 5)$ es un camino en H) y $T_2 = (x_2, x_5, x_4)$ es una x_2x_4 - H -trayectoria en D (pues $(5, 2)$ es un camino en H), sin embargo, $T_1 \cup T_2 = (x_3, x_4, x_2, x_5, x_4)$ no es un x_3x_4 - H -camino en D , pues $(5, 5) \notin A(H)$.*

Gracias a estas observaciones, podemos notar que tales resultados no son válidos en digráfica H -coloreadas debido a la existencia de ciertos vértices, en los cuales existe una transición de colores no válida en la coloración dada por la digráfica H . De este modo tenemos la siguiente definición la cual fue introducida por Hortensia Galeana Sánchez [15]: Sean D una digráfica H -coloreada, $W = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un camino en D e i en $\{1, 2, \dots, n-1\}$, decimos que x_i es una **obstrucción de W** si $(c(x_{i-1}, x_i), c(x_i, x_{i+1})) \notin A(H)$. En caso de ser $W = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$ un camino cerrado, diremos que $x_0 = x_n$ es una obstrucción de D si $(c(x_{n-1}, x_n), c(x_0, x_1)) \notin A(H)$. Luego, en la digráfica H -coloreada D de la Figura 6.1, tenemos que x_2 es obstrucción del camino (x_4, x_2, x_5) (pues $(c(x_4, x_2), c(x_2, x_5)) = (5, 5) \notin A(H)$) y x_2 es una obstrucción del camino cerrado (x_2, x_3, x_4, x_2) (pues $(c(x_4, x_2), c(x_2, x_3)) = (5, 3) \notin A(H)$).

6.2. Definiciones y resultados básicos en núcleos en digráficas H -coloreadas

Un subconjunto N de $V(D)$ se dice que es un **H -núcleo por caminos** si satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para cada par de vértices distintos en N no existe un H -camino entre ellos en D ; esto es, N es **H -independiente por caminos** en D .
2. Para cada vértice x en $V(D) \setminus N$ existe y en N tal que existe un xy - H -camino en D ; esto es, N es **H -absorbente por caminos** en D .

Un subconjunto N de $V(D)$ se dice que es un **H -núcleo** si satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para cada par de vértices distintos en N no existe una H -trayectoria entre ellos en D ; esto es, N es **H -independiente** en D .
2. Para cada vértice x en $V(D) \setminus N$ existe y en N tal que existe una xy - H -trayectoria en D ; esto es, N es **H -absorbente** en D .

Los respectivos ejemplos de las dos definiciones anteriores, serán dados en las observaciones 6.6 y 6.7.

Ahora, de la definición de H -núcleo tenemos lo siguiente:

Observación 6.4. Considerando la digráfica H definida por $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ y $A(H) = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)\}$ (véase figura 6.2a) tenemos que si un subconjunto de $V(D)$, digamos N , es núcleo por trayectorias monocromáticas de D , entonces N es un H -núcleo de D ; esto debido a que todas las H -trayectorias en D son trayectorias monocromáticas. Luego, el concepto de H -núcleo de una digráfica H -coloreada es una generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica m -coloreada.



Figura 6.2

Observación 6.5. Considerando la digráfica H definida por $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ y $A(H) = \emptyset$ (véase figura 6.2b) tenemos que si un subconjunto de $V(D)$, digamos N , es un H -núcleo de D , entonces N es un núcleo de D ; esto debido a que todas las H -trayectorias en D son únicamente flechas de D . Luego, el concepto de H -núcleo de una digráfica H -coloreada es una generalización del concepto de núcleo de una digráfica.

Observación 6.6. Si D tiene un H -núcleo por caminos, entonces D no tiene necesariamente un H -núcleo. De hecho, Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Sánchez López en [17], exhibieron una digráfica H -coloreada D que ejemplifica lo dicho en esta observación (véase figura 6.3). En efecto, $\{w\}$ es un H -núcleo por caminos de D , pues (u, v, z, v, w) es un H -camino que termina en w y contiene a todos los vértices de D . Por otro lado, D no tiene un H -núcleo, pues todo conjunto H -independiente tiene cardinalidad 1, dado que entre cada par de vértices es posible hallar una H -trayectoria entre ellos, y en este caso, un conjunto de cardinalidad 1 no es H -absorbente en D .

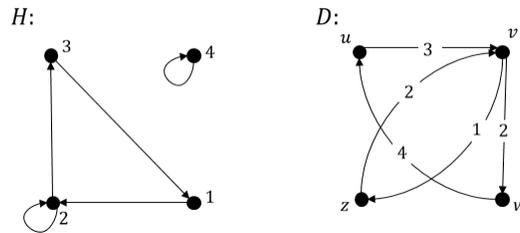


Figura 6.3: Digráfica H -coloreada con H -núcleo por caminos y sin H -núcleo.

Observación 6.7. Si D tiene un H -núcleo, entonces D no tiene necesariamente un H -núcleo por caminos. De hecho, Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Sánchez López en [17], exhibieron una digráfica H -coloreada D que ejemplifica lo dicho en esta observación (véase figura 6.4). En efecto, $\{u, x\}$ es un H -núcleo de D (entre u y x no existe una H -trayectoria y $\Gamma_D(\{u, x\}) = \{v, w, z\}$). Además, D no tiene H -núcleo por caminos pues todo conjunto H -independiente por caminos tiene cardinalidad 1, dado que (x, v, w, v, u) es un xu - H -camino en D y $N_D(z) = \{u, x, w, v\}$, y en este caso, un conjunto de cardinalidad 1 no es H -absorbente por caminos en D .

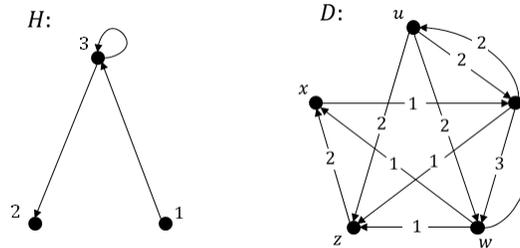


Figura 6.4: Digráfica H -coloreada con H -núcleo y sin H -núcleo por caminos.

6.3. Ciclos, H -caminos y transitividad por H -trayectorias en digráficas H -coloreadas

De ahora en adelante, D denotará una digráfica finita H -coloreada y $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\} (k \geq 2)$ será una partición de $V(H)$, de modo que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que la digráfica G_i , definida como $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es una subdigráfica **transitiva por H -trayectorias** de D ; esto es, la existencia de una xy - H -trayectoria y una yz - H -trayectoria en G_i , implica la existencia de una xz - H -trayectoria en G_i . Note que G_i y G_j son ajenas por aristas para todo $i \neq j$.

En la figura 6.5a podemos observar una digráfica H -coloreada siendo $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ el conjunto de colores de la digráfica D . Para tal coloración consideremos $\xi = \{C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}, C_3 = \{5\}\}$ una partición de C de manera que las subdigráficas inducidas G_1, G_2, G_3 son transitivas por H -trayectorias (véanse figuras 6.5b, 6.5c y 6.5d). En efecto, en la subdigráfica G_1 (figura 6.5b) tenemos que $(x_4, x_3), (x_3, x_2), (x_4, x_3, x_2)$ son las únicas H -trayectorias, por lo que G_1 es transitiva por H -trayectorias, así también G_2 y G_3 .

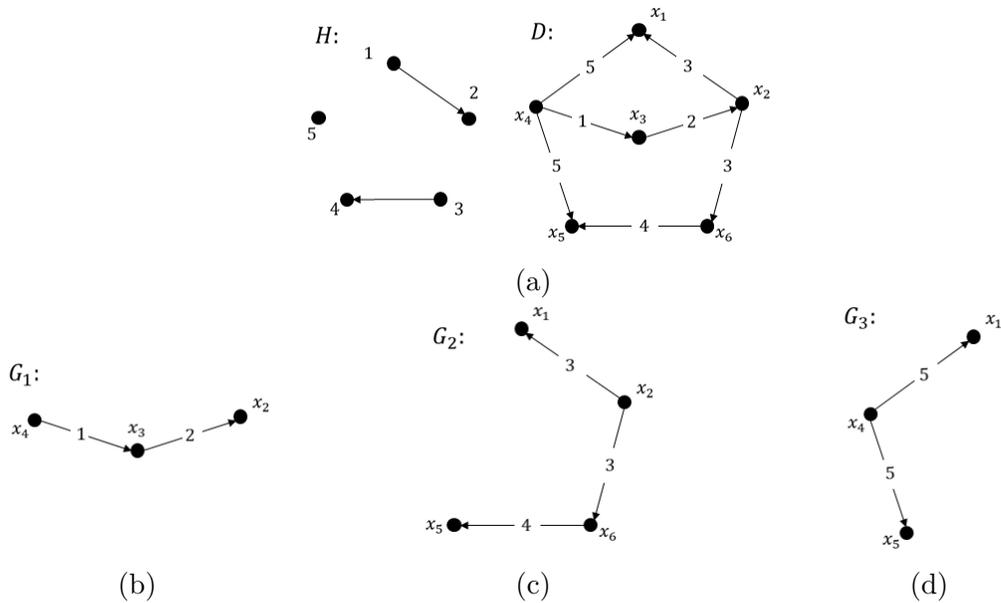


Figura 6.5: Ejemplo de una digráfica H -coloreada con sus respectivas subdigráficas inducidas por una partición del conjunto de colores.

Lema 6.1. *Supongamos que:*

1. *Para cada ciclo γ de D existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_i .*
2. *Para cada H -camino P de D existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en G_j .*

Si $S = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas ($n \geq 2$) tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria en D , digamos T_i , entonces existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ está contenido en G_j (los índices de los vértices son tomados módulo n).

Demostración. Primero observemos que, como cada H -trayectoria es un H -camino, entonces para cada H -trayectoria T de D existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que T está contenido en G_i . Luego, para cada l en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ sea l' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que T_l está contenido en $G_{l'}$ por hipótesis. Probaremos por inducción sobre n , el número de vértices en la sucesión S ($n \geq 2$), que existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ está contenido en G_j .

Base de inducción. Si $n = 2$, entonces $T_0 \cup T_1$ es un camino cerrado, y de la proposición 1.1, se sigue que $T_0 \cup T_1$ contiene un ciclo γ . Ahora, por hipótesis, existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_j . Sea $\{i_0, i_1\}$ subconjunto de $\{1, 2, \dots, k\}$, de modo que T_0 esté contenido en G_{i_0} y T_1 esté contenido en G_{i_1} . Notemos que γ contiene flechas de T_0 y T_1 , pues T_0 y T_1 no forman un ciclo por ellos mismos. Así, dado que $i_0 = j = i_1$ y dado que las digráficas G_r son ajenas en flechas, podemos concluir que $T_0 \cup T_1$ está contenido en G_j .

Hipótesis de inducción. Supongamos que si $S = (u_0, u_1, \dots, u_{l-1})$ es una sucesión de l vértices distintos por parejas ($n-1 \geq l \geq 2$) tal que para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria en D , digamos T_i , entonces existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{l-1} T_i$ está contenido en G_j .

Paso inductivo. Sea $S = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ una sucesión de n vértices que satisface las hipótesis del lema 6.1.

Analizaremos dos casos:

Caso 1. Existe i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que u_i no es obstrucción en $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$.

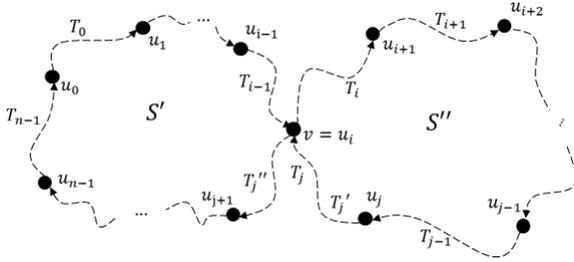
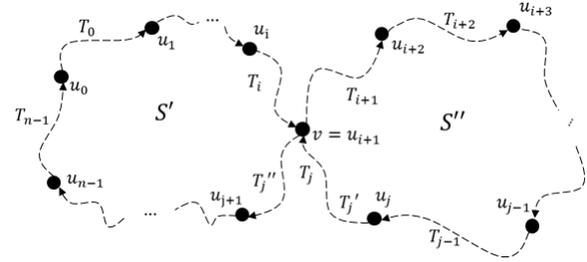
Sin pérdida de generalidad supongamos que u_1 no es obstrucción en $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$. Entonces $T_0 \cup T_1$ es un H -camino de u_0 hacia u_2 . Ahora, por hipótesis, existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $T_0 \cup T_1$ está contenido en G_m . Luego, al ser G_m transitiva por H -trayectorias y como T_0, T_1 están contenidos en G_m , se sigue que existe una H -trayectoria T de u_0 hacia u_2 . Consideremos $S' = (u_0, u_2, u_3, \dots, u_{n-1})$, la cual es una sucesión que satisface las hipótesis del lema 6.1, así por la hipótesis de inducción, existe l en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $T \cup T_2 \cup T_3 \cup \dots \cup T_{n-1}$ está contenido en G_l y como T está contenida en G_m , tenemos que $m = l$. Así, $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ está contenido en G_m .

Caso 2. Para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$, u_i es obstrucción de $\bigcup_{j=0}^{n-1} T_j$.

- Supongamos que $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) \neq \emptyset$ para algún i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Sea v en $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1})$, entonces $(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un camino cerrado el cual contiene un ciclo γ , por el lema 1.1. Ahora, por hipótesis, existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m , dado que T_i y T_{i+1} no son un ciclo por sí mismos, entonces γ contiene flechas de T_i y T_{i+1} , lo que implica que T_i y T_{i+1} están contenidas en G_m ; es decir, $i' = m = (i+1)'$, por ser las digráficas G_r ajenas en flechas. Luego, al ser G_m transitiva por H -trayectorias y como T_i y T_{i+1} están contenidos en G_m , entonces existe una $u_i u_{i+2}$ - H -trayectoria T contenida en G_m . Así, $S' = (u_0, u_1, \dots, u_i, u_{i+2}, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión que satisface las hipótesis del lema 6.1, de este modo, por la hipótesis de inducción, existe l en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{i-1} \cup T \cup T_{i+2} \cup \dots \cup T_{n-1}$ está contenido en G_l . Como T está contenido en G_m entonces $m = l$. Así, $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ está contenido en G_m .
- Supongamos que $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) = \emptyset$ para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$.
 - Si $V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset$ para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $|i - j| \geq 2$, entonces $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un ciclo. La hipótesis implica que existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ está contenido en G_m .

- Asumamos que $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$ para algunos i y j tales que $|i - j| \geq 2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$. Sea v en $V(T_i) \cap V(T_j)$.

Si $v = u_i$, entonces $T_j' = (u_j, T_j, v = u_i)$ y $T_j'' = (v = u_i, T_j, u_{j+1})$ son H -trayectorias tales que $T_j' \cup T_j'' = T_j$, la cual está contenida en $G_{j'}$ (véase figura 6.6). Consideremos $S' = (u_i = v, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{i-1})$ y $S'' = (u_i = v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen r y s en $\{1, 2, \dots, k\}$ tales que $T_j'' \cup (\bigcup_{m=j+1}^{n-1} T_m) \cup (\bigcup_{m=0}^{i-1} T_m)$ está contenido en G_r y $(\bigcup_{m=i}^{j-1} T_m) \cup T_j'$ está contenido en G_s . Notemos que $r = j' = s$, pues las digráficas G_t son ajenas en flechas, así $\bigcup_{m=0}^{n-1} T_m$ está contenido en G_s .

Figura 6.6: Caso $v = u_i$.Figura 6.7: Caso $v = u_{i+1}$.

Si $v = u_{i+1}$, entonces $T_j' = (u_j, T_j, v = u_{i+1})$ y $T_j'' = (v = u_{i+1}, T_j, u_{j+1})$ son H -trayectorias tales que $T_j' \cup T_j'' = T_j$, la cual está contenida en $G_{j'}$ (véase figura 6.7). Consideremos $S' = (u_{i+1} = v, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$ y $S'' = (u_{i+1} = v, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen r y s en $\{1, 2, \dots, k\}$ tales que $T_j'' \cup (\bigcup_{m=j+1}^{n-1} T_m) \cup (\bigcup_{m=0}^i T_m)$ está contenido en G_r y $(\bigcup_{m=i+1}^{j-1} T_m) \cup T_j'$ está contenido en G_s . Notemos que $r = j' = s$, así $\bigcup_{m=0}^{n-1} T_m$ está contenido en G_s .

Si $v = u_j$, entonces $T'_i = (u_i, T_i, v = u_j)$ y $T''_i = (v = u_j, T_i, u_{i+1})$ son H -trayectorias tales que $T'_i \cup T''_i = T_i$, la cual está contenida en $G_{i'}$ (véase figura 6.8). Consideramos $S' = (u_j = v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1})$ y $S'' = (u_j = v, u_{j+1}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen r y s en $\{1, 2, \dots, k\}$ tales que $T''_i \cup (\bigcup_{m=i+1}^{j-1} T_m)$ está contenido en G_r y $(\bigcup_{m=j}^{n-1} T_m) \cup (\bigcup_{m=0}^{i-1} T_m) \cup T'_i$ está contenido en G_s . Notemos que $r = i' = s$, así $\bigcup_{m=0}^{n-1} T_m$ está contenido en G_s .

Si $v = u_{j+1}$, entonces $T'_i = (u_i, T_i, v = u_{j+1})$ y $T''_i = (v = u_{j+1}, T_i, u_{i+1})$

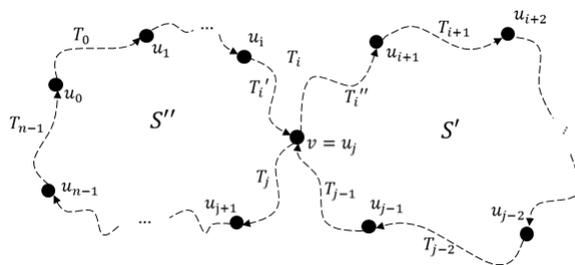


Figura 6.8: Caso $v = u_j$.

son H -trayectorias tales que $T'_i \cup T''_i = T_i$, la cual está contenida en $G_{i'}$ (véase figura 6.9). Consideremos $S' = (u_{j+1} = v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j)$ y $S'' = (u_{j+1} = v, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$, las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen r y s en $\{1, 2, \dots, k\}$ tales que $T''_i \cup (\bigcup_{m=i+1}^j T_m)$ está contenido en G_r y $(\bigcup_{m=j+1}^{n-1} T_m) \cup (\bigcup_{m=0}^{i-1} T_m) \cup T'_i$ está contenido en G_s . Notemos que $r = i' = s$, así $\bigcup_{m=0}^{n-1} T_m$ está contenido en G_s .

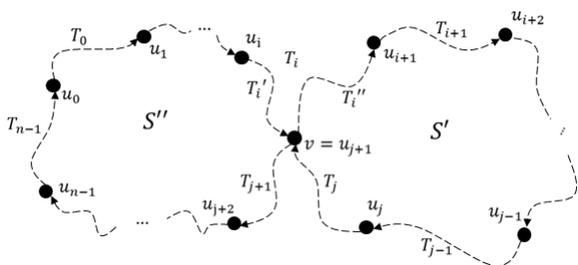


Figura 6.9: Caso $v = u_{j+1}$.

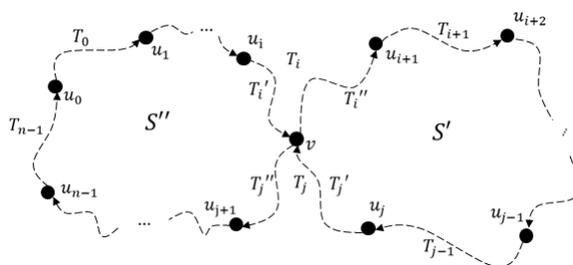


Figura 6.10: Caso $v \notin \{u_i, u_{i+1}, u_j, u_{j+1}\}$.

Si $v \notin \{u_i, u_{i+1}, u_j, u_{j+1}\}$, entonces $T'_i = (u_i, T_i, v)$, $T''_i = (v, T_i, u_{i+1})$, $T'_j = (u_j, T_j, v)$, $T''_j = (v, T_j, u_{j+1})$ son H -trayectorias tales que $T'_i \cup T''_i = T_i$, la cual está contenida en $G_{i'}$, y $T'_j \cup T''_j = T_j$, la cual está contenida en $G_{j'}$ (véase figura 6.10). Consideremos $S' = (v, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j)$ y $S'' = (v, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_i)$ las cuales son sucesiones que cumplen la hipótesis de inducción, de modo que existen r y s en $\{1, 2, \dots, k\}$ tales que $T''_i \cup (\bigcup_{m=i+1}^{j-1} T_m) \cup T'_j$ está contenido en G_r y $T''_j \cup (\bigcup_{m=j+1}^{n-1} T_m) \cup (\bigcup_{m=0}^{i-1} T_m) \cup T'_i$ está contenido en G_s . Notemos que $r = i' = j' = s$, así $\bigcup_{m=0}^{n-1} T_m$ está contenido en G_s .

Concluimos de los casos 1 y 2 que existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ está contenido en G_j . \square

Lema 6.2. Consideremos l en $\{1, 2, \dots, k\}$. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{1, 2, \dots, n-1\}$ existe una $x_{i-1}x_i$ - H -trayectoria en G_l . Entonces para cada m en $\{1, 2, \dots, n-1\}$ existe una x_0x_m - H -trayectoria contenida en G_l .

Demostración. La demostración será por inducción sobre n .

Base de inducción. Si $n = 2$, el resultado se cumple, pues por hipótesis existe una $x'_0x'_1$ - H -trayectoria contenida en G_l , si $C' = (x'_0, x'_1)$ es la sucesión dada en la hipótesis del lema 6.2.

Hipótesis de inducción. Sea $n \geq 2$. Supongamos que si $C' = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ es una sucesión de m vértices, con $m < n$, que satisface las hipótesis del lema 6.2, entonces, para cada m' en $\{1, 2, \dots, m-1\}$ existe una $x_0x_{m'}$ - H -trayectoria contenida en G_l .

Paso inductivo. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ una sucesión de n vértices, con $n \geq 2$, que satisface las hipótesis del lema 6.2. Por la hipótesis de inducción, aplicada a la sucesión $C' = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2})$, existe una $x_0x_{m'}$ - H -trayectoria $T_{m'}$ contenida en G_l para cada m' en $\{1, 2, \dots, n-2\}$. Sea T una $x_{n-2}x_{n-1}$ - H -trayectoria contenida en G_l , de este modo T_{n-2} y T son dos H -trayectorias contenidas en G_l . Al ser G_l transitiva por H -trayectorias, entonces existe una x_0x_{n-1} - H -trayectoria en G_l ; es decir, existe una $x_0x_{m'}$ - H -trayectoria contenida en G_l para cada m' en $\{1, 2, \dots, n-1\}$, lo que termina el proceso de inducción. \square

Lema 6.3. *Supongamos que:*

1. *Para cada ciclo γ de D existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_i .*
2. *Para cada H-camino P de D existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en G_j .*

Entonces no existe un sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -H-trayectoria en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -H-trayectoria en D .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -H-trayectoria en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -H-trayectoria en D .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, con $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = x_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i'_0} = x_{j_0}$, entonces $x_{i'_0} = x_{i_0}$, con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ de $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $x_l \neq x_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $x_l = x_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -H-trayectoria en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -H-trayectoria en D . Para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ sea T_i una $x_i x_{i+1}$ -H-trayectoria en D (los índices son tomados módulo n), así por el lema 6.1 existe l en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\bigcup_{m=0}^{n-1} T_m$ está contenido en G_l , de modo que para cada i en $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ T_i está contenida en G_l .

Por el lema 6.2 existe una $x_0 x_{n-1}$ -H-trayectoria contenida en G_l , la cual es una $x_n x_{n-1}$ -H-trayectoria contenida en G_l , (pues los índices son tomados módulo n), lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ -H-trayectoria en D y no existe una $x_{i+1} x_i$ -H-trayectoria en D . \square

Definición 6.1. Sea D una digráfica H -coloreada. Un subconjunto S de $V(D)$ es un **H -seminúcleo** si se cumplen las siguientes condiciones:

1. S es un conjunto H -independiente en D .
2. Para cada z en $V(D) \setminus S$, si existe una Sz - H -trayectoria en D , entonces existe una zS - H -trayectoria en D .

Observación 6.8. Si D es una digráfica H -coloreada, entonces el conjunto vacío es un H -seminúcleo de D .

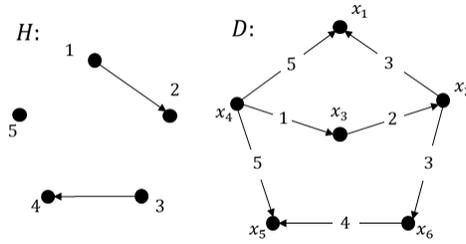


Figura 6.11

Dada la definición anterior, podemos notar que en la digráfica D de la figura 6.11, el conjunto $\{x_1, x_5\}$ es un H -seminúcleo de D , pues es H -independiente al no existir una H -trayectoria entre x_1 y x_5 en D y $\delta_D^+(x_1) = 0 = \delta_D^+(x_5)$.

Para las digráficas G_r se observa lo siguiente.

Lema 6.4. Consideremos r en $\{1, 2, \dots, k\}$. Entonces no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en G_r . Además, existe x_0 en $V(G_r)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo de G_r .

Demostración. Sea r en $\{1, 2, \dots, k\}$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en G_r .

Al ser D una digráfica finita, existe un subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots\}$, con $i < j$, tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : x_j = x_i \text{ para algún } i < j\}$ e i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único con dicha propiedad en el conjunto $\{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$, de otro modo, si existiera i'_0 en $\{0, 1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ tal que $x_{i'_0} = x_{j_0}$, entonces $x_{i'_0} = x_{i_0}$,

con $i_0 < j_0$, contradiciendo la minimalidad de j_0 . Observe, también, que para cada subconjunto $\{l, l'\}$ de $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, se tiene que $x_l \neq x_{l'}$; si para algunos l y l' en $\{i_0, i_0 + 1, \dots, j_0 - 1\}$, con $l \neq l'$, sucediera que $x_l = x_{l'}$, ésto contradeciría nuevamente la minimalidad de j_0 , pues $l < j_0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$, $j_0 = n$. Luego, $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos por parejas tales que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en G_r . Para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ sea T_i una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r (los índices son tomados módulo n). Luego, por el lema 6.2 existe una $x_0 x_{n-1}$ - H -trayectoria contenida en G_r , la cual es una $x_n x_{n-1}$ - H -trayectoria contenida en G_r (pues los índices son tomados módulo n), lo cual es una contradicción. Por tanto no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en G_r .

Para la segunda parte, procedamos de nuevo por contradicción. Supongamos que para cada x en $V(G_r)$, $\{x\}$ no es un H -seminúcleo de G_r . Entonces para cada x en $V(G_r)$ existe y en $V(G_r) \setminus \{x\}$ tal que existe una xy - H -trayectoria contenida en G_r y no existe una yx - H -trayectoria en G_r .

Sea x_0 en $V(G_r)$, de este modo existe x_1 en $V(G_r) \setminus \{x_0\}$ tal que existe una $x_0 x_1$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_1 x_0$ - H -trayectoria en G_r . De nuevo, por nuestra suposición, existe x_2 en $V(G_r) \setminus \{x_1\}$ tal que existe una $x_1 x_2$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_2 x_1$ - H -trayectoria en G_r . Si ya tenemos elegidos a x_0, x_1, \dots, x_n , sabemos que existe x_{n+1} en $V(G_r) \setminus \{x_n\}$ tal que existe una $x_n x_{n+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{n+1} x_n$ - H -trayectoria en G_r . Continuando de esta manera, construimos una sucesión $S = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ de vértices de G_r tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en G_r . Ésto contradice la primer parte de este lema.

Luego, existe x_0 en $V(G_r)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo de G_r . □

Más aún, tenemos que se cumple lo siguiente:

Lema 6.5. *Supongamos que:*

1. *Para cada ciclo γ de D existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_i .*
2. *Para cada H -camino P de D existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en G_j .*

Entonces existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo de D .

Demostración. Por contradicción, supongamos que para cada x en $V(D)$, $\{x\}$ no es un H -seminúcleo de D . Así, para cada x en $V(D)$ existe y en $V(D) \setminus \{x\}$ tal que existe una xy - H -trayectoria en D y no existe una yx - H -trayectoria en D .

Sea x_0 en $V(D)$, de este modo existe x_1 en $V(D) \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1 - H -trayectoria en D y no existe una x_1x_0 - H -trayectoria en D . De nuevo, por nuestra suposición, existe x_2 en $V(D) \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2 - H -trayectoria en D y no existe una x_2x_1 - H -trayectoria en D . Si ya tenemos elegidos a x_0, x_1, \dots, x_n ; sabemos que existe x_{n+1} en $V(D) \setminus \{x_n\}$ tal que existe una x_nx_{n+1} - H -trayectoria en D y no existe una $x_{n+1}x_n$ - H -trayectoria en D . Continuando de esta manera, construimos una sucesión $S = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ de vértices de D tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} - H -trayectoria en D y no existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria en D , contradiciendo el lema 6.3. Por lo tanto, existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo de D . \square

Sea D una digráfica H -coloreada. De ahora en adelante, sea $\{\xi_1, \xi_2\}$ una partición de ξ y D_i será la subdigráfica generadora de D tal que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \text{ en } \xi_i\}$ para cada i en $\{1, 2\}$. Note que para cada r en $\{1, 2, \dots, k\}$, G_r es una subdigráfica de D_1 o de D_2 .

Dada la digráfica D de la figura 6.12a consideremos la partición de ξ dada por $\{\xi_1 = \{C_1, C_3\}, \xi_2 = \{C_2\}\} = \{\xi_1 = \{\{1, 2\}, \{5\}\}, \xi_2 = \{\{3, 4\}\}\}$, de este modo en la figura 6.12 podemos observar las subdigráficas generadoras respectivas D_1 y D_2 .

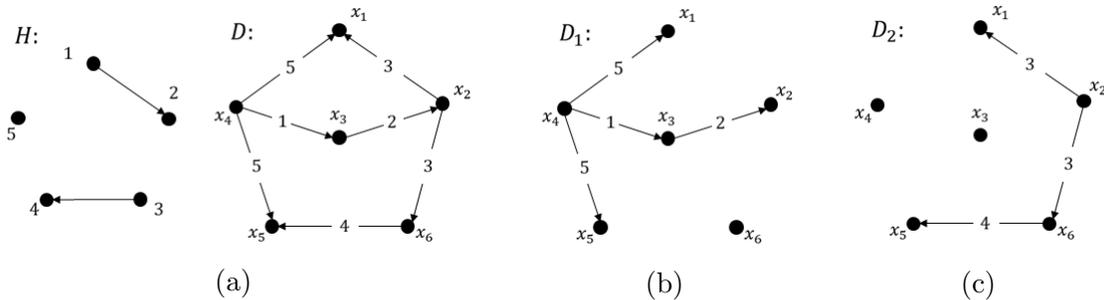


Figura 6.12: Subdigráficas generadoras de la digráfica D dada una partición $\{\xi_1 = \{\{1, 2\}, \{5\}\}, \xi_2 = \{\{3, 4\}\}\}$ de la partición previa $\xi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$.

Definición 6.2. Sea S subconjunto de $V(D)$, S es un **H -seminúcleo módulo D_2** de D si S es H -independiente y para cada z en $V(D) \setminus S$, si existe una Sz - H -trayectoria contenida en D_1 , entonces existe una zS - H -trayectoria contenida en D .

Observación 6.9. Si D es una digráfica H -coloreada, entonces \emptyset es un H -seminúcleo módulo D_2 de D .

Dada la definición anterior, podemos notar que en la digráfica D de la figura 6.5a, el conjunto $\{x_1, x_6\}$ es un H -seminúcleo módulo D_2 de D , pues no existe una H -trayectoria entre los vértices x_1 y x_6 en D y $\delta_{D_1}^+(x_1) = 0 = \delta_{D_1}^+(x_6)$. Más aún, todos los H -seminúcleos módulo D_2 de D son los siguientes: $\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_5\}, \{x_1, x_6\}, \{x_3, x_5\}, \{x_3, x_6\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_1, x_3, x_6\}$.

En general, se tiene el siguiente resultado.

Lema 6.6. Supongamos que:

1. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m .
2. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.

Entonces existe x_0 en $V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo módulo D_2 de D .

Demostración. Si $|\xi_1| = 1$, digamos $\xi_1 = \{C_r\}$, entonces G_r es una subdigráfica de D_1 , más aún, D_1 es la digráfica G_r y posiblemente algunos vértices aislados. Por el lema 6.4 existe x_0 en $V(G_r)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo de G_r . Así, de la definición de H -seminúcleo módulo D_2 , se tiene que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo módulo D_2 de D .

Supongamos que $|\xi_1| \geq 2$, entonces para D_1 , subdigráfica de D , se cumple que para cada ciclo γ de D_1 existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m . También, para cada H -camino P de D_1 existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en G_m . Luego, por el lema 6.5 existe x_0 en $V(D_1) = V(D)$ tal que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo de D_1 . Así de la definición de H -seminúcleo módulo D_2 , se tiene que $\{x_0\}$ es un H -seminúcleo módulo D_2 de D . \square

Sea $\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) : S \text{ es un } H\text{-seminúcleo no vacío módulo } D_2 \text{ de } D\}$.

Cuando $\mathcal{S} \neq \emptyset$, denotaremos por $D_{\mathcal{S}}$ a la digráfica definida como sigue: $V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ (es decir, por cada elemento de \mathcal{S} colocamos un vértice en $D_{\mathcal{S}}$) y para un subconjunto $\{S_1, S_2\}$ de \mathcal{S} , con $S_1 \neq S_2$, se tiene que $(S_1, S_2) \in A(D_{\mathcal{S}})$ si y sólo si para cada s_1 en S_1 existe s_2 en S_2 tal que $s_1 = s_2$ o hay una $s_1 s_2$ - H -trayectoria contenida en D_2 y no hay una $s_2 s_1$ - H -trayectoria contenida en D .

De lo dicho anteriormente, en la digráfica D de la Figura 6.12 tenemos que, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, más aún, $\mathcal{S} = \{\{x_1, x_3, x_5\}, \{x_1, x_3, x_6\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_5\}, \{x_1, x_6\}, \{x_3, x_5\}, \{x_3, x_6\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_5\}, \{x_6\}\}$, por lo cual existe la digráfica $D_{\mathcal{S}}$; de hecho, en la figura 6.13 se exhibe tal digráfica asociada, donde notemos que $(\{x_1, x_6\}, \{x_1, x_5\})$ está en $A(D_{\mathcal{S}})$ pues existe una x_6x_5 - H -trayectoria en D_2 y no existe una x_5x_6 - H -trayectoria en D , además x_1 está en $\{x_1, x_5\}$ y en $\{x_1, x_6\}$. Así se puede justificar con cada flecha en $D_{\mathcal{S}}$ observando directamente la digráfica D_2 de la figura 6.12c.

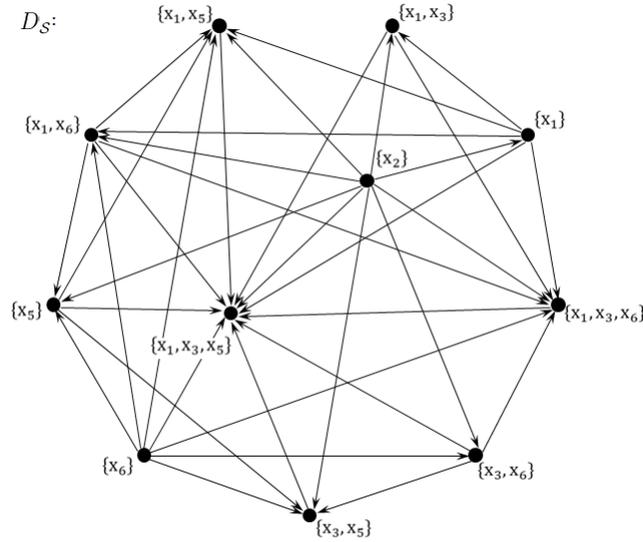


Figura 6.13: Digráfica asociada $D_{\mathcal{S}}$ de la digráfica D de la figura 6.12a.

Es posible verificar que la digráfica $D_{\mathcal{S}}$ de la figura 6.13 es acíclica. Veamos que esto se cumple en general.

Lema 6.7. *Supongamos que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m .*
2. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.*

Entonces $D_{\mathcal{S}}$ es una digráfica acíclica.

Demostración. Primero observemos que por el lema 6.6, existe un H -seminúcleo módulo D_2 de D , así $\mathcal{S} \neq \emptyset$, y podemos considerar la digráfica $D_{\mathcal{S}}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $D_{\mathcal{S}}$ contiene un ciclo, digamos $C = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_0)$ de longitud $n \geq 2$. Ya que C es un ciclo en $D_{\mathcal{S}}$, tenemos que $S_i \neq S_j$ cuando $i \neq j$.

Afirmación 1. Existe i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} , $z \notin S_{i_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

De otro modo, para cada i en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y para cada z en S_i tenemos que $z \in S_{i+1}$, así $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0$, de modo que para l en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $S_0 \subseteq S_l \subseteq S_0$, lo que implica que $S_i = S_j$ para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, con $i \neq j$. Así $C = (S_0)$, lo cual es una contradicción pues la longitud de un ciclo es al menos 2.

Afirmación 2. Si existe i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que para algún z en S_{i_0} y algún w en S_{i_0+1} existe una zw - H -trayectoria en D , entonces existe j_0 en $\{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i_0\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_0 = 0$. Primero observemos que w no es elemento de $S_n = S_0$, de otro modo tendríamos una zw - H -trayectoria en D con $\{z, w\}$ subconjunto de S_0 , lo cual es una contradicción pues S_0 es un conjunto H -independiente. Como w está en S_1 , entonces podemos definir $j_0 = \max\{i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : w \in S_i\}$. Así, $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1}$ (donde los índices son tomados módulo n).

Ahora, de la afirmación 1 tenemos que existen i_0 en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ y t_0 en S_{i_0} tales que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Pero como $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in A(D_{\mathcal{S}})$, entonces existe t_1 en S_{i_0+1} tal que hay una $t_0 t_1$ - H -trayectoria contenida en D_2 y no hay una $t_1 t_0$ - H -trayectoria contenida en D . De la afirmación 2, tenemos que existe i_1 en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1}$. Ya que $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in A(D_{\mathcal{S}})$, tenemos que existe t_2 en S_{i_1+1} tal que hay una $t_1 t_2$ - H -trayectoria contenida en D_2 y no hay una $t_2 t_1$ - H -trayectoria contenida en D . Si ya tenemos elegidos t_0, t_1, \dots, t_m ; tenemos de la afirmación 2 que existe un índice i_m en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_m \in S_{i_m}$ y $t_m \notin S_{i_m+1}$ y dado que $(S_{i_m}, S_{i_m+1}) \in A(D_{\mathcal{S}})$, se sigue que existe t_{m+1} en S_{i_m+1} tal que hay una $t_m t_{m+1}$ - H -trayectoria contenida en D_2 y no hay una $t_{m+1} t_m$ - H -trayectoria contenida en D . Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de vértices (t_0, t_1, t_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $t_i t_{i+1}$ - H -trayectoria contenida en D_2 y no existe una $t_{i+1} t_i$ - H -trayectoria en D , lo cual contradice el lema 6.3 cuando $|\xi_2| \geq 2$. Si $|\xi_2| = 1$, digamos $\xi_2 = \{C_r\}$, entonces G_r

es subdigráfica de D_2 , más aún, D_2 es la digráfica G_r y posiblemente algunos vértices aislados, de modo que (t_0, t_1, t_2, \dots) es una sucesión de vértices de G_r tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $t_i t_{i+1}$ - H -trayectoria contenida en G_r y no existe una $t_{i+1} t_i$ - H -trayectoria en D . Ahora, por el lema 6.4 no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en G_r , la existencia de la sucesión de vértices (t_0, t_1, t_2, \dots) contradice este hecho.

Por lo tanto D_S es una digráfica acíclica. \square

Lema 6.8. *Supongamos que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.*
2. *Si existe una $\xi_1 \xi_2$ -flecha o una $\xi_2 \xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.*

Entonces cada H -camino de D , está contenido en D_1 o en D_2 . Más aún, para cada H -camino T de D existe l en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que T está contenido en G_l .

Demostración. Sea $T = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ un H -camino en D . Supongamos que T no está contenido en D_1 ni en D_2 .

Si $(v_0, v_1) \in A(D_1)$, consideremos $j = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : (v_i, v_{i+1}) \in A(D_2)\}$, dicha j existe porque T no está contenida en D_1 , de este modo $(v_{j-1}, v_j) \notin A(D_1)$, lo que implica que $(c(v_{j-1}, v_j), c(v_j, v_{j+1}))$ es una $\xi_1 \xi_2$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$ la cual está en $A(H)$ pues T es un H -camino, lo cual no es posible por la hipótesis (3) (véase figura 6.14).

Si $(v_0, v_1) \in A(D_2)$, consideremos $j = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : (v_i, v_{i+1}) \in A(D_1)\}$, dicha j existe porque T no está contenida en D_2 , de este modo $(v_{j-1}, v_j) \notin A(D_2)$, lo que implica que $(c(v_{j-1}, v_j), c(v_j, v_{j+1}))$ es una $\xi_2 \xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$ la cual está en $A(H)$ pues T es un H -camino, lo cual no es posible por la hipótesis (3).

Así, cada H -camino T en D está contenido en D_1 o en D_2 . Luego, de la hipótesis, para cada H -camino T en D existe l en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que T está contenido en G_l . \square

Sean D una digráfica H -coloreada y $W = (u_0, \dots, u_l = v_0, \dots, v_m = w_0, \dots, w_n = u_0)$ un ciclo, decimos que W es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 si $T_1 = (u_0, W, u_l)$ es una H -trayectoria contenida en D_1 , $T_2 = (v_0, W, v_m)$ es una H -trayectoria contenida en D y $T_3 = (w_0, W, w_n)$ es una H -trayectoria contenida en D_2 , con u_0, v_0, w_0 obstrucciones de W .

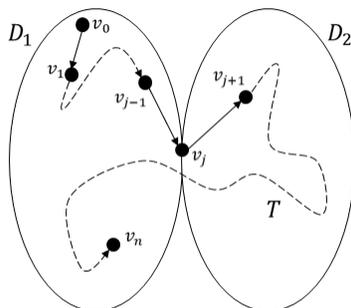


Figura 6.14

Sea $P = (u_0, \dots, u_l = v_0, \dots, v_m = w_0, \dots, w_n)$ una trayectoria, decimos que P es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 si $T_1 = (u_0, P, u_l)$ es una H -trayectoria contenida en D_1 , $T_2 = (v_0, P, v_m)$ es una H -trayectoria contenida en D y $T_3 = (w_0, P, w_n)$ es una H -trayectoria contenida en D_2 , con v_0, w_0 obstrucciones de P .

En la digráfica H -coloreada D de la figura 6.15a podemos considerar la partición $\xi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ de $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, el conjunto de colores de D y posteriormente la partición $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}, \xi_2 = \{\{2\}\{4\}\}\}$ de ξ . Esta última partición da lugar a las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 . Luego, $W = (x_4, x_5, x_7, x_1, x_2, x_8, x_3, x_4)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 en D , esto pues (x_4, x_5, x_7, x_1) es una H -trayectoria en D_1 , (x_1, x_2) es una H -trayectoria en D y (x_2, x_8, x_3, x_4) es una H -trayectoria en D_2 , donde x_1, x_2 y x_4 son obstrucciones de W (pues $(5, 1), (1, 2)$ y $(4, 3)$ no son flechas de H). También, $P = (x_7, x_1, x_2, x_8, x_3, x_4)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 en D , esto pues (x_7, x_1) es una H -trayectoria 3 en D_1 , (x_1, x_2) es una H -trayectoria en D y (x_2, x_8, x_3, x_4) es una H -trayectoria en D_2 , donde x_1 y x_2 son obstrucciones de P (pues $(5, 1)$ y $(1, 2)$ no son flechas de H).

Lema 6.9. *Supongamos que:*

1. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m .
2. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.

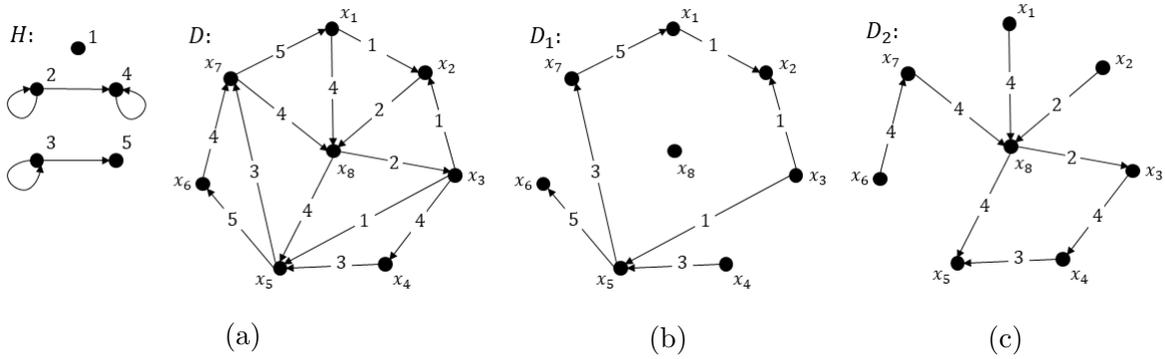


Figura 6.15

También, α_1 es una uz - H -trayectoria contenida en D_1 , α_2 es una zw - H -trayectoria contenida en D y α_3 es una wx - H -trayectoria contenida en D_2 , de modo que z y w son obstrucciones de $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ (note que u puede ser x). Adicionalmente, supongamos que D no tiene uw - H -trayectorias, zx - H -trayectorias, zu - H -trayectorias, y que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$. Entonces existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 o existe una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .

Demostración. De las hipótesis tenemos las siguientes observaciones, las cuales las estaremos citando a lo largo de esta demostración.

1. $u \notin V(\alpha_2)$, de otra manera (u, α_2, w) sería una uw - H -trayectoria.
2. $z \notin V(\alpha_3)$, de lo contrario (z, α_3, x) sería una zx - H -trayectoria.
3. $w \notin V(\alpha_1)$, de otro modo (u, α_1, w) sería una uw - H -trayectoria.
4. $x \notin V(\alpha_2)$, en otro caso (z, α_2, x) sería una zx - H -trayectoria.
5. Si β_1 es un ab - H -camino contenido en D_i y β_2 es un bc - H -camino contenido en D_j , con $\{i, j\} \subseteq \{1, 2\}$, $i \neq j$, entonces b es una obstrucción de $\beta_1 \cup \beta_2$, de otro modo $\beta_1 \cup \beta_2$ es un H -camino que no está contenido en D_1 o en D_2 , lo cual contradice el lema 6.8.

Por el lema 6.8, α_2 está contenido en D_1 o en D_2 . Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. α_2 está contenido en D_1 .

Si $((V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\}) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ contiene un ciclo γ formado con flechas de α_1 y α_2 , el cual está contenido en D_1 . Por hipótesis tenemos que existe j en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_j , lo que implica que α_1 y α_2 están contenidos en G_j . Como G_j es transitiva por H -trayectorias entonces existe una uw - H -trayectoria contenida en G_j , lo cual es una contradicción pues no existen uw - H -trayectorias. Así podemos asumir que $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Si $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, entonces tenemos los siguientes casos:

(1.1.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Notemos que $u \neq x$, porque $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$. Luego tenemos que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 , con z y w obstrucciones de $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$, por hipótesis (véase figura 6.16).

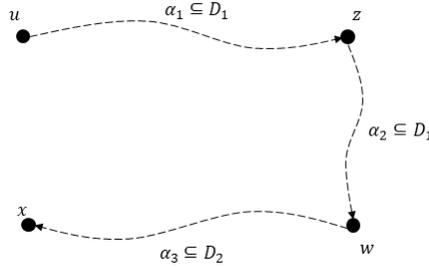


Figura 6.16: Caso 1.1.

(1.2) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea y el último vértice de α_1 que está en α_3 , de las observaciones 2 y 3, tenemos que $y \neq z$, $y \neq w$, respectivamente, entonces $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , con z, w y y obstrucciones de $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.17).

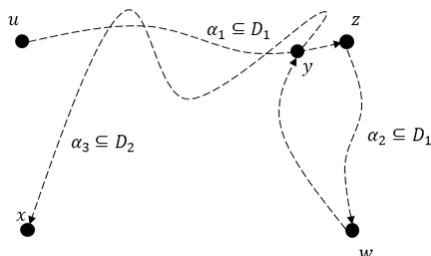


Figura 6.17: Caso 1.2.

Si $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) - \{w\}) \neq \emptyset$ tenemos los siguientes casos:

(I.3) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Sea y el primer vértice de α_2 que está en α_3 (de las observaciones 2 y 4, $y \neq z$, $y \neq x$, respectivamente), entonces $\alpha_1 \cup (z, \alpha_2, y) \cup (y, \alpha_3, x)$ es una ux -trayectoria ($u \neq x$ porque $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$) la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 , con z y y obstrucciones de $\alpha_1 \cup (z, \alpha_2, y) \cup (y, \alpha_3, x)$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.18).

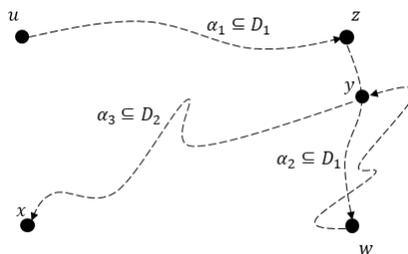


Figura 6.18: Caso 1.3.

(I.4) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$

Sean y y e el primer vértice y el último vértice de α_3 , que está en α_1 o en α_2 , respectivamente.

Si $y \in V(\alpha_1)$ tenemos que $y \neq z$ (observación 2) y también que $y \neq w$ (observación 3). Entonces $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , con z, w y y obstrucciones de $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.19).

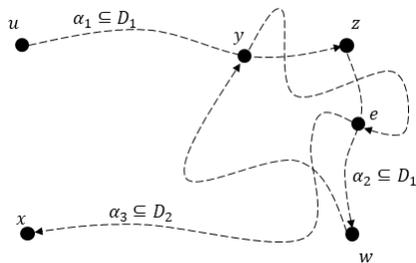


Figura 6.19: Caso 1.4(a).

Si $y \in V(\alpha_2)$ y $e \in V(\alpha_1)$, así $y \neq e$. Sean a el último vértice de α_3 que está en α_2 (a existe porque $y \in V(\alpha_2)$), y b el primer vértice de (a, α_3, x) que está en α_1 , (b existe porque $e \in V(\alpha_1)$ y $e \in V((a, \alpha_3, x))$). Notemos que $b \neq z$ y $a \neq z$ (observación 2), $a \neq x$ (observación 4), $a \neq u$ (observación 1), y $b \neq w$ (observación 3). También $a \neq b$, porque estamos asumiendo que $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ y $a \neq z$ y $b \neq z$. Así, $(b, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, a) \cup (a, \alpha_3, b)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , con z, a y b obstrucciones de $(b, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, a) \cup (a, \alpha_3, b)$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.20).

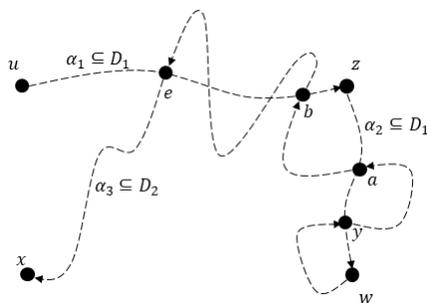


Figura 6.20: Caso 1.4(b).

Ahora suponemos que $e \in V(\alpha_2)$ (y $y \in V(\alpha_2)$). Tenemos que $z \neq e$, $e \neq x$ (por las observaciones 2 y 4, respectivamente), de esto $V(\alpha_1) \cap V((e, \alpha_3, x)) = \emptyset$, de otro modo existe u en $V(\alpha_1) \cap V((e, \alpha_3, x))$, lo cual contradice la elección de e . Luego $\alpha_1 \cup (z, \alpha_2, e) \cup (e, \alpha_3, x)$ es una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de $\overrightarrow{P_3}$, con z y e obstrucciones de $\alpha_1 \cup (z, \alpha_2, e) \cup (e, \alpha_3, x)$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.21).

Caso 2. α_2 está contenido en D_2 .

Si $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) - \{w\}) \neq \emptyset$, entonces $\alpha_2 \cup \alpha_3$ contiene un ciclo γ que contiene flechas de α_2 y α_3 , el cual está contenido en D_2 . Luego por hipótesis existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_i , así $\alpha_2 \cup \alpha_3$ está contenido en G_i . Como G_i es transitiva por H -trayectorias entonces existe zx - H -trayectoria lo cual no es posible. Así podemos asumir que $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$.

Si $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ entonces tenemos los siguientes casos:

(2.1.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Notemos $u \neq x$, porque $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$. Entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de $\overrightarrow{P_3}$, con z y w obstrucciones de $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$, por hipótesis (véase figura 6.22).

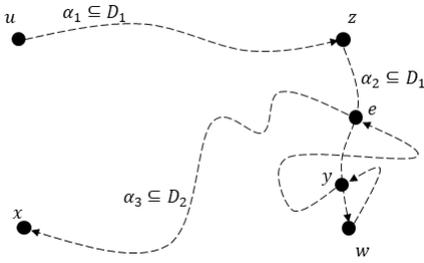


Figura 6.21: Caso 1.4(c).

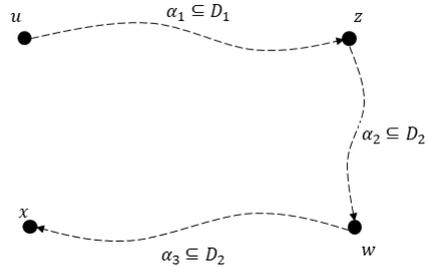


Figura 6.22: Caso 2.1.

(2.2.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea y el último vértice de α_1 que está en α_3 . Tenemos que $y \neq z$, $y \neq w$ (por las observaciones 2 y 3, respectivamente), entonces $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , con z, w y y obstrucciones de $(y, \alpha_1, z) \cup \alpha_2 \cup (w, \alpha_3, y)$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.23).

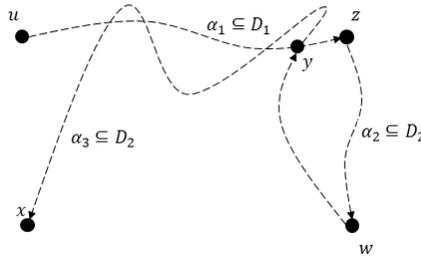


Figura 6.23: Caso 2.2.

Si $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) - \{z\}) \neq \emptyset$, tenemos los siguientes casos:

2.3. $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) = \emptyset$.

Sea y el primer vértice de α_1 que está en α_2 , note que $y \neq z$ por la suposición de este caso, tenemos que $y \neq u$, $y \neq w$ (por las observaciones 1 y 3, respectivamente). Entonces $(u, \alpha_1, y) \cup (y, \alpha_2, w) \cup \alpha_3$ es una ux -trayectoria ($u \neq x$ porque $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) = \emptyset$) la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 , con w y y obstrucciones de $(u, \alpha_1, y) \cup (y, \alpha_2, w) \cup \alpha_3$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.24).

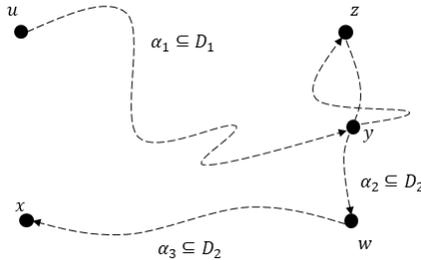


Figura 6.24: Caso 2.3.

(2.4.) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea y el último vértice de α_1 que está en α_3 , tenemos que $y \neq z$, $y \neq w$ (por las observaciones 1 y 3, respectivamente). Sea x' el primer vértice de (y, α_1, z) que está en α_2 (notemos que x' puede ser z). Tenemos que $x' \neq w$ (observación 3) y $x' \neq y$, porque estamos asumiendo que $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $y \neq w$. Ahora $(y, \alpha_1, x') \cup (x', \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, y)$ es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , con w, x' y y obstrucciones de $(y, \alpha_1, x') \cup (x', \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, y)$, por hipótesis y la observación 5, respectivamente (véase figura 6.25).

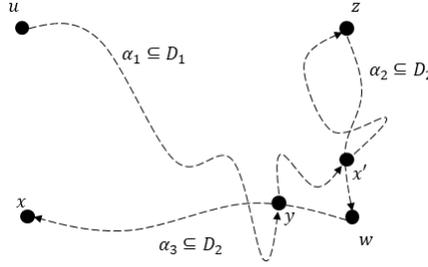


Figura 6.25: Caso 2.4.

□

Teorema 6.1. *Sea D una digráfica H -coloreada. Supongamos que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m .*
2. *Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.*
3. *Si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.*
4. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .*
5. *Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .*

Entonces D tiene un H -núcleo.

Demostración. Consideremos la digráfica D_S . Ya que D_S es una digráfica finita y D_S es acíclica (lema 6.7), así D_S contiene al menos un vértice de exgrado cero (por la proposición 1.2). Sea S en $V(D_S)$ tal que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$. Probaremos, por contradicción que S es un H -núcleo de D .

Como $S \in V(D_S)$ entonces S es H -independiente en D . Supongamos que S no es un H -núcleo en D , entonces S no es H -absorbente en D . Sea $X = \{z \in V(D) \setminus S : \text{no existe una } zS\text{-}H\text{-trayectoria en } D\}$. De nuestro supuesto $X \neq \emptyset$.

Afirmación 1. Existe x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$, si existe una x_0z - H -trayectoria contenida en D_1 , entonces existe una zx_0 - H -trayectoria contenida en D_1 .

Por contradicción, supongamos que para todo x en X existe y en $X \setminus \{x\}$ tal que existe una xy - H -trayectoria contenida en D_1 y no existe una yx - H -trayectoria en D_1 .

Sea x_0 en X , de este modo existe x_1 en $X \setminus \{x_0\}$ tal que existe una x_0x_1 - H -trayectoria contenida en D_1 y no existe una x_1x_0 - H -trayectoria en D_1 . De nuestra suposición, existe x_2 en $X \setminus \{x_1\}$ tal que existe una x_1x_2 - H -trayectoria contenida en D_1 y no existe una x_2x_1 - H -trayectoria contenida en D_1 . Si ya tenemos elegidos x_0, x_1, \dots, x_i sabemos que existe x_{i+1} en $X \setminus \{x_i\}$ tal que existe una x_ix_{i+1} - H -trayectoria contenida en D_1 y no existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria en D_1 . Continuando de esta manera construimos una sucesión (x_0, x_1, x_2, \dots) de vértices en X tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} - H -trayectoria contenida en D_1 y no existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria contenida en D_1 . Sin embargo, por el lema 6.3 aplicado a la subdigráfica D_1 , cuando $|\xi_2| \geq 2$, sabemos que no existe una sucesión (x_0, x_1, x_2, \dots) de vértices en $V(D_1) = V(D)$ tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} - H -trayectoria y no existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria. Si $|\xi_1| = 1$, digamos $\xi_1 = \{C_r\}$, entonces G_r es subdigráfica de D_1 , más aún, D_1 es la digráfica G_r y posiblemente algunos vértices aislados; de modo que (x_0, x_1, x_2, \dots) es una sucesión de vértices en X tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} - H -trayectoria contenida en G_r y no existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria contenida en G_r . Sin embargo, por el lema 6.4 no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada i en $\{0, 1, 2, \dots\}$ existe una x_ix_{i+1} - H -trayectoria en G_r y no existe una $x_{i+1}x_i$ - H -trayectoria en G_r , lo cual también es una contradicción.

Por lo tanto existe x_0 en X tal que para todo z en $X \setminus \{x_0\}$, si existe una x_0z - H -trayectoria contenida en D_1 , entonces existe una zx_0 - H -trayectoria contenida en D_1 .

Sea $T = \{z \in S : \text{no hay una } zx_0\text{-}H\text{-trayectoria en } D_2\}$. De la definición de T , tenemos que para cada z en $S \setminus T$ existe una $zx_0\text{-}H\text{-trayectoria}$ en D_2 . Recordemos del lema 6.8 que cada $H\text{-trayectoria}$ está contenida en D_1 o D_2 .

Afirmación 2. $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto H -independiente en D .

- T es H -independiente, pues $T \subseteq S$ y $S \in \mathcal{S}$.
- No hay $Tx_0\text{-}H\text{-trayectorias}$ contenidas en D . De otro modo, por la definición de T , tal trayectoria debería estar contenida en D_1 . Ya que T está contenido en S y S es un H seminúcleo no vacío módulo D_2 de D , entonces hay una $x_0S\text{-}H\text{-trayectoria}$ en D , lo cual contradice la definición de X .
- De la definición de X no hay $x_0S\text{-}H\text{-trayectorias}$ en D , en particular no hay $x_0T\text{-}H\text{-trayectorias}$.

Así $T \cup \{x_0\}$ es un conjunto H -independiente en D .

Afirmación 3. Para cada $z \in [V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})]$ si existe una $(T \cup \{x_0\})z\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenido en D_1 , entonces existe una $z(T \cup \{x_0\})\text{-}H\text{-trayectoria}$ en D .

Sea z en $V(D) \setminus (T \cup \{x_0\})$ tal que existe una $(T \cup \{x_0\})z\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenida en D_1 .

Tenemos dos casos:

Caso 1. Existe una $Tz\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenida en D_1 .

Por contradicción supongamos que no existe una $z(T \cup \{x_0\})\text{-}H\text{-trayectoria}$ en D . Ya que T está contenido en S y S en un H seminúcleo no vacío módulo D_2 de D , entonces existe una $zS\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenida en D . Así $z \notin S \cup X$. Tenemos que tal trayectoria va de z hacia $S \setminus T$ pues no hay $z(T \cup \{x_0\})\text{-}H\text{-trayectoria}$ en D . Sea α_1 una $uz\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenida en D_1 con u en T y sea α_2 una $zw\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenida en D con w en $S \setminus T$. Como w está en $S \setminus T$, entonces la definición de T implica que hay una $wx_0\text{-}H\text{-trayectoria}$ contenida en D_2 , digamos α_3 (véase figura 6.26).

Si z no es una obstrucción de $\alpha_1 \cup \alpha_2$ entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ es un $uw\text{-}H\text{-camino}$ en D , luego del lema 6.8 existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\alpha_1 \cup \alpha_2$ está contenido en G_i y como G_i es H -transitiva, entonces hay una $uw\text{-}H\text{-trayectoria}$ lo cual no es posible, pues $\{u, w\}$ es un subconjunto de S y S es H -independiente. Entonces, z es una obstrucción

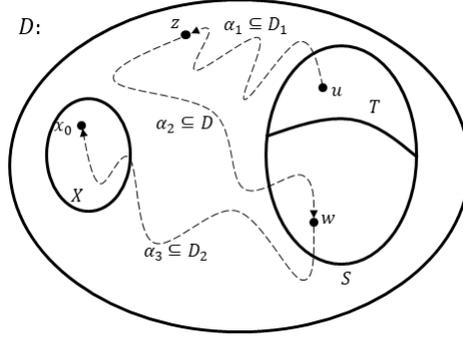


Figura 6.26: Caso 1.

de $\alpha_1 \cup \alpha_2$. También w es una obstrucción de $\alpha_2 \cup \alpha_3$, de otro modo $\alpha_2 \cup \alpha_3$ es un zx_0 - H -camino en D , luego del lema 6.8 existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\alpha_2 \cup \alpha_3$ está contenido en G_i y como G_i es H -transitiva, entonces hay una zx_0 - H -trayectoria, la cual es una $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectoria, lo cual no es posible. Así z y w son obstrucciones en $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$.

Hagamos notar que:

- No existen uw - H -trayectorias en D . Esto se tiene pues $\{u, w\}$ es subconjunto de S y S es H -independiente.
- No existen zx_0 - H -trayectorias ni zu - H -trayectorias en D , pues no existen $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectorias en D .
- Además, si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.

De este modo, D , α_1 , α_2 , α_3 satisfacen las hipótesis del lema 6.9, así:

- Existe una ux_0 -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 o
- Existe una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .

En el primer caso, de la hipótesis tenemos que habría una H -trayectoria de u hacia x_0 , lo cual contradice que $T \cup \{x_0\}$ sea H -independiente. El segundo caso no es posible pues D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 . Así podemos concluir que hay una $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectoria en D .

Caso 2. Existe una x_0z - H -trayectoria contenida en D_1 .

Por contradicción supongamos que no existe una $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectoria en D . Sea α_1 una x_0z - H -trayectoria contenida en D_1 . Si z estuviera en X entonces de la afirmación 1 existiría una zx_0 - H -trayectoria en D_1 , lo cual no es posible, luego $z \notin S$ por definición de X y el hecho de que $x_0 \in X$. Entonces z no está en $X \cup S$. Luego, la definición de X implica que existe una zS - H -trayectoria contenida en D , digamos α_2 . Supongamos que α_2 termina en w . Si w está en T , entonces α_2 es una $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible, por lo que w está en $S \setminus T$. Luego, de la definición de T , existe una wx_0 - H -trayectoria contenida en D_2 , llamemos a tal trayectoria α_3 (véase figura 6.27).

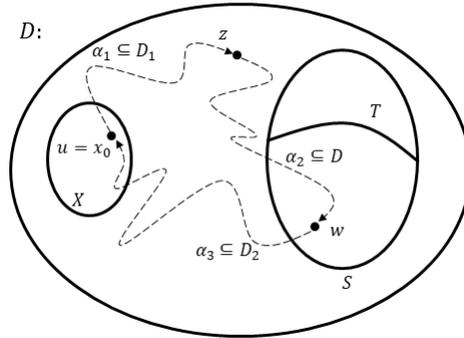


Figura 6.27: Caso 2.

Si z no es una obstrucción para $\alpha_1 \cup \alpha_2$, entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ es un x_0w - H -camino en D . Luego por el lema 6.8 existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\alpha_1 \cup \alpha_2$ está contenido en G_i y como G_i es H -transitiva, entonces existe una x_0w - H -trayectoria en D , lo cual contradice la definición de X pues w está en S , entonces z es una obstrucción de $\alpha_1 \cup \alpha_2$. También tenemos que w es una obstrucción de $\alpha_2 \cup \alpha_3$, de otro modo $\alpha_2 \cup \alpha_3$ es un zx_0 - H -camino en D , luego por el lema 6.8 existe i en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que $\alpha_2 \cup \alpha_3$ está contenido en G_i y como G_i es transitiva por H -trayectorias, entonces hay una $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectoria lo cual no es posible. Entonces tenemos que z y w son obstrucciones de $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$.

Sea $u = x_0$, notemos que:

- No hay uw - H -trayectorias en D . Lo cual se tiene de la definición de X .
- No hay zu - H -trayectorias en D , porque no hay $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectorias en D y como $u = x_0$ tampoco hay zx_0 - H -trayectorias.

- Además, si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.

De este modo, $D, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ satisfacen las hipótesis del lema 6.9, así:

- Existe una ux_0 -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 o
- Existe una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .

En el primer caso, de la hipótesis tenemos que habría una ux_0 -trayectoria la cual es una ξ_1, ξ, ξ_2 - H -subdivisión de \vec{P}_3 , lo cual no es posible pues $u = x_0$. El segundo caso no es posible pues D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 . Así podemos concluir que hay una $z(T \cup \{x_0\})$ - H -trayectoria en D .

De las afirmaciones 2 y 3 tenemos que $T \cup \{x_0\}$ es un H -seminúcleo módulo D_2 de D , es decir, $T \cup \{x_0\}$ está en $\mathcal{S} = V(D_S)$.

Ahora, ya que T es subconjunto de S , $x_0 \in X$ y para cada s en S tal que $s \notin T$ hay una sx_0 - H -trayectoria contenida en D_2 y no hay Sx_0 - H -trayectoria contenida en D . Entonces, $(S, T \cup \{x_0\}) \in A(D_S)$, lo cual contradice el hecho que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$.

Por lo tanto, S es un H -núcleo de D . □

Cabe mencionar que la digráfica H -coloreada D , en la figura 6.28a, utilizada a lo largo de este capítulo para ejemplificar ciertas definiciones, cumple las hipótesis del teorema 6.1. En efecto:

1. Primeramente se consideró $\xi = \{C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}, C_3 = \{5\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, el conjunto de colores, de manera que las subdigráficas G_1, G_2 y G_3 inducidas por esta partición sean transitivas por H -trayectorias (véanse figuras 6.28b , 6.28c y 6.28d).
2. Después se consideró $\{\xi_1 = \{\{1, 2\}, \{5\}\}, \xi_2 = \{\{3, 4\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véanse figuras 6.28e y 6.28f).
3. Como no hay ciclos contenidos en D_1 o D_2 , entonces esta digráfica cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3\}$ tal que γ está contenido en G_m .

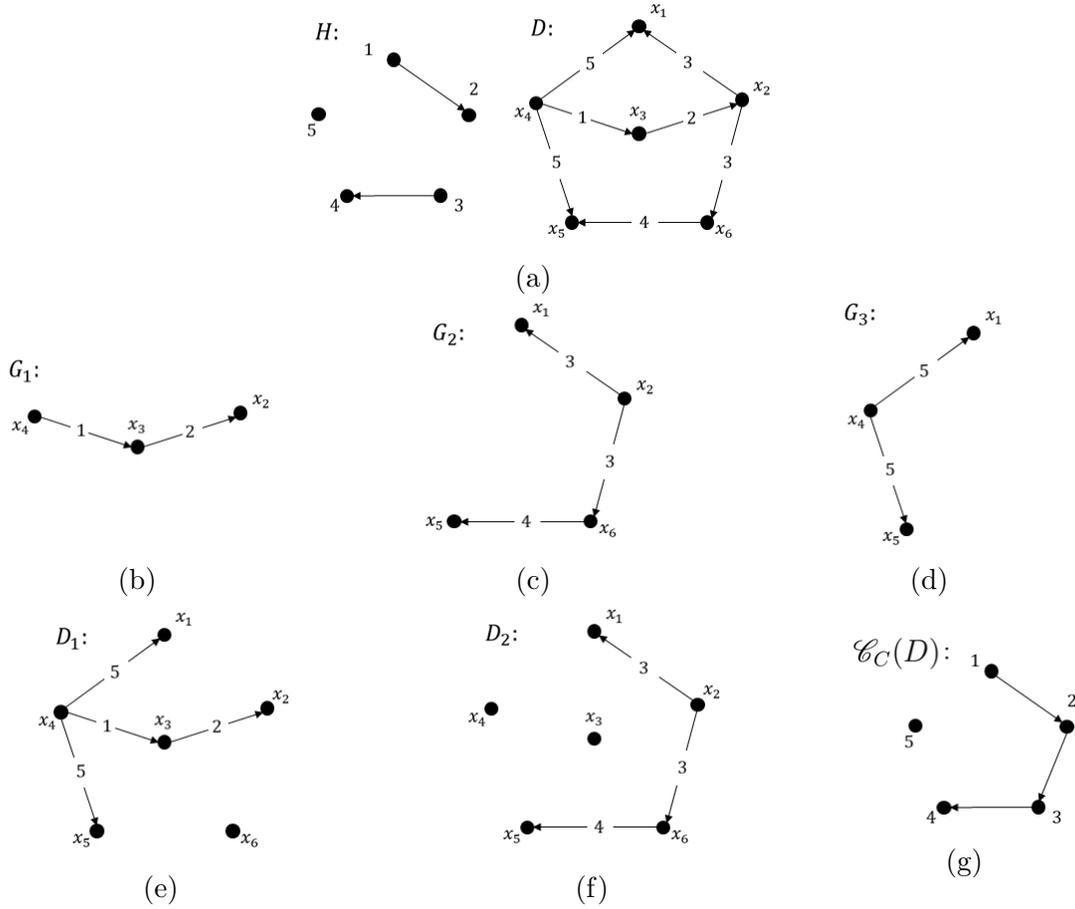


Figura 6.28: Ejemplo de una digráfica H -coloreada que satisface las hipótesis del teorema 6.1.

4. Los únicos H -caminos en D_1 o D_2 son las flechas, (x_4, x_3, x_2) y (x_2, x_6, x_5) , los cuales están en G_1 , G_2 o G_3 según es el caso; luego se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, 3\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
5. Notemos que en $\mathcal{C}_C(D)$ no hay $\xi_2\xi_1$ -flecha y la única $\xi_1\xi_2$ -flecha es $(2, 3)$, pero $(2, 3)$ no forma parte de $A(H)$, luego se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (Véase Figura 6.28g).
6. Por la estructura de la digráfica, D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .

7. También D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 (esto se debe a que las únicas opciones viables son (x_4, x_3, x_2, x_1) , (x_4, x_3, x_2, x_6) , $(x_4, x_3, x_2, x_6, x_5)$, (x_3, x_2, x_6, x_5) , pero x_3 no es obstrucción para las primeras dos trayectorias y x_6 no es obstrucción para las últimas dos trayectorias), por lo que cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Luego el teorema 6.1 concluye que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.5a tiene un H -núcleo; efectivamente, es sencillo ver que $\{x_1, x_3, x_5\}$ es un H -núcleo para D , donde $\delta_{D_S}^+(\{x_1, x_3, x_5\}) = 0$ en la digráfica de la figura 6.13.

Veamos a continuación una serie de ejemplos de digráficas H -coloreadas sin H -núcleo, en las cuales exactamente una de las hipótesis del teorema 6.1 no se cumple. Esto mostrará que cada una de las hipótesis de teorema 6.1 es indispensable.

Observación 6.10. *Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.29a, la cual resultará ser una digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual cumple todas las hipótesis del teorema 6.1 con excepción de la primera.*

1. *Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}, C_4 = \{4\}, C_5 = \{5\}, C_6 = \{6\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.29b).*
2. *Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}, \xi_2 = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.29c).*
3. *(x_1, x_2, x_3, x_1) es un ciclo en D_1 el cual no se encuentra en algún G_i , por lo que no cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que γ está contenido en G_m .*
4. *Los únicos H -caminos en D_1 o D_2 son las flechas las cuales están en $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ según sea el caso. Luego se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.*
5. *Dado que en $\mathcal{C}(D)$ no hay $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\xi_2\xi_1$ -flechas, entonces se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (véase figura 6.29d).*

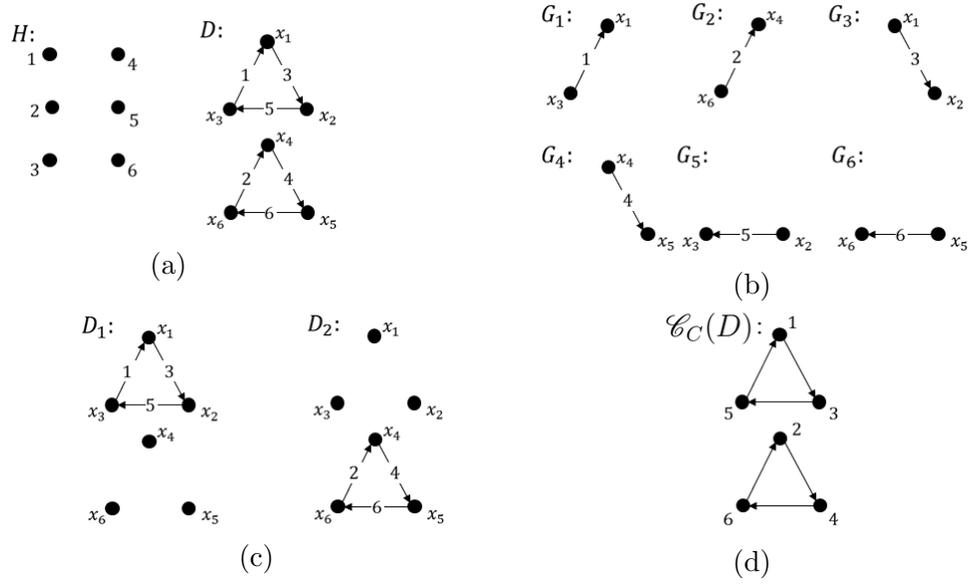


Figura 6.29: Digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual únicamente no cumple la hipótesis 1 del teorema 6.1.

6. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 (pues en $\mathcal{C}_C(D)$ no hay $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\xi_2\xi_1$ -flechas).
7. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 (pues en $\mathcal{C}_C(D)$ no hay $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\xi_2\xi_1$ -flechas), luego se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .
8. Sin embargo, D no tiene H -núcleo pues un conjunto H -independiente en D tiene cardinalidad a lo más 2, pero tales conjuntos no son H -absorbentes.

Observación 6.11. Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.30a, la cual resultará ser una digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual cumple todas las hipótesis del teorema 6.1 con excepción de la segunda.

1. Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas G_1, G_2 y G_3 inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.30b).

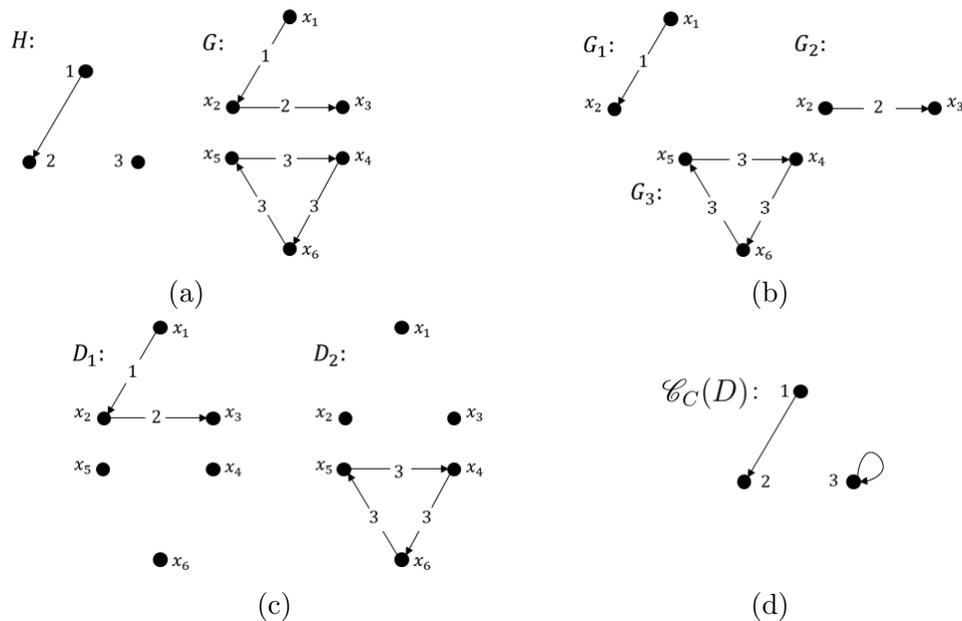


Figura 6.30: Digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual únicamente no cumple la hipótesis 2 del teorema 6.1.

2. Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{2\}\}, \xi_2 = \{\{3\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.30c).
3. D_1 no contiene ciclos y (x_4, x_6, x_5, x_4) es el único ciclo en D_2 el cual se encuentra en G_3 , por lo cual cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3\}$ tal que γ está contenido en G_m .
4. (x_1, x_2, x_3) es un H -camino en D_1 el cual no se encuentra en G_1, G_2 o G_3 . Luego no se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
5. Dado que en $\mathcal{C}(D)$ no hay $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\xi_2\xi_1$ -flechas, entonces se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (véase figura 6.30d).
6. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 (pues en $\mathcal{C}(D)$ no hay $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\xi_2\xi_1$ -flechas).

7. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 (pues en $\mathcal{C}(D)$ no hay $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\{\xi_2\xi_1$ -flechas), luego se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .
8. Sin embargo, D no tiene H -núcleo pues un conjunto H -independiente en D tiene cardinalidad a lo más 2, pero tales conjuntos no son H -absorbentes.

Observación 6.12. Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.31a, la cual resultará ser una digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual cumple todas las hipótesis del teorema 6.1 con excepción de la tercera.

1. Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}, C_4 = \{4\}, C_5 = \{5\}, C_6 = \{6\}, C_7 = \{7\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ y G_7 inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.31b).
2. Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}\}, \xi_2 = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.31c).

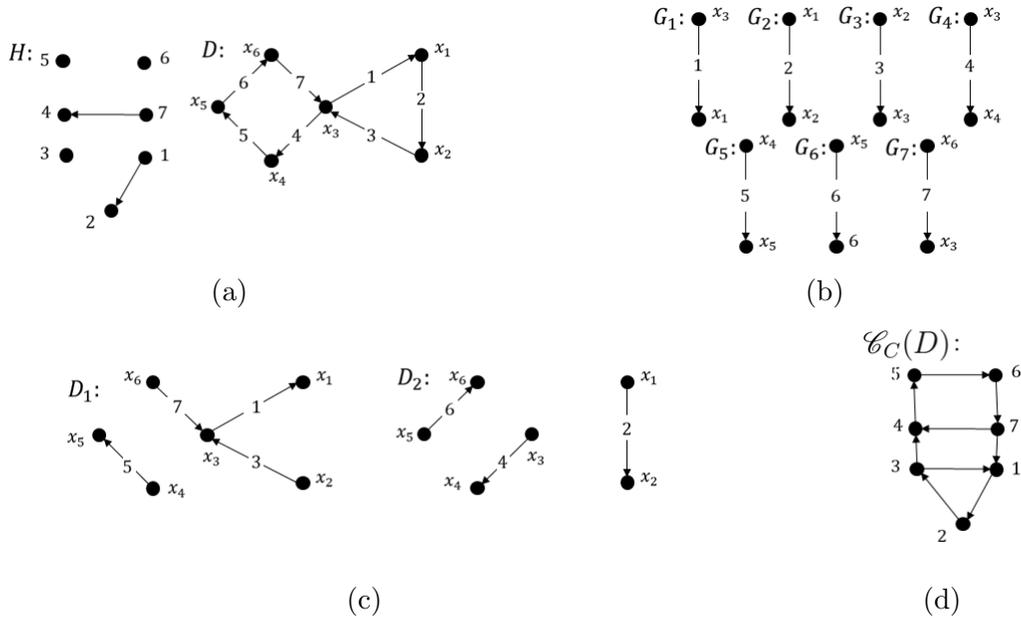


Figura 6.31: Digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual únicamente no cumple la hipótesis 3 del teorema 6.1.

3. D_1 ni D_2 no contienen ciclo, por lo cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tal que γ está contenido en G_m .
4. Los únicos H caminos en D_1 o D_2 son las flechas, las cuales se encuentran en $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ o G_7 según sea el caso. Luego se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
5. Note que $(7, 4)$ y $(1, 2)$ son $\xi_1\xi_2$ -flechas en $\mathcal{C}(D)$ que están en $A(H)$, entonces no se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (véase figura 6.31d).
6. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , pues la única opción viable es (x_2, x_3, x_1, x_2) , pero x_1 no es obstrucción en tal ciclo.
7. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 , pues la única opción viable es (x_6, x_3, x_1, x_2) , pero x_1 no es obstrucción en tal trayectoria, luego se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .
8. Sin embargo, D no tiene H -núcleo. Procediendo por contradicción, supongamos que D tiene un H -núcleo, digamos N . Hagamos casos: puede suceder que x_2 esté en N o que sea absorbido por H -trayectorias en D por algún vértice en N . Supongamos que x_2 está en N , luego éste absorbe por H -trayectorias a x_1 y a x_3 (por lo que tales vértices no podrán estar en N); entre x_4, x_5 y x_6 solo podremos agregar a un vértice más a N (dado que N debe ser H -independiente), sin embargo $\{x_2, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_2, x_6\}$ no son H -núcleos para D . Por otro lado, si x_2 es absorbido por H -trayectorias en D por algún vértice en el N , entonces la única opción es x_3 , pero si este vértice está en el núcleo, entonces x_1 no podría estar en el H -núcleo y ningún vértice podría absorber por H -trayectorias a x_1 .

Observación 6.13. Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.32a, la cual resultará ser una digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual cumple todas las hipótesis del teorema 6.1 con excepción de la cuarta.

1. Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas G_1, G_2 , y G_3 inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.32b).

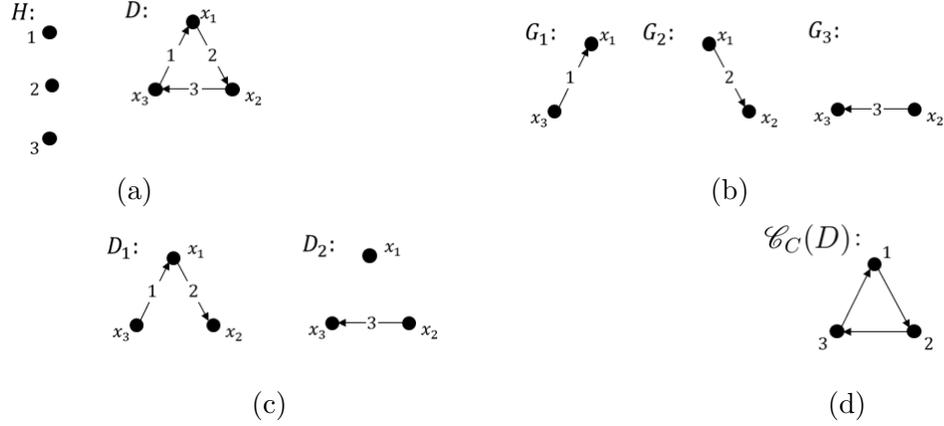


Figura 6.32: Digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual únicamente no cumple la hipótesis 4 del teorema 6.1.

2. Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{2\}\}, \xi_2 = \{\{3\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.32c).
3. D_1 ni D_2 no contienen ciclo, por lo cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3\}$ tal que γ está contenido en G_m .
4. Los únicos H caminos en D_1 o D_2 son las flechas, las cuales se encuentran en G_1, G_2 , o G_3 según sea el caso. Luego se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, 3\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
5. Como $A(H) = \emptyset$, entonces se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (véase figura 6.32d).
6. (x_3, x_1, x_2, x_3) es un ciclo en D que es (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 , donde se tiene que x_1, x_2 y x_3 son obstrucciones del ciclo. Luego no cumple la hipótesis 4 del teorema 6.1.
7. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 , luego se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .
8. Sin embargo, D no tiene H -núcleo pues un conjunto H -independiente en D tiene cardinalidad a lo más 1, pero tales conjuntos no son H -absorbentes.

Observación 6.14. Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.33a, la cual resultará ser una digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual cumple todas las hipótesis del teorema 6.1 con excepción de la quinta.

1. Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas G_1, G_2 , y G_3 inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.33b).
2. Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{3\}\}, \xi_2 = \{\{2\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.33c).

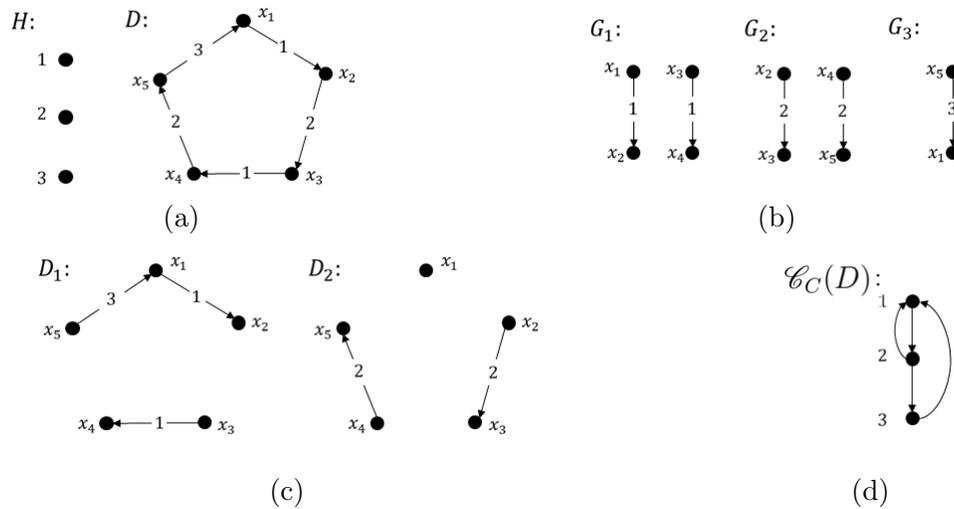


Figura 6.33: Digráfica H -coloreada sin H -núcleo la cual únicamente no cumple la hipótesis 5 del teorema 6.1.

3. D_1 ni D_2 no contienen ciclo, por lo cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3\}$ tal que γ está contenido en G_m .
4. Los únicos H caminos en D_1 o D_2 son las flechas, las cuales se encuentran en G_1, G_2 , o G_3 según sea el caso. Luego se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, 3\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
5. Como $A(H) = \emptyset$, entonces se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (véase figura 6.33d).

6. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .
7. Note que (x_5, x_1, x_2, x_3) es una trayectoria que es (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 (donde x_1 y x_2 son obstrucciones de tal trayectoria), sin embargo, no existe una x_5x_3 - H -trayectoria en D ; luego no se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .
8. Sin embargo, D no tiene H -núcleo pues un conjunto H -independiente en D tiene cardinalidad a lo más 2, pero tales conjuntos no son H -absorbentes.

También podemos hacer notar lo siguiente.

Observación 6.15. *El teorema 6.1 es una extensión del teorema 5.1.*

Hagamos notar que:

1. Sea H la digráfica definida por $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ y $A(H) = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)\}$, de este modo la digráfica D del teorema 5.1 es H -coloreada y todas las H -trayectorias en D son trayectorias monocromáticas.
2. Tenemos que $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, $k \geq 2$, es una partición de $C = V(H)$, el conjunto de colores de D , de modo que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es transitiva por H -trayectorias, por lo dicho en 1.
3. Supongamos $\{\xi_1, \xi_2\}$ es una partición de ξ y D_i será la subdigráfica generadora de D tal que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \in \xi_i\}$ para cada i en $\{1, 2\}$.
4. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en $G_{m'}$.
5. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P esté contenido en $G_{m'}$, porque cada H -camino es un camino monocromático en D .
6. Si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$, porque $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ y $A(H) = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)\}$.

Dado que una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 vendría siendo una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{C}_3 y una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 vendría siendo una (ξ_1, ξ, ξ_2) -subdivisión 3-coloreada de \vec{P}_3 , tenemos que:

7. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .
8. Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Ya que D satisface las hipótesis del teorema 6.1, entonces éste es una extensión del teorema 5.1.

Observación 6.16. El teorema 6.1 es una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow en el caso finito.

En efecto, pues el teorema 6.1 es una extensión del teorema 5.1 y éste a su vez es una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow en el caso finito.

Observación 6.17. El teorema 6.1 es una extensión del teorema 4.2.

En efecto, pues el teorema 6.1 es una extensión del teorema 5.1 y éste a su vez es una extensión del teorema 4.2.

6.4. Resultados análogos: existencia de H -núcleos

Tal como el teorema principal demostrado en la sección anterior, existen diversos resultados que implican la existencia de H -núcleos en digráficas H -coloreadas. Ejemplos de tales resultados han sido obtenidos por Pietra Delgado Escalante y Hortensia Galeana Sánchez en [8], y por Hortensia Galeana Sánchez y María del Rocío Sánchez López en [14], [15], [17] y [18].

En particular tenemos un par de resultados los cuales utilizan estructuras y métodos similares a los de este trabajo. El primer resultado fue demostrado por Hortensia Galeana Sánchez e Ingrid Torres Ramos en un artículo titulado *H -Paths and H -cycles in H -coloured digraphs* en [16]. El segundo fue demostrado por Hugo Rincón Galeana en su trabajo de tesis de pregrado titulado *H -ciclos y H -camino en digráficas* en [19]. Antes de poder enunciar tales resultados, necesitamos ciertas definiciones.

Diremos que una digráfica D es **transitiva** si para cada subconjunto $\{u, v, w\}$ de $V(D)$ (posiblemente $u = w$) tal que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq A(D)$, implica que $(u, w) \in A(D)$ (cuando $u = w$ y $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq A(D)$, entonces $(u, u), (v, v) \in A(D)$). Es fácil verificar que la digráfica H de la figura 6.34 es transitiva, puesto que $(1, 3), (3, 2), (1, 2), (4, 5), (5, 4), (4, 4), (5, 5)$ son las únicas flechas de H .

Sean H una digráfica posiblemente con lazos y D una digráfica H -coloreada. Un ciclo $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ en D es un **H -ciclo** si y sólo si $(c_D(v_1, v_2), c_D(v_2, v_3), \dots, c_D(v_{n-1}, v_n), c_D(v_n, v_1), c_D(v_1, v_2))$ es un camino cerrado en H . En la digráfica H -coloreada D de la figura 6.34, tenemos que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$ es un H -ciclo, pues $(4, 5, 4, 4, 5, 4, 4)$ es un camino cerrado en H .

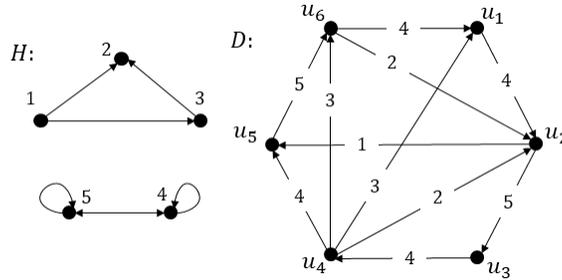


Figura 6.34

Sean H una digráfica transitiva posiblemente con lazos, D una digráfica H -coloreada y D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D . Diremos que $\mathcal{P} = \{D_1, D_2\}$ es una **H -separación** de D si:

1. $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset, A(D_1) \cup A(D_2) = A(D)$.
2. Cada H -trayectoria de D está contenida en D_1 o en D_2 .

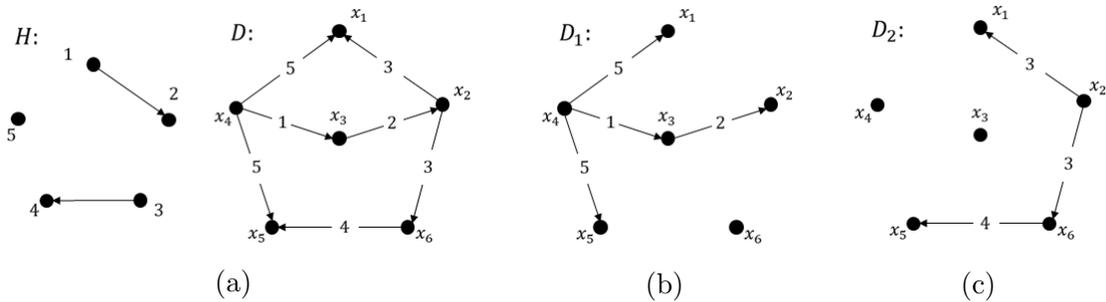


Figura 6.35: Ejemplo de una H -separación de D .

En la figura 6.35 podemos observar a una digráfica H -coloreada D (donde es claro que H es una digráfica transitiva) y a una H -separación de ésta, pues D_1 y D_2 son subdigráficas generadoras de D las cuales cumplen con $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ y $A(D_1) \cup A(D_2) = A(D)$; además, las únicas H -trayectorias de D son las flechas, (x_4, x_3, x_2) y (x_2, x_6, x_5) , las cuales están contenidas en D_1 o en D_2 según sea el caso.

Dada una partición de las flechas de D , $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ diremos que una sucesión de vértices de D , (u, v, w) es un **H - C_3 -fuertemente arcoiris** si existen un uv - H -camino \mathcal{C}_1 contenido en $D[F_i]$, un vw - H -camino \mathcal{C}_2 contenido en D y un wy - H -camino \mathcal{C}_3 contenido en $D[F_j]$, con $i \neq j$, siendo u y v obstrucciones de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. También diremos que una sucesión de vértices de D , (u, v, w, y) es un **H - P_3 -fuertemente arcoiris** si existen un uv - H -camino \mathcal{C}_1 contenido en $D[F_i]$, un vw - H -camino \mathcal{C}_2 contenido en D y un wu - H -camino \mathcal{C}_3 contenido en $D[F_j]$, con $i \neq j$, siendo u, v y w obstrucciones de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$.

Dada una partición de las flechas de D , $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ definimos a la digráfica $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ como sigue:

1. $V(\mathcal{C}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.
2. $(F_i, F_j) \in A(\mathcal{C}(\mathcal{F}))$ si y sólo si existen dos flechas de D , a saber (x, y) y (y, z) tales que $(x, y) \in F_i$ y $(y, z) \in F_j$.

En la figura 6.36a podemos observar a una digráfica H -coloreada D , en la cual podemos considerar la siguiente partición de las flechas de D : $\mathcal{F} = \{F_1 = \{(x_4, x_3)\}, F_2 = \{(x_3, x_2), (x_4, x_1)\}, F_3 = \{(x_2, x_6), (x_4, x_5), (x_2, x_1)\}, F_4 = \{(x_6, x_5)\}\}$. De este modo en la figura 6.36b se observa a la digráfica asociada $\mathcal{C}(\mathcal{F})$, donde $(F_1, F_2) \in A(\mathcal{C}(\mathcal{F}))$, pues $(x_4, x_3) \in F_1$ y $(x_3, x_2) \in F_2$, por lo que $A(\mathcal{C}(\mathcal{F})) = \{(F_1, F_2), (F_2, F_3), (F_3, F_4)\}$.

También diremos que una digráfica D es **bipartita** si es posible partir el conjunto de vértices en dos conjuntos disjuntos no vacíos independientes U y V .

Notemos que la digráfica $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ de la figura 6.36b es bipartita, en efecto, $\{U = \{F_1, F_3\}, V = \{F_2, F_4\}\}$ es una partición de $V(\mathcal{C}(\mathcal{F}))$ en conjuntos disjuntos no vacíos independientes.

Además, decimos que una digráfica D es fuertemente conexa si para cada $\{x, y\}$ subconjunto de $V(D)$ existe una xy -trayectoria y una yx -trayectoria.

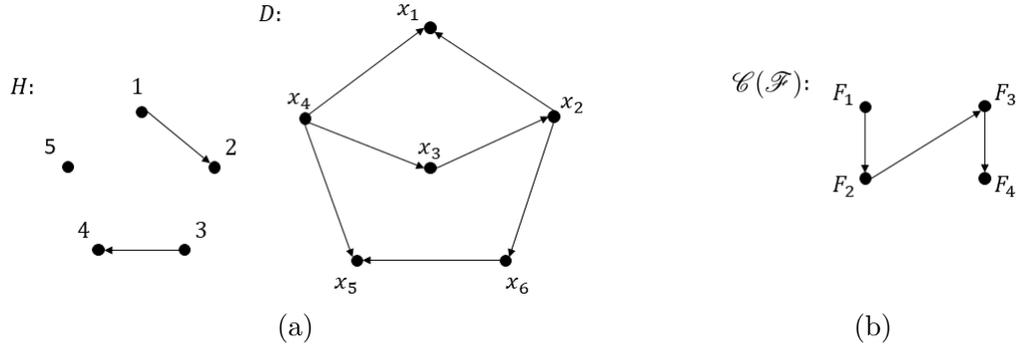


Figura 6.36

Teniendo a la mano estas definiciones, podemos finalmente enunciar el resultado principal demostrado en [16].

Teorema 6.2. Sean H una digráfica transitiva, D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{P} = \{D_1, D_2\}$ una H -separación de D tal que:

1. Para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo.
2. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .
3. Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Entonces D tiene un H -núcleo.

Cabe mencionar que la digráfica H -coloreada D , en la figura 6.35, cumple las hipótesis del teorema 6.2. En efecto:

1. Como se mencionó anteriormente, H es una digráfica transitiva y $\mathcal{P} = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D .
2. Como no hay ciclos contenidos en D_1 o en D_2 , entonces se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo.
3. Por la estructura de la digráfica es claro que D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .

4. También D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 (esto se debe a que las únicas opciones viables son (x_4, x_3, x_2, x_1) , (x_4, x_3, x_2, x_6) , $(x_4, x_3, x_2, x_6, x_5)$, (x_3, x_2, x_6, x_5) , pero x_3 no es obstrucción para las primeras dos trayectorias y x_6 no es obstrucción para las últimas dos trayectorias), por lo que cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Luego el teorema 6.2 concluye que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.35 tiene un H -núcleo. Efectivamente, es sencillo ver que $N = \{x_1, x_3, x_5\}$ es un H -núcleo para D , pues no existe una H -trayectoria entre dos vértices en N y para todo vértice en $V(D) \setminus N$ existe alguna H -trayectoria hacia un vértice de N , a saber, (x_2, x_1) , (x_4, x_3) y (x_6, x_5) .

Observación 6.18. *El teorema 6.2 es una extensión del teorema 4.2.*

Sea D una digráfica m -coloreada la cual cumple las hipótesis del teorema 4.2. Ahora:

1. *Sea H la digráfica definida por $V(H) = \{1, 2, \dots, m\}$ y $A(H) = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)\}$, de este modo la digráfica D es H -coloreada y todas las H -trayectorias en D son trayectorias monocromáticas. Note que H es una digráfica transitiva.*
2. *Supongamos que $\{C_1, C_2\}$ es la partición del conjunto de colores considerada en el teorema 4.2, con D_i la subdigráfica generadora de D de modo que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c(a) \in B \text{ para algún } B \in C_i\}$. Por definición de D_i , $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ y $A(D_1) \cup A(D_2) = A(D)$; además todas las H -trayectorias en D son trayectorias monocromáticas, las cuales están contenida en D_1 o en D_2 , por lo que $\mathcal{P} = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D .*
3. *Por hipótesis del teorema 4.2, para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en D_i es monocromático. Además, por definición de H , cada ciclo monocromático de D de color l es un H -ciclo en D , a saber (l, l, \dots, l) . Por lo cual se cumple que, para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo.*

Dado que una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 vendría siendo un triángulo arcoíris en $\mathcal{C}(D)$ que utilice colores tanto de C_1 como de C_2 y una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 vendría siendo un \vec{P}_3 arcoíris en $\mathcal{C}(D)$ que utilice colores tanto de C_1 como de C_2 , tenemos que:

4. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .*

5. Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Ya que D satisface las hipótesis del teorema 6.2, entonces éste es una extensión del teorema 4.2.

Hagamos notar que tanto el teorema 6.1 como el teorema 6.2, ambos son una extensión del teorema 4.2 (véanse observaciones 6.17 y 6.18), por lo que es necesario hacer una comparación de éstos.

Observación 6.19. Teorema 6.2 no generaliza el teorema 6.1.

Basta con exhibir una digráfica H -coloreada la cual cumpla las hipótesis del teorema 6.1 y no cumpla las hipótesis del teorema 6.2. Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.37a.

1. Note que la digráfica H no transitiva, porque $\{(1, 2), (2, 3)\}$ es un subconjunto de $A(H)$ pero $(1, 3) \notin A(H)$, por lo cual la digráfica H -coloreada D no cumple las hipótesis del teorema 6.2.

Por otra parte, veamos tal digráfica H -coloreada si cumple las hipótesis del teorema 6.1.

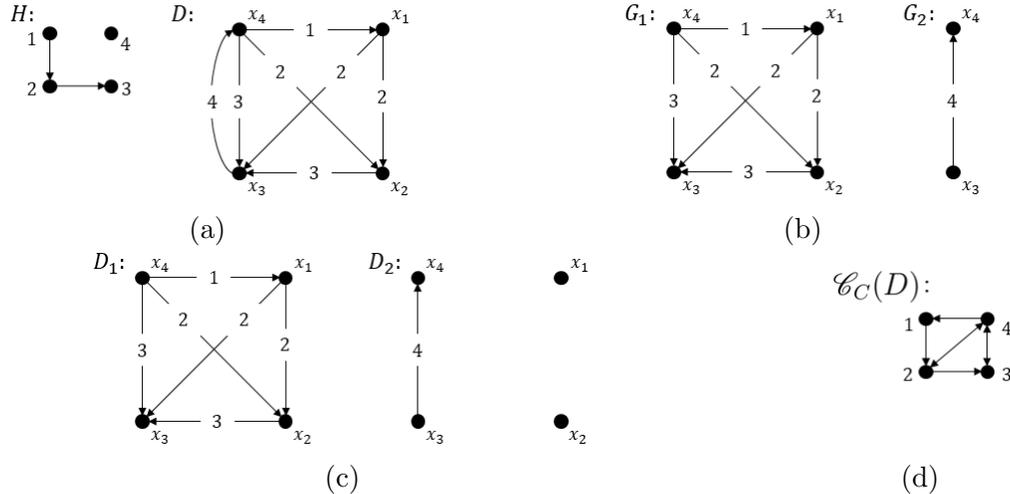


Figura 6.37: Digráfica H -coloreada la cual cumple las hipótesis del teorema 6.1 y no cumple las hipótesis del teorema 6.2.

2. *Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3, 4\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas G_1 y G_2 inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.37b).*
3. *Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1, 2\}\}, \xi_2 = \{\{3, 4\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.37c).*
4. *D_1 ni D_2 no contienen ciclo, por lo cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2\}$ tal que γ está contenido en G_m .*
5. *Como $G_1 = D_1$ y D_2 es la digráfica G_2 y vértices aislados, entonces se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.*
6. *Las únicas $\xi_1\xi_2$ -flechas o $\xi_2\xi_1$ -flechas en $A(\mathcal{C}_C(D))$ son $(4, 1), (4, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 4)$, pero éstas no están en $A(H)$. Luego se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$ (véase figura 6.37d).*
7. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 (pues las únicas opciones viables son $(x_4, x_1, x_2, x_3, x_4), (x_4, x_1, x_3, x_4), (x_4, x_2, x_3, x_4)$, pero x_1 no es obstrucción para los primeros dos ciclos y x_2 no es obstrucción para el último ciclo).*
8. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 (pues la única opción viable es (x_1, x_2, x_3, x_4) , pero x_2 no es obstrucción para tal trayectoria), luego se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .*

Luego el teorema 6.1 concluye que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.37a tiene un H -núcleo; efectivamente, es sencillo ver que $\{x_3\}$ es un H -núcleo para D , pues $N_D^-(x_3) = \{x_1, x_2, x_4\}$.

Observación 6.20. *Teorema 6.1 no generaliza el teorema 6.2.*

Basta con exhibir una digráfica H -coloreada la cual cumpla las hipótesis del teorema 6.2 y no cumpla las hipótesis del teorema 6.1. Examinemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.38a.

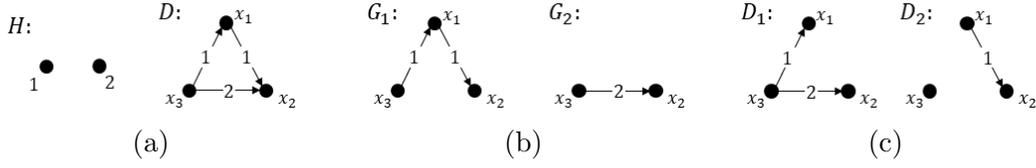


Figura 6.38: Digráfica H -coloreada la cual cumple las hipótesis del teorema 6.2 y no cumple las hipótesis del teorema 6.1.

1. Note que la única partición posible de $V(H) = \{1, 2\}$, el conjunto de colores de D es $\xi = \{\{1\}, \{2\}\}$, pero en este caso la subdigráfica G_1 inducida por esta partición no es transitiva por H -trayectorias (porque $(x_3, x_1), (x_1, x_2)$ son H -trayectorias en G_1 pero no existe una x_3x_2 - H -trayectoria en G_1). Por lo cual la digráfica H -coloreada D no cumple las hipótesis del teorema 6.1 (véase figura 6.38b).

Por otra parte, veamos tal digráfica H -coloreada si cumple las hipótesis del teorema 6.2

2. Como $A(H) = \emptyset$, entonces H es una digráfica transitiva.
3. Sean D_1 y D_2 las subdigráficas generadoras de D de la figura 6.38c. Luego, es claro que $\mathcal{P} = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D .
4. D_1 ni D_2 no contienen ciclo, por lo cumple que para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo.
5. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .
6. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 , luego se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Luego el teorema 6.2 concluye que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.38a tiene un H -núcleo; efectivamente, es sencillo ver que $\{x_2\}$ es un H -núcleo para D , pues $N_D^-(x_2) = \{x_1, x_3\}$.

Por otra parte, enunciemos los resultados obtenidos en [19].

Teorema 6.3. Si D es una digráfica H -coloreada tal que cada ciclo en D es un H -ciclo, entonces D tiene un H -núcleo por caminos.

Teorema 6.4. *Sea D una digráfica H -coloreada. Supongamos que existe una partición de $A(D)$ en dos conjuntos F_1 y F_2 tal que cada ciclo contenido en $D_i = D[F_i]$, $i = 1, 2$, es un H -ciclo. Supongamos también que D no tiene $H-C_3$ fuertemente arcoíris ni $H-P_3$ fuertemente arcoíris. Si todo H -camino de D está contenido en D_1 o en D_2 , entonces D tiene un H -núcleo.*

Teorema 6.5. *Sea D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ una partición de $A(D)$ tal que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2, \dots, n\}$, cada ciclo de D contenido en $D[F_i]$ es un H -ciclo.*
2. *D no tiene $H-C_3$ fuertemente arcoíris ni $H-P_3$ fuertemente arcoíris.*
3. *Para cada H -camino P de D existe i en $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que P se queda contenido en $D[F_i]$.*
4. *$\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es bipartita.*

Entonces D tiene un H -núcleo.

Teorema 6.6. *Sea D una digráfica H -coloreada y $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ una partición de $A(D)$ tal que:*

1. *Para cada i en $\{1, 2, \dots, n\}$, cada ciclo de D contenido en $D[F_i]$ es un H -ciclo.*
2. *D no tiene $H-C_3$ fuertemente arcoíris ni $H-P_3$ fuertemente arcoíris.*
3. *Para cada H -camino P de D existe i en $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que P se queda contenido en $D[F_i]$.*
4. *$\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es fuertemente conexa y además no tiene ciclos de longitud impar al menos 3.*

Entonces D tiene un H -núcleo.

Teorema 6.7. *Si D es una digráfica H -coloreada sin $H-C_3$ arcoíris ni $H-P_3$ arcoíris, entonces D tiene un H -núcleo por caminos.*

Observación 6.21. *Los teoremas 6.3 y 6.7 son ajenos respecto al teorema 6.1.*

En efecto, los primeros dos resultados son sobre la existencia de H -núcleos por caminos y el último sobre la existencia de H -núcleos en digráficas H -coloreadas, y como se hizo notar en las observaciones 6.6 y 6.7, la existencia de un H -núcleo no implica la existencia de un H -núcleo por caminos, y viceversa.

Observación 6.22. *Los teoremas 6.4, 6.5 y 6.6 no generalizan al teorema 6.1.*

Veamos que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.39a cumple las hipótesis del teorema 6.1.

1. *Primeramente se considera $\xi = \{C_1 = \{1\}, C_2 = \{2\}, C_3 = \{3\}\}$ una partición de $V(H) = \{1, 2, 3\}$, el conjunto de colores de D , de manera que las subdigráficas G_1 , G_2 y G_3 inducidas por esta partición son transitivas por H -trayectorias (véase figura 6.39b).*
2. *Después se considera $\{\xi_1 = \{\{1\}, \{2\}\}, \xi_2 = \{\{3\}\}\}$ una partición de ξ y también las subdigráficas generadoras D_1 y D_2 inducidas por esta nueva partición (véase figura 6.39c).*
3. *D_1 ni D_2 no contienen ciclo, por lo cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, 3\}$ tal que γ está contenido en G_m .*
4. *Como los únicos H -caminos en D_1 y D_2 son las flechas, las cuales se encuentran contenidas en G_1, G_2 o G_3 según sea el caso, entonces se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, 3\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.*
5. *Como $A(H) = \emptyset$, entonces se cumple que si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.*
6. *D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .*
7. *Note que $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es la única (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 en D , siendo x_2 y x_3 obstrucciones de T , además (x_1, x_4) es una x_1x_4 - H -trayectoria. Así, se cumple que si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún $\{u, x\} \subseteq V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .*

Luego el teorema 6.1 concluye que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.39a tiene un H -núcleo; efectivamente, es sencillo ver que $\{x_2, x_4\}$ es un H -núcleo para D , pues $\Gamma_D^-(\{x_2, x_4\}) = \{x_1, x_3\}$.

Por otra parte, notemos que los teoremas 6.4, 6.5 y 6.6 restringen estructuras que el teorema 6.1 no.

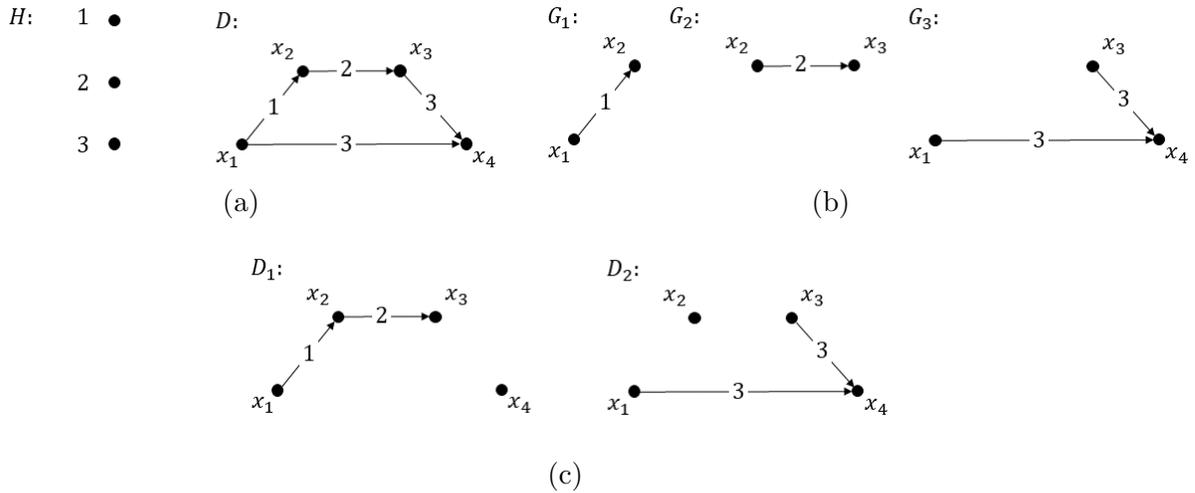


Figura 6.39

8. Se considera $\mathcal{F} = \{F_1 = \{1, 2\}, F_2 = \{3\}\}$ una partición de $A(G)$, para la cual $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es un H - P_3 fuertemente arcoíris en D , donde x_2 y x_3 son obstrucciones de T .

Esta estructura está prohibida de acuerdo a las hipótesis de los teoremas 6.4, 6.5 y 6.6, y como se vió en el punto 7 de esta observación, esta estructura si está permitida de acuerdo a las hipótesis del teorema 6.1.

Observación 6.23. El teorema 6.1 no generaliza a los teoremas 6.4, 6.5 y 6.6.

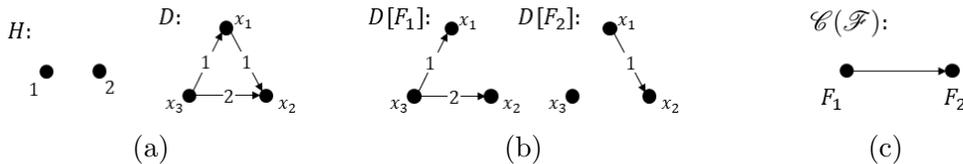


Figura 6.40

Analícemos la digráfica H -coloreada D de la figura 6.40a.

1. Como se vió en la observación 6.20, esta digráfica H -coloreada no cumple las hipótesis del teorema 6.1.

Por otra parte, veamos que ésta cumple las hipótesis de los teoremas 6.4, 6.5 y 6.6.

2. Primero se considera una partición $\mathcal{F} = \{F_1 = \{(x_3, x_1), (x_3, x_2)\}, F_2 = \{(x_1, x_2)\}\}$ de $A(D)$.
3. Como no existen ciclos en $D[F_1]$ ni en $D[F_2]$, entonces se cumple que para cada i en $\{1, 2\}$, cada ciclo de D contenido en $D[F_i]$ es un H -ciclo (Véase figura 6.40b).
4. Por la estructura de la gráfica es claro que D no tiene H - C_3 fuertemente arcoíris ni H - P_3 fuertemente arcoíris.
5. Los únicos H -caminos son las flechas las cuales se quedan contenidos en $D[F_1]$ o $D[F_2]$, según sea el caso, por lo cual se cumple que para cada H -camino P de D existe i en $\{1, 2\}$ tal que P se queda contenido en $D[F_i]$.
6. $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es fuertemente conexa y además no tiene ciclos de longitud impar al menos 3, más aún, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ es bipartita siendo $\{F_1, F_2\}$ una partición de $V(\mathcal{C}(\mathcal{F}))$ en conjuntos disjuntos no vacíos independientes.

Luego los teoremas 6.4, 6.5 y 6.6 concluyen que la digráfica H -coloreada D de la figura 6.38a tiene un H -núcleo; efectivamente, es sencillo ver que $\{x_2\}$ es un H -núcleo para D , pues $N_D^-(x_2) = \{x_1, x_3\}$.

Conclusiones

Mediante el análisis hecho de los artículos *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-coloured digraphs* y *Cycles and transitivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs* en los capítulos 4 y 5, pudimos percatarnos del método utilizado en dichos artículos para la obtención de condiciones que implicaran la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticos en digráficas m -coloreadas.

Métodos similares fueron utilizados en la sección 6.3 para la obtención de condiciones que implicaran la existencia de H -núcleos en digráficas H -coloreadas. De este modo, se consideró una partición $\xi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ($k \geq 2$) de $V(H)$, el conjunto de colores de D , de modo que para cada i en $\{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que la subdigráfica G_i , definida como $G_i = D[\{a \in A(D) : c(a) \in C_i\}]$ es transitiva por H -trayectorias. Posteriormente, se consideró otra partición $\{\xi_1, \xi_2\}$ de ξ , y se trabajó con digráficas generadoras de D , a saber D_i , tal que $A(D_i) = \{a \in A(D) : c_D(a) \in C_j \text{ para algún } C_j \text{ en } \xi_i\}$. Entonces, se estudiaron condiciones sobre D_1 y D_2 .

Esto nos permitió obtener un resultado original en la teoría de H -núcleos (teorema 6.1), el cual afirma lo siguiente:

Sea D una digráfica H -coloreada. Supongamos que:

1. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada ciclo γ de D contenido en D_i existe m en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que γ está contenido en G_m .
2. Para cada i en $\{1, 2\}$ y para cada H -camino P de D contenido en D_i existe m' en $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que P está contenido en $G_{m'}$.
3. Si existe una $\xi_1\xi_2$ -flecha o una $\xi_2\xi_1$ -flecha en $A(\mathcal{C}_C(D))$, digamos (a, b) , entonces $(a, b) \notin A(H)$.
4. D no contiene una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{C}_3 .

5. Si existe una ux -trayectoria la cual es una (ξ_1, ξ, ξ_2) - H -subdivisión de \vec{P}_3 para algún subconjunto $\{u, x\}$ de $V(D)$, entonces existe una ux - H -trayectoria en D .

Entonces D tiene un H -núcleo.

Cabe mencionar que dicho resultado es una extensión de los resultados principales de los mostrados en los capítulos 4 y 5, así como del Teorema de Sands, Sauer y Woodrow en el caso finito.

Para finalizar nuestro estudio se logró mostrar que cada una de las hipótesis del resultado original, mencionado anteriormente, es necesaria. Para eso se exhibieron 5 ejemplos de digráficas H -coloreadas cada una de las cuales no tenían H -núcleo y además cumplían todas las hipótesis del teorema 6.1 con excepción de una de ellas.

Bibliografía

- [1] P. ARPIN, V. LINEK, *Reachability problems in edge-colored digraphs*, Discrete Mathematics, 307 (2007) 2276-2289.
- [2] C. BERGE, *Vers une theorie generale des jeux positionnels*, R. Henn, O. Moeschlin (Eds.), Mathematical Economics and Game Theory, Essays in honor of Oskar Morgenstern, Lecture Notes in Economics, vol. 141, Springer, Berlin (1977), pp. 13-24.
- [3] C. BERGE, *Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications et theorie des jeux*, Publ. Econometriques 6, 1977.
- [4] C. BERGE, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library, The Netherlands, 1989.
- [5] J. A. BONDY, U. S. R. MURT, *Graph Theory*, Springer, Berlin (2008).
- [6] E. CASAS-BAUTISTA, H. GALEANA-SÁNCHEZ, R. ROJAS-MONROY, *Cycles and transitivity by monochromatic paths in arc-coloured digraphs*, Graphs and Combinatorics 12 (2015) 104-112.
- [7] V. CHVÁTAL, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report No. CRM-300, Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal, 1973.
- [8] P. DELGADO-ESCALANTE, H. GALEANA-SÁNCHEZ, *Restricted domination in arc-coloured digraphs*, Graphs Comb., 11 (1) (2014) 95-104.
- [9] P. DUCHET, *Graphes Noyau-Parfaits*, Ann. Discrete Math. 9 (1980) 93-101.
- [10] H. GALEANA-SÁNCHEZ, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge-coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996) 103-112.
- [11] H. GALEANA-SÁNCHEZ, *Kernels in edge-colored digraphs*, Discrete Math. 184 (1998) 87-99.

- [12] H. GALEANA-SÁNCHEZ, *Kernels by monochromatic paths and the color-class digraph*, Discuss. Math. Graph Theory 31 (2011) 273-281.
- [13] H. GALEANA-SÁNCHEZ, G. GAYTÁN-GÓMEZ, R. ROJAS-MONROY, *Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-coloured digraphs*, Discuss. Math. Graph Theory 31 (2011) 283-292.
- [14] H. GALEANA-SÁNCHEZ, R.SÁNCHEZ-LÓPEZ, *H-kernels in infinite digraphs*, Graphs and Combinatorics (2013) 29:913.
- [15] H. GALEANA-SÁNCHEZ, R.SÁNCHEZ-LÓPEZ, *H-kernels and H-obstructions in H-colored digraphs*, Discrete Math. 338 (2015) 2288-2294.
- [16] H. GALEANA-SÁNCHEZ, I. TORRES-RAMOS, *H-Paths and H-Cycles in H-coloured digraphs*, Graphs and Combinatorics 31 (2015) 615-628.
- [17] H. GALEANA-SÁNCHEZ, R. SÁNCHEZ-LÓPEZ, *H-kernels by walks in H-colored digraph and the color-class digraph*, Graphs and Combinatorics 13 (2016) 120-129.
- [18] H. GALEANA-SÁNCHEZ, R.SÁNCHEZ-LÓPEZ, *Richardson's Theorem in H-coloured digraphs*, Graphs and Combinatorics 13 (2016) 32:629.
- [19] H. RINCÓN GALEANA (2016), *H-ciclos y H-caminos en digráficas* (tesis de pregrado). Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [20] B. SANDS, N. SAUER, R. WOODROW, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combi. Theory, (B) 33 (1982) 271-275.
- [21] J. VON NEUMANN, O. MORGENSTERN, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.