



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

**Generalizaciones del problema de la aguja de Buffon.**

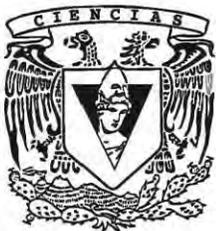
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Actuario**

P R E S E N T A:

**GERMAN BLECK PAREDES**



DIRECTOR DE TESIS:  
**DOCTOR PIERRE MICHEL BAYARD**

CIUDAD DE MÉXICO, 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

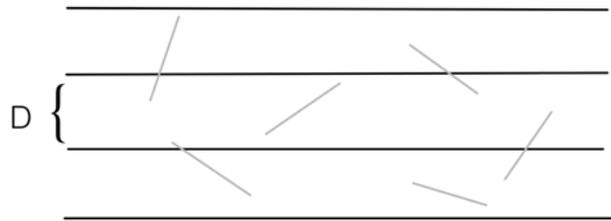
|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1. Conjuntos convexos en el plano</b>                       | <b>8</b>  |
| 1.1. Primeras definiciones . . . . .                           | 8         |
| 1.2. Perímetro de un conjunto convexo . . . . .                | 9         |
| 1.3. Conjuntos convexos paralelos . . . . .                    | 11        |
| 1.4. Conjuntos convexos de ancho constante . . . . .           | 14        |
| <b>2. Densidades de conjuntos en el plano</b>                  | <b>15</b> |
| 2.1. Conjuntos de puntos . . . . .                             | 15        |
| 2.2. Conjuntos de rectas . . . . .                             | 16        |
| 2.3. Conjuntos de bandas . . . . .                             | 18        |
| <b>3. Generalizaciones del problema de la aguja de Buffon</b>  | <b>20</b> |
| 3.1. Primera generalización: la aguja convexa . . . . .        | 20        |
| 3.2. Segunda generalización: la aguja larga . . . . .          | 21        |
| 3.3. Tercera generalización: la aguja en una rejilla . . . . . | 28        |
| <b>4. División del plano por rectas aleatorias</b>             | <b>33</b> |
| 4.1. Resultados generales . . . . .                            | 33        |
| 4.2. Caso particular del disco . . . . .                       | 38        |
| <b>A. Medidas</b>  | <b>41</b> |
| <b>B. Formas diferenciales en <math>\mathbb{R}^n</math></b>    | <b>43</b> |
| <b>C. Fórmula de Euler</b>                                     | <b>45</b> |
| <b>D. Envoltura de una familia de curvas</b>                   | <b>48</b> |



# Introducción

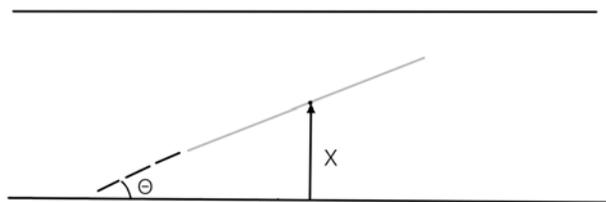
Sea una aguja de longitud  $\ell$  lanzada aleatoriamente en un plano que contiene líneas paralelas cuya distancia entre ellas es  $D$ . Si  $\ell \leq D$ , el problema de Buffon consiste en calcular la probabilidad de que la aguja toque alguna de las líneas.

Figura 1: Agujas lanzadas al azar



Se toma como referencia la distancia del centro de la aguja a la línea paralela inferior, y esta variable será denotada con  $x$ . A la variable del ángulo formado por la aguja con la misma línea paralela se denotará con  $\theta$ .

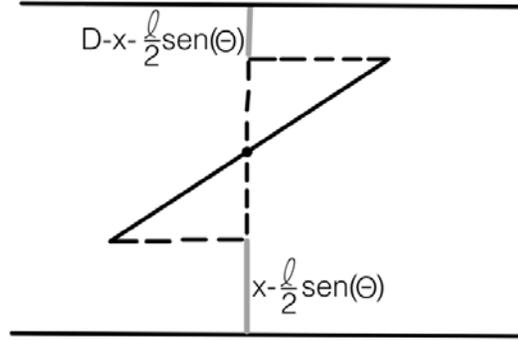
Figura 2: Variables en el experimento



Si la aguja es lanzada al azar como dice el supuesto, entonces  $x$  y  $\theta$  son variables aleatorias independientes. Supongamos adicionalmente que  $x$  se distribuye uniformemente en  $[0, D]$  y  $\theta$  se distribuye uniformemente en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . La probabilidad de que la aguja toque una línea se denotará con  $p$ . Se observa que la probabilidad de que no toque ninguna línea es  $1 - p$ , y este caso, dejando  $\theta$  fija, corresponde a

$$\frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta) \leq x \leq D - \frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta). \quad (1)$$

Figura 3: Ilustración de la justificación de (1).



Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 - p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \left( \int_{\frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta)}^{D - \frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta)} \frac{1}{D} dx \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \left( \frac{D - 2\frac{\ell}{2} \text{sen}(\theta)}{D} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{\ell \text{sen}(\theta)}{D} \right) d\theta \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell \text{sen}(\theta)}{D} d\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

lo que implica que

$$1 - p = 1 - \frac{2\ell}{\pi D},$$

es decir

$$p = \frac{2\ell}{\pi D}. \quad (3)$$

En este caso, se pide como supuesto que la aguja sea un segmento de recta que caiga entre líneas paralelas, y que la longitud de dicha aguja sea menor a la distancia entre las rectas. La presente tesis busca generalizar este problema en por lo menos tres casos: para “agujas” convexas entre bandas, para agujas más largas que la distancia entre las paralelas y para agujas pequeñas pero dentro de rectángulos. A continuación se dará una breve descripción de cada capítulo.

En el capítulo 1 se introduce el concepto de conjunto convexo en el plano, también se ve la manera en que se definen estos conjuntos mediante la familia de sus rectas tangentes, y con la función soporte, que es la función que da la distancia de dichas rectas a un punto de origen. Con la función soporte del conjunto convexo se puede obtener información del conjunto como su área, su perímetro y la amplitud que éste tiene en cada dirección dada. También se definen conjuntos de ancho constante (conjuntos que tienen la misma amplitud para todas las direcciones), y también, dado un conjunto convexo, se verá cuáles son sus conjuntos paralelos, y el área y perímetro que tienen.

En el capítulo 2 se ven las densidades de algunos conjuntos en el plano. Se buscan siempre densidades que den lugar a medidas invariantes bajo isometrías en el plano. Se introducen sucesivamente densidades de conjuntos de puntos, de rectas y de bandas. La densidad de un conjunto de rectas se obtiene como caso particular de la densidad de un conjunto de bandas de anchura nula.

En el capítulo 3 se ven las generalizaciones del problema de Buffon presentado en el inicio de esta introducción. En la primera generalización la aguja es reemplazada por un convexo cualquiera que se encuentra entre bandas paralelas, y se busca la probabilidad que las interseque. La segunda generalización es una aguja cuya longitud es mayor que la separación entre las rectas paralelas. En esta generalización se considera la probabilidad de  $i$  intersecciones, donde  $i$  puede tomar un valor mayor a 1. En la tercera generalización se ve la aguja dentro de una “rejilla”, es decir, está en rectángulos de base  $a$  y

altura  $b$ , y se busca la probabilidad de que toque al menos algún lado de los rectángulos. Este problema se conoce como el problema de Buffon-Laplace.

En el capítulo 4 se estudia la división del plano por rectas aleatorias, y la esperanza de algunas variables, cuando estas rectas intersecan un convexo dado.

Los resultados de los capítulos 1,2 y 4 y la primera generalización se obtienen de la referencia [9]. La segunda generalización se encuentra en las referencias [2] y [6] de la bibliografía. Por último, la primera parte de la tercera generalización se halla en la referencia [1], mientras que la segunda parte pertenece al autor de la tesis.

Un apéndice termina la tesis, acerca de medidas, de formas diferenciales, de la fórmula de Euler y de la noción de envoltura de una familia de curvas.

# Capítulo 1

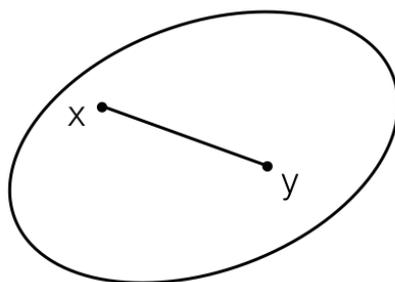
## Conjuntos convexos en el plano

### 1.1. Primeras definiciones

**Definición 1.1** *Un conjunto  $K$  de puntos en el plano es convexo, si para cualquier par de puntos  $x, y$  de este conjunto, el segmento de recta  $xy$  que une dichos puntos se encuentra enteramente contenido en  $K$ .*

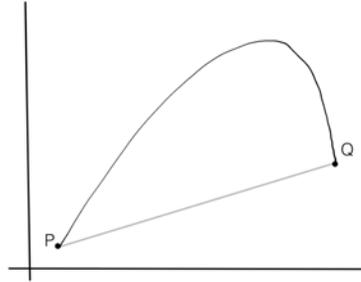
En esta tesis se considerarán siempre conjuntos convexos que sean cerrados y acotados.

Figura 1.1: Conjunto convexo



**Definición 1.2** *Una curva que empieza en el punto  $P$  y termina en  $Q$  será convexa si dicha curva junto con el segmento  $PQ$  conforman la frontera de un conjunto convexo.*

Figura 1.2: Curva convexa



**Definición 1.3** Se llamará *curva cerrada convexa* a la frontera de un conjunto convexo  $K$ , si  $K$  es acotado y tiene puntos interiores. La frontera del conjunto se denotará como  $\partial K$ .

## 1.2. Perímetro de un conjunto convexo

**Definición 1.4** Sea

$$(C_\lambda)_{\lambda \in (\alpha, \beta)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, \lambda) = 0\}$$

una familia de curvas. La envoltura de dicha familia de curvas es aquella curva  $\gamma : \lambda \rightarrow (x(\lambda), y(\lambda))$  tangente con cada curva  $C_\lambda$  de la familia en los puntos de contacto.

La ecuación de la envoltura (ver Apéndice D) está dada si se elimina el parámetro  $\lambda$  del par de ecuaciones

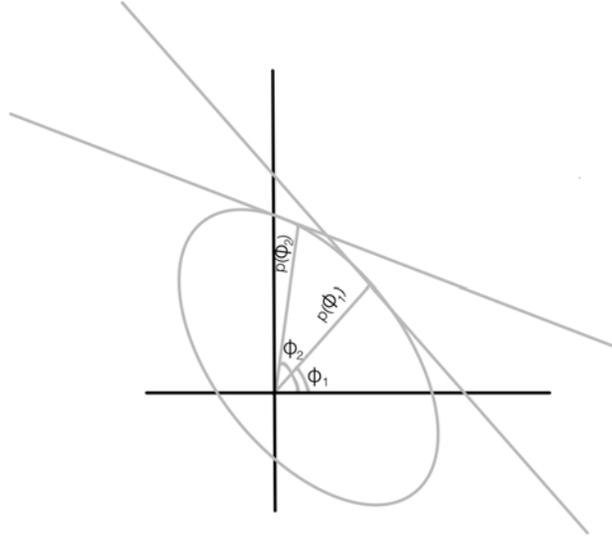
$$F(x, y, \lambda) = 0$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0.$$

Ahora se determinará la ecuación de un conjunto de rectas considerando la distancia  $p$  que tengan al origen y el ángulo  $\phi$  de su normal con respecto al eje  $x$ .

Figura 1.3: Un ejemplo: un convexo como envoltura de sus rectas tangentes.



La ecuación queda de este modo:

$$F(x, y, \phi) = x \cos(\phi) + y \operatorname{sen}(\phi) - p(\phi) = 0 \quad (1.1)$$

donde  $p$  es función diferenciable de  $\phi$ . Y se obtiene también su derivada parcial

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(x, y, \phi) = -x \operatorname{sen}(\phi) + y \cos(\phi) - p'(\phi) = 0. \quad (1.2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la envoltura de la familia de rectas

$$x = p \cos(\phi) - p' \operatorname{sen}(\phi),$$

$$y = p \operatorname{sen}(\phi) - p' \cos(\phi).$$

Luego de esto se pueden obtener las diferenciales

$$dx = -(p + p'') \operatorname{sen}(\phi) d\phi$$

$$dy = (p + p'') \cos(\phi) d\phi$$

y por lo tanto

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = |p + p''| d\phi,$$

que es la expresión de la longitud de arco de la envoltura de la familia de rectas en función de  $\phi$ .

Si la envoltura es la frontera  $\partial K$  de un conjunto convexo  $K$  y  $0$  es un punto interior de  $K$ , entonces se llama a  $p(\phi)$  la función soporte de  $K$ . En este caso se puede probar que  $(p + p'') > 0$ . De este resultado se obtiene el perímetro del conjunto convexo de función soporte  $p$

$$L = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} (p + p'') d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi. \quad (1.3)$$

Usamos aquí que

$$\int_0^{2\pi} p'' d\phi = [p']_0^{2\pi} = 0.$$

### 1.3. Conjuntos convexos paralelos

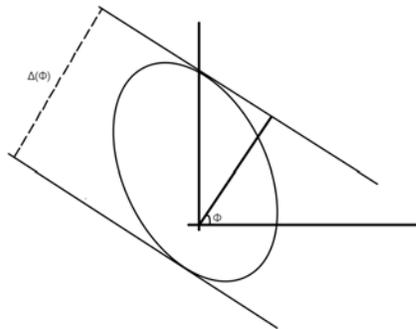
**Definición 1.5** Una línea  $h$  se llamará línea soporte de  $K$  en algún punto  $P \in \partial K$  si  $P \in h$  y  $K$  queda completamente contenido en uno de los dos semiplanos cerrados definidos por  $h$ . Ahora, el ancho  $\Delta(\phi)$  de  $K$  es la distancia entre las dos líneas soporte paralelas que son perpendiculares a la dirección  $\phi$ . Tenemos entonces

$$\Delta(\phi) = p(\phi) + p(\phi + \pi).$$

*Nota:* Este resultado tiene una fórmula análoga en materia de análisis. Para un vector  $u$  la función  $p$  se escribe como  $P_K(u) = \max\{\langle u, a \rangle \mid a \in K\}$ . Entonces el ancho de  $K$  en la dirección  $u$  se escribe

$$\Delta_K(u) = P_K(u) + P_K(-u)$$

Figura 1.4: Ancho de un conjunto convexo



Según el último resultado de la sección anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} p(\phi) d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} p(\phi) d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} p(\phi) d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} p(\phi) d\phi + \int_0^{\pi} p(\phi + \pi) d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} (p(\phi) + p(\phi + \pi)) d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} \Delta(\phi) d\phi.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

**Definición 1.6** *Al menor ancho de  $K$  se le conocerá como amplitud de  $K$ , y al mayor ancho se le conocerá como diámetro de  $K$ .*

La amplitud y el diámetro de  $K$  se denotarán  $E$  y  $D$  respectivamente. Y como

$$E \leq \Delta(\phi) \leq D$$

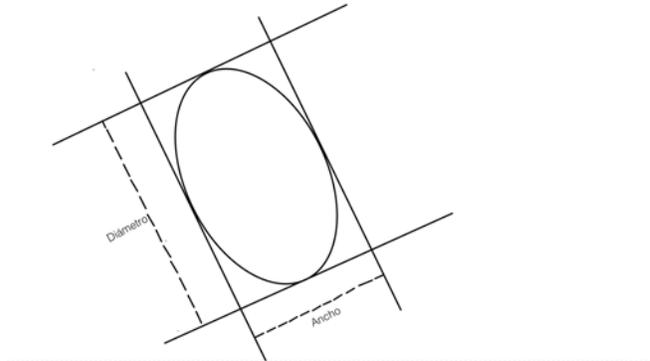
entonces

$$\int_0^{\pi} E d\phi \leq \int_0^{\pi} \Delta(\phi) d\phi \leq \int_0^{\pi} D d\phi$$

y por tanto

$$\pi E \leq L \leq \pi D.$$

Figura 1.5: Amplitud y diámetro de un convexo



**Definición 1.7** Sea  $K$  un conjunto convexo. Su conjunto paralelo  $K_r$  que está a distancia  $r$ , es la unión de los discos cerrados de radio  $r$  cuyo centro es un punto de  $K$ . Dicho de otro modo

$$K_r = \bigcup_{x \in K} B[x, r]$$

Ejemplo de conjuntos paralelos son las siguientes figuras:

Figura 1.6: Círculo con su convexo paralelo

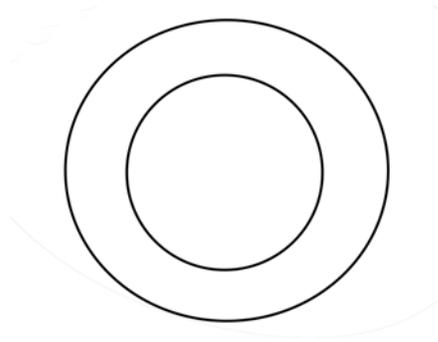
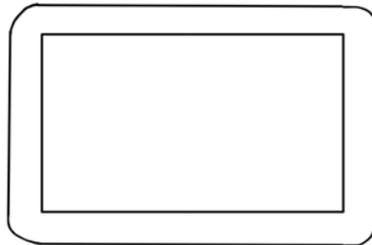


Figura 1.7: Rectángulo con su convexo paralelo



Sea  $K$  un conjunto convexo, y  $K_r$  su conjunto paralelo. Si  $p(\phi)$  es la función soporte de  $K$ , se puede ver que  $p^*(\phi) = p(\phi) + r$  es la función soporte de  $K_r$ . Luego, si el perímetro del conjunto  $K$  es  $L$ , el perímetro  $L_r$  de  $K_r$  es

$$L_r = \int_0^{2\pi} p^*(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} (p(\phi) + r) d\phi = L + 2r\pi. \quad (1.5)$$

## 1.4. Conjuntos convexos de ancho constante

Para un conjunto de ancho constante  $\Delta(\phi) = \Delta$  para todo  $\phi$ , se tiene que

$$L = \int_0^\pi \Delta d\phi = \pi\Delta. \quad (1.6)$$

Además del círculo existen otros conjuntos de ancho constante, por ejemplo los llamados polígonos de Reuleaux, que se pueden crear, por ejemplo, con polígonos regulares que tengan un número impar de lados y haciendo el arco de un círculo cuyo centro es un vértice y que va de vértice a vértice del lado opuesto al vértice tomado como centro del círculo.

Figura 1.8: Triángulo de Reuleaux

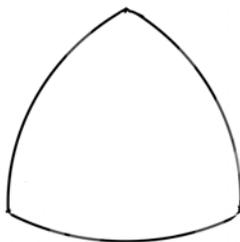
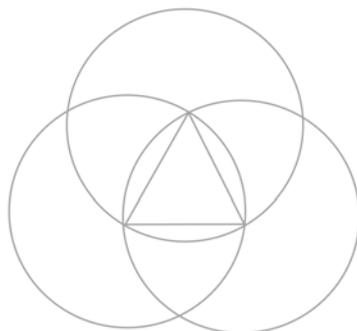


Figura 1.9: Cómo se forma un triángulo de Reuleaux



# Capítulo 2

## Densidades de conjuntos en el plano

### 2.1. Conjuntos de puntos

Se busca una medida  $m$  sobre los conjuntos de puntos del plano que sea invariante bajo isometrías en el plano (composiciones de traslaciones y rotaciones). Es decir, si  $X$  es un conjunto de puntos y  $X'=uX$  donde  $u$  es una isometría del plano entonces  $m(X)=m(X')$ . Supongamos que la medida  $m$  tiene una densidad  $f$ , i.e.,

$$m(X) = \int_X f(x, y) dx \wedge dy$$

para todo conjunto de puntos  $X$ . La transformación  $u$  se escribe

$$\begin{aligned}x' &= x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta) + a \\y' &= x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta) + b\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de rotación, y  $a, b$  son las coordenadas de traslación.

Como las medidas de  $X$  y de  $X' = uX$  son iguales, se tiene que

$$\int_{X'} f(x', y') dx' \wedge dy' = \int_X f(x, y) dx \wedge dy.$$

Se puede ver fácilmente de (2.1) que  $dx' \wedge dy' = dx \wedge dy$ , lo que implica que (con un cambio de variables)

$$\int_{X'} f(x', y') dx' \wedge dy' = \int_X f(x', y') dx \wedge dy.$$

Por lo tanto

$$\int_X f(x, y) dx \wedge dy = \int_X f(x', y') dx \wedge dy$$

para todo conjunto  $X$  convexo y toda isometría (2.1) del plano. Eso implica que  $f(x, y) = f(x', y')$  para todas las isometrías, y por lo tanto que  $f(x, y) = c$  donde  $c$  es una constante. Se tomará la constante 1 para la simplificación de los cálculos, y con eso llegamos a la siguiente importante definición:

**Definición 2.1** *La medida de un conjunto de puntos  $X$  en el plano es la integral sobre el conjunto de la forma diferencial  $dP = dx \wedge dy$ , forma que será llamada densidad del conjunto de puntos. La densidad para conjuntos de  $n$ -adas de puntos en el plano es*

$$dP_1 \wedge dP_2 \wedge \cdots \wedge dP_n.$$

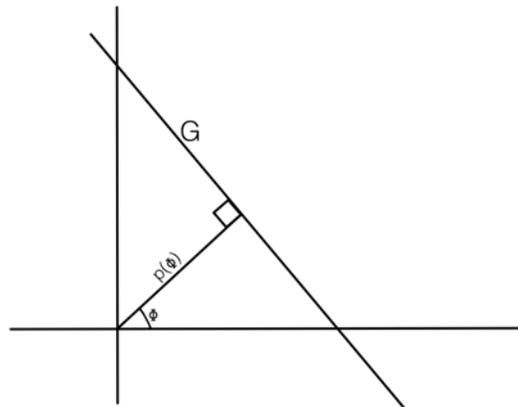
**Definición 2.2** *Sean  $X, Y$  conjuntos tales que  $Y \subset X$ , de manera que  $x$  es un elemento aleatorio de  $X$ . La probabilidad de que  $x$  sea también elemento de  $Y$  es*

$$\mathbb{P}(x \in Y | x \in X) = \frac{m(Y)}{m(X)}. \quad (2.2)$$

## 2.2. Conjuntos de rectas

Una recta  $G$  se define por el ángulo  $\phi$  del eje  $x$  con la perpendicular a la recta  $G$  que pasa por el origen, y por la distancia  $p$  de la recta al origen.

Figura 2.1: Recta con coordenadas polares.



Del mismo modo que se hizo anteriormente, la ecuación de la recta es

$$x\cos(\phi) + y\sen(\phi) - p = 0,$$

y la medida de un conjunto  $X$  de rectas es

$$m(X) = \int_X f(p, \phi) dp \wedge d\phi, \quad (2.3)$$

en donde  $f$  es alguna función positiva. Como antes la medida  $m$  debe ser invariante bajo isometrías del plano. La recta  $uG$ , imagen de  $G$  bajo una isometría  $u$ , se define con las nuevas variables

$$p' = p - a\cos(\phi) - b\sen(\phi),$$

$$\phi' = \phi - \alpha$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación de la isometría y  $a$  y  $b$  son los coeficientes de traslación. Ahora la ecuación de la recta  $uG$  es

$$x\cos(\phi - \alpha) + y\sen(\phi - \alpha) - (p - a\cos(\phi) - b\sen(\phi)) = 0.$$

Luego se obtiene  $dp' \wedge d\phi' = dp \wedge d\phi$ , y como se busca de igual modo que  $m(uX) = m(X)$ , entonces se llega a la misma conclusión que en la sección anterior:  $f$  es una constante, y se elige que sea 1. De esto se obtienen las siguientes dos definiciones: la densidad de un conjunto de rectas es la forma diferencial  $dG = dp \wedge d\phi$ , y la medida de un conjunto  $X$  de rectas es la integral de la densidad sobre el conjunto, es decir

$$m(X) = \int_X dG.$$

Ahora, sea  $D$  un dominio acotado del plano y  $F$  su área. Si  $G$  es una recta dada, se define  $\sigma(G)$  como la longitud de la cuerda de  $G \cap D$ , luego

$$\int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG = \int_0^\pi F d\phi = \pi F. \quad (2.4)$$

La primera igualdad se tiene con el teorema de Fubini, pues integrando  $\sigma$  sobre los valores de  $p$  se obtiene el área del dominio. Ahora se busca encontrar

una medida para el conjunto de rectas que interseca a un conjunto convexo  $K$  dado. Se define como

$$m(G|G \cap K \neq \emptyset) = \int_{G \cap K \neq \emptyset} dp \wedge d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi = L. \quad (2.5)$$

La segunda igualdad se obtiene de igual forma con el teorema de Fubini, integrando  $dp$  de 0 a  $p$  y la tercera igualdad es consecuencia de la ecuación (1.3).

Entonces en probabilidad geométrica, si  $K_1$  y  $K$  son conjuntos convexos y  $K_1 \subset K$ , la probabilidad de que una recta  $G$  interseque al conjunto  $K_1$ , dado que la línea interseca al conjunto  $K$ , es la división de las medidas

$$\mathbb{P} = \frac{m(G|G \cap K_1 \neq \emptyset)}{m(G|G \cap K \neq \emptyset)} = \frac{L_1}{L}. \quad (2.6)$$

## 2.3. Conjuntos de bandas

**Definición 2.3** *Se entenderá como banda de amplitud  $a$ , al conjunto de puntos que se encuentran entre dos líneas paralelas a distancia  $a$ . La posición de la banda  $B$  se determina con la recta paralela central, por tanto, si las coordenadas de dicha línea son  $p$  y  $\phi$  entonces la densidad de las bandas es*

$$dB = dp \wedge d\phi. \quad (2.7)$$

Ahora, sea  $K$  un conjunto convexo acotado. Si la banda  $B$  interseca al conjunto  $K$ , entonces su recta central interseca al conjunto  $K_{\frac{a}{2}}$ , conjunto paralelo de  $K$  a distancia  $\frac{a}{2}$ . Del mismo modo si  $K_{\frac{a}{2}}$  interseca la recta central de  $B$ , entonces el conjunto  $K$  interseca la banda. De aquí se obtiene que

$$m(B|B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = \int_{G \cap K_{\frac{a}{2}} \neq \emptyset} dG = L + \pi a. \quad (2.8)$$

La última igualdad proviene de la ecuación (1.5), y si  $a$  tiende a 0, se recupera la ecuación (2.5). De aquí se derivan 3 casos:

1. La medida del conjunto de bandas de anchura  $a$  que contienen un punto determinado  $P$  es

$$m(B|B \cap P \neq \emptyset) = \pi a.$$

En efecto, en este caso el perímetro  $L$  en (2.8) es igual a cero.

2. La medida del conjunto de bandas de anchura  $a$  que intersecan un segmento de línea  $s$  es

$$m(B|B \cap s \neq \emptyset) = 2s + \pi a.$$

En este caso, el perímetro  $L$  en (2.8) es  $2s$ .

3. La medida del conjunto de bandas de anchura  $a$  que intersecan un dominio  $C$  no necesariamente convexo es igual a  $L + \pi a$ , donde  $L$  ahora denota el perímetro de la cerradura convexa de  $C$ .

Un problema complicado es encontrar la medida del conjunto de bandas en las cuáles  $K$  está enteramente contenido. Sin embargo, un caso específico más sencillo es cuando el diámetro del convexo es menor a la anchura de las bandas (i.e.  $D \leq a$ ). A la medida del conjunto de bandas que intersecan a  $K$  se le resta la medida de aquellos casos en donde  $K$  interseca también la frontera de la banda, es decir

$$\begin{aligned} m(B|K \subset B) &= m(B|B \cap K \neq \emptyset) - 2m(G|G \cap K \neq \emptyset) \\ &= L + \pi a - 2L \\ &= \pi a - L. \end{aligned}$$

Nótese que esta medida es no negativa pues  $L \leq \pi D$  y  $D \leq a$ . Ahora, sean  $K_1, K$  convexos tales que  $K_1 \subset K$ . Si una banda  $B$  interseca al conjunto  $K$ , la probabilidad de que interseque también al conjunto  $K_1$  es

$$\mathbb{P} = \frac{L_1 + \pi a}{L + \pi a}, \quad (2.9)$$

y la probabilidad de que  $B$  contenga  $K_1$  es

$$\mathbb{P} = \frac{\pi a - L_1}{\pi a + L}. \quad (2.10)$$

## Capítulo 3

# Generalizaciones del problema de la aguja de Buffon

### 3.1. Primera generalización: la aguja convexa

Sea  $K$  un círculo de diámetro  $D$  que contiene al convexo  $K_1$ . Notemos que cualquier conjunto convexo cuyo diámetro  $D_1$  es menor o igual a  $D$  puede estar completamente contenido en  $K$ . La probabilidad de que una banda que interseca  $K$ , interseque también  $K_1$  es, por (2.9),

$$\mathbb{P} = \frac{L_1 + \pi a}{L + \pi a},$$

donde  $a$  es el ancho de la banda, y  $L_1$  y  $L$  son los perímetros de  $K_1$  y  $K$ , respectivamente. Se puede considerar que el conjunto  $K$  es el que se distribuye aleatoriamente, que las bandas están fijas, son paralelas en el plano y están separadas una de la otra por una distancia  $D$  (ver la figura 3.1). Entonces  $K$  toca una y sólo una de las bandas excepto en casos de medida cero. Como  $K$  es de ancho constante, entonces  $L = \pi D$  (ver la ecuación (1.6)), y se tiene que la probabilidad de que  $K_1$  toque alguna banda es

$$\mathbb{P} = \frac{L_1 + \pi a}{\pi(a + D)}. \quad (3.1)$$

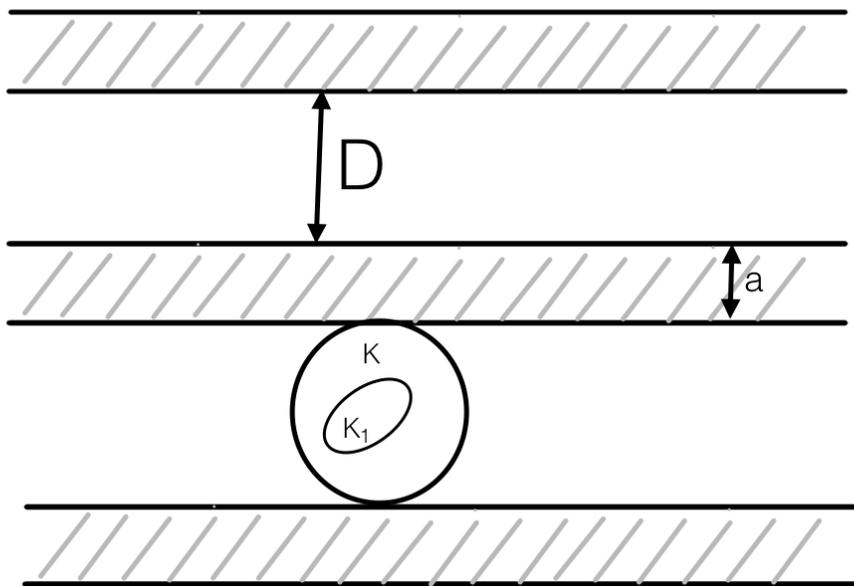
Para el caso particular de la introducción, el conjunto convexo es un segmento de recta (una aguja) y las bandas son rectas sin amplitud, es decir,

$L_1 = 2\ell$  y  $a = 0$ . La fórmula entonces vuelve a ser

$$\mathbb{P} = \frac{2\ell}{\pi D}.$$

Por otro lado, si  $a \rightarrow \infty$ , entonces  $\mathbb{P} \rightarrow 1$ .

Figura 3.1: Primera generalización del problema de Buffon.



### 3.2. Segunda generalización: la aguja larga

En esta generalización ahora se piensa que la aguja es más larga que la distancia entre las líneas, es decir que  $\ell > D$ . Ahora se puede observar más de una intersección. Se denotará  $P_i$  como la probabilidad de obtener exactamente  $i$  intersecciones. El máximo de intersecciones es  $n + 1$  donde  $n = \lceil \ell/D \rceil$ . Se definen entonces los ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (ver la figura 3.2) tales que

$$\ell \sin(\alpha_1) = D, \ell \sin(\alpha_2) = 2D, \dots, \ell \sin(\alpha_n) = nD.$$

Para obtener  $n + 1$  intersecciones  $\theta$  deberá encontrarse entre  $\alpha_n$  y  $\frac{\pi}{2}$ . Supóngase entonces que  $\theta \in [\alpha_n, \frac{\pi}{2})$ ; si la punta inferior de la aguja está

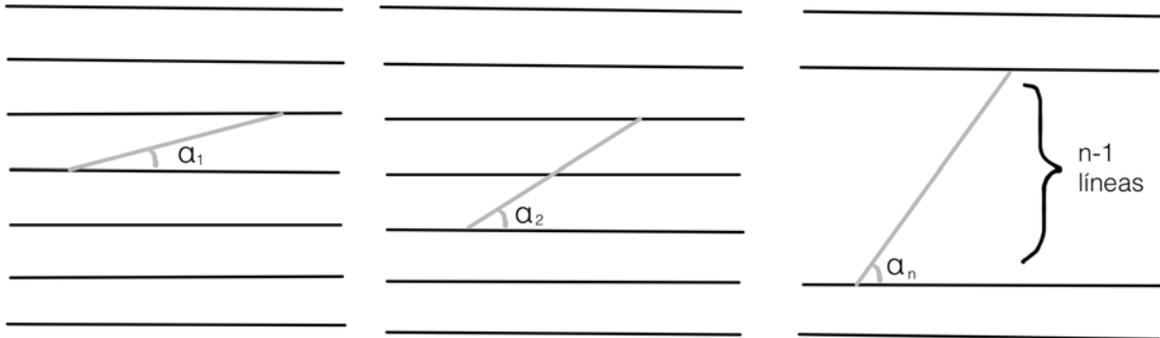
sobre una recta, entonces existe un sobrante de la aguja en la parte superior, es decir, la punta superior está entre dos rectas. La integral sobre el desplazamiento vertical hacia abajo, hasta que la punta superior de la aguja toque la recta, mide aquellos casos en que existen  $n + 1$  intersecciones. En el desplazamiento hacia arriba serán  $n$  intersecciones (ver la figura 3.3). Si  $x$  es el desplazamiento vertical, entonces

$$\int_{nD}^{\ell \operatorname{sen}(\theta)} dx$$

representa los casos de  $n + 1$  intersecciones para  $\theta$  fija. Ese valor entonces está dado por  $\ell \operatorname{sen}(\theta) - nD$ , esto quiere decir que

$$P_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} (\ell \operatorname{sen}(\theta) - nD) d\theta = \frac{2}{\pi} \ell \cos(\alpha_n) + \frac{2}{\pi} nD \alpha_n - nD. \quad (3.2)$$

Figura 3.2: Se define  $\alpha_i$  como el ángulo mínimo tal que la aguja vaya a tener al menos  $i$  intersecciones con la rejilla



Ahora, para que ocurran  $k$  intersecciones ( $0 < k < n + 1$ ),  $\theta$  deberá encontrarse entre  $\alpha_{k-1}$  y  $\alpha_{k+1}$ . Existen 2 casos, cuando  $\theta \in [\alpha_k, \alpha_{k+1})$ , y cuando  $\theta \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k)$ . Siguiendo la lógica anterior, para el primer caso se tienen  $k$  intersecciones cuando la aguja se desplaza hacia arriba hasta tocar

la recta inmediata superior, es decir de  $\ell \text{sen}(\theta)$  hasta  $D(k+1)$ ; la medición de estos casos es la integral

$$\int_{\ell \text{sen}(\theta)}^{D(k+1)} dx = D(k+1) - \ell \text{sen}(\theta).$$

En el segundo caso, habrá  $k$  intersecciones si la aguja se desplaza hacia abajo hasta tocar la recta inmediata inferior, de  $D(k-1)$  a  $\ell \text{sen}(\theta)$  y ahora la medición de estos casos es la integral

$$\int_{D(k-1)}^{\ell \text{sen}(\theta)} dx = \ell \text{sen}(\theta) - D(k-1)$$

con  $\theta$  fijo. Tomando los casos por separado,

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} (D(k+1) - \ell \text{sen}(\theta)) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} (\ell \text{sen}(\theta) - D(k-1)) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} (D(k+1)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + \ell(\cos(\alpha_{k+1}) - \cos(\alpha_k))) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (\ell(\cos(\alpha_{k-1}) - \cos(\alpha_k)) - D(k-1)(\alpha_k - \alpha_{k-1})) \\ &= \frac{2}{\pi} D((k+1)\alpha_{k+1} - 2k\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1}) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \ell(\cos(\alpha_{k+1}) - 2\cos(\alpha_k) + \cos(\alpha_{k-1})). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aquí usamos la convención de que  $\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2}$  y  $\alpha_0 = 0$ .

Por último, cuando  $k = 0$  entonces  $\theta \in [0, \alpha_1)$ . Y una vez más, cuando la punta inferior de la aguja se encuentra en la recta, y  $\theta$  es fija, los casos de 0 intersecciones se darán con el desplazamiento vertical hacia arriba. Integrando este desplazamiento se tiene

$$\int_{\ell \text{sen}(\theta)}^D dx = D - \ell \text{sen}(\theta).$$

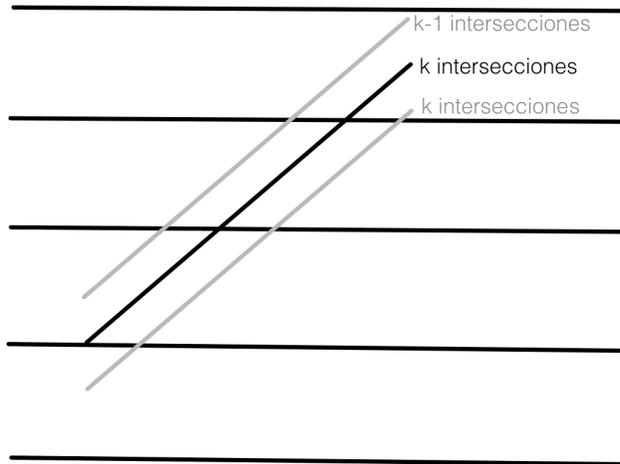
Entonces

$$P_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_1} (D - \ell \text{sen}(\theta)) d\theta = \frac{2}{\pi} (\alpha_1 D + \ell \cos(\alpha_1) - \ell). \tag{3.4}$$

Ahora que tenemos las probabilidades, se puede calcular la esperanza del número de intersecciones de la aguja. Si  $N$  es la variable del número de intersecciones, se calcula como

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N] &= \sum_{k=0}^{n+1} kP_k \\
 &= \frac{2}{\pi} D \sum_{k=1}^n k(k+1)\alpha_{k+1} - 2k^2\alpha_k + k(k-1)\alpha_{k-1} \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \ell \sum_{k=1}^n k \cos(\alpha_{k+1}) - 2k \cos(\alpha_k) + k \cos(\alpha_{k-1}). \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \ell ((n+1) \cos(\alpha_n)) + \frac{2}{\pi} D (n(n+1)\alpha_n - n(n+1)\alpha_{n+1}). \\
 &= \frac{2}{\pi} \ell
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Figura 3.3: En el desplazamiento hacia abajo se conservan las intersecciones, mientras que para arriba se pierde una intersección



### 3.2.1. Distribución límite del número de intersecciones

En esa sección se demostrará el siguiente teorema.

**Teorema 1** *Sea  $\mathbf{I}$  la variable aleatoria que denota el número de intersecciones de la aguja, y  $a = L/D$ . Entonces,  $\mathbf{I}/a$  converge en distribución a una función de distribución arco seno cuando  $a$  tiende a infinito. En otras palabras,*

$$\frac{\mathbf{I}}{a} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} X$$

en donde  $X$  tiene distribución

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

que es conocida como distribución arco seno.

*Demostración.* Primero se debe notar que con  $\theta$  fija el número de intersecciones solo puede variar en uno. Por esto se tiene que

$$\mathbf{I} - 2 \leq a \operatorname{sen}(\theta) \leq \mathbf{I} + 2 \quad (3.7)$$

y

$$\frac{\mathbf{I}}{a} - \frac{2}{a} \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq \frac{\mathbf{I}}{a} + \frac{2}{a}. \quad (3.8)$$

Ahora fijamos  $x \in (0, 1)$ , y  $a$  grande tal que  $0 < x - \frac{2}{a} < x + \frac{2}{a} < 1$ . Con esto se deduce de (3.8) que

$$\frac{\mathbf{I}}{a} \leq x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\theta) \leq x + \frac{2}{a}$$

Esto quiere decir que el evento  $\mathbf{I}/a \leq x$  está contenido en el evento en el que  $\operatorname{sen}(\theta) \leq x + 2/a$ , y por tanto la medida del primero es menor o igual que la del segundo. Del mismo modo se obtiene de (3.8) que

$$\operatorname{sen}(\theta) \leq x - \frac{2}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{I}}{a} \leq x.$$

Una vez más, el evento de que  $\operatorname{sen}(\theta) \leq x - 2/a$  está contenido en el evento de que  $\mathbf{I}/a \leq x$ , y su medida es menor. Por lo anterior se tiene que

$$\mathbb{P}\left(0 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq x - \frac{2}{a}\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{I}}{a} \leq x\right) \leq \mathbb{P}\left(0 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq x + \frac{2}{a}\right).$$

Como  $\theta$  se distribuye uniformemente en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , tenemos

$$\mathbb{P}(0 \leq \text{sen}(\theta) \leq x) = \frac{\text{arc sen}(x)}{\frac{\pi}{2}},$$

es decir

$$\mathbb{P}\left(0 \leq \text{sen}(\theta) \leq x - \frac{2}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \text{arc sen}\left(x - \frac{2}{a}\right)$$

y

$$\mathbb{P}\left(0 \leq \text{sen}(\theta) \leq x + \frac{2}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \text{arc sen}\left(x + \frac{2}{a}\right).$$

Obtenemos por lo tanto

$$\frac{2}{\pi} \text{arc sen}\left(x - \frac{2}{a}\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{I}}{a} \leq x\right) \leq \frac{2}{\pi} \text{arc sen}\left(x + \frac{2}{a}\right). \quad (3.9)$$

Ahora observemos que

$$\text{arc sen}(x + h) = \text{arc sen}(x) + O(h), \quad (3.10)$$

donde  $O(h)$  es una función tal que  $|O(h)| \leq C_\varepsilon |h|$  para alguna constante  $C_\varepsilon$ , de manera uniforme en  $x \in (0, 1 - \varepsilon]$ . En efecto, por el teorema de valor medio tenemos que

$$\text{arc sen}(x + h) - \text{arc sen}(x) = h \text{arc sen}'(\alpha)$$

con  $\alpha \in (x, x + h)$ . Si  $x \leq 1 - \varepsilon$  y  $h \leq \frac{\varepsilon}{2}$  entonces  $x + h \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  y por tanto  $\alpha \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \text{arc sen}(x + h) - \text{arc sen}(x) &= h \text{arc sen}'(\alpha) \\ &= h \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ &\leq h \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\varepsilon}{2})^2}} \\ &= h C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Y de esto se sigue (3.10).

Por último, sabemos que  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)$ . De esto y de (3.9) y (3.10) se concluye que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} F_{\frac{\mathbf{I}}{a}}(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{I}}{a} \leq x\right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \left( \text{arc sen}(x) + O\left(\frac{2}{a}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \text{arc sen}(x),$$

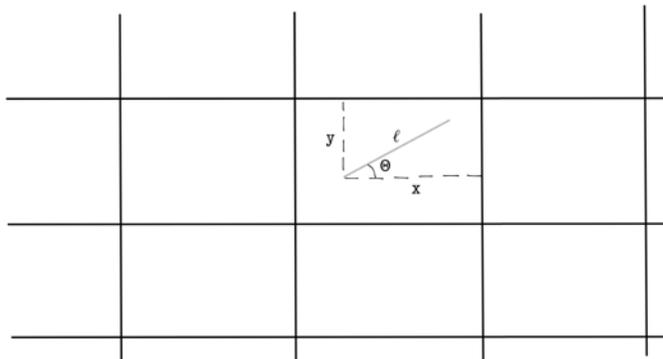
y queda demostrado el teorema, pues

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### 3.3. Tercera generalización: la aguja en una rejilla

En esta sección se retoma una aguja corta, pero dentro de rejillas en vez de solo líneas paralelas horizontales. Es decir, la aguja es lanzada entre rectángulos de base  $a$  y altura  $b$ , donde  $\ell < a$  y  $\ell < b$  como se ve en la figura. Se busca la probabilidad de que la aguja toque alguna de las líneas, ya sean verticales u horizontales. Para eso, ahora se tomarán 3 variables  $x$ ,  $y$  y  $\theta$ :  $x$  representa la distancia de la punta inferior de la aguja a la línea vertical de la derecha,  $y$  representa la distancia de la misma punta a la línea horizontal superior, y  $\theta$  el ángulo que forma la aguja con respecto a la horizontal.

Figura 3.4: La aguja en una rejilla.



Con esto, se puede ver que la aguja tocará la línea vertical derecha si  $x < \ell \cos(\theta)$  y que tocará la horizontal si  $y < \ell \sin(\theta)$ . (Hay que notar que en estos casos la aguja empieza a “invadir” el espacio del rectángulo adyacente, por eso no se consideran los casos en los que la aguja interseca a la línea de la izquierda y la inferior, puesto que son simétricos, y se contarían dos veces estos casos). Entonces, si  $\mathbb{P}(h \cap v)$  es la probabilidad de que la aguja toque

la línea horizontal y vertical, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(h \cap v) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\ell \sin(\theta)} \left( \frac{1}{b} \int_0^{\ell \cos(\theta)} \frac{1}{a} dx \right) dy \right) d\theta \\
&= \frac{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta}{\pi ab} \\
&= \frac{\ell^2}{\pi ab}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora sabemos que  $\mathbb{P}(h \cup v) = \mathbb{P}(h) + \mathbb{P}(v) - \mathbb{P}(h \cap v)$ , por lo tanto

$$\mathbb{P}(h \cup v) = \frac{2\ell}{a\pi} + \frac{2\ell}{b\pi} - \frac{\ell^2}{\pi ab} = \frac{2\ell a + 2\ell b - \ell^2}{\pi ab}. \tag{3.12}$$

Las expresiones de  $\mathbb{P}(h)$  y  $\mathbb{P}(v)$  se toman del caso particular de la introducción.

Podemos generalizar lo anterior usando las herramientas que ya tenemos de la geometría integral. Se supondrá que se tiene un conjunto convexo  $K$  dentro del rectángulo, y como en la primera generalización, éste estará fijo y la rejilla se coloca de manera aleatoria. Tomando esto en cuenta, se define  $x$  como la distancia del punto de origen del convexo a la línea derecha de la rejilla (la de longitud  $b$ ),  $y$  como la distancia del punto a la línea superior (la de longitud  $a$ ), y  $\theta$  es el ángulo formado por esta última línea con respecto a la horizontal. Entonces, para una dirección  $\theta$  dada,  $K$  no se interseca con ninguna línea si

$$p(\theta) < x < a - p(\theta + \pi)$$

y

$$p(\theta + \frac{\pi}{2}) < y < b - p(\theta + \frac{3\pi}{2})$$

donde  $p(\theta)$  es la función soporte, i.e. la distancia del origen a la recta tangente del convexo en la dirección  $\theta$ . La probabilidad de que  $K$  no interseque la rejilla es por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K \cap R = \phi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \int_{p(\theta+\frac{\pi}{2})}^{b-p(\theta+\frac{3}{2}\pi)} \frac{1}{b} \int_{p(\theta)}^{a-p(\theta+\pi)} \frac{1}{a} dx dy d\theta \\
&= \frac{2}{ab\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( ab - ap(\theta + \frac{3}{2}\pi) - ap(\theta + \frac{\pi}{2}) - bp(\theta + \pi) - bp(\theta) \right. \\
&\quad \left. + p(\theta + \pi)p(\theta + \frac{3}{2}\pi) + p(\theta)p(\theta + \frac{3}{2}\pi) \right. \\
&\quad \left. + p(\theta + \frac{\pi}{2})p(\theta + \pi) + p(\theta)p(\theta + \frac{\pi}{2}) \right) d\theta,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde  $R = h \cup v$  es la rejilla.

Consideremos el caso particular de la aguja: se toma  $p(\theta) = \frac{\ell}{2} |\cos(\theta)|$  como la función soporte para la aguja; entonces sustituyendo se tiene fácilmente de (3.13) que

$$\mathbb{P}(K \cap R = \phi) = 1 - \frac{2\ell}{a\pi} - \frac{2\ell}{b\pi} - \frac{\ell^2}{ab\pi} \tag{3.14}$$

y si se toma en cuenta que  $\mathbb{P}(h \cup v) = 1 - \mathbb{P}(K \cap R = \phi)$ , entonces la ecuación coincide con (3.22).

Otro ejemplo es un círculo  $S$  cuya función soporte es  $p(\theta) = r$ , donde  $r$  es el radio del mismo. Entonces se tiene que

$$\mathbb{P}(S \cap R = \phi) = 1 - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{4r^2}{ab} \tag{3.15}$$

y por tanto

$$\mathbb{P}(h \cup v) = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{4r^2}{ab} \tag{3.16}$$

y

$$\mathbb{P}(h \cap v) = \frac{4r^2}{ab}. \tag{3.17}$$

La fórmula (3.13) es muy larga y puede ser difícil de manejar. Por lo mismo, ésta puede ser reducida a una más sencilla, en aquellos casos en que el convexo sea simétrico vertical y horizontalmente con respecto al punto de origen. Es decir, en aquellos casos en que para todo ángulo  $\theta$ , la medida de la parte del conjunto que queda por debajo del punto de origen, sea igual a la que queda por encima, y la que queda por la derecha, sea igual a la de la

izquierda.

De este modo, se puede ver la probabilidad de que el conjunto interseque  $h$  y  $v$ , como la medida de los casos en que  $x < p(\theta)$  y  $y < p(\theta + \frac{\pi}{2})$ , entre la medida de todos los casos posibles, multiplicada por cuatro, es decir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(h \cap v) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{p(\theta + \frac{\pi}{2})} \frac{1}{b} \int_0^{p(\theta)} \frac{1}{a} dx dy d\theta \\ &= \frac{8}{ab\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta)p(\theta + \frac{\pi}{2}) d\theta.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Para el caso de la aguja, en el que  $p(\theta) = \frac{\ell}{2} |\cos(\theta)|$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(h \cap v) &= \frac{8}{ab\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta)p(\theta + \frac{\pi}{2}) d\theta \\ &= \frac{2\ell^2}{ab\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta)| |\cos(\theta + \frac{\pi}{2})| d\theta \\ &= \frac{\ell^2}{ab\pi}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (3.11). Del mismo modo, para el círculo de radio  $r$ , i.e. si  $p(\theta) = r$ , se tiene entonces que

$$\mathbb{P}(h \cap v) = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta)p(\theta + \frac{\pi}{2}) d\theta = \frac{8}{ab\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{4r^2}{ab}.\tag{3.20}$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (3.17).

### 3.3.1. Rejilla torcida

Como un caso extra se busca resolver la probabilidad de que la aguja interseque la rejilla, cuando ésta se modifica con un ángulo  $\alpha$  fijo, como se muestra en la figura (3.5).

Se procede del mismo modo para resolver el problema. Se supone  $\theta$  fija en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , mientras que las variables  $x$  y  $y$ , siguen representando la distancia hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente. La diferencia

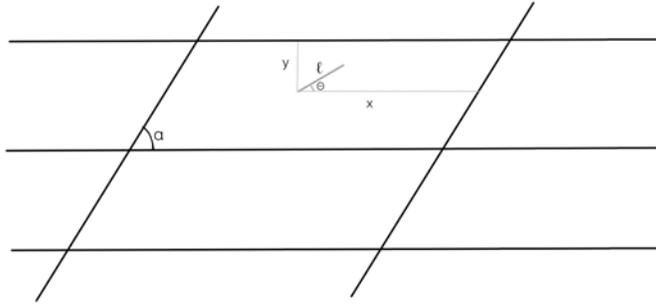
consiste en que ahora la variable  $y$  se distribuye en el intervalo  $[0, b \operatorname{sen}(\alpha)]$ . De ese modo el cálculo queda

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(h \cap v) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\ell \cos(\theta)} \left( \frac{1}{a} \int_0^{\ell \operatorname{sen}(\theta)} \frac{1}{b \operatorname{sen}(\alpha)} dy \right) dx \right) d\theta \\ &= \frac{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) d\theta}{\pi ab \operatorname{sen}(\alpha)} \\ &= \frac{\ell^2}{\pi ab \operatorname{sen} \alpha}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

y

$$\mathbb{P}(h \cup v) = \frac{2\ell}{a\pi} + \frac{2\ell}{b \operatorname{sen}(\alpha)\pi} - \frac{\ell^2}{\pi ab \operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{2\ell a + 2\ell b \operatorname{sen}(\alpha) - \ell^2}{\pi ab \operatorname{sen}(\alpha)}. \quad (3.22)$$

Figura 3.5: La aguja en una rejilla torcida.



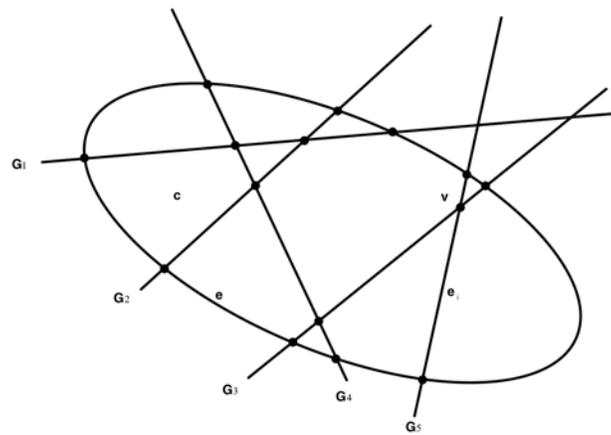
# Capítulo 4

## División del plano por rectas aleatorias

### 4.1. Resultados generales

Sea  $K$  un convexo y  $\{G_i\}_{i=1}^n$  un conjunto de rectas que intersecan al convexo  $K$ . Dichas líneas dividen al convexo en  $c$  regiones,  $v$  vértices (que representan las intersecciones de las rectas que se encuentran en el interior de  $K$ ),  $v^*$  incluye los vértices formados en la frontera, y  $e$  aristas ( $e_i$  aristas dentro del convexo y  $e - e_i$  en la frontera).

Figura 4.1: En este dibujo  $n = 5$ ,  $c = 11$ ,  $v^* = 15$ ,  $v = 5$ ,  $e = 25$  de los cuáles 15 son interiores, es decir  $e_i = 15$ .



Notemos que siempre  $e - e_i = 2n$ . Se busca obtener la esperanza de cada uno de estos valores.

La esperanza de  $v$  se define como la suma sobre las configuraciones de  $n$  rectas, del número de vértices formados dentro de  $K$  por tal configuración, entre la medida de dichas rectas, es decir se tiene que

$$\mathbb{E}[v] = \frac{1}{L^n} \int_{G_1, \dots, G_n; G_i \cap K \neq \emptyset} v dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge dG_n \quad (4.1)$$

donde  $L$  es el perímetro de  $K$ .

Nos interesan las intersecciones entre dos rectas que queden en el conjunto  $K$ , por tanto definimos, para  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$ , el número  $v_{j,k}$  que vale 1 si  $G_j \cap G_k \in K$  y 0 si  $G_j \cap G_k \notin K$ . De este modo se puede contabilizar  $v$  como

$$v = \sum_{1 \leq j < k \leq n} v_{j,k}.$$

Cada recta puede intersecar con las  $n - 1$  restantes, pero a cada intersección corresponden 2 rectas, entonces el número de sumandos en  $v$  es  $n(n - 1)/2$ . Si  $\sigma_j$  es la cuerda generada por  $G_j \cap K$  se tiene (por el teorema de Fubini) que

$$\begin{aligned} \int_{G_k \cap K \neq \emptyset; G_j \cap K \neq \emptyset} v_{j,k} dG_k \wedge dG_j &= \int_{G_j \cap K \neq \emptyset} \left( \int_{G_k \cap K \neq \emptyset} v_{j,k} dG_k \right) dG_j \\ &= 2 \int_{G_j \cap K \neq \emptyset} \sigma_j dG_j \\ &= 2F\pi. \end{aligned}$$

La segunda igualdad proviene de la ecuación (2.5) donde ahora el perímetro del convexo (el segmento de línea) es  $2\sigma_j$ , y la tercera igualdad viene de la

ecuación (2.4). Con esto se puede ver que

$$\begin{aligned}
L^n \mathbb{E}(v) &= \int_{G_i \cap K \neq \emptyset} v dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge dG_n \\
&= \int_{G_i \cap K \neq \emptyset} \sum_{j < k} v_{j,k} dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge dG_n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \int_{G_i \cap K \neq \emptyset} v_{j,k} dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge dG_n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} 2\pi F \int_{G_i \cap K \neq \emptyset} dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge d\hat{G}_j \dots \wedge d\hat{G}_k \dots \wedge dG_n \\
&= n(n-1)\pi F L^{n-2}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde los símbolos  $d\hat{G}_j$  y  $d\hat{G}_k$  significan que estos términos fueron quitados de la expresión. Por lo tanto se concluye que

$$\mathbb{E}(v) = \frac{n(n-1)\pi F L^{n-2}}{L^n} = \frac{n(n-1)\pi F}{L^2}. \tag{4.3}$$

Ahora, para conocer  $e$ , vemos que cada vértice interior une 4 aristas, y cada vértice de la frontera 3 (una que es la arista interior, y 2 que son parte de la frontera de  $K$ ). Podemos notar que estamos contando cada arista dos veces, por lo que el número de aristas es

$$e = \frac{1}{2}(4v + 6n) = 2v + 3n;$$

de aquí se sigue la fórmula

$$\mathbb{E}(e) = 2\mathbb{E}(v) + 3n = 2 \frac{n(n-1)\pi F}{L^2} + 3n. \tag{4.4}$$

Se da esta igualdad porque la esperanza es lineal y la esperanza de una constante es la constante.

Ahora para determinar  $c$ , se ocupa la fórmula de Euler que dice que  $v^* - e + c = 1$ , donde  $v^*$  es el número total de vértices, incluyendo los vértices formados por la intersección de las rectas con la frontera de  $K$ , es decir  $v^* = v + 2n$ , esto se ve más a detalle en el Apéndice C; despejando y sustituyendo se tiene

$$c = v + n + 1,$$

por lo tanto la esperanza de  $c$  es

$$\mathbb{E}(c) = \mathbb{E}(v) + n + 1 = \frac{n(n-1)\pi F}{L^2} + n + 1. \quad (4.5)$$

Si ahora se quiere conocer el valor esperado del número de lados de cada región, se ve que cada arista interior es lado para 2 regiones, y cada arista de la frontera es lado para una región. Si  $m$  es la suma del número de lados de todas las regiones entonces

$$m = 2e_i + (e - e_i) = 2e - 2n = 4v + 6n - 2n = 4v + 4n,$$

y

$$\mathbb{E}(m) = 4\mathbb{E}(v) + 4n = 4\frac{n(n-1)\pi F}{L^2} + 4n. \quad (4.6)$$

Se denota  $N = m/c$ , el número promedio de lados de cada región. Por la complejidad del cálculo, aproximaremos  $\mathbb{E}(N)$  como  $\mathbb{E}(m)/\mathbb{E}(c)$ , que en este caso particular (y en los dos siguientes) no tiene gran diferencia con la expresión exacta, pero si es mucho más trabajable (ver [9] p. 55). Entonces queda que

$$\mathbb{E}(N) \approx \frac{\mathbb{E}(m)}{\mathbb{E}(c)} = \frac{4}{1 + \frac{n(n-1)\pi F}{L^2}}. \quad (4.7)$$

De la misma manera, definiendo el perímetro  $p$  de la división de  $K$  como la suma de los perímetros de todas las regiones, se tiene que

$$p = \sum_{i=1}^n 2\sigma_i + L \quad (4.8)$$

donde  $\sigma_i$  es la longitud del segmento  $K \cap G_i$ . Como  $\mathbb{E}(\sigma_i) = \pi F/L$  (ver la ecuación (2.4)), entonces

$$\mathbb{E}(p) = \frac{2n\pi F}{L} + L.$$

Del mismo modo, si se toma  $P = p/c$  el perímetro promedio de cada región ahora se aproxima la esperanza  $\mathbb{E}(P)$  con  $\mathbb{E}(p)/\mathbb{E}(c)$ , y haciendo el cálculo se tiene que

$$\mathbb{E}(P) \approx \frac{\mathbb{E}(p)}{\mathbb{E}(c)} = \frac{2n\pi FL + L^3}{n(n-1)\pi F + L^2(n+1)}. \quad (4.9)$$

Por último, se toma  $A = F/c$  como el promedio del área de cada región, y la esperanza del área de cada región  $\mathbb{E}(A)$  se aproxima con  $\mathbb{E}(F)/\mathbb{E}(c)$ , pero como la esperanza de una constante es la constante entonces

$$\mathbb{E}(A) \approx \frac{F}{\mathbb{E}(c)} = \frac{FL^2}{n(n-1)\pi F + L^2(n+1)}. \quad (4.10)$$

## 4.2. Caso particular del disco

Para ilustrar los resultados anteriores se puede tomar un ejemplo sencillo: consideremos un disco  $S$  de diámetro  $D$  y dos rectas  $G_1$  y  $G_2$  que lo intersecan. Para el círculo se tiene que  $L = \pi D$  y  $F = \pi D^2/4$ . Entonces por la ecuación (4.3) se tiene que

$$\mathbb{E}(v) = \frac{n(n-1)\pi F}{L^2} = \frac{2\pi^2 D^2}{4\pi^2 D^2} = \frac{1}{2}.$$

Otra manera de verlo es la siguiente. Supóngase  $G_1$  fija. Entonces nos interesa la medida de las rectas  $G_2$  que intersecan a  $G_1$  tales que dicha intersección queda en  $S$ . Si  $\sigma$  es la longitud de la cuerda generada por  $G_1 \cap S$ , se tiene entonces que

$$m(G_2 | G_2 \cap G_1 \in S) = 2\sigma$$

(este resultado se puede ver como un caso particular del caso 2 en la sección 3.3 sobre conjuntos de bandas, donde la banda tiene anchura 0). Si se integra sobre todas las configuraciones de  $G_1$  se tiene que

$$\begin{aligned} m(G_1, G_2 | G_1 \cap G_2 \in S) &= \int_{G_1 \cap S \neq \phi} m(G_2 | G_1 \cap G_2 \in S) dG_1 \\ &= \int_{G_1 \cap S \neq \phi} 2\sigma dG_1 \\ &= 2\pi F. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora se puede ver que

$$\begin{aligned} P(G_1 \cap G_2 \in S) &= P(G_1 \cap G_2 \in S | G_1 \cap S \neq \phi; G_2 \cap S \neq \phi) \\ &= \frac{m(G_1, G_2 | G_1 \cap G_2 \in S)}{m(G_1, G_2 | G_1 \cap S \neq \phi; G_2 \cap S \neq \phi)} \\ &= \frac{2\pi F}{L^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Con este resultado, se ve con la definición de esperanza que

$$\mathbb{E}(v) = 1 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \in S) + 0 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \notin S) = \frac{1}{2}.$$

Esto quiere decir intuitivamente que la mitad de las veces las rectas se intersecan dentro del convexo, y la otra mitad o se intersecan fuera de él o simplemente son paralelas (ver la figura 4.2).

La esperanza del número de aristas está dada por la ecuación (4.4)

$$\mathbb{E}(e) = 2\mathbb{E}(v) + 3n = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = 7.$$

Del mismo modo, la otra manera de verlo es que si las rectas se intersecan dentro de  $S$  entonces hay 8 aristas, y si no, entonces habrá 6, es decir

$$\mathbb{E}(e) = 8 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \in S) + 6 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \notin S) = 7.$$

Para el número de caras se tiene por la ecuación (4.5) que

$$\mathbb{E}(c) = \mathbb{E}(v) + 2 + 1 = \frac{7}{2}.$$

Una vez más con la ecuación (4.12) y con la figura 4.2 se puede ver que

$$\mathbb{E}(c) = 4 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \in S) + 3 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \notin S) = \frac{7}{2}$$

( $S$  se divide en 4 regiones si  $G_1$  y  $G_2$  se intersecan en  $S$ , y en 3 regiones si no). Para el número promedio de lados se tiene (por la ecuación (4.6)) que

$$\mathbb{E}(m) = 4\mathbb{E}(v) + 4 \times 2 = 10.$$

También nos ayuda la ecuación (4.12). Cuando la intersección de las rectas queda dentro de  $S$ , cada una de las 4 caras tiene 3 lados, siendo 12 en total. Pero cuando la intersección queda fuera, hay 2 caras que tienen 2 lados, y una que tiene 4, teniendo entonces 8 lados en total. La esperanza es por lo tanto

$$\mathbb{E}(m) = 12 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \in S) + 8 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \notin S) = 10.$$

La esperanza de la suma de perímetros de las regiones es

$$\mathbb{E}(p) = \frac{2n\pi F}{L} + L = \pi D + L.$$

Ahora la aproximación (4.6) da aquí un resultado aceptable (las aproximaciones (4.8) y (4.9) no se verán en el trabajo, por la complejidad de

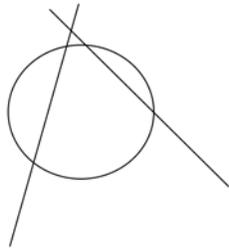
los cálculos). Primero con el número de lados por región, sustituyendo en la ecuación (4.7) se tiene que

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\mathbb{E}(m)}{\mathbb{E}(c)} = \frac{20}{7}. \quad (4.13)$$

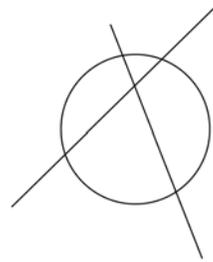
Podemos hacer cuentas exactas: cuando la intersección de las rectas se encuentra en  $S$ , las caras tienen invariablemente 3 lados cada una, pero cuando no, hay 8 lados en total para 3 caras, es decir en promedio se tienen  $8/3$  lados por cara. El resultado exacto es por lo tanto

$$\mathbb{E}(N) = 3 \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \in S) + \frac{8}{3} \times \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \notin S) = \frac{17}{6} \quad (4.14)$$

La diferencia entre los resultados (4.13) y (4.14) es de  $\frac{1}{42}$ .



(a) La intersección de las rectas queda fuera del círculo.



(b) La intersección de las rectas queda dentro del círculo.

Figura 4.2: Intersecciones entre las rectas.

# Apéndice A

## Medidas

En este apéndice se recuerdan muy brevemente los conceptos elementales de teoría de la medida que se usan en la tesis: esencialmente la definición de medida, la medida de Lebesgue y una medida definida por una densidad respecto a la medida de Lebesgue. Nuestra referencia principal es [5].

Sea  $X$  un conjunto cualquiera. El conjunto potencia de  $X$  se define como

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}.$$

**Definición A.1** Sea  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$  si cumple con las siguientes 3 condiciones:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
2. si  $A \in \mathcal{A}$  entonces  $A^c \in \mathcal{A}$ ;
3. si  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in \mathcal{A}$ .

Si  $X$  es un conjunto cualquiera, y  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  una  $\sigma$ -álgebra de éste, entonces al par  $(X, \mathcal{A})$  se le llama espacio medible.

**Definición A.2** Sea  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible. Una medida en este espacio es una función  $\mu: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  que debe cumplir con lo siguiente:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu(E) \geq 0$  para toda  $E \in \mathcal{A}$ ;

3.  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva i.e. si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de elementos disjuntos entre sí entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

**Definición A.3** Sea  $X$  un conjunto y  $E \subset \mathcal{P}(X)$ . Entonces  $\sigma(E) \subset \mathcal{P}(X)$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $E$  si

1.  $E \subset \sigma(E)$ .
2.  $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$   $\sigma$ -álgebra tal que  $E \subset \mathcal{A}$ , se tiene  $\sigma(E) \subset \mathcal{A}$ .

**Definición A.4** Si  $\tau$  es la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ , entonces la  $\sigma$ -álgebra de Borel ( $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ ), es aquella generada por los abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma(\tau)$ .

El espacio  $\mathbb{R}^n$ , con la  $\sigma$ -álgebra de Borel, admite una única medida  $\mu$  invariante por traslaciones y tal que  $\mu([0, 1]^n) = 1$ : es la medida de Lebesgue.

**Definición A.5** Sean  $(X, \mathcal{A})$  y  $(Y, \mathcal{B})$  dos espacios medibles. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es medible si  $\forall b \in \mathcal{B}, f^{-1}(b) \in \mathcal{A}$ .

Terminamos con el ejemplo principal que se usa en la tesis: si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  es una función medible positiva, entonces

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) dx \quad \forall A \in \text{Bor}(\mathbb{R}^n)$$

define una medida sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$ . Es la medida de densidad  $f$  respecto a la medida de Lebesgue.

# Apéndice B

## Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Sea  $p$  un punto en  $\mathbb{R}^n$ . Al conjunto de vectores  $\{q - p; q \in \mathbb{R}^n\}$  que tienen origen en  $p$  se le llamará espacio tangente de  $\mathbb{R}^n$  en  $p$ , denotado como  $\mathbb{R}_p^n$ . Un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$  es una función que asocia a cada punto  $p$  de  $\mathbb{R}^n$  un vector  $v(p)$  en  $\mathbb{R}_p^n$  de modo que

$$p \longmapsto v(p) = (a_1(p), a_2(p), \dots, a_n(p))$$

es una función con  $a_1, a_2, \dots, a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ .

El conjunto de transformaciones lineales de  $\mathbb{R}_p^n$  a  $\mathbb{R}$  (las formas lineales sobre  $\mathbb{R}_p^n$ ) se conoce como el espacio dual de  $\mathbb{R}_p^n$ , y se denota  $(\mathbb{R}_p^n)^*$ . Si  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es el mapeo que asigna a cada vector su  $i$ -ésima coordenada, entonces  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  es una base de  $(\mathbb{R}_p^n)^*$  ya que si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}. \quad (\text{B.1})$$

**Definición B.1** Una forma diferencial de grado 1 (o 1-forma) es una función que asocia a cada punto  $p \in \mathbb{R}^n$  una forma lineal  $\omega(p) \in (\mathbb{R}_p^n)^*$ ,

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p)(dx_i)_p$$

con  $a_1, a_2, \dots, a_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ .

El ejemplo de una 1-forma más sencillo es la diferencial de una función dada por

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Ahora, sea  $\Delta^2(\mathbb{R}_p^n)$  el conjunto de funciones  $\varphi : \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$  que son bilineales (lineales en cada variable) y alternantes ( $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$ ).

**Definición B.2** Para  $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}_p^n)^*$  el producto cuña entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , denotado como  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Delta^2(\mathbb{R}_p^n)^*$ , es la forma bilineal alternante sobre  $\mathbb{R}_p^n$  definida por

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq 2}$$

para todo  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_p^n$

Se puede ver entonces que

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \Delta^2(\mathbb{R}_p^n)^*,$$

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = -(dx_j)_p \wedge (dx_i)_p$$

y

$$(dx_i)_p \wedge (dx_i)_p = 0.$$

Del mismo modo, de manera general denotamos por  $\Delta^k(\mathbb{R}_p^n)^*$  al conjunto de las funciones  $k$ -lineales y alternantes  $\mathbb{R}_p^n \times \cdots \times \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  son formas lineales sobre  $\mathbb{R}_p^n$ , se define la forma  $k$ -lineal alternante  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$  por

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}$$

para todo  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}_p^n$ . Terminamos con la definición general de una  $k$ -forma:

**Definición B.3** Una  $k$ -forma de  $\mathbb{R}^n$  es una función que asocia a cada  $p \in \mathbb{R}^n$  un elemento  $\omega(p) \in \Delta^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ ,

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

de tal modo que las funciones  $a_{i_1, \dots, i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ , son de clase  $C^\infty$ .

# Apéndice C

## Fórmula de Euler

En este apéndice se busca justificar intuitivamente la fórmula del capítulo 4. En dicho capítulo se afirmó que

$$v^* - e + c = 1.$$

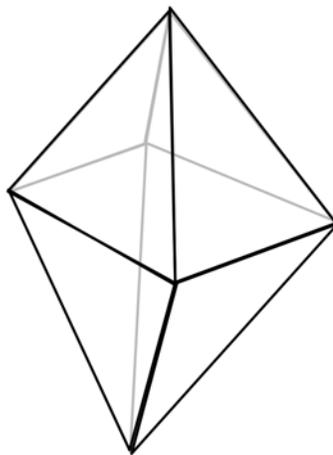
Aquí  $v^*$  denota todos los vertices, incluyendo aquellos que se forman por la intersección entre las rectas y la frontera de  $K$ .

Para obtener este resultado, se usará que para un poliedro en  $\mathbb{R}^3$  se tiene que

$$v - e + c = 2.$$

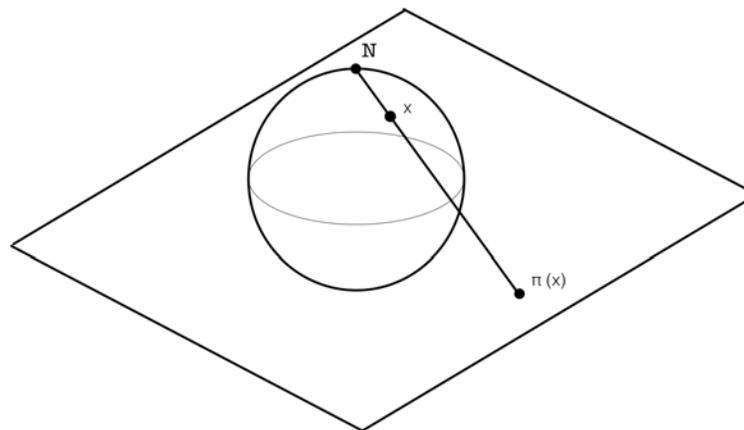
Esta fórmula está explicada con algunas aplicaciones en la referencia [8] p.66.

Figura C.1: Poliedro.



Otra herramienta que se utilizará es la proyección estereográfica, que consiste en proyectar una esfera a un plano: la manera gráfica de hacerlo es colocar la esfera tangente al plano, y al punto de la esfera más lejano del plano se le llama polo norte  $N$ ; entonces a cada punto  $x$  de la esfera,  $x \neq N$ , le corresponderá el punto de la intersección entre el plano y la recta que pasa por  $N$  y  $x$ . Esta proyección es biyectiva, pues se puede ver que a cada punto de la esfera distinto de  $N$  le corresponde 1 y solo 1 punto del plano; el punto  $N$  se interpreta como el punto al infinito del plano.

Figura C.2: Proyección estereográfica.



Ahora, supongamos que tenemos un conjunto convexo  $K$  en el plano dividido por  $n$  rectas aleatorias, de manera que quedan  $c$  caras,  $v^*$  vértices y  $e$  aristas (ver el capítulo 4). Mediante una proyección estereográfica (o la función inversa de ésta) se puede llevar esta figura a la esfera, de modo que queda un “balón con caras dibujadas”, o un poliedro inflado; este poliedro tiene  $v^*$  vértices,  $e$  aristas y  $c + 1$  caras: en efecto tiene una cara adicional que corresponde mediante la proyección a los puntos del plano que no están en  $K$ . Con la fórmula de los poliedros se deduce que

$$v^* - e + (c + 1) = 2,$$

i.e. que

$$v^* - e + c = 1.$$

# Apéndice D

## Envoltura de una familia de curvas

El objetivo de este apéndice es conocer cómo se obtiene la expresión de la envoltura de una familia de curvas. Se verá únicamente la demostración de este teorema:

**Teorema 2** *Se considera  $F(x, y, \lambda) = 0$  una familia de curvas de clase  $C^1$ . La ecuación de la envoltura de la familia se obtiene eliminando el parámetro  $\lambda$  de las ecuaciones*

$$F(x, y, \lambda) = 0 \tag{D.1}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0. \tag{D.2}$$

Supóngase que  $\gamma : \lambda \rightarrow (x(\lambda), y(\lambda))$  es una curva de clase  $C^1$  envoltura de la familia de curvas  $(C_\lambda)_{\lambda \in (\alpha, \beta)}$  de ecuación  $F(x, y, \lambda) = 0$ . Al ser  $\gamma$  la envoltura, se tiene por definición que para toda  $\lambda$

$$F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \tag{D.3}$$

y

$$x'(\lambda) \frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + y'(\lambda) \frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0. \tag{D.4}$$

La ecuación (D.3) traduce que el punto  $\gamma(\lambda)$  pertenece a la curva  $C_\lambda$  para toda  $\lambda$ , y la ecuación (D.4) significa que  $\gamma$  es tangente a  $C_\lambda$  en el parámetro  $\lambda$ .

Derivando (D.3) se deduce que

$$x'(\lambda) \frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + y'(\lambda) \frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \quad (\text{D.5})$$

y junto con la ecuación (D.4) se deduce (D.2). Por tanto,  $(x(\lambda), y(\lambda))$  es solución del sistema (D.1)–(D.2).

Recíprocamente, si  $(x(\lambda), y(\lambda))$  es solución del sistema (D.1)–(D.2) entonces al derivar (D.1) se obtiene (D.5), y (D.4) se deduce de (D.2). Por lo tanto, la curva  $\gamma$  es envoltura de la familia.

En conclusión, se tiene que la envoltura de la familia de curvas se puede obtener de resolver el sistema de ecuaciones (D.1)–(D.2).

# Bibliografía

- [1] Arnow B.J., *On Laplace extension of Buffon needle problem*, The College Mathematics Journal, Vol. 25, No. 1, (1994) pp. 40-43
- [2] Diaconis P., *Buffon's problem with a long needle*, Journal of Applied Probability, Vol. 13, No. 3, (1976) pp. 614-618.
- [3] do Carmo M.P., *Differential Forms and Applications*, Universitext, Springer (1994).
- [4] do Carmo M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall Inc (1976) New Jersey, U.S.A.
- [5] Grabinsky G., *Teoría de la Medida*, Las Prensas de Ciencias (2000), Distrito Federal, México.
- [6] Kendall M.G., Moran P.A.P., *Geometrical Probability*, Statistical Monographs and Courses 10, Charles Griffin & Company Limited (1963), London, England.
- [7] Langevin R., *Introduction to Integral Geometry*, 21° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1997), Rio de Janeiro, Brasil.
- [8] Richeson, D. S., *Euler's Gem, The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press (2008), New Jersey, U.S.A.
- [9] Santaló, L.A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Cambridge University Press (1976), New York, U.S.A.