



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La ecuación KdV: Un modelo integrable
de las olas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Julio Francisco Díaz Vázquez

TUTOR

Dr. Renato Gabriel Iturriaga Acevedo

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018.





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DATOS DEL ALUMNO

Díaz
Vázquez
Julio Francisco
(044)(55) 1358 9819
Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
30923012-6

DATOS DEL TUTOR

Dr.
Renato Gabriel
Iturriaga
Acevedo

DATOS DEL SINODAL 1

Dr.
Carlos
García
Azpeitia

DATOS DEL SINODAL 2

Dr.
Pablo
Padilla
Longoria

DATOS DEL SINODAL 3

Dr.
Panayiotis
Panayotaros

DATOS DEL SINODAL 4

Dr.
Renato Carlos
Calleja
Castillo

DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

La ecuación KdV: Un modelo
integrable de las olas
84 p.
2018

*Dedicado a quienes de manera
desinteresada nos brindan
un apoyo.*

*Nuestros 'héroes sin capa', quienes
día a día hacen de este país,
de esta sociedad, un lugar mejor.*

*Gracias por ayudarnos a
mantenernos en pie.*

*A quienes a lo largo de mi vida
han creído en mí...*

¡Gracias por ser un apoyo para conmigo!

*“La matemática es la puerta y la llave
de toda ciencia.”*

ROGER BACON (1214-1294)

*“La ciencia no es más que un refinamiento
del pensamiento cotidiano”*

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

*“En todos los grandes hombres de ciencia
existe el soplo de la fantasía.”*

GIOVANNI PAPINI (1881-1952)

Agradecimientos

*“Un sueño no es perfecto
si no hacemos más que sólo pensarlo.”*

Hay tantas personas que de múltiples formas me han aportado tanto, que no bastaría con enunciarlas en las siguientes líneas y, aunque hay quienes ya no se encuentran a mi lado, sé que he obtenido lo mejor de todas ellas y lo aplico con quienes me rodean.

Primeramente, quisiera agradecer el apoyo de mi familia. Gracias por ser un hombro sobre el cual mis padres pueden apoyarse para así impulsarnos ante la vida a mi hermano y a mí.

A mis padres Antonia Vázquez y Juan Díaz. Gracias por darme, entre tantas cosas, dos de los obsequios más importantes en mi persona: la oportunidad de vivir y disfrutar este mundo maravilloso; así como nunca dejarme solo a pesar de cualquier barrera creada por el destino.

A mi hermano, Juan Díaz, gracias por brindarme un apoyo único y genuino. Te agradezco el compartir tus experiencias, sirviéndome como ejemplo ante la adversidad, para así tener las herramientas suficientes para luchar en esta vida.

A cada uno de mis amigos —enunciados en lo siguiente—. Pues si bien no charlamos a diario o no nos vemos cada fin de semana, sabemos que nos tenemos para apoyarnos siempre y que estaré cuando me necesiten.

A Renato Iturriaga por dirigir mi tesis, gracias por apoyarme en este proyecto. Le agradezco su paciencia y la atención a mis dudas.

A mis sinodales Carlos Azpeitia, Pablo Padilla, Renato Calleja, Panayiotis Panayotaros, gracias por sus atenciones en la lectura del escrito y sus correspondientes observaciones y correcciones. Pablo, tu paciencia y dedicación como matemático son una gran inspiración.

A mi institución, la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Gracias por acogerme desde el bachillerato, en el Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Sur (CCH SUR) y posteriormente en la Facultad de Ciencias de Ciudad Universitaria (CU).

Gracias Ramón Hernández por darme la oportunidad de transmitir y vivir la ciencia en el UNIVERSUM, Museo de las Ciencias.

Laura Ortiz, gracias por brindarme la oportunidad de realizar el servicio social en la sección de Publicaciones del Instituto de Matemáticas (IMATE). Así como a Helena, Celia, Pablo y Leonardo.

Aquellas personas que la vida hizo que coincidiéramos, gracias. Trataré de enunciarlas esperando no olvidar algún nombre —en verdad, me disculpo de antemano si eso ocurre (*risas*)—. No importa si fue por casualidad o alguna *causalidad*, estoy sumamente agradecido por el resultado.

A mis amigos de la infancia, Ana, Jessica, Paul, Tania, Lupe, Chava, gracias por tantas risas; por aquellas comidas que se hacían sobre el aire y por confiar en mí. Sus padres, amigos de los míos, forjaron en mí un primer entendimiento acerca del concepto de familia.

A ustedes, Omar, Yareni, Magali, Katia, José Luis, por enseñarme a ser decidido, fuerte y protector, a defender mis ideales y a actuar si es necesario.

Así como a Guadalupe, Paola, Paty, Karina, Aldaco, Nayely, Alan, Adrián, Claudia, Karla, Uriel. Gracias por brindarme más que sólo su apoyo, más que solo verme como el compañero ñoño de clase. Aprendí que no es malo el arrepentimiento —aunque no lo ponga mucho en práctica, jee—, así como la importancia de socializar, que tampoco se me da mucho.

Gracias por tantas aventuras en el CCH, Aimée, Issai, Víctor, Kike, Pilar, Marisol, así como a Lydia, Zaira, Alejandra, Fernanda, Anayeli, Rocío, Cassandra, Gustavo. Me enseñaron que hay que arriesgarme para conseguir lo que uno quiere, lo que en verdad uno necesita, sin importar qué se interponga en tu camino.

Celebro el que la vida nos haya reunido, Alondra, Fernando, Celemente, León, Omar, Eloín, Marcos, Lázaro, Gustavo, Diego, Josué, Hipólito, Oliver, Jaime, Alejandro, Saúl, Rodrigo, Erick, Octavio, Aquiles, Eduardo, Ramón, Pedro; mi vida tomó un nuevo rumbo gracias a ustedes. Aprendí que primero debo de apegarme a saber qué es lo que quiero y a no soltarlo cuando lo encuentre.

A ustedes, Jesús, Gustavo, Grizelda, Diana, Ricardo, Isaac, Manuel, Mario, Roy, Andrés, gracias por aquellas mañanas de desayuno en la cafetería de la facultad, sus charlas y consejos. Por conocer personas comprometidas con la ciencia, con las matemáticas. Ustedes son personas con valores y compromisos sociales más allá de sólo asistir a clases y memorizarse fórmulas y demostraciones.

En particular a tí Anayeli, gracias por estar cuando lo necesito, gracias por tener corazón en el pizarrón.

La ciencia no sería tan divertida sin ustedes, Verónica, Edgar, Laura, Rubén, Yessica, Aurora, Anita, Juan, Vago, Beto, Diana, Leonel, Gil, Myriam, Josué, Saúl, Marisol. Me enseñaron que el trabajo no termina al concluir la jornada. Recuerdo con gracia nuestras charlas; el compartir y debatir, tanto entre nosotros como con los visitantes de UNIVERSUM.

A los profesores que me dieron las bases para perseguir mis sueños: Laura Ramírez, Guadalupe Monroy y Guadalupe Hinojosa. Así como a Rocío, Mario, Carmen Ayala, Margarita, Rosa Isela, Noé, Verónica; Ethel, Salvador, Alberto José, Genaro, Sonia, Sergio, Lauro, Julio. No sólo las clases sirven para aprender la materia, sino para compartir historias y experiencias.

Y en la universidad, estoy agradecido por Ernesto, César, Naim; excelentes ayudantes que confirmaban mi gusto por las matemáticas.

Mis profesores Emma Lam, Ana Irene, Emilio Lluís, Guadalupe Carrasco, Rafael Barbachano, Jorge Montejano y Carlos Álvarez; gracias por presentarme un panorama diverso e integral de su materia, indispensable para mi formación como matemático y para mis ansias de conocimiento.

También agradezco el apoyo otorgado por el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT). Gracias por tenerme a mi disposición su biblioteca, así como de un cubículo para trabajar en su centro, situado en Guanajuato, Gto.

A los compañeros del cubículo D708, Emilio, Nancy, Fernanda, Leonardo, Susana, Marcos, gracias por soportar mi apatía y seriedad, y por llenar mi día de risas en momentos estresantes.

Gracias Ramón por tu confianza, estoy súmamente agradecido por tu amistad.

A los profesores de biología y física Renata y Alonso. Tantas ocurrencias con los alumnos y en la vida misma, me hacen sentir reconfortado.

De nueva cuenta, gracias Nayely por haberme permitido conocerlos, y concerte más a ti.

No menos importante, muchísimas gracias por apoyarme en la corrección de estilo, María Banda. Perdón por los dolores de cabeza que le ocasioné por el escrito, así como a Diego, su hijo. No encuentro palabras —tal vez existan— para agradecer por todo lo que me has ayudado Diego, lo único que tengo por ofrecerte —aún (muchas risas)— es mi amistad.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por el apoyo económico brindado por el programa de Ayudante de Investigador SNI III del Dr. Renato Gabriel Iturriaga Acevedo.

Gracias a todos los que han convivido conmigo aunque sea una fracción de segundo en mi vida: desde un simple gesto sincero hasta compartir un escenario lleno de emociones.

Gracias por quienes hacen de mi vida, día a día, una obra de arte.

Ciudad de México, mayo de 2018.

Índice general

Agradecimientos	VI
Índice general	XI
0. Introducción	1
0.1. Un panorama general	1
1. Del movimiento en los fluidos	9
1.1. Conceptos preliminares	9
1.1.1. Consideraciones para los fluidos	10
1.1.2. Formalismo matemático	13
1.2. De Newton, Euler y más	14
1.2.1. Acerca del movimiento	14
1.2.2. Conservación de la materia	15
1.2.3. Sobre la presión	17
2. La onda solitaria	19
2.1. Contornos y ondas sobre un canal	19
2.1.1. Condiciones sobre la frontera	19
2.1.2. La ecuación de onda	24
2.2. Una mirada a la teoría de ondas	25
2.2.1. Sobre un sistema lineal	25
2.2.2. Ondas progresivas	28
2.3. Deducción de la ecuación KdV	32
2.3.1. Adimensionalización	32
2.3.2. Obtención de la forma KdV	34
3. Sistemas Integrables de dimensión finita	43
3.1. Sistemas Lagrangianos	43
3.2. Sistemas Hamiltonianos	46
4. Integrabilidad en dimensión infinita	50
4.1. Sistemas integrables	50
4.2. Formulación Lagrangiana	51
4.3. Formulación Hamiltoniana	54
4.4. Integrales invariantes	57
4.4.1. Obtención de constantes	60

A. Solución de tipo solitón	67
B. Un acercamiento al análisis funcional	70
C. Operadores de Lax	73
C.1. Motivación	73
C.2. Par de Lax	74
C.3. Representación de Lax para la KdV	76
Bibliografía	80

Introducción

*“A veces Dios nos lleva por aguas
turbulentas, no para ahogarnos,
sino para purificarnos.”*

AUTOR DESCONOCIDO

En este capítulo se presenta una introducción del trabajo realizado, así como la línea científica que marca el nacimiento de la teoría del solitón. Esta inicia con el primer avistamiento registrado de una onda solitaria y, con la implementación y desarrollo de novedosas técnicas, se comienza a estudiar sus propiedades dinámicas. Como referencias generales para este capítulo se sugieren los artículos [28], [18] y [12]¹. Para referencias acerca del desarrollo histórico expuesto en este apartado, consultar los trabajos [23], [10] y [11].

0.1. Un panorama general

Desde tiempos remotos, el agua ha sido un objeto de inspiración para un sinnúmero de ideas. Se encuentra plasmada en el arte, por ejemplo, en pinturas, poemas e incluso composiciones musicales. También en la ciencia abundan ejemplos de actividades e investigaciones sobre el agua, la invención de acueductos y presas, el estudio de tormentas y tsunamis o la búsqueda de este líquido vital en exoplanetas dispersos por el Universo. A lo largo del tiempo, la idea de hallar un modelo que determine el movimiento del agua bajo condiciones dadas ha estado en constante crecimiento y, uno de los tantos sucesos que han aportado a este problema es el punto de partida para la teoría que se expondrá en el presente trabajo.

En 1834 el ingeniero inglés Scott Russell, al detenerse a observar el *Union Canal* que va de Edimburgo a Glasgow, vio cómo el súbito detenimiento de un bote, jalado por dos caballos en una parte angosta del canal, generaba el desplazamiento de un ‘*gran cúmulo solitario*’ de agua.

Esta ola *solitaria* mantenía la misma forma independientemente de la distancia a la orilla del canal. Así, vista como una onda, su altura, que corresponde a la *amplitud de onda*, era de aproximadamente cincuenta centímetros y poseía una longitud, correspondiente a la *longitud de onda*, de unos diez metros. Tras seguirla a caballo notó que, aparentemente, no perdía su forma y se movía a

¹Así como [20] y [14] para un estudio más riguroso sobre el tema.

una velocidad uniforme, siendo esta última de unos quince kilómetros por hora, perdiéndose después de aproximadamente unos tres kilómetros.

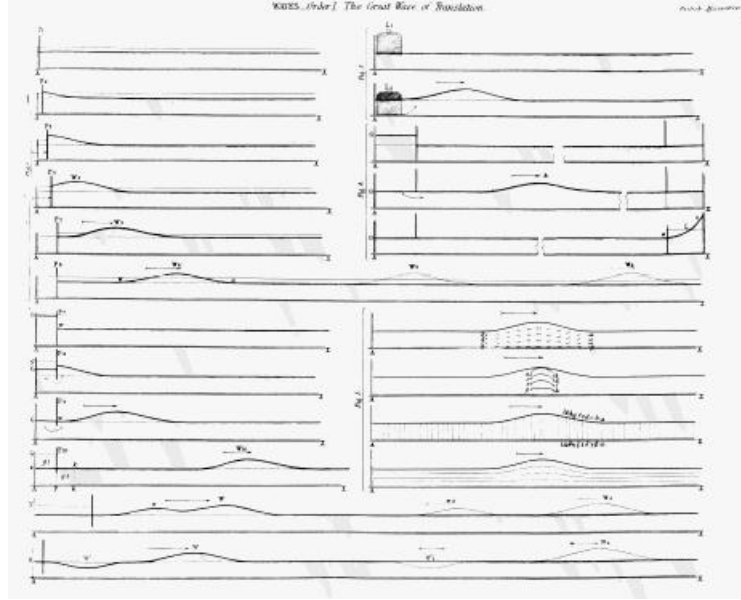


Figura 1: El movimiento de una ‘Gran ola de traslación’ [28].

En su reporte de 1844 [28], entregado a la *British Association for the Advancement of Science*, incluyó los resultados de sus experimentos de simulación. Dedujo que la velocidad c de la *ola de traslación* —*onda solitaria*— tenía que satisfacer la condición $c^2 = g(h_0 + a)$; donde g es la aceleración constante de la gravedad, h_0 la profundidad constante del canal en reposo y a la amplitud de la ola. Este descubrimiento contradecía tanto a la intuición como a la teoría existente para la mecánica de fluidos, lo que llevó a mostrar, matemáticamente, un modelo que sustentara la existencia de las llamadas ondas solitarias.

Fue hasta 1872 que el físico matemático francés Joseph Boussinesq [6] sentaba, rigurosamente, la base matemática necesaria para modelar este tipo de fenómeno: el paso de una ola sobre un canal rectangular, donde su longitud fuese mayor que la profundidad del canal, y de amplitud menor a dicha profundidad, desplazándose sobre el largo del mismo de manera independiente a su ancho.

Para 1876, Lord Rayleigh [26] —John William Strutt— mostró una solución de forma explícita, con base en la teoría de Boussinesq. A partir de las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso e incompresible, exhibieron la ecuación que debía satisfacer la velocidad de la ola, que coincidía con lo observado por Russell. Así, ya se tenía una base para el estudio de las ondas solitarias y, al menos, una función explícita cuya gráfica modelaba el perfil de onda, suponiendo un movimiento uniforme con respecto al ancho del canal, un *canal angosto*,

donde la longitud de onda era mayor a su amplitud, una *onda larga*.

En 1895, Johannes Korteweg y Gustav de Vries [18] concluyeron toda la teoría en sólo una ecuación, la *ecuación de Korteweg y de Vries* o simplemente ecuación KdV, que gobierna el movimiento de la superficie del agua al ser perturbada por el paso de la onda solitaria.

La forma clásica en que se presenta dicha ecuación es la expresión

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}, \quad (1)$$

formada por términos no lineales y dispersivos. La ecuación KdV es la ecuación de movimiento para la onda solitaria $u \equiv u(x, t)$ moviéndose en dirección positiva x al tiempo t sobre un canal angosto de poca profundidad; donde la ola tiene longitud *grande* y amplitud *pequeña*, con respecto a la profundidad del canal. Dada la complejidad de (1), por ser una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) no lineal, no hubo grandes avances en torno a su solución general.

Sin embargo en la década de 1960, con el desarrollo de la programación y la invención de las computadoras, diversos matemáticos hicieron importantes avances en dar solución a las EDPs. Para 1965 Martin Kruskal y Norman Zabusky [30] mediante métodos numéricos analizaron a KdV. Mostraron que una onda solitaria es estable, pues viaja sin deformarse.

Además, vieron que al hacer correr dos ondas solitarias separadas, con la primera seguida por una de mayor amplitud —y así de mayor velocidad—, al interactuar ésta con la primera y colisionar, después de un determinado tiempo la onda grande recobra su forma original y continúa su camino, dejando atrás a la primera, quien sufre el mismo fenómeno. Así, mostraron que una onda solitaria es estable incluso ante perturbaciones no lineales. Por este extraordinario resultado, renombraron a las ondas solitarias como *solitones*. Estos hallazgos motivaron a otros matemáticos a trabajar, tanto individualmente como en equipo, en el desarrollo de la teoría del solitón.

El artículo [13], publicado en 1967, Robert Miura, Clifford Gardner, Martin Kruskal y John Greene exhiben un método para resolver la ecuación KdV. Realizan una serie de artículos bajo el título '*Korteweg-de Vries Equation and Generalizations*' (I-VI), donde desarrollan un análisis dinámico de la ecuación KdV. En el artículo II [25] dan a conocer la existencia de constantes de movimiento; valores independientes con respecto al tiempo en las ondas de tipo solitón, discutiendo en el artículo V [19], de la manera más general posible, las pruebas de existencia y unicidad de las leyes de conservación asociadas a KdV.

En cuanto al artículo III [29], relacionan a la KdV con la *ecuación de Burgers*² a partir de un sistema conformado por las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos. El suponer perturbaciones pequeñas permite implementar una serie de potencias con un parámetro ϵ de amplitud —de la ola— en el estado inicial del sistema, concluyendo su análisis con la obtención de (1) y la ecuación de Burgers a partir de en dicho sistema.

²Es una EDP conformada por términos no lineales y difusivos. La forma a la que se refiere el artículo, $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$. Representa, por ejemplo, la velocidad de un fluido u con ν viscosidad cinemática.

Por su parte, Miura en el artículo I [24] define una transformación que relaciona a (1) con una ecuación modificada de KdV, mKdV, para así, junto con Gardner, Greene y Kruskal, en el artículo VI [14], exhibir una teoría de operadores para encontrar soluciones a las EDPs a través de analizar sus valores propios, desarrollando el *método de dispersión inversa*.

En cuanto al artículo IV [12], Gardner muestra que en un espacio de funciones dado puede definirse un operador Lagrangiano. Entonces cualquier función $u(x, t)$ en dicho espacio satisface la ecuación KdV si, y sólo si, satisface la ecuación de *Euler-Lagrange* asociada a dicho operador; es decir la ecuación (1) admite una estructura Lagrangiana.

También muestra que para un espacio de funciones periódicas dado puede definirse un funcional Hamiltoniano, concluyendo que cualquier función $u(x, t)$ en dicho espacio satisface (1) si, y sólo si, satisface las ecuaciones *canónicas de Hamilton*. Así, la ecuación KdV también admite una estructura Hamiltoniana.

En ese mismo año, Vladimir E. Zakharov y Ludvig D. Faddeev publicaron un artículo [31] donde expresaron a la ecuación KdV como un ejemplo de un sistema integrable de dimension infinita.

Cabe mencionar los trabajos que realizó Peter Lax, los cuales fueron inspirados por I, II de '*Korteweg-de Vries Equation and Generalizations*', y utilizados por Miura, Gardner, *et al* para realizar su artículo VI. En el artículo [20] definió la derivada con respecto al tiempo de un operador a partir del conmutador, $\dot{L} = [M, L]$, con L un operador definido sobre un espacio de Hilbert.

Lax probó que, para el operador L definido como $L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$, con $u(x, t)$ solución de (1), siempre se puede encontrar un operador adjunto antisimétrico $M_j(t)$ tal que el conmutador $[M_j, L]$ es sólo un operador de multiplicación. Así, si la ecuación de evolución $\dot{L} := [M_j, L]$ satisface el segundo miembro de la ecuación KdV, $u_t \equiv [M_j, L]$ define una ecuación de orden j de KdV.



Figura 2: Creación de un solitón sobre un canal [9].

Toda esta hazaña de poco más de 180 años en el desarrollo de una teoría físico matemática concluye con el desarrollo de una nueva área y la implementación de nuevas técnicas para resolver ecuaciones diferenciales a partir del análisis funcional.

En el presente trabajo nos proponemos abordar el desarrollo de la ecuación de Korteweg y de Vries, así como la implementación Lagrangiana y Hamiltoniana, encontrar los valores constantes —*constantes de movimiento*— con respecto al tiempo que aparecen en dicho desarrollo para darle solución a (1) en un sentido integral. Para esto, dividiremos el trabajo en cuatro capítulos.

En el primer capítulo sentaremos las hipótesis para el estudio de la mecánica de fluidos, obteniendo las ecuaciones generales para estudiar la hidrodinámica en su forma vectorial.

Definiendo a \mathbf{U} el campo de velocidades para las partículas del fluido, a partir de suponer un fluido con viscosidad nula obtenemos la *ecuación de movimiento de Euler*

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{g}. \quad (2)$$

Por la *hipótesis del medio continuo* y la consideración de tener un fluido incompresible y homogéneo se deduce una expresión sencilla, la *ecuación de conservación de masa*

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Y, asumiendo que el campo \mathbf{U} del fluido es irrotacional, la *ecuación de Bernoulli*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = 0, \quad (4)$$

con φ el campo gradiente de \mathbf{U} , $\nabla \varphi = \mathbf{U}$.

En el segundo capítulo presentaremos las condiciones de frontera para nuestro fluido, el agua. Esto con el propósito de analizar nuestro problema: modelar el paso de una ola larga en un canal angosto. Supondremos el paso de una ola sobre un canal rectangular con profundidad h_0 constante, donde la longitud de la ola λ es mayor a h_0 y ésta mayor a su altura a . Además, consideraremos que es una *ola de gravedad*; es decir, sólo la gravedad interviene para restaurar el canal en reposo.

A partir de implementar las condiciones de frontera en las ecuaciones (2)–(4) y suponer de que el perfil de la ola no cambia con respecto al ancho y del canal, se concluye con el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta &= 0, & z = \eta(x, t) \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_z &= 0, & z = \eta(x, t); \end{aligned} \quad (5)$$

donde las coordenadas x y z representan la dirección en que se propaga la ola y la altura de la misma respectivamente, ocupando el agua al tiempo t la región $\mathcal{R}(t)$.

Adimensionalizando el sistema (5) a partir de las magnitudes antes descritas, se le asocia a la función adimensional de φ , $\Phi(\xi, \zeta, \tau)$, una serie de potencias. Por las condiciones supuestas para la ola, los términos asociados a los parámetros de amplitud $\varepsilon = a/h_0$ y profundidad $\delta = (h_0/\lambda)^2$ tenderán a cero.

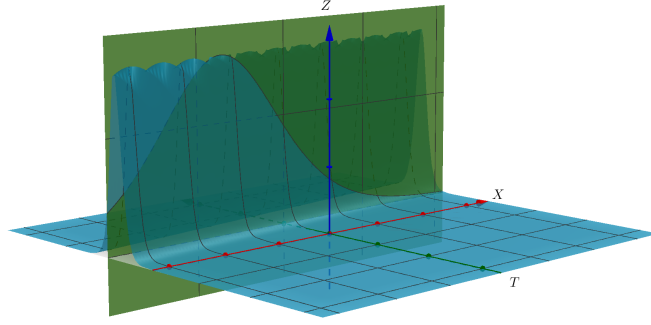


Figura 3: Gráfica del perfil de una onda solitaria con respecto al tiempo.

Considerando hasta los términos de primer orden obtenemos la ecuación

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0} \eta \eta_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0, \quad (6)$$

la *ecuación de Korteweg y de Vries* en su forma dimensional. Aplicando una transformación galileana y un posterior reescalamiento obtenemos la forma clásica de la KdV (1).

Para estudiar la dinámica de la ecuación KdV es necesario comprender los sistemas dinámicos. Para ello, en el capítulo 3 desarrollamos la teoría que estudia los sistemas integrables en dimensión finita: los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos; los primeros regidos por la *ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

y los segundos por las *ecuaciones de Hamilton*

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \quad (8)$$

Es de nuestro interés interpretar las nociones de *espacios fase*, *coordenadas generalizadas*, *curvas*, *acción* y demás para el caso de espacios de funciones, en particular espacios que abarquen a funciones $u(x, t)$ solución a KdV. Todo esto se describe en el último capítulo.

Tomando el espacio de funciones X como el espacio de funciones diferenciables $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto, se define el Lagrangiano

$$L[(f, \nu)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} f \nu - f^3 - \frac{1}{2} f_x^2 \, dx, \quad (9)$$

con ν variaciones a f , $\nu \in X$. Considerando una curva $g(t)$ en X definimos una función de dos variables $u(x, t) := g(t)(x)$. Así, se define la acción Φ de L como

$$\Phi[u] \equiv \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \phi_x \phi_t - \phi_x^3 - \frac{1}{2} \phi_{xx}^2 \, dx dt; \quad (10)$$

con ϕ la función potencial de u . Se concluye que las curvas que minimizan la acción (10) del Lagrangiano (9) son funciones que satisfacen KdV (1).

A partir del espacio Y de funciones f diferenciables periódicas, de periodo 2π , se define la funcional \mathcal{H} como

$$\mathcal{H}[f] \equiv \int_0^{2\pi} f^3 + \frac{1}{2} f_x^2 \, dx. \quad (11)$$

Tomando la representación en series de Fourier para cada f , la *derivada variacional* de \mathcal{H} es

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} e^{inx}. \quad (12)$$

Al tomar una curva $g(t)$ en Y y su función u de dos variables asociada, se llega a la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \right) = 6uu_x - u_{xxx}; \quad (13)$$

entonces si $u(x, t)$ satisface KdV, por (13) y (12),

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{i}{2\pi} n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{-n}}. \quad (14)$$

Con las sustituciones

$$q_n \equiv \frac{1}{n} u_n, \quad p_n \equiv u_{-n}, \quad H \equiv \frac{i}{2\pi} \mathcal{H} \quad (15)$$

se concluye que la ecuación KdV (1) admite una estructura Hamiltoniana.

El análisis para la obtención de infinitas constantes de movimiento para KdV parte de hallar un par de funciones $\mathcal{X}, \mathcal{T} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfagan una *ley de conservación* para KdV:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Para ello se utilizan la *transformación de Miura* $M[v] \equiv v^2 + v_x$ y la *transformación de Gardner* $G[w] \equiv \varepsilon^2 w^2 + w + \varepsilon w_x$, definidas a partir de la *ecuación modificada de KdV*

$$v_t = 6v^2 v_x - v_{xxx} \quad (17)$$

y la *ecuación de Gardner*

$$w_t = 6\varepsilon^2 w^2 w_x + 6ww_x - w_{xxx} \quad (18)$$

respectivamente.

Dado que si $w(x, t)$ satisface (18) entonces $u(x, t)$ definida como $u \equiv G[w]$ satisface (1). Asociándole una expansión asintótica a w , a partir de la transformación de Gardner se deduce que cada coeficiente w_n está en función de u y sus derivadas espaciales.

Al distribuir los coeficientes con respecto a las potencias de ε , se tiene que para cada natural par existen dos expresiones que satisfacen la ley de conservación (16), concluyendo que la ecuación KdV tiene una cantidad infinita de constantes de movimiento.

La importancia de esta ecuación, y de la teoría de solitones, va más allá de modelar una onda solitaria, su implementación tiene lugar en múltiples ramas de la físico matemática: hallar soluciones para la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS), modelar el desplazamiento de un Tsunami así como el de los pulsares, señales neuronales o la implementación en las fibras ópticas, por nombrar algunos.

Del movimiento en los fluidos

“No puede entrar en razón quien
piensa de forma automática”

AYN RAND (1905–1982)

En este capítulo se desarrollarán las herramientas necesarias para la deducción de las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos. Partiendo de la mecánica de cuerpos rígidos se supondrán condiciones para el flujo, con las cuales se obtienen la *ecuación de Euler*, la *ecuación de conservación de masa* y la *ecuación de Bernoulli*. Como referencias generales se tienen los libros [8], [15], [22] y [4], así como el artículo [27].

1.1. Conceptos preliminares

La *mecánica de fluidos* —también conocida como *dinámica de fluidos*— tiene como objetivo estudiar el movimiento de los ‘fluidos’, es decir su *flujo*. Entenderemos por *fluido* a una sustancia que sufre una deformación continua al aplicarle una fuerza por muy pequeña que sea. Son ejemplos de fluido los líquidos y los gases. En este trabajo, sólo trataremos con los primeros.

Así como el estudio de la mecánica de cuerpos rígidos —la *mecánica newtoniana*— se apoya en el análisis a los sistemas de partículas puntuales basándose en un *punto material*, la mecánica de fluidos se apoya en el análisis a una *partícula de fluido* o bien una *masa ‘elemental’* sobre un medio.

La contribución de Isaac Newton cambió la manera de estudiar los sólidos al mostrar la relación de la variación del momento —lineal— con las fuerzas que actúan en la partícula, la *segunda ley de Newton*, que se expresa matemáticamente como $F = m \cdot a$; donde F denota a todas las fuerzas externas que actúan en una partícula de masa m desplazándose a una aceleración a .

Partiremos de la validez de algunos resultados en el estudio de los sólidos, para estudiar a los fluidos con las mismas bases. En este capítulo tendremos como objetivo el *escribir* la segunda ley de Newton en los fluidos; de manera que, en esta primer parte nos centraremos en conocer qué fuerzas actúan en los fluidos y la expresión que define a su aceleración.

A diferencia de los sólidos, en los líquidos el concepto de ‘partícula’ no se encuentra bien definido, sin embargo la interpretaremos como un pequeño elemento en la mecánica de un *medio continuo*. Ésta se supone lo suficientemente pequeña para que en todas sus partes guarde las mismas propiedades; es decir, que la partícula sea *isótropa*. Por ejemplo, que todas las *partes* de una gota diminuta de agua tengan una misma velocidad de traslación, o bien, que en la partícula se mantenga una misma *densidad* ρ .

La hipótesis del concepto de ‘continuidad’ es fundamental en física, aquí la supondremos con respecto a la distribución del fluido, esto es la *hipótesis del medio continuo*. Dicha hipótesis establece que el fluido es continuo con respecto al espacio que ocupa. Así, las propiedades del fluido pueden ser aplicadas de manera uniforme a todos sus elementos en cualquier instante de tiempo. Por ejemplo, la velocidad de un flujo situado en un espacio cartesiano está dada por un campo vectorial continuo.

Entonces las partículas tienen que ser lo suficientemente grandes para encerrar un cierto volumen de fluido, concluyendo que nuestro fluido está constituido por elementos con volumen, partículas de fluido, no presentando huecos entre ellos y cubriendo todo el medio.

Por último, las propiedades moleculares de las partículas de fluido; como movimientos brownianos o fuerzas intermoleculares, serán despreciadas en este estudio. Por ejemplo, para el estudio del movimiento de las olas, omitiremos el factor de la tensión superficial, restringiéndonos al análisis de las *olas de gravedad*.

Así, comenzaremos definiendo los elementos que jugarán un papel muy importante en el estudio de los fluidos, y concluiremos con un análisis de las olas de gravedad situándolas en un canal angosto y con profundidad h_0 constante.

1.1.1. Consideraciones para los fluidos

En el mundo hay un sinnúmero de fluidos y, debido a la riqueza en su diversidad de propiedades, el querer estudiarlos globalmente es prácticamente imposible; ello dificulta poder generalizar resultados. No obstante, tener varias suposiciones ayuda a agruparlos, de manera que las ecuaciones que obtendremos serán para estudiar un tipo en particular de flujo: el movimiento del agua.

H₁ Flujo incompresible

El concepto de *fluido* dado en la página 9 no hace diferencia alguna entre los líquidos y los gases. Las moléculas de un gas se encuentran más separadas que las de un líquido, de manera que un gas es altamente compresible; en cambio, un líquido es relativamente incompresible. Un claro ejemplo es el aire; un gas fácil de comprimir, y el agua; un líquido casi incompresible, donde la variación de su volumen y su masa es tan pequeña que puede ser despreciable.

Esta hipótesis se puede resumir en una pequeña oración: *la cantidad de fluido que fluye ‘por completo’ en un volumen determinado V y fijo a*

través del tiempo t no cambia. Es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.1)$$

H₂ Fluido homogéneo

El estudiar a un fluido en particular no implica que sólo consista de *uno*, es decir, que dicho fluido presente un solo tipo de partículas. Por ejemplo, puede darse el caso donde quiera analizarse el fenómeno de verter aceite en un vaso con agua, o el de una taza de café acompañada con un poco de crema. Así, puede haber fluidos *heterogéneos* u *homogéneos*. La densidad, por ejemplo, es una de las propiedades que difieren entre estos dos fenómenos.

En un fluido heterogéneo la densidad de la partícula depende de su posición; si estamos en el primer ejemplo, la densidad obtenida en el fondo o en la parte superior del vaso será distinta —el agua es más densa que el aceite—. Y si estamos en el segundo ejemplo, después de haber mezclado el café con la crema, en cualquier posición que ocupemos del interior de la taza tendremos una misma densidad. Así, si tenemos un fluido homogéneo en el espacio cartesiano, la densidad de una partícula no depende de la posición en la que se encuentre. Es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Observación 1. Si tenemos un flujo homogéneo donde su flujo sea incompresible, implica que ρ es constante.

La figura 1.1 muestra a una partícula P sobre un fluido homogéneo, todos los elementos de P tienen la misma densidad, no variando con respecto al tiempo. Si el flujo es incompresible la cantidad de masa que contiene se conserva y al tomar otra partícula con el mismo volumen esta delimitará la misma cantidad de masa, es decir la densidad del fluido es constante.

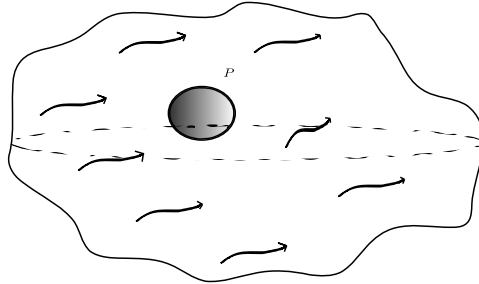


Figura 1.1: El paso de un fluido homogéneo con un flujo incompresible sobre una partícula P .

H₃ Flujo ideal

La viscosidad de un flujo puede interpretarse como la *resistencia* de las partículas a su movimiento a partir una la fricción entre estas, creada a partir de esfuerzos tangenciales. En el flujo no todas las partículas se desplazan a una misma velocidad, por ejemplo las partículas que están en contacto con las paredes de un envase, esto provoca que colisionen entre ellas.

El agua es un fluido con una viscosidad muy pequeña, de manera que la consideramos despreciable para el presente estudio. En cambio, si estuviéramos trabajando con el aceite, tendríamos que considerar dicho factor. Un flujo con viscosidad nula recibe el nombre de *flujo ideal*.

H₄ Flujo irrotacional

En matemáticas, se dice que un campo vectorial $\mathbf{U} = (u, v, w)$ es *irrotacional* si su vorticidad es nula, es decir, si su *rotacional* es cero. Éste se define como el producto cruz del operador nabla ∇ con dicho campo

$$\text{rot}(\mathbf{U}) = \nabla \times \mathbf{U} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.3)$$

con nabla el operador gradiente

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Bajo la interpretación física, se dice que las partículas del fluido siguen una trayectoria sobre el flujo, una *línea de corriente* suave y ordenada. Si el flujo se desplaza sobre una corriente circular, se dice que el flujo es *irrotacional* si la velocidad angular de las partículas es cero. La imagen 1.2 presenta el caso de un flujo sobre una tubería, donde las líneas de corriente se encuentran en una corriente circular pero no se encuentran girando.

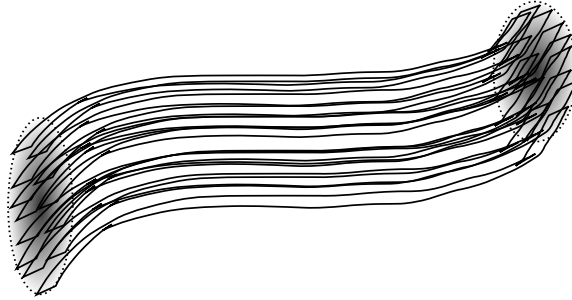


Figura 1.2: El paso de un flujo irrotacional sobre una tubería.

1.1.2. Formalismo matemático

Consideremos un fluido en un espacio coordenado. Para cada \mathbf{x} en el espacio, $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ denota la velocidad de la partícula del fluido que está pasando por él al tiempo t . La relación que guardan la masa del fluido presente sobre un volumen determinado —*densidad* de un fluido— es $\rho(\mathbf{x}, t)$ y la presión en cualquier elemento del fluido la denotaremos como $P(\mathbf{x}, t)$.

Por ejemplo, si nos encontramos trabajando en el espacio cartesiano \mathbb{R}^3 y $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ describe la trayectoria de una partícula al tiempo t , satisface

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = u(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = v(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} = w(\mathbf{x}, t);$$

donde

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)).$$

Por la hipótesis del medio continuo, el campo vectorial \mathbf{U} y los campos escalares ρ y P son funciones continuas, supondremos además que son funciones C^2 .

Para estudiar a los fluidos, es de interés el saber cómo varía una cantidad escalar q en el tiempo a lo largo de una trayectoria de fluido. Estando en \mathbb{R}^3 , $q \equiv q(\mathbf{x}(t), t) = q(x(t), y(t), z(t), t)$, así

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (1.4)$$

Como el cambio de posición con respecto al tiempo t de \mathbf{x} está dado por \mathbf{U} , sustituyendo en (1.4) obtenemos

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Agrupando términos, obtenemos la expresión

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) q.$$

Tenemos como resultado un nuevo operador. Llamaremos *derivada material* o derivada *covariante* a la variación de una partícula siguiendo un flujo con velocidad \mathbf{U} , dado por

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla). \quad (1.5)$$

Observación 2. *La diferencia entre la derivada total y la derivada material es solamente el condicionar los cambios de las variables independientes con respecto al tiempo t a la velocidad \mathbf{U} del fluido.*

Observación 3. *Si tenemos un fluido incompresible y homogéneo, por (1.1) y (1.2)*

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Un cálculo inmediato que podemos hacer con (1.5) es desarrollar la expresión para la aceleración de una partícula \mathbf{x} , calculando la derivada material para cada coordenada del vector velocidad. Como lo describimos anteriormente, la velocidad de \mathbf{x} en el fluido es $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, de modo que su variación sobre un flujo está definido por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x}(t), t).$$

Ahora, al calcular la aceleración de la partícula

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) u, \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) v, \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) w \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &\equiv \frac{D\mathbf{U}}{Dt}. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{D\mathbf{U}}{Dt}. \quad (1.7)$$

Para poder aplicar la segunda ley de Newton en los fluidos, falta definir las fuerzas que interactúan en ellos.

1.2. De Newton, Euler y más

1.2.1. Acerca del movimiento

Para los fluidos, hay dos tipos de fuerzas que se consideran: la fuerza de la partícula dada su masa, fuerza *volumétrica*; que actúa sobre todos sus elementos de volumen, y una fuerza local que se presenta a cada elemento por las interacciones entre otras partículas alrededor suyo, actuando de manera *normal* a su superficie, fuerza *superficial*.

Denotamos a la primera como $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ por unidad de masa. \mathbf{F} expresa en nuestro estudio a la gravedad, simplificándose como $\mathbf{F} \equiv (0, 0, -g) = \mathbf{g}$, con g la constante gravitacional. En cambio, la fuerza superficial se compone de la presión y la viscosidad de las partículas. Por H₃, al suponer la dinámica del agua, sólo consideramos la primera. Con esto la fuerza superficial sólo está compuesta por P .

La *presión* está definida como la fuerza sobre la superficie donde actúa, entonces la fuerza sobre un volumen es la integral sobre su frontera de la componente normal de la presión a dicha superficie.

Supongamos que tenemos un volumen determinado V y fijo, delimitado por una superficie S dentro del fluido, de manera que su flujo fluye a través de S

ocupándolo completamente. Así, la fuerza total actuando en el fluido es

$$\iiint_V (\rho \mathbf{F}) \, dv - \iint_S (P \mathbf{n}) \, ds, \quad (1.8)$$

con \mathbf{n} un vector exterior, unitario y normal a S . Aplicando el Teorema de Gauss —*Teorema de la divergencia*— al término dependiente de la presión,

$$- \iiint_V \nabla P \, dv. \quad (1.9)$$

Para aplicar la segunda ley de Newton, sustituimos (1.9) en (1.8), e igualándola con el producto de la aceleración —ecuación (1.7)— por la masa —ecuación (1.14)—, obtenemos

$$\iiint_V \rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \, dv = \iiint_V (\rho \mathbf{F} - \nabla P) \, dv. \quad (1.10)$$

O bien,

$$\iiint_V \left(\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} - \rho \mathbf{F} + \nabla P \right) \, dv = 0. \quad (1.11)$$

Como esto es válido para cualquier volumen V fijo, el integrando de (1.11) tiene que ser cero. Desarrollándolo y distribuyendo llegamos a una expresión conocida como la *ecuación de movimiento* de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{g}. \quad (1.12)$$

Observación 4. *No hay que olvidar que las ecuaciones tienen una formulación vectorial. Conviene expresar en componentes, por ejemplo, la ecuación (1.12). Dicha ecuación representa un sistema de ecuaciones, donde cada componente está definida por una ecuación:*

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{U}}{Dt} &= \left(\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}, \frac{Dw}{Dt} \right), \quad \mathbf{g} = (0, 0, -g); \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= -g. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2.2. Conservación de la materia

Consideremos, al igual que en la subsección 1.2.1, un volumen determinado V y fijo delimitado por una superficie S en el interior del fluido, fluyendo por

completo a través de S . Dado que la densidad del fluido es $\rho(\mathbf{x}, t)$, la *masa* del fluido contenida en V al tiempo t es

$$m(t) = \iiint_V \rho \, dv. \quad (1.14)$$

Así, la variación de la masa a través del tiempo en V es

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \, dv \right). \quad (1.15)$$

Denotemos como \mathbf{n} al vector exterior, unitario y normal a S , así la componente de la velocidad exterior del fluido a través de S es $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$. Por lo tanto, el cambio neto al que fluye la masa fuera de V es

$$\iint_S (\rho \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (1.16)$$

Dado que «*la materia no se crea ni se destruye*», la variación de la masa en V es provocada únicamente por la velocidad de la masa que fluye en V a través de S . Por (1.15) y (1.16) tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \, dv \right) = - \iint_S (\rho \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (1.17)$$

Aplicando nuevamente el Teorema de la divergencia al segundo miembro de la ecuación, podemos escribir (1.17) de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \, dv \right) + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) \, dv = 0,$$

puesto que tenemos a V fijo en nuestro sistema coordenado, la única dependencia de t en (1.15) es ρ

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) \right) dv = 0. \quad (1.18)$$

Como (1.18) es válida para cualquier volumen V fijo, el integrando debe ser cero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (1.19)$$

La ecuación (1.19) se denomina *ecuación de conservación de masa*, o *ecuación de continuidad* —haciendo referencia a la continuidad de la materia—. Desarrollándola, llegamos a la expresión

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0, \quad (1.20)$$

válida para cualquier fluido. Puesto que estamos interesados en estudiar el movimiento del agua, por la observación 3, (1.20) se reescribe como

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (1.21)$$

Así, la expresión (1.21) describe la ecuación de continuidad para un fluido incompresible y homogéneo. Los campos vectoriales que tienen *divergencia* nula reciben el nombre de *campos solenoidales*; vemos pues, que \mathbf{U} es un campo solenoidal.

Las ecuaciones (1.12) y (1.21) proporcionan las bases para el estudio de la dinámica de fluidos ideales, incompresibles y homogéneos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P &= \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

El sistema (1.22) recibe el nombre de *ecuaciones de Stokes*. Si se llegase a considerar la viscosidad del fluido obtendríamos un sistema más general, que recibe el nombre de *ecuaciones de Navier-Stokes*; pero esto no forma parte del presente trabajo, mas su análisis puede consultarse en [15].

1.2.3. Sobre la presión

La gravedad \mathbf{g} se puede ver como el *gradiente* de la función escalar $\Omega = -gz$, pues $\nabla \Omega = \mathbf{g}$. Por otro lado, considerando la identidad

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) - \mathbf{U} \times \text{rot}(\mathbf{U}), \quad (1.23)$$

sustituimos, despejamos y distribuimos en (1.12)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} P - \Omega \right) = \mathbf{U} \times \text{rot}(\mathbf{U}). \quad (1.24)$$

Vemos que los factores presentes en el movimiento de los fluidos están condicionados a la *vorticidad* α del flujo, $\alpha = \text{rot}(\mathbf{U})$. El suponer un comportamiento irrotacional en el flujo, H_4 , simplifica la ecuación anterior a

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{P}{\rho} - \Omega \right) = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Diremos que \mathbf{U} es un *campo conservativo* si es un campo gradiente, por ejemplo la gravedad. En la teoría de estos campos, el tener un campo irrotacional \mathbf{U} implica ser un campo gradiente —gracias al teorema de Helmholtz—; afirmando la existencia de un campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t) \in C^2$, donde $\nabla \phi = \mathbf{U}$. Así, el problema se resume en encontrar tal función ϕ , el *potencial de flujo*, que satisfaga

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0, \quad (1.26)$$

o bien

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = f(t). \quad (1.27)$$

Definiendo $\varphi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - D(t)$, con $D(t)$ primitiva de $f(t)$, tenemos $\nabla\varphi = \nabla\phi$. Así, φ satisface la ecuación homogénea (1.28), mejor conocida como la *ecuación de Bernoulli*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = 0. \quad (1.28)$$

Con este análisis, (1.22) pasa a ser un nuevo sistema para φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz &= 0 \\ \Delta\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

donde Δ denota el operador *laplaciano*, $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$. Si el laplaciano de una función es cero, decimos que es una función armónica. En nuestro caso, tenemos que φ lo es.

Vemos que el sistema (1.29) tiene como incógnitas dos variables, la presión P y el potencial de flujo φ ; de manera que conocer alguna de las dos incógnitas daría por resuelto el sistema. Puesto que sólo hemos trabajado *dentro* del fluido, falta considerar lo que sucede en su *frontera*.

Para el análisis a la frontera del fluido, en la primera parte del capítulo 2 definiremos las condiciones donde ubicaremos al fluido, un canal rectangular. En ese punto nuestro análisis se centrará en el paso de una gran *onda solitaria* sobre la superficie del agua. Como la dinámica de la ola estará regida por las condiciones de frontera, tendremos por objetivo obtener las expresiones necesarias que gobiernan el movimiento de una gran ola con las restricciones dadas a partir del sistema (1.29).

La onda solitaria

“*Si es un milagro, cualquier testimonio
es suficiente, pero si es un hecho,
es necesario probarlo.*”

MARK TWAIN (1835–1910)

En este capítulo continuaremos simplificando el sistema de ecuaciones (1.29). A partir de las condiciones de frontera, con la motivación de entender la dinámica que hay detrás de la ‘linealización’ del sistema, se obtiene de manera *natural* la ecuación que desarrollaron Johannes Korteweg y Gustav de Vries, conocida como la *ecuación KdV*. Como consulta para este capítulo se tienen los artículos [27] y [18], así como los libros [8], [15] y [11].

2.1. Contornos y ondas sobre un canal

En esta sección pondremos las bases para estudiar la frontera de los fluidos gobernados por (1.29); considerando el caso del movimiento de una ola. Será de nuestro interés analizar la frontera *superior* del fluido —el problema de la *frontera libre*—, pues es la que conforma la onda en el agua, y es lo que queremos modelar. También desarrollaremos un poco de la teoría de ondas para entender las propiedades que guardan las ondas *progresivas* u ondas *viajeras*, quienes sirven como punto de partida para modelar las propiedades de las olas que observó Russell, las ondas *solitarias* o *solitones*.

Nos ubicaremos en un canal de fondo liso con profundidad constante $h_0 > 0$, situando su longitud y anchura con las coordenadas cartesianas x y y respectivamente. En cuando a su profundidad, y por ende para las alturas de las elevaciones presentes en el canal, le asignamos la coordenada z . Estudiaremos el movimiento de una ola sobre un canal, desplazándose con dirección *positiva* sobre el eje x .

2.1.1. Condiciones sobre la frontera

En el capítulo 1 definimos las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos (incompresibles, homogéneos, ideales e irrotacionales). Es necesario conocer las condiciones de contorno para saber cómo es el comportamiento en la frontera del fluido.

Definamos el paso de una *ola* —perturbación en la superficie libre superior del fluido— en un canal. Asignemos las coordenadas (x, y) para el largo y ancho del mismo. Supongamos que la ola puede verse como la gráfica de una función —que la ola no se rompe—, así, definimos la altura z de la ola al tiempo t por $\eta(\mathbf{x}_\perp, t) = z$, donde $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ son las coordenadas ortogonales a z .

Denotaremos por $\mathcal{R}(t)$ a la región ocupada por el agua en el instante t , que está delimitada por el fondo de profundidad h_0 constante, estando el agua en reposo, y la superficie $\mathcal{S}(t)$, tal como lo muestra la figura 2.1.

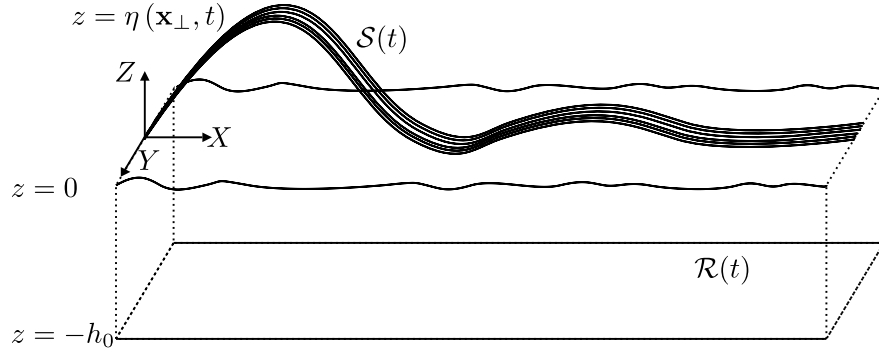


Figura 2.1: Descripción del paso de una ola al tiempo t .

Entonces el fondo liso está dado por el plano $z = -h_0$, mientras que la región ocupada por el agua al tiempo t es

$$\mathcal{R}(t) = \{(x, y, z) : -h_0 < z < \eta(\mathbf{x}_\perp, t)\}, \quad (2.1)$$

donde

$$\mathcal{S}(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \Gamma(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x}_\perp, t) - z = 0\}; \quad (2.2)$$

o bien la superficie es el núcleo de Γ , $\mathcal{S}(t) = \Gamma^{-1}(0, t)$. Vemos que, si el agua se encuentra en reposo, \mathcal{S} coincide con el plano $z = 0$.

La superficie que separa al fluido de algún otro medio, por ejemplo el aire, conforma su *frontera*. Al conjunto de partículas que están interactuando con la frontera se denomina *superficie libre*. Para nuestro estudio tenemos una frontera superior e inferior, de manera que nuestra superficie libre está compuesta por el fondo y la superficie donde se presentan las ondulaciones. Puesto que suponemos el fondo fijo, sólo la frontera superior varía con respecto al tiempo. Esta se conoce también como *frontera libre*.

Como los elementos de la superficie libre siguen siendo partículas, para cada \mathbf{x} en $\mathcal{S}(t)$ su velocidad está dada por $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$; la condición *cinemática* (sobre la superficie), y su presión debe coincidir con la presión atmosférica P_0 , condición *dinámica*.

En cuanto al fondo, como que el agua es homogénea y despreciando su viscosidad, las partículas \mathbf{x} se mueven tangencialmente a él, esto nos genera otra condición *cinemática* (sobre el fondo). Así, el campo de velocidad $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, al tomar el vector unitario y normal al fondo $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = w = 0$.

Como $\Gamma(\mathbf{x}, t) = 0$ para cualquier t , por la condición cinemática para $\mathcal{S}(t)$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \Gamma_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \Gamma = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w \equiv 0. \quad (2.3)$$

Por la condición dinámica, estamos considerando $P = P_0$, teniendo P/ρ constante, de manera que retomando la ecuación (1.27) de la subsección 1.2.3 del capítulo anterior, tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P_0}{\rho} + g\eta = f(t); \quad \eta(\mathbf{x}_\perp, t) = z.$$

Sustituyendo $\varphi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - D(t) + \frac{P_0}{\rho}t$, recordando que $D(t)$ es primitiva de $f(t)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + g\eta = 0; \quad \eta(\mathbf{x}_\perp, t) = z. \quad (2.4)$$

Es decir, para $\mathcal{S}(t)$ en cada tiempo t , la ecuación de Bernoulli se reduce a sólo tres términos.

Dado lo anterior, nuestro problema se resume en el siguiente sistema de ecuaciones, a partir del escalar $\varphi(\mathbf{x}, t)$ del campo gradiente de $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$:

i) En el fluido $\mathcal{R}(t) = \{(x, y, z) : -h_0 < z < \eta(\mathbf{x}_\perp, t)\}$ se satisface que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz &= 0 \\ \Delta \varphi(\mathbf{x}, t) &= 0. \end{aligned}$$

ii) Teniendo como condiciones de contorno para la superficie $\mathcal{S}(t)$ el sistema siguiente; con $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ y la altura de la ola z dada por $\eta(\mathbf{x}_\perp, t) = z$ y definiendo $\mathcal{S}(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \eta(\mathbf{x}_\perp, t) - z = 0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + g\eta &= 0. \end{aligned}$$

iii) Y en cuanto a la condición de contorno en su fondo liso descrito por $z = -h_0$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

O bien

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta &= 0, & z = \eta(\mathbf{x}_\perp, t) \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x + \varphi_y \eta_y - \varphi_z &= 0, & z = \eta(\mathbf{x}_\perp, t); \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde

$$\mathcal{R}(t) = \{(x, y, z) : -h_0 < z < \eta(\mathbf{x}_\perp, t)\}.$$

A partir de este momento supondremos que la dinámica —el movimiento— del perfil de la ola no varía con respecto al ancho y del canal, moviéndose esta en dirección al largo x del mismo¹; es decir, en movimiento de la ola no depende de la variable y .

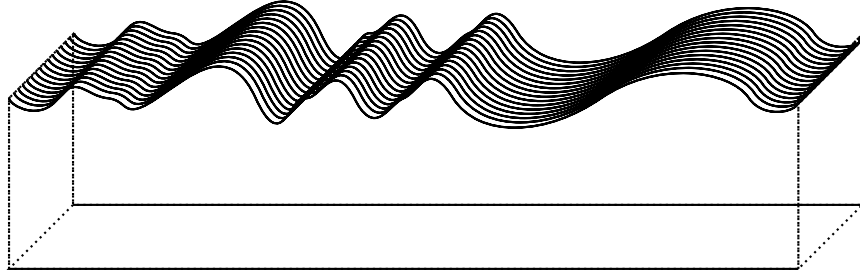


Figura 2.2: Ondulaciones en un canal angosto, uniformes para la anchura del caudal.

Así, todo el análisis realizado en el capítulo 1 y lo desarrollado hasta el momento, concluyendo con el sistema (2.5), puede considerarse en el caso bidimensional (x, z) ; es decir, se pueden omitir todos los términos dependientes de la variable y , pues el perfil de la ola no depende del ancho del canal. Para este caso, tenemos definida nuestra ahora *ola 'plana'* —el perfil de onda— $\eta(x, t)$ al tiempo t , perturbando a la '*curva*' $\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{S}(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \Gamma(\mathbf{x}, t) = \eta(x, t) - z = 0\}$. Ahora, para el sistema (2.5) tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta &= 0, & z = \eta(x, t) \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_z &= 0, & z = \eta(x, t); \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde

$$\mathcal{R}(t) = \{(x, z) : -h_0 < z < \eta(x, t)\}.$$

Las últimas dos ecuaciones del sistema anterior son las *ecuaciones básicas de ondas sobre el agua*, las olas; pues son quienes definen la dinámica de la *curva* η . Postulamos así, nuestro problema del valor inicial para las ondas en el agua —el *Problema de Cauchy*—:

Dados $\eta(x, 0), \varphi(x, z, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$, $-h_0 \leq z \leq \eta(x, 0)$; queremos encontrar $\eta(x, t) \in \mathbb{R}$ y $\varphi(x, z, t)$, para $x \in \mathbb{R}$, $z \in [-h_0, \eta(x, t)]$, $t \geq 0$; que satisfagan (2.6).

¹Esto se interpreta como trabajar en un canal muy angosto, un caudal.

Bien, supongamos que la longitud —de onda— λ de la ola es mayor que la profundidad h_0 del canal, $h_0 \ll \lambda$, y ésta es mayor que la amplitud —de onda— a de la ola, $a \ll h_0$. Con esto, estamos considerando olas *largas* (con respecto a la profundidad del canal) y de amplitudes *pequeñas* (comparadas con dicha profundidad y por ende, a su longitud de onda).

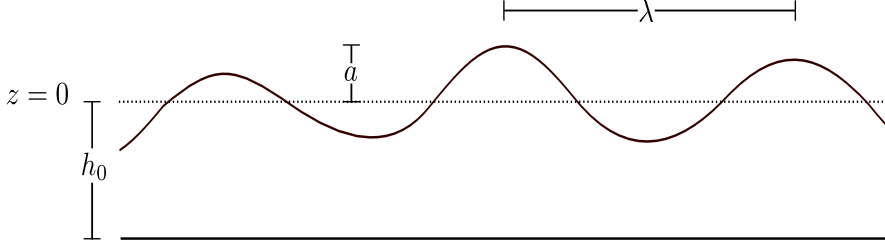


Figura 2.3: Descripción de las ondas largas perturbando al agua en reposo.

Las amplitudes de la ola pueden verse como pequeñas perturbaciones al agua en reposo² $z = 0$. Además, las variaciones de φ y η con respecto a sus variables serán muy pequeñas, es decir, cada valor $|\eta_x|, |\varphi_x|, \dots, |\varphi_t| \ll 1$; esto hace que los términos de orden superior o igual a dos de (2.6) puedan ser descartados. La región $\mathcal{R}(t)$ pasa a estar conformada por

$$\mathcal{R} = \{(x, z) : -h_0 < z < 0\},$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R} \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_t + g\eta &= 0, & z = 0 \\ \eta_t - \varphi_z &= 0, & z = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde la incógnita η representa la distancia entre el nivel de equilibrio y la posición de la curva. Podemos dejar el sistema (2.7) en términos del flujo potencial, calculando la derivada parcial con respecto a t en su tercer ecuación y utilizando su última expresión,

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R} \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_{tt} + g\varphi_z &= 0, & z = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tenemos así un nuevo sistema a trabajar. Estos sistemas tienen muchos tipos de soluciones y, dependiendo de las condiciones iniciales, nos dará ‘diferentes’ tipos de olas. Realizaremos un pequeño análisis con ayuda de (2.7) que servirá como motivación para dar solución al problema de la frontera libre.

²La interpretación que se da a estas suposiciones tienen su punto de partida en considerar un canal sobre aguas someras, es decir de poca profundidad.

2.1.2. La ecuación de onda

Si reescribimos las condiciones cinemáticas de frontera descritas en (2.6) por $\mathbf{U} = (u, w)$ —el campo gradiente de φ —, h_0 la profundidad constante —siendo un valor arbitrario y fijo— del canal,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w &= 0, & z = \eta(x, t) \\ u \frac{\partial h_0}{\partial x} + w &\equiv w = 0, & z = -h_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Definiendo $d = \eta + h_0$ como la profundidad total de la ola

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial d}{\partial x} = w \Big|_{z=\eta} - w \Big|_{z=-h_0}. \quad (2.10)$$

El segundo miembro de (2.10) puede interpretarse como la variación del agua en la ola al tiempo t . Integrando la ecuación de continuidad (1.19) con respecto a z ,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \implies - \int_{-h_0}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dz = w \Big|_{z=-h_0}^{z=\eta}.$$

Suponiendo independencia del integrando con respecto a z ,

$$w \Big|_{z=\eta} - w \Big|_{z=-h_0} = -d \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo en (2.10) y simplificando

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (ud)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ahora supondremos lo mismo que para (2.7), variaciones de las funciones muy pequeñas con respecto a sus variables —como el estar sobre un canal de aguas someras— interpretándose como perturbaciones al agua en reposo, teniéndose ahora como profundidad total $d \equiv h_0$. Tomando la tercera ecuación de (2.7) para calcular su derivada parcial con respecto a x , y recordando que φ es una función C^2

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta \implies 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Considerando (2.12), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Derivando parcialmente la primera ecuación de (2.14) con respecto a x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

y la segunda con respecto a t

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + h_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0.$$

Al despejar el término dependiente de η en esta última y sustituyendo en la otra su valor, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad z = 0. \quad (2.15)$$

Esta ecuación es conocida como la *ecuación de onda*, que tiene como solución general la suma de dos funciones arbitrarias $\eta(x, y, t) = f(x - \sqrt{gh_0}t) + h(x + \sqrt{gh_0}t)$. La primera representa una onda *progresiva*, que se propaga con velocidad $c = \sqrt{gh_0}$, *velocidad de onda*, de izquierda a derecha sobre la dirección x , y la segunda también es una onda progresiva, propagándose a la misma velocidad, pero en sentido contrario. Dicha velocidad es la forma linealizada de \sqrt{gd} . Como vemos, es pertinente destacar las propiedades de estas ondas, la relevancia de hablar sobre dichas propiedades y notar la utilidad de tal ecuación.

2.2. Una mirada a la teoría de ondas

2.2.1. Sobre un sistema lineal

Recordemos al sistema (2.8). Nos propondremos darle solución a este sistema lineal

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R} \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_{tt} + g\varphi_z &= 0, & z = 0, \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{R} = \{(x, z) : -h_0 < z < 0\}.$$

Por su primer ecuación, *la ecuación de Laplace*, podemos aplicar el método de separación de variables, buscando soluciones no nulas de la forma

$$\varphi(x, z, t) = X(x)Z(z)T(t). \quad (2.16)$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (2.8)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Z + \frac{d^2 Z}{dz^2} X = 0, \quad (2.17)$$

entonces

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}.$$

Ya que las funciones X , Z no dependen de z y x respectivamente, y para cualquier elemento de \mathcal{R} tenemos dicha igualdad, éstas deben ser igual a una constante

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Si $\mu = 0$ las soluciones son constantes, mismas que no hacen sentido a las *ondulaciones* que queremos modelar. Para $\mu < 0$ definen soluciones no acotadas para x , que no hacen sentido al fenómeno físico que estamos estudiando. Así, con $\mu > 0$, definimos $k^2 = \mu$.

Para X tenemos la ecuación de movimiento de un oscilador armónico sencillo

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0, \quad (2.19)$$

con solución general para x cualquier valor real

$$X(x) = A \operatorname{sen}(kx) + B \cos(kx), \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad k > 0. \quad (2.20)$$

En cuanto a Z ,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (2.21)$$

tiene su solución de forma exponencial

$$Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz}, \quad C, D \in \mathbb{R}, \quad k > 0; \quad z \in (-h_0, 0). \quad (2.22)$$

Por la condición de fondo $z = -h_0$ en (2.8), y sustituyendo (2.22) en (2.16),

$$kC e^{-kh_0} - kD e^{kh_0} = 0. \quad (2.23)$$

Definimos una constante E , tal que

$$C = \frac{1}{2} E e^{kh_0}, \quad D = \frac{1}{2} E e^{-kh_0}. \quad (2.24)$$

Sustituyendo los valores de las constantes en (2.22)

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{1}{2} E e^{kh_0} e^{kz} + \frac{1}{2} E e^{-kh_0} e^{-kz} = \frac{1}{2} E \left(e^{k(z+h_0)} + e^{-k(z+h_0)} \right) \\ &= E \cosh(k(z+h_0)) \end{aligned} \quad (2.25)$$

obtenemos la solución general para Z . Definiendo $A_1 = AE$, $A_2 = BE$ y sustituyendo las formas para $X(x)$ y $Z(z)$ en (2.16)

$$\varphi = \cosh(k(z+h_0)) \left(A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx) \right) T(t). \quad (2.26)$$

Para obtener T , sustituimos (2.26) en la última ecuación de (2.8), en $z = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} \\
&= \cosh(kh_0) \left(A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx) \right) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \\
&\quad + gk \operatorname{senh}(kh_0) \left(A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx) \right) T(t) \\
&= \cosh(kh_0) \left(A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx) \right) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \\
&\quad + gk \tanh(kh_0) \cosh(kh_0) \left(A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx) \right) T(t) \\
&= \cosh(kh_0) \left(A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx) \right) \left[\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + gk \tanh(kh_0) T(t) \right].
\end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier real x en cada valor positivo arbitrario y fijo k , el tercer factor del producto tiene que ser cero

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad \omega^2 = gk \tanh(kh_0). \quad (2.27)$$

Por la forma (2.20), tenemos como solución general para cada $\omega = \omega(k)$

$$T(t) = T_1 \operatorname{sen}(\omega t) + T_2 \cos(\omega t); \quad T_1, T_2 \in \mathbb{R}, \quad \omega = \sqrt{gk \tanh(kh_0)}. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, como solución para (2.16), por (2.20), (2.22) y (2.28), para cada k positivo tenemos

$$\varphi(x, z, t) = \cosh(k(z + h_0)) [F(t) \operatorname{sen}(kx) + G(t) \cos(kx)], \quad (2.29)$$

donde

$$\begin{aligned}
F(t) &= A_1 T_1 \operatorname{sen}(\omega t) + A_1 T_2 \cos(\omega t), & A_1 &= AE \\
G(t) &= A_2 T_1 \operatorname{sen}(\omega t) + A_2 T_2 \cos(\omega t), & A_2 &= BE;
\end{aligned} \quad (2.30)$$

con

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kh_0)}. \quad (2.31)$$

En cuanto a la elevación de la ola dada por η , tomando la tercera ecuación de (2.7) y evaluando en $z = 0$,

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial t} \Big|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\cosh(k(z + h_0)) \left[F(t) \operatorname{sen}(kx) + G(t) \cos(kx) \right] \right] \Big|_{z=0} \\
&= -\frac{\omega}{g} \cosh(kh_0) \left[\operatorname{sen}(kx) \left[A_1 T_1 \cos(\omega t) - A_1 T_2 \operatorname{sen}(\omega t) \right] \right. \\
&\quad \left. + \cos(kx) \left[A_2 T_1 \cos(\omega t) - A_2 T_2 \operatorname{sen}(\omega t) \right] \right].
\end{aligned}$$

Multiplicando por ω/ω la expresión anterior y usando la igualdad (2.31),

$$\eta(x, t) = -\frac{k}{\omega} \sinh(kh_0) \left[\sin(kx) \left[A_1 T_1 \cos(\omega t) - A_1 T_2 \sin(\omega t) \right] + \cos(kx) \left[A_2 T_1 \cos(\omega t) - A_2 T_2 \sin(\omega t) \right] \right]. \quad (2.32)$$

Observación 5. Las soluciones generales para φ , η dadas por (2.29) y (2.32) respectivamente no son necesariamente soluciones particulares del problema de condiciones de frontera; es decir, satisfacen las condiciones de frontera del sistema, pero no necesariamente sus condiciones iniciales.

Debido a la aproximación lineal, el omitir términos de orden dos, la solución precisa del sistema se podrá escribir como una combinación lineal de soluciones del tipo (2.29) y (2.32), teniendo diferentes longitudes de onda y velocidades de fase.

Definiendo valores particulares a las constantes de (2.30) obtenemos distintas ondas. Entre tantas, veremos un caso *especial*, las ondas *progresivas* —o *viajeras*—; mismas que conforman la guía para modelar la ola que observó Russell, la teoría para la onda *solitaria* y posteriormente, a la teoría del *solitón*.

2.2.2. Ondas progresivas

Al final de la subsección 2.1.2 se mencionaron las *ondas progresivas*, también llamadas *ondas viajeras*; las cuales, como su nombre lo indica, son ondas que perturban la superficie del fluido avanzando en una cierta dirección, a una misma velocidad y manteniendo su forma a través del tiempo y del plano. Consideraremos el caso donde la onda avanza con velocidad c (positiva) en dirección al ancho x del canal en un sentido *positivo*; es decir, de izquierda a derecha. Las variables que intervienen en la dinámica del perfil de onda η son: la dirección x , el tiempo t y la velocidad c , $(x, t) = (x - ct)$.

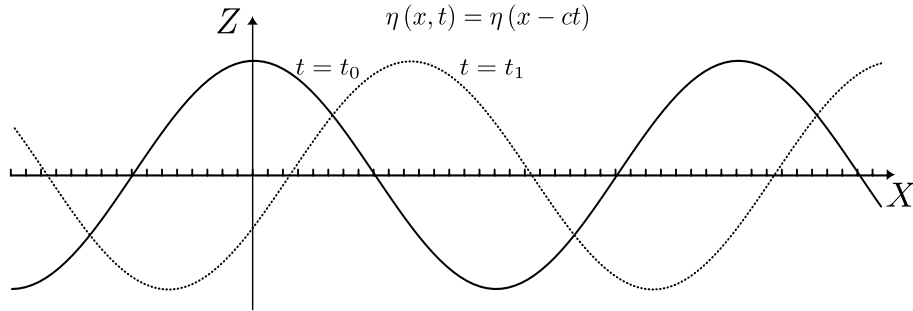


Figura 2.4: El paso de una ola viajera, a través del plano y del tiempo.

Definiendo los valores para las constantes del sistema (2.30) como

$$E = 1, \quad B = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 2, \quad A = A^*; \quad (2.33)$$

con A^* un valor positivo constante. Por (2.29) tenemos para φ

$$\begin{aligned}\varphi(x, z, t) &= A^* \cosh(kz + kh_0) [2 \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t)] \\ &= A^* \cosh(kz + kh_0) [\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx + \omega t)]\end{aligned}\quad (2.34)$$

y por (2.32), para η

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= A^* \frac{k}{\omega} \operatorname{senh}(kh_0) [2 \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(\omega t)] \\ &= A^* \frac{k}{\omega} \operatorname{senh}(kh_0) [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] \\ &= a [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)];\end{aligned}\quad (2.35)$$

con una constante a que hace referencia a la amplitud de la ola

$$a = \frac{kA^*}{\omega} \operatorname{senh}(kh_0) \quad \Longrightarrow \quad A^* = \frac{a\omega}{k \operatorname{senh}(kh_0)}.\quad (2.36)$$

Para φ y η se tiene como resultado, en cada una, la suma de dos ondas progresivas; moviéndose en sentidos opuestos con una velocidad³ $c = \omega/k$; satisfaciéndose la ecuación de onda (2.15) tanto para η , como para el flujo φ . Por ello, la solución de la onda η (2.35) resulta una onda ‘estacionaria’.

Una *onda estacionaria* permanece confinada en un espacio, no presentando un desplazamiento con respecto al tiempo. Aparecen en ella puntos *estacionarios* para su dinámica —más precisamente, los puntos donde cambia la concavidad de las ondas sinusoidales—; es decir puntos que permanecen en una misma posición a través del tiempo, *nodos*. Esto lo podemos observar en la figura 2.5.

Si consideramos para (2.34) y (2.35) sólo las funciones desplazándose en sentido positivo —donde su argumento es $(kx - \omega t)$ — o las que van en sentido negativo —con argumento $(kx + \omega t)$ —, cumplen el sistema inicial (2.7). Así, considerando sólo las que tienen $(kx - \omega t)$ como argumento, tenemos una expresión sinusoidal de la ola progresiva, recorriendo la longitud del canal de izquierda a derecha. Concluimos así con el sistema

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh(kz + kh_0)}{\operatorname{senh}(kh_0)} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \\ \eta &= a \cos(kx - \omega t),\end{aligned}\quad (2.37)$$

para el flujo φ y el perfil de ola η respectivamente.

Entonces, tenemos un tren de ondas infinito con dominio para todos los números reales x , con a la amplitud de onda. En cuanto a las perturbaciones, oscilan entre a y $-a$, tomando los valores máximos y mínimos la cresta y el valle respectivamente, con $2a$ la altura total de la onda.

En la teoría de ondas se define la *frecuencia* ω como el número de crestas —o valles— que pasan en un periodo t_0 por un punto fijo del plano, definiéndose éste como el tiempo en que tarda una ola en recorrer su longitud λ . Mientras que el

³Se justifica esta igualdad por la ecuación 31.

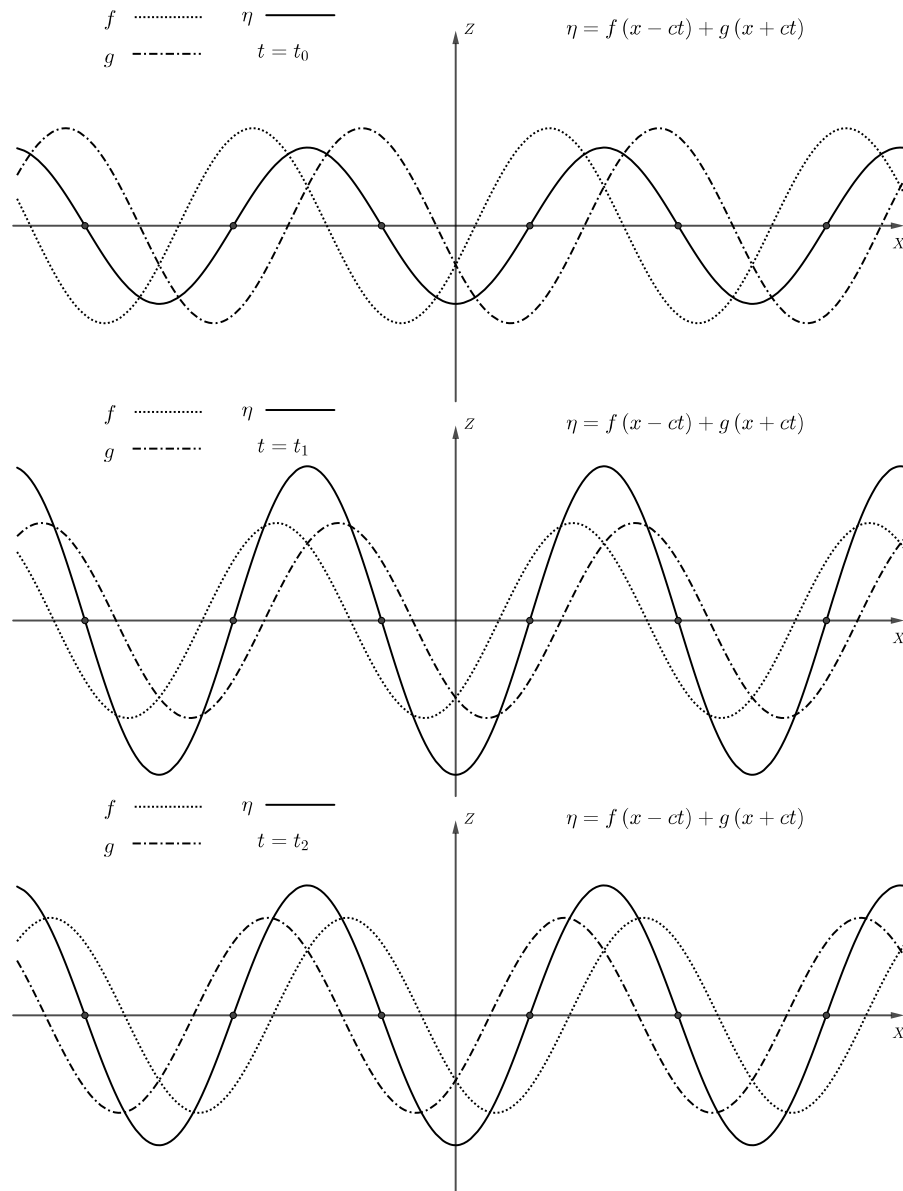


Figura 2.5: El paso de dos ondas progresivas f, g viajando en sentido contrario creando una onda estacionaria η .

número de onda k indica el número de oscilaciones en una unidad de distancia λ . Cada una de estas magnitudes tiene dimensiones $1/t_0$ y $1/\lambda$ respectivamente. Aquí, la *longitud de onda* λ es la distancia que existe entre dos crestas —o valles— consecutivos.

Vemos que, tanto el flujo como la ola son periódicos; tanto espacial como temporal, $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi/t_0$ respectivamente. Es decir, a un tiempo t fijo si incrementamos $\lambda = 2\pi/k$ en el punto x , η toma el mismo valor. Análogamente, en algún punto x fijo al incrementar $t_0 = 2\pi/\omega$ en un tiempo t ; tenemos una ola con su *longitud de onda* λ en el intervalo de periodo de tiempo t_0 de manera uniforme. Por lo anterior, tenemos que la *velocidad de fase* c de una ola es

$$c(k) = c = \frac{\lambda}{t_0} = \frac{2\pi\lambda}{t_0 2\pi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g \tanh(kh_0)}{k}}. \quad (2.38)$$

Si tomamos un valor arbitrario fijo k , las ondas descritas por (2.37) no se deforman con el transcurso del tiempo, pues su velocidad $c(k)$ es un valor constante.

Además $(kx - \omega t)$ mantiene el mismo valor, pues si partimos de x_0 al tiempo $t = 0$ con velocidad constante c , para un tiempo t estaremos en el punto x dado por

$$x = x_0 + ct \implies kx - \omega t = k(x - ct) = kx_0.$$

Por lo tanto, en la trayectoria $x(t)$, φ no cambia; la onda se propaga por la derecha a velocidad c , sin cambiar de forma.

Bajo la misma teoría, a la igualdad entre la frecuencia y el producto del número de onda con la velocidad, $\omega(k) = kc(k)$ se le conoce como *relación de dispersión*; siendo $\omega(k)$ directamente proporcional a k , mientras $c(k)$ lo es inversamente. Esto quiere decir que las olas con alta frecuencia tienden a moverse más lentamente, en comparación con las de baja frecuencia.

Retomemos las hipótesis iniciales al canal, que sirvieron para pasar del sistema no lineal (2.6) a los sistemas lineales (2.7) y (2.8), $a \ll h_0 \ll \lambda$, estamos considerando el paso de una onda larga. Tomando la relación de dispersión,

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kh_0) \quad (2.39)$$

y, dado que k tiene dimensiones inversas a la longitud λ , $kh_0 \ll \lambda$. Si consideramos el límite cuando λ es cada vez más grande, k tiende a cero. Así

$$c^2 = gh_0 \frac{\tanh(kh_0)}{kh_0} \approx gh_0 = c_0^2; \quad \lambda \longrightarrow \infty; \quad k \longrightarrow 0. \quad (2.40)$$

Obtenemos la velocidad límite de olas lineales en el límite de ondas largas. Sin considerar los efectos no lineales, la velocidad de propagación de las ondas de baja frecuencia en aguas rasas no depende de su longitud, de modo que una superposición de esas ondas no presenta dispersión.

Como estamos trabajando con conceptos físicos, las variables —incluso las funciones de onda— tienen magnitudes, siendo necesario definirlas y *adimensionalizar* nuestros objetos, apareciendo parámetros que indican los aspectos físicos de importancia en el fenómeno que queremos analizar, dichos parámetros nos ayudarán a estudiar el problema de manera no lineal.

2.3. Deducción de la ecuación KdV

Hasta el momento, no hemos dado una solución al sistema (2.6). Lo realizado en la sección 2.2 fue estudiar su caso lineal, obteniendo así —por la observación 5— soluciones particulares, pero concluyéndose aún como aproximaciones lineales. No fue en vano dicho trabajo, pues obtuvimos expresiones para poder determinar las magnitudes y *dimensiones* y variables del sistema.

La solución general *aproximada* se construirá descartando *coherentemente* los términos no lineales de (2.6) mediante una serie de potencias, pero a partir de sus ecuaciones y variables adimensionalizadas.

2.3.1. Adimensionalización

Al estudiar un problema físico, es importante entender qué papel están jugando las variables, no son sólo expresiones, sino una serie de números dependientes de una *unidad*. Por ejemplo, la *velocidad*: un valor dado por una relación de distancia entre un tiempo determinado.

Puesto que estamos estudiando la dinámica de las olas, tendremos que entender el análisis *adimensional* del problema, dándonos herramientas suficientes para determinar la solución a las condiciones de contorno. En el estudio aparecen distintas unidades que podríamos tomar como referencia para adimensionalizar el sistema, mas la elección será de manera convencional y natural.

Nuestra hipótesis a lo largo del capítulo ha sido suponer un movimiento de onda en un canal, donde su longitud de onda λ es mayor que la profundidad h_0 del canal, y ésta es mayor que su amplitud de onda a . Al suponer que el perfil de la ola es independiente al ancho del canal, obtuvimos el sistema no lineal (2.6) en la subsección 2.1.1

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & \mathcal{R}(t) \\ \varphi_z &= 0, & z = -h_0 \\ \varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g\eta &= 0, & z = \eta(x, t) \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_z &= 0, & z = \eta(x, t); \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{R}(t) = \{(x, z) : -h_0 < z < \eta(x, t)\}.$$

La teoría de *ondas largas* guía a un procedimiento de expansión de las ecuaciones de olas (2.6) en parámetros ε, δ obtenidos después de adimensionalizar el problema, derivando a ecuaciones aproximadas más sencillas. Llegaremos a tales ecuaciones haciéndonos valer también de los resultados concluidos con la linealidad.

Como $h_0 \ll \lambda$, podemos —por (2.40)— considerar la aproximación de la velocidad $c = c_0$, que satisface $c_0^2 = gh_0$. Puesto que la velocidad se define como distancia recorrida sobre un tiempo dado, $c_0 = \lambda/t_0$, expresamos a la unidad

de tiempo como $t_0 = \lambda/c_0$. En el caso de las unidades de longitud tenemos las unidades λ, h_0 y a . Con esto, definimos las nuevas variables adimensionales

$$\xi = \frac{x}{\lambda}, \quad \zeta = 1 + \frac{z}{h_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}. \quad (2.41)$$

Por la forma de η dada en el sistema (2.37), se sustituirá por la ecuación adimensional ν , con $\nu = \eta/a$. Para $\varphi(x, z, t)$ y $\eta(x, t)$ en función de las nuevas variables, por la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{1}{\lambda} \varphi_\xi, & \varphi_z &= \frac{1}{h_0} \varphi_\zeta, & \varphi_t &= \frac{1}{t_0} \varphi_\tau, & \eta &= a\nu, \\ \varphi_{xx} &= \frac{1}{\lambda^2} \varphi_{\xi\xi}, & \varphi_{zz} &= \frac{1}{h_0^2} \varphi_{\zeta\zeta}, & \eta_t &= \frac{a}{t_0} \nu_\tau, & \eta_x &= \frac{a}{\lambda} \nu_\xi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ahora sustituiremos en el sistema (2.6) nuestros términos adimensionalizados. Para su primer ecuación,

$$\frac{h_0^2}{\lambda^2} \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\zeta\zeta} = 0. \quad (2.43)$$

En cuanto a la segunda,

$$\varphi_\zeta = 0. \quad (2.44)$$

Para la tercera,

$$\frac{1}{t_0} \varphi_\tau + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \varphi_\xi^2 + \frac{1}{h_0^2} \varphi_\zeta^2 \right) + ag\nu = 0;$$

entonces

$$\frac{c_0}{ag\lambda} \varphi_\tau + \frac{1}{2agh_0^2} \left(\frac{h_0^2}{\lambda^2} \varphi_\xi^2 + \varphi_\zeta^2 \right) + \nu = 0. \quad (2.45)$$

Y por último,

$$\frac{a}{t_0} \nu_\tau + \frac{a}{\lambda^2} \varphi_\xi \nu_\xi - \frac{1}{h_0} \varphi_\zeta = 0. \quad (2.46)$$

Nos falta conocer la dimensión de φ . Sustituyendo las igualdades de (2.41) en la forma para φ dada en (2.37), tomando ahora valores en $0 < \zeta < 1 + \varepsilon\nu$

$$\varphi(\xi, \zeta, \tau) = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh(kh_0\zeta)}{\sinh(kh_0)} \operatorname{sen}(k\lambda\xi - \omega t_0\tau). \quad (2.47)$$

Haciendo $k \rightarrow 0$, $\omega/k = c \rightarrow c_0$; $c_0 = \lambda/t_0$, y evaluando en $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, 1, \tau) &= ac_0 \frac{\cosh(kh_0)}{\sinh(kh_0)} \operatorname{sen}(k\lambda\xi - k\lambda\tau) \\ &= \frac{ac_0}{kh_0 \tanh(kh_0)} \operatorname{sen}(k\lambda(\xi - \tau)) \\ &= \frac{a\lambda c_0}{2\pi h_0 \tanh(kh_0)} \operatorname{sen}(\xi - \tau) \\ &= \frac{ag\lambda}{2\pi c_0} \operatorname{sen}(\xi - \tau). \end{aligned}$$

Por (2.47), sustituimos a $\varphi(x, z, t)$ por la función adimensional $\Phi(\xi, \zeta, \tau)$, $\Phi = (c_0/ag\lambda) \varphi$ en las ecuaciones (2.43)–(2.46)

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{\lambda^2} \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} &= 0 \\ \Phi_{\zeta} &= 0 \\ \Phi_{\tau} + \frac{1}{2ag h_0^2} \frac{h_0^2}{\lambda^2} \left(\frac{ag\lambda}{c_0} \right)^2 \Phi_{\xi}^2 + \frac{1}{2ag h_0^2} \left(\frac{ag\lambda}{c_0} \right)^2 \Phi_{\zeta}^2 + \nu &= 0 \\ \frac{a}{t_0} \nu_{\tau} + \frac{a}{\lambda^2} \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_{\xi} \nu_{\xi} - \frac{1}{h_0} \frac{ag\lambda}{c_0} \Phi_{\zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Definiendo el *parámetro de longitud de onda* o *parámetro de profundidad* como $\delta = (h_0/\lambda)^2$ y el *parámetro de amplitud* dado por $\varepsilon = a/h_0$, concluimos con el sistema adimensionalizado de (2.6):

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} &= 0, \quad 0 < \zeta < 1 + \varepsilon\nu \\ \Phi_{\zeta} &= 0, \quad \zeta = 0 \\ \Phi_{\tau} + \frac{1}{2}\varepsilon \Phi_{\xi}^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\delta} \Phi_{\zeta}^2 + \nu &= 0, \quad \zeta = 1 + \varepsilon\nu \\ \nu_{\tau} + \varepsilon \Phi_{\xi} \nu_{\xi} - \frac{1}{\delta} \Phi_{\zeta} &= 0, \quad \zeta = 1 + \varepsilon\nu. \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.3.2. Obtención de la forma KdV

El sistema (2.49) representa ecuaciones adimensionales con parámetros ε, δ que pueden ser manipulados, pues por las suposiciones de las variables λ, h_0 y a , $\varepsilon \ll 1$ y $\delta \ll 1$. Aún no tenemos una ecuación que modele el comportamiento de las *ondas solitarias*, comportándose estas como *cúmulos* de agua *solitarios*, viajando a velocidad constante y en una sola dirección, sin aparente cambio de forma.

Tenemos a $\Phi(\xi, \zeta, \tau)$ en términos de $\varphi(x, z, t)$ y, salvo por sus dimensiones, tienen operacionalmente las mismas propiedades, de manera que Φ también es una función armónica, por ende admite también una expansión asintótica. Fijando las variables arbitrarias (ξ, τ) , desarrollaremos una serie de potencias en ζ alrededor del origen

$$\Phi(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n f_n(\xi, \tau), \quad (2.50)$$

para (2.49),

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} &= 0, \quad 0 < \zeta < 1 + \varepsilon\nu \\ \Phi_{\zeta} &= 0, \quad \zeta = 0 \\ \Phi_{\tau} + \frac{1}{2}\varepsilon \Phi_{\xi}^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\delta} \Phi_{\zeta}^2 + \nu &= 0, \quad \zeta = 1 + \varepsilon\nu \\ \nu_{\tau} + \varepsilon \Phi_{\xi} \nu_{\xi} - \frac{1}{\delta} \Phi_{\zeta} &= 0, \quad \zeta = 1 + \varepsilon\nu. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\Phi_\zeta(\xi, \zeta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\zeta^n f_{n+1}(\xi, \tau) \\ &= f_1(\xi, \tau) + 2\zeta f_2(\xi, \tau) + 3\zeta^2 f_3(\xi, \tau) + \dots,\end{aligned}$$

por la condición del fondo en $\zeta = 0$, $f_1 \equiv 0$. Calculando las segundas derivadas parciales de Φ con respecto a ξ y ζ en términos de (2.50), sustituimos en la primera ecuación de (2.49)

$$\begin{aligned}0 &= \delta \Phi_{\xi\xi}(\xi, \zeta, \tau) + \Phi_{\zeta\zeta}(\xi, \zeta, \tau) \\ &= \delta \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\xi, \tau) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\zeta^n f_{n+2}(\xi, \tau);\end{aligned}$$

despejando e igualando coeficiente a coeficiente con respecto a la variable ζ^n , para cada n natural

$$f_{n+2}(\xi, \tau) = -\frac{\delta}{(n+2)(n+1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\xi, \tau) = -\delta \frac{n!}{(n+2)!} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_n(\xi, \tau).$$

Vemos que, si n es par, $n+2$ también lo es; de manera similar para n impar, $n+2$ también lo será. Además, si queremos saber el k -ésimo coeficiente par —o impar—, éste está en términos del anterior coeficiente par —impar—, éste del anterior y así sucesivamente. Por ello, todos los coeficientes pares están determinados por f_0 y los impares por f_1 . Como $f_1 = 0$, en (2.50) sólo aparecen los términos con potencia de ζ par. Denotando $f_0 = f$, para los coeficientes de f_n tenemos

$$\begin{aligned}f_2(\xi, \tau) &= -\delta \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(\xi, \tau) \\ f_4(\xi, \tau) &= -\delta \frac{2!}{4!} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_2(\xi, \tau) = \delta^2 \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} f(\xi, \tau) \\ f_6(\xi, \tau) &= -\delta \frac{4!}{6!} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_4(\xi, \tau) = -\delta^3 \frac{1}{6!} \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} f(\xi, \tau) \\ &\vdots \\ f_{2n}(\xi, \tau) &= (-\delta)^n \prod_{i=1}^n \frac{(2(i-1))!}{(2i)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} f(\xi, \tau) = \frac{(-\delta)^n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} f(\xi, \tau).\end{aligned}$$

Entonces, Φ queda expresada como

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, \zeta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} f(\xi, \tau) \\ &= f - \zeta^2 \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi} + \zeta^4 \frac{\delta^2}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi} - \zeta^6 \frac{\delta^3}{6!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \dots;\end{aligned}\tag{2.51}$$

con

$$f(\xi, \tau) = f_0(\xi, \tau).$$

Desarrollaremos con (2.51) las correspondientes derivadas parciales para sustituir en las últimas dos ecuaciones, las ecuaciones básicas de las olas, sobre $\zeta = 1 + \varepsilon\nu$,

$$\begin{aligned}\Phi_\xi(\xi, \zeta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n+1}}{\partial \xi^{2n+1}} f(\xi, \tau) \\ &= f_\xi - \zeta^2 \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi\xi} + \zeta^4 \frac{\delta^2}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi} - \zeta^6 \frac{\delta^3}{6!} f_{\xi^{(6)}} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_\zeta(\xi, \zeta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^{n+1} \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2(n+1)}}{\partial \xi^{2(n+1)}} f(\xi, \tau) \\ &= -\zeta \delta f_{\xi\xi} + \zeta^3 \frac{\delta^2}{3!} f_{\xi\xi\xi\xi} - \zeta^5 \frac{\delta^3}{5!} f_{\xi^{(6)}} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_\tau(\xi, \zeta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial \partial^{2n}}{\partial \tau \partial \xi^{2n}} f(\xi, \tau) \\ &= f_\tau - \zeta^2 \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi\tau} + \zeta^4 \frac{\delta^2}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\tau} - \zeta^6 \frac{\delta^3}{6!} f_{\xi^{(6)}\tau} + \dots;\end{aligned}$$

interpretándose las potencias de las variables escritas como subíndices el número de veces que se tiene que derivar parcialmente la función tal con respecto a dicha variable. Sustituyendo los valores en la última ecuación de (2.49),

$$\begin{aligned}0 &= \nu_\tau + \varepsilon \Phi_\xi \nu_\xi - \frac{1}{\delta} \Phi_\zeta \\ &= \nu_\tau + \varepsilon \nu_\xi \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{(1 + \varepsilon\nu)^{2n}}{(2n)!} f_{\xi^{(2n+1)}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{(1 + \varepsilon\nu)^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{\xi^{(2(n+1))}} \\ &= \nu_\tau + \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{(1 + \varepsilon\nu)^{2n}}{(2n+1)!} [\varepsilon \nu_\xi (2n+1) f_{\xi^{(2n+1)}} + (1 + \varepsilon\nu) f_{\xi^{(2(n+1))}}] \\ &= \nu_\tau + \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{(1 + \varepsilon\nu)^{2n}}{(2n+1)!} \left[((1 + \varepsilon\nu) f_{\xi^{(2n+1)}})_\xi + 2n (1 + \varepsilon\nu)_\xi f_{\xi^{(2n+1)}} \right] \\ &= \nu_\tau + ((1 + \varepsilon\nu) f_\xi)_\xi - (1 + \varepsilon\nu)^2 \frac{\delta}{3!} \left[((1 + \varepsilon\nu) f_{\xi\xi\xi})_\xi + 2 (1 + \varepsilon\nu)_\xi f_{\xi\xi\xi} \right] + \dots\end{aligned}$$

Como $\varepsilon, \delta \ll 1$, omitiremos los términos que estén relacionados con potencias mayores o iguales a dos, $\varepsilon^n \delta^m$; $n + m \geq 2$, pues ellos tienden a cero. Definiendo $\varpi = f_\xi$, concluimos para la ecuación anterior

$$\nu_\tau + \left((1 + \varepsilon\nu) \varpi \right)_\xi - \frac{\delta}{6} \varpi_{\xi\xi\xi} + F(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots) = 0, \quad (2.52)$$

con $F(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots)$ expresando los términos de potencias mayores o iguales a dos.

En cuanto a la tercera ecuación de (2.49), tendremos algo similar,

$$\begin{aligned} 0 &= \nu + \Phi_\tau + \frac{1}{2}\varepsilon\Phi_\xi^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}\Phi_\zeta^2 \\ &= \nu + \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{(1+\varepsilon\nu)^{2n}}{(2n)!} f_{\xi^{(2n)}} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{(1+\varepsilon\nu)^{2n}}{(2n)!} f_{\xi^{(2n+1)}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2\delta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^{n+1} \frac{(1+\varepsilon\nu)^{2n+1}}{(2n+1)!} f_{\xi^{(2(n+1))}} \right)^2. \end{aligned}$$

Desarrollando los primeros sumandos

$$\begin{aligned} 0 &= \nu + \left(f_\tau - (1+\varepsilon\nu)^2 \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi\tau} + (1+\varepsilon\nu)^4 \frac{\delta^2}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\tau} - (1+\varepsilon\nu)^6 \frac{\delta^3}{6!} f_{\xi^{(6)\tau}} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left(f_\xi - (1+\varepsilon\nu)^2 \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi\xi} + (1+\varepsilon\nu)^4 \frac{\delta^2}{4!} f_{\xi\xi\xi\xi\xi} - (1+\varepsilon\nu)^6 \frac{\delta^3}{6!} f_{\xi^{(7)}} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right)^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2\delta} \left(- (1+\varepsilon\nu) \delta f_{\xi\xi} + (1+\varepsilon\nu)^3 \frac{\delta^2}{3!} f_{\xi\xi\xi\xi} - (1+\varepsilon\nu)^5 \frac{\delta^3}{5!} f_{\xi^{(6)}} + \dots \right)^2. \end{aligned}$$

De nueva cuenta, agrupando los términos de grado mayor o igual a dos,

$$\nu + f_\tau - \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi\tau} + \frac{\varepsilon}{2} f_\xi^2 + G(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots) = 0.$$

Calculando ahora la derivada parcial con respecto a ξ y sustituimos $\varpi = f_\xi$

$$\nu_\xi + \varpi_\tau - \frac{\delta}{2} \varpi_{\xi\xi\tau} + \varepsilon \varpi \varpi_\xi + E(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots) = 0. \quad (2.53)$$

Las ecuaciones (2.52) y (2.53) nos brindan un sistema para las condiciones de contorno de la superficie en función de la variable ϖ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\varpi (1+\varepsilon\nu)) - \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^3 \varpi}{\partial \xi^3} + F(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots) &= 0 \\ \frac{\partial \varpi}{\partial \tau} + \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \varepsilon \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^3 \varpi}{\partial \tau \partial \xi^2} + E(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots) &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Observación 6. ϖ es una aproximación a $\Phi_\xi(\xi, \zeta, \tau)$ de orden uno, pues

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(\xi, \zeta, \tau) &= f_\xi - \zeta^2 \frac{\delta}{2} f_{\xi\xi\xi} + P(\varepsilon, \delta, \dots) \\ &= \varpi - \zeta^2 \frac{\delta}{2} \varpi_{\xi\xi} + P(\varepsilon, \delta, \dots). \end{aligned}$$

Y, considerando que en (2.49) aparecen productos con respecto a ε y δ , sólo nos interesa el término ϖ .

Asumiremos que la onda solitaria tiene un comportamiento como las ondas progresivas, viajando con una dirección paralela a ξ de izquierda a derecha, con velocidad de fase $c = c_0$ en términos dimensionales—. Entonces, el perfil de onda es $\eta = \eta(x - ct)$, con $c \sim 1$ normalizado en nuestras unidades. Adimensionalizando tal resultado, $\nu = \nu(\xi - \tau)$, $\nu_\xi = -\nu_\tau$.

Tomando la tercera ecuación de (2.49) a orden uno y la observación 6,

$$0 = \nu + \Phi_\tau + Q(\varepsilon, \delta, \dots) \implies 0 = \nu_\xi + \varpi_\tau + Q(\varepsilon, \delta, \dots). \quad (2.55)$$

Si proponemos una solución de la forma

$$\Phi_\xi \sim \varpi = \nu + \varepsilon A + \delta B; \quad (2.56)$$

donde $A(\nu, \nu_\xi, \nu_{\xi\xi}, \dots)$ y $B(\nu, \nu_\xi, \nu_{\xi\xi}, \dots)$ son funciones a conocer, afirmamos que satisface el comportamiento progresivo de la onda solitaria. Pues bien, ya que a orden cero la propuesta de solución es $\varpi = \nu + R(\varepsilon, \delta, \dots)$, por (2.55) $\nu_\xi + \nu_\tau + S(\varepsilon, \delta, \dots) = 0$.

Esto significa que la solución a orden cero para (2.56) es una función del tipo $\nu = \nu(\xi - \tau) + T(\varepsilon, \delta, \dots)$. Es decir, es una ola viajera restringida a tener una velocidad positiva unitaria, que es justo lo que queremos. Por lo tanto, nuestra propuesta coincide con nuestra asunción, a orden cero.

Ahora, sustituyendo (2.56) en la primera ecuación de (2.54), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} ((\nu + \varepsilon A + \delta B)(1 + \varepsilon \nu)) - \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (\nu + \varepsilon A + \delta B) + F \\ &= \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon \nu^2 + \nu + \varepsilon A + \delta B) - \frac{1}{6} \delta \frac{\partial^3 \nu}{\partial \xi^3} + G \\ &= \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \varepsilon \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} + 2\nu \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) + \delta \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \nu}{\partial \xi^3} \right) + G, \end{aligned}$$

y en la segunda

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} (\nu + \varepsilon A + \delta B) + \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \varepsilon (\nu + \varepsilon A + \delta B) \frac{\partial}{\partial \xi} (\nu + \varepsilon A + \delta B) \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^3}{\partial \tau \partial \xi^2} (\nu + \varepsilon A + \delta B) + E \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} (\nu + \varepsilon A + \delta B) + \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \varepsilon \nu \frac{\partial \nu}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \delta \frac{\partial^3 \nu}{\partial \tau \partial \xi^2} + H \\ &= \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \varepsilon \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) + \delta \left(\frac{\partial B}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \nu}{\partial \tau \partial \xi^2} \right) + H. \end{aligned}$$

Tenemos como resultado un sistema

$$\begin{aligned} \nu_\tau + \nu_\xi + \varepsilon (A_\xi + 2\nu \nu_\xi) + \delta \left(B_\xi - \frac{1}{6} \nu_{\xi\xi\xi} \right) + G(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon \delta, \dots) &= 0 \\ \nu_\tau + \nu_\xi + \varepsilon (A_\tau + \nu \nu_\xi) + \delta \left(B_\tau - \frac{1}{2} \nu_{\xi\xi\tau} \right) + H(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon \delta, \dots) &= 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

que consiste en dos representaciones de una misma ecuación diferencial. Para que (2.57) sea consistente, los coeficientes deben satisfacer

$$\begin{aligned} A_\xi + 2\nu\nu_\xi &= A_\tau + \nu\nu_\xi \\ B_\xi - \frac{1}{6}\nu_{\xi\xi\xi} &= B_\tau - \frac{1}{2}\nu_{\xi\xi\tau}. \end{aligned}$$

Como A, B sólo dependen de ν ,

$$A_\tau = \frac{dA}{d\nu} \frac{\partial\nu}{\partial\tau} = \frac{dA}{d\nu} \left(-\frac{\partial\nu}{\partial\xi} + S(\varepsilon, \delta, \dots) \right) = -A_\xi + U(\varepsilon, \delta, \dots).$$

De igual forma para B ,

$$B_{\tau\xi} = \frac{dB}{d\nu} \frac{\partial\nu}{\partial\tau} = \frac{dB}{d\nu} \left(-\frac{\partial\nu}{\partial\xi} + S(\varepsilon, \delta, \dots) \right) = -B_\xi + V(\varepsilon, \delta, \dots).$$

Con esto,

$$\begin{aligned} A_\tau = \frac{1}{2}\nu\nu_\xi = -\frac{1}{2}\nu\nu_\tau; \quad A_\xi = -\frac{1}{2}\nu\nu_\xi &\implies A = -\frac{1}{4}\nu^2, \\ B_\tau = -\frac{1}{3}\nu_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{3}\nu_{\xi\xi\tau}; \quad B_\xi = \frac{1}{3}\nu_{\xi\xi\xi} &\implies B = \frac{1}{3}\nu_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos la ecuación

$$0 = \frac{\partial\nu}{\partial\xi} + \frac{\partial\nu}{\partial\tau} + \underbrace{\varepsilon \left(\frac{3}{2}\nu \frac{\partial\nu}{\partial\xi} \right)}_{\text{No linealidad}} + \underbrace{\delta \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3\nu}{\partial\xi^3} \right)}_{\text{Dispersión}} + I(\varepsilon^2, \delta^2, \varepsilon\delta, \dots), \quad (2.58)$$

que modela a primer orden en ε y δ la forma de la perturbación ν a la curva libre, que se mueve en un solo sentido, la *ola solitaria*. Despreciando los términos de orden dos, tenemos la ecuación de Korteweg y de Vries (KdV), en su forma adimensional,

$$\nu_\tau + \nu_\xi + \frac{3}{2}\varepsilon\nu\nu_\xi + \frac{1}{6}\delta\nu_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (2.59)$$

La aproximación de la ecuación KdV tendrá un error de orden 2. Su importancia radica en que es el modelo de mayor simplicidad que es capaz de predecir, a partir de efectos no lineales y dispersivos, la existencia de ondas solitarias y el comportamiento de éstas como solitones (Ver apéndice A).

Por ejemplo, otra propiedad atribuida a ellas es que la interacción entre dos ondas solitarias ocurre casi de manera lineal, guardando su forma y velocidad: la KdV predice que al cruzarse dos ondas solitarias, a partir de un tiempo emergen otras dos del cruce con las mismas propiedades que las primeras (misma forma y velocidad), como si hubieran interactuado de forma lineal —mediante una superposición—, aún cuando su interacción es no lineal.

La única *evidencia* de su interacción es un ligero desfasamiento de las posiciones de las ondas respecto a las esperadas de una simple superposición lineal.

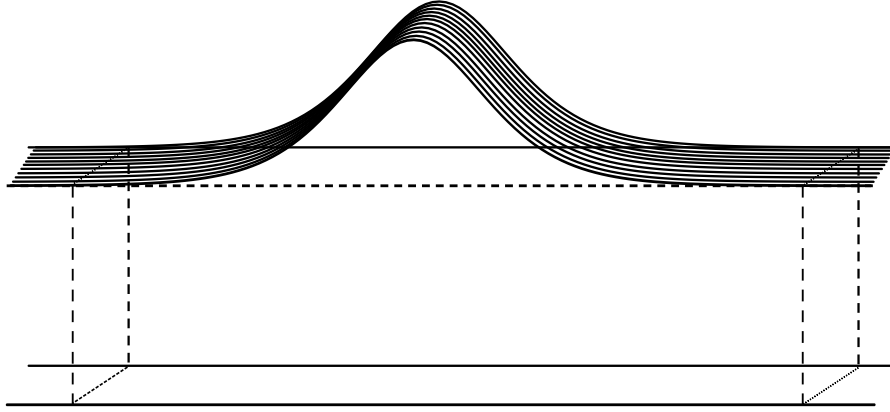


Figura 2.6: El paso de una onda solitaria en el canal.

Por esta propiedad, descubierta por Zabusky y Kruskal, les acuñaron el término *solitón*. La figura 2.7 muestra la interacción de dos solitones.

Los solitones son soluciones a un sistema no lineal espacialmente localizadas y de forma permanente, donde después de interactuar con otras soluciones del mismo tipo no sufren cambios en su forma.

La forma adimensional (2.59) se presta a analizar los procesos físicos encontrados en ella. Si se considerara a orden cero en términos de ε, δ se tendría una ecuación de onda moviéndose a la derecha con la misma velocidad unitaria. El término ε muestra que la velocidad de propagación depende de su altura por ν , tomándose efectos no lineales relacionados con la amplitud de las ondas. Con δ están asociados los términos dispersivos, pues consiste en derivadas de ν , propias de ondas largas. En conclusión:

La ecuación KdV no lineal y de tercer orden considera la acción de efectos dispersivos y no lineales sobre ondas largas con baja amplitud sobre el agua, a orden uno.

Sustituyendo las variables adimensionales por sus valores dados en (2.41) y (2.42), tenemos

$$\frac{t_0}{a} \eta_t + \frac{\lambda}{a} \eta_x + \frac{3}{2} \frac{a}{h_0} \left(\frac{\eta}{a} \cdot \frac{\lambda}{a} \eta_x \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{h_0^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda^3}{a} \eta_x \right) = 0.$$

Así,

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0} \eta \eta_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0 \quad (2.60)$$

es la ecuación KdV en su forma dimensional.

Espacialmente, nos encontramos en un sistema de referencia S, en donde la velocidad del agua es cero en el infinito, pues consideramos las partes de la curva —superficie— libre no perturbadas como inmóviles. Nos moveremos en un sistema \tilde{S} en el mismo sentido que la KdV. Tomando la magnitud de su

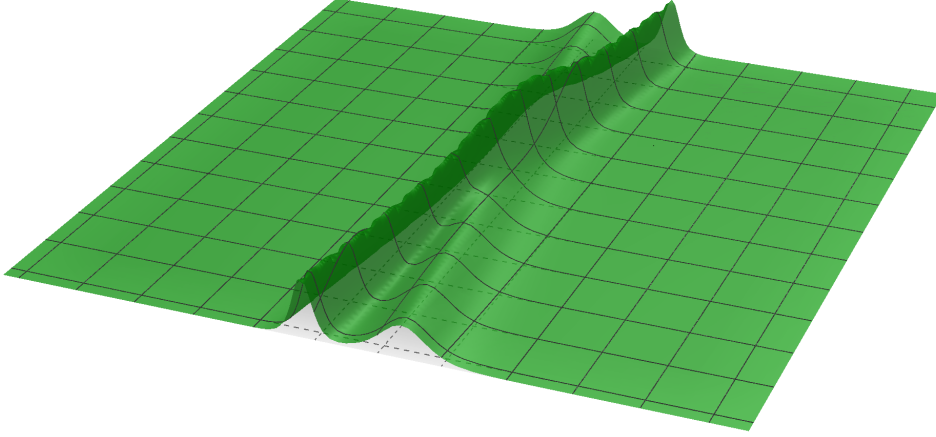


Figura 2.7: Interacción de dos solitones, a partir de una superposición.

velocidad, un valor característico de las ondas largas, la transformación galileana entre S y \tilde{S} para x , t es

$$\begin{aligned} t &= \tilde{t} \\ x &= \tilde{x} + c_0 \tilde{t}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Constata que el origen de S , inmóvil en dicho marco ($x = 0$), se desplazará con velocidad $-c_0$ ($c_0 > 0$) en \tilde{S} . Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} = c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.60),

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{6} c_0 h_0^2 \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tilde{x}^3} = 0 \quad (2.62)$$

obtenemos la forma clásica de la ecuación de Korteweg y de Vries en términos dimensionales. Para obtener su forma *canónica*, definimos las nuevas variables

$$W = \frac{1}{4h_0} \eta; \quad X = \frac{\sqrt{6}}{h_0} \tilde{x}; \quad T = \sqrt{6} \frac{c_0}{h_0} \tilde{t}. \quad (2.63)$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial T} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dT} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dT} \right) = \frac{1}{4\sqrt{6}c_0} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{dX} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dX} \right) = \frac{1}{4\sqrt{6}} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{h_0}{\sqrt{6}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tilde{x}^2} \right) = \frac{h_0^2}{4 \cdot 6\sqrt{6}} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tilde{x}^3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.62)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0}\right) \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{6} c_0 h_0^2\right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tilde{x}^3} \\
&= 4\sqrt{6}c_0 \frac{\partial W}{\partial T} + \left(\frac{3}{2} \frac{c_0}{h_0}\right) (4h_0 W) \left(4\sqrt{6} \frac{\partial W}{\partial X}\right) + \left(\frac{1}{6} c_0 h_0^2\right) \left(\frac{4 \cdot 6\sqrt{6}}{h_0^2} \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}\right) \\
&= 4\sqrt{6}c_0 \frac{\partial W}{\partial T} + 4 \cdot 6\sqrt{6}c_0 W \frac{\partial W}{\partial X} + 4\sqrt{6}c_0 \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} \\
&= 4\sqrt{6}c_0 \left(\frac{\partial W}{\partial T} + 6W \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}\right).
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{\partial W}{\partial T} + 6W \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} = 0. \quad (2.64)$$

Bajo la transformación

$$W \mapsto -u \quad X \mapsto x \quad T \mapsto t,$$

al sustituirla en (2.64), tenemos la presentación canónica de la *ecuación de Korteweg-de Vries* (KdV)

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}. \quad (2.65)$$

No hay que confundir a $u \equiv u(x, t)$ con la primera componente del campo \mathbf{U} , $\mathbf{U}(u, v, w)$. A partir de este momento u representa el perfil de una onda solitaria sobre la superficie del agua.

A continuación, procederemos a definir la teoría necesaria de los sistemas integrables en dimensión finita, obteniendo así las herramientas necesarias para asociar una estructura tanto Lagrangiana como Hamiltoniana a la KdV.

Sistemas Integrables de dimensión finita

“Todas las verdades son fáciles de entender
una vez que han sido descubiertas,
la clave es descubrirlas.”

GALILEO GALILEI (1564–1642)

En el siguiente capítulo veremos que la ecuación KdV es un sistema ‘*integrable*’ de dimensión *infinita*; para esto, necesitamos tener claros los conceptos del caso en que el sistema ‘integrable’ sea de dimensión finita. En concreto, en este capítulo definiremos los *sistemas Lagrangianos* y los *sistemas Hamiltonianos*; mostraremos en qué casos dichos sistemas son equivalentes para finalmente definir el concepto de *integrabilidad*. Esto representa la teoría de los *sistemas integrables*, siendo de utilidad en muchas áreas de la físico-matemática, además que define una manera de resolver estos sistemas especiales. Para este capítulo se sugiere consultar [2].

3.1. Sistemas Lagrangianos

Una de las aportaciones a la física matemática fue la desarrollada por Lagrange quien, junto con Hamilton, mostró que muchas ecuaciones de la física se podían obtener mediante *principios variacionales* —el llamado *Principio de Hamilton de mínima acción*—. Esto es, para cualesquiera dos elementos en el sistema, a cada trayectoria posible que los ‘*una*’ se le asocia un número, su *acción*, y la trayectoria que resuelve el problema físico es la que minimiza la acción.

Pensemos en un sistema con n grados de libertad dado por una función Lagrangiana L . Es decir, para cada vector \mathbf{q} en un espacio coordenado n -dimensional M definimos una curva γ , $\gamma = \{(\mathbf{q}(t), t) : \mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}, t_0 \leq t \leq t_1\}$, en el espacio $(n+1)$ -dimensional $M \times \mathbb{R}$. Tomando $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable de $2n+1$ variables, y denotando $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$, definimos la funcional Φ

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt. \quad (3.1)$$

Bien, si ahora consideramos una *perturbación* γ_1 a γ , $\gamma_1 = \{(\mathbf{q}_1(t), t) :$

$\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{q}(t) + h(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, la denotaremos como $\gamma_1 \equiv \gamma + h$. Así, tomemos el incremento de Φ , $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$.

Definición 3.1. Diremos que la funcional Φ es diferenciable si $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R$; donde dada una curva γ fija, F depende linealmente de h , y $R = O(h^2)$.

A la diferencial de una funcional también es llamada *variación*, y a h como la *variación de la curva*.

Teorema 3.1.1. La funcional Φ descrita en (3.1) es diferenciable, y su variación está dada por

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] h \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} h \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (3.2)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q} + h, \dot{\mathbf{q}} + \dot{h}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{h} \right) dt + O(h^2) \\ &= F(h) + R. \end{aligned}$$

Integrando por partes el segundo término de la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{h} \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) h \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} h \Big|_{t_0}^{t_1};$$

así,

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] h \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} h \Big|_{t_0}^{t_1}, \quad R = O(h^2).$$

□

Definición 3.2. Decimos que una curva γ es un extremal para la funcional Φ si para cualquier h se cumple que $F(h) = 0$.

Por la forma explícita de F gracias al teorema 3.1.1, podemos dar un criterio para una curva γ extremal a Φ .

Teorema 3.1.2. La curva $\gamma := \mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q}$ es un extremal de la funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \, dt$ en el espacio de curvas conectando a (\mathbf{q}_0, t_0) y (\mathbf{q}_1, t_1) si, y sólo si,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

se satisface a lo largo de $\mathbf{q}(t)$. La ecuación (3.3) se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange para la funcional Φ .

Demostración. Por el teorema 3.1.1, para una perturbación γ_1 a γ , donde $\gamma_1 = \gamma + h$,

$$F(h) = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] h \, dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} h \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Como estamos considerando fijos los extremos de la curva, estos no presentan perturbación alguna, implicando que $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Puesto que γ es un extremal para Φ ,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) \, dt = 0; \quad f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}.$$

Ya que esto tiene que cumplirse para cualquier h , $f \equiv 0$. Inversamente, si $f(t) = 0$, $F(h) \equiv 0$. \square

La ecuación de Euler-Lagrange representa un sistema de n ecuaciones de segundo orden, donde la solución depende de $2n$ constantes arbitrarias. Las $2n$ condiciones $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$; $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ se utilizan para encontrarlos.

Observación 7. Como esta teoría surge de la mecánica, se utiliza la siguiente terminología: el espacio n -dimensional M se conoce como el espacio de configuraciones, donde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ son las coordenadas generalizadas; interpretándose $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ como las velocidades generalizadas y $\partial L / \partial \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}$ sus momentos conjugados

La pareja (\mathbf{p}, \mathbf{q}) se define como las variables canónicas. Para $\partial L / \partial \mathbf{q}$ las fuerzas generalizadas y Φ la acción. Como $q_i = q_i(t)$ es una familia de curvas en M , la pareja $q_i = q_i(t), \dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$ representa una familia de curvas en el haz tangente TM . Aquí, trabajaremos en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

En un problema mecánico —si el sistema es conservativo— aparece un elemento de forma *natural*, una *integral de movimiento* o *constante de movimiento* para el sistema. Esto es, una función que depende de las coordenadas y velocidades generalizadas, pero es constante en cada instante del tiempo t a lo largo de una trayectoria del sistema. Cuando un sistema está definido por ecuaciones diferenciales recibe el nombre de *primer integral*. Una primer integral, para el sistema, depende de las variables de la ecuación diferencial y sus derivadas, y resulta constante cuando se introduce una dependencia respecto al *tiempo*. Para los sistemas Lagrangianos, tenemos la siguiente observación:

Observación 8. Las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen una primer integral, llamada *energía*. Definamos $E \equiv E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L_{\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Probaremos que si $\mathbf{q}(t)$ es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange, entonces $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es constante. Así pues, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por la dificultad de los sistemas Lagrangianos, generados a partir de n ecuaciones diferenciales de segundo orden; bajo ciertas suposiciones podemos expresarlo como un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos llevarlo a un *sistema Hamiltoniano*.

3.2. Sistemas Hamiltonianos

Una función *Hamiltoniana* H en \mathbb{R}^{2n} es una función diferenciable, C^∞ , con $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea \mathbf{I} la matriz dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix};$$

con $\mathbf{I}_n, 0_n$ las matrices identidad y cero respectivamente, de n renglones con n columnas. Así, el campo vectorial definido como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{I}\nabla H \tag{3.4}$$

se llama el *campo Hamiltoniano* de H . Expresando la ecuación en las variables $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, el sistema (3.4) es equivalente a

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \tag{3.5}$$

El sistema (3.5) se conoce como las *ecuaciones de Hamilton* o bien, *ecuaciones canónicas*.

Existe una fuerte relación entre los sistemas Hamiltonianos y Lagrangianos, pues a través de la *transformada de Legendre* esos dos sistemas son equivalentes. Consideremos el caso de un sistema Lagrangiano $\dot{\mathbf{p}} = \partial L / \partial \mathbf{q}$, $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$ dado por una función Lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *convexa* con respecto a $\dot{\mathbf{q}}$.

Definición 3.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, C^∞ , convexa; es decir, $f_{\mathbf{xx}}$ positiva definida. Entonces, la transformación de Legendre de f es una función $g(\mathbf{p})$ definida como*

$$g(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x})\}. \tag{3.6}$$

Veamos que tiene sentido la definición anterior. Si escribimos

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x}),$$

por la condición de convexidad de f , dado \mathbf{p} existe un único $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ tal que

$$\mathbf{p} = \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{p})).$$

Finalmente,

$$g(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x}(\mathbf{p})). \tag{3.7}$$

Geoméricamente, $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ es el punto donde el plano tangente a la gráfica de f es paralelo al plano $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = 0$.

Teorema 3.2.1 (Equivalencia de las ecuaciones de Lagrange y Hamilton). *El sistema (3.3) de ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema (3.5) de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden de Hamilton, donde la función Hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ es la transformada de Legendre de la función Lagrangiana en su segunda variable $\dot{\mathbf{q}}$, con la variable espacial \mathbf{q} su parámetro.*

Demostración. Por definición, la transformada de Legendre de $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ con respecto a $\dot{\mathbf{q}}$ es la función $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, con $\dot{\mathbf{q}}$ expresada en términos de \mathbf{p} por la expresión $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$, que depende de los parámetros \mathbf{q} y t debido a (3.3). Por otro lado, la diferencial total de H es

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt; \end{aligned}$$

sustituyendo $\dot{\mathbf{p}} = \partial L / \partial \mathbf{q}$, obtenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.8)$$

Así, si $\mathbf{q}(t)$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ satisface las ecuaciones de Hamilton. Además, una propiedad que tiene la transformación de Legendre es ser *involutiva*; esto quiere decir que si se aplica dos veces, se regresa a la función original. Así, es válido el recíproco. Por lo tanto, los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos son equivalentes. \square

Proposición 3.2.2. *H es una primer integral del campo Hamiltoniano; es decir, si $\mathbf{x}(t)$ es solución de (3.4), entonces $H(\mathbf{x}(t))$ es constante respecto al tiempo t .*

Demostración. Por la expresión (3.4),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) &= \nabla H \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ &= \nabla H \cdot \mathbf{I} \nabla H \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con esto, el valor del Hamiltoniano a lo largo de las trayectorias permanece constante a través del tiempo t . \square

La prueba de la proposición anterior nos permite definir un nuevo operador. Para $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares, definimos el ‘*bracket*’ de Poisson como

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (3.10)$$

Proposición 3.2.3. *El bracket de Poisson de las funciones F, G es una función bilineal antisimétrica. Es decir cumple*

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (3.11)$$

y, para $F_1, F_2, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\{G, \alpha F_1 + \beta F_2\} = \alpha\{G, F_1\} + \beta\{G, F_2\}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Demostración. Para (3.11), por definición, tenemos

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ &= -\{G, F\}. \end{aligned}$$

En cuanto a (3.12),

$$\begin{aligned} \{G, \alpha F_1 + \beta F_2\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} (\alpha F_1 + \beta F_2) - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} (\alpha F_1 + \beta F_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) + \beta \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \\ &= \alpha\{G, F_1\} + \beta\{G, F_2\}. \end{aligned}$$

□

Definición 3.4. *Decimos que las funciones F y G se encuentran en involución si el bracket de Poisson es cero, $\{F, G\} = 0$.*

Observación 9. *Por la proposición 3.2.2, el Hamiltoniano H está en involución consigo mismo. Más aún, puesto que el bracket es antisimétrico, para cualquier función F , $\{F, F\} = 0$. Además, el nuevo operador nos permite calcular la evolución temporal de un campo escalar F definido sobre el espacio fase de H ; pues para $F(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) \equiv F$, los cambios de las variables independientes están dados por el flujo de la función Hamiltoniana H , similar al caso de la derivada material*

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \{F, H\}. \end{aligned}$$

Corolario 3.2.4. *La función F es una primer integral o constante de movimiento del Hamiltoniano H si, y sólo si, está en involución con H . Esto es*

$$\{F, H\} = 0. \quad (3.13)$$

Demostración. Por la observación 9, la variación temporal de F está en función del bracket de Poisson con respecto al Hamiltoniano H . Así, la derivada con respecto al tiempo t de la función F es cero si, y sólo si, F está en involución con H . \square

El conocimiento de una primer integral permite reducir la *dimensión* del sistema de ecuaciones que describen el movimiento del sistema mecánico. Con esto, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se reduce a otro sistema con menos ecuaciones a resolver; es decir, se vuelve más pequeño. En este caso, la integral de movimiento debe estar en función de la posición —coordenadas generalizadas— y momento —momentos conjugados—.

Definición 3.5. *Una coordenada q_i , $1 \leq i \leq n$, se dice cíclica si no aparece en la función Hamiltoniana $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$, es decir $\partial H / \partial q_i = 0$.*

Corolario 3.2.5. *Sea q_1 una coordenada cíclica. Entonces su momento p_1 correspondiente se conserva; o bien, es una primer integral o constante de movimiento. Para las coordenadas restantes del sistema, su variación con respecto al tiempo es igual que para un sistema con $n - 1$ coordenadas independientes q_2, \dots, q_n y función Hamiltoniana*

$$H(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n, t, c), \quad \text{con } c = p_1.$$

Demostración. Definiendo un nuevo sistema de coordenadas $\mathbf{p}' = (p_2, \dots, p_n)$ y $\mathbf{q}' = (q_2, \dots, q_n)$, tenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{q}' &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'}, & \frac{d}{dt} q_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}; \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}' &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}'}, & \frac{d}{dt} p_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Así, tenemos a p_1 como un valor constante c , entrando sólo como un parámetro en la función Hamiltoniana del sistema de $2n - 2$ ecuaciones. Tras resolver el sistema, tenemos para q_1

$$\frac{d}{dt} q_1 = f(t); \quad \text{con } f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1} H(p_1, \mathbf{p}', \mathbf{q}').$$

\square

Con estas bases para el estudio del caso finito, podemos definir en un espacio de funciones las nociones de sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos. Será de nuestro interés definir la *funcional* Lagrangiana de manera tal, que para su acción la KdV sea una función extremal. En cuanto a nuestra funcional Hamiltoniana, sentaremos un criterio a partir de la ecuación KdV y las ecuaciones de Hamilton.

Integrabilidad en dimensión infinita

“El álgebra es muy generosa, siempre nos dice más de lo que le preguntamos”

JEAN LE ROND D’ALEMBERT (1717–1783)

En este capítulo extenderemos los conceptos de sistemas integrales en dimensión finita. Esto permite dotar de una estructura Lagrangiana y Hamiltoniana a ciertos espacios de funciones, relacionados con la KdV. A partir de un análisis a la dinámica de ciertos operadores mostraremos que la ecuación KdV tiene asociada una infinidad de leyes de conservación. Como consulta para este capítulo se tienen [24], [25] y [12], así como [3].

4.1. Sistemas integrables

La formulación de sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos puede generalizarse a espacios de dimensión infinita. En este caso, la dinámica estará actuando sobre funciones en vez de ‘puntos’, es decir, el espacio de configuración será un espacio de funciones. Para esto, nos limitaremos a definir sólo los conceptos necesarios de la teoría de espacios de funciones para exhibir el siguiente hecho:

La ecuación de Korteweg y de Vries puede ser vista tanto como un sistema Lagrangiano como un sistema Hamiltoniano.

Además, mostraremos la interpretación funcional de constantes de movimiento para la ecuación KdV; estos son, valores definidos de forma integral.

Primero, sobre determinado espacio funcional definiremos un Lagrangiano L de manera tal que su acción Φ tendrá un extremal u únicamente si u satisface KdV.

Posteriormente, al considerar cierto espacio de funciones periódicas tendremos una representación en series de Fourier, para cada función en él. Dada una curva $g(t)$ en dicho espacio, para cada tiempo t tendremos coeficientes de Fourier g_n sobre la base trigonométrica de nuestro espacio, fijos y dados. Si interpretamos a $g(t)(\cdot)$ como una función $u(\cdot, t)$, con variables espacio y tiempo (x, t)

respectivamente, a partir de los coeficientes de Fourier u_n , $n \in \mathbb{Z}$, se pueden definir las igualdades

$$p_n \equiv u_{-n}, \quad q_n \equiv \frac{1}{n}u_n; \quad n \in \mathbb{Z}^+; \quad (4.1)$$

las coordenadas generalizadas de nuestro espacio ‘fase’. Con esto, definimos un funcional Hamiltoniano H de forma tal, que su derivada variacional satisface la ecuación KdV si, y sólo si, H satisfará las ecuaciones canónicas de Hamilton sobre las coordenadas generalizadas (4.1).

Necesitaremos primero generalizar los conceptos del capítulo anterior con base en la teoría elemental del análisis funcional. Así, trabajaremos sobre conjuntos V de funciones reales f definidas en un dominio D , con el supuesto que cada V admita una estructura de *espacio de Banach*; es decir, sean espacios vectoriales (de funciones, con sus operaciones *naturales* —adición y producto por un escalar— bajo el campo de los reales) normados y completos. Consultar el apéndice B.

4.2. Formulación Lagrangiana

Consideremos la ecuación de Korteweg y de Vries obtenida al final de la subsección 2.3.2 del capítulo 2

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}, \quad (4.2)$$

misma que rige el movimiento de la ola solitaria u ; donde u es una función diferenciable, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre las variables espacio y tiempo (x, t) respectivamente. Una suposición adicional que se hizo acerca del comportamiento de u , fue que las partes de la superficie no perturbadas por la ola permanecían inmóviles. Esto motiva a considerar el espacio funcional X , formado por las funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tales que el conjunto

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}},$$

llamado el *soporte de f* , sea compacto, con $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Observación 10. *Es claro que si f tiene soporte compacto entonces es acotada, alcanzando su valor máximo en algún elemento de \mathbb{R} ,*

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Así, nuestro espacio de funciones con soporte compacto es un subespacio de $l_\infty^\mathbb{R}$, el espacio de las aplicaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} acotadas.

Dicho esto, en esta sección trabajaremos en el espacio de funciones X definido como

$$X := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x \mapsto f(x), f \text{ tiene soporte compacto}\}.$$

Observación 11. *En nuestro caso, el subespacio X no es cerrado con respecto a $l_\infty^\mathbb{R}$. Si consideramos su cerradura, obtenemos el espacio de las funciones que se anulan en el infinito. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se anula en el infinito si el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto en \mathbb{R} , para cada $\varepsilon > 0$; $f \in X$.*

Consideremos el espacio tangente TX para nuestro espacio de configuraciones X . Esto es, para cada f en X , tenemos parejas de la forma (f, ν) , $\nu \in X$; representando ν variaciones a f , para cada valor x de su dominio. Así, definimos el Lagrangiano $L : TX \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L[(f, \nu)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} f \nu - f^3 - \frac{1}{2} f_x^2 \, dx. \quad (4.3)$$

Bien, si tomamos una curva $g(t)$ en X , $t \mapsto g(t)$, podemos interpretarla como una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(x, t) := g(t)(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Inversamente, si tenemos una función diferenciable de dos variables, $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir una curva en X

$$g(t)(x) := u(x, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así pues, de ahora en adelante usaremos indistintamente el término función de dos variables u para referirnos a una curva $g(t)$ en el espacio donde nos encontremos trabajando.

Con esto, al considerar una curva $g(t)$ en X , podemos aplicar el Lagrangiano a su función asociada u . Tomando ϕ la función potencial de u , $\phi_x = u$, las variaciones de nuestra curva estarán dadas por ϕ_t . Aplicar el Lagrangiano a (u, ϕ_t) nos proporcionará un real fijo, para cada valor t de tiempo. Dicho esto, podemos definir la acción Φ de L para una curva a partir de u ,

$$\Phi[u] = \int_{\mathbb{R}} L[(u, \phi_t)] \, dt \equiv \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \phi_x \phi_t - \phi_x^3 - \frac{1}{2} \phi_{xx}^2 \, dx dt; \quad (4.4)$$

con $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Procederemos a calcular la variación de Φ , $\delta\Phi$, para así calcular sus extremales. Sea $h(t)$ una curva en X , con v su función de dos variables asociada y ψ su potencial, $\psi_x = v$. Con esto,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi[u + \varepsilon v] - \Phi[u]}{\varepsilon} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} (\phi_x + \varepsilon \psi_x) (\phi_t + \varepsilon \psi_t) - (\phi_x + \varepsilon \psi_x)^3 - \frac{1}{2} (\phi_{xx} + \varepsilon \psi_{xx})^2 \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{2} \phi_x \phi_t - \phi_x^3 - \frac{1}{2} \phi_{xx}^2 \right) \right] dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} (\phi_x \psi_t + \phi_t \psi_x + \varepsilon \psi_x \psi_t) - (3\phi_x^2 \psi_x + 3\varepsilon \phi_x \psi_x^2 + \varepsilon^2 \psi_x^3) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (2\phi_{xx} \psi_{xx} + \varepsilon \psi_{xx}^2) \right] dx dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \phi_x \psi_t + \frac{1}{2} \phi_t \psi_x - 3\phi_x^2 \psi_x - \phi_{xx} \psi_{xx} dx dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes cada sumando, y recordando que tanto u, v como sus derivadas tienen soporte compacto —se *anulan* en el infinito—,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi_{xx} \psi_{xx} dx &= - \int_{\mathbb{R}} \phi_{xxx} \psi_x dx + \phi_{xx} \psi_x \Big|_{\mathbb{R}} \equiv \int_{\mathbb{R}} \phi_{xxx} \psi dx; \\
\int_{\mathbb{R}} \phi_x^2 \psi_x dx &= -2 \int_{\mathbb{R}} \phi_x \phi_{xx} \psi dx + \phi_x^2 \psi \Big|_{\mathbb{R}} \equiv -2 \int_{\mathbb{R}} \phi_x \phi_{xx} \psi dx; \\
\int_{\mathbb{R}} \phi_t \psi_x dx &= - \int_{\mathbb{R}} \phi_{tx} \psi dx + \phi_t \psi \Big|_{\mathbb{R}} \equiv - \int_{\mathbb{R}} \phi_{tx} \psi dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi_{xt} \psi dx.
\end{aligned}$$

En cuanto al primer sumando,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_x \psi_t dt = - \int_{\mathbb{R}} \phi_{xt} \psi dt + \phi_x \psi \Big|_{\mathbb{R}} \equiv - \int_{\mathbb{R}} \phi_{xt} \psi dt;$$

intercambiando el orden de integración

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \phi_x \psi_t dx dt = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi_x \psi_t dt dx = - \iint_{\mathbb{R}^2} \phi_{xt} \psi dt dx = - \iint_{\mathbb{R}^2} \phi_{xt} \psi dx dt.$$

Sustituyendo las igualdades anteriores en el cálculo de la variación de Φ ,

$$\begin{aligned}
\delta \Phi_u [v] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \phi_x \psi_t + \frac{1}{2} \phi_t \psi_x - 3\phi_x^2 \psi_x - \phi_{xx} \psi_{xx} dx dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} -\phi_{xt} \psi + 6\phi_x \phi_{xx} \psi - \phi_{xxxx} \psi dx dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} (-\phi_{xt} + 6\phi_x \phi_{xx} - \phi_{xxxx}) \psi dx dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} (-u_t + 6uu_x - u_{xxx}) \psi dx dt.
\end{aligned}$$

Sabemos que u es un *extremal* para la *acción* Φ si, y sólo si, $\delta \Phi_u [v] = 0$ para cualquier variación v . Para que esto se cumpla el integrando tiene que ser cero, pero como debe cumplirse para cualquier v , implica que u tiene que satisfacer la KdV; es decir, u es un extremal para la acción definida a partir del Lagrangiano L si, y sólo si, u satisface la ecuación KdV.

Por lo tanto, las curvas en X que minimizan la acción (4.4) del Lagrangiano (4.3) son las que su función asociada satisface KdV (4.2).

4.3. Formulación Hamiltoniana

Ahora, consideremos el espacio Y de funciones diferenciables periódicas, de periodo 2π ,

$$Y := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

A partir de la formulación de las funciones ortogonales se desarrolla la teoría de series de Fourier. Por el *teorema de Dirichlet* —Convergencia a una función periódica—, una serie de Fourier converge a una función periódica dada. Puesto que dicha serie se forma a partir del conjunto

$$\left\{ \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\};$$

donde T denota el periodo de la función, y las funciones en Y son 2π periódicas, el argumento de las funciones trigonométricas será nx .

Por lo tanto, cualquier función f en Y admite una representación en series de Fourier y, por la *identidad de Euler* podemos escribir a la serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}; \quad (4.5)$$

con f_n denotando los coeficientes de la base trigonométrica de nuestro espacio funcional. Definamos la funcional \mathcal{H} en términos de una función \mathcal{F} como sigue:

$$\mathcal{H}[f] = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(f, f_x) dx \equiv \int_0^{2\pi} f^3 + \frac{1}{2} f_x^2 dx. \quad (4.6)$$

Si consideramos a f en *función* de las variables f_n , $n \in \mathbb{Z}$, podemos calcular la derivada de \mathcal{H} con respecto a cada coeficiente de Fourier, utilizando la *derivada variacional* (Ver la ecuación (B.10) del apéndice B). Para cada coeficiente f_k ,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} \frac{\partial f}{\partial f_k} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} e^{ikx} dx;$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} e^{ikx} dx. \quad (4.7)$$

Observación 12. *La literatura utiliza la letra δ para denotar la derivada variacional; esto es, la derivada de una funcional. El único fin de esta notación es para hacer énfasis en que sus variables son funciones.*

Si f sólo dependiera de un f_k , bastaría considerar la igualdad

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_k} e^{-ikx},$$

asumiendo la ortogonalidad del conjunto $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Pero, como k es algún entero arbitrario, proponemos la forma de la derivada variacional de \mathcal{H} en función de la serie de Fourier como

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} e^{inx}. \quad (4.8)$$

Veamos que la propuesta (4.8) con base en la serie (4.5) es correcta. Si sustituimos (4.8) en el segundo miembro de la ecuación (4.7), tenemos que obtener la expresión de su primer miembro. Sustituyendo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta f} e^{ikx} dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} e^{inx} \right) e^{ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} e^{i(n+k)x} dx. \end{aligned}$$

Para el caso en que $n \neq -k$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} e^{i(n+k)x} dx &= \frac{1}{i(n+k)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} \left(e^{i(n+k)x} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{i(n+k)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} (1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si consideramos $n = -k$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_{-n}} e^{i(n+k)x} dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_k} dx \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_k} \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es válida (4.8).

Al igual que en la sección anterior, consideremos una curva $g(t)$ en Y , $t \mapsto g(t)$, que también tiene asociada una expresión en series de Fourier. Tomando $u(\cdot, t)$ la función de dos variables asociada a la curva, para cada t en \mathbb{R} tenemos

$$u(x, t) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{inx}, \quad u(x + 2\pi, t) = u(x, t); \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Calculemos ahora la variación de \mathcal{H} , definida en (4.6), sobre u . Tomando a $h(t)$

curva en Y , para $v(x, t)$ su función de dos variables asociada,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H}_u[v] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}[u + \varepsilon v] - \mathcal{H}[v]}{\varepsilon} \\
&= \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(u + \varepsilon v)^3 + \frac{1}{2} (u_x + \varepsilon v_x)^2 - \mathcal{F}(u, u_x) \right] dx \\
&= \int_0^{2\pi} 3u^2 v + u_x v_x dx \\
&= \int_0^{2\pi} (3u^2 - u_{xx}) v dx - u_x v \Big|_0^{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} \right) v dx;
\end{aligned}$$

cancelándose el segundo sumando al evaluarse por ser funciones periódicas y obteniendo la última igualdad por la expresión (B.10). Tomando la derivada variacional de \mathcal{H} y derivándola con respecto a x ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3u^2 - u_{xx}) = 6uu_x - u_{xxx}.$$

Si vemos el cálculo anterior con atención, aparece la KdV, una condición para la funcional \mathcal{H} . Con este cálculo, u satisface la ecuación KdV si, y sólo si, la derivada variacional de \mathcal{H} cumple

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (4.10)$$

donde

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} = 3u^2 - u_{xx}. \quad (4.11)$$

Ahora, sustituiremos en (4.10) la derivada variacional de \mathcal{H} con respecto a u dada por la expresión (4.8), así como su forma en serie de Fourier expresada en (4.9). Obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{-n}} e^{inx} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial t} (u_n e^{inx}).$$

Desarrollando,

$$\frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{-n}} e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{du_n}{dt} e^{inx}.$$

Ya que $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es base de Y , los coeficientes tienen que coincidir. Para cada entero n ,

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{i}{2\pi} n \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{-n}}. \quad (4.12)$$

Considerando funciones con promedio cero, $u_0 = 0$, dotaremos a la funcional (4.6) de una estructura hamiltoniana. Para cada $n > 0$ definimos

$$q_n \equiv \frac{1}{n} u_n, \quad p_n \equiv u_{-n}, \quad H \equiv \frac{i}{2\pi} \mathcal{H}. \quad (4.13)$$

Sustituyendo las anteriores variables en (4.12),

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n}; \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.14)$$

Así, tenemos definido un sistema Hamiltoniano $H(p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots)$ infinito dimensional, sobre nuestro espacio de funciones Y de periodo 2π .

En lo siguiente, las funcionales que consideraremos son tales, que están definidas sobre las funciones $u(x, t)$ asociadas a curvas en Y . Tomaremos funcionales de la forma

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^{2\pi} f(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx; \quad (4.15)$$

con el integrando definido sobre u y un número finito de sus derivadas espaciales. Entonces, para calcular la derivada variacional de \mathcal{F} se aplica el operador Y_0 a f ,

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} = Y_0 f; \quad Y_0 \equiv \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots \quad (4.16)$$

4.4. Integrales invariantes

Lo realizado en este trabajo ha sido una deducción, partiendo desde la física, de una ecuación en derivadas parciales (EDP) y estructurándola bajo la teoría de los sistemas dinámicos. Al hablar de la ecuación KdV en un sentido dinámico, se aprecia la riqueza de las propiedades que guarda en sí.

La KdV es un ejemplo de un sistema integrable en dimensión infinita, donde también se le puede asociar un bracket de Poisson. Tiene muchas —muchísimas— primeras integrales que están en involución, e incluso se pueden encontrar coordenadas de acción ángulo para dicho sistema. Sin embargo, para los propósitos de este trabajo, en esta sección mostraremos cómo de obtienen ‘*muchas*’ constantes de movimiento. Para ello, definiremos ciertas aplicaciones sobre nuestro espacio Y .

Definición 4.1. Sea \mathcal{F} una funcional $\mathcal{F} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $u(x, t)$ la función de dos variables asociada a una curva $g(t)$ en Y , solución de KdV. Diremos que \mathcal{F} es una constante de movimiento o cantidad conservada para KdV, si y sólo si,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[g(t)] = 0. \quad (4.17)$$

Definición 4.2. Sea \mathcal{F} una constante de movimiento, y \mathcal{T} una función sobre Y , $\mathcal{T} : Y \rightarrow Y$. Diremos que \mathcal{F} es una integral invariante si se satisface la igualdad

$$\mathcal{F}[u] = \int_0^{2\pi} \mathcal{T}(u, x) dx. \quad (4.18)$$

\mathcal{T} recibe el nombre de densidad conservada.

Al tomar funciones \mathcal{T} polinómicas en u y un número finito de sus derivadas espaciales, \mathcal{F} es de la forma (4.15), pudiéndose calcular su derivada variacional a partir del operador (4.16) sobre \mathcal{T} .

Un cálculo inmediato que podemos hacer es mostrar que \mathcal{H} , el Hamiltoniano del sistema, es una integral invariante. Sea $u(x, t)$ solución de KdV, así

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}[u] &= \int_0^{2\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left((3u^2 - u_{xx})^2 \right) dx \\ &= 0; \end{aligned}$$

pues al ser funciones periódicas, al evaluar se cancelan los términos. El funcional $\mathcal{F}_3 \equiv \mathcal{H}$ es conocido como *energía total del sistema*, con $\mathcal{T}_3 = u^3 + \frac{1}{2}u_x^2$.

Además de \mathcal{H} , también existen otras constantes conocidas. Calculemos ahora la derivada con respecto al tiempo de \mathcal{F}_1 , dado por

$$\mathcal{F}_1[u] = \int_0^{2\pi} u dx. \quad (4.19)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}_1}{dt} &= \int_0^{2\pi} u_t dx \\ &= \int_0^{2\pi} 6uu_x - u_{xxx} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (3u^2 - u_{xx}) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que cualquier función que sea solución de KdV, al integrarla con respecto a x nos da una cantidad conservada. La cantidad (4.19) recibe el nombre de *conservación de masa*, con $\mathcal{T}_1 = u$. Si consideramos \mathcal{F}_2 el funcional expresado como

$$\mathcal{F}_2[u] = \int_0^{2\pi} u^2 dx, \quad (4.20)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{F}_2}{dt} &= \int_0^{2\pi} 2uu_t \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} 2u(6uu_x - u_{xxx}) \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (4u^3 - 2uu_{xx} + u_x^2) \, dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

En este caso \mathcal{F}_2 se denomina *conservación del momento*, donde $\mathcal{T}_2 = u^2$.

Como vemos, el proceso de exhibir la existencia de invariantes bajo la definición 4.2 se basa en la búsqueda de funciones \mathcal{T}_n definidas sobre u solución de KdV; manipulándose el integrando de forma tal, que con ayuda de (4.10) y el operador Y_0 para \mathcal{F}_n , obtenemos un valor nulo al integrar.

Definición 4.3. Sean \mathcal{X}, \mathcal{T} funciones en Y , con argumentos en f y sus derivadas espaciales. Sea $u(x, t)$ una solución arbitraria de KdV y supóngase que se cumple

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} = 0 \quad (4.21)$$

para cada u solución de KdV. Entonces, diremos que KdV presenta una ley de conservación (4.21) con densidad \mathcal{T} y flujo $-\mathcal{X}$.

Observación 13. Si tanto \mathcal{T} como \mathcal{X} fuesen integrables en $0 < x < 2\pi$, entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^{2\pi} \mathcal{T}(u) \, dx \right) = -\mathcal{X} \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (4.22)$$

Así, el funcional $\mathcal{F}[u] = \int_0^{2\pi} \mathcal{T} \, dx$ es una invariante integral.

Daremos un último ejemplo que permita mostrar la complejidad del procedimiento. Sea \mathcal{F}_4 de la forma

$$\mathcal{F}_4 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{5}{2}u^4 - \frac{5}{2}u^2u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2 \, dx \equiv \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_4 \, dx. \quad (4.23)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}_4}{dt} &= \int_0^{2\pi} \frac{\delta\mathcal{F}_4}{\delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\mathcal{T}_4}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{T}_4}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\mathcal{T}_4}{\partial u_{xx}} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&= \int_0^{2\pi} (10u^3 - 10uu_{xx} - 5u_x^2 + u_{x(4)}) (6uu_x - u_{xxx}) dx \\
&= \int_0^{2\pi} 60u^4u_x - 10u^3u_{x(3)} - 60u^2u_xu_{xx} + 6uu_xu_{x(4)} - 30uu_x^3 \\
&\quad + 10uu_{xx}u_{x(3)} + 5u_x^2u_{x(3)} - u_{x(3)}u_{x(4)} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(12u^5 - 10u^3u_{xx} - 15u^2u_x^2 + 6uu_xu_{x(3)} + 2uu_{xx}^2 \right. \\
&\quad \left. - u_x^2u_{xx} - \frac{1}{2}u_{x(3)}^2 \right) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vemos que, conforme se tenga más términos de u y demás variables en \mathcal{T}_n , los polinomios a buscar crecen de manera exponencial. Por la observación 13, podemos enfocarnos en hallar parejas de funciones $(\mathcal{T}_n, \mathcal{X}_n)$, compuesta por las densidades y flujos, para encontrar constantes \mathcal{F}_n asociados a KdV.

Para encontrar dichas constantes bajo la ecuación (4.21), un procedimiento exhaustivo podría ser calcularlas por tanteo y obtener más. Sin embargo, Miura, Gardner, *et al* implementaron un método que genera una serie infinita de parejas $(\mathcal{T}_n, \mathcal{X}_n)$ de formas polinomiales, sobre $u(x, t)$ solución de KdV y sus derivadas espaciales.

4.4.1. Obtención de constantes

Procederemos a definir nuevos operadores con base en la ecuación de Korteweg y de Vries, obteniendo otras EDPs que nos permitirán hacer un análisis para la construcción de integrales invariantes para KdV. Hay que tener presente la ecuación KdV, misma que representa la evolución temporal de $u(x, t)$, definida sobre variables espaciales y temporales (x, t) respectivamente

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}.$$

El espacio de funciones en donde trabajaremos es el mismo que el definido en la sección 4.3; estamos considerando curvas en Y , tales que su función u de dos variables asociada satisfaga KdV.

Ahora, consideremos una nueva ecuación diferencial, la *ecuación KdV modificada* (mKdV), dada por

$$v_t = 6v^2v_x - v_{xxx}. \quad (4.24)$$

Si tenemos v solución de mKdV, entonces u definido como

$$u = M[v] \equiv v^2 + v_x \quad (4.25)$$

satisface KdV, pues

$$\begin{aligned} & 6uu_x - u_{xxx} - u_t \\ &= 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) - (2vv_{xx} + 2v_x^2 + v_{xxx})_x - (2vv_t + v_{xt}) \\ &= 6(2v^3v_x + v^2v_{xx} + 2vv_x^2 + v_xv_{xx}) - (2vv_{xxx} + 6v_xv_{xx} + v_{x^4}) + 2vv_t + v_{xt} \\ &= 2v(6v^2v_x - v_{xxx} - v_t) + (6v^2v_{xx} + 12vv_x^2 - v_{x^4} - v_{tx}) \\ &= \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(6v^2v_x - v_{xxx} - v_t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si v satisface mKdV, entonces tenemos u solución para KdV. El operador M definido en (4.25) se conoce como *transformación de Miura*. Si calculamos la variación de M , obtenemos

$$\begin{aligned} \delta M_v[w] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{M[v + \epsilon w] - M[v]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(v + \epsilon w)^2 + (v_x + \epsilon w_x) - (v^2 + v_x)] \\ &= 2vw - w_x \\ &= \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)w. \end{aligned}$$

Esto muestra que las ecuaciones KdV y mKdV están relacionadas por la variación de M ,

$$\begin{aligned} \delta M \circ v_t &= \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(6v^2v_x - v_{xxx}) \\ &= 12v^3v_x + 12vv_x^2 + 6v^2v_{xx} - 2vv_{xxx} - v_{x^4} \\ &= 6(v^2 + v_x)(2vv_x) + 6(v^2 + v_x) - (v^2 + v_x)_{xxx} \\ &= 6(v^2 + v_x)(v^2 + v_x)_x - (v^2 + v_x)_{xxx} \\ &= 6uu_x - u_{xxx}. \end{aligned}$$

El recíproco no es cierto, porque M no es invertible sobre Y . Bajo el cambio de coordenadas

$$\tilde{x} = x + \frac{3}{2\epsilon^2}t, \quad \tilde{t} = t, \quad u = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{1}{4\epsilon^2}, \quad (4.26)$$

tenemos una transformación Galileana para KdV, una transformación que deja invariante a KdV. Calculando las variaciones espaciales y temporales,

$$u_t = \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{3}{2\epsilon^2}\tilde{u}_{\tilde{x}}, \quad u_x = \tilde{u}_{\tilde{x}}; \quad u_{xxx} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}.$$

Al sustituir en KdV,

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \implies \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{3}{2\varepsilon^2}\tilde{u}_{\tilde{x}} = 6\left(\tilde{u} + \frac{1}{4\varepsilon^2}\right)\tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}.$$

Distribuyendo, concluimos con

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}.$$

Sin embargo mKdV no es invariante bajo transformaciones. Al sustituir en mKdV $v(x, t) = \varepsilon w(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{1}{2\varepsilon}$ con el cambio de coordenadas (4.26),

$$v_t = 6v^2v_x - v_{xxx} \implies \varepsilon\left(w_{\tilde{t}} + \frac{3}{2\varepsilon^2}w_{\tilde{x}}\right) = 6\left(\varepsilon w + \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2(\varepsilon w_{\tilde{x}}) - \varepsilon w_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}.$$

Por lo tanto, concluimos con la ecuación

$$w_{\tilde{t}} = 6\varepsilon^2w^2w_{\tilde{x}} + 6ww_{\tilde{x}} - w_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}.$$

En cuanto a la relación que hay entre u y w es, por (4.25),

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{1}{4\varepsilon^2} &= \left(\varepsilon w(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon w_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) \\ &= \varepsilon^2w^2 + w + \varepsilon w_{\tilde{x}} + \frac{1}{4\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Así, omitiendo las tildes, tenemos la ecuación

$$w_t = 6\varepsilon^2w^2w_x + 6ww_x - w_{xxx}, \quad (4.27)$$

junto con la transformación

$$u = G[w] \equiv \varepsilon^2w^2 + w + \varepsilon w_x; \quad (4.28)$$

llamadas *ecuación de Gardner y transformación de Gardner* respectivamente.

Observación 14. *La ecuación de Gardner contiene a la ecuación KdV y a mKdV. Si en (4.27) tomamos $\varepsilon = 0$, obtenemos KdV. Y, si damos la transformación $\tilde{w} = \varepsilon w$, tenemos por resultado*

$$\tilde{w}_t = 6\tilde{w}^2\tilde{w}_x + \frac{1}{\varepsilon}6\tilde{w}\tilde{w}_x - \tilde{w}_{xxx}.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow \infty$, obtenemos mKdV.

Mostremos lo mismo que para la transformación de Miura: si w satisface

(4.27), u definido por (4.28) cumple KdV

$$\begin{aligned}
& u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\
&= 2\varepsilon^2 w w_t + w_t + \varepsilon w_{xt} - 6(\varepsilon^2 w^2 + w + \varepsilon w_x)(2\varepsilon^2 w w_x + w_x + \varepsilon w_{xx}) \\
&\quad + 2\varepsilon^2 w w_{xxx} + 6\varepsilon^2 w_x w_{xx} + w_{xxx} + \varepsilon w_x^{(4)} \\
&= 2\varepsilon^2 w(w_t + w_{xxx}) + \varepsilon[(w_t)_x + (w_{xxx})_x] + (w_t + w_{xxx}) + 6\varepsilon^2 w_x w_{xx} \\
&\quad - 6[2\varepsilon^2 w(\varepsilon^2 w^2 w_x + w w_x) + \varepsilon(2\varepsilon^2 w w_x^2 + \varepsilon^2 w^2 w_{xx} + w w_{xx} + w_x^2) \\
&\quad\quad + (\varepsilon^2 w^2 w_x + w w_x) + \varepsilon^2 w_x w_{xx}] \\
&= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right)(w_t - 6\varepsilon^2 w^2 w_x - 6w w_x + w_{xxx}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces, dada una solución w a (4.27) se tiene una solución para KdV, siempre y cuando u esté definido por la forma (4.28). El recíproco no es válido, pues el operador

$$1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w \quad (4.29)$$

tampoco es invertible sobre el espacio de soluciones. Veamos también que este operador es la variación de (4.28),

$$\begin{aligned}
\delta G_w[y] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G[w + \epsilon y] - G[w]}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\varepsilon^2 (w + \epsilon y)^2 + w + \epsilon y + \varepsilon (w_x + \epsilon y_x) - G[w] \right] \\
&= 2\varepsilon^2 w y + y + \varepsilon y_x \\
&= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right)(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la KdV y la ecuación de Gardner están relacionadas por la variación de la transformación G ,

$$\delta G \circ w_t = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right)(6\varepsilon^2 w^2 w_x + 6w w_x - w_{xxx}) = 6u u_x - u_{xxx}.$$

Nos gustaría tener a w en función de u , de alguna manera *invertir* el operador (4.29). Para esto, considerando u solución a KdV, si damos para w una expansión asintótica de la forma

$$w = \sum_n w_n \varepsilon^n; \quad (4.30)$$

donde cada coeficiente w_n está en función de u y sus derivadas espaciales, al sustituirla en la transformación (4.28),

$$\begin{aligned}
u &= w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 \\
&= \sum_n w_n \varepsilon^n + \sum_n (w_n)_x \varepsilon^{n+1} + \sum_{m,n} w_m w_n \varepsilon^{n+m+2},
\end{aligned}$$

podemos calcular los valores para cada coeficiente w_n . Puesto que el primer miembro de la ecuación anterior carece de expresiones relacionadas a potencias de ε , para cualquier potencia positiva su coeficiente será cero; en el caso ε^0 , $w_0 = u$. Desarrollando las series y distribuyendo con respecto a ε^n , igualaremos sus coeficientes a cero, obteniendo así los coeficientes w_n , $n > 0$, de manera recursiva:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 : \quad & u = w_0 \Rightarrow w_0 = u; \\
\varepsilon^1 : \quad & 0 = w_1 + (w_0)_x \Rightarrow w_1 = -u_x; \\
\varepsilon^2 : \quad & 0 = w_2 + (w_1)_x + w_0^2 \Rightarrow w_2 = u_{xx} - u^2; \\
\varepsilon^3 : \quad & 0 = w_3 + (w_2)_x + 2w_0w_1 \Rightarrow w_3 = -u_{xxx} + 4uu_x; \\
\varepsilon^4 : \quad & 0 = w_4 + (w_3)_x + 2w_0w_2 + w_1^2 \Rightarrow w_4 = u_{x^{(4)}} - 5u_x^2 - 6uu_{xx} + 2u^3; \\
& \vdots \\
\varepsilon^{2k} : \quad & 0 = w_{2k} + (w_{2k-1})_x + 2 \sum_{i=0}^{k-2} w_i w_{2(k-1)-i} + w_{k-1}^2, \quad k > 2; \\
\varepsilon^{2k+1} : \quad & 0 = w_{2k+1} + (w_{2k})_x + 2 \sum_{i=0}^{k-1} w_i w_{2k-1-i}, \quad k > 1.
\end{aligned}$$

Da esta manera ya tenemos a w expresada como una serie en términos que están en función de u y sus derivadas espaciales. Ahora, sustituiremos la serie (4.30) en la ecuación de Gardner, la ecuación (4.27), distribuyendo con respecto a las potencias ε^n . Para esto,

$$w_t = 6\varepsilon^2 w^2 w_x + 6w w_x - w_{xxx} \implies (w)_t = (2\varepsilon^2 w^3 + 3w^2 - w_{xx})_x,$$

entonces

$$\sum_n (w_n)_t \varepsilon^n = 2\varepsilon^2 \sum_{n,m,r} (w_n w_m w_r)_x \varepsilon^{n+m+r} + 3 \sum_{n,m} (w_n w_m)_x \varepsilon^{n+m} - \sum_n (w_n)_{xxx} \varepsilon^n.$$

Calculando los coeficientes de las potencias ε^n , tendremos parejas de polinomios, derivados con respecto a las variables espaciales y temporales. Desarrollemos las primeras potencias naturales de ε :

$$\varepsilon^0 : \quad (w_0)_t = 3(w_0^2)_x - (w_0)_{xxx} \implies (u)_t = (3u^2 - u_{xx})_x.$$

Obtenemos así nuestra primer ley de conservación, $\mathcal{T}_1 = u$; $-\mathcal{X}_1 = 3u^2 - u_{xx}$. Ahora, para el caso $n = 2$,

$$\varepsilon^2 : \quad (w_2)_t = (3(2w_0w_2 + w_1^2) + 2w_0^3 - (w_2)_{xx})_x.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
(u_{xx} - u^2)_t &= (6u(u_{xx} - u^2) + 3u_x^2 + 2u^3 - (u_{x^{(4)}} - 2u_x^2 - 2uu_{xx}))_x \\
&= (8uu_{xx} - 4u^3 + 5u_x^2 - u_{x^{(4)}})_x.
\end{aligned}$$

Pero $(u_{xx})_t = (u_t)_{xx} = (6uu_x - u_{xxx})_{xx}$. Entonces,

$$(u^2)_t = (4u^3 + u_x^2 - 2uu_{xx})_x.$$

Así, $\mathcal{T}_2 = u^2$; $\mathcal{X}_2 = 4u^3 + u_x^2 - 2uu_{xx}$ conforma nuestra segunda ley de conservación. Y, para $n = 4$,

$$\begin{aligned} (w_4)_t &= (6w_0w_4 + 6w_1w_3 + 3w_2^2 + 6w_0^2w_1 + 6w_0w_1^2 - (w_4)_{xx})_x \\ &= \left(6u(u_{x^{(4)}} - 5u_x^2 - 6uu_{xx} + 2u^3) - 6u_x(-u_{xxx} + 4uu_x) \right. \\ &\quad + 3(u_{xx}^2 - 2u^2u_{xx} + u^4) + 6u^2(u_{xx} - u^2) + 6uu_x^2 \\ &\quad \left. - (u_{x^{(4)}} - 5u_x^2 - 6uu_{xx} + 2u^3)_{xx} \right)_x. \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} (u_{x^{(4)}} - 5u_x^2 - 6uu_{xx} + 2u^3)_t &= \left(12uu_{x^{(4)}} - 60uu_x^2 - 42u^2u_{xx} + 9u^4 \right. \\ &\quad \left. + 28u_xu_{xxx} + 19u_{xx}^2 - u_{x^{(6)}} \right)_x. \end{aligned}$$

Sumando a ambos miembros de la igualdad la expresión $(-u_{x^{(4)}} + 6u_x^2 + 6uu_{xx})_t$ y puesto que u satisface KdV,

$$\begin{aligned} (u_x^2)_t &= 2u_x(u_t)_x \\ &= 12u_x^3 + 12uu_xu_{xx} - 2u_xu_{x^{(4)}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (uu_{xx})_t &= u_tu_{xx} + u(u_t)_{xx} \\ &= 24uu_xu_{xx} + 6u^2u_{xxx} - u_{xx}u_{xxx} - uu_{x^{(5)}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_{x^{(4)}})_t &= (u_t)_{x^{(4)}} \\ &= (18u_{xx}^2 + 24u_xu_{xxx} + 6uu_{x^{(4)}} - u_{x^{(6)}})_x. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (u_x^2 + 2u^3)_t &= \left(12uu_{x^{(4)}} - 60uu_x^2 - 42u^2u_{xx} + 9u^4 + 28u_xu_{xxx} + 19u_{xx}^2 - u_{x^{(6)}} \right)_x \\ &\quad - (18u_{xx}^2 + 24u_xu_{xxx} + 6uu_{x^{(4)}} - u_{x^{(6)}})_x \\ &\quad + 6(12u_x^3 + 12uu_xu_{xx} - 2u_xu_{x^{(4)}}) \\ &\quad + 6(24uu_xu_{xx} + 6u^2u_{xxx} - u_{xx}u_{xxx} - uu_{x^{(5)}}). \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{2}u_x^2 + u^3\right)_t &= 36u^3u_x + 12uu_xu_{xx} - 6u^2u_{xxx} + 12u_x^3 - 2u_xu_{x^{(4)}} \\ &= (9u^4 - 6u^2u_{xx} + 12uu_x^2 - 2u_xu_{xxx} + u_{xx}^2)_x \\ &= 2\left(\frac{9}{2}u^4 - 3u^2u_{xx} + 6uu_x^2 - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2\right)_x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la pareja $(\mathcal{T}_3, \mathcal{X}_3)$, con $\mathcal{T}_3 = \frac{1}{2}u_x^2 + u^3$, $-\mathcal{X}_3 = \frac{9}{2}u^4 - 3u^2u_{xx} + 6uu_x^2 - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2$, conforma la tercer ley de conservación. Y en lo sucesivo, a partir de las potencias pares de ε , obtendremos las demás leyes de conservación.

Para las potencias impares, los términos que se obtienen están puramente relacionados a derivadas espaciales, no aportando información alguna con respecto a la dinámica de la variación temporal. Esto se debe a la forma en como está conformada la iteración para los coeficientes w_n .

En las potencias pares aparece una potencia de la función u , están relacionadas al término $w_0 = u$; mientras que las potencias impares están relacionadas a $w_1 = -u_x$. Por ejemplo, para el caso $n = 1$,

$$\begin{aligned}(w_1)_t &= (6w_0w_1 - (w_1)_{xx})_x \\ &= (-6uu_x + u_{xx})_x \\ &= (-u_t)_x \\ &= (-u_x)_t.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada n par, la densidad conservada es no trivial, es decir, no es una derivada con respecto a la variable espacial. Pues para cada número par, la densidad contiene un término que es puramente una potencia de u , no pudiéndose surgir estos términos de la diferenciación. En cambio, para cada n impar, no aparece un término que sea puramente una potencia de u , y al calcular el flujo de la densidad conservada propuesta, obtenemos una ecuación trivial.

En conclusión, para cada potencia par de ε existe una densidad conservada y un flujo asociado, que conforman una ley de conservación para la ecuación KdV. Por lo tanto, la ecuación de Johannes Korteweg y Gustav de Vries tiene una infinidad de leyes de conservación.

En este trabajo se presenta el estudio de la ecuación KdV para la obtención de sus cantidades conservadas. Para la primer parte de este estudio, deducir la ecuación de Korteweg y de Vries, se realizó un análisis a la dinámica de fluidos para la obtención de sus ecuaciones generales; suponiendo condiciones para el fluido, y las condiciones de frontera para el fluido; visto como el paso de una ola sobre un canal.

En cuanto a la segunda parte, la obtención de cantidades conservadas, se definió la teoría necesaria para los sistemas integrales en el caso finito, sirviendo como herramienta para generalizar sus conceptos a espacios de funciones. Con esto, se mostraron los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos para las funciones solución a KdV y, bajo transformaciones a partir de la estructura Hamiltoniana, se dedujo una manera de obtener una infinidad de leyes de conservación.

Solución de tipo solitón

*“No hay nada permanente en este
malvado mundo. Ni siquiera
nuestros problemas”.*

CHARLES CHAPLIN (1889–1977)

Tanto la ecuación de Boussinesq como la de Korteweg-de Vries son aproximaciones de orden uno con respecto a los parámetros ε , δ , asociados a las magnitudes de onda y del canal. Dichas ecuaciones poseen soluciones exactas del tipo onda viajera, con las características de las ondas solitarias observadas por Russell. El uso de la KdV presenta suma facilidad, es un buen modelo para analizar los procesos físicos de las ondas solución a estas, entre tantas los solitones.

Decimos que un *solitón* es una solución particular de una EDP no lineal, con las siguientes características:

1. Es una onda viajera.
2. Es continua, acotada y se encuentra localizada en el espacio.
3. La energía que transportan es finita.

A pesar de ser la KdV sólo una aproximación, a partir de los efectos no lineales y dispersivos presentes en ella puede mostrarse la existencia de ondas solitarias y el comportamiento de éstas como solitones. Consideremos la forma KdV en su forma dimensional, dada en la página 40 del capítulo 2,

$$\eta_t + c_0\eta_x + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h_0}\eta\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2c_0\eta_{xxx} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Para mostrar dicho resultado, busquemos soluciones de la forma

$$\eta(x, t) = \varphi(x - ct) \equiv \varphi(\zeta), \quad \left(\frac{\partial^j \eta}{\partial x^j}\right) \longrightarrow 0; \quad |x| \longrightarrow \infty, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \varphi' \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -c\varphi'. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (A.1),

$$-\frac{c}{c_0}\varphi' + \varphi' + \frac{3}{2h_0}\varphi\varphi' + \frac{h_0^2}{6}\varphi''' = 0. \quad (\text{A.2})$$

Integrando la expresión (A.2), tenemos

$$\left(-\frac{c}{c_0} + 1\right)\varphi + \frac{3}{4h_0}\varphi^2 + \frac{h_0^2}{6}\varphi'' = A,$$

con A una constante de integración. Como esta igualdad debe satisfacerse para cualquier valor x real, al hacer tender $|x|$ a infinito, concluimos que $A = 0$

$$\left(-\frac{c}{c_0} + 1\right)\varphi + \frac{3}{4h_0}\varphi^2 + \frac{h_0^2}{6}\varphi'' = 0. \quad (\text{A.3})$$

Pues buscamos soluciones que se anulan en el finito. Multiplicando (A.3) por φ' e integrándola,

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{c}{c_0} + 1\right)\varphi^2 + \frac{1}{4h_0}\varphi^3 + \frac{h_0^2}{12}(\varphi')^2 = B.$$

De nueva cuenta, se concluye que $B = 0$,

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{c}{c_0} + 1\right)\varphi^2 + \frac{1}{4h_0}\varphi^3 + \frac{h_0^2}{12}(\varphi')^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Despejando el tercer término del primer miembro de (A.4) y multiplicando la ecuación por cuatro,

$$\frac{h_0^2}{3}(\varphi')^2 = \varphi^2 \left[2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right) - \frac{1}{h_0}\varphi \right]. \quad (\text{A.5})$$

Definiendo $\nu(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\beta h_0}$ con $\beta = 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)$, $\varphi = \beta h_0 \nu$. Sustituyendo en (A.5)

$$(\nu')^2 = \frac{3\beta}{h_0^2}\nu^2(1 - \nu).$$

Ya que todos los términos del segundo miembro son positivos, pues la velocidad c de la ola es positiva y también mayor a la velocidad linealizada c_0 , así como la expresión $1 - \nu$, pues puede verse como la altura de la ola normalizada por la función ν siendo entonces positiva, concluimos con la igualdad

$$\nu' = -\frac{\sqrt{3\beta}}{h_0}\nu\sqrt{1 - \nu}. \quad (\text{A.6})$$

Separando variables e integrando,

$$\int -\frac{d\nu}{\nu\sqrt{1 - \nu}} = \frac{\sqrt{3\beta}}{h_0}\zeta + C. \quad (\text{A.7})$$

Considerando la sustitución

$$\nu = \operatorname{sech}^2(z) \implies d\nu = -2\operatorname{sech}^2(z) \tanh(z) dz;$$

para el primer miembro de (A.7)

$$\int -\frac{d\nu}{\nu\sqrt{1-\nu}} = \int \frac{2\operatorname{sech}^2(z) \tanh(z)}{\operatorname{sech}^2(z)\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(z)}} dz = 2z + D$$

Entonces, $2z + D = \frac{\sqrt{3\beta}}{h_0}\zeta + C$, es decir $z = \frac{\sqrt{3\beta}}{2h_0}\zeta - E$. Así, ν es de la forma

$$\nu(\zeta) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3\beta}}{2h_0}\zeta - E\right). \quad (\text{A.8})$$

Y, por tanto,

$$\varphi(\zeta) = (\beta h_0) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3\beta}}{2h_0}\zeta - E\right), \quad \beta = 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right). \quad (\text{A.9})$$

Con esto, una solución tipo solitón para la KdV es

$$\eta(x, t) = (\beta h_0) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3\beta}}{2h_0}(x - ct) - E\right), \quad \beta = 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right). \quad (\text{A.10})$$

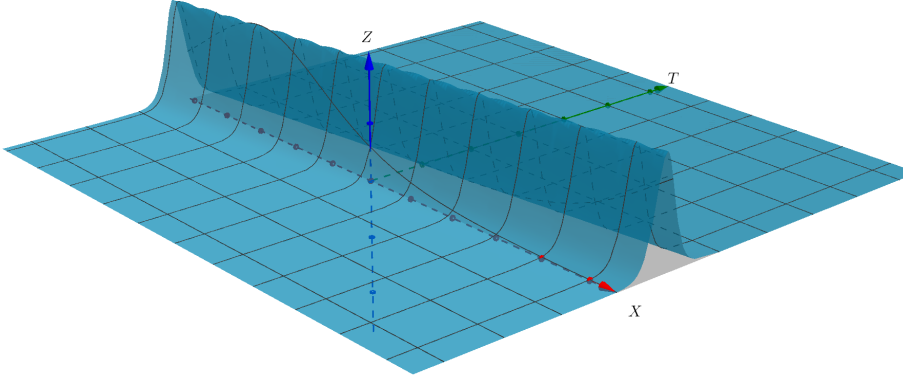


Figura A.1: Gráfica de un solitón, con valores $h_0 = 7.6$, $\beta = 0.254$, $c = 9.73$ y $E = -1.2$.

Un acercamiento al análisis funcional

“Para quedarte donde estás tienes que correr lo más rápido que puedas... y si quieres ir a otro sitio, deberás correr, por lo menos, dos veces más rápido”

LEWIS CARROLL (1832–1898)

Definición B.1. Sea V un espacio vectorial de funciones f . Para cualquier función f en V , tiene como dominio un conjunto D de los reales fijo, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Decimos que V es un espacio de Banach si cumple:

1. Para cualquier elemento $f \in V$ se puede definir una norma $\|f\|$; esto es, un operador $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que es nulo si, y sólo si, f es la función idénticamente cero, $f \equiv 0$. También que satisfaga la propiedad de homogeneidad, $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, con λ un valor real; y cumpla la desigualdad del triángulo, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, para cualesquiera f, g elementos de V .
2. Con la topología inducida por dicha norma, es completo. Es decir, el límite de cualquier sucesión de Cauchy en V también pertenece a V .

Por comodidad, a los espacios vectoriales de funciones que poseen una estructura de espacio de Banach sólo les llamaremos espacios vectoriales —de funciones—.

Definición B.2. Sea V un espacio vectorial y \mathcal{D} un subconjunto de V . Una funcional real \mathcal{F} en \mathcal{D} es una aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$; donde a cada función f de su dominio \mathcal{D} , $\mathcal{D} \subset V$, le asocia un valor real.

Ejemplo 1. El conjunto $V = C^1([a, b])$ se define como el espacio de funciones reales continuas sobre el intervalo $[a, b]$ con primer derivada continua sobre el mismo intervalo. Si definimos sobre $C^1([a, b])$ la norma

$$\|f\| \equiv \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\},$$

se establece una estructura de espacio de Banach.

En general, se define $C^n([a, b])$ como el espacio de funciones reales continuas sobre el intervalo $[a, b]$ n veces diferenciables, sobre el mismo intervalo. En el caso donde el dominio de las funciones sean todos los reales, se denota como $C^n(\mathbb{R})$.

Definiremos un funcional Φ en particular, teniendo como base la acción de un Lagrangiano. Para esta funcional, definimos su dominio

$$\mathcal{D}_\Phi = \{f \in C^2([a, b]) \mid f(a) = A, f(b) = B\}, \quad (\text{B.1})$$

con A, B constantes arbitrarias fijas. Además, consideremos una función F con dominio en \mathbb{R}^3 definida sobre los reales $F(x, y, z)$, continua y con derivadas parciales de segundo orden. Así, definimos a Φ como

$$\Phi[f] = \int_a^b F(f(s), f'(s), s) ds, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Phi). \quad (\text{B.2})$$

Observación 15. El dominio \mathcal{D}_Φ no necesariamente es un subespacio vectorial de $C^2([a, b])$. Puede considerarse, por ejemplo, las funciones tales que $f(a) = f(b)$.

Definición B.3. Sea $C^n([a, b])$. Definimos el subespacio \mathcal{M}^n del espacio de funciones reales continuas n veces diferenciables como

$$\mathcal{M}^n = \{h \in C^n([a, b]) \mid h(a) = h(b) = 0\}. \quad (\text{B.3})$$

Para las funciones reales en varias variables, tenemos el concepto de diferenciable. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ si existe una función lineal $df_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal, que satisfaga

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) + df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) + O(\mathbf{a}^2); \quad (\text{B.4})$$

donde la notación $df_{\mathbf{x}}$ asume unicidad. Para este caso, podemos concluir que

$$df_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}); \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (\text{B.5})$$

Definición B.4. Un funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que es continuo en f , $f \in \mathcal{D}$, si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que si para g , $g \in \mathcal{D}$, ocurre que $\|f - g\| < \delta$; entonces $|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(g)| < \epsilon$. O bien,

$$\lim_{g \rightarrow f} \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f). \quad (\text{B.6})$$

Con esto, un funcional es continuo si lo es en cada elemento de su dominio \mathcal{D} .

En esta definición, la norma a la que se hace referencia es la misma por la que V es definido como espacio de Banach.

Definición B.5. Un funcional $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en la función $f \in \mathcal{D}$ si existe un funcional lineal $\delta\mathcal{F}_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal, que en cierto entorno de f en \mathcal{D} —asociado a un cierto entorno $\mathbf{0}$ en \mathcal{M} — se satisfaga

$$\mathcal{F}(f + \varepsilon h) = \mathcal{F}(f) + \varepsilon \delta\mathcal{F}_f(h) + O(\varepsilon^2), \quad \forall h \in \mathcal{M}, \quad (\text{B.7})$$

esto es la derivada de Gâteaux.

La ecuación (B.7) es equivalente a buscar la funcional lineal $\delta\mathcal{F}_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\delta\mathcal{F}_f(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(f + \varepsilon h) - \mathcal{F}(f)}{\varepsilon}, \quad \forall h \in \mathcal{M}. \quad (\text{B.8})$$

A la funcional $\delta\mathcal{F}_f$ se le conoce como *variación* del funcional \mathcal{F} en la función f . Para el caso de la variación de la funcional (B.2), como se supone el caso donde no hay variación en los extremos, $h(a) = h(b) = 0$, la variación de Φ se reduce a

$$\delta\Phi_f(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h \, ds. \quad (\text{B.9})$$

Este concepto, la variación, es el *análogo* del concepto de *derivada direccional*. Así, se tiene la variación de la función F con respecto a f en la dirección de la función h .

Definición B.6. Sea V un espacio vectorial lineal de funciones donde $\forall f \in V, f : D \rightarrow \mathbb{R}; D \subseteq \mathbb{R}, g : V \rightarrow V$. Sea \mathcal{F} un funcional en V , con $\mathcal{F}(f) = \int_D [g(f)](s) \, ds$. Una derivada variacional de \mathcal{F} es una función

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} : V \rightarrow V$$

que satisface

$$\delta\mathcal{F}_f(h) = \int_D \left[\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} \right] h(s) \, ds, \quad \forall f \in V, \forall h \in \mathcal{M}. \quad (\text{B.10})$$

Por la notación se asume unicidad.

Por (B.9) y (B.10), para (B.2) tenemos

$$\frac{\delta\Phi}{\delta f} := \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial f'}, \quad (\text{B.11})$$

la expresión para la derivada variacional. Por (B.9), la expresión de la variación del funcional (B.2), concluimos que, si en la función f el funcional tiene un máximo o mínimo, entonces debe de valer cero, $\delta\Phi_f(h) = 0; \forall h \in \mathcal{M}$. Con esto, obtenemos la versión de la ecuación de Euler-Lagrange para espacios de funciones

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) - \frac{\partial F}{\partial f} = 0, \quad (\text{B.12})$$

con $L(f(s), f'(s), s) \equiv F(f(s), f'(s), s)$ la función lagrangiana.

Operadores de Lax

*“Dios hizo los números enteros;
el resto el obra del hombre.”*

LEOPOLD KRONECKER (1823-1891)

El trabajo de Lax estuvo inspirado por el redescubrimiento de la ecuación KdV en los trabajos de Zabusky y Kruskal, por ejemplo [30], y posteriormente con Gardner *et al* en [13]. La conclusión del nuevo análisis a KdV concluye a considerarla como la ecuación de un sistema Hamiltoniano integrable de dimensión infinita; se consideraba que las estructuras de las soluciones eran consecuencia de la existencia de distintos parámetros de conservación.

Lax interpretó a KdV como una condición de integrabilidad entre ciertos pares de operadores diferenciales, implicando que el espectro de estos se mantenía constante.

C.1. Motivación

Sea L_0 una matriz con sus entradas reales de $m \times m$. Supongamos que tenemos una *curva* de matrices $L(t)$. Así, $L(t)$ es una curva de matrices similares a L_0 si existe $Q(t)$ curva de matrices tal que $L_0 = Q^{-1}(t)L(t)Q(t)$. Dicho esto, nos proponemos analizar la evolución con respecto a t del siguiente sistema con condiciones iniciales

$$L_0 = Q^{-1}(t)L(t)Q(t), \quad Q^{-1}(0)Q(0) = I_{m \times m}. \quad L(t) \equiv L, \quad Q(t) \equiv Q. \quad (\text{C.1})$$

Si derivamos con respecto a t la ecuación del sistema, tenemos

$$0 = Q^{-1}L\dot{Q} + Q^{-1}\dot{L}Q + \dot{Q}^{-1}LQ, \quad (\text{C.2})$$

despejando \dot{L}

$$\dot{L} = -QQ^{-1}\dot{L}Q - L\dot{Q}Q^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

Como $I_{m \times m} = AA^{-1}$ para cualquier matriz A invertible,

$$0 = \frac{d}{dt}(QQ^{-1}) = Q\dot{Q}^{-1} + \dot{Q}Q^{-1} \implies \dot{Q}Q^{-1} = -Q\dot{Q}^{-1}. \quad (\text{C.4})$$

Entonces, para (C.3),

$$\dot{L} = \dot{Q}Q^{-1}L - L\dot{Q}Q^{-1}. \quad (\text{C.5})$$

Si expresamos como $M \equiv M(t)$ a la expresión $\dot{Q}Q^{-1}$, se tiene para $\dot{L}(t)$ la igualdad, por (C.3),

$$\dot{L}(t) = M(t)L(t) - L(t)M(t); \quad (\text{C.6})$$

donde $M(t)$ satisface

$$\dot{Q}(t) = M(t)Q(t). \quad (\text{C.7})$$

C.2. Par de Lax

Sea \mathcal{L} una matriz donde sus entradas l_{ij} están definidas sobre el espacio fase \mathbb{R}^{2n} , $l_{ij} \equiv l_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathcal{L} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$. Consideremos una curva $\mathbf{x}(t)$ en el espacio fase, teniendo así sus coordenadas generalizadas dadas por un parámetro t de tiempo.

Si aplicamos la matriz a la curva —aplicar cada entrada de la matriz a la curva— podremos calcular el cambio de $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t))$ con respecto al tiempo, $\mathcal{L}(\mathbf{x}(t)) = \mathcal{L}(t) \equiv L$. Supongamos que existe una matriz $M \equiv M(t)$ tal que el cambio con respecto al tiempo de L está dado por

$$\frac{d}{dt}L = [M, L], \quad (\text{C.8})$$

donde $[M, L] = ML - LM$ es el conmutador de L y M , $M \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$. Si tenemos dos matrices que cumplen (C.8), se dice que forman un *par de Lax* y la ecuación anterior se denomina *ecuación de Lax*.

Supongamos que la evolución de L es de la forma

$$L(t) = Q(t)L_0Q(t)^{-1}, \quad Q(0) = I_{2n \times 2n}; \quad (\text{C.9})$$

donde la matriz invertible $Q \equiv Q(t)$ está determinada por la ecuación

$$M = \left(\frac{d}{dt}Q \right) Q^{-1} \implies \left(\frac{d}{dt}Q \right) = MQ. \quad (\text{C.10})$$

Así tenemos una ecuación diferencial con condiciones iniciales, de manera que la solución $Q(t)$ está bien definida y es única. Definiendo la matriz $L_Q = Q^{-1}LQ$ y calculando su derivada con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt}(Q^{-1}LQ) = Q^{-1}L\dot{Q} + Q^{-1}\dot{L}Q + \dot{Q}^{-1}LQ. \quad (\text{C.11})$$

Debido a (C.4), $\dot{Q}^{-1} = -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}$. Considerando (C.10) y asumiendo que el cambio con respecto a t de L está dado por el conmutador, al sustituir en la ecuación (C.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_Q) &= Q^{-1}LMQ + Q^{-1}(ML - LM)Q - Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}LQ \\ &= Q^{-1}(ML - \dot{Q}Q^{-1}L)Q \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, L_Q se mantiene constante a lo largo del tiempo, de manera que es un sistema *estacionario*, donde el valor en cualquier instante t será el mismo que el inicial. Así,

$$(Q^{-1}LQ)(t) = (Q^{-1}LQ)(0) = L_0 = L(0), \quad (\text{C.12})$$

De manera que la evolución de L es de la forma

$$L(t) = QL(0)Q^{-1}. \quad (\text{C.13})$$

Esto implica, que las matrices $L(t)$ y $L(0)$ son similares. Una propiedad importante de las matrices similares, es que tienen el mismo polinomio característico, así, L y L_0 tienen los mismos valores propios. Esto implica que para cualquier valor propio λ_i , $1 \leq i \leq n$ se mantiene constante con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\lambda = 0, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (\text{C.14})$$

En este caso decimos que el cambio temporal de L dado por una representación de Lax es *isoespectral*, es decir, el espectro se preserva en la variación con respecto al tiempo. Existen otros valores que también se preservan con respecto a t , las trazas.

Observación 16. *La traza del conmutador se anula. En efecto, pues*

$$\begin{aligned} \text{tra}([M, L]) &= \text{tra}(ML - LM) \\ &= \text{tra}(ML) - \text{tra}(LM) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, si un par de matrices $(L(t), M(t))$ admite una representación de Lax, por la linealidad del operador traza, la traza de L es una constante del movimiento

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{tra}(L) &= \text{tra}\left(\frac{d}{dt}L\right) \\ &= \text{tra}([M, L]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observación 17. *Si (L, M) forma un par de Lax, también lo forma la pareja (L^2, M) , pues*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L^2 &= \dot{L}L + L\dot{L} = [M, L]L + L[M, L] \\ &= (ML - LM)L + L(ML - LM) \\ &= [M, L^2]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

De manera general podemos mostrar que (L^k, M) es un par de Lax si la pareja (L, M) , así como con las potencias anteriores a k , forman un par de Lax;

donde $1 < k \leq n$ y $2n$ es la dimensión del espacio fase:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L^k &= \dot{L}L^{k-1} + L\frac{d}{dt}L^{k-1} = [M, L]L^{k-1} + L[M, L^{k-1}] \\ &= (ML - LM)L^{k-1} + L(ML^{k-1} - L^{k-1}M) \\ &= [M, L^k]. \end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones de Hamilton, construido a partir de una función hamiltoniana H , puede definirse a partir de una matriz L , $L \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ [3]. Entonces, las n constantes de movimiento para las ecuaciones de Hamilton se dan, por lo anterior y las observaciones 16 y 17, a partir de las trazas de las potencias de la matriz L , teniendo el criterio de integrabilidad para dar solución al sistema. Enunciamos así la siguiente proposición

Proposición C.2.1. *Si un sistema Hamiltoniano definido sobre el espacio fase \mathbb{R}^{2n} admite una representación de Lax, $\dot{L} = [M, L]$, entonces las funciones definidas de la forma*

$$I_1 = \text{tra}(L), \quad I_2 = \text{tra}(L^2), \quad \dots, \quad I_n = \text{tra}(L^n),$$

son constantes de movimiento

$$\frac{d}{dt}I_k = 0; \quad 1 \leq k \leq n.$$

C.3. Representación de Lax para la KdV

Veremos que la ecuación KdV

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

puede ser escrita a partir de una representación de Lax

$$\dot{L} = [M, L]; \tag{C.16}$$

donde $[M, L] = ML - LM$ es el conmutador de la pareja de los operadores L y M sobre cierto espacio funcional. En efecto, tomando el espacio Y de funciones diferenciables periódicas de periodo 2π , definido en la sección 4.3 del capítulo 4,

$$Y := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\},$$

tomemos una curva $g(t)$ arbitraria y fija en Y . Así, considerando la función $u(x, t)$ de dos variables asociada, definimos a los operadores $L, M : Y \rightarrow Y$ como sigue

$$\begin{aligned} L &:= -\partial_x^2 + u \\ M &:= -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x. \end{aligned} \tag{C.17}$$

Calculemos ahora las composiciones ML y LM . Denotando el operador derivada parcial con respecto a x simplemente como el operador derivada parcial, $\partial_x = \partial$, tenemos

$$\begin{aligned} ML &= -4\partial^3(-\partial^2 + u) + 6u\partial(-\partial^2 + u) + 3u_x(-\partial^2 + u) \\ &= 4\partial^5 - 4\partial^2(u_x + u\partial) + 6u(-\partial^3 + u_x + u\partial) - 3u_x\partial^2 + 3uu_x \\ &= 4\partial^5 - 4\partial(u_{xx} + 2u_x\partial + u\partial^2) - 6u\partial^3 + 9uu_x + 6u^2\partial - 3u_x\partial^2 \\ &= 4\partial^5 - 4u_{xxx} - 12u_{xx}\partial - 15u_x\partial^2 - 10u\partial^3 + 9uu_x + 6u^2\partial. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} LM &= -\partial^2(-4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x) + u(-4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x) \\ &= 4\partial^5 - \partial(9u_x\partial + 6u\partial^2 + 3u_{xx}) - 4u\partial^3 + 6u^2\partial + 3uu_x \\ &= 4\partial^5 - 12u_{xx}\partial - 15u_x\partial^2 - 6u\partial^3 - 3u_{xxx} - 4u\partial^3 + 6u^2 + 3uu_x \\ &= 4\partial^5 - 3u_{xxx} - 12u_{xx}\partial - 15u_x\partial^2 - 10u\partial^3 + 3uu_x + 6u^2\partial. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} [M, L] &= ML - LM \\ &= 4\partial^5 - 4u_{xxx} - 12u_{xx}\partial - 15u_x\partial^2 - 10u\partial^3 + 9uu_x + 6u^2\partial \\ &\quad - (4\partial^5 - 3u_{xxx} - 12u_{xx}\partial - 15u_x\partial^2 - 10u\partial^3 + 3uu_x + 6u^2\partial) \\ &= 6uu_x - u_{xxx}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si u satisface la ecuación KdV, tenemos que

$$\dot{L} = u_t.$$

Es decir, la ecuación KdV admite una representación de Lax.

Bibliografía

- [1] ACHESON, D. J. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. Oxford University Press, 1990.
- [2] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*, 2 ed., vol. 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1989. Traducido por Vogtmann, K. y Weinstein, A.
- [3] BABELON, O., DENIS, B., AND TALON, M. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [4] BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2000.
- [5] BOUSSINESQ, J. Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 73* (1871), 256–260.
- [6] BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 17*, 2 (1872), 55–108.
- [7] CALVO, J. O., AND ITURRIAGA, R. G. IV *Escuela de verano de geometría y sistemas dinámicos. Memorias. Cimat, Guanajuato 1997*, vol. Comunicaciones of *Aportaciones Matemáticas*. papirhos, IM-UNAM, México, 1998.
- [8] CRAPPER, G. D. *Introduction to Water Waves*. Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1984.
- [9] DARCHE, M., AND GOIFFON, R. Solitones y tsunamis. In *Mathematics of Planet Earth* (2013), IMAGINARY open mathematics. Imagen consultada en <https://imaginary.org/es/hands-on/solitones-y-tsunamis>.
- [10] DE JAGER, E. M. On the Origin of the Korteweg-de Vries Equation. *Forum der Berliner Mathematischen Gesellschaft 19* (2011), 171–195.
- [11] DRAZIN, P. G., AND JOHNSON, R. S. *Solitons: an introduction*, vol. 2 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, 1989.

- [12] GARDNER, C. S. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. IV. The Korteweg-de Vries Equation as a Hamiltonian System. *Journal of Mathematical Physics* 12, 8 (1971), 1548–1551.
- [13] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D., AND MIURA, R. M. Method for solving the Korteweg-deVries equation. *Physical Review Letters* 19 (1967), 1095–1097.
- [14] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D., AND MIURA, R. M. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. VI. Methods for Exact Solution. *Journal of Mathematical Physics* 27 (1974), 97–133.
- [15] JOHNSON, R. S. *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, vol. 19 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, 1997.
- [16] KAPPELER, T., AND PÖSCHEL, J. *KdV & KAM*, vol. 45 of *A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [17] KNOBEL, R. *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, vol. 3 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, 1999.
- [18] KORTEWEG, D. J., AND DE VRIES, G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philosophical Magazine* 39, 240 (1895), 422–443.
- [19] KRUSKAL, M. D., MIURA, R. M., GARDNER, C. S., AND ZABUSKY, N. J. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. v. Uniqueness and Nonexistence of Polynomial Conservation Laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 11, 3 (1970), 952–960.
- [20] LAX, P. D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 21, 5 (1968), 467–490.
- [21] LAX, P. D. Periodic solutions of the KdV equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 28, 1 (1975), 141–188.
- [22] LE MÉHAUTÉ, B. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*. Springer Study Edition. Springer Science+Business Media, 2013.
- [23] MILES, J. W. The Korteweg-de Vries equation: a historical essay. *Journal of Fluid Mechanics* 106 (1981), 131–147.
- [24] MIURA, R. M. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation. *Journal of Mathematical Physics* 9, 8 (1968), 1202–1204.

- [25] MIURA, R. M., GARDNER, C. S., AND KRUSKAL, M. D. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion. *Journal of Mathematical Physics* 9, 8 (1968), 1204–1209.
- [26] RAYLEIGH (STRUTT, JOHN W.), L. On waves. *Philosophical Magazine* 1 (1876), 257–279.
- [27] RODRIGUEZ FERNÁNDEZ, C. Deducción de la ecuación de Korteweg-de Vries. *Pro Mathematica* 23, 45-46 (2009), 79–104.
- [28] RUSSELL, J. S. Report on Waves. In *Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1844), vol. 14, J. Murray, pp. 311–390.
- [29] SU, C. H., AND GARDNER, C. S. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries Equation and Burgers Equation. *Journal of Mathematical Physics* 10, 3 (1969), 536–539.
- [30] ZABUSKY, N. J., AND KRUSKAL, M. D. Interaction of ‘Solitons’ in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters* 15 (1965), 240–243.
- [31] ZAKHAROV, V. E., AND FADDEEV, L. D. Korteweg-de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system. *Functional Analysis and its Applications* 5, 4 (1971), 280–287.