UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Un Problema de Elipticidad del Operador de Laplace-Beltrami en Variedades con Frontera

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
José Gilberto Amaro Aceves

DIRECTOR DE LA TESIS
Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero
Facultad de Ciencias

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.
08/12/2017

Agradecimientos

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica(PAPIIT) que, por medio del proyecto con clave IN113718, me brindó su apoyo en la realización del presente trabajo.

Índice general

Introducción

La ecuación de Laplace es un ejemplo de cómo se pueden relacionar distintas disciplinas de las matemáticas: entrelaza a la teoría de operadores (análisis), que involucra funciones definidas en dominios diversos, con la geometría; la topología tiende a ser un puente entre ambas. Preguntarse por la relación y la influencia de cada una de ellas sobre las otras es una tarea fundamental.

Con la ayuda de la geometría riemanniana el área de las ecuaciones diferenciales parciales se ha visto enriquecida y se puede aproximar a modelos más parecidos a los reales. Así, por ejemplo, los dominios de las funciones involucrados en una ecuación diferencial pueden dejar de ser subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para considerar subconjuntos o subvariedades de una variedad suave con frontera, más aún se pueden considerar subconjuntos en haces vectoriales.

En su análisis, el estudio teórico de las ecuaciones parciales lleva a técnicas como el desarrollo de la teoría de los operadores (pseudo) diferenciales [Gilkey(1994)], el cálculo de sus símbolos [van den Ban y Marius Crainic(2009), Xin(1996), Topping(2006)] y el planteamiento de espacios de soluciones clásicos de Sobolev. En todas ellas, sus dominios pueden ser sustituidos en términos de haces vectoriales, variedades o conjuntos abiertos de espacios euclidianos. En el proceso de generalización para adaptar las técnicas de las ecuaciones diferenciales parciales a estos nuevos objetos geométricos, una pregunta sensata sería saber que propiedades se preservan cuando cambiamos el dominio. Las variedades con frontera son el ingrediente principal para el problema de ecuaciones diferenciales con valores a la frontera y también nos podemos preguntar si todo lo que decíamos sobre una variedad cerrada (i.e. completa y sin frontera) es cierto en las variedades con frontera.

El siguiente escrito es una exposición y exploración de algunas de las herramientas que se utilizan en la teoría de ecuaciones diferenciales en variedades con frontera. Más en concreto nos centraremos en un problema de Laplace con condiciones a la frontera del tipo Dirichlet (o Neumann). Los operadores diferenciales juegan un papel primordial, el cálculo de sus símbolos nos permite clasificarlos; los espacios de Sobolev son los conjuntos de soluciones estándar que nos permiten hablar de la regularidad y por ello vale la pena su construcción en formas diferenciales, pues así podemos responder la pregunta de regularidad para formas diferenciales en clases de

Sobolev. En sí mismas, cada una de estas herramientas son un área por explorar y todas tienen distintos contextos de descubrimiento, pero pueden converger obteniendo resultados interesantes en las aplicaciones.

En el primer capítulo se presentan todas las herramientas necesarias de geometría riemanniana y se hace la conexión de estos conceptos en espacios de Sobolev, lo cual nos permite hacer una generalización del teorema de Stokes, la fórmula de Green y el lema de Gaffney, para n-formas en la clase de Sobolev, lo cual es indispensable para continuar con el desarrollo de esta tesis.

En el segundo capítulo se hablará sobre los símbolos principales de un operador diferencial. Uno de los objetivos más importantes que tiene esta tesis es presentar los cálculos explícitos y precisos de los símbolos principales de los operadores derivada exterior y covariante, ya que dichos cálculos no se encuentran en la literatura actual. En este capítulo se cumple este objetivo. Y con dichos cálculos se puede demostrar que el operador de Laplace-Beltrami es elíptico bajo la interpretación de Lopatinskii-Shapiro, uno de los temas del tercer capítulo.

En el capítulo tres además se hablará de la noción de un *problema con valores en la frontera* de tipo Dirichlet, y se propondrá una solución (débil) llamado *Potencial de Dirichlet*.

Finalmente, en el capítulo cuatro se presenta una aplicación de la elipticidad, a saber una descomposición de las formas diferenciales en la clase de Sobolev $W^{s,p}$, en términos de las formas exactas $\mathcal{E}^k(M)$, co-exactas $\mathcal{C}^k(M)$ y los campos armónicos $\mathcal{H}^k(M)$ y se incluyen demostraciones precisas de la mayoría de sus resultados. Este tipo de descomposición es motivado por lo que clásicamente se encuentra en la literatura y se conoce como Descomposición de Hodge.

Capítulo 1

∂-variedades y Espacios de Sobolev

En este capítulo se introducen los conceptos básicos y la notación que se usa a lo largo de este trabajo. La geometría riemanniana y los espacios de Sobolev son los principales temas de estudio así como la relación entre ellos. Para ello, se define el concepto de variedad con frontera; en torno a éste se construyen los conceptos análogos a los de las variedades sin frontera, como el de haz vectorial y se extienden los conceptos de conexión, el tensor de curvatura de Ricci, flujos y demás. Sin embargo, las formas diferenciales serán el principal espacio en donde se abordarán los espacios de Sobolev; se introduce la norma básica de Sobolev y se enuncian algunos teoremas fundamentales bajo esta herramienta.

1.1. Variedades con frontera

En esta sección se definirán a las variedades con frontera siguiendo las exposiciones de Richard Melrose y Palmas & Morgado [Sanchez Morgado(2008)]. Melrose llama a esta forma de construir a las variedades con frontera *intrínseca*.

1.1.1. Construcción intrínseca

Consideremos un semiplano euclidiano de dimensión n, $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n,1} = [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$, tomemos la topología usual en $\mathbb{R}^n$ y dotemos a $\mathbb{R}^{n,1}$ de la topología relativa es decir, los abiertos en $\mathbb{R}^{n,1}$ son los conjuntos $\mathcal{O}$ de la forma

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \mathbb{R}^{n,1}, \quad \mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^n \quad \text{abierto.}$$

Para definir que una función $F : \mathcal{O}_1 \subset \mathbb{R}^{n,1} \to \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^{n,1}$, entre abiertos, sea *suave*, simplemente se entenderá como una función con una extensión suave $\tilde{F}$ de F; es decir, si existen abiertos

$\tilde{\mathcal{O}}_1, \tilde{\mathcal{O}}_2 \subset \mathbb{R}^n$, tales que $\mathcal{O}_i = \tilde{\mathcal{O}}_i \cap \mathbb{R}^{n,1}$ para cada i, y una función suave $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{O}}_1 \to \tilde{\mathcal{O}}_2$ con la condición de que $\tilde{F}|_{\mathcal{O}_1} = F$.

Definición 1.1.2. *Sea M un espacio topológico Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$*

1. *Llamaremos a la pareja (U, ϕ) una carta de variedad con frontera (o sistema coordenado) en M si ϕ es un homeomorfismo de un conjunto abierto $U \subset M$ en un abierto de $\mathbb{R}^{n,1}$.*
2. *Dos cartas de variedad con frontera (U, ϕ), (V, ψ) son compatibles si las transformaciones $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbb{R}^{n,1}$, $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \mathbb{R}^{n,1}$ son suaves.*
3. *Un atlas $\mathcal{A}$ de variedad suave con frontera es una colección de cartas cuyos dominios cubren a M y cualesquiera cartas de variedad son compatibles.*

Ahora definiremos a una *variedad con frontera*, como un espacio Hausdorff M, con base numerable y con un atlas maximal $\mathcal{A}$ de variedad suave. Decimos que la dimensión de M es n. A las variedades con frontera las denotaremos por ∂-variedad M.

Aún podemos ser más explícitos y describir dos tipos de puntos en las variedades con frontera; para ello, tomemos los siguientes conjuntos del semiplano euclidiano

$$\mathbb{R}^{n,1} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n \geq 0\}. \tag{1.1}$$

Definimos el interior y la frontera (topológicas) del semiplano, denotados por Int $\mathbb{R}^{n,1}$ y $\partial\, \mathbb{R}^{n,1}$, respectivamente:

$$\text{Int } \mathbb{R}^{n,1} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n > 0\}, \tag{1.2}$$

$$\partial\, \mathbb{R}^{n,1} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_n = 0\}. \tag{1.3}$$

Decimos que un punto $p \in M$ es un *punto interior* si existe una carta (ϕ, U) en torno a p tal que $\phi(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, un punto $p \in M$ es un *punto frontera* si $p \in U$, $\varphi(U) \cap \partial\, \mathbb{R}^{n,1} \neq \emptyset$ y $\varphi(p) \in \partial\, \mathbb{R}^{n,1}$. Así, la *frontera de M*, denotada por ∂M, es el conjunto de todos los puntos frontera; mientras el *interior de M*, Int M, es el conjunto de todos los puntos interiores.

Decimos que una variedad será orientada, si existe un altlas, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = (U_a, \varphi_a)_{a \in A}$ en donde

$$\det(D(\varphi_a \circ \varphi_b^{-1})) \geq 0, \tag{1.4}$$

para toda $a, b \in A$; D denota a la derivada sobre $\mathbb{H}^n$, mientras que det, es el determinante en $\mathbb{R}^n$.

Dadas dos variedades con frontera suaves, M y N, decimos que una función $f : M \to N$ es suave si y sólo si existe una carta coordenada, (U, ϕ), en torno a p en M y una carta coordenada, (V, ψ) en torno a $f(p)$ en N, que cumple que $\varphi(p) = 0$ y la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es suave. Denotaremos por $C^\infty(M)$ al conjunto de las funciones suaves de M en $\mathbb{R}$.

Es posible construir al espacio tangente en las variedades con frontera.

Definición 1.1.3. *Sea M una variedad suave con frontera y $\alpha, \beta : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ dos curvas suaves en M, tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Las curvas α y β son equivalentes si y sólo si existe una carta (U, ϕ) en torno a p, tal que $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.*

Un hecho importante es que no depende de la carta la noción de curvas equivalentes y forma una relación de equivalencia. Así, a la clase de equivalencia de la curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ se denotará como $[\alpha] = v_p$ y se llama el vector tangente a α en p. El espacio tangente a una variedad M en el punto p es el conjunto de clases de equivalencia de curvas,

$$T_pM = \{[\alpha] \mid \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M,\ \alpha(0) = p\}. \tag{1.5}$$

Definición 1.1.4. *Dada una variedad con frontera M, definimos al haz tangente a M como la unión de los espacios tangentes a M en cada punto de M,*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM. \tag{1.6}$$

El haz tangente admite una estructura de variedad suave de dimensión $2n$ en donde n es la dimensión de M. Un campo vectorial V en una variedad M es una función $V : M \to TM$ que asigna a cada $p \in M$ un vector $V_p = V(p) \in T_pM$. Decimos que el campo V es suave si $V : M \to TM$ es suave. Al conjunto de campos vectoriales suaves sobre M los denotamos con $\mathfrak{X}(M)$.

Con el concepto de espacio tangente definimos la diferencial de una transformación entre variedades con frontera.

Definición 1.1.5. *Sean M, N variedades con frontera y f una función suave de M a N. Definimos la diferencial $(Tf)|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ de un punto p en M como*

$$(Tf)|_p[\alpha] := [f \circ \alpha], \tag{1.7}$$

con $[\alpha] \in T_pM$ y $[f \circ \alpha] \in T_{f(p)}N$.

Una vez introducida la noción de variedad suave, recordaremos a los haces vectoriales suaves a continuación; lo que nos permitirá hablar de las *cartas de haces*, para poder expresar localmente a los operadores entre secciones de haces.

Definición 1.1.6. *Un haz vectorial suave k-dimensional es una pareja de variedades suaves con frontera E (espacio total) y M (espacio base) junto con una función sobreyectiva $\pi : E \to M$ (llamada proyección), que satisface lo siguiente:*

1. *Cada conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ (llamado fibra de E en p) tiene una estructura de espacio vectorial.*

2. *Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ llamada trivialización local de E en donde el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi_1"] \\ U \arrow[r, "Id"'] & U \end{tikzcd}$$

   en donde π_1 es la proyección sobre el primer factor.

3. *La restricción de φ en cada fibra, $\varphi : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$, es un isomorfismo lineal.*

A las funciones φ se les llama cartas para el haz y al conjunto de abiertos U atlas para el haz.

Finalmente, una sección para E, es una función suave $\sigma : M \to E$, con la condición de que $\pi \circ \sigma = Id_M$.

Denotaremos, como canónicamente se ha hecho, al haz tangente y cotangente sobre M, como TM y T^*M, respectivamente. Mientras que $\Gamma(TM)$ es el conjunto de secciones suaves en el tangente, llamados campos vectoriales (también denotados en la literatura como $\mathfrak{X}(M)$).

Un *homomorfismo entre haces*, $F : E \to E'$ es un mapeo continuo que satisface lo siguiente: dados $\pi : E \to M$ y $\pi' : E' \to M'$, existe un mapeo $f : M \to M'$, tal que $\pi' \circ F = f \circ \pi$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

además de que para toda $p \in M$, la transformación $F_{\pi^{-1}(p)} : E_p \to E'_{f(p)}$, es lineal.

Construyamos más objetos geométricos.

Definición 1.1.7. *(Derivación) (a) Sea $f \in C^\infty(M)$ una función suave. Su derivada en la dirección de un campo vectorial $X \in \Gamma(TM)$, es una función suave, $Df(X)$ sobre M, definida como*

$$(Df(X))|_p := (Tf)|_p X(p) \quad \forall p \in M. \tag{1.8}$$

(b) Para cualesquiera dos campos vectoriales $X, Y \in \Gamma(TM)$, el campo $Z = [X, Y] \in \Gamma(TM)$, definido por,

$$Df(Z) := D(Df(Y))(X) - D(Df(X))(Y) \quad \forall f \in \Gamma(TM), \tag{1.9}$$

se le llama el bracket de Lie para X y Y.

Recordemos ahora la estructura riemanniana que se definirá sobre la variedad M e introduzcamos una de las nociones principales: conexión.

Definición 1.1.8. *(a) Una métrica sobre una ∂-variedad M es una asignación suave $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$, tal que*

$$g|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

es una función bilineal, simétrica y positiva definida para toda $p \in M$. A la variedad M equipada con la métrica g se le denota como ∂-variedad riemanniana con frontera (M, g).

(b) Sea (M, g) una ∂-variedad riemanniana y $U \subset M$. Una tupla $(E_1, \ldots E_n)$ de campos vectoriales $E_i \in \Gamma(TU)$ se llama un marco local g-ortonormal sobre M si y sólo si

$$g(E_i, E_j)|_p = \delta_{ij} \quad \forall p \in U \quad \text{en donde} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Si $(U_a)_{a\in A}$ es una cubierta para M, y existe un marco g-ortonormal para cada U_a, llamaremos a $(U_a)_{a\in A}$ una buena cubierta.

(c) Al mapeo $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ se le llama conexión sobre M si y sólo si

1. $\nabla(X, fY) = Df(X)Y + f\nabla(X, Y)$,
2. $\nabla(fX, Y) = f\nabla(X, Y)$,
3. $\nabla(X + Y, Z) = \nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$

para todo $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ y para toda $f \in C^\infty(M)$.

Si fijamos a $X \in \Gamma(TM)$, al mapeo $\nabla_X \cdot := \nabla(X, \cdot)$ se le llama derivada covariante en la dirección de X.

Un hecho importante es el siguiente

Teorema 1.1.9. *Dada una variedad riemanniana M con frontera, hay una única conexión ∇ que cumple,*

1. $D\big(g(Y, Z)\big)(X) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,
2. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. A la conexión ∇ se le llama conexión de Levi-Civita.

Finalmente, presentamos el tensor de curvatura de Riemann para una conexión ∇ sobre M: es el mapeo definido mediante la siguiente regla

$$\mathcal{R} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \tag{1.10}$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \mathcal{R}(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

$\mathcal{R}$ es anti-simétrico y $C^\infty(M)$ lineal en las primeras dos entradas.

1.1.10. Geometría sobre los puntos frontera

Dado que las variedades con las que trabajaremos tienen frontera no vacía, es importante describir la geometría en torno a puntos de la frontera. En esta sección se presentará la notación fundamental para los campos definidos en la frontera, así como la relación entre el haz vectorial definido en la frontera y en el interior de la variedad. Al final se enunciará uno de los teoremas pilares sobre las variedades con frontera, a saber, el teorema del collar.

Recordemos que la frontera de M^n, denotada por ∂M es en sí misma una variedad de dimensión $n-1$. Como subvariedad de M, podemos tomar a la inclusión natural $j : \partial M \to M$ ($\partial M \subset M$) y al mapeo tangente

$$Tj : T\partial M \to TM|_{\partial M}.$$

Una observación importante debe hacerse aquí, podemos identificar al haz tangente sobre la frontera $T\partial M$ con la imagen del mapeo Tj, $Tj(\partial M)$; sin embargo, no hay una correspondencia equivalente con el haz tangente sobre M restringido a los puntos frontera, $TM|_{\partial M}$. $T\partial M$ es un sub-haz de co-dimensión 1 del haz $TM|_{\partial M}$. De manera directa se puede inducir una inclusión del espacio de campos vectoriales sobre el haz tangente con base en la frontera, $\Gamma(T\partial M)$, al espacio de los campos vectoriales con base M pero restringidos en la frontera, $\Gamma(TM|_{\partial M})$.

Dicho esto, denotemos por $\mathcal{N} \in \Gamma(TM|_{\partial M})$ a uno de los campos normales unitarios sobre M; es decir,

$$g(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = 1 \quad \text{y} \quad g(Tj\tilde{Y}, \mathcal{N}) = 0 \quad \forall \tilde{Y} \in \Gamma(T\partial M).$$

Si pedimos además que M sea orientada, decimos que $\mathcal{N}$ *apunta hacia adentro* si y sólo si para todo $p \in U_a \cap \partial M$ el producto $g(\mathcal{N}, \partial_i^a)$ es positivo para toda carta coordenada (U_a, ϕ_a). El siguiente teorema es de gran importancia pues nos permitirá extender a los campos definidos en la frontera de M de manera global.

Teorema 1.1.11. *(Teorema del collar, ([Bröcker(1982)], pp. 133-135)) Sea M una ∂-variedad riemanniana. Entonces, existe una familia de difeomorfismos suaves*

$$\Sigma : \partial M \times [0, 1) \to M$$

sobre una vecindad abierta de la subvariedad $j(\partial M)$ en M, tal que

$$\Sigma(p, 0) = p \quad \text{y} \quad T\Sigma_{(p,0)}(0, 1) = \mathcal{N}|_p \quad \forall p \in \partial M.$$

Al mapeo Σ se la llamará collar normal sobre ∂M.

Si aplicamos el teorema del collar podemos extender al campo normal $\mathcal{N} : \partial M \to TM|_{\partial M}$ de manera suave, y en una vecindad de la frontera, a un campo $\widehat{\mathcal{N}}$ dado por

$$\widehat{\mathcal{N}}|_q = T\Sigma|_{(p,s)}(0, 1) \quad \text{en donde} \quad (p, s) = \Sigma^{-1}(q).$$

Con la ayuda del campo $\widehat{\mathcal{N}}$ se puede hacer la descomposición de cualquier campo vectorial $Y \in \Gamma(TM)$ en dos partes: una componente tangencial $Y^{\parallel}$ y una componente normal $T^{\perp}$. Si elegimos $\widetilde{\mathcal{N}} = \frac{\widehat{\mathcal{N}}}{|\widehat{\mathcal{N}}|}$, tenemos lo siguiente

$$Y = Y^{\parallel} + Y^{\perp} \quad \text{en donde} \quad Y^{\perp} = g(Y, \widetilde{\mathcal{N}})\widetilde{\mathcal{N}} \quad \text{y} \quad g(Y^{\parallel}, \widehat{\mathcal{N}}) = 0.$$

Además, en una vecindad lo suficientemente pequeña que interseque a ∂M, podemos tener un marco g-ortonormal

$$(\widetilde{\mathcal{N}}, E_2, \dots, E_n) \quad \text{en donde} \quad \widehat{\mathcal{N}}|_{\partial M} = \widehat{\mathcal{N}} \quad E_j|_{\partial M} \in T\partial M.$$

Marco al que se le llamará *marco normal*.

Una observación importante es que para todo campo tangente $Y^{\parallel} \in \Gamma(T\partial M)$ se tiene que

$$g(\widehat{\mathcal{N}}, \nabla_{Y^{\parallel}}\widehat{\mathcal{N}}) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \big(\nabla_{Y^{\parallel}}\Gamma(TM)\big)^{\perp} = 0.$$

Otro objeto fundamental sobre $\partial M \subset M$ es la segunda forma fundamental: consideremos al mapeo simétrico

$$\mathcal{K} : T\partial M \times T\partial M \to TM|_{\partial M}$$
$$\mathcal{K}(X^{\parallel}, Y^{\parallel}) := (\nabla_{X^{\parallel}} Y^{\parallel}).$$

Asociado a cada campo definido en M se encuentra una familia de curvas que tendrá una doble función: primero, nos permitirá hablar sobre automorfismos uniparamétricos; segundo, permitirá construir la noción de transporte paralelo.

Proposición 1. *([Schwarz(1995)], p. 17) Sea (M, g) una variedad riemanniana con frontera, y $X \in \Gamma(TM)$ un campo vectorial con soporte compacto, tal que $\mathrm{sop}(X) \cap \partial M = \emptyset$ o bien $X|_{\partial M} = X^{\parallel}$. Entonces, existe una familia de curvas suaves generadas a partir de los siguientes mapeos*

$$\psi^X : M \times \mathbb{R} \to M \quad \text{tal que}$$
$$\psi(p, 0) = p \quad \text{y} \quad T(\psi^X)|_{(p,t)}(0, 1) = X|_{\psi^X(p,t)}.$$

1.1.12. Construcción sobre Haces Vectoriales

Una vez presentada la noción de *haz vectorial suave*, describiremos cómo dotarlos de una estructura riemanniana. Veamos cómo.

Consideremos un haz vectorial (E, π, M), definamos un mapeo bilineal simétrico y positivo definido

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \, E|_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \to \mathbb{R}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle |_E$ depende de manera suave sobre $p \in M$. Así, dada la métrica en la fibra podemos encontrar un marco local ortonormal $(\nu_1, \dots \nu_m)$ en $\Gamma(E|_{U_a})$, y en donde $E|_{U_a} := \pi^{-1}(U_a)$ para cada U_a abierto en M; esto es,

$$\langle \nu_i, \nu_j \rangle_{E|_p} = \delta_{ij} \quad \forall p \in U_a.$$

Con este marco local podemos descomponer de manera local a cada campo $\sigma \in \Gamma(E)$ como

$$\sigma = \sum_{1 \leq j \leq m} (\lambda_{a,j}) \nu_j$$

en donde $(\lambda_{a,j})$ son las componentes de una función suave sobre $U_a \subset M$. Así, podemos describir al producto en las fibras del modo siguiente:

$$\langle \sigma, \theta \rangle_E = \sum_j (\lambda_{a,j})(\theta_{a,j}).$$

El concepto de conexión es posible definirlo para haces vectoriales y será el mapeo

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$

tal que

1. $\nabla(X, fY) = Df(X)Y + f\nabla(X, Y)$,
2. $\nabla(fX, Y) = f\nabla(X, Y)$,
3. $\nabla(X + Y, Z) = \nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$

para todo $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(E)$ y para toda $f \in C^\infty(M)$.

Finalmente, es posible construir nuevos haces vectoriales sobre una variedad base distinta a partir de un difeomorfismo entre variedades. Esta construcción es fundamental en el concepto de operador diferencial.

Denotaremos por $\mathrm{End}(E)$ al espacio de los endomorfismos de E en E sobre la identidad, en donde (E, π, M) es un haz vectorial; es decir, el conjunto de todos los mapeos lineales suaves entre fibras $\tilde{\Phi} : E_p \to E_p$ que hacen que el diagrama siguiente conmute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

Sea $\psi : N \to M$ un difeomorfismo, Definimos al haz vectorial inducido sobre N como

$$\psi^* E = \{(q, v) \in N \times E | \pi(v) = q\}.$$

El mapeo entre haces canónico está dado por $\widetilde{\Psi} : \psi^*E \to E$, $(q, v) \mapsto v$ es un isomorfismo entre haces con el cual el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} \psi^*E \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "\psi"] & M, \end{tikzcd}$$

conmute. Con este isomorfismo podemos construir nuevas secciones sobre N a partir de las secciones construidas sobre M: sea $\sigma \in \Gamma(E)$, el pull-back $\psi^{\#}\sigma \in \Gamma(\psi^*E)$ está dado por

$$\psi^{\#}\sigma = \widetilde{\Psi}^{-1} \circ \sigma \circ \psi.$$

1.1.13. Formas diferenciales

En la siguiente sección se presentará un haz muy especial: el haz exterior de las k-formas. Este haz es fundamental en nuestro análisis pues será el objeto de estudio. Presentamos los operadores más importantes sobre este espacio y se extenderán ciertos operadores definidos en el haz tangente.

Definición 1.1.14. *(Haz exterior) Sean M una ∂-variedad y $\Lambda^k(T_pM)$ el espacio de todas las funciones k-lineales antisimétricas*

$$w_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R} \quad p \in M.$$

Entonces, el haz exterior de las k-formas está definido como

$$\Lambda^k(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM).$$

El espacio de las secciones suaves se denotará como $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k(M))$ y se llamará el espacio de las formas diferenciales de grado k sobre M.

De manera explícita una forma diferencial es un elemento $w \in \Omega^k(M)$ tal que la regla

$$w : \Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

$$(X_1, \ldots, X_k) \mapsto w(X_1, \ldots, X_k),$$

es un mapeo k-lineal antisimétrico respecto a $C^\infty(M)$. Además, si M es una variedad riemanniana orientada positivamente el espacio $\Omega^n(M)$ tiene la forma riemanniana de volumen μ como elemento canónico y está definido como

$$\mu(X_1, \ldots, X_k) = \sqrt{\det(g(X_i, X_j))}.$$

Presentamos ahora las principales operaciones sobre $\Omega^k(M)$: denotemos por $S(k,n)$ al conjunto de todas las permutaciones σ del conjunto de números $\{1,2,\dots n\}$ tal que $\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)$ y $\sigma(k+1)<\cdots<\sigma(n)$. A los elementos $\sigma\in S(k,n)$ se les llama (k,n)-shuffle.

Definición 1.1.15. *Sea M una ∂-variedad riemanniana. (a) El producto exterior (o cuña) entre formas diferenciales está definido por*

$$\wedge:\Omega^k(M)\times\Omega^l(M)\to\Omega^{k+l}(M)$$

$$\begin{aligned}(w\wedge\eta)(X_1,\dots,X_k) &= \\ \sum_{\sigma\in S(k,k+l)}(\text{signo }\sigma)w(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\cdot\eta(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)}).\end{aligned} \tag{1.11}$$

(b) Sea $(E_1,\dots,E_n)$ un marco g-ortonormal sobre $U\subset M$. Definimos el producto en $\Omega^k(M)$, localmente como

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Lambda^k(T_pM)}:\Omega^k(M)\times\Omega^k(M)\to C^\infty(M)$$

$$\langle w,\eta\rangle_{\Lambda^k(T_pM)}=\sum_{\sigma\in S(k,n)}w(E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(k)})\cdot\eta(E_{\sigma(k+1)},\dots,E_{\sigma(k+l)}).$$

(c) El operador de Hodge $*:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$ está definido implícitamente por

$$\eta\wedge *w=\langle\eta,w\rangle_{\Lambda^k(T_pM)}\,\mu\quad\forall\eta\in\Omega^k(M).$$

(d) El producto interior (o contracción) con un campo vectorial $Y\in\Gamma(TM)$ está definido mediante la siguiente regla

$$(\mathbf{i}_Y w)\big(X_1,\dots,X_{k-1}\big)=w\big(Y,X_1,\dots,X_{k-1}\big)\quad\forall X_1,\dots,X_{k-1}\in\Gamma(TM).$$

(e) La derivada exterior $d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ se define para $(k<n)$ como

$$\begin{aligned}dw(X_0,X_1,\dots,X_k) &= \sum_{0\le j\le k}(-1)^jD[w(X_0,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)](X_j)\\ &+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}D[w([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)](X_j).\end{aligned}$$

Los campos $X_0,\dots,X_k$ son arbitrarios y están definidos sobre M; la notación $\hat{X}_j$ significa que se omitirá ese campo. Para $w\in\Omega^n(M)$ se tendrá por definición que $dw=0$.

(f) El operador co-diferencial está definido con el mapeo $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ mediante la regla

$$\delta w = (-1)^{nk+n+1} * d(*w).$$

(g) El operador de Laplace-Beltrami es el mapeo $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ con la regla

$$\Delta w = (d\delta + \delta d)w.$$

Una vez presentados los principales operadores sobre las formas diferenciales, haremos el vínculo con la estructura riemanniana de la variedad con frontera M. Es decir, queremos proponer una conexión sobre el haz de formas a partir de la conexión sobre el haz tangente. La siguiente definición nos dirá cómo es esta correspondencia.

Definición 1.1.16. *Sea ∇ la conexión de Levi-Civita sobre la ∂-variedad M. La derivada covariante inducida para las formas diferenciales sobre M, y denotada por $\overline{\nabla}$, es el mapeo dado, para cualquier $Y \in \Gamma(TM)$, por*

$$\overline{\nabla}_Y(\cdot) : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

$$(\overline{\nabla} w)(X_1, \ldots, X_k) \;\; = \;\; D[w(X_1, \ldots, X_k)](Y) - \sum_{1 \le j \le k} w(X_1, \ldots, \nabla_Y X_j, \ldots, X_k). \tag{1.12}$$

Por comodidad denotaremos con el mismo símbolo a ambas conexiones: $\nabla := \overline{\nabla}$.

La conexión inducida sobre $\Omega^k(M)$ es compatible con la métrica $\langle w, \eta \rangle_{\Lambda^k}$ ([Schwarz(1995)], p. 24).

De manera análoga, podemos inducir el tensor de curvatura sobre las formas antisimétricas $\Lambda^k(T_pM)$, denotado por $\mathcal{R}^\Lambda$, a partir del del tensor de Riemann $\mathcal{R}$ sobre $\Gamma(TM)$

$$\mathcal{R}^\Lambda : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \mathrm{End}\big(\Lambda^k(T_pM)\big)$$

$$(Y, Z) \mapsto \mathcal{R}^\Lambda(Y, Z),$$

en donde el endomorfismo de haz sobre $\Lambda^k(T_pM)$ está definido como

$$\big(\mathcal{R}^\Lambda(Y, Z)w\big)(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{1 \le l \le k} w\big(X_1, \ldots, \mathcal{R}(Y, Z)X_l, \ldots, X_k\big) \tag{1.13}$$

Los operadores derivada exterior y covariante, definidos anteriormente, también admiten una representación en términos de la derivada covariante inducida ($\nabla := \overline{\nabla}$) [Sanchez Morgado(2008)]. Así, la derivada exterior tendrá la forma

$$dw(X_0, X_1, \ldots, X_k) = \sum_{1 \le l \le k} \big(\nabla_j w\big)\big(X_0, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_k\big). \tag{1.14}$$

Para la derivada co-diferencial δ, tomemos un marco g-ortonormal sobre $U \subset M$ y denotemos a la derivada covariante en la dirección del campo E_j como $\nabla_j = \nabla_{E_j}$; entonces, tenemos la siguiente representación

$$\begin{aligned} \delta w(X_1, \ldots, X_{k-1}) &= \sum_{1 \leq j \leq n} \big(\nabla_j w\big)\big(E_j, X_1, \ldots, X_{k-1}\big) \\ &= -\sum_{1 \leq j \leq n} \big(\mathbf{i}_{E_j} \nabla_j w\big)\big(X_1, \ldots, X_{k-1}\big). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Finalmente, el operador de Laplace-Beltrami Δ tendrá una forma más compleja [Schwarz(1995), Xin(1996)], pues para 0-formas $f \in \Omega^0(M)$, se tiene

$$\Delta f = \delta df = -\sum_{1 \leq j \leq n} \bigg(\nabla_j \nabla_j f - \nabla_{\nabla_j E_j} f\bigg), \tag{1.16}$$

ya que δf se anula.

Con la anterior observación, definimos al operador Laplaciano-conexión como sigue

$$\Delta^{\Lambda} = -\sum_{1 \leq j \leq n} \bigg(\nabla_j \nabla_j - \nabla_{\nabla_j E_j}\bigg). \tag{1.17}$$

La relación ente el operador de Laplace-Beltrami y el Laplaciano-conexión es vía la fórmula de Weizenböck ([Xin(1996)])

$$\Delta w = \Delta^{\Lambda} w - \mathcal{R}^W w \quad \forall w \in \Omega^k(M). \tag{1.18}$$

En donde $\mathcal{R}^W \in \mathrm{End}(\Lambda^k(T_pM))$ es un endomorfismo de haz, determinado por el tensor de curvatura $\mathcal{R}^{\Lambda}$ como

$$\begin{aligned} &\big(\mathcal{R}^W w\big)\big(X_1, \ldots, X_k\big) = \\ &\sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} \big(\mathcal{R}^{\Lambda}(E_j, X_i)e\big)\big(E_j, X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_k\big). \end{aligned}$$

En la siguiente construcción presentaremos dos operadores especiales definidos en la frontera de M; estos operadores nos permitirán hablar sobre condiciones en la frontera.

Primero veamos cómo caracterizar a las formas diferenciales en la frontera: consideremos a la inclusión natural

$$j : \partial M \to M,$$

asociado a la inclusión tomemos el pull-back de formas

$$j* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(\partial M).$$

La variedad frontera, ∂M, hereda la métrica g en M, vía el pull-back j^*g. También podemos hablar de la forma de volumen en la frontera $\mu_{\partial M} \in \Omega^k(\partial M)$ y se calcula con la regla siguiente

$$\mu_{\partial M} = \mathbf{i}_{\mathcal{N}}\mu|_{\partial M}.$$

A la restricción $w|_{\partial M}$ se le llama valor frontera de $w \in \Omega^k(M)$. $w|_{\partial M}$ es una función multilineal antisimétrica cuyo dominio es

$$w|_{\partial M} : \Gamma(TM|_{\partial M}) \times \cdots \times \Gamma(TM|_{\partial M}) \to C^\infty(M),$$

es decir, es una función suave restringida al haz de las k-formas $\Lambda^k(M)|_{\partial M}$. Así, por definición $w_{\partial M} \in \Omega^k(M)|_{\partial M} := \Gamma(\Lambda^k(M)|_{\partial M})$.

Dicha restricción es una operación compatible con las operaciones definidas sobre $\Lambda^k(M)$. Es decir, se tiene, por ejemplo que

$$(w \wedge \eta)|_{\partial M} = w|_{\partial M} \wedge \eta|_{\partial M} \quad \text{y} \quad *(w|_{\partial M}) = (*w)|_{\partial M}.$$

Definiremos ahora a los operadores que propiamente están definidos en la frontera.

Definición 1.1.17. *Sea $X \in \Gamma(TM|_{\partial M})$, entonces $X = X^{\|} + X^{\perp}$, definimos a la componente tangencial de w, $\mathbf{t}w$, como*

$$\mathbf{t}w(X_1, \dots X_k) = w(X_1^{\|}, \dots, X_k^{\|}) \quad \forall X_1, \dots X_k, \in \Gamma(TM|_{\partial M}). \tag{1.19}$$

Y la componente normal de w, $\mathbf{n}w$, será

$$\mathbf{n}w = w|_{\partial M} - \mathbf{t}w. \tag{1.20}$$

Las componentes tangencial y normal para una forma diferencial son naturales respecto al operador de Hodge y los operadores diferenciales derivada exterior y co-diferencial, respectivamente, como lo muestra la siguiente proposición

Proposición 2. *([Schwarz(1995)], pp. 27-29) Sea M una ∂-variedad, y tomemos un marco normal $(\widetilde{\mathcal{N}}, E_1, \dots E_{n-1})$ sobre $U \subset M$*

a) Las componentes normal y tangencial de $w \in \Omega^k(M)$ son adjuntas vía el operador de Hodge,

$$*(\mathbf{n}w) = \mathbf{t}(*w) \quad \text{y} \quad *(\mathbf{t}w) = \mathbf{n}(*w). \tag{1.21}$$

Las fórmulas $*(\mathbf{n}w)$ y $*(\mathbf{t}w)$ deben interpretarse como la acción de $*$ sobre una extensión arbitraria de $\mathbf{n}w$ y $\mathbf{t}w$, respectivamente, seguido de la restricción a ∂M.

b) La derivada exterior conmuta con la proyección tangencial, mientras que la co-diferencial lo hace respecto a la proyección normal de $w \in \Omega^k(M)$ en el sentido siguiente:

$$j^*\big(\mathbf{t}(dw)\big) = d\big(j^*\mathbf{t}w\big) \quad \text{y} \quad j^*\big(*(\mathbf{n}\delta n)\big) = (-1)^{(k+1)(n-k+1)} d\big(j^*(*\mathbf{n}w)\big). \tag{1.22}$$

Si usamos la identificación $\mathbf{t}w = j^*w$, las identidades anteriores las podemos reescribir como sigue

$$\mathbf{t}(dw) = d(\mathbf{t}w) \quad \text{y} \quad \mathbf{n}(\delta w) = \delta(\mathbf{n}w). \tag{1.23}$$

c) Si definimos como $\xi := \mathbf{t}w \wedge *\mathbf{n}\eta$, con $w \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$. Entonces,

$$\xi = \langle w, \mathbf{i}_{\mathcal{N}}\eta\rangle_{\Lambda^k} \mu_\partial. \tag{1.24}$$

Observación: Notemos que la construcción de la componente tangencial se puede generalizar a espacios vectoriales U, V, W finito-dimensionales arbitrarios, de la siguiente manera: Sea $L : V \to W$ una transformación lineal y tomemos el *pull back* entre las formas alternantes $L^*\mathrm{Alt}W \to \mathrm{Alt}V$, definido como siempre

$$L^*w(v_1, \ldots v_k) = w(Lv_1, \ldots, Lv_k), \quad w \in \mathrm{Alt}^k W, v_1, \ldots, v_k \in V.$$

Si L es la inclusión $i_V : V \hookrightarrow W$, al tomar su *pull back*, define una función sobreyectiva $i_V^* : \mathrm{Alt}W \to \mathrm{Alt}V$. Si además, W es un espacio con producto interior, se puede definir a la proyección ortogonal $\pi_V : W \to V$, y su *pull back* define una función inyectiva $\pi_V^* : \mathrm{Alt}V \to \mathrm{Alt}W$. Así, para la composición $W \xrightarrow{\pi_V} V \xrightarrow{i_V} W$ su *pull back* asocia a cada $w \in \mathrm{Alt}W$ su *parte tangencial* respecto a V, definida como

$$\mathrm{Alt}W \xrightarrow{i_V^*} \mathrm{Alt}V \xrightarrow{\pi_V^*} \mathrm{Alt}W \tag{1.25}$$

$$(\pi^* i^* w)(v_1, \ldots, v_k) = w(\pi_V v_1, \ldots, \pi_V v_k). \tag{1.26}$$

Entonces, la componente tangencial para w la podemos entender como

$$\mathbf{t}w(X_1, \ldots X_k) = w(\pi \circ X_1, \ldots, \pi \circ X_k) = w(X_1^\parallel, \ldots, X_k^\parallel) \quad \forall X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM|_{\partial M}).$$

La segunda forma fundamental $\mathcal{K}$ también induce un mapeo sobre puntos en la frontera ∂M,

$$\mathcal{K}^\Lambda : T\partial M \to \mathrm{End}\big(\Lambda^k(M)|_{\partial M}\big)$$

$$Y^\parallel \mapsto \mathcal{K}^\Lambda(Y^\parallel),$$

en donde el endomorfismo de haz $\mathcal{K}^\Lambda(Y^\parallel w)$ sobre $\Lambda^k(M)|_{\partial M}$ se define como

$$\big(\mathcal{K}^\Lambda(Y^\parallel)\big(X_1, \ldots, X_k\big)\big) = \sum_{1 \le l \le k} w\big(X_1, \ldots, \mathcal{K}(Y^\parallel, X_l^\parallel), \ldots X_k\big). \tag{1.27}$$

Sea $\Psi : N \to M$ una función suave entre dos variedades con frontera. El pull-back $\Psi^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ está definido por

$$(\Psi^* w)|_p(X_1, \ldots, X_k) := w|_{\Psi(p)}((T\Psi)|_p X_1, \ldots, (T\Psi)|_p X_k), \tag{1.28}$$

con $X_1, \ldots, X_n \in \Gamma(TM)$. Si ϕ_s^Y es el flujo asociado al campo $Y \in \Gamma(TM)$, definimos a la derivada de Lie como

$$\mathcal{L}_Y w := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_s^Y)^* w, \quad \forall\, w \in \Omega^k(M). \tag{1.29}$$

Por último, definimos la *deformación para operador de Hodge* bajo el flujo ϕ_s^Y asociado a Y como

$$\Xi_t^Y : \Lambda^k(M) \to \Lambda^k(M) \quad \text{como} \quad *_{g(t)} = (Id + t\Xi_t^Y), \tag{1.30}$$

en donde $g(t) := *_g(\phi_s^Y)^* g$ denota a los tensores métricos inducidos en M; mientras que $*_g$ y $*_{g(t)}$ son los operadores de Hodge relativos a las métricas g y $g(t)$.

Finalmente enunciamos el teorema que nos permitirá hacer el vínculo entre el análisis, la topología y la geometría para las variedades con frontera,

Teorema 1.1.18. *(Teorema de Stokes) Sea M una ∂-variedad n-dimensional y orientada. Si $w \in \Omega^{n-1}(M)$ es una forma diferencial suave con soporte compacto, entonces*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} j^* w. \tag{1.31}$$

1.2. Espacios de Sobolev

En esta sección definimos a los espacios de Sobolev para secciones sobre un haz riemanniano con base en una variedad con frontera; se enunciarán tres de los teoremas principales sobre estos espacios: Meyers-Serrin, Lema de Encaje y Lema de Rellich. Propondremos la caracterización de los espacios de Sobolev sobre el haz exterior. Finalizaremos esta sección recordando a los operadores de Fredholm, un resultado básico sobre encajes y aproximaciones.

Denotemos por $\Gamma_c(\mathbb{F})$ al espacio de las secciones suaves sobre un haz vectorial $(\mathbb{F}, M)$ con soporte compacto; es decir, a las funciones $\sigma : M \to \mathbb{F}$ que cumplen que $\pi \circ \sigma = \mathbb{I}_M$, la identidad en M y cuyo soporte , $\text{sop}(M) = \{p \in M | \sigma(p) \neq 0\}$, es compacto en M.

Definición 1.2.1. *Sea M una ∂-variedad, y $\mathbb{F}$ un haz vectorial sobre M y con una métrica en la fibra $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbb{F}}$. El espacio $\Gamma_c(\mathbb{F})$ está equipado con el producto escalar siguiente*

$$\ll \sigma, \eta \gg = \int_M \langle \sigma, \eta \rangle_{\mathbb{F}}\, \mu.$$

El espacio $L^2\Gamma(\mathbb{F})$ está definido al completar el espacio $\Gamma_c(\mathbb{F})$ con respecto a la norma inducida siguiente

$$||\sigma||_{L^2\Gamma(\mathbb{F})} = (\ll \sigma, \sigma \gg)^{1/2}.$$

En general para $p \in [1,\infty)$, la norma L^p sobre $\Gamma_c(\mathbb{F})$ está dada por

$$||\sigma||^p_{L^p\Gamma(\mathbb{F})} = \int_M \bigg(\langle \sigma, \sigma \rangle \bigg)^{p/2} \mu;$$

además, definimos al espacio $L^p\Gamma(\mathbb{F})$, al completar el espacio $\Gamma_c(\mathbb{F})$ respecto a esta norma. Los espacios $L^p\Gamma(\mathbb{F})$ también serán denotados por $W^{0,p}\Gamma(\mathbb{F})$.

Para definir a los espacios de Sobolev de orden superior se tomará en cuenta a la conexión sobre un haz vectorial. Fijemos tanto a la variedad con frontera como a la conexión inducida (M,∇) y tomemos un marco local g-ortonormal $(E_1,\dots,E_n)$ definido en $U \subset M$. Definimos de manera inductiva a la siguiente familia de mapeos[1]

$$\begin{aligned}&|\cdot|_{J^s(\mathbb{F}|U)} : \Gamma(\mathbb{F}|_U) \to C^\infty(U) \quad \text{dado por}\\ &|\sigma|^2_{J^0(\mathbb{F}|U)} = \langle \sigma, \sigma \rangle |_{\mathbb{F}} \quad \text{y} \quad |\sigma|^2_{J^s(\mathbb{F}|U)} = |\sigma|^2_{J^{s-1}(\mathbb{F}|U)} + \sum_{1\le j\le n} |\nabla_{E_j}\sigma|^2_{J^{s-1}\mathbb{F}|U}.\end{aligned}$$

Por ejemplo, para $s=1$ tenemos el producto siguiente

$$\langle \sigma, \theta \rangle |_{\mathbb{F}} + \sum_{1\le j\le n} \left\langle \nabla_{E_j}\sigma, \nabla_{E_j}\theta \right\rangle_{\mathbb{F}}.$$

Ahora estamos en posición de definir a los espacios de Sobolev

Definición 1.2.2. *Sea M una ∂-variedad, y $\mathbb{F}$ un haz vectorial sobre M equipado con una métrica en la fibra $\langle \cdot, \cdot \rangle |_{\mathbb{F}}$ y una conexión ∇. Además, tomemos una cubierta abierta $(U_a)_{a\in A}$ de M y una partición subordinada a la unidad $(\mathbb{F})_{a\in A}$, y una familia de marcos locales $(E^a_1, \dots E^a_n)$. La $W^{s,p}$-norma sobre $\Gamma(\mathbb{F})$, (con $1 \le p < \infty$), está definida por*

$$||\sigma||^p_{W^{s,p}} := \sum_{a\in A} \int_M \mathbb{F}_a |\sigma|^p_{J^s(\mathbb{F}|\mathbb{U})} \mu. \tag{1.32}$$

El espacio de Sobolev, denotado por $W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F})$ se define al completar el espacio $\Gamma_c(\mathbb{F})$ respecto a la norma anterior. Denotaremos a los espacios $W^{s,2}\Gamma(\mathbb{F})$ como $H^s\Gamma(\mathbb{F})$.

Los espacios $W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F})$ son de Banach. Un resultado importante es que si estamos frente a un difeomorfismo entre variedades con frontera, $\psi : M \to N$, podemos inducir normas en la fibra sobre cualquier haz inducido en M a partir de una norma conocida en las fibras de N. Esto es, (1.3.4)

[1] La nomenclatura $J^s(\mathbb{F}|U)$ merece una explicación adicional: consideremos un haz vectorial suave $\mathbb{F}$ sobre M, $p \in U$ y (ϕ, U) una carta coordenada alrededor de p; tomemos un marco local $(E_1,\dots,E_l)$. Tomemos al subespacio de $C^\infty(\mathbb{F})$, denotado por $Z^k_p(\mathbb{F})$, como el conjunto de secciones tales que si $s = f_1E_1 + \cdots + f_lE_l$ (con $f_i \in C^\infty(M)$ para toda i), entonces $s \in Z^k_p(\mathbb{F})$ si y sólo si $D^\alpha f_i(p) = 0$ y $|\alpha| \le k$ ($\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ con enteros no negativos, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$ y $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_n}$). Así, llamaremos al cociente $J^k(\mathbb{F})_p = \frac{C^\infty(\mathbb{F})}{Z^k_p(\mathbb{F})}$ como el conjunto de los haces de jets de orden s ([Mukherjee(2015)] p. 227).

Lema 1. *([Schwarz(1995)], pp. 35-36) Sea $\psi : M \to N$ un difeomorfismo ente variedades con frontera, $\mathbb{F}$ un haz vectorial riemanniano sobre M con fibra F de dimensión m. Entonces, la norma en la fibra $|\cdot|_{J^s}$ sobre $\mathbb{F}$ es equivalente a la norma en la fibra sobre el haz inducido $\psi^*\mathbb{F}$,*

$$c|\psi^{\#}\sigma|^2_{J^s(\psi^*\mathbb{F})} \leq \psi * \left(|\sigma|^2_{J^2\mathbb{F}} \leq \right) \leq C|\psi^{\#}\sigma|^2_{J^s(\psi^*\mathbb{F})}$$

Corolario 1.2.3. *([Schwarz(1995)], p. 36) Sea $\psi : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades compactas y con fronteras no vacías, y $\mathbb{F}$ un haz vectorial riemanniano sobre M. Si $\sigma \in W^{s,p}(\Gamma(\mathbb{F}))$, entonces $\psi^{\#}\sigma \in W^{s,p}(\Gamma(\psi^*\mathbb{F}))$ y, además,*

$$c||\sigma||_{W^{s,p}(\Gamma(\mathbb{F}))} \leq ||\psi^{\#}||_{W^{s,p}\Gamma(\psi^*\mathbb{F})} \leq C||\sigma||_{W^{s,p}(\Gamma(\mathbb{F}))} \tag{1.33}$$

El siguiente teorema presenta tres de los resultados fundamentales de los espacios de Sobolev y nos referiremos a ellos sistemáticamente en lo sucesivo.

Teorema 1.2.4. *([Schwarz(1995)], p.37) Sea $\mathbb{F}$ un haz vectorial con métrica en la fibra $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbb{F}}$ sobre una variedad compacta y con frontera M, $(E_i)_{i=1}^n$ un marco local en $U \subset M$. Entonces*

a) Teorema de Meyers-Serrin:

Si $\sigma \in W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F}|U)$, y si $\nabla_j^k(\sigma) \in W^{s,p}$, entonces $\sigma \in W^{s+1,p}\Gamma(\mathbb{F}|U)$.

b) Lema de Encaje de Sobolev:

Para cualesquiera enteros $s \geq 0$ y $t > 0$, los siguientes encajes son continuos:

$$W^{s+t,p}\Gamma(\mathbb{F}|U) \hookrightarrow W^{s,q}\Gamma(\mathbb{F}|U) \quad \text{para todo} \quad p \leq q \leq \frac{np}{n-tq} \tag{1.34}$$

c) Lema de Rellich:

Si U es acotado, el encaje anterior es compacto, salvo en el caso $q = \frac{np}{n-tp}$.

El siguiente teorema refleja los resultados en torno a la noción de traza para los espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ ([Salsa(2008)]).

Teorema 1.2.5. *([Schwarz(1995)], p. 38) Sea M una ∂-variedad con frontera compacta ∂M y $\mathbb{F}$ un haz vectorial sobre M.*

a) El operador restricción, $\sigma \mapsto \sigma|_{\partial M}$, es una asignación compacta y continua de $W^{s+1,p}\Gamma(\mathbb{F})$ a $W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F}|_{\partial M})$.

b) Cada $\sigma_\partial \in W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F}|_{\partial M})$ admite una extensión $\widetilde{\sigma} \in W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F})$ tal que

$$||\widetilde{\sigma}||_{W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F})} \leq C||\sigma_\partial||_{W^{s,p}\Gamma(\mathbb{F}|_{\partial M})}. \tag{1.35}$$

Presentamos a continuación los espacios de Sobolev sobre el haz exterior de las formas diferenciales; el cual será nuestro objeto de estudio. Recordemos que la estructura riemanniana sobre M induce de manera natural una métrica en cada fibra y esta a su vez, induce una conexión riemanniana sobre las secciones $\Omega^k(M)$.

Definición 1.2.6. *([Schwarz(1995)], p. 39) Sea M una ∂-variedad riemanniana, y $\Lambda^k(M)$ el haz exterior de las k-formas. Denotemos por $\Omega_c^k(M) = \Gamma_c(\Lambda^k(M))$, al espacio de las formas diferenciales con soporte compacto sobre M. Equipemos a este espacio con un producto interior L^2*

$$\ll w, \eta \gg = \int_M w \wedge *\eta.$$

La métrica en la fibra correspondiente sobre $\Lambda^k(M)$ está dada por $\langle w, \eta \rangle_{\Lambda^k} \mu_M = w \wedge *\eta$. Los espacios de Sobolev $W^{s,p}\Omega^k(M)$, (con $1 \leq p < \infty$ y $s \in \mathbb{N}_0$), se definen al completar el espacio $\Omega_c^k(M)$ a partir de la familia de mapeos

$$|w|^2_{J^0(\Lambda)} = \langle w, w \rangle_{\Lambda^k} = \sum_{\sigma \in S(k,n)} \Big(w(E_{\sigma(1)}, \dots E_{\sigma(k)} \Big)^2$$

$$\text{y} \quad |w|^2_{J^s(\Lambda)} = |w|^2_{J^{s-1}(\Lambda)} + \sum_{1 \leq j \leq n} |\nabla_{E_j} w|^2_{J^{s-1}(\Lambda)},$$

y con la norma

$$||w||^p_{W^{s,p}} : \sum_{a \in A} \int_M \mathbb{F}_a |w|^p_{J^s(\Lambda)} \mu. \tag{1.36}$$

Recordemos que ∇ es la conexión de Levi-Civita inducida, $(E_i, \dots, E_n)$ un marco local y $(\mathbb{F}_a)_{a \in A}$una partición de la unidad. Denotaremos a los espacios $W^{0,p}\Omega^k(M)$ y $W^{s,2}\Omega^k(M)$ por $L^P\Omega^k(M)$ y $H^s\Omega^k(M)$, respectivamente.

Veamos cómo serán las extensiones de los operadores anteriormente definidos sobre $\Omega^k(M)$ en la clase de Sobolev. Los mapeos

$$d : W^{s+1,p}\Omega^k(M) \to W^{s,p}\Omega^{k+1}(M)$$

$$\delta : W^{s+1,p}\Omega^k(M) \to W^{s,p}\Omega^{k-1}(M),$$

son continuos. El operador de Hodge $* : W^{s,p}\Omega^k(M) \to W^{s,p}\Omega^{n-k}(M)$ es continuo y además es una isometría respecto a la norma $|| \cdot ||_{W^{s,p}}$,

$$|| * w||_{W^{s,p}} = ||w||_{W^{s,p}} \quad \forall w \in W^{s,p}\Omega^k(M)\ . \tag{1.37}$$

La desigualdad de Hölder también se generaliza si tomamos el producto natural en las formas diferenciales $\Omega^k(M)$.

Teorema 1.2.7. *Sean* $w \in L^p\Omega^k(M)$ *y* $\eta \in L^q\Omega^l(M)$*. Entonces la forma* $(w \wedge \eta)$ *pertenece a* $L^1\Omega^{k+l}(M)$*, y*

$$||(w \wedge \eta)||_{L^1} \leq ||w||_{L^p}||\eta||_{L^q}, \tag{1.38}$$

en donde $p > 1$ *y* p, q *son conjugados.*

También es posible extender el pullback entre las formas diferenciales, a partir del difeomorfismo $\psi : M \to N$, a la clase de Sobolev $W^{s,p}\Omega^k(M)$.

Lema 2. *([Schwarz(1995)], p. 41) Sea* $\psi : M \to N$ *un difeomorfismo entre* ∂*-variedades. Si* $w \in W^{s,p}\Omega^k(M)$*, entonces* $\psi^* w \in W^{s,p}\Omega^k(N)$ *y tenemos la siguiente estimación*

$$c||w||_{W^{s,p}\Omega^k(M)} \leq ||\psi^* w||_{W^{s,p}\Omega^k(N)} \leq C||w||_{W^{s,p}\Omega^k(M)}. \tag{1.39}$$

En la siguiente sección recordaremos y, posteriormente, tomaremos algunos elementos del análisis sobre los espacios de Banach. Éstos los vincularemos directamente con la clase de Sobolev $W^{s,p}\Omega^k(M)$; el vínculo estará dado por caracterizaciones en torno a ciertos encajes. Una noción primordial es la de Operador de Fredholm; el cual será el puente para presentar la dualidad entre un problema con valores en la frontera y los operadores diferenciales elípticos.

Primero atendamos a la definición de los espacios simétricos. Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach. Consideremos al encaje canónico $J : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**}$, definida por

$$J(x)(\phi) = \phi(x) \quad \phi \in \mathbb{B}^*, \quad x \in \mathbb{B}. \tag{1.40}$$

El mapeo J es una isometría lineal. Si el el mapeo J es sobreyectivo, decimos que $\mathbb{B}$ es un espacio reflexivo.

Definamos la noción de convergencia,

Definición 1.2.8. *Tomemos el espacio dual* $\mathbb{B}^*$ *y* $\mathcal{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$*, una funcional lineal. Decimos que la sucesión* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}$ *converge débilmente a* $x \in \mathbb{B}$ *si y sólo si*

$$\mathcal{F}(x_j - x) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{B}^* \text{y lo denotaremos por} \quad x_j \rightharpoonup x. \tag{1.41}$$

Lema 3. *([Schwarz(1995)], p. 47) Sea* $A : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *un operador compacto entre espacios de Banach,* $(x_j)_{j\in\mathbb{B}}$ *una sucesión que converge débilmente a* x *en* $\mathbb{B}_1$*. Entonces, existe una subsucesión* $(x_{j_k})_{j_k\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$Ax_{j_k} \to y \quad \text{fuertemente en} \quad \mathbb{B}_2$$

y $Ax = y$*.*

Lema 4. *([Schwarz(1995)], p. 48) Sea* $\mathbb{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{B}_2$ *un encaje compacto. Entonces cualquier sucesión acotada* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{B}_1$*, tiene una subsucesión convergente en* $\mathbb{B}_2$*.*

$$||x_k - y||_{\mathbb{B}_2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad con \quad y \in \mathbb{B}_1.$$

Lema 5. *(Desigualdad de Ehrling)([Schwarz(1995)], p. 48) Sean $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3$ espacios de Banach. Sea $A : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ un mapeo compacto, y $B : \mathbb{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{B}_3$ un encaje continuo. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$, tal que*

$$||Ax||_{\mathbb{B}_1} \leq \epsilon ||x||_{\mathbb{B}_1} + C_\epsilon ||x||_{\mathbb{B}_3} \quad \forall x \in \mathbb{B}_1. \tag{1.42}$$

1.2.9. Espacios Complementados y Operadores de Fredholm

Definición 1.2.10. *Sea $\mathbb{D}$ un subespacio cerrado de $\mathbb{B}$ espacio de Banach. entonces decimos que $\mathbb{D}$ es complementado (o escindido) si y sólo si existe un subespacio cerrado $\widehat{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$, tal que*

$$\mathbb{B} = \mathbb{D} \oplus \widehat{\mathbb{D}}.$$

. (1.5.5)

Teorema 1.2.11. *([Schwarz(1995)], p. 55) Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $\mathbb{D}$ un subespacio. Entonces $\mathbb{D}$ es complementado si cualquiera de las dos cosas siguientes ocurre*

1. *$\mathbb{D}$ es finito dimensional.*

2. *$\mathbb{B}$ es cerrado y tiene co-dimensión finita (i.e. $\operatorname{codim}\mathbb{D} = \dim(\mathbb{B}/\mathbb{D}) < \infty$).*

Lema 6. *([Schwarz(1995)], p. 50) Sea $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$ un subespacio cerrado y $\pi : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ una función lineal. Entonces, $\mathbb{D}$ es complementado si y sólo si*

1. *π es una proyección sobre $\mathbb{D}$; es decir $\mathbb{B} = \{u = \pi x | x \in \mathbb{B}\}$,*

2. *π es continua, i.e. ($||\pi(x)||_{\mathbb{B}} \leq C||x||_{\mathbb{B}}$).*

Definición 1.2.12. *Sean $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ espacios de Banach, y $A : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_1$ un operador lineal, entonces decimos que A es de Fredholm si y sólo si su imagen, $\operatorname{Im}(A)$, es cerrada y su kernel $\operatorname{Ker}(A)$ y co-kernel $\operatorname{Coker}(A)$ son finito dimensionales. Definimos el índice de Fredholm como*

$$\operatorname{Ind}(A) = \dim \operatorname{Ker}(A) - \dim \operatorname{coKer}(A).$$

La siguiente proposición será fundamental en la descomposición de Hodge.

Proposición 3. *([Schwarz(1995)], p. 51) Sea $A : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ un operador de Fredholm, y $\mathbb{B}_3$ un espacio de Banach tal que $\mathbb{B}_1 \hookrightarrow \mathbb{B}_3$ sea un encaje continuo. Entonces, existe un subespacio cerrado $\widehat{\mathbb{D}}_1 \subset \mathbb{B}_1$ con la propiedad $\mathbb{B}_1 = \operatorname{Ker}(A) \oplus \widehat{\mathbb{D}}_1$, y además se tienen las siguientes desigualdades*

$$||\widehat{x}||_{\mathbb{B}_1} \leq \widehat{C}||A(\widehat{x})||_{\mathbb{B}_2} \quad \forall \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{D}}_1. \tag{1.43}$$

$$||x||_{\mathbb{B}_1} \leq C\big(||A(x)||_{\mathbb{B}_2} + ||x||_{\mathbb{B}_3}\big) \quad \forall x \in \mathbb{B}_1. \tag{1.44}$$

Finalizamos con la definición de $\mathbb{H}$-elipticidad para un operador bilineal.

Definición 1.2.13. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ un operador bilineal. Decimos que $\mathcal{A}$ es $\mathbb{H}$-elíptico si y sólo si existen constantes c y C, tales que se da la siguiente desigualdad*

$$c||x||^2_{\mathbb{H}} \leq \mathcal{A}(x,x) \leq C||x||^2_{\mathbb{H}}. \tag{1.45}$$

Los siguientes dos teoremas son básicos en los espacios de Hilbert. La idea, siguiendo a Schwarz es probar el teorema de Stokes para la clase $W^{1,1}$ y de allí llegar a la descomposición para los espacios L^2.

Teorema 1.2.14. *(Riesz)([Schwarz(1995)], p. 51) Sobre un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, existe para cada funcional lineal acotada $\mathcal{F} \in \mathbb{H}^*$ un único elemento $z_{\mathcal{F}} \in \mathbb{H}$ tal que*

$$\mathcal{F}(y) = \ll z_{\mathcal{F}}, y \gg \quad \forall y \in \mathbb{H} \quad \text{y} \quad ||\mathcal{F}|| = ||z_{\mathcal{F}}||_{\mathbb{H}}.$$

Como consecuencia del teorema de representación de Riesz tenemos el siguiente

Corolario 1.2.15. *(Lax-Milgram)([Schwarz(1995)], p. 52) Si $\mathcal{A} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{H}$-elíptico, entonces existe para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{H}^*$ una $z \in \mathbb{H}$ tal que*

$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{A}(z,y) \quad \forall y \in \mathbb{H}.$$

1.3. Tres Teoremas importantes: Stokes, Green y Gaffney

De acuerdo con Schwarz, el teorema fundamental que vincula la parte analítica de nuestro estudio con la topológica es el teorema de Stokes. En esta sección se presentará el Teorema de Stokes para la clase de Sobolev $W^{1,1}$; teorema que será suficiente para presentar la fórmula de Green. La integral de Dirichlet se definirá y se finalizará con la desigualdad de Gaffney. Para ser preciso en la formulación del teorema de Stokes para n-formas diferenciales de la clase de Sobolev $W^{1,1}$ es necesario definir la integración de dichas n-formas en dicha clase. La construcción a este hecho es la siguiente: Tomemos una sucesión $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en el espacio $\Omega^n_c(M)$ que converja a η con la norma en $W^{s,1}$ $(1 < s \leq \infty)$,

$$|\int_M (\eta_i - \eta_j)| \leq \int_M |*\eta_i - *\eta_j|\mu = ||\eta_i - \eta_j||_{1\Omega^k(M)}.$$

Lo anterior muestra que la sucesión (η_j) es de Cauchy y está acotada; por tanto, el límite existe. Así definimos a la integral para $\eta \in W^{s,1}\Omega^n(M) \subset L^1\Omega^k(M)$ por

$$\int_M \eta := \lim_{j\to\infty} \int_M \eta_j.$$

Proposición 4. *([Schwarz(1995)], p. 60) El teorema de Stokes sobre una variedad con frontera compacta es válido para* $w \in W^{1,1}$

$$\int_M dw = \int_{\partial M} j^* w \quad \text{para todo } w \in W^{1,1}\Omega^{n-1}(M).$$

Proposición 5. *(Fórmula de Green) Sean* $w \in W^{1,p}\Omega^{k-1}(M)$ *y* $\eta \in W^{1,q}\Omega^{k}(M)$ *formas diferenciales sobre una variedad con frontera* M*,* p *y* q *conjugados. Entonces,*

$$\ll dw, \eta \gg = \ll w, \delta\eta \gg + \int_{\partial M} \mathbf{t}w \wedge *\mathbf{n}\eta. \tag{1.46}$$

Como corolario tenemos

Corolario 1.3.1. *([Schwarz(1995)], p.61)*

a) Sean $w \in W^{1,p}\Omega^{k-1}(M)$ *y* $\eta \in W^{1,q}\Omega^{k+1}(M)$*. Entonces*

$$\ll dw, \delta\eta \gg = 0 \quad , \tag{1.47}$$

si o bien w *cumple que* $\mathbf{t}w = 0$ *y* η *es arbitraria; o bien,* η *satisface* $\mathbf{n}\eta = 0$*, con* w *arbitraria.*

b) Sea $\xi \in W^{1,1}\Omega^1(M)$ *tal que* $\xi(\mathcal{N}) \in L^1\Omega^0(\partial M)$*. Entonces,*

$$\int_M (\delta\xi\mu) = -\int_{\partial M} \xi(N)\mu_\partial. \tag{1.48}$$

Ahora estamos en posición de presentar a la integral de Dirichlet que está íntimamente relacionada con los operadores elípticos sobre $\Omega^k(M)$.

Definición 1.3.2. *Fijemos el espacio* $W^{1,2}\Omega^k(M) = H^1\Omega^k(M)$*. Entonces la integral de Dirichlet se define como la forma bilineal siguiente*

$$\begin{aligned} &\mathcal{D} : H^1\Omega^k(M) \times H^1\Omega^k(M) \to \mathbb{R} \\ &D(w,\eta) = \ll dw, d\eta \gg + \ll \delta w, \delta\eta \gg . \end{aligned}$$

El siguiente corolario nos permite asociar a la integral de Dirichlet con el Operador de Laplace-Beltrami.

Corolario 1.3.3. *([Schwarz(1995)], p.62) Para toda* $w \in H^2\Omega^k(M)$ *y* $\eta \in H^1\Omega^k(M)$*,la integral de Dirichlet* $\mathcal{D}(w,\eta)$ *se puede representar como sigue*

$$\mathcal{D}(w,\eta) = \ll \Delta w, \eta \gg + \int_{\partial M} \mathbf{t}\eta \wedge *\mathbf{n}dw - \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta w \wedge *\mathbf{n}\eta. \tag{1.49}$$

Existe una forma de relacionar a la integral de Dirichlet con la norma en H^1. Este vínculo depende del tensor de curvatura definido en M y la segunda forma fundamental de la frontera $\partial M \subset M$.

Corolario 1.3.4. *(Desigualdad de Gaffney) ([Schwarz(1995)], p. 66) Sea M una variedad compacta y con frontera, y $w \in H^1\Omega^k(M)$ tal que $\mathbf{t}w = 0$. Entonces, existe una constante $C_G > 0$, que depende sólo de la geometría de M tal que*

$$||w||^2_{H^1} \leq C_G\big(\mathcal{D}(w,w) + ||w||^2_{L^2}\big). \tag{1.50}$$

Tenemos el resultado análogo para las formas diferenciales con componente normal nula $\mathbf{n}w = 0$.

Teorema 1.3.5. *([Schwarz(1995)], p. 66) Sea M una ∂-variedad, y $w \in H^1\Omega^k(M)$, tal que $\mathbf{n}w = 0$.*

a) Existe un endomorfismo de haz $\mathcal{S} \in \mathrm{End}(\Lambda^k(M)|_{\partial M})$ tal que

$$||w||^2_{H^1} = ||w||^2_{L^2} + \ll \mathcal{R}^W * w, *w \gg + \mathcal{D}(W,w) + \int_{\partial M} \langle \mathcal{S} * w, *w\rangle\,|_{\Lambda^k}\mu_\partial. \tag{1.51}$$

b) Si M es compacta, existe una constante C_G, que depende sólo de la geometría de M tal que,

$$||w||^2_{H^1} \leq C_G\big(\mathcal{D}(w,w) + ||w||^2_{L^2}\big). \tag{1.52}$$

Capítulo 2

Símbolos Principales

La teoría sobre los operadores diferenciales es, en sí misma, un campo de estudio [Melrose(2007), van den Ban y Marius Crainic(2009)]. En este capítulo se presentan las definiciones de *operador diferencial* y la del *símbolo principal* de un operador diferencial; primero se definirá sobre aquellos operadores que tienen como dominio un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, para después llevarlos a operadores que actúan sobre secciones de haces vectoriales. Al final, se calculan los símbolos principales de los operadores derivada exterior, derivada covariante y el operador de Laplace-Beltrami. El cálculo de estos símbolos, es un elemento fundamental en el desarrollo de este escrito, debido a que una vez calculados tenemos las herramientas para la construcción de la elipticidad en un problema con valores en la frontera [Wloka(1995)].

De acuerdo con Glenys Luke y Alexander S. Mishchenko, la teoría de los haces vectoriales adquiere una relevancia mayor en la teoría de los operadores elípticos [Luke(2013)]. Así mismo, para Richard Melrose, los problemas con valores en la frontera elípticos surgen de que los operadores diferenciales definidos en una variedad con frontera tienen espacios nulos de dimensión infinita. El propósito del *analista* es parametrizar estos espacios en términos de valores en la frontera de operadores diferenciales elípticos en una variedad con frontera [Melrose(2007)].

2.1. Observaciones en torno a la diferenciabilidad

La siguiente construcción de los operadores diferenciales y sus símbolos sigue las exposiciones de Richard Melrose, sobre la parte de funciones suaves, y van den Ban, en la construcción de los operadores diferenciales y sus símbolos. Existes dos maneras equivalentes para hablar sobre la diferenciabilidad local de funciones definidas en variedades con frontera; Melrose las denomina construcción intrínseca y extrínseca, y dependen de cómo se han construido las variedades con frontera [Melrose(2007)]. En el primer capítulo se habló de la primera, la intrínseca. Recordemos que dado un abierto $O \subset \mathbb{R}^{n,1} = [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$, entonces definimos el siguiente conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\infty(O) :=& \{u : O \to \mathbb{R}| \quad \exists \widetilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{O}), \\ & \widetilde{O} \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto}, \quad O = \widetilde{O} \cap \mathbb{R}^{n,1}, u = \widetilde{u}|_O\}\end{aligned}$$

El abierto O dependerá de la función u. Las derivadas para $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{O})$ son acotadas sobre cualquier compacto $K \subset O^\circ$. Por tanto,

$$\sup_{K \subset O^\circ} |D^\alpha u| < \infty, \quad O^\circ = O \cap ((0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.1}$$

Para la segunda, la extrínseca, simplemente definimos al conjunto

$$C^\infty(O) = \{u : O \to \mathbb{R}\} \supset \{u| \quad \sup_{K \subset O^\circ} |D^\alpha u| < \infty \quad \forall K \subset O^\circ \quad \text{y para toda} \quad \alpha\}.$$

Ambas construcciones son equivalentes, de acuerdo con Melrose. Una vez que tenemos suavidad local, la noción global de suavidad será la siguiente,

Definición 2.1.1. *Sea M una variedad con frontera, entonces*

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{u : M \to \mathbb{R}; \quad (\Phi^{-1})^*(u|_U) \in \mathcal{C}^\infty(O) \quad \text{para toda carta coordenada}\}. \tag{2.2}$$

Podemos dotar de una topología al espacio $\mathcal{C}^\infty$, simplemente tomamos la norma del supremo de las derivadas en coordenadas locales. Una seminorma puede definirse sobre cada subconjunto compacto de cada carta coordenada,

$$\sup_{K \subset O} |D^\alpha (\Phi{-}1)^*(u|U)|. \tag{2.3}$$

La importancia de la segunda construcción radica en que el concepto de operador diferencial, puede entenderse como la restricción de operadores definidos en la suma conexa de una variedad con frontera. Una exposición extensa se encuentra en ([Melrose(2007)], cap. 8).

Por ejemplo, si M es compacta, ∂M también lo será y es posible definir a la frontera mediante una función $\rho \in \mathcal{C}^\infty$: tomemos a $\rho \geq 0$, entonces $\partial M = \{x \in M | \rho(x) = 0, \quad T_x\rho \neq 0\}$. Al ser compacta, el teorema del collar, juega un papel importante, pues es posible dar una descomposición producto de M cerca de ∂M:

$$\exists C \subset \partial M, \text{abierto en} M \quad , \quad \epsilon > 0 \quad \text{y un difeomorfismo} \quad \phi : C \cong [0,\epsilon)_\rho \times \partial M \tag{2.4}$$

Esta descomposición producto de la variedad cerca de la frontera nos permite construir la suma doble siguiente

$$\widetilde{M} = (M \cup M)/\partial M, \tag{2.5}$$

para dos copias ajenas de M; es decir, la unión disjunta de dos copias de M al identificar los puntos en la frontera. Sobre $\widetilde{M}$ es posible también definir a las funciones suaves,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\infty(\widetilde{M}) :=\{&(u_1,u_2)\in\mathcal{C}^\infty(M)\oplus\mathcal{C}^\infty(M);\\ &(\phi^{-1})^*(u_1|_M)=f(\rho,\cdot),\quad (\phi^{-1})^*(u|_M)=f(-\rho,\cdot),\\ &f\in\mathcal{C}^\infty((-1,1)\times\partial M)\}.\end{aligned}$$

$M\hookrightarrow\widetilde{M}$ es un encaje como una variedad con frontera tal que

$$\mathcal{C}^\infty(M)=\mathcal{C}^\infty(\widetilde{M})|_M.$$

Esta definición, señala Melrose, implica que existe una función de restricción

$$\mathcal{C}^\infty(M)\ni u\mapsto u|_{\partial M}\in\mathcal{C}^\infty(\partial M). \tag{2.6}$$

La principal observación que debemos tomar en cuenta es que podemos pensar a $\mathcal{C}^\infty(M)\subset\mathcal{C}^\infty(M^\circ)$ como un subespacio de las funciones suaves definidas en el interior de M, las cuales describen una *completación* del interior a una variedad con frontera. Así,

"*It is in this sense that the action of a differential operator* $P\in Diff^m(M)$

$$P:\mathcal{C}^\infty(M)\to\mathcal{C}^\infty(M)$$

should be understood. Thus P *is just a differential operator on the interior of* M *with coefficients smooth up to the boundary"* [Melrose(2007)]. Una vez vista la noción de diferenciabilidad, en la siguiente sección se comenzarán a construir a los operadores diferenciales.

Con las anteriores observaciones, las nociones de operador diferencial y su símbolo se describirán en las secciones subsecuentes.

2.2. Operadores diferenciales sobre subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

En esta sección se presentan dos nociones centrales para este trabajo: los operadores diferenciales y sus símbolos. Seguiremos la exposición de Van der Ban [van den Ban y Marius Crainic(2009)], exposición que estratifica a distintos niveles la noción de operador diferencial.

Una de las notaciones que utilizaremos es la de multiíndices. Sean $x\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$, entonces tenemos que $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $x=(x_1,\ldots,x_n)$, tenemos entonces las siguientes notaciones:

$$|\alpha|:=\sum_{j=1}^n\alpha_j;\quad \alpha!:=\prod_{j=1}^n\alpha_j. \tag{2.7}$$

Si tomamos $\beta \in \mathbb{N}^n$, decimos que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha_j \leq \beta_j$, para toda $1 \leq j \leq n$. Así, si tenemos que $\alpha \leq \beta$, definimos

$$\binom{\beta}{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i}. \tag{2.8}$$

Además, si definimos $\partial_j := \partial/\partial x_j$, se tiene que

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \quad \text{y} \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \tag{2.9}$$

es decir, podemos hablar de derivadas parciales de distinto orden. Un lema auxiliar es el siguiente:

Lema 7. *([Saunders(1989)], pp. 192-193)*
Sean $f, g \in C^\infty(U)$, $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\partial^\alpha(fg)\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g. \tag{2.10}$$

Definición 2.2.1. *Un operador diferencial de orden $\leq k \in \mathbb{N}$ sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, es un endomorfismo $P \in \operatorname{End}(C^\infty(U))$ de la forma*

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x)\partial^\alpha, \tag{2.11}$$

con $c_\alpha \in C^\infty(U)$ para toda α. El espacio de todos los operadores diferenciales sobre U de orden $\leq k$ se denotará por $\mathcal{D}_k(U)$ y

$$\mathcal{D}(U) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_k(U).$$

Una propiedad interesante es que si tenemos dos operadores diferenciales $A \in \mathcal{D}_k(U)$ y $B \in \mathcal{D}_l(U)$, la composición $A \circ B \in \mathcal{D}_{k+l}(U)$. Ahora estamos en posición de definir el símbolo de un operador.

Definición 2.2.2. *Sean $U \in \mathbb{R}^n$ y $P \in \mathcal{D}(U)$, tal que $P = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x)\partial^\alpha$. Entonces, a la función $\sigma(P) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida mediante la regla*

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha, \tag{2.12}$$

se le llama el símbolo total del operador P.

Una definición equivalente, y mucho más fácil de operar es vía la siguiente construcción: Identifiquemos a ξ con la funcional lineal $(x) \underset{\mathcal{F}}{\to} \sum_j \xi_j x_j$, y a la función $e^{i\xi}$ por la función $x \mapsto e^{i\xi \cdot x}$. Entonces,

$$\sigma(P)(x,\xi) = e^{-i\xi\cdot x}P(e^{i\xi\cdot x})(x). \tag{2.13}$$

Veamos que estas definiciones son equivalentes: Tomemos $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$, y $P \in \mathcal{D}_k(U)$, entonces tenemos la representación $P = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)\partial^\alpha$ en el abierto U. Así,

$$\begin{aligned} P(e^{i\xi\cdot x}) &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)\partial^\alpha(e^{i\xi\cdot x}) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n}(e^{i\xi\cdot x}) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)(i\xi_1)^{\alpha_1}\dots(i\xi_n)^{\alpha_n}e^{i\xi\cdot x} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha e^{i\xi\cdot x}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente, multipliquemos a $P(e^{i\xi\cdot x})$ por la función $e^{-i\xi\cdot x}$:

$$\begin{aligned} e^{-i\xi\cdot x}P(e^{i\xi\cdot x}) &= e^{-i\xi\cdot x}\left(\sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha e^{i\xi\cdot x}\right) \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot x}e^{i\xi\cdot x} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha \\ &= \sigma(P)(x,\xi). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Es decir, estamos identificando a ξ como una variable en el espacio dual de $\mathbb{R}^n$ y $U \times \mathbb{R}^n$ se identificará con el haz cotangente T^*U; según van der Ban, éste es un punto clave cuando se hable sobre el símbolo de un operador diferencial sobre variedades. Finalmente, la noción que nos interesa es la siguiente:

Definición 2.2.3. *(Símbolo Principal) El símbolo principal de orden k de un operador $P \in \mathcal{D}_k(U)$ de la forma $\sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha(x)\partial^\alpha$ es la función $\sigma_k(P) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\sigma_k(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha(x)(i\xi)^\alpha. \tag{2.16}$$

El símbolo de un operador es una noción local. Lo que debemos asegurar es que el símbolo principal no depende de las cartas coordenadas; primero mostraremos el lema siguiente que caracteriza el símbolo principal de un operador diferencial.

Lema 8. *([van den Ban y Marius Crainic(2009)]) Sea $P \in \mathcal{D}_k(U)$. Tomemos $x \in U$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $f(x) = 1$ y sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ con la propiedad de que $d\phi(x) := (\partial_1\phi(x), \ldots, \partial_n\phi(x)) = \xi$. Entonces,*

$$\sigma_k(P)(x, \xi) := \lim_{t\to\infty} t^{-k} e^{-it\phi(x)} P(e^{it\phi} f)(x). \tag{2.17}$$

Sea $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo. Si tomamos el pulback $h^* : \mathcal{C}^\infty(\widetilde{U}) \to \mathcal{C}^\infty(U)$, tenemos la siguiente función $h_* : \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(U)) \to \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(\widetilde{U}))$, dada por

$$h_*(T) = h^{*-1} \circ T \circ h^*.$$

Así, el difeomorfismo h induce el levantamiento siguiente sobre el haz cotangente $T^*h : T^*U \to T^*\widetilde{U}$, dado por

$$T^*h(x, \xi) = (h(x), \xi T_x h^{-1}).$$

Finalmente, tenemos a la función $h_* : \mathcal{C}^\infty(T^*U) \to \mathcal{C}^\infty(T^*\widetilde{U})$, dado por $h_*\sigma = \sigma \circ (T^*h)^{-1}$. Entonces,

$$h_*\sigma(x, \xi) = \sigma(h^{-1}(x), \xi \circ T_x h).$$

El siguiente lema nos asegura que el símbolo principal es natural respecto al mapeo dual.

Lema 9. *([van den Ban y Marius Crainic(2009)], p.8) $h_* : \mathcal{D}(U) \to \widetilde{\mathcal{U}}$, es una biyección. Además, para todo $P \in \mathcal{D}_k(U)$,*

$$\sigma_k(h_*(P)) = h_*(\sigma_k(P)).$$

Para variedades, tenemos la siguiente definición de operador diferencial.

Definición 2.2.4. *Sea M suave. Un operador diferencial de orden a lo más k sobre M es un operador lineal $P \in \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(M))$ si y sólo si, para cada $x \in M$ existe una carta coordenada (U, ϕ) en torno a x y un operador diferencial $P_\phi \in \mathcal{D}_k(\phi(U))$, tal que*

$$\phi^{-1*}(Pf|_U) = P_\phi(\phi^{-1*}(f|_U)) \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M). \tag{2.18}$$

Al espacio de los operadores diferenciales sobre M de orden a lo más k los denotaremos por $\mathcal{D}_k(M)$.

El siguiente lema nos permitirá extender la noción de símbolo de un operador sobre variedades.

Lema 10. *([van den Ban y Marius Crainic(2009)] Sea $P \in \mathcal{D}_k(M)$. Entonces, existe una única función $\sigma_k(P) : T^*M \to \mathbb{C}$ con la siguiente propiedad. Para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$*

$$\sigma_k(P)(x, d\phi(x))f(x) := \lim_{t\to\infty} t^{-k} e^{-it\phi(x)} P(e^{it\phi} f)(x). \tag{2.19}$$

La función $\sigma_k(P)$ es suave; y para cada $x_0 \in M$ fija, la función $\xi \mapsto \sigma_k(P)(x_0, \xi)$ es un polinomio de grado k. A la función $\sigma_k(P)$ la llamaremos el símbolo principal de orden k del operador P.

2.3. Operador diferencial y símbolo sobre haces vectoriales

Para proponer las definiciones de los operadores diferenciales y sus símbolos en haces vectoriales, necesitamos de un paso adicional: habrá que definirlo en un primer momento sobre haces triviales.

Sean $E = U \times E_0$ y $F = U \times F_0$ haces vectoriales triviales, con carta coordenada (U, x). Tenemos las siguientes identificaciones $\Gamma^\infty(U, E) \cong \mathcal{C}^\infty(U, E_0)$ y $\Gamma^\infty(U, F) \cong \mathcal{C}^\infty(U, F_0)$. Un operador diferencial de orden a lo más k de E a F es un mapeo lineal de la forma $P : \Gamma^\infty(U, E) \cong \mathcal{C}^\infty(U, E_0) \to \Gamma^\infty(U, F) \cong \mathcal{C}^\infty(U, F_0)$ de la forma

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} \mathcal{C}_\alpha \partial^\alpha,$$

con $C_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathrm{Hom}(E_0, F_0))$, con $\Psi : U \to \mathrm{GL}(E_0)$ un mapeo suave.

Recordemos algunos mapeos importantes. Tomemos dos isomorfismos $\varphi_E : E \to E$ y $\varphi_F : F \to F$ entre haces vectoriales triviales sobre U. Entonces, $\varphi_E(x, v) = (x, \Phi_E(x)v)$ y $\varphi_F(x, v) = (x, \Phi_F(x)v)$. Ambos mapeos inducen isomorfismos lineales $\varphi_{E*} : \Gamma^\infty(U, E) \to \Gamma^\infty(U, E)$ y $\varphi_{F*} : \Gamma^\infty(U, F) \to \Gamma^\infty(U, F)$, definidas por $\varphi_{E*} \circ s = \varphi_E \circ s$, y $\varphi_{F*} \circ s = \varphi_F \circ s$, respectivamente. Finalmente, tenemos el isomorfismo lineal $\varphi_* : \mathrm{Hom}(\Gamma^\infty(U, E)) \to \Gamma^\infty(U, F)$, dado por

$$\varphi_*(T) = \varphi_{F*} \circ T \circ \varphi_{F*}^{-1}. \tag{2.20}$$

Definición 2.3.1. *(Operador diferencial en haces vectoriales) Sean E, F haces vectoriales suaves sobre M.*

a) Sea U una carta coordenada en donde los haces E y F son triviales, un operador diferencial de orden a lo más k entre $E|_U$ y $F|_U$ es una transformación lineal $P : \Gamma^\infty(U, E) \to \Gamma^\infty(U, F)$ tal que para cualquier trivialización $\tau_E : E|_U \to U \times E_0$ y $\tau_F : F|_U \to U \times F_0$. El mapeo $\tau_*(P) := \tau_{F*} \circ P \circ \tau_{E*}$ es un operador diferencial de orden a lo más k de $U \times E_0$ a $U \times F_0$.

b) Sean E y F haces vectoriales arbitrarios. Un operador diferencial de orden a lo más k de E a F es un operador lineal $P : \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(F)$, tal que para toda $x \in M$, existe una carta de coordenada, en donde son triviales E y F, y un operador diferencial $P_U : E|_U \to F|_U$ de orden a lo más k, tal que

$$Ps|_U = P_U(s|_U) \quad \text{para toda} \quad s \in \Gamma^\infty(E). \tag{2.21}$$

Denotaremos por $\mathcal{D}_k(E, F)$ al espacio de los operadores diferenciales de orden a lo k de E a F.

Finalmente, el siguiente lema nos permitirá extender la definición del símbolo principal en haces vectoriales. Y usaremos la noción de haz inducido definido en la sección 1.1.12. Sea $\pi : T^*M \to M$ la proyección canónica y $\pi^*(E)$ y $\pi^*(F)$ los haces inducidos, con base en T^*M, a partir de los haces vectoriales E y F. Entonces,

Lema 11. *([van den Ban y Marius Crainic(2009)])*

Sean E, F haces vectoriales sobre M y $P \in \mathcal{D}_k(E,F)$. Existe una única sección $\sigma_k(P) : T^*M \to \pi^*(\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\pi^*E, \pi * F) = \mathcal{C}^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$ con la siguiente propiedad. Para toda $x_0 \in M$, $s \in \Gamma^\infty(E)$ y $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\sigma_k(P)(x_0, d\phi(x))s(x_0) := \lim_{t\to\infty} t^{-k} e^{-it\phi(x_0)} P(e^{it\phi}s)(x_0), \tag{2.22}$$

en donde $\underline{\mathrm{Hom}}(E,F)$ es el haz vectorial cuya fibra en $p \in M$ es $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_p, F_p)$ y tienen la trivialización local siguiente: sean $U \subset M$ y $\tau_F : F_U \to \mathbb{C}^k$ y $\tau_E : E_U \to \mathbb{C}^l$ trivializaciones locales para F y E, respectivamente, entonces

$$\tau_U : \underline{\mathrm{Hom}}(E,F)_U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l), \tag{2.23}$$

está dado por $\tau_p(T) = (\tau_F)_p \circ T \circ (\tau_E)_p^{-1}$.

2.4. Los cálculos

En el primer capítulo se presentaron los operadores diferenciales que actúan sobre las formas diferenciales; en esta sección se darán las descripciones, locales, para cada uno de aquellos. Usaremos estas descripciones para demostrar la elipticidad del problema con valores en la frontera que nos interesa, el cuál está definido en el capítulo siguiente.

2.4.1. Expresiones de los operadores

En esta sección se calculan las expresiones para el operador de Laplace-Beltrami. Sea $\{e_i\}_{i=1}^p$ un marco g-ortonormal M, y $w \in \Omega^p(TM)$, dados; tomemos $(X_0, X_1, \ldots, X_p)$ campos vectoriales arbitrarios,

1. Cálculo para $d\delta$.

$$\begin{aligned}
d\delta w(X_1,\ldots,X_p) &= (-1)^{k-1}(\nabla_{X_k}\delta w)(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,x_p)\\
&= (-1)^{k-1}D\big[\delta w(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,x_p)\big](X_k)\\
&\quad -\sum_j(-1)^{k-1}\delta w(X_1,\ldots,\nabla_{X_k}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\\
&= (-1)^{k-1}D\big[(-\mathbf{i}_{e_i}\nabla_i w)(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,x_p)\big](X_k)\\
&\quad -\sum_j(-1)^{k-1}(-\mathbf{i}_{e_i}\nabla_i w)(X_1,\ldots,\nabla_{X_k}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\\
&= -(-1)^{k-1}D\big[(\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))\big](X_k)\\
&\quad +\sum_j(-1)^{k-1}(\nabla_{e_i}w)(e_i,\ldots,\nabla_{X_k}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\\
&= (-1)^k(\nabla_{X_k}\nabla_{e_i}w)(e_1,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))).
\end{aligned}\tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
d\delta w(X_1,\ldots,X_p) &= (-1)^{k-1}(\nabla_{X_k}\delta w)(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,x_p)\\
&= (-1)^{k-1}D\big[\delta w(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,x_p)\big](X_k)\\
&\quad -\sum_j(-1)^{k-1}\delta w(X_1,\ldots,\nabla_{X_k}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\\
&= (-1)^{k-1}D\big[(-\mathbf{i}_{e_i}\nabla_i w)(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,x_p)\big](X_k)\\
&\quad -\sum_j(-1)^{k-1}(-\mathbf{i}_{e_i}\nabla_i w)(X_1,\ldots,\nabla_{X_k}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\\
&= -(-1)^{k-1}D\big[(\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))\big](X_k)\\
&\quad +\sum_j(-1)^{k-1}(\nabla_{e_i}w)(e_i,\ldots,\nabla_{X_k}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\\
&= (-1)^k(\nabla_{X_k}\nabla_{e_i}w)(e_1,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))).
\end{aligned}$$

con

a)

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)) &= \sum_i (\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)) \\
&= \sum_i D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\big](e_i) \\
&\quad - \sum_i \sum_{i,1\le s\le p} w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,\nabla_{e_i}X_s,\ldots,X_p). \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&D\big[(\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))\big](X_k) = \\
&= D\big[\sum_i (\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))\big](X_k) \\
&= D\Bigg[\sum_i D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\big](e_i) \\
&- \sum_i \sum_{i,1\le s\le p} w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,\nabla_{e_i}X_s,\ldots,X_p)\Bigg](X_k) \\
&= \sum_i D\Big[D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\big](e_i)\Big](X_k) \\
&- \sum_i \sum_{i,1\le s\le p} D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,\nabla_{e_i}X_s,\ldots,X_p)\big](X_k). \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D\big[(\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))\big](X_k) &= D\big[\sum_i (\nabla_{e_i}w)(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p))\big](X_k) \\
&= D\Bigg[\sum_i D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\big](e_i) \\
&\quad - \sum_i \sum_{i,1\le s\le p} w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,\nabla_{e_i}X_s,\ldots,X_p)\Bigg](X_k) \\
&= \sum_i D\Big[D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_p)\big](e_i)\Big](X_k) \\
&\quad - \sum_i \sum_{i,1\le s\le p} D\big[w(e_i,X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,\nabla_{e_i}X_s,\ldots,X_p)\big](X_k).
\end{aligned}
$$

b) De manera análoga,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{e_i} w)(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i} w)(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p) \\
&= \sum_i D\big[w(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)\big](e_i) \\
&- \sum_i \sum_{i, 1 \le r \le p} w(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \nabla_{e_i} X_r, \ldots, X_p).
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
d\delta w(X_1, \ldots, X_p) &= -(-1)^{k-1} D\big[(\nabla_{e_i} w)(e_i, X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p))\big](X_k) \\
&\quad + \sum_j (-1)^{k-1} (\nabla_{e_i} w)(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p) \\
&= \sum_k -(-1)^{k-1} \sum_i D\big[D\big[w(e_i, X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)\big](e_i)\big](X_k) \\
&\quad - \sum_{k,i} \sum_{i, 1 \le s \le p} D\big[w(e_i, X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \nabla_{e_i} X_s, \ldots, X_p)\big](X_k) \\
&\quad + \sum_{k,j} (-1)^{k-1} \sum_i D\big[w(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)\big](e_i) \\
&\quad - \sum_{k,j,i} \sum_{i, 1 \le r \le p} w(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \nabla_{e_i} X_r, \ldots, X_p).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\delta w(X_1, \ldots, X_p) &= -(-1)^{k-1} D\big[(\nabla_{e_i} w)(e_i, X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p))\big](X_k) \\
&\quad + \sum_j (-1)^{k-1} (\nabla_{e_i} w)(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p) \\
&= \sum_k -(-1)^{k-1} \sum_i D\big[D\big[w(e_i, X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)\big](e_i)\big](X_k) \\
&\quad - \sum_{k,i} \sum_{i, 1 \le s \le p} D\big[w(e_i, X_1, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \nabla_{e_i} X_s, \ldots, X_p)\big](X_k) \\
&\quad + \sum_{k,j} (-1)^{k-1} \sum_i D\big[w(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, X_p)\big](e_i) \\
&\quad - \sum_{k,j,i} \sum_{i, 1 \le r \le p} w(e_i, \ldots, \nabla_{X_k} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots, \nabla_{e_i} X_r, \ldots, X_p).
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

El primer término de la última expresión en (2.28) corresponde a una derivada covariante de segundo orden; mientras que el resto de los términos involucran derivadas de orden uno.

2. Cálculo para δdw:

$$
\begin{aligned}
\delta dw(X_1,\ldots,X_p) &= -(\nabla_{e_i} dw)(e_i, X_1,\ldots,X_p) \\
&= -D\big[dw(e_i, X_1,\ldots,X_p)\big](e_i) + \sum_j dw(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,X_p) \\
&= -D\big[\sum_k (-1)^k (\nabla_{X_k} w)(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots X_p)\big](e_i) \\
&\quad + \sum_j dw(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,X_p) \\
&= \sum_k (-1)^k D\big[(\nabla_{X_k} w)(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots X_p)\big](e_i) \\
&\quad + \sum_j dw(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,X_p) \\
&= \sum_k (-1)^k D\big[D\big[w(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots X_p)\big](X_k) \\
&\quad - \sum_j w(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,\hat{X}_k, \nabla_{X_k}X_j \ldots X_p)\big](e_i) \\
&\quad + \sum_j dw(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,X_p) \\
&= \sum_i \sum_k (-1)^k D\big[D\big[w(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots X_p)\big](X_k)\big](e_i) \\
&\quad - \sum_k (-1)^k \sum_j D\big[w(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,\hat{X}_k, \nabla_{X_k}X_j \ldots X_p)\big](e_i) \\
&\quad + \sum_j dw(e_i, X_1,\ldots,\nabla_{e_i}X_j,\ldots,X_p).
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Observación:

$$
\begin{aligned}
&\sum_j dw(e_i, X_1, \ldots, \nabla_{e_i} X_j, \ldots, X_p) \\
&\qquad = \sum_j \sum_{i,1\le s\le p} (-1)^s (\nabla_{X_s} w)(e_i, X_1, \ldots, \nabla_{e_i} X_j, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, X_p) \\
&\qquad = \sum_j \sum_{i,1\le s\le p} (-1)^s D\big[w(e_i, X_1, \ldots, \nabla_{e_i} X_j, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, X_p)\big](X_s) \\
&\qquad\quad - \sum_j \sum_{i,1\le s\le p} (-1)^s \sum_r w(e_i, X_1, \ldots, \nabla_{e_i} X_j, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, \nabla_{X_s} X_r, \ldots, X_p).
\end{aligned}
$$

Dado un marco local $\{e_i\}$, $p \in M$ escribimos a los campos X_k en términos de dicho marco: $X_k = X_k^s e_s$. Entonces, $\nabla_{e_i}(X_k^s e_s) = X_k^s \Gamma_{is}^r e_r + e_i(X_k^s) e_s$. Por tanto,

$$
\sum_k (-1)^k D\big[D\big[w(e_i, X_1, \ldots, \nabla_{e_i} X_j, \ldots, \hat{X}_k, \ldots X_p)\big](X_k)\big](e_i) =
$$

$$
\sum_k (-1)^k D\big[D\big[w(e_i, X_1^s e_s, \ldots, \nabla_{e_i}(X_j^s \Gamma_{is}^r e_r + e_i(X_j^s) e_s), \ldots, \hat{X}_k, \ldots X_p^s e_s)\big](X_k^s e_s)\big](e_i)
$$

Análogamente para los términos $\delta d + d\delta$.

3. Para la proyección tangencial tenemos: Sea $X \in \Gamma(TM|_{\partial M})$ y su descomposición $X = X^{\perp} + X^{\parallel}$,

$$
\mathbf{t}w(X_1, \ldots, X_k) = w(X_1^{\parallel}, \ldots, X_k^{\parallel})
$$

y

$$
\mathbf{n}w = w|_{\partial M} - \mathbf{t}w,
$$

para cualesquiera $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM|_{\partial M})$. Sea $(n, e_1, \ldots, e_{n-1})$ un marco local $\varphi_b(U_b) \subset \mathbb{R}^n_+$. Entonces , cada $X_i = X_i^s e_s$, con $e_s \in (n, e_1, \ldots, e_{n-1})$,

$$\begin{aligned}
\delta w(X_1,\dots,X_{k-1}) &= -\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}w)(e_j,X_1,\dots,X_{k-1})\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\big(\mathrm{i}_{e_j}(\nabla_j w)\big)(X_1,\dots,X_{k-1})\\
&= -\sum_{j}\Big\{D\big[w(e_j,X_1,\dots,X_{k-1})\big](e_j)-\sum_i w(e_j,X_1,\dots,\nabla_{e_j}X_i,\dots,X_{k-1})\Big\}\\
&= -\sum_{j}^{n}\Big\{D\big[w(e_j,X_1^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\big](e_j)\\
&\quad -\sum_i w(e_j,X_1^s e_s,\dots,\nabla_{e_j}X_i^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\Big\}\\
&= -D\big[w(n,X_1^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\big](n)-\sum_{j}^{n-1}D\big[w(e_j,X_1^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\big](e_j)\\
&\quad +\sum_j\sum_i w(e_j,X_1^s e_s,\dots,\nabla_{e_j}X_i^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\Big\}\\
&= -D\big[w(n,X_1^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\big](n)-\sum_{j}^{n-1}D\big[w(e_j,X_1^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\big](e_j)\\
&\quad + w(n,X_1^s e_s,\dots,\nabla_n X_i^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\\
&\quad +\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i w(e_j,X_1^s e_s,\dots,\nabla_{e_j}X_i^s e_s,\dots,X_{k-1}^s e_s)\Big\}. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Las últimas dos expresiones de (2.30),

$$\begin{aligned}
&w(n,X_1^s e_{s_1},\dots,\nabla_n X_i^s e_{s_i},\dots,X_{k-1}^s e_{s_{k-1}})\\
&\qquad +\sum_{j=1}^{n-1}\sum_i w(e_j,X_1^s e_{s_1},\dots,\nabla_{e_j}X_i^s e_{s_i},\dots,X_{k-1}^s e_{s_{k-1}}), \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

dependen de la geometría por la multilinealidad y los símbolos de Christofel $\nabla_{e_j}X_i^s e_{s_i}$. Mientras que:

$$-D(w(n,X_1^s e_{s_1},\dots,X_{k-1}^s e_{s_{k-1}}))(n) = -\mathbf{i_n}D^n w$$

y

$$-\sum_{j=1}^{n-1} D(w(e_j, X_1^s e_{s_1}, \ldots, X_{k-1}^s e_{s_{k-1}}))(e_j) = -\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{i}_{\mathbf{e}_j} D^j w.$$

por tanto,

$$\mathbf{t}\delta_b w = -\mathbf{t}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{i}_{\mathbf{e}_j} D^j + \mathbf{i}_{\mathbf{n}} D^n + \mathbf{K}_b(x)\right) w,$$

como lo sugiere Schwarz en [Schwarz(1995)]: $\mathbf{K}_b(x) : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ es un mapeo local de haces del álgebra exterior sobre $\mathbb{R}^n$.

2.4.2. Símbolos principales

En la siguiente sección se presentan los cálculos de los símbolos principales de los operadores involucrados a través del lema 11.

1. Símbolo principal de d: Sea $\phi \in C^\infty(M)$ y $w \in \Gamma(\Lambda^k(M)) = \Omega^k(M)$ tal que $d\phi_x = \xi$ y $w(x) = c$

$$\begin{aligned}
\sigma(d)(x, \xi = d\phi)w(x) &= \lim_{t\to\infty} t^{-1} \exp(-t\phi) d[\exp(t\phi)w](x) \\
&= \lim_{t\to\infty} t^{-1} \exp(-t\phi)[t \exp(t\phi) d\phi \wedge w + \exp[t\phi] dw] \\
&= \lim_{t\to\infty} [t^{-1} \exp(-t\phi) t \exp(t\phi) d\phi \wedge w + t^{-1} \exp(-t\phi) \exp[t\phi] dw] \\
&= \lim_{t\to\infty} d\phi \wedge w + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} dw \\
&= d\phi \wedge w.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sigma(d)(x, \xi = d\phi)(\cdot) = d\phi \wedge (\cdot) = \xi \wedge (\cdot).$$

2. Símbolo principal de δ: Sea $\delta w = -\sum_j \mathbf{i}_{e_j}(\nabla_{e_j} w)$,

$$
\begin{aligned}
\sigma(\delta)(x,\xi=d\phi)w(x) &= \pi\big(-\sum_j \mathbf{i}_{e_j}(\nabla_{e_j}\cdot)\big)(x,\xi=d\phi)w(x)\\
&= \lim_{t\to\infty} t^{-1}\exp(-t\phi)-\sum_j \mathbf{i}_{e_j}\big(\nabla_{e_j}(\exp(t\phi)w)\big)\\
&= \lim_{t\to\infty} -\sum_j t^{-1}\exp(-t\phi)\mathbf{i}_{e_j}\big(\nabla_{e_j}(\exp(t\phi)w)\big)\\
&= \lim_{t\to\infty} -\sum_j t^{-1}\exp(-t\phi)\mathbf{i}_{e_j}\big(t\exp(t\phi)e_j[\phi]w+\exp(t\phi)\nabla_{e_j}w\big)\\
&= \lim_{t\to\infty} -\sum_j \big(t^{-1}\exp(-t\phi)t\exp(t\phi)e_j[\phi]\mathbf{i}_{e_j}w\\
&\quad +t^{-1}\exp(-t\phi)\exp(t\phi)\nabla_{e_j}w\big)\\
&= -\sum_j \lim_{t\to\infty}\big(t^{-1}\exp(-t\phi)t\exp(t\phi)e_j[\phi]\mathbf{i}_{e_j}w\\
&\quad +t^{-1}\exp(-t\phi)\exp(t\phi)\nabla_{e_j}w\big)\\
&= -\sum_j e_j[\phi]\mathbf{i}_{e_j}w.
\end{aligned}
$$

Ya que $d\phi=\xi$ y $\{e_j\}$ es un marco local en una carta que contiene a $x\in M$, sea $\{e^j\}$ el marco dual. Entonces, $\xi=\sum_s e_s[\phi]e^s$. Sean $\xi_j=e_j[\phi]$, por tanto

$$\sigma(\delta)(x,\xi=d\phi)w=-\sum_j \xi_j\mathbf{i}_{e_j}w.$$

3. Símbolo principal de $\mathbf{t}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{t})(x,\xi=d\phi)w(x) &= \lim_{t\to\infty} t^0\exp(-t\phi)\mathbf{t}(\exp(t\phi)w)\\
&= \lim_{t\to\infty}\exp(-t\phi)\exp(t\phi)\mathbf{t}w\\
&= \mathbf{t}w.
\end{aligned}
$$

Así,

$$\sigma(\mathbf{t})(x,\xi=d\phi)=\mathbf{t}|_x.$$

Observación:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(\phi w)(X_1,\ldots,X_k) &= (\phi w)(\pi\circ X_1,\ldots,\pi\circ X_k)\\ &= \phi w(\pi\circ X_1,\ldots,\pi\circ X_k)\\ &= \phi\mathbf{t}w. \end{aligned} \tag{2.32}$$

4. Símbolo principal del Laplaciano conexión: $\Delta^\Lambda v = -\sum_{1\le j\le n}\Big(\nabla_j\nabla_j v - \nabla_{\nabla_{e_j}e_j}v\Big)$.

$$\begin{aligned}\Delta^\Lambda(e^{s\phi}v) &= -\sum_j \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}(e^{s\phi}v)\\ &= \sum_j \nabla_{e_j}[e_j\cdot e^{s\phi}+e^{s\phi}\nabla_{e_j}v]\\ &= \sum_j \nabla_{e_j}[se^{s\phi}(e_j\cdot\phi)v+e^{s\phi}\nabla_{e_j}v]\\ &= \sum_j \left\{s^2e^{s\phi}(e_j\cdot\phi)^2v+se^{s\phi}(e_j\cdot e_j\phi)v+se^{s\phi}(e_j\cdot\phi)\nabla_{e_j}v+e^{s\phi}\nabla_{e_j}\nabla_{e_j}v\right\}\end{aligned}$$

Si tomamos un marco local en un abierto que contenga a x, llegamos a que

$$\Delta^\Lambda(e^{s\phi}v) = s^2e^{s\phi}|d\phi|^2+se^{s\phi}(\Lambda\phi)v+2se^{s\phi}\langle d\phi,\nabla v\rangle+e^{s\phi}\nabla v. \tag{2.33}$$

Entonces,

$$\lim_{s\to\infty} s^{-2}e^{-s\phi(x)}\left(s^2e^{s\phi}|d\phi|^2+se^{s\phi}(\Lambda\phi)v+2se^{s\phi}\langle d\phi,\nabla v\rangle+e^{s\phi}\nabla v\right) = |d\phi|^2.$$

Por tanto,

$$\pi(\Delta^\Lambda)(x,d\phi)v(x) = |d\phi|^2_{\mathbb{I}\pi^*E}. \tag{2.34}$$

El cálculo de los símbolos principales prepara el terreno para introducir la noción de *elipticidad*, como se verá en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Geometría y Análisis

La idea central de este capítulo es introducir el problema de Laplace-Beltrami con valores en la frontera. Se demostrará que el operador asociado cumple la condición de elipticidad en el sentido de Lopatinskii-Shapiro.

Además, se introducirá a la integral de Dirichlet, y se formularán algunos teoremas principales en torno a este objeto, y que son necesarios para desarrollar los resultados de descomposición del siguiente capítulo.

3.1. Un problema con valores en la frontera para el operador de Laplace-Beltrami

En esta sección se formulará un problema modelo con valores en la frontera para el operador de Laplace-Beltrami $\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$. Sea M una variedad con frontera, sean $\Omega^k(M)$ y $\Omega^k(\partial M)$ el espacio de las k-formas sobre M y el espacio de las k-formas diferenciales sobre frontera de M, respectivamente. El problema que debemos resolver es encontrar una solución $w \in \Omega^k(M)$ que satisfaga simultáneamente que:

$$\Delta w = \eta \ \text{ sobre } \ M$$

$$\mathbf{t}w = 0 \ \text{ y } \mathbf{t}\,\delta w = 0 \ \text{ sobre } \ M, \tag{3.1}$$

con $\eta \in \Omega^k(M)$. A las condiciones anteriores en la frontera se le denominan de tipo Dirichlet.

3.2. Condición de Lopatinskii-Shapiro

Para formular la condición de Lopatinski-Shapiro debemos hacer la siguiente manipulación técnica [Schwarz(1995), Taira(2016)]: Escribamos a $\tilde{v} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, 0)$ como la proyección del vector $v \in \mathbb{R}^n$ sobre las primeras $(n-1)$ componentes, y sea $n = (0, \ldots, 0, 1)$ el vector unitario en la dirección normal. Ahora definimos la transformada de Fourier (parcial) $A_b \to \tilde{A}_b$ en la dirección normal sobre $\mathbb{R}^n_+$ como sigue: reemplacemos $v \to \tilde{v} + in\partial_s$, en la expresión del polinomio para el símbolo (principal) produciendo un operador diferencial ordinario. Este operador actúa sobre funciones $\mathbb{R}^n$-valuadas $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Así, para cualquier $(x, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, la correspondiente ecuación diferencial se convierte

$$\sigma(A)(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{\sigma}(s) = 0.$$

Denotaremos al conjunto de soluciones $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\mathbb{R} \times F)$ de la ecuación diferencial anterior, las cuales son acotadas sobre $\mathbb{R}_+$, como $\mathcal{M}^+_{x,\tilde{v}}$.

Definición 3.2.1. *[Elipticidad Lopatinskii-Shapiro] Decimos que el problema con valores en la frontera (3.1) es elíptico en el sentido de Lopatinskii-Shapiro si y sólo si:*

1. *El operador diferencial A es elíptico, ie. $\forall x \in \varphi_b(U_b)$ y $\forall v \in \mathbb{R}^n$ el símbolo principal*

$$\sigma(A)(x, v) : F \to F$$

   es un isomorfismo si y sólo si $v \neq 0$.

2. *Las condiciones en la frontera B_j son elípticas en el sentido que $\forall x \in \varphi_b(U_b)$ y $\forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ el mapeo:*

$$M^+_{x,\tilde{v}} \to \bigoplus_{j=1}^{l} F_j$$

$$\tilde{\sigma} \mapsto \Big(\sigma(B_1)(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{\sigma}(0), \ldots, \sigma(B_l)(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{\sigma}(0)\Big)$$

   es una biyección.

3.2.2. Lema de elipticidad

Teorema 3.2.3. *El problema con valores en la frontera de tipo Dirichlet, a saber,*

$$\Delta w = \eta$$

$$\mathbf{t}w = 0 \text{ y } \mathbf{t}\delta w = 0$$

es elíptico en el sentido de Lopatinskii-Shapiro (LS en adelante).

Dem. (i) Sabemos que el símbolo principal del operador de Laplace-Beltrami está determinado de la manera siguiente:

$$\sigma(\Delta_b)(v,x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)v^i v^j \mathrm{Id}_{\bigwedge}.$$

Así, por la condición LS

$$\begin{aligned}
\sigma(\Delta_b)(\tilde{v}+in\partial_s) &= \sum_{i,j} g_{ij}(x)(\tilde{v}+in\partial_s)^i(\tilde{v}+in\partial_s)^j \qquad (3.2)\\
&= \sum_{i,j} g_{ij}(x)\Big((\tilde{v}^i+in^i\partial_s)(\tilde{v}^j+in^j\partial_s)\Big)\\
&= \sum_{ij} g_{ij}(x)\Big((\tilde{v})^i(\tilde{v})^j+2(\tilde{v}\cdot in\partial)+|(in\partial_s)|^2\Big)\\
&= |\tilde{v}|^2-\partial_s\partial_s,
\end{aligned}$$

Debido a que la condición de elipticidad no depende de la métrica g, podemos elegir una carta tal que $g_{ij}=\delta_i^j$; en este caso, la condición LS se convierte en:

$$^{\mathrm{P}}\mathrm{sym}(\Delta_b)(\tilde{v}+in\partial_s)(\tilde{w}(s))=0 \iff (|\tilde{v}|^2-\partial_s\partial_s)\tilde{w}(s)=0,$$

en donde $|\tilde{v}|^2=\sum_{ij} g_{ij}\tilde{v}^i\tilde{v}^j$.

Tenemos lo siguiente,

$$\tilde{w}(s)|\tilde{v}|^2=\partial_s\partial_s\tilde{w}(s) \iff \tilde{w}(s)=w_0\exp(-|\tilde{v}|s), \qquad (3.3)$$

con $\tilde{w}\in\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y $w_0=\tilde{w}(0)$. Tomemos al conjunto

$$\mathcal{M}^+_{x,\tilde{v}}=\{\tilde{w}(s)=w_0\exp(-|\tilde{v}s|)|w_0\in\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\}.$$

Así, el mapeo

$$\mathcal{M}^+_{x,\tilde{v}}\ni\exp(-s|\tilde{v}|)w_0\mapsto g(x)|\tilde{v}|w_0\in(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)),$$

es una biyección para todo $\tilde{v}\neq 0$ si y sólo si $g(x)\neq 0$ sobre la frontera de M, ∂M.

(ii) Para mostrar que bajo las condiciones $\mathbf{t}=0$ y $\mathbf{t}\delta=0$ sobre la frontera, la transformación

$$M^+_{x,\tilde{v}}\to\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\oplus\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

$$\tilde{w}\mapsto\Big(\sigma(\mathbf{t})(\tilde{v}+in\partial_s,x)\tilde{w}(0),\sigma(\tilde{v}+in\partial_s,x)\tilde{w}(0)\Big),$$

es una biyección. Recordemos que el símbolo principal para $\mathbf{t}$, es

$$\sigma(\mathbf{t})(v,x) = \pi_{\mathbf{t}}$$

$$\sigma(\mathbf{t})(\tilde{v} + in\partial_s, x)$$

recordemos que para cualquier forma η sobre M definimos a la componente tangencial de η sobre ∂M como

$$\mathbf{t}\eta(X_1, \ldots, X_k) := \eta(\pi(X_1), \ldots, \pi(X_k)),$$

en donde π es la proyección ortogonal de fibras $\pi : TM|_{\partial M} \to T(\partial M)$. Entonces,

$$\sigma(\mathbf{t})(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{w}(0) = \pi_{\mathbf{t}}\tilde{w}(0) = 0,$$

por la condición $\mathbf{t}w = 0$ en la frontera.

Ahora utilicemos la condición $\mathbf{t}\delta w = 0$. Con la condición de LS para el símbolo de $\mathbf{t}\delta$

$$\sigma(\mathbf{t}\delta)(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{w}(0) = \pi_{\mathbf{t}} \circ \left(\sum_{j=1}^{n-1} i\tilde{v}^j \mathbf{i}_{e_j} - \partial_s \mathbf{i}_n\right)\tilde{w}(0) = 0.$$

Calculemos la composición anterior,

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbf{t}} \circ \left(\sum_{j=1}^{n-1} i\tilde{v}^j \mathbf{i}_{e_j} - \partial_s \mathbf{i}_n\right)\tilde{w}(s) &= \pi_{\mathbf{t}} \circ \left(\sum_{j=1}^{n-1} i\tilde{v}^j \mathbf{i}_{e_j} \circ \tilde{w}(s) - \partial_s\big(\mathbf{i}_n \circ \tilde{w}(s)\big)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} i\tilde{v}^j \pi_{\mathbf{t}}(\mathbf{i}_{e_j} \circ \tilde{w}(s)) - \pi_{\mathbf{t}}(\partial_s\big(\mathbf{i}_n \circ \tilde{w}(s)\big))
\end{aligned}$$

Para el primer término de la suma anterior usamos que $\pi_{\mathbf{t}}\tilde{w}(0) = 0$. Entonces, dado el marco local $\{e_j\}_{j=1}^n$

$$\pi_{\mathbf{t}}(\mathbf{i}_{e_j} \circ \tilde{w}(s=0))(e_j, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}}) = \pi_{\mathbf{t}}(\tilde{w}|_{s=0}(e_j, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k-1}})) = 0.$$

Para el segundo término, observamos que: $\pi_{\mathbf{t}}\partial_s(\mathbf{i}_n(w(s))) = \partial_s\pi_{\mathbf{t}}(\mathbf{i}_n(w(s)))$, pues

$$\pi_{\mathbf{t}}(\partial_s(\mathbf{i}_n(w(s))))(e_1, \ldots, e_{k-1}) = \partial_s(\mathbf{i}_n(w(s)))(\pi \circ e_1, \ldots, \pi \circ e_{k-1}) \tag{3.4}$$

Entonces,

$$\pi_{\mathbf{t}}(|\tilde{v}|\mathbf{i}_n w_0) = \pi_{\mathbf{t}} \circ \big(\sum_{j=1}^{n-1} i\tilde{v}^j \mathbf{i}_{e_j} + i\partial_s \mathbf{i}_n\big)\tilde{w}(0) = 0.$$

Suponiendo la igualdad anterior como $|\tilde{v}| \neq 0$, entonces $\mathbf{i}_n w_0 = 0$, por tanto $\tilde{w} \equiv 0$, pues la elección de $\tilde{w} \in M^+_{x,\tilde{v}}$ para toda x y $\tilde{v}$. Así el mapeo

$$\tilde{w} \mapsto \Big(\sigma(\mathbf{t})(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{w}(0), \sigma(\mathbf{t}\delta)(\tilde{v} + in\partial_s, x)\tilde{w}(0)\Big),$$

es inyectivo. Es suprayectivo en su imagen. Y así se satisface la condición (ii) de LS.

Con la demostración anterior preparamos el terreno para describir una de las aplicaciones de la elipticidad; además, requerimos la existencia de un potencial llamado de Dirichlet, para poder llegar a una descomposición del espacio $L^2\Omega^k(M)$. En el capítulo siguiente se hablará de dicha aplicación.

3.3. Potencial de Dirichlet

En esta sección presentaremos el segundo teorema central de este capítulo, la existencia de una forma diferencial ϕ_D, llamada *potencial de Dirichlet*, que es solución al problema con valores en la frontera de tipo Dirichlet. Comenzaremos definiendo el espacio apropiado para dicho potencial,

Definición 3.3.1. *Sea $w \in H^1\Omega^k(M)$, los espacios de las formas diferenciales que tienen componentes tangenciales nulas y componentes normales nulas se denotarán como*

$$H^1\Omega^k_D(M) = \{w \in H^1\Omega^k(M) | \mathbf{t}w = 0\} \tag{3.5}$$

y

$$H^1\Omega^k_N(M) = \{w \in H^1\Omega^k(M) | \mathbf{n}w = 0\}, \tag{3.6}$$

respectivamente.

Denotaremos además por $\mathcal{H}(M)$ al espacio de los *campos armónicos* en $H^1(M)$, es decir

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\lambda \in H^1(M) | d\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \delta\lambda = 0\}. \tag{3.7}$$

Los subespacios

$$\mathcal{H}^k_D(M) = \mathcal{H}(M) \cap H^1\Omega^k_D(M) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^k_N(M) = \mathcal{H}(M) \cap H^1\Omega^k_N(M), \tag{3.8}$$

son los campos de Dirichlet y Neumann, respectivamente.

El primer resultado en torno al espacio de los campos armónicos es que son finito dimensionales, lo que permite hacer una descomposición ortogonal de $L^2\Omega^k(M) = \mathcal{H}(M)_D \oplus \mathcal{H}(M)^{\perp}_D$. El complemento L^2-ortogonal de $\mathcal{H}^k_D(M)$ en el espacio $H^1\Omega^k_D(M)$, lo denotaremos como

$$\mathcal{H}^k_D(M)^{\oplus} = H^1\Omega^k_D(M) \cap \mathcal{H}(M)^{\perp}_D. \tag{3.9}$$

Podemos acotar a la integral de Dirichlet en el espacio $\mathcal{H}^k_D(M)^{\oplus}$ respecto a la norma H^1,

Teorema 3.3.2. *([Schwarz(1995)], p. 69) La integral de Dirichlet es H^1-elíptica en $\mathcal{H}^k_D(M)^{\oplus}$; es decir, existen constantes c y C tales que,*

$$c||w||^2_{H^1} \leq \mathcal{D} \leq C||w||^2_{H^1}.$$

Finalmente estamos en posición de enunciar el teorema esperado:

Teorema 3.3.3. *([Schwarz(1995)], p. 70) Sea M una variedad compacta y con frontera ∂M. Para cada $\eta \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$, existe una forma diferencial $\phi_D \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\oplus}$, tal que*

$$\ll d\phi_D, d\xi \gg \; + \; \ll \delta\phi_D, \delta\xi \gg = \ll \eta, \xi \gg \qquad \forall \xi \in H^1\Omega^k_D(M). \tag{3.10}$$

La forma diferencial ϕ_D está determinada de manera única por η y se llama potencial de Dirichlet.

La existencia de dicho potencial es una solución débil al problema con valores en la frontera de tipo Dirichlet, pues usando la fórmula de Green a (3.10) se tiene que,

$$\ll \Delta\phi_D, \xi \gg \; - \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\phi_D \wedge \star\mathbf{n}\xi = \ll \eta, \xi \gg \qquad \forall \xi \in H^1\Omega^k_D(M). \tag{3.11}$$

En la siguiente sección se hablará sobre la regularidad del potencial de Dirichlet usando una extensión de la derivada de Lie en $L^2(M)$.

3.4. Regularidad del potencial de Dirichlet

Construyamos los siguientes objetos: Sea $X \in \Gamma(TM)$ un campo vectorial con soporte compacto sobre M variedad con frontera. Tomemos el flujo (global) asociado a X, $\Phi^X_t \in \mathrm{Diff}(M)$; además, sea $w \in \Omega^k(M)$ y tomemos el pulback de Φ^X_t, a saber, $(\Phi^X_t)^*$. Finalmente, construyamos sobre $L^2(M)$ el siguiente mapeo:

$$\Sigma^X_T : L^2\Omega(M) \to L^2(M),$$

$$w \mapsto \Sigma^X_t := \frac{1}{t}\big((\Phi^X_t)^* w - w\big) \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lema 12. *Existe una constante C_1 tal que:*

$$||\Sigma^X_t w||_{L^2} \leq C_1 ||w||_{H^1} \quad \forall w \in H^1\Omega^k(M). \tag{3.12}$$

Dem. Utilizaremos el siguiente resultado: para $w \in H^1\Omega^k(M)$

$$\lim_{t\to 0} \Sigma^X_t w = \mathcal{L}_X w.$$

Sean $\{X_0, \ldots, X_k\}$ una familia de campos en $\Gamma(TM)$, $p \in M$ y $q := \Phi_t(p)$, entonces,

$$
\begin{aligned}
(\Phi_t^X)_p^*(dw)(X_0,\dots,X_k) &= (dw)|_q\big(T_p\Phi_t^X\cdot X_0,\dots,T_p\Phi_t^X\cdot X_k\big)\\
&= \sum_{0\le j\le k}(-1)^j\big(\nabla_{X_j}w\big)\big(T_p\Phi_t^X\cdot X_0,\dots,T_p\Phi_t^X\cdot X_k\big)\\
&= \sum_{0\le k}(-1)^j\Big\{D\big[w\big(T_p\Phi_t^X\cdot X_0,\dots,\hat{X}_j,\dots,T_p\Phi_t^X\cdot X_0\big)\big](X_j)\\
&\quad-\sum_{0\le i\le k}w\big(T_p\Phi_t^X\cdot X_0,\dots,\hat{X}_j,\dots,\nabla_{\hat{X}_j}T_p\Phi_t^X\cdot X_i\big)\Big\}. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, $d\big((\Phi)_t^X w\big)\in\Omega^{k+1}(M)$, calculemos

$$
\begin{aligned}
d\big((\Phi)_t^X w\big)\in\Omega^{k+1}(M) &= \sum_{0\le j\le k}(-1)^j\big(\nabla_{X_j}(\phi_t^X)^*w\big)\big(X_0,\dots,\hat{X},\dots,X_k\big)\\
&= \sum_{0\le j\le k}\Big\{D[(\Phi_t)^*w(X_0,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)](X_j)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{k}(\Phi_t^X)^*(X_0,\dots,\widehat{X}_j,\dots,\nabla_{X_j}X_i,\dots,X_k)\Big\}\\
&= \sum_{j=0}^{k}\Big\{D\big[w|_q(T_p\Phi_t^X\cdot X_0,\dots,\widehat{X}_j,\dots,T_p\Phi_t^X\cdot X_k)\big](\widetilde{X}_j)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{k}w|_q\big(T_p\Phi_t^X\cdot X_0,\dots,\widehat{\widehat{X}}_j,\dots,\nabla_{\widehat{X}_j}T_p\Phi_t^X\cdot X_i,\dots,T_p\Phi_t^X X_k\big)\Big\},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

en donde $\widetilde{X}_j=T_p\Phi_t^X\cdot X_j$.

Observaciones: a) $(\Phi_t^X)^*$ conmuta con la componente tangencial $(\Phi_t^X)^*\circ\mathbf{t}=\mathbf{t}\circ(\Phi_t^X)^*$.

b) El pulback no conmuta con el operador estrella de Hodge $(\Phi_t^X)^*(*w)=*_{g(t)}(\Phi_t^X)^*$.

Escribamos al flujo como

$$\Sigma_t^X w=\int_0^1\mathcal{L}_X\big((\Phi_{ht}^X)^*w\big)dh.$$

Estimemos ahora,

$$
\begin{aligned}
||\Sigma_t^X w||_{L^2}^2 &= \int_M\langle\Sigma_t^X w,\Sigma_t^X w\rangle_{\Lambda^k}\,\mu\\
&= \int_M\Big(\int_0^1\Big|\mathcal{L}_X\big((\Phi_{ht}^X)^*w\big)\Big|^2_{J^0(\Lambda^k)}\mu\Big)dh \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Como la derivada de Lie $\mathcal{L}:(H^1\Omega^k,||\cdot||_{H^1})\to(L^2\Omega^k(M),||\cdot||_{L^2})$ acotada, entonces existe una constante C_2 que hace que la desigualdad siguiente sea válida

$$||\mathcal{L}_X(\Phi_{ht}^X)^*w||_{L^2}\leq C_2||(\Phi_{ht}^X)^*w||_{H^1}. \tag{3.16}$$

Entonces, por el lema (1.3.9) y por la continuidad de la derivada de Lie respecto a la norma L^2

$$||\Sigma_t^X||_{L^2}^2\leq C_2\int_0^1||(\Phi_{ht}^x)^*w||_{H^1}^2dh\leq C_4||w||_{H^1}^2.$$

Así,

$$\Sigma_t^X(w\wedge *\chi)=\Sigma_t^Xw\wedge *\chi+(\Psi_t)^*\big(w\wedge(\Sigma_{-t}^X)\big)+(\Psi_t)^*\big(w\wedge(\Xi_{-t}^X)\big).$$

Integrando la ecuación anterior, llegamos a que,

$$\int_M\Sigma_t^X(w\wedge *\chi)=\int_M\Sigma_t^Xw\wedge *\chi+\int_M(\Psi_t)^*\big(w\wedge(\Sigma_{-t}^X)\big)+\int_M(\Psi_t)^*\big(w\wedge(\Xi_{-t}^X)\big). \tag{3.17}$$

Sabemos que para $\nu\in\Omega^n(M)$, $\int_M\Phi^*\nu=\int\nu$, entonces

$$0=\int_M\Sigma_t^X(w\wedge *\chi)=\ll\Sigma_t^Xw,\chi\gg\ +\ \ll w,\Sigma_{-t}^X\gg\ +\ \ll w,Xi_{-t}^X\chi\gg \tag{3.18}$$

Propongamos el siguiente cambio de variable y reemplacemos en la ecuación (3.18): sea $w=d\phi$ y $\chi=d\xi$, y utilicemos el hecho de que $\Sigma_t^X(dw)=d\big(\Sigma_t^Xw\big)$

$$0=\ll d\big(\Sigma_t^X\phi\big),d\chi\gg\ +\ \ll d\phi,d\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big)\gg\ +\ \ll d\phi,\Xi_{-t}^Xd\xi\gg\ . \tag{3.19}$$

Reescribiendo la ecuación,

$$\ll d\big(\Sigma_t^X\phi\big),d\xi\gg\ +\ \ll d\phi,d\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big)\gg=-\ \ll d\phi,\Xi_{-t}^Xd\xi\gg\ . \tag{3.20}$$

Guardemos esta ecuación y hagamos el siguiente cambio de variable: $w=d{*}\phi$ y $\chi=d{*}\xi$ además utilizando que $\Sigma_t^X(*w)=*\big(\Sigma_t^Xw\big)+\Xi_t^Xw$, obtenemos

$$0=\ll\Sigma_t^Xd*\phi,d*\xi\gg\ +\ \ll d*\phi,\Sigma_{-t}^Xd*\xi\gg\ +\ \ll d*\phi,\Xi_{-t}^Xd*\xi\gg\ . \tag{3.21}$$

Consideremos las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma_t^Xd*\phi=d\big(\Sigma_t^X*\phi\big)=d\big[*\big(\Sigma_t^X\phi\big)+\Xi_t^X\phi\big]$$

y

$$\Sigma_{-t}^Xd*\phi=d\big(\Sigma_{-t}^X*\phi\big)=d\big[*\big(\Sigma_{-t}^X\phi\big)+\Xi_{-t}^X\phi\big].$$

Reescribiendo,

$$\begin{aligned} \ll d\big(*\Sigma_t^X\phi\big), d*\xi \gg \quad & + \quad \ll d*\Xi_t^X\phi, d*\xi \gg \\ & + \quad \ll d*\phi, d*\Xi_t^X\xi \gg \\ & + \quad \ll d*\phi, d*\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big) \gg \\ & + \quad \ll d*\phi, \Xi_{-t}^X(d*\xi) \gg \\ & = \quad 0. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ll d*\big(\Sigma_t^X\phi\big), d*\xi \gg \; + \; \ll d*\phi, d*\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big) \gg \quad & = \quad -\big\{ \ll d*\Xi_t^X\phi, d*\xi \gg \\ & + \quad \ll d*\phi, d*\Sigma_t^X\xi \gg \\ & \quad\;\; \ll d*\phi, \Xi_{-t}^X d*\xi \gg \; \big\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ll \delta\big(\Sigma_t^X\phi\big), \delta\xi \gg \; + \; \ll \delta\phi, \delta\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big) \gg \quad & = \quad -\big\{ \ll d*\Xi_t^X\phi, d*\xi \gg \; + \; \ll d*\phi, d*\Sigma_t^X\xi \gg \\ & + \quad \ll d*\phi, \Xi_{-t}^X d*\xi \gg \; \big\}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sumando el lado izquierdo de las ecuaciones (3.20) y (3.22), tenemos

$$\begin{aligned} \ll \delta\big(\Sigma_t^X\phi\big), \delta\xi \gg \quad & + \quad \ll d\big(\Sigma_t^X\phi\big), d\xi \gg \\ & + \quad \ll \delta\phi, \delta\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big) \gg \\ & + \quad \ll d\phi, d\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big) \gg \\ & = \quad D(\Sigma_t^X\phi, \xi) + D(\phi, \Sigma_{-t}^X) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Además,

$$\begin{aligned} - \ll d\phi, \Xi_{-t} \gg \; - \; \ll d*\big(\Xi_t^X\phi\big), d*\xi \gg = & \ll d*\phi, d*\big(\Sigma_{-t}^X\xi\big) \gg \\ & - \ll d*\phi, \Sigma_{-t}^X d*\xi \gg \; -\{||d\phi||_{H^1}||\Sigma_X^{-t}d\xi||_{L^2} \\ & + ||d*\big(\Xi_t^X\big)\phi||||d*\xi|| + ||d*\phi||_{H^1}||d*\Xi_{-t}^X\xi||_{L^2} \\ & + ||d*\phi||_{H^1}||\Xi_{-t}^X d*\xi||_{H^1}.\} \end{aligned}$$

Lema 13. *Sea ϕ_D el potencial de Dirichlet de $\eta \in L^2\Omega^k(M)$. a) El potencial ϕ_D es localmente de la clase de Sobolev H^2 en el interior de M; es decir, para todo $p \in M \setminus \partial M$, existe una vecindad U de p, tal que $\phi_D|_U \in H^2(U)$.*

Dem. *Sea $U \subset V$, V compacto y $U \cap \partial M = \emptyset$ y sea $(E_1, \ldots, E_n)$ un marco ortonormal local en V y $\xi \in C^{\infty(M)}$ una función flan cuyo soporte está contenido en V, $\mathrm{sop}(\xi) \subset V$ y $\xi|_U = 1$. Definamos a los siguientes campos*

$$(\xi E_1, \ldots, \xi E_n) := (F_1, \ldots, F_n).$$

Entonces existe una familia de flujos globales $\Phi_t^{F_j}$ sobre M. Sea $\phi_D \in H^1\Omega(U)$. Calculemos el límite de la siguiente expresión,

$$||\Sigma_{tl}^{F_j} - \mathcal{L}_{F_j}\phi_D|| \leq ||\Sigma_{tl}^{F_j}\phi_D|| - ||\mathcal{L}_{F_j}\phi_D||,$$

$$\lim_{l\to\infty} ||\Sigma_{t_l}^{F_j} - \mathcal{L}_{F_j}\phi_D|| \leq \lim_{l\to\infty} ||\Sigma_{t_l}^{F_j}\phi_D|| - \lim_{l\to\infty} ||\mathcal{L}_{F_j}\phi_D|| = || \lim_{l\to\infty} \Sigma_{t_l}^{F_j}\phi_D|| - ||\mathcal{L}_{F_j}\phi_D||.$$

Pero

$$\lim_{l\to\infty} \Sigma_{t_l}^{F_j}\phi_D = 0, \quad \text{si} \quad t_l \to 0.$$

Por otro lado, $||\Sigma_{t_l}^{F_j}\phi_D||_{H^1}$ está uniformente acotada por una constante C_ϕ ([Schwarz(1995)], lema 2.3.1). Entonces, la subsucesión $\left(\Sigma_{t_l}^{F_j}\phi_D\right)_{l\in\mathbb{N}}$, por el corolario $(4, Cap1)$, existe una subsucesión convergente.

Sea $y = \mathcal{L}_{F_j}\phi_D$; por tanto, $\mathcal{L}_{F_j}\phi_D \in H^1\Omega^1(M)$, y por construcción

$$\mathcal{L}_{F_j}\phi_D \in H^1\Omega^k(U).$$

Por el teorema de Meyers-Serrin, se tiene que si $w \in W^{s,p}\Omega^k(U)$ y $\mathcal{L}_{E_j}w \in \Omega^k(U)$, para toda $1 \leq j \leq n$, entonces $w \in W^{s+1,p}\Omega^k(U)$. Finalmente,

$$\phi_D|_U \in H^{2,2}\Omega^K(M) \equiv H^2\Omega^k(U). \tag{3.24}$$

b) Si $p \in \partial M$, existe una vecindad U de p en M y un marco normal $(\mathcal{N}^\dagger, E_2, \ldots, E_n)$ sobre U, tal que $\nabla_{E_j}\phi_D \in H^1\Omega^k(U)$, para $j = 2, \ldots, n$. ([Schwarz(1995)], p.77)

Lema 14. *Sea ϕ_D el potencial de Dirichlet para $\eta \in L^2\Omega^k(M)$. Entonces, para cada punto en la frontera $p \in \partial M$, existe una vecindad $U \subset M$ tal que*

$$\Phi_D|_U \in H^2\Omega^k(U).$$

Dem. *Sea $(\mathcal{N}^\dagger, E_2, \ldots, E_n)$ un marco normal sobre U una vecindad de p. Usando la fórmula de Weizenböck:*

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi_D = \Delta^{\Lambda}\phi_D - \mathcal{R}^W &= \sum_{1\leq j\leq n}\big(\nabla_j\nabla_j j\phi_D - \nabla_{\nabla_j E_j}\phi_D\big) - \mathcal{R}^W\phi_D \\
&= \nabla_{\widetilde{\mathcal{N}}}\nabla_{\widetilde{\mathcal{N}}}\phi_D + \nabla_{\nabla_{\widetilde{\mathcal{N}}}\widetilde{\mathcal{N}}}\phi_D \\
&\quad - \sum_{2\leq j\leq n}\big(\nabla_{E_j}\nabla_{E_j} - \nabla_{\nabla_{E_j}E_j}\big)\phi_D + \mathcal{R}^W\phi_D.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Recordemos que ϕ_D es la restricción de sobre U: $\phi_D|_U$. Y como $\phi_D \in H^1\Omega^k(U)$ y por la regularidad del lema (2.3.2), tenemos que

$$
\big(\nabla_{\nabla_{\widetilde{\mathcal{N}}}\widetilde{\mathcal{N}}}\phi_D - \sum_{2\leq n}(\nabla_{E_j}\nabla_{E_j} - \nabla_{\nabla_{E_j}E_j})\phi_D + \mathcal{R}^W\phi_D\big) \in \mathcal{L}^2\Omega^k(M). \tag{3.26}
$$

Aún más,

$$
\nabla_{E_j}\nabla_{\widetilde{\mathcal{N}}}w = \nabla_{\widetilde{\mathcal{N}}}\nabla_{E_j}w + \nabla_{[\widetilde{\mathcal{N}},E_j]}w + *(\widetilde{\mathcal{N}},E_j)w \quad \forall w \in \Omega^k(U). \tag{3.27}
$$

Le regularidad del potencial de Dirichlet puede interpretarse como una solución *débil* al problema con valores en la frontera de tipo Dirichlet. En el siguiente capítulo, se hará uso de dicho potencial y, junto con la elipticidad, se mostrará que el espacio $L^2(M)\Omega^k(M)$ puede verse como la suma de tres subespacios adecuados.

Capítulo 4

Aplicaciones de la elipticidad

En este capítulo se describirá brevemente una consecuencia de la condición de Lopatinskii-Shapiro: la descomposición del espacio $L^2(M)\Omega^k(M)$. Además, se presentará una aplicación de la descomposición: relacionar a los campos armónicos con las clases de cohomología asociadas a los operadores vistos anteriormente.

4.1. Descomposición de Hodge para ∂-variedades

En esta sección se presentarán dos descomposiciones de la clase de Sobolev sobre el haz exterior, a saber $W^{s,p}(\Omega^k(M))$, para toda $s \in \mathbb{N}$ y $p \geq 2$. A esta descomposición se le llama Hodge-Morrey. Definamos a los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{E}^k(M) := \{d\alpha \mid \alpha \in H^1\Omega_D^{k-1}(M)\} \subset L^2\Omega^k(M),$$

$$\mathcal{C}^k(M) := \{\delta\beta \mid \beta \in H^1\Omega_D^{k+1}(M)\} \subset L^2\Omega^k(M),$$

los subespacios de las k-formas exactas y co-exactas con componentes tangenciales y normales nulas, respectivamente. Por definición se tiene que $\mathcal{E}^0(M) = \{0\}$, $\mathcal{C}^n(M) = \{0\}$.

Finalmente, denotemos por

$$\mathcal{L}^2\mathcal{H}^k(M) = \overline{\mathcal{H}^k(M)} = \overline{\{\lambda \in H^1\Omega^k(M) \mid d\lambda = 0 \text{y } \delta\lambda = 0\}}. \tag{4.1}$$

También definimos los subespacios correspondientes

$$W^{s,p}\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}^k(M) \cap W^{s,p}\Omega^k(M),$$

$$W^{s,p}\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}^k(M) \cap W^{s,p}\Omega^k(M),$$
$$W^{s,p}\mathcal{H}(M) = L^2\mathcal{E}^k(M) \cap W^{s,p}\Omega^k(M).$$

Observaciones: Para α con la propiedad $d\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$ se tiene que $\mathbf{t}\alpha = 0$ y de manera análoga para β tal que $\delta\beta \in \mathcal{C}^k(M)$, $\mathbf{n}\beta = 0$

Teorema 4.1.1. *El espacio de las k-formas cuadrado integrables sobre una variedad compacta y con frontera se factoriza en la suma directa L^2- ortogonal,*

$$L^2(M)\Omega^k(M) = \mathcal{E}^k(M) \bigoplus \mathcal{C}^k(M) \bigoplus L^2\mathcal{H}^k(M) \tag{4.2}$$

a partir de los subespacios de las formas exactas, co-exactas y la cerradura respecto a L^2 del espacio de los campos armónicos.

Para el espacio $W^{s,p}\Omega^k(M)$ (con $s \in \mathcal{N}$ y $p \geq 2$), la correspondiente descomposición L^2-ortogonal establece que:

$$W^{s,p}\Omega^k(M) = W^{s,p}\mathcal{E}^k(M) \oplus W^{s,p}\mathcal{C}^k(M) \oplus W^{s,p}\mathcal{H}^k(M),$$

La demostración del teorema anterior será por partes, primero mostraremos la descomposición algebraica; luego se mostrará que los espacios $\mathcal{E}^k(M)$ y $\mathcal{C}^k(M)$ son cerrados con la topología L^2; luego se mostrará que si $w \in W^{s,p}\Omega^k(M)$ entonces $d\alpha_w$, $\delta\beta_w$ y κ_w están en la clase de Sobolev $W^{s,p}$. Finalmente, se estipula aunque no se demostrará que el espacio L^2-ortogonal $\left(\mathcal{E}^k(M) \bigoplus \mathcal{C}^k(M)\right)^{\perp} \cap W^{s,p}\Omega^k(M)$ coincide con el espacio de los campos armónicos $W^{2,p}\mathcal{H}(M)$.

Lema 15. *(Descomposición de L^2)*

(a) Para toda $w \in L^2\Omega^k(M)$ existen unas únicas formas diferenciales $d\alpha_\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $\delta\beta_w \in \mathcal{C}^k(M)$ y $\kappa_w \in (\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M))^{\perp}$ tales que,

$$w = d\alpha_\omega + \delta\beta_w + \kappa_w.$$

(b) Los espacios $\mathcal{E}^k(M)$, $\mathcal{C}^k(M)$ son cerrados respecto a la topología $L^2\Omega^k(M)$.

Dem. *Sabemos que la descomposición $L^2\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k_D(M) \oplus \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$ es válida; entonces para toda $w \in L^2\Omega^k(M)$ tenemos que:*

$$w = \lambda_D + (w - \lambda_D) \quad y \quad w = \lambda_N + (w - \lambda_N).$$

Por el teorema (3.3.3) existen los potenciales de Dirichlet ϕ_D para $w - \lambda_D \in \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$ y el potencial de Neumann ϕ_N $w - \lambda_N \in \mathcal{H}^k_N(M)^{\perp}$. Por el teorema 13 ambos potenciales están en la clase de Sobolev H^2 y

$$\alpha_w \in \delta\phi_D \in H^1\Omega^k_D(M) \quad y \quad \beta_w \in d\phi_N \in H^1\Omega^k_N(M).$$

Definamos a $\kappa_w = w - d\alpha_w - \delta_w$.

Afirmación κ_w *es ortogonal a* $\mathcal{E}^k(M)$.

Dem.

$$\begin{aligned}
\ll \kappa_w, d\alpha \gg &= \ll w - d\alpha_w - \delta\beta_w, d\alpha \gg \\
&= \ll \lambda_D + (w-\lambda_D), d\alpha \gg - \ll d\alpha_w, d\alpha \gg - \overset{(2.1.3)}{\cancel{\ll \delta\beta_w, d\alpha \gg}} \\
&= \overset{\lambda_D \in \mathcal{E}^{\perp}(M)}{\cancel{\ll \lambda_D, d\alpha \gg}} + \ll w - \lambda_D, d\alpha \gg - \ll d\alpha_w, d\alpha \gg \\
&= \ll w - \lambda_D, d\alpha \gg - \ll d\delta\phi_D, d\alpha \gg \\
&= \ll d\delta\phi_D, d\alpha \gg - \ll d\delta\phi_D, d\alpha \gg \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $d\alpha \in \mathcal{E}^k(M)$.

Lema 16. κ_w *es ortogonal a* $\mathcal{C}^k(M)$.

Dem. *Por demostrar que* $\ll \kappa_w, \delta\beta \gg = 0$ *para toda* $\delta\beta \in \mathcal{C}^K(M)$. *Sea* $\delta\beta \in \mathcal{C}^(M)$,

$$\begin{aligned}
\ll \kappa_w, \delta\beta \gg &= \ll w - d\alpha_w - \delta\beta_w, \delta\beta \gg \\
&= \ll w, \delta\delta\beta \gg - \overset{(2.1.3,\ [Schwarz(1995)])}{\cancel{\ll \delta\alpha_w, d\delta\beta \gg}} - \ll \delta\beta_w, \delta\beta \gg \\
&= \ll \lambda_N + (w - \lambda_n), \delta\beta \gg - \ll \delta\beta_w, \delta\beta \gg \\
&= \cancel{\ll \lambda_N, \delta\beta \gg} + \ll w - \lambda_N, \delta\beta \gg - \ll \delta\beta_w, \delta\beta \gg \\
&= \ll d\delta\phi_N, \delta\beta \gg - \ll d\delta\phi_N, \delta\beta \gg \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Por tanto, por los dos lemas anteriores se tiene que $\kappa_w \in \left(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\right)^{\perp}$.

Lema 17. $\mathcal{E}^k(M)$ *y* $\mathcal{C}^k(M)$ *son cerrados respecto a la topología* L^2.

Para $\mathcal{E}^k(M)$*: Sea* $\{d\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente respecto a la norma* L^2 *en* $\mathcal{E}^K(M)$*; es decir,* $d\alpha_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \eta \in \mathcal{E}^k(M)$. *Mostraremos que* $\eta \in \mathcal{E}^k(M)$. *Como* $\eta \in L^2\Omega^k(M)$, *se tiene la descomposición*

$$\eta = d\alpha_\eta + \delta\beta_\eta + \kappa_\eta,$$

en donde $d\alpha_\eta \in \mathcal{E}^k(M)$, $\delta\beta_\eta \in \mathcal{C}^k(M)$ *y* $\kappa_\eta \in \left(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\right)^{\perp}$. *Calculemos la distancia de* η *a* $d\alpha_j$ *con la norma en* L^2,

$$\begin{aligned}
||\eta - d\alpha_j||^2_{L^2} &= ||d\alpha_\eta + \delta\beta_\eta - \kappa_\eta - d\alpha_j||^2_{L^2} \\
&= ||d\alpha_\eta - d\alpha_j||^2_{L^2} + ||\delta\beta_\eta||^2_{L^2} + ||\kappa_\eta||^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$0 = \lim_{j\to\infty} ||\eta - d\alpha_j||^2_{L^2} = \lim_{j\to\infty} ||d\alpha - d\alpha_j||^2_{L^2} + ||\delta\beta_\eta||^2_{L^2} + ||\kappa_\eta||^2_{L^2} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{j\to\infty} ||d\alpha - d\alpha_j||^2_{L^2} = 0 \quad y \quad ||\delta\beta_\eta||^2_{L^2} + ||\kappa_\eta||^2_{L^2} = 0$$

Como κ_η y $\delta\beta_\eta$ son no negativos, entonces $||\delta\beta_\eta||^2_{L^2} = ||\kappa_\eta||^2_{L^2} = 0$. Por tanto, por unicidad del límite, $d\alpha_j$ converge a $\eta \in \mathcal{E}^k(M)$.

Observación: La demostración para $\mathcal{C}^k(M)$ es análoga.

Lema 18. *Si $w \in W^{s,p}(\Omega^k(M))$ (con $s \in \mathbb{N}, p \geq 2$), la descomposición:*

$$\eta = d\alpha_\eta + \delta\beta_\eta + \kappa_\eta,$$

con $d\alpha_\eta \in \mathcal{E}^k(M)$, $\delta\beta_\eta \in \mathcal{C}^k(M)$ y $\kappa_\eta \in \left(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\right)^\perp$, implica que: $d\alpha_w \in W^{s,p}\mathcal{E}^k(M)$, $\delta\beta_w \in W^{s,p}\mathcal{C}^k(M)$ y

Dem. *Sabemos por el teorema* (2.2.6) *que los campos armónicos en $\mathcal{H}^k_D$ y $\mathcal{H}^k_N$ son suaves. Además, si $w \in W^{s,p}\Omega^k(M)$ implica que $(w - \lambda_D)$ y $(w - \lambda_N) \in W^{s,p}\Omega^k)M$, pues por el teorema (2.2.6): λ_D, $\lambda_N \in W^{s+2,p} \hookrightarrow W^{s,p}$. Ahora usando la ecuación (4.5):*

$$\alpha_w = \delta\phi_D \in H^1\Omega^k_D(M) \quad y \quad \beta_w = d\phi_N \in H^1\Omega^k_N(M).$$

Pero sabemos, además, que los operadores tienen como dominio y contradominio los siguientes conjuntos:

$$d : W^{s+1,p}\Omega^k(M) \to W^{s,p}\Omega^{k+1}(M),$$
$$\delta : W^{s+1,p}\Omega^k(M) \to W^{s,p}\Omega^{k-1}(M).$$

Entonces,

$$d\alpha_w = d\delta\phi_D : H^1\Omega^k_D(M) \to H^{0,p}\Omega^k_D(M)$$

y

$$\delta\beta_w = \delta d\phi_N : H^1\Omega^k_N(M) \to H^{0,p}\Omega^k_D(M).$$

Entonces,

$$\kappa_w = (w - d\alpha_w - \delta\beta_w) \in \left(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\right)^\perp \cap W^{s,p}\Omega^k(M).$$

Lema 19. *(Cerradura)*

Los espacios de Sobolev $W^{s,p}\mathcal{E}^k(M)$, $W^{s,p}\mathcal{C}^k(M)$ y $\left(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\right)^\perp \cap W^{s,p}\Omega^k(M)$, son cerrados respecto a la topología $W^{s,p}$ para todo $s \in \mathbb{N}_0$ y $p \geq 2$.

Dem. *Sea $\{d\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W^{s,p}\mathcal{E}^k(M)$ que converge a $\eta \in W^{s,p}\Omega^k(M)$ con la norma $W^{s,p}$; en símbolos, $d\alpha_j \xrightarrow[W^{s,p}]{} \eta$. Se mostrará que $\eta \in \mathcal{C}^k(M)$. Sabemos que $d\alpha_j \xrightarrow[L^2]{} \eta$.*

Entonces, por el lema 15, entonces $\eta = d\alpha_\eta$*. Pero por el inciso anterior,* $d\alpha_\eta \in W^{s,p}\mathcal{E}^k(M) := W^{s,p}(M) \cap \mathcal{E}^k(M)$*. De manera análoga se puede demostrar la afirmación para el resto de los subespacios.*

Lema 20. *a) El espacio* $W^{s,p}\mathcal{H}^k(M)$ *de los campos armónicos de la clase de Sobolev* $W^{s,p}$ *(con* $s \in \mathbb{N}$ *y* $p \geq 2$*) coincide con el complemento ortogonal* $\big(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\big)^\perp \cap W^{s,p}\Omega^k(M)$*. De manera similar, para la norma* $L^p\mathcal{H}^k(M) = \big(\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M)\big)^\perp \cap L^p(M)$*.*

b) Para $k = 0$ *y* $k = n$*, respectivamente, los campos armónicos son constantes. Si* M *es conexo, entonces*

$$\mathcal{H}^0(M) = \mathbb{R} \quad y \quad \mathcal{H}^n(M) = \{\nu \in \Omega^n(M) | \nu = c\mu, c \in \mathbb{R}\},$$

en donde μ *es la forma riemanniana de volumen sobre* M*.*

Observaciones: La descomposición anterior se aplica a formas diferenciales de cualquier clase de Sobolev, en particular para el propio espacio $\Omega^k(M)$.

A pesar de que las formas diferenciales $d\alpha_w$ y $\delta\beta_w$ están determinadas por w, existe cierto grado de libertad en la elección de α_w y β_w. Para caracterizar a esta propiedad definamos a los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{G}^{k-1}_{\mathcal{E}}(M) := \{\gamma \in \mathcal{H}^1\Omega^{k-1}_D(M) \mid d\gamma = 0\},$$
$$\mathcal{C}^{k+1}_{\mathcal{C}}(M) := \{\epsilon \in \mathcal{H}^1\Omega^{k+1}_N(M) \mid \delta\epsilon = 0\}$$

las formas exactas y co-exactas, respectivamente.

Lema 21. *Sean* $d\alpha_w \in \mathcal{E}^k(M)$ *y* $\delta\beta_w \in \mathcal{C}^k(M)$*, las componentes de Hodge para* $w \in L^2\Omega^k(M)$*. Entonces, las formas diferenciales* α_w *y* β_w *pueden elegirse de manera únicas, en el sentido siguiente*

$$\ll \alpha_w, \gamma \gg \, = 0 \quad \text{para toda} \quad \gamma \in \mathcal{G}^{k-1}_\epsilon(M), \tag{4.4}$$

y

$$\ll \beta_w, \epsilon \gg \, = 0 \quad \text{para toda} \quad \gamma \in \mathcal{G}^{k+1}_c(M),$$

(En particular esto implica que $\delta\alpha_w = 0$ *y* $\alpha_w \in \mathcal{H}^{k-1}_D(M)^\perp$*. Por otro lado,* $d\beta_w = 0$ *y* $\beta_w \in \mathcal{H}^{k+1}_N(M)^\perp$*).*

4.2. Descomposición de Friedrichs

Definamos a los subespacios de campos armónicos exactos y co-exactos como:

$$\mathcal{H}^k_{ex}(M) := \{\kappa \in \mathcal{H}^k(M) \mid \kappa = d\epsilon\} = \{k = d\epsilon \in H^1\Omega^k(M) \mid d\kappa = 0 \quad \text{y} \quad \delta\kappa = 0\}$$

y

$$\mathcal{H}^k_{co}(M) := \{\kappa \in \mathcal{H}^k(M) \mid \kappa = d\gamma\} = \{k = d\gamma \in H^1\Omega^k(M) \mid \delta\kappa = 0 \quad \text{y} \quad \delta\kappa = 0\}.$$

Teorema 4.2.1. *Sobre una variedad compacta y con frontera el espacio $\mathcal{H}^k(M) \subset H^1\Omega^k(M)$ de los campos armónicos, puede descomponerse de manera respectiva en*

$$\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k_D(M) \oplus \mathcal{H}^k_{co}(M)$$

y

$$\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k_N(M) \oplus \mathcal{H}^k_{ex}(M).$$

Para $L^p\mathcal{H}^k(M)$ y $W^{s,p}\mathcal{H}^k(M)$, también se tienen las descomposiciones pertinentes (con $s \in \mathbb{N}$ y $p \geq 2$).

Dem. *Primero mostremos que los subespacios $\mathcal{H}^k_D(M)$ y $\mathcal{H}^k_{co}(M)$, son ortogonales: sean $\gamma \in H^1\Omega^{k+1}(M)$ y $\lambda \in \mathcal{H}^k_D$. Usando la fórmula de Green*

$$\ll \cancelto{0}{d\lambda}, \gamma \gg = \ll \lambda, \delta\gamma \gg + \int_{\partial M} \cancelto{0}{\mathbf{t}\lambda} \wedge \mathbf{n}\gamma = 0.$$

Por tanto,

$$\ll \lambda, \delta\gamma \gg \; = \; 0.$$

Como λ y γ fueron arbitrarios $\mathcal{H}^k_D(M)$ y $\mathcal{H}^k_{co}(M)$ son ortogonales. Para mostrar la descomposición $\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{H}^k_D(M) \oplus \mathcal{H}^k_{co}(M)$, tomemos $\kappa \in \mathcal{H}^k(M)$ pero en el complemento ortogonal $\mathcal{H}^k_D(M)^\perp$, por el teorema (3.3.3), existe un potencial de Dirichlet asociado a κ, denotado por ϕ_κ. Tomemos $\gamma_\kappa := d\phi_\kappa$. Entonces, por el resultado anterior se tiene

$$\ll \delta\gamma_\kappa, \lambda \gg = \ll \delta d\phi_\kappa, \lambda \gg = 0.$$

Si ahora usamos el (5), se tiene que: $\ll \kappa, d\alpha \gg = \ll d\delta\phi_\kappa, d\alpha \gg$ con $\kappa \in \mathcal{H}^k_D(M)^\perp$ y $\alpha \in H^1\Omega^{k-1}_D(M)$. Por tanto,

$$\ll \kappa, d\alpha \gg = \ll d\delta\phi_\kappa, d\alpha \gg = 0.$$

Así, tenemos que $(\kappa - \delta\gamma_\kappa) \in \mathcal{H}^k_D(M)^\perp$.

Por construcción, ϕ_κ es solución al problema

$$\Delta\phi_\kappa = \kappa.$$

Entonces, $(\kappa - \delta\gamma_\kappa) = \Delta\phi_\kappa - \delta d\gamma_\kappa = d\delta\gamma_\kappa + \cancelto{0}{\delta d\gamma_\kappa - \delta d\gamma_\kappa}$. Sobre la frontera de M se cumple $\mathbf{t}\phi_\kappa = 0$ y $\mathbf{t}\delta\phi_\kappa = 0$; entonces, $\mathbf{t}(\kappa - \delta\gamma_\kappa) = \mathbf{t}\delta\phi_\kappa = \delta\mathbf{t}\phi_\kappa = 0$. Pero, esto muestra $(\kappa - \delta\gamma_\kappa)$ es armónico de Dirichlet; es decir, $(\kappa - \delta\gamma_\kappa) \in \mathcal{H}^k_D(M)$.

Por tanto, como $(\kappa - \delta\gamma_\kappa) \in \mathcal{H}^k_D(M)^\perp$ y $(\kappa - \delta\gamma_\kappa) \in \mathcal{H}^k_D(M)$, entonces $(\kappa - \delta\gamma_\kappa) = 0$. Así, como

$$\kappa = \delta\gamma_\kappa,$$

entonces κ es co-exacto, $\kappa \in \mathcal{H}^k_{co}(M)$.

4.3. Aproximaciones

Lema 22. *Si $w \in W^{s,p}\Omega^k(M)$ (con $s \in \mathbb{N}$ y $p \geq 2$) entonces,*

$$||w||_{W^{s,p}} \leq C_F\big(||dw||_{W^{s-1,p}} + ||\delta w||_{W^{s-1,p}},\big)$$

si se cumple cualesquiera de las siguientes condiciones

1. *w es L^2-ortogonal al espacio de los campos armónicos $W^{s,p}\mathcal{H}^k(M)$.*
2. *w es L^2-ortogonal al espacio de los campos armónicos de Dirichlet $\mathcal{H}^k_D(M)$ y $\mathbf{t}w = 0$.*
3. *w es L^2-ortogonal al espacio de los campos armónicos de Neumann $\mathcal{H}^k_N(M)$ y $\mathbf{n}w = 0$.*
4. *w se anula en la frontera; es decir $w|_{\partial M} = 0$.*

Dem. Sea $w \in W^{s,p}\Omega^k(M)$, como w es L^2-ortogonal al espacio $W^{s,p}\mathcal{H}^k(M)$, tenemos por la descomposición de Hodge-Morrey:

$$w = d\alpha_w + \delta\beta_w.$$

Entonces, por la desigualdad del triángulo llegamos a que,

$$||w||_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq ||d\alpha_w||_{L^s(\mathbb{R}^n)} + ||\delta\beta_w||_{L^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $s \geq 1$, la forma $\alpha_w = \delta\phi_D$ puede interpretarse como el potencial de Dirichlet para δw; es decir, como la solución al problema elíptico con valores en la frontera:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_w = \delta w \quad &sobre \quad M \\ \mathbf{t}\alpha_w = 0 \quad y \quad \mathbf{t}\delta\alpha_w = 0 \quad &en \quad \partial M. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Denotemos por $\Omega^{k-1}_{hom}(M) = \{\eta \in \Omega^{k-1}_D(M) \quad | \quad \mathbf{t}\delta\eta = 0\}$, al espacio de las formas diferenciales que satisfacen las ecuaciones (4.5). Por el teorema ([Schwarz(1995)], 1.6.2) el Laplaciano

$$\Delta : W^{s+1}\Omega^{k-1}_{hom}(M) \to W^{s-1}\Omega^{k-1}(M),$$

es Fredholm y por la proposición (3), entonces $\mathbb{B}_1 = \ker(\mathrm{A}) \oplus \hat{\mathbb{D}}_1$, en donde $\hat{\mathbb{D}}_1$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{B}_2$ con la propiedad de que:

$$||x||^1_{\mathbb{B}} \leq ||Ax||_{\mathbb{B}_2} \quad para\ todo \quad x \in \hat{\mathbb{D}}_1.$$

Trabajemos sobre el término $||d\alpha_w||_{W^s}$. Sabemos que $\alpha_w \in \mathcal{H}^{k-1}_D(M)^\perp$; además, $\ker(\Delta|_{\Omega^{k-1}_{hom}}) = \mathcal{H}^{k-1}_D$, pues sea $w \in \ker(\Delta|_{\Omega^{k-1}_{hom}})$, entonces,

$$\Delta w = 0 = \delta dw + d\delta w = 0,$$

lo que implica que

$$d\delta w = -\delta d w \quad y \quad \mathbf{t}\delta w = 0.$$

Ahora, utilicemos la fórmula de Green,

$$\ll d\lambda, \eta \gg \; = \; \ll \lambda, \delta\eta \gg \; + \int_{\partial M} \mathbf{t}\lambda \wedge *\mathbf{n}\eta,$$

Llegamos a que

$$\ll d\delta w, w \gg \; = \; \ll \delta w, \delta w \gg \; + \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta w \wedge *\mathbf{n}\eta,$$

entonces

$$\ll \delta w, \delta w \gg = 0 \iff \delta w = 0.$$

De manera análoga para dw, se tiene que $d = 0$. Por tanto, $w \in \mathcal{D}_D^{k-1}$.

Como $d : W^{s+1}\Omega^k(M) \to W^s\Omega^{k+1}(M)$, es un operador acotado, entonces,

$$||d\alpha_w||_{W^{s,p}} \leq c_1||\alpha_w||_{W^{s-1,p}} \leq c_2||\Delta\alpha_w||_{W^{s-1,p}} = c_2||\delta w||_{W^{s-1,p}}.$$

ii) Supongamos w ortogonal a $\mathcal{H}_D^k$, sabemos que existe la descomposición de L^2 siguiente,

$$L^2\Omega^k(M) = \mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M) \oplus L^2\mathcal{H}_{co}^k \oplus \mathcal{H}_D^k(M);$$

pero por la ortogonalidad, no existe componente distinta de cero en $\mathcal{H}_D^k$.

Entonces por el corolario (2.4.9),

$$w = d\alpha_w + \delta\beta_w + \delta\gamma_w.$$

Ergo,

$$||w||_{W^{s,p}} \leq ||d\alpha_w||_{W^{s,p}} + ||\delta\beta_w||_{W^{s,p}} + ||\delta\gamma_w||_{W^{s,p}}.$$

Estimemos el término $||\delta\beta_w||_{W^{s,p}} \leq ||\gamma||_{W^{s-1,p}}$. Sabemos por construcción de la descomposición que $\gamma_w = d\phi_\kappa$, en donde ϕ_κ es el potencial de Dirichlet para $\kappa = \delta\gamma_w$.

Como $\delta\gamma_w$ es armónica y $d\gamma_w = 0$, se tiene que para $\gamma_w \in W^{s+1,p}\Omega^{k+1}(M)$,

$$\Delta\gamma_w = 0,$$

ya que, $d\delta\gamma_w = 0 = \delta d\gamma_w$. Además,

$$\mathbf{t}w = \mathbf{t}(d\alpha_w + \delta\beta_w + \delta\gamma_w) = \cancelto{0}{\mathbf{t}d\alpha_w} + \mathbf{t}\delta\beta_w + \mathbf{t}\delta\gamma_w.$$

Por tanto, $\mathbf{t}\delta\beta_w = -\mathbf{t}t\delta\gamma_w$, pues $\mathbf{t}w = 0$. Por el teorema ([Schwarz(1995)],1.6.2) tenemos la siguiente estimación a priori,

$$||\gamma_w||_{W^{s+1,p}(M)} \leq c_1\Big(||\mathbf{t}\delta\beta||_{W^{s-1-1/p,p}(\partial M)} + ||\gamma_w||_{L^2(M)}\Big).$$

Por otro lado, por construcción $\gamma_w = d\phi_\kappa \in \mathcal{H}^k_D(M)^\perp$. *Usando la proposición (3.3.2), existen contantes* c *y* C *tales que*

$$c||w||^2_{H^1} \leq D(w,w) \leq C||w||^2_{H^1}.$$

Por la fórmula de Green, la

$$\begin{aligned}
||\gamma_w||^2_{H^1} &\leq c_2 D(\gamma_w,\gamma_w) \\
&= c_2\big(\ll d\gamma_w, d\alpha_w \gg \ + \ \ll \delta\gamma_w, \delta\alpha_w \gg \ \big) \\
&= c_2\big(\cancel{\ll dd\phi_\kappa, dd\phi_\kappa \gg} + \ \ll \delta\gamma_w, \delta\alpha_w \gg \ \big) \\
&= c_2 \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\beta_w \wedge *\mathbf{n}\gamma_w. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que si usamos la fórmula de Green y al hecho de que $\Delta\gamma_w = 0$, *entonces* $d\delta\gamma_w = -\delta d\gamma_w$. *Así,*

$$\ll d\delta\gamma, \gamma_w \gg \ = \ \ll -\delta d\gamma_w, \gamma_w \gg \ = \ \ll \delta\, \cancelto{0}{dd\phi_\kappa}, d\phi_\kappa \gg \ = \ 0.$$

Entonces,

$$0 \ = \ \ll d\delta\gamma_w, \gamma_w \gg \ = \ \ll \delta\gamma_w, \delta\gamma_w \gg \ + \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\gamma_w \wedge *\mathbf{n}\delta\gamma_w.$$

Ergo,

$$\ll \delta\gamma_w, \delta\gamma_w \gg \ = \ -\int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\gamma_w \wedge *\mathbf{n}\delta\gamma_w.$$

Si ahora usamos la desigualdad de Cauchy en los puntos de la frontera de M, *tenemos que:*

$$\begin{aligned}
||\gamma_w||^2_{H^1(M)} &\leq c_2 \left| \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\beta_w \wedge *\mathbf{n}\gamma_w \right| \\
&\leq ||\mathbf{t}\delta\beta_w||_{L^2(\partial M)} \cdot ||\mathbf{n}\gamma_w||_{H^1(M)} \\
&\leq c_3 ||\mathbf{t}\delta\gamma||_{L^2(\partial M)} \cdot ||\gamma_w||_{H^1(M)}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$||\gamma_w||_{H^1(M)} \leq ||\mathbf{t}\delta\beta_w||_{L^2(\partial M)}.$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} ||\gamma_w||_{W^{s+1,p}(M)} &\leq c_1\Big(||\mathbf{t}\delta\beta||_{W^{s-1-1/p,p}(\partial M)} + ||\gamma_w||_{L^2(M)}\Big) \\ &= c_1\Big(||\mathbf{t}\delta\beta||_{W^{s-1-1/p,p}(\partial M)} + c_3||\mathbf{t}\delta\beta_w||_{L^2(\partial M)}\Big) \\ &\leq c_4\Big(||\mathbf{t}\delta\beta||_{W^{s-1-1/p,p}(\partial M)}\Big) \\ &\leq c_5||\delta\beta_w||_{W^{s-1,p}(M)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

iii)Demostración análoga a ii).

iv) Supongamos que w se anula en la frontera de M, entonces por el teorema (3.4.10) el problema con valores en la frontera siguiente,

$$\Delta w = \eta \quad \text{y} \quad w|_{\partial M} = 0,$$

es elíptico. Entonces,

$$\begin{aligned} ||w||_{W^{s+2,p}} &\leq c||\Delta w||_{W^{s,p}} \\ &\leq c||d\delta w||_{W^{s,p}} + ||\delta dw||_{W^{s,p}} \\ &\leq ||\delta w||_{W^{s-1,p}} + ||dw||_{W^{s-1,p}}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

que es lo buscado.

4.3.1. Algunos lemas de aproximación

Lema 23. *Sean $d\alpha_w \in W^{s,p}\mathcal{E}^k(M)$ y $\delta\beta_w W^{s,p}\mathcal{C}^k(M)$ las componentes de Hodge para $w \in W^{s,p}\Omega^k(M)$ (con $s \in \mathbb{N}_0$ y $p \geq 2$). Entonces se pueden elegir $\alpha_w \in W^{s+1,p}\Omega^{k-1}_D(M)$ y $\beta_w \in W^{s+1,p}\Omega^{k+1}_N$ tales que:*

$$||\alpha_w||_{W^{s+1,p}} \leq C_a||w||_{W^{s,p}} \quad \text{y} \quad ||\beta_w||_{W^{s+1,p}} \leq C_N||w||_{W^{s,p}} \tag{4.10}$$

Dem. *Recordemos que $\mathcal{H}^k_D(M) \subset W^{s,p}\Omega^k(M)$ es finito dimensional, entonces por el Teorema 1.2.14, $\mathcal{H}^k_D$ es complementado; es decir, existe un subespacio cerrado $\widehat{D} \subset W^{s,p}\Omega(M)$ tal que $W^{s,p}\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k_D \oplus \widehat{D}$. Además, la proyección $w \mapsto \lambda_D \in \mathcal{H}^k_D(M)$ dada por:*

$$\pi : W^{s,p} \to \mathcal{H}^k_D(M)$$

$$\pi(w) = \lambda_D,$$

y la proyección ortogonal

$$\pi^{\perp} : W^{s,p} \to \mathcal{H}^k_D(M)^{\perp}$$

$$\pi^{\perp}(w) = (w - \lambda_D),$$

es continua y por tanto acotada.

Entonces,

$$||\pi(\lambda_D)||_{W^{s,p}} = ||\lambda_D||_{W^{s,p}} \leq ||w||_{W^{s,p}},$$

y

$$||w - \lambda_D||_{W^{s,p}} \leq ||w||_{W^{s,p}} + ||\lambda_D||_{W^{s,p}} \leq ||w||_{W^{s,p}} + C_1||w||_{W^{s,p}} = (1 + C_1)||w||_{W^{s,p}}.$$

Por otro lado, por construcción, el potencial de Dirichlet, $\phi_D \in \mathcal{H}_D^k(M)$ asociado a $(w - \lambda_D)$ se determinó vía el problema elíptico con valores en la frontera. Por el lema (3) $\Delta|_{W^{s+2,p}(\Omega^k_{hom})}$ es un operador de Fredholm y por la proposición ([Schwarz(1995)],1.5.8, pp. 51), se tiene que

$$||\phi_D||_{W^{s+2,p}} \leq C_2||\Delta\phi_D||_{W^{s,p}}.$$

Por construcción denotamos a $\alpha_w = \delta\phi_D$ (con $\delta : W^{s,p} \to W^{s+1,p}$), entonces

$$\begin{aligned} ||\alpha_w||_{W^{s+1,p}} &= ||\delta\phi_D||_{W^{s+1,p}} \\ &\leq c||\phi_D||_{W^{s+2,p}} \\ &\leq C_3||\Delta\phi_D||_{W^{s,p}} \\ &= C_3||w\lambda_D||_{W^{s,p}} \\ &\leq \tilde{C}||w||_{W^{s,p}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por tanto,

$$||\alpha_w||_{W^{s+1,p}} \leq \tilde{C}||w||_{W^{s,p}}.$$

Lema 24. *([Schwarz(1995)]) Sean p, q conjugados y $w \in L^q\Omega^k(M)$. Entonces, existen de manera única las siguientes formas diferenciales,*

$$d\alpha_w \in L^q\mathcal{E}^k(M)^k(M), \quad \delta\beta_w \in L^q\mathcal{C}^k(M) \quad \text{y} \quad \kappa \in \left(L^p\mathcal{E}^k(M) \oplus L^p\mathcal{C}^k(M)\right)^{\circ}, \tag{4.12}$$

tales que

$$w = d\alpha_w + \delta\beta_w + \kappa_w.$$

Dem. *Sabemos de la existencia de los potenciales de Dirichlet $\phi_D \in W^{2,q}\Omega^k(M)$ para $(w - \lambda_D) \in \mathcal{H}_D^k(M)^{\circ}$ y el potencial de Neumann $\phi_N \in W^{2,p}\Omega^k(M)$. Definamos a las siguientes formas diferenciales:*

$$\alpha_w = \delta\phi_D \in W^{1,q}\Omega_D^k(M),$$

$$\beta_w = d\phi_N \in W^{1,q}\Omega_N^k(M)$$

y

$$\kappa = (w - d\alpha_w - \delta\beta_w) \in L^q(\Omega^k(M)).$$

Entonces por el corolario (2.1.3,[Schwarz(1995)]), $\delta\beta_w \in L^p\mathcal{E}^k(M)^\circ$ *y* $\lambda_D \in L^p\mathcal{E}^k(M)^\circ$.

4.4. Topología y Geometría: Cohomología de de Rham.

En esta sección se demuestra que la k-ésima clase de cohomología de de Rham para la derivada experior es isomorfa a los campos armónicos de Neumann. Y finalizaremos con un teorema que establece que bajo ciertas condiciones sobre la curvatura media de una variedad con frontera, la k-ésima cohomología de de Rham se anula.

Consideremos el complejo de de Rham $(\Omega(M), d)$ del espacio de las formas diferenciales sobre una variedad con frontera, sin imponer condiciones en la frontera, tenemos la siguiente sucesión:

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \to 0. \tag{4.13}$$

Definición 4.4.1. *Definimos a la k-ésima cohomología de de Rham como*

$$\mathbb{H}^k(M,d) := \frac{\ker(d|_{\Omega^k(M)})}{\operatorname{Im}(d|_{\Omega^{k-1}(M)})}.$$

De manera análoga definimos el complejo dual,

$$0 \leftarrow \Omega^0(M) \xleftarrow{\delta} \Omega^1(M) \xleftarrow{\delta} \Omega^2(M) \cdots \xleftarrow{\delta} \Omega^n(M) \leftarrow 0, \tag{4.14}$$

la k-ésima cohomología de módulos:

$$\mathbb{H}^k(M,\delta) := \frac{\ker(\delta|_{\Omega^k(M)})}{\operatorname{Im}(\delta|_{\Omega^{k+1}(M)})}.$$

Además, si consideramos que $\mathbf{t}w = 0$, es decir si $w \in \Omega_D^k(M)$ definimos la cohomología relativa de de Rham como

$$\mathbb{H}_r^k(M,d) := \frac{\ker(d|_{\Omega_D^k(M)})}{\operatorname{Im}(d|_{\Omega_D^{k-1}(M)})},$$

mientras que para la condición $\mathbf{n}w$, $w \in \Omega_N^k(M)$ definimos

$$\mathbb{H}_a^k(M,\delta) := \frac{\ker(\delta|_{\Omega_N^k(M)})}{\operatorname{Im}(\delta|_{\Omega_N^{k+1}(M)})}.$$

Teorema 4.4.2. *(Isomorfismo de Hodge) Sea M una variedad con frontera. Entonces,*

$$\mathbb{H}^k(M,d) \cong \mathcal{H}^k_N(M) \quad \text{y} \quad \mathbb{H}^k(M,\delta) \cong \mathcal{H}^k_D(M). \tag{4.15}$$

Dem. *Tomemos $w \in \Omega^k(M)$, entonces por la descomposición de Hodge-Morrey-Friedricks, se tiene*

$$w = d\alpha_w + \delta\beta_w + d\epsilon_w + \kappa_w,$$

con $\alpha_w \in \mathcal{E}^k(M)$, $\delta\beta_w \in \mathcal{C}^k(M)$, $d\epsilon_w \in \mathcal{H}^k_{ex}$ y $\kappa_w \in \mathcal{H}^k_N$.

Caractericemos al núcleo de d. Así, si $dw = 0$, tenemos

$$\cancelto{0}{dd\alpha_w} + d\delta\beta_w + \cancelto{0}{dd\epsilon_w} + \cancelto{0}{d\kappa_w} = 0,$$

por tanto, $d\delta = 0$. Veamos que $\delta\beta_w = 0$: Usando la fórmula de Green,

$$\ll \cancel{d\delta\beta}, \delta\beta \gg = \ll \delta\beta, \cancel{\delta\delta\beta} \gg + \int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\beta \wedge *\mathbf{n}\delta\beta = 0.$$

Así, $\int_{\partial M} \mathbf{t}\delta\beta \wedge *\mathbf{n}\delta\beta = 0 \iff \delta\beta = 0$. Entonces en la descomposición inicial, la componente $\delta\beta$ se anula. Así, $w \in \operatorname{Ker}(d|_{\Omega^k(M)}) \iff w = d\alpha_w + d\epsilon_w + \kappa_w = d(\alpha_w + \epsilon_w) + \kappa_w$.

Definimos $\mathcal{H}^k_N \ni \kappa_w := w - d(\alpha_w + \epsilon_w)$..

Por tanto, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^k(M,d) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "HMD"'] & \mathcal{H}^k_N(M) \\
\mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{H}^k_{ex} \oplus \mathcal{H}^k_N. \arrow[ur, "\mathrm{Pr}"] &
\end{tikzcd}$$

Corolario 4.4.3. $\mathbb{H}^k_r(M) = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(d|_{\Omega^k_D(M)}\right)}{\operatorname{Im}\left(d|_{\Omega^{k-1}_D(M)}\right)} \cong \mathcal{H}^k_D(M).$

Dem. *Sea $w \in \Omega^k_D$, entonces por la descomposición anterior $w = d\alpha_w + \delta\gamma_w + \lambda_w$. Así,*

$$\mathbf{t}w = \cancel{\mathbf{t}d\alpha_w} + \mathbf{t}\delta\gamma_w + \cancel{\mathbf{t}\lambda_w} = 0.$$

Por tanto, $\mathbf{t}\delta\gamma_w = 0$ y por la ortogonalidad de la descomposición de Friedichs

$$\delta\gamma_w = 0.$$

Corolario 4.4.4. *(Dualidad de Poincaré) ([Schwarz(1995)], p.105)*

a) $\mathbb{H}^k(M,d) \cong \mathbb{H}^k_a(M)$ y $\mathbb{H}^k(M,\delta) \cong \mathbb{H}^k_r(M)$.

b) El operador de Hodge $*$ sobre $\Omega(M)$ induce un isomorfismo

$$*_P : \mathcal{H}^k_a \to \mathbb{H}^{n-k}_r(M). \tag{4.16}$$

A este isomorfismo se le llama dualidad de Poincaré para variedades con frontera.

Corolario 4.4.5. *(Dualidad de Lefschetz)([Schwarz(1995)]) La transformación* $\mathcal{H}^k \to \mathbb{H}_r^{n-k}(M)$ *es un isomorfismo.*

Teorema 4.4.6. *([Schwarz(1995)], p.106) Sea* M *una variedad riemanniana con frontera.*

1. *Si el tensor de Ricci de* (M, g) *es positivo definido y si la curvatura media* $\mathrm{traza}(\mathcal{K})$*, de la variedad con frontera* $\partial M \subset M$*, es positiva definida, entonces la primer cohomología relativa* $\mathbb{H}_r^1(M)$ *se anula.*

2. *Si asumimos que el endomorfismo entre haces* $\mathcal{R}^W \in \mathrm{End}(\Lambda^k(M))$*, determinado por la fórmula de Weizenböch,*

$$\Delta w = \Delta^\Lambda w - \mathcal{R}^W w \quad w \in \Omega^k(M),$$

y el endomorfismo entre haces $\mathcal{S} \in \mathrm{End}(\Lambda^k(M)|_{\partial M})$*, determinado por la segunda forma fundamental,* $\mathcal{K}$ *de* M*,*

$$(\mathcal{S}w)(\mathcal{N}, E_{\sigma(1),\ldots,E_{\sigma(k-1)}}) = -\sum_{1\leq j\leq (n-1)} (\mathcal{K}^\Lambda(E_j)w)(E_j, E_{\sigma(1),\ldots,E_{\sigma(k-1)}}),$$

son negativos definidos en el nivel de las k-formas, entonces la cohomología $\mathbb{H}_r^k(M)$ *se anula.*

Dem. *Primero se mostrará la segunda afirmación: Se usará el isomorfismo* $\mathcal{H}_D^k \cong \mathbb{H}_r^k(M)$*.*

Sea M *compacta y con frontera. Entonces, para algún endomorfismo* $\mathcal{S} \in \mathrm{End}(\Lambda^k(M)|_{\partial M})$*, se tiene que*

$$||w||_{H^1}^2 = ||w||_{L^2}^2 + \ll \mathcal{R}^\Lambda w, w \gg + \mathcal{D}(w,w) + \int_{\partial M} \langle \mathcal{S}w, w \rangle_{\Lambda^k} \mu\partial. \tag{4.17}$$

Además, recordemos que

$$||\lambda||_{H^1}^2 = ||\lambda||_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{a\in A} \int_M \rho_a \langle \nabla_i w, \nabla_i w \rangle_{\Lambda^k} \mu. \tag{4.18}$$

Sea $\lambda \in \mathcal{H}_D^k(M)$ *un campo armónico de Dirichlet, entonces*

$$||\lambda||_{H^1}^2 - ||\lambda||_{L^2}^2 = \ll \mathcal{R}^\Lambda \lambda, \lambda \gg + \cancelto{0}{\mathcal{D}(\lambda,\lambda)} + \int_{\partial M} \langle \mathcal{S}\lambda, \lambda \rangle_{\Lambda^k} \mu\partial. \tag{4.19}$$

$$||\lambda||_{H^1}^2 - ||\lambda||_{H^1}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{a\in A} \int_M \rho_a \langle \nabla_i w, \nabla_i w \rangle_{\Lambda^k} \mu = \ll \mathcal{R}^\Lambda \lambda, \lambda \gg + \cancelto{0}{\mathcal{D}(\lambda,\lambda)} + \int_{\partial M} \langle \mathcal{S}\lambda, \lambda \rangle_{\Lambda^k} \mu\partial. \tag{4.20}$$

Así,

$$0 \leq \ll \mathcal{R}^W \lambda, \lambda \gg + \int_{\partial M} \langle \mathcal{S}\lambda, \lambda \rangle_{\Lambda^k} \mu \partial. \tag{4.21}$$

Pero por hipótesis, $\mathcal{S} \in \mathrm{End}(\Lambda^k(M)|_{\partial M})$ *y* $\mathcal{R}^W \in \mathrm{End}(\Lambda^k(M))$*, son negativo definidos para* $\lambda \neq 0$*, se tiene que*

$$0 \leq \ll \mathcal{R}^W \lambda, \lambda \gg + \int_{\partial M} \langle \mathcal{S}\lambda, \lambda \rangle_{\Lambda^k} \mu \partial < 0. \tag{4.22}$$

Por tanto, $\lambda \equiv 0$*. Entonces,* $\mathcal{H}_D^k(M) = \{0\}$ *y por el corolario (4.4.5),* $\mathbb{H}_r^k(M)$ *se anula.*

Para la primera afirmación: tomemos $k = 1$ *y sea* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *un marco local entonces,*

$$\begin{aligned} \ll \lambda, \mathcal{R}^W \lambda \gg_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j) \cdot (\mathcal{R}^\Lambda(E_i, E_j)\lambda)(E_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j) \cdot \lambda\big(\mathcal{R}(E_i, E_j)(E_i)\big) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j) \cdot \lambda(\mathrm{Ric} E_j). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por otro lado, sean $\{\mathcal{N}, E_2, \ldots, E_{n-1}\}$ *y* $\{\mathcal{N}^\dagger, E^2, \ldots, E^{n-1}\}$ *marco local y marco local dual, respectivamente. Usaremos la siguiente notación* $\lambda_i = \lambda(E_i)$*,* $K_j = K(E_j, E_j)$*,* $\lambda_i = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\lambda}_i^k E^k$ *y* $K_j = \sum_{r=1}^{n-1} \bar{k}_j^r E_r$*. Entonces,*

$$\begin{aligned} \ll \sum_{1 \leq i \leq n-1} \lambda(E_i), \big(-\sum_{1 \leq j \leq n-1} \lambda(K(E_j, E_j))\big) \gg &= -\sum_{1 \leq i \leq n-1} \sum_{1 \leq j \leq n-1} \ll \lambda(E_i), \big(\lambda(K(E_j, E_j))\big) \gg \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \right\} \bar{\lambda}_i^k \bar{k}_j^r \ll E^k(E_i), \bar{\lambda}_r^s E^s(E_r) \gg \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \right\} \bar{\lambda}_i^k \bar{k}_j^r \bar{\lambda}_r^s \ll E^k(E_i), E^s(E_r) \gg \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \right\} \bar{\lambda}_i^k \bar{k}_j^r \bar{\lambda}_r^s \delta_i^k \delta_s^r \delta_s^k \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\lambda}_k^k \bar{\lambda}_s^s \bar{k}_r^j \\ &= -|\lambda|^2 \mathrm{tr}(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Por tanto, los endomorfismos $\mathcal{R}^W$ *y* $\mathcal{S}$ *son negativos-definidos si y sólo si el tensor de Ricci, Ric, y la curvatura media* $\mathrm{tr}(\mathcal{K})$ *son positivas. Por el inciso (b) de la Dualidad de Poincaré,* $\mathbb{H}_r^1(M)$ *se anula.*

Bibliografía

[Bröcker(1982)] K. Bröcker, T. y Jänich. *Introduction to Differential Topology*. Cambridge University Press, 1982.

[Gilkey(1994)] P.B. Gilkey. *Invariance Theory: The Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1994.

[Luke(2013)] A.S. Luke, G. y Mishchenko. *Vector Bundles and Their Applications*. Mathematics and Its Applications. Springer US, 2013.

[Melrose(2007)] Richard Melrose. Introduction to microlocal analysis, December 2007.

[Mukherjee(2015)] A. Mukherjee. *Differential Topology*. Springer International Publishing, 2015.

[Salsa(2008)] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action: from modelling to theory*. Universitext. Springer, Milano, 2008.

[Sanchez Morgado(2008)] Oscar Sanchez Morgado, Hector y Palmas. *Geometría riemanniana*. 2008.

[Saunders(1989)] D. J. Saunders. *The Geometry of Jet Bundles*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1989.

[Schwarz(1995)] G. Schwarz. *Hodge decomposition: a method for solving boundary value problems*. Lecture notes in mathematics. Springer, 1995.

[Taira(2016)] K. Taira. *Analytic Semigroups and Semilinear Initial Boundary Value Problems*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2016.

[Topping(2006)] P. Topping. *Lectures on the Ricci Flow*. Lecture note series. Cambridge University Press, 2006.

[van den Ban y Marius Crainic(2009)] Erik van den Ban y Marius Crainic. Analysis on vector bundles: lecture notes for the 2009/2010, 2009.

[Wloka(1995)] J.T. et al Wloka. *Boundary Value Problems for Elliptic Systems.* Cambridge University Press, 1995.

[Xin(1996)] Y. Xin. *Geometry of Harmonic Maps.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Boston, 1996.