UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Secuencialidad en Álgebras Topológicas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Gerardo Zago Yáñez

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Secuencialidad en álgebras topológicas

Gerardo Zago Yáñez

16 de mayo de 2018

Prefacio

Esta tesis se centra en conceptos que hemos englobado con el término "secuencialidad", y con ellos se llega a abordar un problema clásico de la teoría de las álgebras topológicas: la continuidad de las funcionales lineales multiplicativas.

Uno de los principales objetos de estudio dentro del Análisis funcional son los espacios vectoriales topológicos, y por supuesto, las funciones definidas entre ellos que relacionan sus estructuras algebraica y topológica; nos referimos a las transformaciones (u operadores) lineales continuos. Y son de particular interés las transformaciones que toman valores en el campo de escalares asociado al espacio vectorial, llamadas funcionales lineales. Los operadores lineales han sido estudiados ampliamente en el caso de los espacios normados y en particular, los de Banach (normados y completos). También han sido muy estudiados en el caso de los espacios localmente convexos, en los cuales se generaliza gran parte de la teoría desarrollada para los normados.

Una clase particular de espacios vectoriales topológicos, son las álgebras topológicas. La nueva operación algebraica que en ellas se considera, el producto, añade riqueza y complejidad a los temas y hace que las álgebras topológicas constituyan por sí mismas una área del análisis funcional. Ahí, nuevos objetos a estudiar son las funcionales lineales multiplicativas, también llamadas caracteres, es decir, las funcionales que además de ser lineales, satisfacen que la imagen de un producto es el producto de las imágenes de los factores.

Ernest A. Michael señala, en su su célebre monografía "Local multiplicatively -convex topological algebras" de 1952 que, de modo similar a lo que sucedió con los espacios lineales topológicos, donde con la convexidad local se generalizó la noción de espacio normado y se dio pie a extender la teoría de los espacios de Banach, se tiene que con las llamadas álgebras localmente multiplicativamente convexas (o simplemente m-convexas) se generalizó la noción de álgebras normadas, y se abrió la posibilidad de extender la teoría de las álgebras de Banach. De hecho, Warner afirma en [22] que las álgebras m-convexas y advertiblemente completas (una superclase de las completas) poseen las propiedades fundamentales de las de Banach.

Es bien sabido que en un álgebra de Banach toda funcional lineal multiplicativa es continua. Michael planteó, en su monografía arriba mencionada, la pregunta: ¿es toda F-álgebra conmutativa funcionalmente continua?; es decir, ¿es continua toda funcional lineal multiplicativa definida en un álgebra compleja, conmutativa, metrizable, completa y localmente m-convexa? Actualmente, esta pregunta se conoce en el área como el «Problema de

Michael», mismo que sigue abierto y que ha dado origen a muchas investigaciones y a la introducción de nuevos conceptos con el fin de resolverlo, inclusive así fuese de manera parcial. Este es el caso de los conceptos de álgebra infrasecuencial, secuencial y fuertemente secuencial, definidos para álgebras localmente convexas por Taqdir Husain [9], Gerard A. Joseph [13] y Taqdir Husain y Shu-Bun Ng [12], respectivamente, y que hemos agrupado aquí con el nombre de secuencialidad.

Estas nociones son el tema central de la tesis, que tiene como base el artículo «Infrasequential algebras» de Husain. En ella presentamos y probamos con todo detalle los resultados que ahí se exponen, algunos sin prueba ofrecida. Asímismo, en la tesis se desarrollan a plenitud ejemplos de álgebras con alguno de los tipos de secuencialidad. Al final, aparece la respuesta parcial de Husain al Problema de Michael: la respuesta es afirmativa si el álgebra es además infrasecuencial. Se puede decir que un álgebra es infrasecuencial si los elementos de cualquier subconjunto acotado son «uniformemente» acotados, en el sentido de Allan [2].

En esa parte final también introducimos, inspirados en las condiciones C y C' dadas por Husain y Ng, la llamada condición D, que es más débil que aquéllas. Un álgebra topológica satisface esta condición si toda sucesión alejada de cero, tiene una subsucesión para la que las evaluaciones de alguna funcional lineal multiplicativa quedan alejadas de cero.

Con las condiciones C y C' se prueban diversos resultados sobre la continuidad o acotamiento de funcionales multiplicativas y homomorfismos de álgebras. Usando la condición D, observamos que algunos de esos resultados siguen siendo válidos con hipótesis más débiles a las originalmente establecidas.

Se buscó que este trabajo monográfico fuera autocontenido en la mayor medida posible. En el capítulo uno, se hace un resumen de las definiciones y los resultados básicos sobre espacios vectoriales topológicos, con énfasis en los espacios localmente convexos. Es una parte del material visto generalmente en un curso de licenciatura de Análisis Funcional. La mayoría de las definiciones dadas en el capítulo se presentan a manera de glosario para hacer más cómoda la lectura. De algunos pocos resultados que ahí aparecen, sólo se dan las referencias donde pueden encontrarse sus demostraciones, pero cuando éstas no son muy extensas se hacen en el propio trabajo.

En el capítulo dos se estudian las álgebras topológicas. Se dan resultados sobre álgebras de Banach, localmente convexas, m-convexas, metrizables, Q-álgebras y bornológicas. Para dar la definición general de Q-álgebra se presenta la operación círculo y la unización de un álgebra.

En el capítulo tres, se desarrollan algunos conceptos definidos por Allan

[2]: elemento acotado, radio de acotamiento, álgebra pseudo-completa y su relación con los conceptos de completez local y convergencia de Mackey. Con estos tres capítulos nos allegamos los conceptos y resultados fundamentales para el resto de la tesis.

En el capítulo cuatro se trabajan las tres nociones de secuencialidad. Se presentan interesantes ejemplos de álgebras con los diversos tipos de secuencialidad; para darlos de manera plena, hay tres apéndices que auxilian en su desarrollo: el primero sobre el espacio de los ordinales menores que el primero no numerable; el segundo sobre el límite inductivo estricto y el tercero sobre el espacio de funciones reales de prueba. Además, en este capítulo se relacionan conceptos tales como radio espectral, radio de acotamiento, Q-álgebra y álgebra fuertemente secuencial. Esto último se basa en los artículos [2] y [6].

Finalmente, en el quinto y último capítulo, se prueban varios resultados relativos a la continuidad o acotamiento de funcionales multiplicativas y homomorfismos de álgebras, debidos principalmente a Husain; uno de ellos da la respuesta parcial afirmativa al problema de Michael, antes mencionada Además, se introduce la condición D y se le relaciona con la C y C'.

Índice general

Prefacio I

1. Preliminares 1
1.1. Espacios Vectoriales . . . 1
1.1.1. Subconjuntos especiales en espacios vectoriales . . . 1
1.1.2. Funciones (operadores o transformaciones) entre espacios vectoriales . . . 3
1.2. Espacios vectoriales topológicos (EVT) . . . 4
1.2.1. Topologías vectoriales (lineales) . . . 8
1.2.2. Continuidad de transformaciones . . . 11
1.2.2.1. Continuidad de operadores lineales . . . 11
1.2.2.2. Continuidad de funcionales lineales . . . 13
1.2.2.3. Continuidad de seminormas . . . 15
1.2.2.4. Las F-normas y los espacios localmente convexos y metrizables . . . 17
1.2.2.5. Relación entre la noción de espacio bornológico y la continuidad de transformaciones . . . 20
1.3. Topologías débiles . . . 21

2. Álgebras topológicas 24
2.1. Invertibilidad . . . 24
2.2. Álgebras semitopológicas y topológicas . . . 25
2.2.1. Q-álgebras . . . 26
2.3. Álgebras localmente convexas, m-convexas, metrizables y bornológicas . . . 31
2.3.1. Álgebras cocientes localmente convexas y metrizables 34
2.3.2. Álgebras de Banach . . . 34

3. Completez local **37**
3.1. Espacios localmente completos 37
3.2. Convergencia de Mackey 40
3.3. Álgebras pseudo-completas. Radio de acotamiento 43

4. Secuencialidad **49**
4.1. Las tres nociones de secuencialidad 49
4.1.1. Ejemplos 52
4.1.1.1. El álgebra $C^*(\mathbb{R})$ con la topología estricta β es infrasecuencial, pero no secuencial 52
4.1.1.2. El álgebra $C([0,\Omega))$ de las funciones escalares con la topología compacto-abierta, es un álgebra secuencial, pero no fuertemente secuencial 56
4.1.2. Ejemplos de álgebras secuenciales 59
4.1.2.1. El álgebra $C[0,1]$ de las funciones en $[0,1]$ escalares y continuas, con la topología τ de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos y numerables 59
4.1.2.2. El álgebra ℓ^1 de sucesiones escalares absolutamente sumables con la topología débil y la convolución $(*)$ como producto 60
4.2. Relación entre las tres nociones de secuencialidad y el radio de acotamiento 61
4.3. Igualdad entre los radios espectral y de acotamiento 63
4.4. Álgebras metrizables pseudo-Banach 65
4.5. Secuencialidad en límites inductivos de álgebras topológicas . 67
4.5.1. Límite inductivo de álgebras normadas 67
4.5.2. Límite inductivo estricto de álgebras normadas y m-convexas 68
4.5.3. Ejemplos 69

5. Continuidad de caracteres **73**
5.1. Infrasecuencialidad y continuidad de caracteres 73
5.2. La condición D 78

A. El espacio $[0,\Omega)$ **87**
A.1. El espacio $[0,\Omega]$ 87
A.2. Topología del orden 88

B. Límite inductivo **92**
B.1. Límite inductivo estricto de espacios localmente convexos . . 92

C. El álgebra $\mathscr{D}(\Omega)$ **99**
C.1. El álgebra $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ 99
C.2. El álgebra $\mathscr{D}(\Omega)$ de las funciones de prueba 103

Capítulo 1

Preliminares

Comenzamos con los resultados básicos sobre la teoría de espacios vectoriales topológicos. Se hace énfasis en la caracterización de los espacios localmente convexos y se establecen condiciones para determinar cuándo son continuas las transformaciones lineales o las seminormas definidas en dichos espacios. También dedicamos una sección a la topología débil y el espacio dual.

1.1. Espacios Vectoriales

En todo el trabajo se supondrá que los espacios vectoriales tendrán como campo de escalares a $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a menos que otra cosa se especifique.

1.1.1. Subconjuntos especiales en espacios vectoriales

Supongamos que A es un subconjunto de un espacio vectorial X.

Conjunto absorbente: Decimos que A es *absorbente* si, para cada $x \in X$, existe $\lambda_x > 0$ tal que $x \in \mu A$ siempre que $|\mu| \geq \lambda_x$.

Conjunto balanceado: Si $\lambda A \subseteq A$ cuando $|\lambda| \leq 1$, entonces A es *balanceado.*

Conjunto convexo: El conjunto A es llamado *convexo* si $\lambda x + \mu y \in A$, cuando $x, y \in A$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ y $\lambda + \mu = 1$. A este tipo de sumas $\lambda x + \mu y$ se les llama *combinaciones convexas.*

Se puede probar fácilmente que uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos balanceados son balanceadas, uniones arbitrarias e intersecciones finitas de conjuntos absorbentes son absorbentes, e intersecciones arbitrarias de conjuntos convexos son convexas. Una unión de conjuntos convexos no necesariamente es convexa.

Disco: El conjunto A es llamado *disco* o *absolutamente convexo*, si es convexo y balanceado. Equivalentemente, A es un disco si $x, y \in A$ y $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ implican que $\lambda x + \mu y \in A$.

Envolvente convexa de A: Es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A, es decir, la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A, y lo denotamos como $co\,(A)$. Tenemos [4, Teorema 4.2.3 (a)] que

$$co\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Envolvente balanceada de A: Es el conjunto balanceado más pequeño que contiene a A, y lo denotamos como $bl\,(A)$.

Envolvente absolutamente convexa de A: La envolvente absolutamente convexa de A es el subconjunto $bc\,(A)$ de X, convexo y balanceado, más pequeño que contiene a A. Es fácil ver que

$$bc\,(A) = \left\{ x \in X \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \geq 1, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}$$

Este conjunto coincide con $co\,(bl(A))$.

Proposición 1.1.1. *La envolvente convexa de un conjunto balanceado es balanceada.*

Demostración. Sean A balanceado y $x \in co\,(A)$. Entonces $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Si $|\mu| \leq 1$, $\mu x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu x_i$ y como A es balanceado entonces $\mu x_i \in A$. Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu x_i$ es de nuevo una combinación convexa de elementos de A, es decir $\mu x \in co\,(A)$. □

Suma y producto de conjuntos Si $B \subset X$ y α es un escalar, entonces definimos: la suma $A + B = \{x + y \,| x \in A, y \in B\}$ y el producto $\alpha A = \{\alpha x \,| x \in A\}$.

Cuando A tiene sólo un elemento x escribimos $x + B$ en lugar de $\{x\} + B$.

Proposición 1.1.2. *El conjunto A es convexo si y sólo si $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$ si $\alpha, \beta > 0$.*

Demostración. La «parte si» es inmediata tomando $\alpha+\beta=1$. Para la otra parte, basta considerar el caso en que $\alpha,\beta>0$. Es claro que $(\alpha+\beta)A\subset \alpha A+\beta A$. Ahora sea $x\in\alpha A+\beta A$, es decir $x=\alpha a_1+\beta a_2$ con $a_1,a_2\in A$. Por la convexidad de A, $\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)a_1+\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)a_2\in A$, o lo que es igual $\frac{x}{\alpha+\beta}\in A$, de donde $x\in(\alpha+\beta)A$. □

Proposición 1.1.3. *La suma de dos subconjuntos convexos A y B de X es un conjunto convexo.*

1.1.2. Funciones (operadores o transformaciones) entre espacios vectoriales

Sean X y Y dos espacios vectoriales.

Operador lineal Un *operador lineal* (o *transformación lineal*, o *función lineal*) de X en Y es una función $T:X\longrightarrow Y$ tal que para $x,y\in X$ y $\lambda\in\mathbb{F}$ se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $T(x+y)=T(x)+T(y)$ (aditividad);
2. $T(\lambda x)=\lambda T(x)$ (homogeneidad).

Funcional sublineal Una función $p:X\longrightarrow\mathbb{R}$ es *sublineal* si se cumplen las siguientes dos condiciones para $x,y\in X$ y $\lambda\geq 0$:

1. $f(\lambda x)=\lambda f(x)$;
2. $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$.

Transformación bilineal Sean X,Y y Z tres espacios vectoriales. Una función $B:X\times Y\to Z$ es llamada *bilineal* si las transformaciones $T_a(y)=B(a,y)$y $T_b(x)=B(x,b)$ definidas en Y y X, respectivamente, son lineales para cada $a\in X$ y $b\in Y$.

Funcional lineal Una *funcional lineal* es un operador lineal $f:X\longrightarrow\mathbb{F}$, donde se considera a $\mathbb{F}$ como espacio vectorial sobre sí mismo,

Seminorma Una función $p:X\longrightarrow[0,\infty)$ es una *seminorma* si se cumplen las siguientes dos condiciones para $x,y\in X$ y $\lambda\in\mathbb{F}$:

1. $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$;
2. $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$

Norma Una función $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, es llamada una *norma* si dados $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $||x|| \geq 0$, y $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$;
2. $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Funcional de Minkowski Si $A \subset X$ es absorbente, entonces la función $p_A(x) = \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 |\, x \in \lambda A\}$ es llamada la *funcional de Minkowski para A. Esta función es sublineal y si A es además balanceado y convexo, entonces p_A es una seminorma.*

Proposición 1.1.4. *Sean p, q dos seminormas en X y $t > 0$. Si $q(x) \leq t$ implica que $p(x) \leq r$ entonces $p(x) \leq \frac{r}{t} q(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Como $q\left(\frac{tx}{q(x)+\varepsilon}\right) < t$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in X$, entonces $p\left(\frac{tx}{q(x)+\varepsilon}\right) \leq r$, de donde $p(x) \leq \frac{r}{t} q(x) + \frac{r}{t}\varepsilon$. Haciendo tender ε a 0 concluimos lo que queremos. $\square$

Esta proposición se usará, sobre todo, cuando $r = t = 1$.

1.2. Espacios vectoriales topológicos (EVT)

Espacio vectorial topológico Un *espacio vectorial topológico* (X, τ) es un espacio vectorial X dotado de una topología τ tal que la suma es continua en $X \times X$ y el producto por un escalar es continuo en $\mathbb{F} \times X$, es decir:

- Para cada $a, b \in X$ y cada abierto $U \in \tau$ tal que $a + b \in U$, existen abiertos $U_1, U_2 \in \tau$ con $a \in U_1$ y $b \in U_2$ tales que si $x \in U_1$ y $y \in U_2$, entonces $x + y \in U$;
- Dados $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ y $U \in \tau$, con $\lambda_0 a \in U$, existen $\delta > 0$ y $V \in \tau$ con $a \in V$ tales que si $|\lambda - \lambda_0| < \delta < \varepsilon$ y $x \in V$, entonces $\lambda x \in U$.

Proposición 1.2.1. *En todo EVT, X, las funciones*

- *$t_a : X \to X$ definida como $x \to x + a$ (traslación por a)*

- $h_\lambda : X \to X$, *con* $\lambda \neq 0$, *definida como* $x \to \lambda x$ *(homotecia de razón* λ*),*

son homemorfismos.

Demostración. Podemos ver a la función t_a como la composición de las funciones $x \longmapsto (x, a) \longmapsto x + a$. La primera de ellas, con codominio en $X \times X$, tiene por componentes a la identidad y a la función constante a, por lo tanto es continua. La segunda es la suma en X que por definición es continua, y así, t_a también lo es. Podemos ver claramente que su inversa es $t_a^{-1}(x) = x - a$, que es continua por el mismo argumento. De donde, t_a es un homeomorfismo.

Análogamente, h_λ es la composición de $x \longmapsto (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, la primera de ellas es continua de X en $\mathbb{F}$ por un argumento similar al del párrafo anterior, y la segunda es el producto por un escalar en el EVT, por ende h_λ también es continua. Su inversa es $h_\lambda^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x$ que es continua por los mismos motivos, por lo que h_λ es un homeomorfismo. $\square$

Envolvente cerrada absolutamente convexa: La envolvente cerrada absolutamente convexa de A es el subconjunto de X, cerrado, convexo, y balanceado, más pequeño contiene a A. Es fácil ver que este conjunto es:

$$\overline{bc(A)} = \overline{\left\{ x \in X \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \geq 1, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}},$$

que coincide con $\overline{co(bl(A))}$.

Sistema de vecindades de 0 Al conjunto de todas las vecindades de 0 en un EVT X lo llamamos el *sistema de vecindades de* 0 en X, y lo denotamos como $\mathcal{N}(X)$.

Teorema 1.2.1. *[4, Teorema 4.5.1] Sea X un EVT. Toda vecindad de* 0 *es absorbente y existe una base de vecindades de* 0*,* $\mathcal{B}$*, con las siguientes propiedades:*
(i) $V \in \mathcal{B}$ *implica* V *es balanceado*
(ii) Dado $V \in \mathcal{B}$ *existe* $U \in \mathcal{B}$ *tal que* $U + U \subset V$.

Proposición 1.2.2. *Sea X un EVT. Dados $\mathcal{B}$, una base de vecindades del 0 en X y $x_0 \in X$, el conjunto $\{x_0 + V \,|V \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades de x_0 .*

Demostración. Si $V \in \mathcal{B}$, entonces x_0+V es una vecindad de x_0, ya que toda traslación en X es un homeomorfismo. Por otra parte, sea W una vecindad de x_0, el conjunto $-x_0+W$ es una vecindad de cero. Así, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset -x_0+W$, con lo cual $x_0+V \subset W$. □

Conjunto acotado Un subconjunto A de un EVT X se dice que es *acotado* si para cada vecindad del cero V en X, existe $\lambda_V > 0$ tal que $A \subseteq \mu V$, si $|\mu| \geq \lambda_V$. O sea si es absorbido por cada vecindad de 0.

- Equivalentemente, A es acotado si para cada vecindad balanceada V de 0 en X, existe $\lambda_V > 0$ tal que $A \subseteq \lambda_V V$. ([16, Corolario 2.2.10])
- Asimismo, A es acotado si y sólo si dadas una sucesión(x_n) en A y una sucesión (λ_n) en $\mathbb{F}$ tal que $\lambda_n \longrightarrow 0$, se cumple que $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$ ([4, Teorema 6.1.4]).
- El trasladado de cualquier acotado es acotado.

Proposición 1.2.3. *Si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un EVT X converge, entonces la sucesión es acotada.*

Demostración. Supongamos que $x_n \longrightarrow 0$. Dada una vecindad balanceada V del cero, existe $N \geq 1$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq N$; además como V es absorbente, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1} > 0$ tales que $x_i \in \lambda_i V$, con $1 \leq i \leq N-1$. Tomando $\lambda = \text{máx}\,(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1})$ se cumple que $(x_n) \subset \lambda V$; o sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Como todo trasladado de un acotado es acotado, se sigue el resultado. □

Proposición 1.2.4. *Sea X un EVT no nulo y Y un subespacio propio. Entonces* $\text{int}\,(Y) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $x \in \text{int}\,(Y)$. Luego, existe $V \in \mathcal{N}\,(X)$ tal que $x+V \subset Y$, o equivalentemente $V \subset -x+Y = Y$. Como V es absorbente, dado cualquier $z \in X$ existe $\lambda > 0$ tal que $z \in \lambda V \subset \lambda Y \subset Y$, lo que contradice que Y es propio. □

Conjunto denso en ninguna parte Un subconjunto A de un espacio topológico X es llamado *denso en ninguna parte* si $\text{int}\left(\bar{A}\right) = \emptyset$.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico.

(a) Decimos que $A \subset X$ es *de la primera categoría de Baire en X* si A es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. De lo contrario, decimos que A es *de la segunda categoría de Baire* en X.

(b) Decimos que X es un *espacio de Baire* si todo subconjunto abierto de X, distinto del vacío, es de la segunda categoría de Baire en X. Así, si X es un espacio de Baire, entonces es de la segunda categoría en sí mismo.

Teorema 1.2.2. *[4, Teorema 11.7.2]* **(Categoría de Baire)** *Todo espacio (X, d) pseudométrico y completo, es de Baire.*

EVT metrizable Un EVT X es llamado *metrizable* si su topología está dada por una métrica d invariante bajo traslaciones; es decir, $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ si $x, y, z \in X$. Así, $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$ para todo natural n y cualquier $x \in X$.

F-espacio Un EVT X es llamado un *F-espacio* si es metrizable y completo.

Teorema 1.2.3. *Sea X un EVT metrizable. Sea $V \subset X$ un conjunto balanceado. V es una vecindad de 0 si y sólo si absorbe cualquier sucesión en X que converge a 0.*

Demostración. La parte «sólo si» es cierta por la proposición 1.2.3. Para probar la otra, supongamos que V no es vecindad de cero. Entonces V no contiene ninguna bola abierta; de donde, $B_{\frac{1}{n^2}}(0) \nsubseteq V$ para todo $n \geq 1$. Construyamos una sucesión tomando $x_n \in B_{\frac{1}{n^2}}(0)$, con $x_n \notin V$. Entonces $x_n \in \frac{1}{n} B_{\frac{1}{n}}(0)$, o lo que es igual $nx_n \in B_{\frac{1}{n}}(0)$, de donde $nx_n \longrightarrow 0$. Luego, como V absorbe a la sucesión, existe $\lambda > 0$ tal que $nx_n \in \lambda V$ para todo $n \geq 1$. Consideremos ahora $n_0 > \lambda$, y entonces $n_0 x_{n_0} \in \lambda V \subset n_0 V$ por ser V balanceado; pero de la construcción de la sucesión también tenemos que $nx_n \notin nV$ para todo $n \geq 1$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 1.2.4. *[20, Teorema 2.17] Supongamos que $B : X \times Y \to Z$ es una transformación bilineal separadamente continua; es decir las transformaciones lineales $T_a(y) = B(a, y) y$ $T_b(x) = B(x, b)$ definidas en Y y X, respectivamente, son continuas para cada $a \in X$ y $b \in Y$. Si X es un F-espacio, Y es metrizable y Z es un EVT, entonces B es continua.*

Espacio cociente Sea X un EVT y $M \subset X$ un subespacio vectorial. La relación de equivalencia en X dada como $x \sim y$ si $y - x \in M$ determina el *espacio cociente* X/M. La función $\varphi : X \to X/M$ que asocia a cada $x \in X$ su clase de equivalencia $\bar{x} \in X/M$ es llanada el *operador cociente*. El espacio X/M es un EVT con las operaciones: $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ y $\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x}$, y la *topología cociente* τ_Q que está determinada como sigue: U es abierto en la topología cociente si y sólo si $\varphi^{-1}(U)$

es abierto en X. Entonces, φ es un operador lineal, suprayectivo y τ_Q es la máxima topología para la cual φ es continua y con ella φ resulta una función abierta.

Definición 1.2.2. Sean Y un subespacio de un EVT X y Z un complemento algebraico de Y, es decir $X = Y \oplus Z$, como espacios vectoriales. Decimos que Z es complemento topológico de Y si además la función $\phi : (Y \times Z) \longrightarrow Y \oplus Z$, dada como $(y, z) \rightarrow y + z$, es un homeomorfismo.

Teorema 1.2.5. *[4, Teorema 4.9.2] Sean Y un subespacio de un EVT X, y Z un complemento algebraico de Y. Entonces Z es complemento topológico de Y si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(a) La proyección P_Y de Y a lo largo de Z es continua.

Así, Y tiene complemento topológico si y sólo si existe una proyección continua de X sobre Y.

(b) El operador cociente $Z \xrightarrow{\pi} X/Y$ tiene inversa continua. Así, todo complemento topológico de Y es homeomorfo a X/Y

.

1.2.1. Topologías vectoriales (lineales)

En esta subsección suponemos que X es un espacio vectorial.

Una topología τ en X es llamada una *topología vectorial o lineal* si (X, τ) es un espacio vectorial topológico.

Las siguientes dos topologías son vectoriales.

Topología inducida por una norma Sea $|| \cdot || : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma. La topología inducida por la norma es la determinada por la distancia definida como $d(x, y) = \|y - x\|$.

Topología inducida por una familia de seminormas Sea $P = \{p_\alpha\}$ una familia de seminormas definidas en un espacio vectorial X. Obtendremos un EVT asignándole a X una topología natural a partir de la colección P. Consideremos un conjunto finito de seminormas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en P, y sea $\varepsilon > 0$. Definamos para todo $a \in X$:

$$U(a, p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon) = \left\{ x \in X \mid \sup_{1 \leq k \leq n} p_k(x - a) < \varepsilon \right\}$$

La topología en X que tiene a estos conjuntos como base es llamada la *topología inducida por las seminormas* $\{p_\alpha\}$ y se denota usualmente como τ_P.

Los conjuntos $U(0, p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon) = \left\{x \in X \mid \sup_{1\leq k\leq n} p_k(x) < \varepsilon\right\}$ son balanceados, convexos y absorbentes.

Familia de seminormas saturada Se dice que una familia $P = \{p_\alpha\}$ de seminormas está saturada si la seminorma $\max\{p_{\alpha_i}(x) \,|1 \leq i \leq n\}$ pertenece a P para cada subfamilia finita, no vacía, $\{p_{\alpha_1}, ..., p_{\alpha_n}\}$ de P.

Espacios normados A la pareja $(X, ||\cdot||)$, donde $||\cdot||$ es una norma, se le conoce como un espacio normado. A menos que se especifique lo contrario, la topología que consideramos en un espacio normado es la generada por la norma.

Espacio localmente convexo Un EVT es llamado *localmente convexo* si su topología posee una base de vecindades de 0 compuesta por conjuntos convexos.

Teorema 1.2.6. *Un espacio EVT es localmente convexo si y sólo si su topología está inducida por una familia P de seminormas definidas en X. El espacio es de Hausdorff si y sólo si para cada $x \neq 0$ hay una seminorma en la familia P que no se anula en x. En este caso se dice que P es una familia separante de seminormas. La familia P puede tomarse saturada.*

Demostración. Las primeras dos partes son los teoremas [4, Teorema 5.5.1] y [4, Teorema 5.5.2]. Si P es una familia de seminormas que generan la topología de X, entonces dada una subfamilia finita $\{p_1, \ldots p_n\} \subset P$, el conjunto $U(0, p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon)$ es igual al conjunto $U\left(0, \max_{1\leq i\leq n}\{p_i\}, \varepsilon\right)$. Por tanto, la familia $\left\{\max_{p\in Q}\{p\} \mid Q \subset P \text{ finito y no vacío}\right\}$ es saturada y genera la misma topología que la original. $\square$

Teorema 1.2.7. *Sea X un espacio locamente convexo. Existe una base $\mathcal{B}$ de vecindades de 0, con las siguientes propiedades:*

1. $V \in \mathcal{B}$ implica V es absolutamente convexo
2. Dado $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$.

Demostración. Por el teorema anterior existe una familia P de seminormas que induce la topología de X. Los conjuntos de la forma

$$U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon) = \left\{x \in X \mid \max_{1\leq i\leq n} p_i(x) < \varepsilon\right\}$$

donde $n \geq 1, p_k \in P$ y $\varepsilon > 0$, forman una familia $\mathcal{B}$ con las propiedades señaladas. □

Teorema 1.2.8. *Un subconjunto B de un espacio localmente convexo X es acotado si y sólo si $p(B)$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ para toda seminorma p de cualquier familia P de seminormas que define la topología de X.*

Demostración. Sean $p \in P$ y $\mathcal{N}(X)$ el conjunto de vecindades de 0. Supongamos que $B \subset X$ es acotado. Como $U(p,1) \in \mathcal{N}(X)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda U(p,1)$; de donde $p(x) \leq \lambda$ para todo $x \in B$.

Recíprocamente, supongamos que $p(B)$ es acotado para toda $p \in P$ y sea $V \in \mathcal{N}(X)$. Existe $U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon)$ vecindad básica de 0 tal que $U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon) \subset V$. Además, por hipótesis existen $M_1, \ldots M_n > 0$ tales que si $x \in B$, entonces $p_i(x) \leq M_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Tomando $M = \max(M_i)$, tenemos que $p_i\left(\frac{\varepsilon}{2M}x\right) = \frac{\varepsilon}{2M}p_i(x) < \varepsilon$ para toda p_i y $x \in B$. Es decir, $\frac{\varepsilon}{2M}x \in U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon)$. Por lo tanto, $B \subset \frac{2M}{\varepsilon}U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon) \subset \frac{2M}{\varepsilon}V$, como queríamos probar. □

Conjunto bornívoro. Un subconjunto A de un EVT X es llamado *bornívoro* si absorbe a cada conjunto acotado; es decir si $B \subset X$ es acotado, entonces existe $r > 0$ tal que $B \subset \lambda A$ si $|\lambda| \geq r$.

Espacio bornológico Un espacio localmente convexo se llama *bornológico* si todo disco bornívoro es una vecindad de 0.

Teorema 1.2.9. *Todo espacio localmente convexo y metrizable X es bornológico.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.3, basta ver que todo disco bornívoro absorbe a las sucesiones convergentes a cero, lo cual es cierto por la Proposición 1.2.3. □

Barril Un disco absorbente y cerrado en un EVT es llamado un *barril.*

Espacio barrilado Se dice que un espacio localmente convexo es *barrilado* si todo barril es una vecindad de 0.

Teorema 1.2.10. *Todo espacio localmente convexo, metrizable y completo X, es barrilado.*

Demostración. Sea $B \subset X$ un barril. Por ser B absorbente, para cada $x \in X$ podemos encontrar un natural $n \geq 0$ tal que $x \in nB$, de donde $X =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} nB$. Como X es un espacio métrico completo, es de Baire; es decir, no es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte y como B es cerrado, entonces existe algún $n_0 \geq 0$ tal que $\operatorname{int}(n_0 B) \neq \emptyset$. La multiplicación por un escalar es un homeomorfismo, por lo que $\operatorname{int}(B) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \operatorname{int}(B)$, luego existe una vecindad balanceada y convexa de cero V tal que $x_0 + V \subset B$. Como V y B son balanceados, $-x_0 + V \subset B$; por ende, $\frac{1}{2}(x_0 + V) + \frac{1}{2}(-x_0 + V) \subset B$, pues B es convexo; pero $\frac{1}{2}(x_0 + V) + \frac{1}{2}(-x_0 + V) = V$ porque V es convexo, de donde $V \subset B$, es decir, B es una vecindad de cero, como queríamos probar. □

1.2.2. Continuidad de transformaciones

Transformación acotada Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos. Decimos que una función $T : X \longrightarrow Y$ es acotada si $T(B) \subseteq Y$ es acotado siempre que $B \subseteq X$ es acotado.

1.2.2.1. Continuidad de operadores lineales

Teorema 1.2.11. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre EVT. Para las condiciones siguientes.*

1. *T es continuo.*
2. *T es continuo en el 0.*
3. *T es acotado.*

se tiene que 1) y 2) son equivalentes, y cualquiera de ellas implica 3)

Demostración. Que 1) $\Rightarrow$ 2) es inmediato. Para probar 2) $\Rightarrow$ 1) tomemos $x_0 \in X$ y una vecindad W de $T(x_0)$. Existen $V \in \mathcal{N}(Y)$ y $U \in \mathcal{N}(X)$ tales que $T(x_0) + V \subset W$ y $T(U) \subset V$. Entonces $x_0 + U$ es una vecindad de x_0 que satisface: $T(x) \in W$ siempre que $x \in x_0 + U$.

Probaremos ahora que 2) $\Rightarrow$ 3). Sea $B \subset X$ un conjunto acotado. Dada $V \in \mathcal{N}(Y)$, que podemos suponer balanceada, existe $U \in \mathcal{N}(X)$ tal que $T(U) \subset V$, y como B es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda U$. Por tanto, $T(B) \subset T(\lambda U) \subset \lambda V$. □

Teorema 1.2.12. *Cuando X, Y son espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. T es continuo.
2. T es continuo en el 0.

3. T es uniformemente continuo en X.

4. T es acotado.

5. Existe alguna vecindad U de 0 en X tal que $T(U)$ es acotado en Y.

6. Existe un número real no negativo M tal que $||Tx|| \leq M||x||$ para cada $x \in X$.

7. $\sup\{||Tx|| \,|\, x \in B_X\}$ es finito, con B_X la bola unitaria.

Al número $\sup\{||Tx|| \,|\, x \in B_X\}$ *lo llamamos la norma de T, que es denotado como*$\|T\|$*, y se cumple* $||Tx|| \leq \|T\| \, ||x||$ *para todo* $x \in X$.

Demostración. En el Teorema 1.2.11 ya se probó la equivalencia de 1) y 2), y también es inmediato que 3) implica cualquiera de las dos.

2) $\Rightarrow$ 3) Dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|Tz\| < \varepsilon$ si $\|z\| < \delta$. Para $x, y \in X$ hacemos $z = x - y$, y entonces $\|T(x) - T(y)\| = \|T(z)\| < \varepsilon$, cuando $\|x - y\| < \delta$.

Así, las tres primeras afirmaciones son equivalentes.

Por el Teorema 1.2.11, cualquiera de estas tres implica la 4).

4) $\Rightarrow$ 5) La *bola unitaria* B_X, es decir la bola cerrada con centro en cero y radio 1, es una vecindad acotada de 0 y al ser T acotado se tiene que $T(B_X)$ es acotado en Y.

5) $\Rightarrow$ 6) Sean U una vecindad de 0 que cumple 5) y $B_\delta[0] \subset U$. Como $T(U)$ es acotado, existe $M' \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M'$ siempre que $\|x\| \leq \delta$. Para cada $x \neq 0$ tenemos que $\delta \frac{x}{\|x\|} \in B_\delta[0]$ y así, $\left\|T\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M'$, lo que implica que $\|T(x)\| \leq \frac{M'}{\delta}\|x\|$. Esta desigualdad también es válida si $\|x\| = 0$. Por tanto, se cumple 6)

6) $\Rightarrow$ 7) Es inmediato.

7) $\Rightarrow$ 2) Sean $\varepsilon > 0$ y $M = \sup\{||Tx|| \,|\, x \in B_X\}$, entonces $||Tx|| \leq M$ para todo $x \in B_X$. Si $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, entonces $\|x\| < \delta$ implica $\left\|\frac{Mx}{\varepsilon}\right\| < 1$. De donde, $\left\|T\left(\frac{Mx}{\varepsilon}\right)\right\| < M$. Por ende $\|Tx\| < \varepsilon$ cuando $\|x\| < \delta$ y T es continua en 0. □

El espacio normado $B(X, Y)$ La colección de todos los operadores lineales entre dos espacios normados X y Y se denota por $B(X, Y)$ y es un espacio normado con la norma $\|T\| = \sup\{||Tx|| \,|\, x \in B_X\}$. Este espacio es de Banach si y sólo si Y es de Banach.

Teorema 1.2.13. (Banach-Steinhaus) *[4, Teorema 11.9.2] Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F} \subset B(X,Y)$ puntualmente acotado, es decir para cada $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M_x$ para todo $T \in \mathcal{F}$, entonces $\|T\| \leq M$ para algún $M > 0$ y todo $T \in \mathcal{F}$.*

Teorema 1.2.14. *Cuando (X, τ_P) y (Y, τ_Q) son espacios localmente convexos y $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es continua.*
2. *Para cada $q \in Q$ existen $n \geq 1$, $p_1, ..., p_n \in P$ y $M > 0$ tales que $q(T(x)) \leq M \operatorname{máx}\{p_1(x), ..., p_n(x)\}$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos primero que T es continua. Sea $q \in Q$ y tomemos la vecindad del cero $V = \{y \in Y \,| q(y) < 1\}$. Por la continuidad de T en 0, existen $\delta > 0$ y $p_1, \ldots, p_n \in P$ tales que $q(T(x)) < 1$ si $p_i(x) < \delta$ para $1 \leq i \leq n$. Sean $x \in X$, y $r > 0$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} & p_i\left(\frac{\delta x}{\operatorname{máx}\{p_1(x),...,p_n(x)\}+r}\right) & < \delta \\ \Rightarrow & q\left(T\left(\frac{\delta x}{\underset{1\leq i\leq n}{\operatorname{máx}}\{p_i(x)\}+r}\right)\right) & < 1 \\ \Rightarrow & q(T(x)) & < \dfrac{1}{\delta}(\operatorname{máx}\{p_i(x)\} + r) \end{array}$$

Al hacer tender r a 0, obtenemos $q(T(x)) < \frac{1}{\delta} \underset{1\leq i\leq n}{\operatorname{máx}} \{p_i(x)\}$ Por tanto, para $M = \frac{1}{\delta}$ se satisface la desigualdad a demostrar.

Para ver que 2) implica 1), tomamos una vecindad básica de cero arbitraria, $V = \{y \,| q_1(y) < \varepsilon, \ldots, q_m(y) < \varepsilon\}$. Para cada q_i existen $M_i > 0$ y $p_1^{(i)}, \ldots, p_{n_i}^{(i)} \in P$, tales que $q_i(T(x)) \leq M_i \operatorname{máx}\left\{p_1^{(i)}(x), \ldots, p_{n_i}^{(i)}(x)\right\}$, para todo $x \in X$. Por tanto, si $x \in U = \left\{x \in X \,\middle|\, p_j^{(i)}(x) < \delta_i; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\right\}$, donde $\frac{\varepsilon}{\underset{1\leq i\leq m}{\operatorname{máx}}\{M_i\}} = \delta_i$, entonces $q_i(T(x)) < \varepsilon$ para cada $1 \leq i \leq m$. Así, T es continua en 0 y por consiguiente, en X. □

1.2.2.2. Continuidad de funcionales lineales

Para cuando el codominio de un operador lineal es el campo $\mathbb{F}$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.15. *(Funcionales lineales continuas) Supongamos que x^* es una funcional lineal en un EVT X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La funcional x^* es continua.*
2. *Existe una vecindad U de 0 en X tal que $x^*(U)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{F}$.*
3. *El núcleo, $\ker x^*$, de x^* es un subconjunto cerrado de X.*
4. *$\ker x^*$ **no** es un subespacio propio y denso de X.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Existe $U \in \mathcal{N}(X)$ tal que $|x^*(x)| < 1$ para todo $x \in U$, por lo que U satisface 2)

2) $\Rightarrow$ 1) Para ver el regreso basta probar que x^* es continua en 0. Sean $\varepsilon > 0$, $U \in \mathcal{N}(X)$ y $M > 0$ tales que $|x^*(x)| < M$, siempre que $x \in U$. Si $x \in \frac{\varepsilon U}{M}$, entonces $\frac{Mx}{\varepsilon} \in U$ y $|x^*(x)| < \varepsilon$.

1) $\Rightarrow$ 3), $\ker x^*$ es la imagen inversa de $\{0\}$ bajo x^*.

3) $\Rightarrow$ 4) Si $x^* = 0$, entonces $\ker x^*$ es todo X, así que no es un subespacio propio. Si $x^* \neq 0$ entonces $\overline{\ker x^*} = \ker x^* \neq X$, por lo que $\ker x^*$ no es denso en X.

4) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que 2) no es cierto. Entonces $x^* \neq 0$ y $\ker x^*$ es un subespacio propio de X. Tomemos $x_0 \notin \ker x^*$. Sea U cualquier vecindad de x_0 y $V \in \mathcal{N}(X)$ balanceada tal que $x_0 + V \subset U$. Como no se cumple 2), existe $y \in V$ tal que $|x^*(y)| > |x^*(x_0)| > 0$. Tomemos $\lambda > 1$ tal que $|x^*(y)| = \lambda |x^*(x_0)|$. Existen escalares tales que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ y $\lambda_1 x^*(y) = \lambda\lambda_2 x^*(x_0)$, De donde, $x^*(x_0) = x^*\left(\frac{\lambda_1 y}{\lambda\lambda_2}\right)$. Sea $x_1 = \frac{\lambda_1 y}{\lambda\lambda_2}$, entonces $-x_1 \in V$ porque $\left|-\frac{\lambda_1}{\lambda\lambda_2}\right| = \frac{1}{\lambda} < 1$. Así, $x_0 - x_1 \in x_0 + V$. Por otra parte, $x^*(x_0 - x_1) = 0$, o sea, $x_0 - x_1 \in \ker x^*$. Esto prueba que $\ker x^*$ es un subespacio propio y denso de X, lo cual contradice 4). □

Teorema 1.2.16. Hahn-Banach (espacios normados) *[4, Teorema 7.4.1] Supongamos que y^* es una funcional lineal acotada definida en un subespacio Y de un espacio normado X. Entonces existe una funcional lineal acotada x^* definida en todo X tal que $||x^*|| = ||y^*||$ y la restricción de x^* a Y es y^*. En otras palabras, la funcional y^* se puede extender a una funcional lineal acotada en X que tiene la misma norma.*

Teorema 1.2.17. Hahn-Banach (espacios localmente convexos) *[8, Proposición 1 3§1] Supongamos que y^* es una funcional lineal continua definida en un subespacio Y de un espacio localmente convexo X. Entonces existe una funcional lineal continua x^* definida en X tal que la restricción de x^* a Y es la funcional y^*.*

Corolario 1.2.1. *[8, Proposición 2 3§1]* Sea Y un subespacio cerrado de un espacio localmente convexo X y que $x_0 \in X \diagdown Y$. Entonces existe una funcional lineal continua x^* definida en X tal que $x^*(x_0) = 1$ y la restricción de x^* a Y es la funcional cero.

1.2.2.3. Continuidad de seminormas

Teorema 1.2.18. *Una seminorma $p : X \longrightarrow [0, \infty)$, en un EVT X, es continua si y sólo si es continua en 0.*

Demostración. Sólo hay que probar que la continuidad en 0 implica la continuidad en X. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(X)$ tal que $|p(x)| < \varepsilon$ si $x \in V$. Sea $x_0 \in X$ y consideremos su vecindad $x_0 + V$. Dado $x \in x_0 + V$, tenemos que $|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \varepsilon$, donde la última desigualdad se tiene porque $x - x_0 \in V$. Por lo tanto, p es continua en cualquier $x_0 \in X$. $\square$

Corolario 1.2.2. *Una seminorma $p : X \longrightarrow [0, \infty)$, en un EVT X, es continua si y sólo $V = \{x \in X \,|p(x) < 1\}$ es una vecindad de 0.*

Demostración. Si p es continua, claramente V es una vecindad de cero, pues es la imagen inversa del abierto $[0, 1)$ de $[0, \infty)$. Ahora sea $\varepsilon > 0$. Como V es vecindad de cero también lo es εV, y para todo $\varepsilon x \in \varepsilon V$ se cumple que $p(\varepsilon x) = \varepsilon p(x) < \varepsilon$, es decir, p es continua en 0. $\square$

De manera similar a como se probó el Teorema 1.2.14 se puede demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.5. *Sea (X, τ_P) un espacio localmente convexo. Una seminorma $q : (X, \tau_P) \longrightarrow [0, \infty)$ es continua si y sólo si existen $n \geq 1$, $p_1, ..., p_n \in P$ y $M > 0$ tales que $q(x) \leq M \max\{p_1(x), ..., p_n(x)\}$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.2.19. *Si P_c es la familia de todas las seminormas continuas en un espacio localmente convexo (X, τ_P), entonces $P \subset P_c$ y $\tau_P = \tau_{P_C}$.*

Demostración. Por el Corolario 1.2.2, toda seminorma en P es continua en X, es decir $P \subset P_c$, por lo que $\tau_P \subset \tau_{P_C}$. Para la otra contención, probaremos que $Id : (X, \tau_P) \longrightarrow (X, \tau_{P_C})$ es continua. Sea $q \in P_C$, por ser $q : (X, \tau_P) \longrightarrow [0, \infty)$ continua, existen $M > 0$ y $p_1, \ldots, p_n \in P$ tales que $q(x) \leq M \max\limits_{1 \leq i \leq n} (p_i(x))$, para todo $x \in X$; pero $q(Id(x)) = q(x)$, por lo que la desigualdad anterior demuestra la continuidad de la identidad (Teorema 1.2.14). $\square$

Corolario 1.2.3. *Sea (X, τ_P) un espacio localmente convexo. Una seminorma $q : (X, \tau_P) \longrightarrow [0, \infty)$ es continua si y sólo si existe una seminorma continua p en X tal que $q(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. El resultado se sigue de la Proposición 1.2.5 y el teorema anterior, ya que si $n \geq 1$, $p_1, ..., p_n \in P$ y $M > 0$, entonces $p(x) = M \max\limits_{1 \leq i \leq n} (p_i(x))$ es una seminorma continua en X. $\square$

Corolario 1.2.4. *Sea (X, τ_P) un espacio localmente convexo. Una base de vecindades del cero para la topología τ_{P_C} dada por todas las seminormas continuas en X, está formada por los conjuntos de la forma $\{x \,| p(x) < 1\}$, con $p \in P_C$.*

Demostración. Sea $U = \left\{ x \in X \,| \max\limits_{1 \leq i \leq n} (p_i(x)) < \varepsilon \right\}$ una vecindad básica del cero en τ_{P_C}. La funcional $\frac{1}{\varepsilon} \max\limits_{1 \leq i \leq n} (p_i(x))$ es una seminorma continua en X. Si definimos $q(x) = \frac{1}{\varepsilon} \max\limits_{1 \leq i \leq n} (p_i(x))$, entonces $\{x \,| q(x) < 1\} \subset U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon)$, lo que prueba el corolario. $\square$

Teorema 1.2.20. *Sea X un espacio localmente convexo y P una familia de seminormas que definen su topología. Un operador lineal $T : Y \to X$, definido en un EVT Y es continuo si y sólo si $p \circ T$ es continuo para cada $p \in P$.*

Demostración. Si T es continua, claramente $p \circ T$ es continua para toda $p \in P$, pues las seminormas de la familia P son continuas en la topología que definen (Corolario 1.2.2). Supongamos ahora que $p \circ T$ es continua para cada $p \in P$; basta probar que T es continua en 0. Tomemos una vecindad básica de 0, $U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon)$. Por hipótesis, existen vecindades de 0, $V_1, \ldots V_n$, en Y tales que $p_i \circ T(V_i) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Para cualquier $x \in V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$, tenemos que $p_i(T(x)) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$; es decir, $T(V) \subset U(p_1, p_2, \ldots p_n, \varepsilon)$, lo que prueba que T es continua en 0. $\square$

1.2.2.4. Las F-normas y los espacios localmente convexos y metrizables

Teorema 1.2.21. *Un espacio localmente convexo X es metrizable si y sólo si su topología está generada por una sucesión creciente de seminormas $q_1 \leq \ldots \leq q_n \leq \ldots$. cuyos términos forman una familia separante de seminormas.*

Demostración. Supongamos primero que X es metrizable. En especial es un espacio de Hausdorff y cualquier familia de seminormas que defina su topología debe ser separante. Sean P_c la familia de seminormas continuas en X, y d una métrica que genera su topología; luego, el conjunto $B = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(0) \,|n \geq 1 \right\}$ es una base de vecindades del cero. Por tanto, existe $p_1 \in P_c$ tal que $p_1(x) < 1$ implica $x \in B_1(0)$. Existe $n_1 \geq 1$ tal que si $x \in B_{\frac{1}{n_1}}(0)$, entonces $p_1(x) < 1$; por otra parte, existe $p_2 \in P_c$ tal que $p_2(x) < 1$ implica $x \in B_{\frac{1}{n_1}}(0)$. Así, $p_1(x) < 1$ siempre que $p_2(x) < 1$. Procediendo inductivamente, obtenemos: una sucesión (p_n) en P_c tal que:

(i) $p_n(x) < 1$ siempre que $p_{n+1}(x) < 1$, y

(ii) $x \in B_{\frac{1}{n_k}}(0)$ si $p_{k+1}(x) < 1$,

con $n_k \geq k$, para todo $k \geq 1$. De (i) se sigue que $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y $n \geq 1$. O sea, la sucesión de seminormas así definida es creciente, y determina una topología τ_Q que es claramente más débil que la dada por P_c. Veremos que coinciden.

Sea $p \in P_c$; existe $r > 0$ tal que si $y \in B_r(0)$, entonces $p(y) < 1$, y existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{n_k} < r$. Por (ii) y lo anterior, tenemos que $p_{k+1}(x) < 1$ implica $p(x) < 1$. Entonces $p(x) \leq p_{k+1}(x)$ para todo x, y por tanto τ_Q es más fuerte que la topología dada por P_c, como queríamos probar.

Ahora supongamos que la topología τ de X está dada por las seminormas $p_1 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$. y que ellas forman una familia separante. Definimos, para $x, y \in X$:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{p_n(x-y)+1}$$

que claramente es una métrica invariante bajo traslaciones

Afirmamos que d define la topología τ. Llamemos τ_d a la topología dada por d, y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos la bola abierta $B_\varepsilon(0)$ con centro en 0 y radio $\varepsilon > 0$. Existe $N \geq 1$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por consiguiente, si $p_N(x) < \frac{\delta}{1-\delta}$, con $0 < \delta < min\big(1, \frac{\varepsilon}{2}\big)$, entonces $d(x,0) < \varepsilon$. Esto prueba que $\tau_d \subset \tau$

Tomemos ahora la τ-vecindad $\{x \in X \,|\, p_n(x) < \varepsilon\}$, con$n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$. Notemos que $p_n(x) < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{p_n(x)}{p_n(x)+1} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Entonces, $d(x,0) < \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$ implica $\frac{p_n(x)}{p_n(x)+1} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Es decir, $\tau \subset \tau_d$. □

En la demostración del teorema anterior, usamos un caso particular del siguiente hecho: Si (p_n) es una sucesión de seminormas en un espacio vectorial X que forman una familia separante, entonces la función

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{p_n(x-y)+1}$$

es una distancia invariante bajo traslaciones.

Por otra parte, la función real no negativa definida como

$$\|x\|_F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{p_n(x)+1}$$

satisface las siguientes propiedades para $x, y \in X$:

1. $\|x\|_F = 0$ si y sólo si $x = 0$
2. $\|\lambda x\|_F \leq \|x\|_F$ si $|\lambda| \leq 1$
3. $\|x+y\|_F \leq \|x\|_F + \|y\|_F$
4. $\|\lambda_n x\|_F \to 0$ cuando $n \to \infty$, si (λ_n) es una sucesión escalar que converge a 0

Además, $\|x-y\|_F = d(x,y)$.

La propiedad (1) es bastante clara, y para comprobar (2) y (3), basta recordar que para cualesquiera dos reales no negativos, a y b, se cumple: $a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} \leq \frac{b}{b+1}$. Ahora probaremos (4). Sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{1}{2^k}\frac{|\lambda_n| p_k(x)}{|\lambda_n| p_k(x)+1} < \frac{1}{2^k}$ para todo $k \geq 1$ y todo $n \geq 1$, existe $K \geq 1$ tal que $\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|\lambda_n| p_k(x)}{|\lambda_n| p_k(x)+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, tenemos que $\|\lambda_n x\|_F < \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}\frac{|\lambda_n| p_k(x)}{|\lambda_n| p_k(x)+1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Como

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \frac{|\lambda_n|\, p_k(x)}{|\lambda_n|\, p_k(x)+1} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, existe $N \geq 1$ tal que $\|\lambda_n x\|_F < \varepsilon$ si $n \geq N$ y se cumple (4).

A cualquier función real no negativa $\|\cdot\|_F$ definida en X que cumpla de (1) a (4), se le llama una *F-norma*. Es fácil ver que $d(x,y) = \|x-y\|_F$ es una distancia en X invariante bajo traslaciones, siempre que $\|\cdot\|_F$ es una F-norma en X. La *topología generada por una F-norma* es, por definición, la determinada por esta distancia.

Como consecuencia de las propiedades características de una F-norma tenemos las siguientes:

6. $\|\lambda x\|_F \leq \left\|\lambda' x\right\|_F$ si $|\lambda| < \left|\lambda'\right|$ (se sigue de (2))

7. Dados un escalar λ y un natural $N > |\lambda|$ se cumple: $\|\lambda x\|_F \leq N\,\|x\|_F$ (se sigue de (6) y (3))

Proposición 1.2.6. *Un espacio vectorial con la topología generada por una F-norma $\|\cdot\|_F$ es un EVT.*

Demostración. Continuidad del producto por un escalar. Supongamos que $\lambda_n \to \lambda$ y $x_n \to x$. Existe, por (6) y (7), un natural N tal que si $n > N$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n x_n - \lambda x\|_F &\leq \|(\lambda_n - \lambda)(x_n - x)\|_F + \|\lambda(x_n - x)\|_F + \|(\lambda_n - \lambda)x\|_F \\
&\leq \|(x_n - x)\|_F + N\,\|(x_n - x)\|_F + \|(\lambda_n - \lambda)x\|_F .
\end{aligned}$$

Como cada sumando tiende a 0, concluimos que $\|\lambda_n x_n - \lambda x\|_F \to 0$.

Continuidad de la suma. Por la propiedad (3), $\|x_n + y_n - (x+y)\|_F \to 0$ si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ en X. □

A partir del Teorema 1.2.21 y lo recién visto, tenemos los siguientes dos resultados.

Corolario 1.2.5. *Si un espacio localmente convexo X es metrizable, entonces su topología está generada por una F-norma en X.*

Proposición 1.2.7. *Supongamos que X es localmente convexo y metrizable, y M es un subespacio cerrado de X . Entonces $(X/M, \tau_Q)$ es localmente convexo y metrizable.*

Demostración. La topología cociente τ_Q es localmente convexa, ya que si U es una τ_Q -vecindad de 0, entonces $\varphi^{-1}(U)$ es una vecindad de 0 en X, por lo que contiene una vecindad convexa V de 0 en X. Entonces, $\varphi(V)$ es una vecindad convexa de 0 en Q y está contenida en U. O sea, τ_Q tiene una base de vecindades de 0 formada por convexos.

Sabemos que la topología de X está generada por una F-norma $\|\cdot\|_F$. Afirmamos que

$$\|\overline{x}\|_Q = \underset{z\in M}{inf}\,\|x+z\|_F = dist\,(x, M) = \underset{\overline{y}=\overline{x}}{inf}\,\|y\|_F$$

es una F-norma en $Q = A \diagup I$. Sólo comprobaremos la propiedad (4). Si (λ_n) es una sucesión escalar que converge a 0 y $\overline{x} \in Q$, entonces $0 \leq \|\lambda_n \overline{x}\|_Q \leq \|\lambda_n x\|_F$; de donde, $\|\lambda_n x\|_F \to 0$.

Veremos ahora que la topología $\tau_{\bar{d}}$ determinada por la distancia $\bar{d}$ inducida por $\|\cdot\|_Q$ coincide con la topología cociente τ_Q.

Sea $U \in \mathcal{N}(\mathcal{Q})$, entonces $\varphi^{-1}(U)$ es una vecindad de 0 en X y por tanto, existe, $\delta > 0$ tal que $\|y\|_F < \delta$ implica $\bar{y} \in U$. Si $\|\bar{x}\|_Q < \delta$, entonces $\|x + z\|_F < \delta$ para algún $z \in M$ y por consiguiente, $\bar{x} \in U$. Es decir, $B_\delta^Q(0) \subset U$. Esto prueba que toda τ_Q-vecindad de 0 lo es también en la $\tau_{\overline{d}}$-topología.

Recíprocamente, si $B_\varepsilon(0)$ es una bola abierta para la distancia $\overline{d}$, entonces $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(0)) = \left\{x \in X \,\middle|\, \|\overline{x}\|_Q < \varepsilon\right\} = \{x \in X \,|dist\,(x, M) < \varepsilon\}$, es un abierto en (X, d) y así $B_\varepsilon(0)$ es una vecindad abierta de 0 en τ_Q. O sea, toda $\tau_{\overline{d}}$-vecindad de 0 lo es también en la τ_Q-topología. □

1.2.2.5. Relación entre la noción de espacio bornológico y la continuidad de transformaciones

Teorema 1.2.22. *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo X. Las siguientes son condiciones equivalentes:*

(a) X es bornológico

(b) Toda seminorma acotada en X es continua.

(c) Toda transformación lineal acotada $T : X \to Y$, donde Y es un espacio localmente convexo, es continua.

Demostración. Probaremos primero que (a) implica (b). Sean $B \subset X$ acotado y p una seminorma en X acotada. Tomemos $V = \{x\,|p(x) < 1\}$. Por el Corolario 1.2.2, sólo hay que probar que V es una vecindad del cero; para lo basta ver que el disco V es bornívoro. Por ser B y p acotados, sabemos que existe $M > 0$ tal que $p(x) < M$ para todo $x \in B$, es decir $p\left(\frac{x}{M}\right) < 1$. Así, $\frac{1}{M}B \subset V$, o lo que es igual $B \subset MV$, y por tanto, V es bornívoro.

Probemos ahora que (b) implica (c). Sea q una de las seminormas que definen la topología de Y; afirmamos que $q \circ T$ es una seminorma acotada en X. Claramente es una seminorma, pues q lo es y T es lineal. Si $B \subset X$ es acotado, entonces $T(B) \subset Y$ es acotado, por ende existe $M > 0$ tal que $q(T(B)) \leq M$, lo que prueba nuestra afirmación. Entonces, $q \circ T$ es continua por hipótesis, por lo que T es continua por el Teorema 1.2.20.

Por último supongamos (c) y probemos que X es bornológico. Sea V un disco bornívoro y sea p_V su funcional de Minkowski, la cual es una seminorma. Sea τ la topología de X, y consideremos la siguiente función entre espacios localmente convexos:

$$Id : (X, \tau) \longrightarrow (X, \{p_V\})$$

Sabemos que el operador Id es lineal y afirmamos que es acotado. Sea $B \subset X$ acotado. Por ser V bornívoro, existe $\lambda > 0$ tal que $B \subset \lambda V$, y entonces $p_V(x) \leq \lambda$ para todo $x \in B$, o sea, B es p_V-acotado, lo que prueba nuestra afirmación. Entonces, por la hipótesis, Id es continua. Sabemos que $\{x \in X \,|p_V(x) < 1\}$ está contenido en V y es una vecindad abierta del 0 en la topología dada por p_V. Por la continuidad de Id, es también una τ-vecindad abierta contenida en V, y concluimos que V es vecindad de cero. Así, queda probado que X es bornológico. □

1.3. Topologías débiles

El espacio dual topológico Sea X un EVT. El *espacio dual topológico* de X, denotado como X^*, es el espacio vectorial de todas las funcionales lineales continuas en X. En el caso de que X es un espacio normado $X^* = B(X, \mathbb{F})$.

La inmersión canónica de X en X^{**} Sea X un espacio normado y $\hat{\cdot}$ el operador de X en X^{**}definido como $x \to \hat{x}$, donde $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Este operador es una isometría lineal y es llamado la *inmersión canónica de X en X^{**}*.

Compleción de un espacio normado Si X es un espacio normado, entonces la cerradura $Cl(\hat{X})$ de la imagen $\hat{X}$ de X en X^{**} es un espacio de Banach. Por tanto, $Cl(\hat{X})$ es «la» compleción de X.

Topología débil La topología débil en un EVT X determinada por un subconjunto no vacío $Y \subset X^*$, denotada por $\sigma(X, Y)$, es la topología determinada por la familia de todas las seminormas de la forma $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ con $x^* \in Y$ y $x \in X$. Así $V \subset X$ es $\sigma(X, Y)$-*abierto* o *débilmente abierto* si para cada $a \in V$ existen $x_1^*, \ldots, x_n^* \in Y$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

$$U(a, x_1^*, \ldots, x_n^*) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \underset{1 \leq k \leq n}{max} |x_k^*(x - a)| < \varepsilon \right\} \subseteq V$$

En otras palabras, la topología débil $\sigma(X, Y)$ es la topología más pequeña en X para la que todo elemento de Y es continuo. Cuando

$Y = X^*$, entonces la topología $\sigma(X, Y) = \sigma(X, X^*)$ es llamada simplemente la ***topología débil*** de X y se denota por w.

La topología débil de un EVT (X, τ) es más gruesa que la original, ya que $\{x \in X \,|max_{1 \leq i \leq n}|x_i^*(x-a)| < \varepsilon\} \in \tau$ si x_k^* es una funcional lineal continua en X para cada $1 \leq k \leq n$ y $a \in X$. Por tanto, todo τ-acotado es w-acotado. Los siguientes dos resultados nos dan el inverso de éste en dos clases de espacios: la primera contenida en la segunda, pero damos el resultado para ambas, pues la prueba del primero caso nos sirve para probar el segundo.

Teorema. Un subconjunto de un espacio normado es acotado si y sólo si es w-acotado.

Demostración. Supongamos que $B \neq \emptyset$ es w-acotado. Así, para cada $x^* \in X^*$ existe $M_{x^*} > 0$ tal que $p_{x^*}(x) = |x^*(x)| \leq M_{x^*}$ para todo $x \in B$. Consideremos la inmersión canónica $\hat{\cdot} : X \longrightarrow X^{**}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \{\hat{x} \in X^{**} \,|x \in B\} \\ &\subset \{\hat{x} \in X^{**} \,||\hat{x}(x^*)| \leq M_x\}. \end{aligned}$$

Es decir, dada $x^* \in X^*$, $|\hat{x}(x^*)| = |x^*(x)| \leq M_{x^*}$ para todo $\hat{x} \in \hat{B}$. Luego, por el teorema de Banach-Steinhaus (1.2.13), existe $M > 0$ tal que $\|\hat{x}\| = \|x\| \leq M$, para todo $x \in B$. $\square$

Teorema 1.3.1. *Un subconjunto de un espacio localmente convexo es acotado si y sólo si es w-acotado.*

Demostración. Supongamos que $B \subset X$ es w-acotado. Así, $\sup_{x \in B} |x^*(x)| < \infty$, para todo $x^* \in X^*$. Sean p cualquier seminorma continua en X, $K_p = \{x \in X \,|p(x) = 0\}$ y $X_p = X/K_p$. Afirmamos que la funcional definida como $\|\bar{x}\|_{X_p} := p(x)$ para $\bar{x} \in X_p$ es una norma. Para ver que está bien definida, observamos que si $x \sim y$, entonces $x - y \in K_p$; es decir $p(x-y) = 0$, lo que implica que $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) = 0$, de donde obtenemos que $p(x) = p(y)$. Las propiedades: desigualdad del triángulo y homogeneidad absoluta se tienen porque p es una seminorma. Si $\|\bar{x}\|_{X_p} = 0$, entonces $p(x) = 0$, por lo que $x \in K_p$, o lo que es lo mismo $\bar{x} = 0$. Ahora consideremos $\pi : X \longrightarrow X_p$ la aplicación cociente, la cual es continua por la definición de $\|\bar{x}\|_{X_p}$ y el Teorema 1.2.14. Sean $B_p = \pi(B)$, $\overline{X_p}$ la compleción de X_p y $y^* \in \overline{X_p}^*$. Notemos que la composición $X \xrightarrow{\pi} X_p \overset{\iota}{\hookrightarrow} \overline{X_p} \xrightarrow{y^*} \mathbb{F}$ pertenece a X^*, y entonces $\sup_{x \in B} |y^*(\bar{x})| = \sup_{x \in B} |y^* \circ \iota \circ \pi(x)| < \infty$. Por tanto, $\{\bar{x} \,|x \in B\}$ es w-acotado en $\overline{X_p}$ y por el teorema anterior es acotado en la norma $\|\cdot\|_{X_p}$. De donde $p(B)$ es acotado y por el Teorema 1.2.8, B es acotado en X. $\square$

Topología débil* Sea X un espacio normado y Q la inmersión canónica de X en X^{**}. La topología débil determinada en X^* por $Q(X) \subset X^{**}$ es llamada la *topología débil* de* X^*, denotada por w^* o $\sigma(X^*, X)$. En otras palabras, la topología débil* del dual de un espacio normado X es la topología más pequeña para X^* tal que cada funcional lineal $\hat{x}$ es continua . La familia de todas las seminormas de la forma $p_{\hat{x}}(x^*) = |x^*(x)|$, con $x \in X$, y toda $x^* \in X^*$ induce la topología w^*.

Teorema de Alaoglu [4, Teorema 8.4.1] Sea X un espacio normado. Entonces B_{X^*} es $w*$-compacto.

Los espacios de Banach ℓ^1 y ℓ^∞ El espacio de *sucesiones absolutamente sumables*, denotado por ℓ^1, es el conjunto de sucesiones en $\mathbb{F}$ que definen series absolutamente convergentes:

$$\ell^1 = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{F} \left| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right. \right\}$$

La suma y el producto por un escalar se definen entrada por entrada, y la topología está dada por la norma

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, .$$

El espacio de *sucesiones acotadas*, denotado por ℓ^∞, es el conjunto de las sucesiones (z_n) en $\mathbb{F}$ tales que $|z_n| < M$ para algún $M > 0$ y para todo $n \geq 1$. Consideramos en este espacio también las operaciones lineales definidas entrada por entrada, y su topología está dada por la norma

$$\|(z_n)\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |z_n| \, .$$

El dual de ℓ^1 Podemos identificar el dual de ℓ^1con ℓ^∞, ya que cada funcional lineal continua z^*en ℓ^1 es de la forma

$$z^*((x_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n x_n,$$

donde $(z_n) \in \ell^\infty$, y se cumple la igualdad$\|x^*\| = \|(z_n)\|_\infty$.

Teorema de Schur [7, Teorema 5.19] Una sucesión en ℓ^1 converge a x en la norma si y sólo si converge a x en la topología débil w.

Capítulo 2

Álgebras topológicas

Como su nombre indica, en este capítulo se desarrollarán los conceptos necesarios para estudiar las álgebras topológicas. Algunos de estos resultados son exclusivos del área de las álgebras, como los de espectro o Q-álgebra, y otros son generalizaciones de lo ya visto para espacios vectoriales.

En todo el capítulo supondremos que A es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$. Escribimos (A, τ) para señalar que en A estamos tomando la topología τ. Si A tiene idéntico, éste se denota como e.

2.1. Invertibilidad

Supongamos que A tiene idéntico. Se dice que $x \in A$ es invertible si existe $y \in A$ tal que $xy = yx = e$. En tal caso, y es llamado el inverso de x. De modo similar se define cuándo x es invertible por la izquierda y por la derecha y las nociones de inverso izquierdo y derecho. Si un elemento x tiene inversos derecho e izquierdo, entonces estos coinciden y son el inverso de x.

El subgrupo multiplicativo $G(A)$ Supongamos que A tiene idéntico. Entonces $G(A) = \{x \in A \,|x \text{ es invertible}\}$ es un grupo multiplicativo con el producto heredado de A.

Definición 2.1.1. Supongamos que A tiene idéntico. Definimos el espectro de $x \in A$ como $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{F} \,|x - \lambda e \notin G(A)\}$, que puede ser el conjunto vacío, y el radio espectral en x como

$$r(x) = \sup \{|\lambda| \,|\lambda \in \sigma(x)\}$$

donde $\sup \emptyset = 0$ y el supremo vale ∞ si $\sigma(x)$ no es acotado.

El radio espectral es positivo homogéneo, es decir:

$$r(\alpha x) = \alpha r(x)$$

para todo $x \in A$ y $\alpha \geq 0$, ya que para $\alpha > 0$, $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $\alpha\lambda \in \sigma(\alpha x)$.

Definición 2.1.2. Una funcional lineal $\varphi : A \to \mathbb{F}$ es llamada un carácter o multiplicativa si satisface la propiedad multiplicativa: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todo $x, y \in X$.

Toda funcional multiplicativa φ no idénticamente cero en un álgebra, A con idéntico, cumple que $\varphi(e) = 1$ y $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para todo $x \in A$.

Al conjunto de todas las funcionales lineales multiplicativas en A distintas de la funcional cero se le denota por $M^{\#}(A)$. Así

$$\left\{ f(x) \,|\, f \in M^{\#}(A) \right\} \subset \sigma(x).$$

2.2. Álgebras semitopológicas y topológicas

Producto algebraico de conjuntos Para $B, C \subset A$ definimos su *producto algebraico* como $BC = \{xy \,|x \in B, y \in C\}$. Si $B = \{x\}$, escribimos el producto BC como xC, en lugar de $\{x\}C$.

Definición. Se dice que A con una topología τ es un álgebra topológica si con ella es un EVT y el producto $\underset{(a,b)}{A \times A} \underset{\to}{\to} \underset{ab}{A}$ es una función continua. En tanto que decimos que el álgebra (A, τ) es semitopológica cuando es un EVT y el producto es sólo continuo en cada variable; es decir, cuando los endomorfismos lineales $L_a : \underset{x}{A} \underset{\to}{\to} \underset{ax}{A}$ y $R_a : \underset{x}{A} \underset{\to}{\to} \underset{xa}{A}$ son continuos para cada $a \in A$.

Teorema 2.2.1. *Supongamos (A, τ) es un EVT. Entonces (A, τ) es un álgebra topológica si y sólo si el producto es continuo en $(0, 0)$.*

Demostración. Sólo es necesario probar la parte «si». Sean $x_0, y_0 \in A$ y $V \subset A$ una vecindad del cero. Buscamos $U_1 \in \mathcal{N}(A)$ tal que:

$$\begin{aligned} (x_0 + U_1)(y_0 + U_1) &\subset x_0 y_0 + V, \text{ o sea,} \\ x_0 U_1 + U_1 y_0 + U_1 \cdot U_1 &\subset V \end{aligned}$$

Por la continuidad de la suma en A existe $W \in \mathcal{N}(A)$ tal que $W + W + W \subset V$, y por la continuidad del producto en $(0,0)$ existe $U \in \mathcal{N}(A)$ tal que $U \cdot U \subset W$. y podemos suponer que tanto U como W son conjuntos balanceados. Existe $\lambda > 1$ tal que $x_0 \in \lambda U$ y $y_0 \in \lambda U$. Así,

$$\begin{aligned} x_0 \frac{1}{\lambda} U + \frac{1}{\lambda} U y_0 + \frac{1}{\lambda^2} U \cdot U &\subset U \cdot U + U \cdot U + \frac{1}{\lambda^2} U \cdot U \\ &\subset W + W + \frac{1}{\lambda^2} W \\ &\subset W + W + W \\ &\subset V \end{aligned}$$

Por lo que $U_1 := \frac{1}{\lambda} U$ es una elección adecuada para la vecindad buscada.

$\square$

2.2.1. Q-álgebras

Definición 2.2.1. Se dice que un álgebra semitopológica A con idéntico es una Q-álgebra si $G(A) = \{x \in A \,|x \text{ es invertible}\}$ es un abierto de A.

Proposición 2.2.1. *Sea A un álgebra semitopológica con idéntico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) A es una Q-álgebra

(b) e está en el interior ($intG(A)$) de $G(A)$

(c) $\text{int}G(A) \neq \emptyset$

(d) El conjunto $S(G) = \{x \in A \,|r(x) \leq 1\}$ es una vecindad de 0.

Demostración. Comenzaremos probando la equivalencia de las primeras tres afirmaciones. Es claro que (a) implica (b) porque e es invertible y por (a), $G(A) = \text{int}G(a)$. También es inmediato que (b) implica (c).

Supongamos que $\text{int}G(A) \neq \emptyset$. Sean $y \in G(A)$ cualquier invertible y $x \in \text{int}G(A)$. Consideremos la función $w \longmapsto (yx^{-1})\, w$; ésta es un homeomorfismo en A pues su inversa es $w \longmapsto (xy^{-1})\, w$, y ambas son continuas al ser A un álgebra semitopológica. Tomemos un abierto V que contenga a x y tal que $V \subset G(A)$, entonces $(yx^{-1})\, V$ es un abierto contenido en $G(A)$ y $y \in V$. Esto prueba que A es una Q-álgebra.

Probemos ahora que (b) implica (d). Por hipótesis existe W vecindad del cero, que podemos suponer balanceada, tal que $e + W \subset G(A)$. Afirmamos que $W \subset S(G)$. Lo probaremos por contradicción, entonces supongamos que $W \not\subseteq S(G)$. Luego, existe $x \in W$ tal que $r(x) > 1$, y entonces podemos escoger $1 < |\lambda| \leq r(x)$ tal que:

$$\lambda e - x \notin G(A), \quad \text{o sea,}$$
$$e - \tfrac{x}{\lambda} \notin G(A).$$

Por tanto, $-\frac{x}{\lambda} \notin W$, lo cual es una contradicción, pues $\left|\frac{1}{-\lambda}\right| < 1$ y W es balanceado.

Por último, probemos que (d) implica (b). De la prueba anterior, se puede conjeturar que $e - \frac{1}{2}S(G) \subset G(A)$; supongamos pues que esto es falso, y procedamos a llegar a una contradicción. Sea $x \in S(G)$, tal que

$$e - \tfrac{1}{2}x \notin G(A), \quad \text{o sea,}$$
$$2e - x \notin G(A).$$

De donde, $r(x) \geq 2$, lo que contradice nuestra elección de x. □

Motivados por la noción de invertibilidad, definiremos un concepto similar, que nos sera útil especialmente en álgebras sin idéntico. Dada un álgebra A, no necesariamente con idéntico, podemos definir la *operación círculo*

$$x \circ y = x + y - xy$$

para $x, y \in A$. Si $x \circ y = y \circ x = 0$ diremos que x es *casi-invertible;* llamaremos a y el *casi-inverso* de x, y al conjunto de elementos casi-invertibles lo denotaremos por $G_q(A)$. Obviamente 0 es casi-invertible con casi-inverso 0.

Si $x \circ y = 0$, entonces x es llamado un *casi-inverso izquierdo* de y y y un *casi-inverso derecho* de x.

Proposición 2.2.2. *La operación círculo tiene las siguientes propiedades:*

(a) Es asociativa

(b) Si $x \in A$ tiene casi-inverso izquierdo y casi-inverso derecho, entonces estos coinciden. El casi-inverso de un elemento es único

(c) Si A tiene idéntico, entonces x es invertible con inverso y, si y sólo si $e - x$ es casi-invertible con casi-inverso $e - y$.

Demostración. (a) A partir de las definiciones tenemos:

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz \\ &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= (x \circ y) \circ z. \end{aligned}$$

(b) Supongamos que y es casi-inverso izquierdo de x y z es casi-inverso derecho de x. Como $x \circ z = 0 = y \circ x$, se tiene $xz = x + z$, $yx = x + y$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} y\,(x \circ z) = & \ \ 0 \ \ = (y \circ x)\, z \\ yx + yz - yxz &= yz + xz - yxz \\ yx &= xz \\ x + y &= x + z \\ y &= z \end{aligned}$$

Si y y z son casi inversos de x, se sigue de lo anterior que coinciden.
(c) Si x es invertible y su inverso es y, entonces:

$$\begin{aligned} (e - x) \circ (e - y) &= (e - x) + (e - y) - (e - x - y + xy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede probar que $(e - y) \circ (e - x) = 0$.

Ahora supongamos que $(e - x)$ es casi-invertible y $(e - y)$ es su casi inverso. Entonces, $(e - x) + (e - y) = (e - x)(e - y)$, de donde $xy = e$. De modo similar se obtiene que $yx = e$ □

En virtud de (c) de la Proposición anterior se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Sea A un álgebra semitopológica con idéntico. Entonces $G_q\,(A)$ es abierto si y sólo si $G\,(A)$ es abierto.*

Demostración. Supongamos que $G_q\,(A)$ es abierto. Sea $x \in G\,(A)$, de donde $e - x \in G_q\,(A)$. Luego, existe V, vecindad balanceada de cero, tal que $(e - x) + V \subset G_q\,(A)$; afirmamos que $x + V \subset G\,(A)$. En efecto, si $z \in x + V$, entonces $(e - z) \in (e - x) + V$, por ser V balanceada; así, $(e - z) \in G_q\,(A)$, de donde $z \in G\,(A)$, como queríamos probar.

La prueba de que $G_q\,(A)$ es abierto si $G\,(A)$ lo es, se sigue de modo similar intercambiando entre sí $G_q\,(A)$ y $G\,(A)$. □

Observación 2.2.1. Por lo anterior, podemos extender nuestra definición de Q-álgebra para todas las álgebras semitopológicas, sin importar si tienen o no idéntico, y decir:

- *Una álgebra semitopológica es Q-álgebra si $G_q\,(A)$ es abierto en A.*

De manera similar a la Proposición 2.2.1, se tiene la siguiente caracterización para las Q-álgebras, con o sin idéntico.

Proposición 2.2.4. *Sea A un álgebra semitopológica. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) A es Q-álgebra.
(b) $\operatorname{int}(G_q(A)) \neq \emptyset$.
(c) $G_q(A)$ es vecindad de cero en A.

Demostración. Es claro que (a) implica (c), pues $0 \in G_q(A)$, y (c) implica (b). Sólo queda probar que (b) implica (a).

Para $x \in A$, definimos las funcionales $L_z : A \longrightarrow \mathbb{F}$ y $R_z : A \longrightarrow \mathbb{F}$. como $L_z(x) = z \circ x$ y $R_z(x) = x \circ z$. Éstas son continuas porque A es un álgebra semitopológica.

Tomemos $x \in G_q(A)$, con casi-inverso y, y $a \in \operatorname{int}(G_q(A))$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} L_{a\circ y}(x) & = & (a+y-ay)\circ x \\ & = & a+y-ay+x-(a+y-ay)\,x \\ & = & a. \end{array}$$

Análogamente, $R_{y\circ a}(x) = a$. Hagamos $S = \operatorname{int}(G_q(A))$, entonces $L^{-1}_{a\circ y}(S)$ y $R^{-1}_{y\circ a}(S)$ son abiertos y

$$\begin{array}{rcl} L^{-1}_{a\circ y}(S) & \subset & \{b \in A\,|b\circ(a\circ y) \text{ tiene casi-inverso }\} \quad y \\ R^{-1}_{y\circ a}(S) & \subset & \{b \in A\,|(y\circ a)\circ b \text{ tiene casi-inverso }\}. \end{array}$$

Así, $b \in L^{-1}_{a\circ y}(S) \cap R^{-1}_{y\circ a}(S)$ implica que b tiene casi-inversos izquierdo y derecho, o sea, b es casi-invertible. De donde,

$$x \in L^{-1}_{a\circ y}(S) \cap R^{-1}_{y\circ a}(S) \subset G_q(A).$$

Es decir, $G_q(A)$ es abierto, como queríamos probar. □

Definición 2.2.2. Sea A un álgebra. La *unización* de A es el álgebra $A_e = A \times \mathbb{F}$, con las operaciones lineales usuales de parejas y el producto definido como:

$$(x,\alpha)(y,\beta) = (xy + \alpha x + \beta y,\, \alpha\beta)$$

para $(x,\alpha), (y,\beta) \in A_e$. El idéntico de esta álgebra es $(0,1)$. Si A es un álgebra semitopológica, la topología producto es la que se considera en A_e.

Lema 2.2.1. *Sea A un álgebra semitopológica. El homomorfismo de álgebras i:$A \to A \times \{0\}$ definido vía la asociación $a \to (a, 0)$ es un isomorfismo y $G_q(A_e) \cap (A \times \{0\}) = i\,(G_q(A))$.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata. La segunda se obtiene de que para $x, y \in A$ y β escalar se cumple que

$$\begin{aligned}(x,0) \circ (y,\beta) &= (x+y,\, \beta) - (xy + \beta x,\, 0)\\ &= ((1-\beta)\,x + y - xy, \beta) = (0,0)\end{aligned}$$

si y sólo si $x \circ y = 0$ y $\beta = 0$. Y una equivalencia similar se tiene para $(y, \beta) \circ (x, 0)$ y $y \circ x$. □

Lema 2.2.2. *Sea A un álgebra semitopológica. La función $h : A \times (\mathbb{F} \setminus \{1\}) \to A$ dada como $(x, \alpha) \to \frac{x}{1-\alpha}$ es continua y $h^{-1}\,(G_q(A)) = G_q(A_e)$.*

Demostración. La primer afirmación se sigue de que la función $(x, \alpha) \to \left(x, \frac{1}{1-\alpha}\right)$ y el producto por un escalar son funciones continuas. Para ver la segunda sean $(x, \alpha) \in A \times (\mathbb{F} \setminus \{1\})$ y $y \in A$. Observamos que $(1-\alpha)\,(1-\beta) = 1$ si $\beta = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$. Entonces

$$\begin{aligned}(x,\alpha) \circ \left(\frac{1}{1-\alpha}y, \beta\right) &= \left(x + \frac{1}{1-\alpha}y,\, \alpha+\beta\right) - \left(\frac{1}{1-\alpha}xy + \beta x + \frac{\alpha}{1-\alpha}y,\, \alpha\beta\right)\\ &= \left((1-\beta)x + y - \frac{1}{1-\alpha}xy,\, 0\right)\\ &= \left(\frac{1}{1-\alpha}x + y - \frac{1}{1-\alpha}xy,\, 0\right).\end{aligned}$$

De manera similar se tiene $\left(\frac{1}{1-\alpha}y, \beta\right) \circ (x, \alpha) = \left(\frac{1}{1-\alpha}x + y - \frac{1}{1-\alpha}yx,\, 0\right)$.

Entonces, $\left(\frac{1}{1-\alpha}y, \beta\right)$ es el casi-inverso de (x, α) si y sólo si y es el casi-inverso de $\frac{1}{1-\alpha}x$.

Por consiguiente, (x, α) es casi-invertible en A_e si y sólo si $\frac{1}{1-\alpha}x = h\,((x, \alpha))$ lo es en A. Es decir, $(x, \alpha) \in G_q(A_e)$ si y sólo si $(x, \alpha) \in h^{-1}\,(G_q(A))$. □

Teorema 2.2.2. *Sea A un álgebra semitopológica. Entonces A_e es una Q-álgebra si y sólo si, A es una Q-álgebra.*

Demostración. Si A_e es Q-álgebra, entonces $G_q(A_e) \cap (A \times \{0\})$ es un abierto de $(A \times \{0\})$. Por el Lema 2.2.1, $G_q(A) = i^{-1}\left(G_q(A_e) \cap (A \times \{0\})\right)$. Entonces, $G_q(A)$ es abierto en A.

Recíprocamente, por el Lema 2.2.2, $h^{-1}\left(G_q(A)\right) = G_q(A_e)$. Por lo que A_e es una Q-álgebra si A lo es. □

2.3. Álgebras localmente convexas, m-convexas, metrizables y bornológicas

Definición 2.3.1. Se dice que un álgebra semitopológica (A, τ) es localmente convexa si (A, τ) es un espacio localmente convexo. Cuando (A, τ) es un álgebra topológica y es también un espacio localmente convexo, entonces se dice que (A, τ) es un álgebra localmente convexa con producto continuo.

A partir del Teorema 1.2.14 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. *Sea τ una topología localmente convexa definida en A y determinada por una familia P de seminormas. (A, τ) es un álgebra localmente convexa si y sólo si para $a, b \in A$ y $p \in P$ existen $n, m \geq 1$, $p_1, ..., p_n \in P$, $q_1, ..., q_n \in P$, $M_a > 0$ y $M_b > 0$ tales que $p\left(ax\right) \leq M_a \max\left\{p_1\left(x\right), ..., p_n\left(x\right)\right\}$ y $p\left(xb\right) \leq M_b \max\left\{q_1\left(x\right), ..., q_n\left(x\right)\right\}$ para todo $x \in X$.*

Y con base en esta proposición y el Teorema 1.2.19 obtenemos:

Teorema 2.3.1. *(A, τ) es un álgebra localmente convexa si y sólo si existe una familia de seminormas P que definen a τ y satisface la siguiente propiedad: dados $a, b \in A$ y $p \in P$ existe $q \in P$ tal que $p\left(ax\right) \leq q\left(x\right)$ y $p\left(xb\right) \leq q\left(x\right)$ para todo $x \in X$.*

Observamos que la parte «sólo si» se cumple para la familia P_C de seminormas continuas para la topología τ.

Proposición 2.3.2. *Si (A, τ) es un álgebra localmente convexa, entonces el álgebra (A, w), donde w es la topología débil en A es también localmente convexa.*

Demostración. Sólo necesitamos probar que el producto es separadamente continuo cuando en A se considera la topología débil w. Es decir, que dados $a, b \in A$ las transformaciones lineales $L_a : (A, w) \to (A, w)$ y $R_b : (A, w) \to (A, w)$ definidas como $L_a\left(x\right) = ax$ y $R_b\left(x\right) = xb$, son continuas.

Por hipótesis, $L_a : (A, \tau) \to (A, \tau)$ y $R_b : (A, \tau) \to (A, \tau)$ son continuas.

Por el Teorema, Proposición 1.2.20 es suficiente ver que $p_{x^*} \circ L_a$ y $p_{x^*} \circ R_b$ con w-continuas para todo $x^* \in A^*$ y esto es así, ya que $p_{x^*} \circ L_a(x) = |x^*(ax)| = p_{x^* \circ L_a}(x)$ y $p_{x^*} \circ R_b(x) = |x^*(xb)| = p_{x^* \circ R_b}(x)$ y $x^* \circ L_a, x^* \circ R_b \in A^*$. □

Proposición 2.3.3. *(A, τ) es un álgebra localmente convexa con producto continuo si y sólo si existe una familia de seminormas P que definen a τ y satisfacen lo siguiente: para cada $p \in P$ existe $q \in P$ tal que $p(xy) \leq q(x)\, q(y)$ si $x, y \in X$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.1, basta ver que el producto es continuo en cero si y sólo si se cumple la condición establecida. Supongamos que se cumple dicha condición, y consideremos la vecindad de 0 dada por $V = \{x \in A \,|\, \text{máx}(p_1(x), \ldots, p_n(x)) < \varepsilon\}$, con $p_1, \ldots p_n \in P$ y $\varepsilon > 0$. Para cada p_i existe $q_i \in P$ que cumple la condición de la hipótesis. Consideremos ahora la vecindad $U = \{x \in A \,|\, \text{máx}(q_1(x), \ldots, q_n(x)) < \sqrt{\varepsilon}\}$. Dados $x, y \in U$ tenemos que $p_i(xy) \leq q_i(x)\, q_i(y) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$, por ende $U \cdot U \subset V$.

Ahora supongamos que A es un álgebra localmente convexa con producto continuo, y sea P_C la familia de todas las seminormas continuas en A. Si tomamos $p \in P_C$ y la vecindad del cero $V = \{x \in A \,|\, p(x) \leq 1\}$, existe $U \in \mathcal{N}(A)$ tal que $U \cdot U \subset V$. Luego, existe $q \in P_C$ tal que $\{x \in A \,|\, q(x) \leq 1\} \subset U$. Como $\frac{x}{q(x)+r}, \frac{y}{q(y)+r} \in U$, para todo $r > 0$, tenemos que $\left(\frac{x}{q(x)+r}\right)\left(\frac{y}{q(y)+r}\right) \in V$ para todo $r > 0$; de donde, $p(xy) \leq q(x)\, q(y)$. □

Resaltamos de la prueba, para futuro uso, que la parte «sólo si» se satisface para la familia P_C de seminormas continuas para la topología τ.

Seminorma m-convexa Una seminorma p en un álgebra A es llamada m-convexa si es submultiplicativa, es decir:

$$p(xy) \leq p(x)\, p(y)$$

si $x, y \in A$.

Proposición 2.3.4. *Sean A un álgebra y $U \subset A$ un conjunto absolutamente convexo y absorbente. Si U es idempotente, es decir $U \cdot U \subset U$, entonces su funcional de Minkowski p_U es una seminorma m-convexa.*

Demostración. Sólo falta ver que p_U es submultiplicativa. Sean $x, y \in X$, entonces existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $x \in \alpha U$ y $y \in \beta U$. Así, $xy \in \alpha\beta U \cdot U \subset \alpha\beta U$. Entonces, $p_U(xy) \leq \alpha\beta$, y tomando ínfimo sobre α y β, tenemos que $p_U(xy) \leq p_U(x)\, p_U(y)$. □

Definición 2.3.2. Se dice que un álgebra topológica (A, τ) es m-convexa si τ está definida por una familia de seminormas m-convexas.

Es claro que en toda álgebra m-convexa se cumple la condición establecida en la Proposición 2.3.3, por lo que un tipo particular de álgebras localmente convexas con producto continuo, son las álgebras m-convexas.

Lema 2.3.1. *Sea (A, τ)un álgebra localmente convexa cuya topología está dada por una familia P de seminormas. Si para cada $p \in P$ existe $M_p > 0$ tal que $p(xy) \leq M_p p(x) p(y)$ para todo $x, y \in X$, entonces A es m-convexa.*

Demostración. Dada $p \in P$, definamos $q(x) = M_p p(x)$. Claramente estas seminormas definen la misma topología que P y son m-convexas, pues:

$$\begin{aligned} q(xy) &= M_p p(xy) \\ &\leq M_p p(x) M_p p(y) \\ &= q(x) q(y). \end{aligned}$$

□

Definición 2.3.3. Se dice que un álgebra semitopológica (A, τ) es metrizable si es un EVT metrizable.

Definición 2.3.4. Una álgebra localmente convexa es llamada bornológica, si es un espacio bornológico, es decir todo disco bornívoro es una vecindad de 0.

Por el Teorema 1.2.9 tenemos:

Corolario 2.3.1. *Toda álgebra localmente convexa y metrizable es bornológica.*

Definición 2.3.5. Un álgebra semitopológica es llamada una F-álgebra si es un F-espacio

Proposición 2.3.5. *En toda F-álgebra A el producto es continuo.*

Demostración. Por ser A semitopológica, los productos laterales son lineales y continuos; y por ser A un F-espacio, es un EVT metrizable. Así, se cumplen las hipótesis del teorema 1.2.4, y entonces el producto es continuo. □

Definición 2.3.6. Un álgebra es llamada una B_0-álgebra si es una F-álgebra localmente convexa con producto, necesariamente, continuo.

Muchos autores denominan álgebra de Fréchet a la que aquí denominamos B_0-álgebra. Nosotros, al igual que otros, usamos la siguiente definición.

Definición 2.3.7. Un álgebra es llamada de Fréchet si es una F-álgebra m-convexa.

2.3.1. Álgebras cocientes localmente convexas y metrizables

Sea I un ideal bilateral de un álgebra semitopológica (A, τ). En el espacio vectorial topológico Q=A/I se define el producto $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$ y entonces Q es un álgebra, ésta es llamada un *álgebra cociente*. En A/I se considera la topología cociente τ_Q que definimos para el cociente de un espacio vectorial topológico respecto a un subespacio.

Sabemos que el operador cociente $\varphi : A \to Q$ es lineal, suprayectivo, continuo y abierto. Es también multiplicativo, ya que por definición $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.

El álgebra (Q, τ_Q) es semitopológica. Sea U una vecindad abierta de $\overline{ax}$, entonces $\varphi^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de ax. Existe una vecindad abierta V de x tal que $aV \subset \varphi^{-1}(U)$. De donde, $\varphi(V)$ es una vecindad abierta de $\bar{x}$ tal que $\overline{a}\varphi(V) \subset U$. O sea, $L_{\bar{a}} : Q \to Q$ es continuo (Definición 2.2). De modo similar se prueba que $R_{\bar{a}} : Q \to Q$ es también continua y que cuando el producto en A es continuo, entonces el producto en Q es continuo en $(\bar{0}, \bar{0})$, y por tanto, continuo en $Q \times Q$ (Teorema 2.2.1),

Por la Proposición 1.2.7 obtenemos lo siguiente.

Proposición 2.3.6. *Supongamos que A es un álgebra localmente convexa y metrizable e I es cerrado. Entonces $(A/I, \tau_Q)$ es un álgebra localmente convexa y metrizable.*

2.3.2. Álgebras de Banach

Definición 2.3.8. Supongamos que $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y un álgebra topológica, entonces A es llamada un álgebra normada. Si además es completa, entonces es llamada un álgebra de Banach

Proposición 2.3.7. *Si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, entonces existe una norma $\|\cdot\|_1$ equivalente a $\|\cdot\|$ que satisface la propiedad submultiplicativa: $\|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$ para todo $x, y \in A$. Si A tiene idéntico e, entonces hay una norma $\|\cdot\|_2$ equivalente a $\|\cdot\|$ submultiplicativa y tal que $\|e\|_2 = 1$.*

Demostración. Como A tiene producto continuo y es localmente convexa al ser normada, se sigue de la Proposición 2.3.3 que existe una seminorma q

continua en A tal que $\|xy\| \leq q(x)\, q(y)$ para todo $x, y \in A$; y por la continuidad de q, existe $M > 0$ tal que $q(x) \leq M \|x\|$ para todo x. De estas dos desigualdades obtenemos que $\|xy\| \leq M^2 \|x\| \|y\|$. Si definimos la seminorma $\|\cdot\|_1$ como $\|x\|_1 = M^2 \|x\|$, es claro que ésta es un norma equivalente a $\|\cdot\|$ pues una es múltiplo escalar de la otra, y además es submultiplicativa pues $\|xy\|_1 = M^2 \|xy\| \leq M^2 \left(M^2 \|x\| \|y\|\right) = \|x\|_1 \|y\|_1$.

Ahora supongamos que A tiene idéntico. Definamos entonces, para $x \in A$, $\|x\|_2 = \|L_x\|_1$; donde L_x es el operador lineal $L_x(y) = xy$ y $\|L_x\|_1$ es su norma relativa a la norma $\|\cdot\|_1$ de A. Esta norma es submultiplicativa, pues si T y U son operadores lineales continuos en A, tenemos que $\|T(U(x))\|_1 \leq \|T\|_1 \|U(x)\|_1 \leq \|T\|_1 \|U\|_1 \|x\|_1$. Tomando el supremo para x en la bola de radio 1, concluimos lo que queremos. Además $\|L_e\|_1 = \sup\{\|ex\|_1 \,|\, \|x\|_1 \leq 1\} = 1$, por lo que $\|e\|_2 = 1$. Veamos ahora que $\|\cdot\|_2$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$, y por transitividad también equivalente a $\|\cdot\|$. Dada $a \in A$, tenemos que $\|ax\|_1 \leq \|a\|_1 \|x\|_1$ para todo $x \in A$, por lo que $\|ax\|_1 \leq \|a\|_1$ para todo $\|x\|_1 \leq 1$. Al tomar supremo para $\|x\|_1 \leq 1$ concluimos que $\|L_a\|_1 = \|a\|_2 \leq \|a\|_1$. Por otra parte, por la continuidad de L_a, tenemos que $\|a\|_1 = \|L_a(e)\|_1 \leq \|L_a\|_1 \|e\|_1$, es decir $\|a\|_1 \leq \|e\|_1 \|a\|_2$; por lo tanto las topologías generadas por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son la misma. □

En lo sucesivo, siempre supondremos que si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, entonces $\|\cdot\|$ es submultiplicativa y $\|e\| = 1$ si A tiene idéntico.

Teorema 2.3.2. *Supongamos que $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach con idéntico. Entonces:*

(a) $\|y\| < 1$ implica $e - y$ es invertible y $(e-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$

(b) A es una Q-álgebra

(c) Si existe una sucesión (x_n) en A tal que $(x_n x)$ y $(x x_n)$ convergen a e, entonces x es invertible

Demostración. (a) Como $\|y\| < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|y\|^k$ converge, y como A es de Banach, también $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$ converge. Por otra parte,

$$\begin{aligned}(e-y)\left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k\right) &= e\sum_{k=0}^{\infty} y^k - y\sum_{k=0}^{\infty} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y^k - \sum_{k=1}^{\infty} y^k \\ &= y^0 = e\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que $\left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k\right)(e-y) = e$, por ende la afirmación es cierta.

(b)Por el inciso anterior, el abierto $V = \{x \in A \,|\, \|e-x\| < 1\}$ es tal que $e \in V \subset G(A)$. Así, por la Proposición 2.2.1, A es una Q-álgebra.

(c) Como A es Q-álgebra, $e \in \mathrm{int}G(A)$, entonces existe $N > 0$ tal que $x_N x \in G(A)$, pues $x_n x \longrightarrow e$. Por tanto, existe $y \in G(A)$ tal que $y(x_N x) = e$, de donde (yx_N) es inverso izquierdo de x. De manera análoga podemos obtener un inverso derecho para x, por lo que x es invertible. $\square$

Proposición 2.3.8. *Sea A un álgebra de Banach y $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{F}$ una funcional lineal multiplicativa. Entonces, φ es continua y $\|\varphi\| \leq 1$. Si A tiene idéntico e y φ no es nula, entonces $\|\varphi\| = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| > 1$, luego existe $x_0 \in A$ tal que $\|x_0\| = 1$ y $1 < |\varphi(x_0)|$. Por consiguiente, existe un escalar $0 < \lambda < 1$ tal que:

$$\lambda |\varphi(x_0)| = 1$$
$$|\varphi(\lambda x_0)| = 1$$

Entonces, $|\varphi(\lambda x_0)| = \varphi(s\lambda x_0)$, donde s es el signo de $\varphi(\lambda x_0)$.

Si definimos $x = s\lambda x_0$, entonces $\|x\| = |s|\,|\lambda|\,\|x_0\| < \|x_0\| = 1$. Así, $\|x\| < 1$ y $\varphi(x) = 1$.

Notemos que $\sum_{i=1}^{n} \|x^i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|^i$ y $\|x\| < 1$, por lo que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^i$ converge. Como A es de Banach, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge en A. Sea $y = \sum_{i=1}^{\infty} x^i$ y observemos que:

$$x\sum_{i=1}^{\infty} x^i - \sum_{i=1}^{\infty} x^i \quad = \quad -x$$

Al aplicar φ a ambos miembros, concluimos que $\varphi(xy) - \varphi(y) = -\varphi(x)$. Así $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y) - \varphi(x)$ o sea, $\varphi(y) = \varphi(y) - 1$, lo cual es absurdo. Por tanto, $\|\varphi\| \leq 1$.

Si A tiene idéntico e y φ no es nula, entonces $\varphi(e) \neq 0$ y como $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$, tenemos que $\varphi(e) = 1$. De donde,$\|\varphi\| \geq |\varphi(e)| = 1$. $\square$

Capítulo 3

Completez local

Este capítulo se ocupa de conceptos desarrollados por Allan y Mackey relacionados sobretodo con el acotamiento de elementos en un álgebra topológica. La parte de álgebras pseudocompletas será fundamental para probar el Teorema 5.1.1, que se presenta más adelante, y es un resultado central para la tesis.

3.1. Espacios localmente completos

En esta sección X es un EVT de Hausdorff, a menos que se diga otra cosa.

Definición 3.1.1. Denotamos por $\beta_0(X)$ a la colección de todos los subconjuntos $B \subseteq X$ tales que:
(i) B es absolutamente convexo.
(ii) B es cerrado y acotado.
El espacio normado $(X(B), \|x\|_B)$

Para cada $B \in \beta_0(X)$, sea $X(B)$ el subespacio generado por B. Afirmamos que:

$$X(B) = \{\lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{F},\, x \in B\}$$

Es claro que $X(B) \supset \{\lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{F},\, x \in B\}$. Para probar la otra contención, tomamos $x \in X(B)$. Como $0 \in B$, podemos suponer que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $x_i \in B$ y $\lambda_i \neq 0$ para algún $1 \leq i \leq n$. Sea $\alpha = \sum |\lambda_i|$, y consideremos $\frac{\alpha}{\alpha} x = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i x_i}{\alpha} \right)$. Notemos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{|\lambda_i|}{|\alpha|} = \frac{1}{\alpha} \sum |\lambda_i| = 1$; por ende $\frac{x}{\alpha} \in B$, es decir $x = \alpha \frac{x}{\alpha} \in \{\lambda x \,|\, \lambda \in \mathbb{C},\, x \in B\}$.

Una vez caracterizado $X(B)$, afirmamos que la ecuación:

$$\|x\|_B = \text{ínf}\{\lambda > 0 \,| x \in \lambda B\}$$

define una norma en $X(B)$. Observemos primero que para cada $x \in X(B)$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda B$. Esto es obvio si $x = 0$ y en otro caso, existe $\lambda \in \mathbb{F}$ no nulo tal que $x \in \lambda B$ y por tanto, tomando s como el signo de λ, tenemos $x = |\lambda| \, s^{-1} B \subset |\lambda| \, B$, por ser B balanceado, y $|\lambda| > 0$.

Es claro que $\|0\|_B = 0$ y si $\|x\|_B = 0$, entonces $x \in \frac{1}{n}B$ para todo $n \geq 1$. De donde $x = 0$, por ser B acotado.

Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ y supongamos que $\lambda > 0$ y $x \in \lambda B$. Luego $\alpha x \in \alpha\lambda B$ y $\alpha\lambda B = |\alpha| s^{-1} \lambda B \subseteq |\alpha| \lambda B$, donde s es el signo de α, por lo que $|\alpha|\lambda \geq ||\alpha x||_B$. Tomando el ínfimo sobre λ, concluimos que $|\alpha| ||x||_B \geq ||\alpha x||_B$. Si $\alpha \neq 0$ entonces, por la desigualdad anterior, se sigue que $|\frac{1}{\alpha}| ||\alpha x||_B \geq ||x||_B$; o sea, $|||\alpha x||_B \geq |\alpha| |x||_B$ y por consiguiente, $|\alpha| ||x||_B = ||\alpha x||_B$; igualdad que también se tiene para $\alpha = 0$.

Finalmente, si $\lambda_i > 0$ y $x_i \in \lambda_i B$ para $i = 1, 2$, entonces $x_1 + x_2 \in (\lambda_1 + \lambda_2) B$, por ser B convexo; de donde $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \|x_1 + x_2\|_B$, y tomando el ínfimo sobre λ_1y λ_2, obtenemos: $\|x_1\|_B + \|x_2\|_B \geq \|x_1 + x_2\|_B$.

A menos que se diga otra cosa, se supondrá que la topología asociada a $X(B)$ es la inducida por $\|\cdot\|_B$. Esta topología **es más fuerte** que su topología como subespacio de (X, τ). Para ver esto probaremos que la función $Id : (X(B), \|\cdot\|_B) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua. Sea V una vecindad de cero en X; luego, existe $r > 0$ tal que $B \subset rV$, es decir, $\frac{1}{r}B \subset V$. Así, escogiendo $0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$, tenemos que $\|x\|_B < \varepsilon$ implica $x \in \lambda B \subset \frac{1}{r}B \subset V$ para algún $0 < \lambda < \varepsilon$, como queríamos probar.

Proposición 3.1.1. *Si X es un espacio localmente convexo, entonces la envolvente cerrada absolutamente convexa C de un acotado B de X es acotada y por ende, pertenece a $\beta_0(X)$.*

Demostración. Dada una seminorma continua p en X, existe $M > 0$ tal que $p(x) \leq M$ para todo $x \in B$. Tomando una combinación absolutamente convexa $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ de elementos de B, tenemos que

$$\begin{aligned} p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, p(x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, M \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Por tanto, la envolvente absolutamente convexa $bc\,(B)$ de B es acotada. Tomemos ahora $x \in C = \overline{bc\,(B)}$. Existe una red $(x_\alpha) \subset bc\,(B)$ tal que $x_\alpha \longrightarrow x$. Entonces, por la continuidad de p, $p\,(x_a) \longrightarrow p\,(x)$; pero $p\,(x_\alpha) \leq M$ para toda α, de donde $p\,(x) \leq M$. $\square$

Proposición 3.1.2. *Sean $B \in \beta_0\,(X)$ y (x_n) una sucesión de Cauchy en $X(B)$. Entonces la sucesión converge a x en $X(B)$ si y sólo si converge a x en X.*

Demostración. Vimos que la topología de la norma $\|\cdot\|_B$ en $X(B)$ es más fuerte que la que tiene como subespacio de X. Se sigue pues que si una sucesión en $X(B)$ converge a x en ese espacio, entonces también converge a x en X.

Recíprocamente, supongamos que (x_n) es de Cauchy en $X(B)$ *y* $x_n \longrightarrow x$ en X. Por ser de Cauchy, podemos construir una sucesión estrictamente creciente de enteros $\{n_k\}$ tal que si $n, m \geq n_k$, entonces $\|x_m - x_n\|_B < \frac{1}{2^{k+1}}$. En particular, $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\|_B < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Afirmamos que la sucesión de conjuntos $\left(x_{n_k} + \frac{1}{2^k}B\right)$ es decreciente. Debemos entonces probar que para todo k se cumple: $x_{n_{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}B \subseteq x_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$, o dicho de otro modo: dado un elemento de la forma $x_{n_{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}b$, con $b \in B$, existe $b_0 \in B$ tal que:

$$x_{n_{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}b = x_{n_k} + \frac{1}{2^k}b_0,$$

es decir,

$$\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}}b = \frac{1}{2^k}b_0 \tag{3.1}$$

Esto es así, ya que como $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\|_B < \frac{1}{2^{k+1}}$, entonces $\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) \in \frac{1}{2^{k+1}}B$. Sea $c \in B$ tal que $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = \frac{1}{2^{k+1}}c$. Sustituyendo en el lado izquierdo de (3.1) se obtiene $\frac{1}{2^{k+1}}c + \frac{1}{2^{k+1}}b = \frac{1}{2^k}\left(\frac{c+b}{2}\right)$, y como B es convexo entonces $\frac{c+b}{2} \in B$, que es justamente el elemento buscado b_0 . Esto prueba nuestra afirmación.

Al ser B cerrado, $x_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$ también lo es. Como la sucesión $\left(x_{n_k} + \frac{1}{2^k}B\right)$ es decreciente, se cumple que $x_{n_j} \in x_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$ para todo $j \geq k$, y por tanto el límite x de la sucesión (x_n) pertenece a $x_{n_k} + \frac{1}{2^k}B$, para todo $k \geq 1$. Esto implica que $x \in X\,(B)$ y $\|x - x_{n_k}\|_B \to 0$ cuando $k \to \infty$, lo que muestra que la subsucesión (x_{n_k}) converge a x en $X(B)$, y como la sucesión (x_n) es de Cauchy en $X(B)$, ésta tendrá el mismo límite. $\square$

Definición 3.1.2. Decimos que X es un espacio localmente completo si cada uno de los espacios normados $X(B)$, con $B \in \beta_0$, es de Banach.

Observación. A este tipo de espacios también se les llama pseudo-completos, pero reservaremos este nombre para las álgebras, pues para ellas varía la definición

Proposición 3.1.3. *Si X es un espacio secuencialmente completo, entonces es localmente completo.*

Demostración. Sea $B \in \beta_0$. Como la topología dada por la norma en $X(B)$ es más fuerte que la inducida por τ, toda sucesión de Cauchy en $X(B)$ lo es en la topología τ y por tanto, converge en esta topología. Por la proposición anterior, la sucesión converge en $X(B)$. □

3.2. Convergencia de Mackey

En esta sección X denota un espacio localmente convexo de Hausdorff, a menos que se diga otra cosa.

Proposición 3.2.1. *Sean (x_n) una sucesión en X y $x \in X$. Las tres siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen un subconjunto acotado $B \subseteq X$ y una sucesión de reales positivos (ε_n) tal que $\varepsilon_n \to 0$ y $x_n - x \in \varepsilon_n B$ para todo $n \geq 1$*

2. *Existen un subconjunto acotado $B \subseteq X$ y una sucesión de reales positivos (ε_n) tales que $\varepsilon_n < 1$, $\varepsilon_n \to 0$ y $x_n - x \in \varepsilon_n B$ para todo $n \geq 1$*

3. *Existe un disco cerrado y acotado $B \subseteq X$ tal que $x_n, x \in X(B)$ para todo $n \geq 1$ y $||x_n - x||_B \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Se dice que $\{x_n\}$ converge en el sentido de Mackey a x, o simplemente que es Mackey-convergente a x, si satisface cualquiera de las tres condiciones anteriores

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Es obvio.

1) $\Rightarrow$ 3) Consideremos la envolvente cerrada absolutamente convexa C de $B \bigcup \{x\}$. Tenemos que $C \in \beta_0$ y por hipótesis. $x_n - x \in \varepsilon_n B \subseteq \varepsilon_n C$ para todo n. Así, x, $\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)(x_n - x) \in C$, y entonces $x, (x_n - x) \in X(C)$ y $||x_n - x||_C \leq \varepsilon_n$, por la definición de la norma. Como $\varepsilon_n \to 0$, entonces $||x_n - x||_C \to 0$ cuando $n \to \infty$.

3) $\Rightarrow$ 2) Definimos $\varepsilon_n = ||x_n - x||_B + \frac{1}{n}$. Tenemos que $x_n - x \in \varepsilon_n B$ y $\varepsilon_n \to 0$. Por tanto, existe $N > 1$ tal que $\varepsilon_n < 1$ si $n > N$. Hagamos $B_1 = B \bigcup \{2(x_n - x) | 1 \leq n \leq N\}$. Entonces B_1 es acotado y si redefinimos ε_n para $1 \leq n \leq N$ como $\varepsilon_n = \frac{1}{2}$, Entonces $x_n - x \in \varepsilon_n B_1$ para todo $n \geq 1$, $\varepsilon_n \to 0$ y $\varepsilon_n < 1$ para cualquier $n \geq 1$. □

Proposición 3.2.2. *Sean (x_n) una sucesión en X. Las tres siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen un subconjunto acotado $B \subseteq X$ y una sucesión de reales positivos $\{\varepsilon_n\}$ tales que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ y $x_n - x_m \in \varepsilon_n B$ para todo $m > n$ y $n \geq 1$.*

2. *Existen un subconjunto acotado $B \subseteq X$ y una sucesión de reales positivos $\{\varepsilon_n\}$ tales que $\varepsilon_n < 1$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ y $x_n - x_m \in \varepsilon_n B$ para todo $m > n$ y $n \geq 1$.*

3. *Existe un disco cerrado y acotado $B \subseteq X$ tal que $x_n \in X(B)$ para todo $n \geq 1$ y $\{x_n\}$* es de Cauchy en $(X(B), || \cdot ||_B)$.

Se dice que $\{x_n\}$ es de Cauchy en el sentido de Mackey, o simplemente Mackey-Cauchy, si se satisface cualquiera de las tres condiciones anteriores.

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1) es obvio.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $\varepsilon_n < 1$. Sea $B_0 = B \bigcup 2\varepsilon_1 B \bigcup \cdots \bigcup 2\varepsilon_N B$. El conjunto B_0 es acotado. Sabemos que $(x_n - x_m) \in \varepsilon_n B$ si $m > n$ y $n \geq 1$. En particular,

$$2(x_n - x_m) \in 2\varepsilon_n B \subseteq B_0$$

si $1 \leq n \leq N$ y $m > n$. De donde,

$$(x_n - x_m) \subseteq \frac{1}{2} B_0$$

si $1 \leq n \leq N$ y $m > n$.

Así pues, sustituyendo en la sucesión (ε_n) aquellos ε_n, con $1 \leq n \leq N$, por $\frac{1}{2}$, obtenemos una sucesión (ε_n) que converge a 0, que cumple $\varepsilon_n < 1$ para todo n y por construcción $(x_n - x_m) \in \varepsilon_n B_0$ si $m > n$ y $n \geq 1$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Consideremos la envolvente cerrada absolutamente convexa B_0 de $B \bigcup \{x_1\}$. Entonces $B_0 \in \beta_0(X)$ y como $x_1 - x_m \in \varepsilon_1 B$ para todo $m > 1$, tenemos que $x_n \in X(B_0)$ para todo $n \geq 1$. Por hipótesis tenemos que $x_n - x_m \in \varepsilon_n B \subseteq \varepsilon_n B_0$ si $m > n$ y $n \geq 1$. Así, $||x_n - x_m||_{B_0} \leq \varepsilon_n$, si

$m > n$ y $n \geq 1$, por la definición de la norma. Como $\varepsilon_n \to 0$, entonces (x_n) es de Cauchy en $(X(B_0), || \cdot ||_B)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Existen un disco cerrado y acotado B_0 y una sucesión (N_k) estrictamente creciente de naturales tales que $||x_n - x_m||_{B_0} < \frac{1}{k}$ si $n, m > N_k$. La sucesión (x_n) es de Cauchy en X y por tanto, acotada. Así, $B_1 = \{x_1 - x_m \,|m > 1\} \bigcup \cdots \bigcup \{x_{N_1} - x_m \,|m > N_1\}$ es un conjunto acotado, al igual que $B{=}B_0 \bigcup B_1$. Definimos $\varepsilon_1 = 1$ si $1 \leq n \leq N_1$ y $\varepsilon_n = \frac{1}{k}$ si $N_k < n \leq N_{k+1}$, para $k \geq 1$. Tenemos que $x_n - x_m \in \varepsilon_n B$ para todo $m > n$ y $n \geq 1$ y $\varepsilon_n \to 0$. $\square$

Definición 3.2.1. Si toda sucesión Mackey-Cauchy en X es Mackey-convergente, entonces se dice que X es Mackey-completo.

Proposición 3.2.3. *Sea (x_n) una sucesión en X.*

(a) Si (x_n) es una sucesión Mackey-Cauchy, entonces es una sucesión de Cauchy en X

(b) Si (x_n) es una sucesión Mackey-convergente a x, entonces converge a x en X.

Demostración. (a) Si (x_n) es una sucesión Mackey-Cauchy, entonces es una sucesión de Cauchy en $X\,(B)$ para algún $B \in \beta_0$. De donde (x_n) es de Cauchy en X, pues la topología dada por $\|\cdot\|_B$ es más fuerte que la de X.

(b) Análogamente, si (x_n) es una sucesión Mackey-convergente a x, entonces (x_n) a x en $X\,(B)$ para algún $B \in \beta_0$, así que (x_n) converge también a x en X. $\square$

Lema 3.2.1. *Supongamos que (x_n) es una sucesión en X para la que existe un disco cerrado y acotado $B \subseteq X$ tal que $x_n \in X(B)$ para todo $n \geq 1$ y* $\{x_n\}$ es de Cauchy en $(X(B), || \cdot ||_B)$. Si (x_n) es Mackey-convergente a x, entonces $x \in X(B)$ y (x_n) converge a x en $X(B)$.

Demostración. Por la Proposición anterior, (x_n) converge a x en X y por la 3.1.2, (x_n) converge a x en $X(B)$. $\square$

Teorema 3.2.1. *El espacio X es Mackey-completo si y sólo si es localmente completo.*

Demostración. Supongamos que X es Mackey-completo. Sean $B \in \beta_0$ y (x_n) una sucesión de Cauchy en $X\,(B)$. Luego, (x_n) es una sucesión Mackey-Cauchy, y por ende es Mackey-convergente a algún x, al ser X Mackey-completo. Por el lema anterior, $x \in X\,(B)$ y (x_n) converge a x en $X(B)$; es decir $X(B)$ es de Banach, como queríamos probar.

Supongamos ahora que X es localmente completo, y sea (x_n) una sucesión Mackey-Cauchy. Así, (x_n) es una sucesión de Cauchy en algún $X(B)$, con $B \in \beta_0$; al ser X un espacio localmente completo, $x_n \stackrel{\|\cdot\|_B}{\longrightarrow} x$ para algún $x \in X(B)$; o sea, (x_n) es Mackey-convergente a x. $\square$

3.3. Álgebras pseudo-completas. Radio de acotamiento

En esta sección suponemos que A es un álgebra localmente convexa de Hausdorff.

Definición 3.3.1. Denotamos por $\beta_1(A)$ a la colección de todos los subconjuntos $B \subseteq A$ tales que:
(i) B es absolutamente convexo.
(ii) B es cerrado y acotado.
(iii) B es idempotente.
Veremos que en este caso $A(B)$ es un álgebra, $\|\cdot\|_B$ es una norma de álgebra, es decir, es submultiplicativa, y la bola unitaria de $A(B)$ es B.

Sean $x, y \in A(B)$; luego $x \in \lambda_1 B$ y $y = \lambda_2 B$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. Como B es idempotente, tenemos que $xy \in \lambda_1\lambda_2 B$, o sea, $xy \in A(B)$. Por ende, el espacio vectorial $A(B)$ es un álgebra. Además,$\|xy\|_B = \inf\{\lambda > 0 \,|xy \in \lambda B\} \leq \lambda_1\lambda_2$. Calculando el ínfimo del lado de derecho, obtenemos que $\|\cdot\|_B$ es una norma submultiplicativa.

Si $x \in B$, claramente $\|x\|_B \leq 1$. Y si $\|x\|_B \leq 1$, escogemos r tal que $\|x\|_B \leq 1 < r$. Entonces $x \in rB$, y al hacer tender r a 1 por la derecha, concluimos que $x \in B$. O sea, la bola unitaria de $A(B)$ es B

Definición 3.3.2. Decimos que un elemento $x \in A$ es acotado si para algún escalar $\lambda \neq 0$, el conjunto $\{(\lambda x)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto acotado de A. El conjunto de todos los elementos acotados de A se denota como A_0.

No debe confundirse este concepto con el hecho de que el conjunto $\{x\}$ es acotado.

Es claro que todo elemento de un álgebra normada es acotado, pues escogiendo $\lambda > ||x||$ se tiene que $\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \leq \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n < 1$, y en consecuencia el conjunto $\{(\lambda x)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Proposición 3.3.1. *Un elemento x de A es acotado si y sólo existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^n$ converge a 0.*

Demostración. Si existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^n \longrightarrow 0$, entonces x es acotado, por la Proposición 1.2.3.

Supongamos ahora que $x \in A$ es acotado, es decir, que existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que el conjunto $\{(\lambda x)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Luego, $\frac{s^n}{2^n}(\lambda x)^n \longrightarrow 0$, pues $\frac{s^n}{2^n} \longrightarrow 0$ donde s es el signo de λ. O sea, $\left(\frac{|\lambda|}{2}x\right)^n \longrightarrow 0$. □

Proposición 3.3.2. *Si A es un álgebra localmente convexa, entonces la envolvente cerrada absolutamente convexa C de un conjunto $B \subset A$ idempotente es idempotente.*

Demostración. Sean $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ y $y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$ en la envolvente absolutamente convexa $bc\,(B)$ de B. Entonces, $xy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j x_i y_j$. Como B es idempotente, $x_i y_j \in B$ para todo i y todo j; además, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\lambda_i \mu_j| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{m} |\mu_j|\right) \leq 1$. Por lo tanto, $xy \in bc\,(B)$.

Tomemos ahora $x \in bc\,(B)$ y $y \in C$. Existe una red $(y_\alpha) \subset bc\,(B)$ tal que $y_\alpha \longrightarrow y$. Por la continuidad del producto por la izquierda tenemos que $xy_\alpha \longrightarrow xy$, por lo tanto $xy \in \overline{bc\,(B)} = C$. Es decir, $bc\,(B) \cdot C \subset C$.

Finalmente si $x, y \in C$, entonces existe una red $(x_\alpha) \subset bc\,(B)$ tal que $x_\alpha \longrightarrow x$. Por la continuidad del producto por la derecha tenemos que $x_\alpha y \longrightarrow xy$. Por tanto, $xy \in \bar{C}\,(= C)$. □

Proposición 3.3.3. *La envolvente absolutamente convexa y cerrada C de un conjunto $B \subset A$ idempotente y acotado, pertenece a $\beta_1(A)$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.1.1 y la anterior. □

Corolario 3.3.1. *Si $x \in A$ es acotado, entonces para algún escalar λ, la envolvente absolutamente convexa cerrada B_x de $\{(\lambda x)^n \,|n \geq 1\}$ pertenece a $\beta_1(A)$ y se tiene*

$$A_0 = \bigcup_{B \in \beta_1(A)} A\,(B)\,.$$

Demostración. La primera parte es inmediata por la proposición anterior, y entonces es claro $A_0 \subset \bigcup_{B\in\beta_1(A)} A\,(B)$. Ahora sea $x \in A\,(B)$. Existen $\lambda_0 > 0$ y $x_0 \in B$ tales que $x = \lambda_0 x_0$, y así $\|x\|_B \leq \lambda_0$. Sea $\lambda > 0$ tal que $\lambda\lambda_0 < 1$, entonces:

$$\|(\lambda x)^n\|_B \leq \|\lambda x\|_B^n \leq (\lambda\lambda_0)^n\,.$$

Entonces $(\lambda\lambda_0)^n \longrightarrow 0$ y $(\lambda x)^n \longrightarrow 0$ en la norma $\|\cdot\|_B$. Como la topología dada por la norma es más fuerte que la inducida por la de A, $(\lambda x)^n \longrightarrow 0$ en A. Por tanto, $x \in A_0$. □

Definición 3.3.3. Se dice que una subcolección $\beta_2 \subseteq \beta_1(A)$ es básica, o base de $\beta_1(A)$, si para cada $B_1 \in \beta_1$ existe algún $B_2 \in \beta_2$, tal que $B_1 \subseteq B_2$ y así, $A(B_1) \subset A(B_2)$.

Corolario 3.3.2. *Sea β_2 una base de $\beta_1(A)$. Entonces*

$$A_0 = \bigcup_{B \in \beta_2} A(B).$$

Demostración. Por el Corolario 3.3.1, $\bigcup_{B \in \beta_1(A)} A(B) = A_0$. Como $\beta_2 \subseteq \beta_1(A)$, tenemos que $\bigcup_{B \in \beta_2} A(B) \subset \bigcup_{B \in \beta_1(A)} A(B) = A_0$. Por otra parte, si $x \in A_0$, entonces $x \in A(B)$ con $B \in \beta_1(A)$. Existe $B_0 \in \beta_2$ tal que $x \in A(B) \subseteq A(B_0)$. □

Corolario 3.3.3. *Supongamos que A tiene idéntico. La colección*

$$\mathcal{B} = \{B \in \beta_1(A) \,|\, e \in B\}$$

es una base de $\beta_1(A)$ y

$$A_0 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} A(B).$$

Demostración. Sea $B \in \beta_1(A)$, entonces por la Proposición 3.3.3, la envolvente absolutamente convexa y cerrada B_e de $B \cup \{e\}$ pertenece a $\beta_1(A)$. De donde, se siguen los dos resultados. □

Definición 3.3.4. Se dice que A es pseudo-completa si el álgebra $A(B)$ es de Banach para todo $B \in \beta_1(A)$.

Observación 3.3.1. Es claro que si A es localmente completo como espacio localmente convexo, entonces A es un álgebra pseudo-completa, ya que $\beta_1(A) \subset \beta_0(A)$. De los resultados de la sección anterior se obtiene el siguiente.

Teorema 3.3.1. *Si A es*
(a) Mackey-completa, o bien,
(b) secuencialmente completa,
entonces A es un álgebra pseudo-completa.

Demostración. Para probar (a), notemos primero que si A es un álgebra Mackey-completa, entonces es un EVT Mackey-completo. Por el Teorema 3.2.1, A es un espacio localmente completo, y por la observación anterior A es un álgebra pseudo-completa. La parte (b) se obtiene por la Proposición 3.1.3 y la observación anterior. □

Proposición 3.3.4. *Si $\beta_1(A)$ tiene una base β_2 tal que $A(B)$ es de Banach para todo $B \in \beta_2$, entonces A es pseudo-completa.*

Demostración. Sean $B \in \beta_1(A)$ y $B_2 \in \beta_2$ tales que $B \subseteq B_2$. Así, $A(B) \subset A(B_2)$. Para $x \in A(B)$ tenemos

$$\begin{aligned} \|x\|_{B_2} &= \inf\{\lambda > 0 \,|x \in \lambda B_2\} \\ \|x\|_{B} &= \inf\{\lambda > 0 \,|x \in \lambda B\} \end{aligned}$$

El primer conjunto de los lados derechos contiene al segundo, y en consecuencia $\|x\|_{B_2} \leq \|x\|_B$ en $A(B)$. De donde, si (x_n) es una sucesión de Cauchy en $A(B)$, entonces es una sucesión de Cauchy en $A(B_2)$ y entonces converge en este espacio, y por tanto en A. Usando la Proposición 3.1.2, concluimos que (x_n) converge en $A(B)$. □

Definición 3.3.5. Sea $x \in A$. El radio de acotamiento de x se define como

$$\beta(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \middle| \left\{\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n |n \geq 1\right\} \text{ es acotado en } A\right\},$$

donde $\inf \emptyset = \infty$.

Observación 3.3.2. Si $r > \beta(x)$, entonces $\left(\frac{1}{r}x\right)^n \longrightarrow 0$, ya que existe $0 < \lambda < r$ para el cual $\left\{\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n |n \geq 1\right\}$ es acotado en A y entonces $\left(\frac{1}{r}x\right)^n = \left(\frac{\lambda}{r}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \longrightarrow 0$.

Proposición 3.3.5. *La función radio de acotamiento $\beta(x)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $\beta(x) \geq 0$ para todo $x \in A$; $\beta(0) = 0$.
2. $\beta(x)$ es real si y sólo si $x \in A_0$.
3. $\beta(\lambda x) = |\lambda| \beta(x)$ si $x \in A$ y si $\lambda \in \mathbb{F}$, donde $0 \cdot \infty = 0$
4. Si $|\lambda| > \beta(x)$, entonces $\left(\frac{1}{|\lambda|}x\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. De donde, $\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\left\{\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n |n \geq 1\right\}$ es acotado en A.
5. $\beta(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty\right\}$
6. Si P es una familia de seminormas que define la topología de A, entonces
$$\beta(x) = \sup_{p \in P} \limsup \left(p\left(x^n\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Demostración. 1. Dado $x \in A$, hay dos casos posibles: $\beta(x) = \infty$, o $\beta(x)$ es el ínfimo de escalares mayores a cero. En ambos casos, $\beta(x) \geq 0$. Como $\left\{ \left(\frac{1}{\lambda}0\right)^n | n \geq 1 \right\} = \{0\}$ es acotado para todo $\lambda > 0$, concluimos que $\beta(0) = 0$.

2. Notemos que $\beta(x)$ es real si y sólo si, existe $\lambda > 0$ tal que $\{(\lambda x)^n | n \geq 1\}$ es acotado en A; es decir, si y sólo si $x \in A_0$.

3. Supongamos que $\beta(x) \neq \infty$. Si $\lambda > 0$, entonces el resultado es cierto por propiedades del ínfimo, y para $\lambda = 0$ el resultado es obvio. Como $p\left(\left(\frac{\alpha}{\lambda}x\right)^n\right) = p\left(\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n\right)$ si $|\alpha| = 1$, se sigue que $\beta(\alpha x) = \beta(x)$ siempre que $|\alpha| = 1$. Para $\lambda \in \mathbb{F}$, tenemos que $\lambda = |\lambda| s$ con $|s| = 1$, de donde, $\beta(\lambda x) = \beta(|\lambda| sx) = |\lambda| \beta(x)$.

Sea $\beta(x) = \infty$. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda\beta(x) = 0 \cdot \infty = 0$ y $\beta(\lambda x) = \beta(0) = 0$. Por último, para $|\lambda| > 0$, tenemos que $|\lambda| \beta(x) = \infty$ y también $\beta(\lambda x) = \infty$; pues si $\beta(\lambda x) \leq \lambda_0$, entonces $\beta(x) \leq \frac{\lambda_0}{|\lambda|}$, lo que es una contradicción.

4. Sea $|\lambda| > \beta(x)$. Por la Observación 3.3.2 $\left(\frac{1}{|\lambda|}x\right)^n \to 0$. Para cualquier seminorma continua p en X se tiene $p\left(\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n\right) = p\left(\left(\frac{1}{|\lambda|}x\right)^n\right) \longrightarrow 0$.

5. Si $\beta(x) = \infty$, entonces $\operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \to 0\right\} = \infty$, ya que es el ínfimo del conjunto vacío. En otro caso, se tiene que

$$\beta(x) \leq \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \to 0\right\}$$

y si $r > \beta(x)$, entonces $r \in \left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \to 0\right\}$. Haciendo tender r a $\beta(x)$, concluimos que $\beta(x) \geq \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \to 0\right\}$.

(f) Probemos primero que $\beta(x) \geq \sup_{p \in P} \operatorname{lím\,sup}(p(x^n))^{\frac{1}{n}}$. Esto es obvio si $\beta(x) = \infty$. En otro caso, sea $\lambda > 0$ tal que $\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^n \longrightarrow 0$. Dada $p \in P$, existe $N \geq 1$ tal que si $n \geq N$, entonces:

$$\begin{gathered} p\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right) \leq 1, \\ p(x^n) \leq \lambda^n, \\ p(x^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lambda, \\ \operatorname{lím\,sup}(p(x^n))^{\frac{1}{n}} \leq \lambda. \end{gathered}$$

Por tanto, $\beta(x) \geq \operatorname{lím\,sup}(p(x^n))^{\frac{1}{n}}$. Por ser p arbitraria, tenemos que, $\beta(x) \geq \sup_{p \in P} \operatorname{lím\,sup}(p(x^n))^{\frac{1}{n}}$.

Probaremos que $\sup_{p \in P} \operatorname{lím\,sup}(p(x^n))^{\frac{1}{n}} \geq \beta(x)$. Esto es obvio si el lado izquierdo es infinito. En otro caso, sea $\alpha > \sup_{p \in P} \operatorname{lím\,sup}(p(x^n))^{\frac{1}{n}}$. Luego:

$$\alpha > \limsup \left(p\left(x^{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{para todo } p \in P$$

Para $p \in P$ existe un natural N_p tal que $\alpha > \sup_{n \geq N_p} p\left(x^{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Entonces $n > N_p$ implica

$$\alpha^{n} > p\left(x^{n}\right),$$
$$1 > p\left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n}\right).$$

Por tanto, existe $M_p > 0$ tal que $M_p > p\left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n}\right)$ para todo $n \geq 1$. Entonces, $\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n}\right\}$ es acotado, de donde $\alpha \geq \beta(x)$. Hacemos tender α a $\sup_{p \in P} \limsup \left(p\left(x^{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$, y obtenemos $\sup_{p \in P} \limsup \left(p\left(x^{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \beta(x)$. $\square$

Capítulo 4

Secuencialidad en álgebras localmente convexas

Presentamos aquí las nociones de álgebra fuertemente secuencial, secuencial e infrasecuencial. Se prueban algunas relaciones entre ellas mismas o con otros conceptos planteados anteriormente, como el de radio de acotamiento, que guarda una fuerte vinculación con la secuencialidad. Además, se muestran detalladamente muchos ejemplos de estos tipos de álgebras y se hacen distinciones entre los mismos. Se recomienda apoyarse en los apéndices, listados al final de la tesis, para una mejor comprensión de los ejemplos.

4.1. Las tres nociones de secuencialidad

Definición 4.1.1. Sea A un álgebra localmente convexa y de Hausdorff.

1. A es *fuertemente secuencial* si existe una vecindad $\underline{U}$ de 0 tal que para todo $x \in U$, $x^k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

2. A es *secuencial* si para cada sucesión (x_n) tal que $x_n \to 0$, existe $m \geq 1$ tal que $x_m^k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

3. A es *infrasecuencial* si para cada conjunto acotado $B \subset A$ existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in B$, $(\lambda x)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$. En este caso cada elemento $x \in A$ es acotado.

Observación 4.1.1. Notemos que si se cumple (2), entonces $x_n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$ en A implica que existe una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)$ de (x_n) tal que $x_{n_j}^k \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$ para todo j. Además, observemos que si (3) se satisface para λ, entonces también se satisface para cualquier escalar α que satisfaga $0 < |\alpha| \leq \lambda$, ya que $(\alpha x)^k = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^k (\lambda x)^k$.

Ejemplo 4.1.1. Toda álgebra normada A es fuertemente secuencial.

Consideremos $U = \{x \in A \,|\, \|x\| < 1\}$. Entonces, si $x \in U$, tenemos que $\|x\|^k \longrightarrow 0$.

La siguiente proposición, nos dice que toda álgebra normada es secuencial e infrasecuencial:

Proposición 4.1.1. *Con la notación de la definición anterior, tenemos que* (1) *implica* (2), *y* (2) *implica* (3).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $x_n \to 0$ y sea U una vecindad de 0 para la que se cumple (1). Existe $m \geq 1$ tal que $x_n \in U$ si $n \geq m$; de donde , $x_m^k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Supongamos que A cumple (2) pero no (3). Entonces existen $B \subset A$ acotado y una sucesión (x_n) en B tal que $\left(\frac{x_n}{n}\right)^k$ no tiende a cero cuando $k \to \infty$, para todo $n \geq 1$; pero $\left(\frac{x_n}{n}\right) \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$ porque B es acotado, por lo que dicha sucesión no satisface (2), lo cual es una contradicción. $\square$

Las implicaciones opuestas no son ciertas. En la siguiente subsección mostraremos ejemplos de un álgebra infrasecuencial que no es secuencial, y de una secuencial que no es fuertemente secuencial.

En sentido positivo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.2. *Si A es metrizable, entonces las condiciones fuertemente secuencial y secuencial coinciden en A.*

Demostración. Supongamos que A es secuencial pero no fuertemente secuencial. Entonces, para cada $B_{\frac{1}{n}}(0)$ existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(0)$ tal que $x_n^k \nrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$. Como la sucesión (x_n) claramente tiende a 0, se contradice que A es secuencial. $\square$

Proposición 4.1.3. *Si la unización A_e es infrasecuencial, secuencial o fuertemente secuencial, entonces A tiene la propiedad correspondiente.*

Demostración. Sólo probaremos el caso en que A_e es fuertemente secuencial. Sea U vecindad de cero en A_e para la que se cumple la condición dada en la definición de fuertemente secuencial. Entonces, existe una vecindad V de 0 en A tal que $V \times \{0\} \subset U$. Sabemos que $(x,0)^k = \left(x^k, 0\right) \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, para todo $(x,0) \in V \times \{0\}$; de donde $x^k \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, para todo $x \in V$. $\square$

Proposición 4.1.4. *Sea $\mathscr{A}$ la clase de todas las álgebras infrasecuenciales. Entonces $\mathscr{A}$ es cerrada bajo las siguientes operaciones:*
(a) *subálgebras*
(b) *productos finitos*
(c) *cocientes, cuando el álgebra original es metrizable*
(d) *unización*

Demostración. (a) Si $B \subset A$ es una subálgebra, entonces cada conjunto acotado en B con la topología relativa, es también acotado en A. Por ende, el resultado se sigue de que A es infrasecuencial.

(b) Sean $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathscr{A}$. En $A_1 \times \ldots \times A_n$ consideramos la topología producto y las operaciones lineales usuales y el producto entrada por entrada. Sea $B \subset A_1 \times \ldots \times A_n$ acotado. Como las proyecciones $P_i : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow A_i$ son funciones lineales continuas para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $B_i = P_i(B)$ es acotado y $B \subset B_1 \times \ldots \times B_n$. Como cada A_i es infrasecuencial, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reales positivos tales que $(\lambda_i x_i)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$ para cada $x_i \in B_i$ y $1 \leq i \leq n$. Escogiendo $\lambda = min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, tenemos que $\lambda^k \left(x_1^k, ..., x_n^k\right) \to 0$ para toda n-ada $x = (x_1, ..., x_n)$ en $B_1 \times \ldots \times B_n$ y en particular, cuando $x \in B$.

(c) Sea I un ideal bilateral del álgebra infrasecuencial y metrizable A. La topología del álgebra cociente $Q = A/I$ esta dada por la F-norma

$$\|\overline{x}\|_Q = inf_{\overline{y}=\overline{x}} \|y\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es una F-norma que define la topología de A.

Supongamos que Q no es infrasecuencial. Existe un subconjunto acotado B de Q tal que para cualquier $\lambda > 0$, es falso que $(\lambda\overline{x})^k \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $\overline{x} \in B$. Así, para cada $n \geq 1$ escojamos $\overline{x}_n \in B$ tal que $\left(\frac{1}{n^2}\overline{x}_n\right)^k \nrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$. Sea $n \geq 1$ y escojamos $y_n \in A$ tal que $\overline{y}_n = \frac{1}{n}\overline{x}_n$ y $\|y_n\| < \left\|\frac{1}{n}\overline{x}_n\right\|_Q + \frac{1}{n}$. Entonces la sucesión (y_n) converge a 0 en A, puesto que $\left\|\frac{1}{n}\overline{x}_n\right\|_Q \to 0$ al ser $(\overline{x}_n)$ una sucesión acotada en Q. Como (y_n) es una sucesión acotada en A, existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda y_n)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $n \geq 1$. Escogiendo n suficientemente grande, tenemos que $\left(\frac{1}{n}y_n\right)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$, y por tanto, $\left(\frac{1}{n^2}\overline{x}_n\right)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esto contradice la elección de $\overline{x}_n$.

(d) Sea A un álgebra topológica infrasecuencial y A_e su unización. La topología de $A_e = A \times \mathbb{F}$ es la producto y en este caso está dada por las seminormas de la forma $q_p(a, \alpha) = p(a) + |\alpha|$, con $(a, \alpha) \in A_e$ y p en una familia P de seminormas que definen la topología de A. Por ende, un conjunto $U \times V$ es acotado en A_e si y sólo si U es acotado en A y V es acotado en $\mathbb{F}$.

Si tomamos $B \subset A_e$ acotado, entonces $B \subset U \times V$, con U acotado en A y V acotado en $\mathbb{F}$, pues las proyecciones son lineales y continuas. Al ser A y $\mathbb{F}$ álgebras infrasecuenciales, existe $\lambda > 2$ tal que $p\left(\frac{a^n}{\lambda^n}\right) \longrightarrow 0$ y $\frac{|\alpha|^n}{|\lambda|^n} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, para todo $(a, \alpha) \in U \times V$ y toda seminorma $p \in P$.

Afirmamos que $q_p\left(\frac{(a,\alpha)^n}{(2\lambda^2)^n}\right) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para todo $p \in P$. Por las dos convergencias señaladas al final del párrafo anterior, sabemos que para $p \in P$, existe $M_p > 0$ tal que $p\left(\frac{a^n}{\lambda^n}\right), \frac{|\alpha|^n}{|\lambda|^n} < M_p$ para todo $n \geq 1$.

Para cada $n \geq 1$, tenemos

$$(a, \alpha)^n = \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} a^k,\, \alpha^n\right);$$

de donde,

$$\begin{aligned}
q_p\left(\frac{(a,\alpha)^n}{(2\lambda^2)^n}\right) &\leq \frac{1}{2^n\lambda^{2n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left|\alpha^{n-k}\right| p\left(a^k\right)\right) + \frac{|\alpha^n|}{2^n\lambda^{2n}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{k}\frac{|\alpha^{n-k}|}{2^{n-k}\lambda^{n-k}}\frac{p\left(a^k\right)}{2^k\lambda^k}\right) + \frac{|\alpha^n|}{2^n\lambda^{2n}} \\
&\leq M_p\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^n}{\lambda^n}\frac{p\left(a^k\right)}{2^k\lambda^k}\right) + \frac{|\alpha^n|}{2^n\lambda^{2n}},
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\binom{n}{k} < 2^n$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Para probar nuestra afirmación, basta ver que $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^n}{\lambda^n}\frac{p\left(a^k\right)}{2^k\lambda^k}\right) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$; lo que es cierto, ya que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^n}{\lambda^n}\frac{p\left(a^k\right)}{2^k\lambda^k} \leq \frac{2^n}{\lambda^n}M_p$$

y $\lambda > 2$. □

4.1.1. Ejemplos

4.1.1.1. El álgebra $C^*(\mathbb{R})$ con la topología estricta β es infrasecuencial, pero no secuencial

Sea $A = C^*(\mathbb{R})$ el álgebra de las funciones escalares continuas y acotadas, definidas en $\mathbb{R}$, con la topología estricta β; es decir, la topología definida por la familia de seminormas $P = \left\{ p_\phi \left| \phi \in C_0^+ (\mathbb{R}) \right. \right\}$, donde $C_0^+ (\mathbb{R}) = \{ \phi \in C^* (\mathbb{R}) \left| \phi \geq 0 \right.$ y se anula al infinito$\}$ y cada p_ϕ está dada por:

$$p_\phi (f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \, \phi(x) .$$

Entonces,

1. A es localmente convexa con producto continuo
2. No es secuencial
3. Es infrasecuencial

La notación β para esta topología no deberá confundirse con la usada para el radio de acotamiento.

1. Si $f, g \in A$, entonces:

$$\begin{aligned}
p_\phi (fg) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \, |g(x)| \, \phi(x) \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \sqrt{\phi}(x) \, |g(x)| \sqrt{\phi}(x) \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \sqrt{\phi}(x) \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \sqrt{\phi}(x) \\
&= p_{\sqrt{\phi}} (f) \, p_{\sqrt{\phi}} (g) .
\end{aligned}$$

La seminorma $p_{\sqrt{\phi}} \in P$ porque $\sqrt{\phi}$ es no negativa y se anula al infinito. Por la Proposición 2.3.3, $(C^* (\mathbb{R}), \beta)$ es un álgebra localmente convexa con producto continuo.

Para probar las afirmaciones (2) y (3) requerimos del siguiente resultado.

Lema 4.1.1. *Un conjunto es β-acotado si y sólo si es uniformemente acotado, es decir acotado en la norma uniforme de $C^* (\mathbb{R})$.*

Demostración. Para probar la suficiencia supongamos que $B \subset A$ es uniformemente acotado, entonces hay un real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in B$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Sea p_ϕ una de las seminormas que definen a β. Al ser ϕ una función que se anula al infinito, es también acotada, y por ende existe $N > 0$ tal que $\phi(x) \leq N$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $p_\phi (f) \leq MN$. Por ende, B es β-acotado.

Probemos ahora la afirmación recíproca. Supongamos que $B \subset A$ es β-acotado pero no es uniformemente acotado; así, existen sucesiones (f_n) en B y (x_n) en $\mathbb{R}$, tales que $|f_n (x_n)| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $|x_n| \to \infty$. En efecto, si esto no pasa, existen $M > 0$ y una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)$ de (x_n) tales que $\left(x_{n_j}\right) \subset [-M, M]$. Sea ϕ la función definida como:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & si\ |x| \geq M + 1 \\ x + M + 1 & si\ -M - 1 \leq x \leq -M \\ 1 & si\ -M \leq x \leq M \\ -x + M + 1 & si\, M \leq x \leq M + 1 \end{cases}$$

Así, $p_\phi\left(f_{n_j}\right) \geq \left|f_{n_j}\left(x_{n_j}\right)\right| \phi\left(x_{n_j}\right) \geq n_j$, contradiciendo el hecho de que B es β-acotado. Por tanto, $|x_n| \to \infty$.

Construiremos una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n), y una sucesión (I_k) de intervalos compactos en $\mathbb{R}$ disjuntos y cada uno con interior no vacío y centrado en x_{n_k}. Comencemos con $x_{n_1} = x_1$, y I_1 un intervalo compacto de longitud positiva con centro en x_{n_1}. Como $|x_n| \to \infty$, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \notin I_1$; existe también un intervalo compacto con interior no vacío I_2 con centro en x_{n_2}, y tal que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Procedemos de manera inductiva, supongamos definidos hasta el k-ésimo elemento x_{n_k} y el intervalo I_k, con las propiedades establecidas. Existe $x_{n_{k+1}}$ con $n_{k+1} > n_k$, tal que $x_{n_k} \notin (I_1 \cup \ldots \cup I_k)$, y existe un intervalo compacto I_{k+1} de longitud positiva y con centro en $x_{n_{k+1}}$ tal que $I_{k+1} \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_k) = \emptyset$. Por tanto, quedan construidas la subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y la sucesión (I_k). Supongamos que $I_k = [x_{n_k} - \delta_k,\, x_{n_k} + \delta_k]$ para todo k.

Sea φ_{n_k} la función dada como:

$$\varphi_{n_k}(x) = \begin{cases} 0 & si\, x \notin I_k \\ \frac{x - \left(x_{n_k} - \delta_k\right)}{\delta_k} & si\, x \in [x_{n_k} - \delta_k,\, x_{n_k}] \\ \frac{x_{n_k} + \delta_k - x}{\delta_k} & si\, x \in [x_{n_k},\, x_{n_k} + \delta_k] \end{cases}$$

La cual claramente es continua, no negativa, menor o igual que 1 en todo punto y se anula fuera de I_k. Dada una sucesión de reales positivos (c_k), convergente a cero, definimos una nueva función $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{n_k}$. Veamos que φ es continua, y para ello probemos ahora que la sucesión de sumas parciales satisface una condición uniforme de Cauchy. Sean $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ y $N \geq 1$ tal que si $k \geq N$ entonces $c_k < \varepsilon$. Escogiendo $m > n \geq N$ se cumple que:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_{n_k}(x)-\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_{n_k}(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} c_k\varphi_{n_k}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k\varphi_{n_k}(x)<\varepsilon.\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$.

La última desigualdad es cierta porque x pertenece a lo más a uno de los intervalos I_k, por lo que $\varphi_{n_j}(x)\neq 0$ a los más para un subíndice j.

Veamos ahora que φ se anula al infinito, o sea, que fuera de un compacto se hace tan pequeña como queramos. Sea $\varepsilon>0$ y consideremos el compacto $I_1\cup\ldots\cup I_N$. Si $x\notin I_1\cup\ldots\cup I_N$, entonces $\varphi(x)$=0 o bien$|\varphi(x)|=c_k<\varepsilon$ para una única $k>N$; por ende, φ se anula al infinito, y entonces tendrá asociada una seminorma de las que generan la topología de A.

Tomando $(c_k)=\left(\frac{1}{\sqrt{n_k}}\right)$ y la φ correspondiente a esta elección, tenemos que:

$$\begin{aligned}p_{\varphi}(f_{n_k}) &\geq |f_{n_k}(x_{n_k})|\,\varphi(x_{n_k}) \\ &\geq n_k\left(\frac{1}{\sqrt{n_k}}\right)=\sqrt{n_k}\end{aligned}$$

Contradiciendo el hecho de que B es β-acotado. Por consiguiente, B es uniformemente acotado, concluyendo la prueba. □

Prueba de que El álgebra $A=(C^*(\mathbb{R}),\beta)$ es infrasecuencial, pero no secuencial:

Sea (f_n) la sucesión en A dada como:

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & si\, x<n-1\\ x-(n-1) & si\, n-1\leq x\leq n\\ 1 & si\, x>n\end{cases}$$

Para cada $n\geq 1$ definimos la función

$$\phi_n(x)=\begin{cases}0, & si\, x<n-1\\ x-(n-1) & si\, n-1\leq x\leq n\\ n+1-x & si\, n\leq x\leq n+1\\ 0 & si\, x>n+1.\end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p_{\phi_n}\left(f_n^k\right) &\geq |f_n(n)|^k \phi_n(n) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, $\left(f_n^k\right)$ no tiende a cero cuando $k \to \infty$, en la topología β, para todo $n \geq 1$ y por tanto, A no es secuencial.

Por otra parte, sea $B \subset A$ un subconjunto β-acotado. En virtud del lema anterior, existe $\mu > 0$ tal que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \mu$ para $f \in B$ y $x \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = \frac{1}{\mu}$ y $\phi \in C_0^+(\mathbb{R})$, entonces $p_\phi\left((\lambda f)^k\right) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right)^k \phi(x)$, por lo que $(\lambda f)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$, en la topología β, para todo $f \in B$. Es decir, A es infrasecuencial.

4.1.1.2. El álgebra $C([0,\Omega))$ de las funciones escalares con la topología compacto-abierta, es un álgebra secuencial, pero no fuertemente secuencial

Sea $[0,\Omega)$ el espacio de los ordinales estrictamente menores que el primer ordinal no numerable Ω, con la topología del orden (ver Apéndice A). Consideremos el álgebra $C([0,\Omega))$ de las funciones escalares y continuas con dominio en $[0,\Omega)$, al cual le daremos una topología localmente convexa, que veremos que es m-convexa. Sea $f \in C([0,\Omega))$.

Para cada cada compacto $K \subset [0,\Omega)$, definimos la seminorma $p_K(f) = \sup_{x\in K}|f(x)|$. A la topología dada por estas seminormas se le llama la *topología compacto-abierta en* $C([0,\Omega))$. Como la familia de seminormas es saturada, para construir la base usual de vecindades básicas de 0 basta tomar una sola seminorma. En efecto, dadas $p_{K_1},\ldots,p_{K_n}$, el conjunto $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ es compacto, y $p_K = \underset{1\leq i\leq n}{max}(p_{K_i})$.

Notemos también que si $K \subset [0,\Omega)$ es compacto, la familia $\{[0,x+1)\,|x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, por lo que

$$K \subset [0,x+1) = [0,x]$$

para alguna $x \in K$.

El espacio $C([0,\Omega))$ con la topología compacto-abierta, posee las siguientes propiedades:

1. Es un álgebra m-convexa
2. No es Q-álgebra

3. Es secuencialmente completa
4. Es secuencial
5. No es fuertemente secuencial.

Demostración. (a) Sean $f, g \in C([0, \Omega))$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} p_K(fg) &= \sup_{x \in K} |f(x)| \, |g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in K} |f(x)| \sup_{x \in K} |g(x)| \\ &= p_K(f) \, p_K(g) \end{aligned}$$

como queríamos probar.

(2) Sean $K \subset [0, \Omega)$ compacto y $\varepsilon > 0$. Probaremos que el conjunto $\{f \in C([0, \Omega)) \,|\, p_K(f-1) < \varepsilon\}$, donde 1 representa la función constante con ese valor, tiene al menos un elemento que no es invertible.

Sea $x \in K$ tal que $K \subset [0, x]$. Definimos la función $f : [0, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ como:

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{si}\, y \geq x+1 \end{cases}$$

Claramente f es continua en $[0, \Omega)$, ya que es constante en los cerrados $[0, x]$ y $[x+1, \Omega)$. Además, $p_K(1-f) < \varepsilon$ por la definición de f, y g no es invertible, pues se anula en Ω (en una infinidad de puntos). Por la Proposición 2.2.1, $C([0, \Omega))$ no es Q-álgebra.

Para ver que se cumplen las propiedades (3) y (4) requerimos del siguiente lema:

Lema 4.1.2. *Sea (A, τ) un álgebra topológica de Hausdorff en la que está definida una norma de álgebra $\|\cdot\|$, que determina una topología más fuerte que τ y tal que $(A, \|\cdot\|)$ es de Banach. Si toda sucesión de Cauchy según τ lo es según la norma, entonces (A, τ) es secuencialmente completa y secuencial. Así, una sucesión en A convergen según τ si y sólo si lo hace según la norma $\|\cdot\|$.*

Demostración. Probemos primero que A es secuencialmente completa. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en τ; luego, (x_n) es de Cauchy según la norma, por hipótesis. Como $(A, \|\cdot\|)$ es de Banach, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ para alguna $x \in A$; y como esta topología es más fuerte que τ, también se tiene que $x_n \xrightarrow{\tau} x$. O sea, (A, τ) es secuencialmente completa, como queríamos probar.

Ahora probemos que A es secuencial. Sea (x_n) tal que $x_n \longrightarrow 0$ en τ. Luego (x_n) es de Cauchy en τ, y por ende también en la norma. Entonces, (x_n) tiene límite en $(A, \|\cdot\|)$, por ser éste un espacio de Banach, y como 0 es el límite de (x_n) en una topología más débil, concluimos que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Así, existe $N \geq 1$ tal que $\|x_N\| < 1$, lo que implica que $x_N^k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$; al ser τ una topología más débil, se tiene que $x_N^k \xrightarrow{\tau} 0$, lo que termina la prueba del lema. □

Pruebas de (3) y (4). Por el Teorema A.2.9, dada $f \in C([0, \Omega))$ existe $x \in [0, \Omega)$ tal que f es constante en $[x, \Omega)$. Claramente $[0, x]$ es compacto en $[x, \Omega)$, pues es cerrado en el compacto $[0, \Omega]$. Por tanto, f es acotada en $[0, \Omega)$, así que la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ está definida en $C([0, \Omega))$. La topología dada por $\|\cdot\|_\infty$ es más fuerte que la compacto-abierta, ya que para $\|\cdot\|_\infty$ se toma el supremo en todo $[0, \Omega)$ y para las seminormas p_K se toman en subconjuntos compactos $K \subset [0, \Omega)$. El álgebra $(C([0, \Omega)), \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach.

Sean $\varepsilon > 0$ y (f_n) una sucesión de Cauchy en la topología compacto-abierta. Tomemos una sucesión $(x_n) \subset [0, \Omega)$ tal que f_n es constante a partir de x_n, y consideremos $s = \sup(x_n)$, el cual es menor que Ω por el Teorema A.1.1. Como $[0, s]$ y $[s, s+1]$ son compactos de $[0, \Omega)$ y (f_n) es de Cauchy en la topología compacto abierta, existe $N \geq 1$ tal que $p_{[0,s]}(f_n - f_m) < \varepsilon$ y $p_{[s,s+1]}(f_n - f_m) < \varepsilon$ si $n, m > N$. Es claro que $\sup_{x \in [s,s+1]} |f_n(x) - f_m(x)| = \sup_{x \in [s,\Omega)} |f_n(x) - f_m(x)|$, pues cada elemento de (f_n) es constante en $[s, \Omega)$. De donde, $n, m > N$ implica $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, por lo que (f_n) es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_\infty$. Así, por el lema anterior, A es secuencialmente completa y secuencial.

Por lo visto en el párrafo anterior, tenemos que una sucesión en $C([0, \Omega))$ converge en la topología compacto-abierta si y sólo si converge en la uniforme. En cualquier caso los límites coinciden.

Prueba de (5) Supongamos que A es fuertemente secuencial; luego, existen $\varepsilon > 0$ y un compacto $K \subset [0, \Omega)$, tales que si $p_K(f) < \varepsilon$, entonces $f^k \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$, en la topología compacto-abierta. Afirmamos que los elementos de la vecindad $U = \{f \in C([0, \Omega)) | p_K(f - 1) < \varepsilon\}$ de 1, son invertibles. Sea $f \in U$ y hagamos $g = 1 - f$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(1-g)\left(\sum_{k=0}^{n} g^k\right) = \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} g^k\right)(1-g) &= \sum_{k=0}^{n} g^k - \sum_{k=1}^{n+1} g^k \\
&= 1 - g^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Como $p_K(g) < \varepsilon$, concluimos que para la sucesión $(g_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} g^k\right)$ se cumple que $(1-g)\, g_n = g_n (1-g) \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por otro lado, sabemos que $\left(C([0,\Omega]), \|\cdot\|_\infty\right)$ es un álgebra de Banach y las dos convergencias anteriores también se dan en esta topología. Por (c) del Teorema 2.3.2, $1 - g = f$ es invertible. Así pues, U es una vecindad de 1 compuesta por elementos invertibles, lo que implica, de acuerdo a la Proposición 2.2.1, que A es una Q-álgebra. Esto contradice (2), por consiguiente A no es fuertemente secuencial. □

La propiedad (5) se sigue también de la Proposición 4.3.1 (a), que probaremos más adelante y que relaciona las nociones de Q-álgebra, m-convexidad y completez secuencial con la de fuertemente secuencial.

4.1.2. Ejemplos de álgebras secuenciales

4.1.2.1. El álgebra $C[0,1]$ de las funciones en $[0,1]$ escalares y continuas, con la topología τ de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos y numerables

La topología τ está dada por las seminormas de la forma:

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

con $K \subset [0,1]$ compacto y numerable.

Esta álgebra es

1. m-convexa
2. Secuencial

Es evidente que el álgebra es m-convexa.

También es claro que la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, cumple que $p_K(f) \leq \|f\|_\infty$ para todo K y $f \in C[0,1]$, y $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ es un álgebra de Banach.

Para ver que $C[0,1]$ es secuencial basta ver, por el Lema 4.1.2, que toda sucesión de Cauchy según τ también es de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.

Sea pues (f_n) una sucesión de Cauchy en $(C[0,1], \tau)$, y supongamos que (f_n) no es de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \geq 1$, $\|f_n - f_N\|_\infty \geq \varepsilon$ para algún $n > N$; o en otras palabras, $|f_n(x) - f_N(x)| \geq \varepsilon$ para algún $x \in [0,1]$. En particular, tomando $n_1 = 1$, existen $n_2 > n_1$ y $x_1 \in [0,1]$ tales que $|f_{n_2}(x_1) - f_{n_1}(x_1)| \geq \varepsilon$; procediendo inductivamente, podemos construir una subsucesión (f_{n_k}) de

(f_n) y una sucesión (x_k) en $[0,1]$, tales que $\left|f_{n_{k+1}}(x_k) - f_{n_k}(x_k)\right| \geq \varepsilon$ para todo $k \geq 1$. Como $[0,1]$ es compacto, existe una subsucesión (x_{k_m}) de (x_k) que converge a algún $x \in [0,1]$.

Consideremos ahora el subconjunto compacto y numerable $K = \{x\} \cup \{x_{k_m} : m \geq 1\}$ de $[0,1]$. Existe $M \geq 1$ tal que $p_K\left(f_{n_{k_m+1}} - f_{n_{k_m}}\right) < \varepsilon$ si $m > M$, lo que implica que:

$$\left|f_{n_{k_m+1}}(x_{k_m}) - f_{n_{k_m}}(x_{k_m})\right| < \varepsilon$$

si $m > M$. Esto contradice nuestras construcciones de (f_{n_k}) y (x_k). Por consiguiente, (f_n) es de Cauchy con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$, como queríamos probar.

4.1.2.2. El álgebra ℓ^1 de sucesiones escalares absolutamente sumables con la topología débil y la convolución $(*)$ como producto

El producto de $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$ está definido como:

$$(a_n) * (b_n) = \left(a_0b_0,\, a_0b_1 + a_1b_0,\, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots, \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}, \ldots\right).$$

Y consideramos en esta álgebra la topología débil $w = \sigma\left(\ell^1, \ell^\infty\right)$.

Esta álgebra es:

1. Localmente convexa
2. Secuencial

Con las operaciones lineales y la norma usuales, y el producto arriba considerado, ℓ^1 es un álgebra normada con la norma usual, ya que:

$$\begin{aligned}
\|(a_n) * (b_n)\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_j| \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \\
&= \|(a_n)\|_1 \|(b_n)\|_1 .
\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.3.2 tenemos que $\left(\ell^1, w\right)$ es un álgebra localmente convexa.

Por el Teorema de Schur (página 23), una sucesión en ℓ^1 converge con respecto a w si y sólo si converge con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$.

Así, dada (x_n) en ℓ^1 tal que $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$, tenemos que también $x_n \stackrel{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow} 0$. Como toda álgebra normada es secuencial, existe $m \geq 1$ tal que $x_m^k \stackrel{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow} 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$, de donde $x_m^k \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$ y entonces $\left(\ell^1, w\right)$ es secuencial.

4.2. Relación entre las tres nociones de secuencialidad y el radio de acotamiento

En la sección supondremos que A es un álgebra localmente convexa de Hausdorff.

Hay una relación entre las nociones de secuencialidad y la función radio de acotamiento β.

Teorema 4.2.1. *El álgebra A es*

(a) Infrasecuencial si y sólo si β es acotada en A (o sea, la imagen de cada acotado es acotada)

(b) Secuencial si y sólo si β es secuencialmente continua en 0

(c) Fuertemente secuencial si y sólo si β es continua en 0.

Demostración. (a) Sea $B \subset A$ acotado. Supongamos que A es infrasecuencial. Luego, existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^k \longrightarrow 0$ para todo $x \in B$. Entonces, $\beta(x) \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $x \in B$, por lo que β es acotada. Ahora supongamos que β es acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $\beta(x) < M$ para todo $x \in B$. Por ende, $\left(\frac{1}{M}x\right)^k \longrightarrow 0$ para todo $x \in B$, y entonces A es infrasecuencial.

(b) Supongamos que A es secuencial. Si β no es secuencialmente continua en 0, entonces existe una sucesión (x_n) en A tal que $x_n \longrightarrow 0$ y $\beta(x_n) \nrightarrow 0$. Hay un real $\varepsilon > 0$ y una subsucesión (x_{n_m}) tal que $\beta(x_{n_m}) > \varepsilon$ para todo $m \geq 1$; es decir, $\beta\left(\frac{x_{n_m}}{\varepsilon}\right) > 1$ para todo $m \geq 1$. Claramente, $\frac{x_{n_m}}{\varepsilon} \longrightarrow 0$, y como A es secuencial $\left(\frac{x_{n_{m_0}}}{\varepsilon}\right)^k \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$ para algún m_0. Esto implica que $\beta\left(x_{n_{m_0}}\right) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción.

Para probar la parte «si», supongamos que β es secuencialmente continua en 0 y sea (x_n) una sucesión en A tal que $x_n \longrightarrow 0$. Existe $N \geq 1$ tal que $\beta(x_N) < 1$; es decir, $(x_N)^k \longrightarrow 0$. O sea, A es secuencial.

(c) Supongamos que A es fuertemente secuencial. Luego, existe una vecindad balanceada del cero V tal que $x^k \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, para todo $x \in V$;

de donde, $\beta(x) \leq 1$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\frac{\varepsilon}{2}V$ es una vecindad del cero, y para todo elemento $x \in V$ se cumple que $\beta\left(\frac{\varepsilon}{2}x\right) = \frac{\varepsilon}{2}\beta(x) < \varepsilon$. Por consiguiente, β es continua en 0.

Para probar la otra implicación, observamos que de la continuidad de β se sigue que existe una vecindad V de cero tal que $\beta(x) < 1$ para todo $x \in V$, es decir $x^k \longrightarrow 0$ para todo $x \in V$, con lo que se concluye la prueba. □

Lema 4.2.1. *Supongamos que A es conmutativa y con producto continuo. Definimos $C = \{x \in X \,|\{x^n \,| n \geq 1\}$ es acotado$\}$. Entonces C es un disco idempotente.*

Demostración. Sean $x, y \in C$. Probemos primero que C es idempotente. Sea $V \in \mathcal{N}(A)$; como el producto es continuo, existe $W \in \mathcal{N}(A)$ tal que $W \cdot W \subset V$. Como x, y son acotados, existen $\lambda_x, \lambda_y > 0$ tales que $(x^n) \subset \lambda_x W$ y $(y^n) \subset \lambda_y W$. Por ser A conmutativa, $(xy)^n = (x^n)(y^n) \subset \lambda_x \lambda_y W \cdot W \subset \lambda_x \lambda_y V$. Por tanto, $xy \in C$, es decir C es idempotente.

Probemos ahora que es un disco. Sea p una seminorma continua en A y supongamos que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Como A es conmutativa,

$$(\lambda x + \mu y)^n = \mu^n y^n + \lambda^n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} x^k y^{n-k}.$$

Existen una seminorma continua q y $M > 1$ tales que $p(zw) \leq q(z)\, q(w)$ y $p(x^n), q(x^n), p(y^n), q(y^n) \leq M$ para todo $n \geq 1$. De donde,

$$\begin{aligned}
p\left((\lambda x + \mu y)^n\right) &\leq |\lambda|^n p(x^n) + \ |\mu|^n p(y^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} |\lambda|^k |\mu|^{n-k} p\left(x^k y^{n-k}\right) \\
&\leq |\lambda|^n p(x^n) + \ |\mu|^n p(y^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} |\lambda|^k |\mu|^{n-k} q\left(x^k\right) q\left(y^{n-k}\right) \\
&\leq \qquad M^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\lambda|^k |\mu|^{n-k} \\
&= \qquad M^2 \left(|\lambda| + |\mu|\right)^n \leq M^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda x + \mu y \in C$ y C es también un disco. □

Proposición 4.2.1. *Supongamos que A es conmutativa, con producto continuo y que todo elemento de A es acotado. Entonces la función radio de acotamiento β es una seminorma submultiplicativa.*

Demostración. Por el inciso (2) de la Proposición 3.3.5, $\beta(x) < \infty$ si $x \in A$. Sea $C = \{x \in X \,|\{x^n\, |n \geq 1\}$ es acotado$\}$. Como $A = A_0$, para todo $x \in A$ existe $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda x \in C$. Podemos ver que β es la funcional de Minkowski de C. Entonces, por el lema anterior y la Proposición 2.3.4, β es una seminorma submultiplicativa. □

Teorema 4.2.2. *Si A es conmutativa, con producto continuo, bornológica e infrasecuencial, entonces A es fuertemente secuencial.*

Demostración. En la Definición 4.1.1 se hizo notar que si A es infrasecuencial, entonces $A = A_0$; luego, por la proposición anterior y el Teorema 4.2.1, β es una seminorma acotada, de donde β es continua por Teorema1.2.22. Finalmente, usando de nuevo el Teorema 4.2.1 (c), concluimos que A es fuertemente secuencial. □

4.3. Igualdad entre los radios espectral y de acotamiento

En esta subsección suponemos que el álgebra A tiene idéntico e.

Teorema 4.3.1. *Supongamos A tiene idéntico y $r(x) = \beta(x)$ para todo $x \in A$. Entonces, A es una Q-álgebra si y sólo si es fuertemente secuencial.*

Demostración. Supongamos primero que A es una $Q-$álgebra. Entonces existe $V \in \mathcal{N}(A)$ balanceada, tal que $e + V \subset G(A)$. Afirmamos que $U = \frac{1}{2}V$ es la vecindad buscada para comprobar que A es fuertemente secuencial. Sean $x \in U$ y $|\lambda| > \frac{1}{2}$. Tenemos que $2x \in V$, de donde $-\frac{x}{\lambda} = -\frac{2x}{2\lambda} \in V$, por ser V balanceada. Así, $\lambda e - x = e - \frac{x}{\lambda} \in e + V \subset G(A)$. Por ende $\lambda \notin \sigma(x)$, lo que implica, que $\beta(x) = r(x) \leq \frac{1}{2}$. De donde, $x^n \to 0$ y A es fuertemente secuencial.

Supongamos ahora que A es fuertemente secuencial. Por el teorema Teorema 4.2.1 (c), β es continua en cero, así que $\beta^{-1}(-\infty, 1)$ es abierto. De donde, el conjunto $\{x \in A\, |\beta(x) \leq 1\} = \{x \in A\, |r(x) \leq 1\}$ es una vecindad de cero, así que A es una Q-álgebra, por la Proposición 2.2.1. □

En [21, Teorema 2] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Si A es un álgebra compleja m-convexa y secuencialmente completa, entonces $r(x) = \sup_{\alpha} \lim_{n\to\infty} p_\alpha(x_n)^{\frac{1}{n}}$ para todo $x \in A$, donde $\{p_\alpha\}$ es cualquier familia de seminormas m-convexas que definen la topología de A.*

De este teorema y del apartado (6) de la Proposición 3.3.5, obtenemos:

Corolario 4.3.1. *Si A es un álgebra compleja m-convexa y secuencialmente completa, entonces $r(x) = \beta(x)$ para todo $x \in A$.*

Recordemos que

$$S(A) = \{x \in A | r(x) \leq 1\}$$

donde r es la función radio de espectral. Este conjunto se relacionará con

$$D(A) = \{x \in A | \beta(x) < 1\}$$

Lema 4.3.1. *Si $B \subset A$ es balanceado y $e - B \subset G(A)$, entonces $B \subset S(A)$. Si A es pseudo-completa, entonces $e - D(A) \subset G(A)$.*

Demostración. Para la primera parte, tomemos $x \in B$ y $|\lambda| > 1$; basta probar que $\lambda \notin \sigma(x)$, es decir, que $x - \lambda e \in G(A)$. Esto ocurre si y sólo si $e - \frac{x}{\lambda} \in G(A)$, lo cual es cierto porque B es balanceado y $e - B \subset G(A)$.

Para la segunda parte, tomemos $x \in D(A)$. Como $\beta(x) < 1$, existe $0 < |\lambda| < 1$, tal que la sucesión $\left(\frac{x^n}{\lambda^n}\right)$ tiende a 0. Entonces la envolvente cerrada absolutamente convexa B del conjunto $\left\{\frac{x^n}{\lambda^n} | n \geq 1\right\}$ es un disco acotado cerrado e idempotente (Proposición 3.3.2).

Es claro que $\|x\|_B \leq \lambda < 1$, por lo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|x\|_B^n$ converge. Por hipótesis, $(A(B), \|\cdot\|_B)$ es un álgebra de Banach; por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en $A(B)$ y la sucesión (x^n) tiende a 0 en esta álgebra. Los mismos dos hechos suceden entonces en A. Como

$$\left(\sum_{n=0}^{k} x^n\right)(e - x) = (e - x)\left(\sum_{n=0}^{k} x^n\right) = e - x^{k+1}$$

concluimos que $e - x \in G(A)$. $\square$

Corolario 4.3.2. *Si A es pseudo-completa, entonces $D(A) \subset S(A)$ y $r(x) \leq \beta(x)$.*

Demostración. El conjunto $D(A)$ es balanceado porque $\beta(-x) = \beta(x)$ (Proposición 3.3.5 (3)), así que $D(A) \subset S(A)$ por el lema anterior. La segunda parte es obvia cuando $\beta(x) = \infty$. Supongamos que $\beta(x) < \infty$ y tomemos $\beta(x) < \alpha$, o equivalentemente, $\beta\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1$. Entonces $r\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1$, es decir $r(x) \leq \alpha$. Haciendo tender $\alpha \longrightarrow \beta(x)$ por la derecha, concluimos lo que queremos. $\square$

Allan [2] introduce, para un álgebra compleja localmente convexa con idéntico A y todo $x \in A$, el llamado *espectro de Allan* de x, que se denota como $\sigma_A(x)$ y se define del modo siguiente: $\infty \in \sigma_A(x)$ si $x \notin A_0$, es decir, x no es acotado; y un complejo $\lambda \in \sigma_A(x)$ si $x - \lambda e$ no tiene inverso acotado.

El radio *espectral (de Allan)* r_A asociado a este espectro es

$$r_A = sup\{|\lambda| \in \mathbb{C}^\infty \mid \lambda \in \sigma_A(x)\},$$

donde $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $sup\{\infty\} = \infty$.

En [2, Teorema 3.12] se prueba que $\beta(x) \leq r_A(x)$ para todo $x \in A$.

Es claro que si $A = A_0$, entonces $\sigma_A(x) = \sigma(x)$ y $r_A(x) = r(x)$. A partir de esto y el corolario anterior tenemos

Corolario 4.3.3. *Si A es un álgebra compleja, $A = A_0$ y es pseudo-completa, entonces $r(x) = \beta(x)$ para todo $x \in A$.*

Por todo lo anterior, obtenemos:

Proposición 4.3.1. *Supongamos que A es un álgebra compleja que cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones:*

(a) A es un álgebra m-convexa secuencialmente completa

(b) $A = A_0$ y A es pseudo-completa.

Entonces, A es una Q-álgebra si y sólo si es fuertemente secuencial.

4.4. Álgebras metrizables pseudo-Banach

En esta sección A es un álgebra localmente convexa.

Definición 4.4.1. La envolvente idempotente de un subconjunto B de un álgebra es el mínimo subconjunto idempotente del álgebra que contiene a B y coincide con $\bigcup_{n=1}^\infty B^n$.

Lema 4.4.1. *Si cada acotado de A es absorbido por algún $B \in \beta_1$ (Definición 3.3.1), entonces la envolvente idempotente de un conjunto $B \in \beta_0$ (Definición 3.1.1) pertenece a β_1.*

En los siguientes tres resultados X es un espacio localmente convexo y metrizable.

Lema 4.4.2. *Si (x_n) es una sucesión en X que converge a cero, entonces $\frac{1}{r_n} x_n \to 0$ para alguna sucesión (r_n) de reales positivos que converge a 0.*

Demostración. Existe $n_1 \geq 1$ tal que $x_n \in B_1(0)$ para todo $n \geq n_1$. El conjunto $\frac{1}{2} B_{\frac{1}{2}}(0)$ es una vecindad de cero porque las homotecias son homeomorfismos, así que existe $n_2 > n_1$ tal que $x_n \in \frac{1}{2} B_{\frac{1}{2}}(0)$ para todo $n \geq n_2$.

Procediendo inductivamente, podemos construir una sucesión creciente de naturales $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots$ tal que $x_n \in \frac{1}{k} B_{\frac{1}{k}}(0)$ para todo $n \geq n_k$ y todo $k \geq 1$; o equivalentemente, $kx_n \in B_{\frac{1}{k}}(0)$ para todo $n \geq n_k$ y todo $k \geq 1$. De este modo, definiendo $r_n = 1$ si $1 \leq n < n_1$, y $r_n = \frac{1}{k}$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$, tenemos que $r_n \longrightarrow 0$ y $\frac{1}{r_n} x_n \in B_{\frac{1}{k}}(0)$ para todo $n \geq n_k$; o sea, $\frac{1}{r_n} x_n \to 0$. □

Lema 4.4.3. *Una sucesión (x_n) Mackey-converge a cero en X si y sólo si $\left(\frac{1}{r_n} x_n\right) \to 0$ en X para alguna sucesión (r_n) de reales positivos que converge a 0.*

Demostración. Si (x_n) es Mackey-convergente a cero, también converge a cero en X, y el resultado se sigue del lema anterior. Supongamos ahora que $\left(\frac{1}{r_n} x_n\right) \to 0$ en X, con $r_n \longrightarrow 0$. Sea B la envolvente cerrada absolutamente convexa del conjunto acotado $\left\{\frac{1}{r_n} x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Luego, $x_n \in X(B)$ y $\|x_n\|_B \leq r_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces (x_n) converge a 0 en $X(B)$; es decir, Mackey-converge a cero en X. □

Teorema 4.4.1. *La convergencia de una sucesión en X en el sentido de Mackey es equivalente a su convergencia en X.*

Demostración. Se probó en la Proposición 3.2.3 que la convergencia de Mackey implica la convergencia en X. Para la otra parte, basta probar el resultado para las sucesiones convergentes a cero, pues las traslaciones son homeomorfismos. Por los dos lemas anteriores: si (x_n) converge a cero en X, entonces es Mackey-convergente a cero. □

Definición 4.4.2. Un álgebra pseudo-completa en la que cada acotado es absorbido por algún $B \in \beta_1$ es llamada un álgebra pseudo-Banach.

Proposición 4.4.1. *Si cada acotado de A es absorbido por algún $B \in \beta_1$, entonces A es infrasecuencial.*

Demostración. Sea B_0 acotado en A. Existe $B \in \beta_1$ y $\lambda > 0$ tales que $B_0 \subset \lambda B$. Por tanto, $\|x\|_B \leq \lambda$ para todo $x \in B_0$, lo que implica que $\left(\frac{x}{\lambda+1}\right)^n \longrightarrow 0$ en $A(B)$ cuando $n \to \infty$. Al ser más fuerte la topología dada por $\|\cdot\|_B$ que la de A, concluimos que $\left(\frac{x}{\lambda+1}\right)^n \longrightarrow 0$ en A para todo $x \in B_0$. □

Teorema 4.4.2. *Si cada acotado de A es absorbido por algún $B \in \beta_1$, entonces una sucesión (x_n) en A converge a x en el sentido de Mackey si y sólo (x_n) y x pertenecen a $A(B)$ para algún $B \in \beta_1$ y $x_n \to x$ en $A(B)$.*

Demostración. La Parte «si» se sigue de la Proposición 3.2.1.

Parte «sólo si». Existe una acotado B_0 tal que (x_n) y x pertenecen a $A(B_0)$ y $x_n \to x$ en $A(B_0)$. Por hipótesis, existen $B \in \beta_1$ y $\lambda > 0$ tales que $B_0 \subset \lambda B$; de donde $A(B_0) \subset A(B)$, y por tanto (x_n) y x pertenecen a $A(B)$, y $\|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_{B_0}$, de donde se sigue el resultado. □

Teorema 4.4.3. *Si A metrizable y pseudo-Banach, entonces A es fuertemente secuencial.*

Demostración. Basta probar que A es secuencial, por la Proposición 4.1.2. Tomemos pues una sucesión (x_n) tal que $x_n \longrightarrow 0$. Por los teoremas probados en esta sección, existe $B \in \beta_1$ tal que $x_n \longrightarrow 0$ en $A(B)$; así, existe $m \geq 1$ tal que $\|x_m\|_B < 1$, de donde $x_m^k \longrightarrow 0$ en $A(B)$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Por ende $x_m^k \longrightarrow 0$ en A cuando $k \to \infty$, como queríamos probar. □

4.5. Secuencialidad en límites inductivos de álgebras topológicas

En esta sección, usaremos los resultados del límite inductivo de espacios vectoriales topológicos, presentados en el Apéndice B.

4.5.1. Límite inductivo de álgebras normadas

Teorema 4.5.1. *Supongamos que $(A_1, \|\cdot\|_1) \subset (A_2, \|\cdot\|_2) \subset \ldots$ es una sucesión creciente de subálgebras normadas de un álgebra A tales que $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ y la inclusión $i_n : A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ tiene norma menor o igual que 1 para cada $n \geq 1$. Entonces la topología τ en A, del límite inductivo asociado al sistema $\{A_n, i_n\}$, es m-convexa.*

Demostración. Sea $S = \{\lambda = (\lambda_n) \, | 0 < \lambda_n \leq 1 \text{ para todo } n \geq 1\}$. Para cada $\lambda \in S$ tomamos la envolvente convexa de C_λ de $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n$, donde B_n es la bola unitaria cerrada en A_n. Tenemos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n$ es balanceado porque cada $\lambda_n B_n$ lo es, y entonces $C_\lambda \subset A$ también es balanceado. O sea, C_λ es la envolvente absolutamente convexa de C. Además es absorbente, pues contiene a $\lambda_n B_n$ para cualquier $n \geq 1$. Por último, veamos que C_λ es idempotente. Por la Proposición 3.3.2, basta probar que C es idempotente. Notemos que esto es cierto si $\lambda_{n_1} B_{n_1} \cdot \lambda_{n_2} B_{n_2} \subset \lambda_{n_2} B_{n_2}$, con $n_1 \leq n_2$, y esto sucede, ya que

$$\begin{aligned} \left\|\lambda_{n_1} x_{n_1} \lambda_{n_2} x_{n_2}\right\|_{n_2} &\leq \left|\lambda_{n_1}\right| \left|\lambda_{n_2}\right| \left\|x_{n_1}\right\|_{n_2} \left\|x_{n_2}\right\|_{n_2} \\ &\leq \left|\lambda_{n_1}\right| \left|\lambda_{n_2}\right| \left\|x_{n_1}\right\|_{n_1} \left\|x_{n_2}\right\|_{n_2} \\ &\leq \left|\lambda_{n_2}\right|, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se tiene porque la inclusión $A_n \hookrightarrow A_m$ tiene norma menor o igual a 1 si $n \leq m$, es decir $\|\cdot\|_m \leq \|\cdot\|_n$.

Sea p_λ la funcional de Minkowski de C_λ. Entonces p_λ es m-convexa, por la Proposición 2.3.4. Afirmamos que $\{p_\lambda\}_{\lambda \in S}$ genera la topología τ.

Sean $\lambda \in S$, $n \geq 1$ y $x \in A_n$. Si $\|x\|_n < 1$ entonces $\lambda_n x \in C_\lambda$; de donde, $p_\lambda(x) \leq \frac{1}{\lambda_n}$. Por la Proposición 1.1.4, $p_\lambda(x) \leq \frac{1}{\lambda_n} \|x\|_n$. Por ende, $\{p_\lambda\}_{\lambda \in S}$ genera en A una topología m-convexa, τ_μ, tal que la inclusión $i_n : A_n \to (A, \tau)$ es continua para cada $n \geq 1$. Por consiguiente, la topología localmente convexa del límite inductivo τ asociada al sistema $\{i_n : A_n \to A\}$ es más fuerte que τ_μ; en símbolos $\tau_\mu \subset \tau$.

Por otra parte, sea q una seminorma τ-continua en A. Como la inclusión $i_n : A_n \to (A, \tau)$ es continua para cada $n \geq 1$, existe una sucesión $\lambda = (\lambda_n) \in S$ tal que $\lambda_n B_n \subset \{x \in A_n : q(x) < 1\}$ para cada $n \geq 1$; de donde $C_\lambda \subset \{x \in A : q(x) < 1\}$, pues el conjunto de la derecha es convexo, y si $p_\lambda(x) < 1$, entonces $q(x) < 1$; o sea, $q(x) \leq p_\lambda(x)$ para todo $x \in A$. De aquí se sigue que $\tau \subset \tau_\mu$. □

4.5.2. Límite inductivo estricto de álgebras normadas y m-convexas

Por el teorema de la subsección anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.5.1. *Sea $(A, \|\cdot\|)$, un álgebra normada y $\{A_n\}$ una sucesión creciente de subálgebras de A, cada una con la topología inducida por la norma en A, tales que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces $\{A_n, i_n\}$, donde $i_n : A_n \to A$ es la inclusión, es un sistema inductivo estricto de espacios localmente convexos y la topología del límite inductivo estricto de este sistema es m-convexa.*

Teorema 4.5.2. *Sea A, un álgebra m-convexa y $\{A_n\}$ una sucesión creciente de ideales de A, cada uno con la topología inducida por la de A y tales que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces $\{A_n, i_n\}$, donde $i_n : A_n \to A$ es la inclusión, es un* *sistema inductivo estricto de espacios localmente convexos y la topología τ en A del límite inductivo estricto de este sistema es m-convexa.*

Demostración. El sistema $\{A_n, i_n\}$, es un sistema inductivo estricto de espacios localmente convexos, ya que cada A_n es un subespacio topológico de A_{n+1}. Sea Q la familia de todas las seminormas en A que son m-convexas y continuas.

Sea $V \in \mathcal{N}(A,\tau)$, donde $\mathcal{N}(A,\tau)$ es la base de vecindades del 0 para τ, vista en el Teorema B.1.1. Para cada $k \geq 1$, existe $p_k \in Q$ tal que $V_k = \{x \in X_k \,|p_k(x) < 1\} \subset V \cap A_k$. Para cada $n \geq 1$ definimos $W_n = \{x \in A_n \,|p_k(x) < 1 \,\text{si}\; 1 \leq k \leq n\}$, el cual es un disco absorbente en A_n. Hagamos $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$, entonces W es balanceado y absorbente en A.

Se cumple que $W \subset V$, pues $x \in W_n$ implica $p_n(x) < 1$, de donde $x \in V_n \subset V \cap A_n \subset V$. Además W es idempotente, ya que si $x \in W_n$, $y \in W_m$ y $n \leq m$, entonces $xy \in A_n$, por ser A_n un ideal, de donde, $p_k(xy) \leq p_k(x)\, p_k(y) < 1$ si $1 \leq k \leq n$ y entonces $xy \in W_n$.

Sea U la envolvente convexa de W. Entonces U es un disco idempotente. Además, U es absorbente por contener a W, y $U \subset V$ por ser V convexo y cumplirse que $W \subset V$. Como U es absolutamente convexo y $W_n \subset U \cap A_n$ para cada $n \geq 1$, tenemos que $U \in \mathcal{N}(A,\tau)$. Por tanto, la colección de todos los discos idempotentes U así construidos es una base de vecindades del 0 para la topología τ del límite inductivo estricto, por lo que ésta es m-convexa. □

Corolario 4.5.2. *Si se cumplen las hipótesis del teorema anterior y cada A_n es cerrado en A, entonces A es infrasecuencial si cada A_n lo es.*

Demostración. Sea $B \subset A$ acotado. Entonces, por la Proposición B.1.5, $B \subset A_n$ para algún $n \geq 1$ y es acotado ahí. Como A_n es infrasecuencial, existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in B$, $(\lambda x)^k \longrightarrow 0$ en A_n cuando $k \to \infty$. Como la topología de A_n está inducida por la de A, la sucesión converge también en A. □

4.5.3. Ejemplos

Ejemplo 4.5.1. Sea $\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}$ el álgebra de las sucesiones escalares que se estacionan en cero, con las operaciones lineales y el producto definidos entrada por entrada, y con la topología τ del límite inductivo estricto determinada por el sistema inductivo de álgebras de Banach $\{\mathbb{F}^n, i_n\}$, donde para cada n, $\mathbb{F}^n$ es el ideal de $\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}$ formado por la sucesiones cuyos términos son 0 a partir del lugar $n+1$, con la norma del supremo de $\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}$ y $i_n : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^{n+1}$ es la inclusión. Entonces $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$ es un álgebra:

1. m-convexa
2. completa, barrilada y bornológica
3. no metrizable
4. infrasecuencial, más aún fuertemente secuencial.

En efecto, por el Teorema 4.5.1, $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$ es un álgebra m-convexa.

Por el Teorema 1.2.10 y el Corolario 2.3.1 cada $\mathbb{F}^n$ es barrilada y bornológica, Se sigue del Teorema B.1.2 y las Proposiciones B.1.7 y B.1.6 que $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$ es un álgebra completa, barrilada y bornológica,

Por el Teorema de categoría de Baire, $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$ no es metrizable, pues $\mathbb{F}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}^n$ e $\operatorname{int}\left(\overline{\mathbb{F}^n}\right) = \operatorname{int}\left(\mathbb{F}^n\right) = \emptyset$ en $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$.

Por ser un álgebra normada, $\mathbb{F}^n$ es infrasecuencial para todo $n \geq 1$. Luego, por el Corolario 4.5.2, $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$ es infrasecuencial y por el Teorema 4.2.2, $\left(\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}, \tau\right)$ es fuertemente secuencial.

Ejemplo 4.5.2. Sea $C_{00}(\mathbb{R})$ el álgebra de funciones escalares continuas definidas en $\mathbb{R}$ y cuyo soporte $supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}}$ es compacto, dotado de la topología τ del límite inductivo estricto determinada por el sistema de álgebras de Banach $\{C[-n,n] : n \geq 1, i_n\}$, donde cada $C[-n,n]$ está formada por las funciones en $C_{00}(\mathbb{R})$ con soporte en $[-n,n]$ y cuya topología es la inducida por la norma del supremo definida en $C_{00}(\mathbb{R})$.

Entonces $C_{00}(\mathbb{R}, \tau)$ es un álgebra:

1. m-convexa
2. completa, barrilada y bornológica
3. no metrizable
4. infrasecuencial, más aún fuertemente secuencial.

En efecto, por el Corolario 4.5.1, la topología de límite inductivo estricto en $C_0(\mathbb{R})$ es m-convexa.

Por el Teorema 1.2.10 y el Corolario 2.3.1 cada $C[-n,n]$ es barrilada y bornológica, Se sigue del Teorema B.1.2 y las Proposiciones B.1.7 y B.1.6 que $C_{00}(\mathbb{R})$ es un álgebra completa, barrilada y bornológica, Por las Proposiciones B.1.4 y 1.2.4, $\operatorname{int}\left(\overline{(\mathrm{C}\,[-\mathrm{n},\mathrm{n}])}\right) = \operatorname{int}\left(C\,[-n,n]\right) = \emptyset$ en $(C_{00}(\mathbb{R}),\tau)$, así que de nuevo por el Teorema de Categoría de Baire, $C_{00}(\mathbb{R})$ no es metrizable.

Por los mismos argumentos usados en el ejemplo anterior se tiene que $C_{00}(\mathbb{R})$ es infrasecuencial, más aún fuertemente secuencial.

Ejemplo 4.5.3. Sea $(\mathscr{D}(\Omega),\mathcal{T})$ el álgebra de funciones de prueba en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$, con las operaciones usuales de funciones y la topología $\mathcal{T}$ del límite inductivo estricto dada por el sistema inductivo estricto de las álgebras de Fréchet $\{\mathscr{D}(K_i)\}_{i=1}^{\infty}$ (ver Apéndice C).

Entonces $(\mathscr{D}(\Omega),\mathcal{T})$ es un álgebra

1. m-convexa
2. completa, bornológica y barrilada
3. no metrizable
4. Q-álgebra sin idéntico
5. fuertemente secuencial.

En el apéndice C se hace ver que la sucesión creciente $\{\mathscr{D}(K_i)\}_{i=1}^{\infty}$ y $\mathscr{D}(\Omega)$ con la $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$-topología satisfacen las hipótesis del Teorema 4.5.2, y así $(\mathscr{D}(\Omega),\mathcal{T})$ es un álgebra m-convexa.

También se prueba que cada $\mathscr{D}(K_i)$ es un álgebra (ideal de $\mathscr{D}(\Omega)$) de Fréchet, por tanto bornológica y barrilada, y cerrada en $\mathscr{D}(K_{i+1})$. Por lo visto en el apéndice B (Proposiciones B.1.6 y B.1.7), $(\mathscr{D}(\Omega),\mathcal{T})$ es completa, bornológica y barrilada.

Por las Proposiciones B.1.4 y 1.2.4, $\operatorname{int}\left(\overline{\mathscr{D}(\mathrm{K_i})}\right) = \operatorname{int}\left(\mathscr{D}(K_i)\right) = \emptyset$ en $(\mathscr{D}(\Omega),\mathcal{T})$. Por el Teorema de Categoría de Baire, $(\mathscr{D}(\Omega),\mathcal{T})$ no es metrizable.

Probaremos que $\mathscr{D}(\Omega)$ es una Q-álgebra. La norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$ definida en $\mathscr{D}(\Omega)$ es $\mathcal{T}$-continua ya que

$$\|\cdot\|_{\infty}\big|_{\mathscr{D}(K_i)} = q_{0,K_i}(f) = \max_{|\beta|\leq 0}\sup_{x\in K_i}\left|D^{\beta}f(x)\right|.$$

Entonces, $V = \{f \in \mathscr{D}(\Omega) \mid \|f\|_{\infty} < 1\}$ es una vecindad de 0 en la topología del límite inductivo.

Por otra parte, dado $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, observamos que $f \circ g = 0$ (donde $\circ$ es la operación círculo) para alguna $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, si y sólo si $g = \frac{f}{f-1}$ pertenece a $\mathscr{D}(\Omega)$; en otras palabras, f tiene casi-inverso en $\mathscr{D}(\Omega)$ si y sólo si $f \neq 1$ en Ω. Por consiguiente, $V \subset \mathscr{D}_q(\Omega)$ y se sigue de la la Proposición 2.2.4 que $\mathscr{D}(\Omega)$ es una Q-álgebra.

Por el Teorema 2.2.2, su unización $\mathscr{D}(\Omega)_e$ es una Q-álgebra y por la Proposición 4.3.1, $\mathscr{D}(\Omega)_e$ es fuertemente secuencial. Finalmente, por la Proposición 4.1.3, $\mathscr{D}(\Omega)$ es fuertemente secuencial.

Capítulo 5

Continuidad de caracteres

Para terminar esta tesis, se hace uso de todo lo visto para probar conclusiones sobre la continuidad de caracteres y homomorfismos de álgebras. Son dos los principales resultados a tomar en cuenta en este capítulo: el Teorema 5.1.1, cuya prueba es larga y usa mucho material visto en el trabajo, y que da origen a dos corolarios similares al Problema de Michael; y el segundo es la introducción de la condición D, aportación original de esta tesis, que generaliza las dos condiciones planteadas por Husain y Ng y que nos permite dar una respuesta parcial a dicho Problema en Teorema 5.2.2. Se presenta un ejemplo de un álgebra que satisface nuestra condición D, así como un ejemplo de una que no la satisface.

5.1. Infrasecuencialidad y continuidad de caracteres

En la sección supondremos que A es un álgebra localmente convexa de Hausdorff y con producto continuo. Si tiene idéntico, éste se denotará por e.

Lema 5.1.1. *Sea A secuencialmente completa. Si (x_k) es una sucesión en A que converge (débilmente) a 0 y C es la envolvente cerrada absolutamente convexa de $\{x_k \,|k \geq 1\}$, entonces*

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \,\big|(\mu_k) \in \ell^1 \right\} \tag{5.1}$$

y C es acotado.

Demostración. Afirmamos primero que si $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| < \infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en A. Sea p una de las seminormas que generan la topología de A.

Como (x_k) converge (débilmente) a 0, existe $M > 0$ tal que $p(x_k) \leq M$ para todo $k \geq 1$. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $m > n$, entonces:

$$\begin{aligned} p\left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right) &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |\mu_k| p(x_k) \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{m} |\mu_k| \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$, entonces $\sum_{k=n+1}^{m} |\mu_k| < \frac{\varepsilon}{M}$. Al escoger de este modo los índices, tenemos que $p\left(\sum_{k=n+1}^{m} \mu_k x_k\right) < \varepsilon$. Por tanto, la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right)$ es de Cauchy, y como el álgebra A es secuencialmente completa, el límite $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ existe. Queda probada nuestra afirmación, y se sigue que el conjunto

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| \leq 1 \right\}$$

está bien definido en A.

Sea C_0 la envolvente absolutamente convexa de $\{x_k \,|k \geq 1\}$, es decir $C = \overline{C_0}$. Es claro que los elementos de S son límites de sucesiones $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)_n$ en C_0; por ende, $S \subset C$.

Sea $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, con $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1$. Tomando $\mu_k = 0$ para todo $k > n$, tenemos que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k \in S$, de donde $C_0 \subset S$.

Para terminar de probar la igualdad (5.1) basta ver que S es cerrado.

Consideremos c_0 el espacio de las sucesiones escalares convergentes a cero, y recordemos que $c_0^* = \ell^1$. Si $\mu = (\mu_k) \in \ell^1$, entonces $f_\mu \in c_0^*$ es la funcional lineal definida como $f_\mu(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \lambda_n$ para toda sucesión $(\lambda_n) \in c_0$, y se cumple que $||f_\mu|| = ||\mu||_1$. Consideremos ahora los espacios (c_0^*, w^*) y (A, w). Las topologías w^* y w están dadas por seminormas de la forma $p_{(\lambda_n)}(f) = |f((\lambda_n))|$ con $(\lambda_n) \in c_0$ y $f \in c_0^*$, y $p_h(x) = |h(x)|$ con $h \in A^*$ y $x \in A$, respectivamente.

Definimos el operador lineal $T : (c_0^*, w^*) \to (A, w)$ como $T(f_\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$, y afirmamos que T es continuo. En efecto, dada $h \in A^*$, tenemos

$$\begin{aligned} p_h\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k\right) &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k h(x_k)\right| \\ &= |f_\mu(h(x_k))| \\ &= p_{(h(x_k))}(f_\mu), \end{aligned}$$

pues $(h(x_k)) \in c_0$, ya que h es continuo y (x_k) converge (débilmente) a 0. Por tanto, T es continua. Por el teorema de Alaoglu sabemos que $U = \{f_u \in c_0^* \,|\, \|f_u\| = \|u\| \leq 1\}$ es compacto en la topología w^*, y como T es lineal, continuo y $T(U) = S$, concluimos que S es convexo y débilmente compacto en A. Así, es débilmente cerrado y por tanto, cerrado, como queríamos probar.

También tenemos que como, $C = S$ es débilmente compacto, entonces es débilmente acotado y por tanto, acotado, según el Teorema 1.3.1. □

Corolario 5.1.1. *Sean A secuencialmente completa y $y \in A$. Si la sucesión $\left(y^k\right)$ converge (débilmente) a 0 y C es la envolvente cerrada absolutamente convexa de $\left\{y^k | k \geq 1\right\}$, entonces C es cerrado, acotado, absolutamente convexo e idempotente.*

Demostración. El resultado se sigue del lema anterior y la Proposición 3.3.3, pues $\left\{y^k | k \geq 1\right\}$ es idempotente. □

Corolario 5.1.2. *Con las hipótesis del corolario anterior, tenemos que el álgebra $A(C)$ (ver Sección 3.3) es un álgebra de Banach y conmutativa.*

Demostración. Con base en el lema anterior y el Teorema 3.3.1, sólo resta ver que $A(C)$ es conmutativa. Sean $u, v \in C$, es decir $u = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k y^k$ y $v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y^k$ con $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| \leq 1$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq 1$. Afirmamos que:

$$uv = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_{k+1-i} \right] y^{k+1}. \tag{5.2}$$

Para cada $k \geq 1$ sean:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_{k+1-i}, & A_n &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y^{k+1} \\ U_n &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k y^k, & V_n &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y^k \\ w_n &= V_n - v. \end{aligned}$$

Con estas notaciones, debemos probar:

$$\lim_{n\to\infty} U_n v = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{5.3}$$

Observamos que:

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & \mu_1\lambda_1 y^2 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2\lambda_1)\, y^3 + \cdots + (\mu_1\lambda_n + \cdots + \mu_n\lambda_1)\, y^{n+1} \\ & = & \left(\mu_1\lambda_1 y^2 + \mu_1\lambda_2 y^3 + \cdots + \mu_1\lambda_n y^{n+1}\right) + \\ & & \left(\mu_2\lambda_1 y^3 + \cdots + \mu_2\lambda_{n-1} y^{n+1}\right) + \cdots + \mu_n\lambda_1 y^{n+1} \\ & = & \mu_1 y V_n + \mu_2 y^2 V_{n-1} + \cdots + \mu_n y^n V_1 \\ & = & \mu_1 y\,(v + w_n) + \mu_2 y^2\,(v + w_{n-1}) + \cdots + \mu_n y^n\,(v + w_1) \\ & = & U_n v + \mu_1 y w_n + \mu_2 y^2 w_{n-1} + \cdots + \mu_n y^n w_1. \end{array}$$

Hagamos $z_n = \mu_1 y w_n + \mu_2 y^2 w_{n-1} + \ldots + \mu_n y^n w_1$ para cada n. Para tener la igualdad (5.3), sólo debemos probar que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Sea P_c la familia de seminormas continuas en (A, τ). Para $p \in P_c$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarias, existe $q \in P_c$ tal que $p\,(xy) \leq q\,(x)\, q\,(y)$ para todo $x \in X$. Como $\left(y^k\right)$ converge (débilmente) a 0 y $w_n \longrightarrow 0$ en A, existen $M > 0$ y $N \geq 1$ tales que $q\left(y^k\right) \leq M$ y $q\,(w_k) \leq M$ para todo $k \geq 1$, y $q\,(w_n) < \frac{\varepsilon}{M}$ si $n > N$. Así, para $n > N$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl} p\,(z_n) & \leq & p\left(w_1\mu_n y^n + \cdots + w_N \mu_{n-(N-1)} y^{n-(N-1)}\right) + \\ & & +p\left(w_{N+1}\mu_{n-N} y^{n-N} + \cdots + w_n\mu_1 y\right) \\ & \leq & p\,(w_1\mu_n y^n) + \cdots + p\left(w_N\mu_{n-(N-1)} y^{n-(N-1)}\right) + \\ & & +p\left(w_{N+1}\mu_{n-N} y^{n-N}\right) + \cdots + p\,(w_n\mu_1 y) \\ & \leq & M^2\left(|\mu_n| + \cdots + \left|\mu_{n-(N-1)}\right|\right) + \varepsilon\left(|\mu_{n-N}| + \cdots + |\mu_1|\right) \end{array}$$

De donde:

$$\limsup p\,(z_n) \leq \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|\right] \leq \varepsilon$$

Por ser ε arbitraria, concluimos que $\lim_{n\to\infty} p\,(z_n) = 0$, lo que demuestra la igualdad (5.3) y se sigue (5.2).

Intercambiando los papeles de u y v tenemos:

$$vu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_{k+1-i}\right) y^{k+1};$$

de donde,

$$\begin{array}{rcl} uv & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_{k+1-i}\right] y^{k+1} \\ & = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_{k+1-i}\right) y^{k+1} \\ & = & vu \end{array}$$

□

Teorema 5.1.1. *Si A es secuencialmente completa y (débilmente) infrasecuencial, entonces toda funcional lineal multiplicativa en A es acotada.*

Demostración. Supongamos que existe una funcional lineal multiplicativa f en A que no es acotada. Sea $B \subset A$ acotado tal que $f(B)$ no es acotado en $\mathbb{F}$. Como A es (débilmente) infrasecuencial, existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in B$, $(\lambda x)^k$ converge (débilmente) a 0 cuando $k \to \infty$; y como f no es acotada, existe una sucesión (x_n) en B tal que $|f(x_n)| \geq n$ para todo $n \geq 1$.

Sea m suficientemente grande para que $m\lambda > 1$, y hagamos $y = \lambda x_m$. Como $x_m \in B$, tenemos que $\left(y^k\right) = (\lambda x_m)^k$ converge (débilmente) a 0 cuando $k \longrightarrow \infty$. Sea C la envolvente cerrada absolutamente convexa de $\left\{y^k | k \geq 1\right\}$. Del Corolario 5.1.2, obtenemos que $A(C)$ es un álgebra de Banach. Recordemos que, como se vio en la la Proposición 2.3.8, toda funcional lineal multiplicativa en un álgebra de Banach tiene norma menor o igual que 1; luego, se cumple que $|f(z)| \leq \|z\|$ para todo $z \in A(C)$. Además, sabemos que la bola unitaria en $A(C)$ es justamente C. Tras estas observaciones, vemos que:

$$\begin{aligned} 1 &< \lambda m \\ &\leq \lambda |f(x_m)| \\ &= |f(y)| \\ &\leq \|y\| \leq 1 \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por tanto, f es acotada. □

Corolario 5.1.3. *Si A es secuencialmente completa, bornológica y (débilmente) infrasecuencial, entonces es funcionalmente continua; es decir, toda funcional lineal multiplicativa definida en A es continua.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y f una funcional lineal multiplicativa en A. Por el teorema 5.1.1, f es acotada. Por el inciso (c) del Teorema 1.2.22 f es continua.

El siguiente resultado responde afirmativamente la pregunta de Michael en un caso particular. □

Corolario 5.1.4. *Toda álgebra de Fréchet (débilmente) infrasecuencial es funcionalmente continua.*

Demostración. Esto se sigue del corolario anterior y del hecho de que toda álgebra de Fréchet es bornológica (Corolario 2.3.1), completa y localmente convexa con producto continuo. □

Proposición 5.1.1. *Supongamos que A es secuencialmente completa y f es una funcional lineal multiplicativa. Si $x \in A$ es tal que la sucesión (x^n) converge (débilmente) a 0, entonces $|f(x)| \leq 1$.*

Demostración. Supongamos que $|f(x)| > 1$, y sea $y = \frac{x}{f(x)}$; entonces, $f(y) = 1$. Sea C la envolvente cerrada absolutamente convexa de $\{x^n \,|n \geq 1\}$. Por el Corolario 5.1.2 $A(C)$ es un álgebra de Banach. Por la Proposición 2.3.8, la restricción de f a $A(C)$ es continua. Claramente $\{y^n \,|n \geq 1\} \subset A(C)$, y además $\|x\|_C \leq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|y^n\|_C &\leq \left\| \frac{x}{f(x)} \right\|_C^n \\ &\leq \frac{1}{|f(x)|^n}. \end{aligned}$$

Por lo que, $y^n \xrightarrow{\|\cdot\|_C} 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, y como f es continua en $A(C)$, tenemos que $f(y^n) \to 0$; pero $f(y^n) = f(y)^n = 1$ para todo n, lo cual es una contradicción. Por ende, $|f(x)| \leq 1$. □

5.2. La condición D

Para concluir introducimos aquí una condición que llamaremos D, la cual nos permitirá dar el Teorema 5.2.1 que tiene como corolarios algunos de los resultados publicados en [11] y [12]. Esta condición está inspirada en otras dos, distintas a las nociones de secuencialidad, que también ayudan a determinar la continuidad de caracteres y más en general de homomorfismos de álgebras. Nos referimos a las condiciones C y C', que fueron definidas por Husain y Ng en distintos artículos. En [10] se introduce la condición C sin darle ese nombre; y en [9] se presenta la condición C', siguiendo lo hecho en [11] para álgebras reales, donde era llamada la condición C.

Sea A un álgebra semitopológica sobre $\mathbb{F}$ y (y_n) una sucesión en A.

- Una sucesión (y_n) en A satisface la *condición* $(*)$ si existe una funcional lineal multiplicativa en A, para la que $\inf_n |f(y_n)| > 0$.
- Decimos que una sucesión (y_n) en A satisface la *condición* $(**)$ si existe una sucesión (f_m) de funcionales lineales multiplicativas en A, para las que $\inf_{m,n} |f_m(y_n)| > 0$.

- Si A es un álgebra normada y toda sucesión (y_n) en A, con $\|y_n\| \geq 1$ para todo n, satisface la condición $(**)$, entonces se dice que A satisface la condición (C)
- El álgebra A satisface la *condición* (C') si toda sucesión (y_n) en A tal que $y_n \nrightarrow 0$ y $y_n \neq 0$ para todo n, satisface la condición $(**)$.
- El álgebra A satisface la *condición* (D) si toda sucesión en A que está fuera de alguna vecindad de 0 tiene una subsucesión que satisface $(*)$,

Es claro que las condiciones (*) y (**) son equivalentes, pues en (**) no se requiere que las funcionales sean distintas entre sí. Sólo incluimos (**) porque fue la propiedad que usaron Husain y Ng para definir sus condiciones (C) y (C').

Es obvio que para que pueda darse cualquiera de las condiciones anteriores, es necesario que el conjunto $M^{\#}(A)$ de todas las funcionales lineales multiplicativas en A distintas de la funcional cero, sea distinto del vacío. Tal es el caso, por ejemplo, cuando A es un álgebra conmutativa compleja de Fréchet con idéntico, en cuyo caso $\sigma(x) = \{f(x) \mid f \in M(A)\}$ y $r(x) = sup\{|f(x)| \mid f \in M(A)\}$, donde

$$M(A) = \left\{ f \in M^{\#}(A) | \, f \text{ es continua} \right\}.$$

El campo $\mathbb{F}$ satisface la condición (D), pues el único funcional lineal multiplicativo en $\mathbb{F}$ es la identidad.

Proposición 5.2.1. *Tenemos las siguientes relaciones entre las condiciones recién definidas:*

(a) Si en un álgebra normada A se cumple la condición (C), entonces se cumple la (D).

(b) Si en un álgebra topológica A se satisface (C'), entonces se satisface (D).

(c) Si en un álgebra topológica A se satisface (D), entonces toda sucesión (y_n) en A tal que $y_n \nrightarrow 0$, tiene una subsucesión que satisface $(*)$.

Demostración. Sólo probaremos (a). Supongamos que se satisface (C) y sea (y_n) una sucesión en A fuera de una vecindad de 0 de A. Entonces existe $r > 0$ tal que $\left\|\frac{y_n}{r}\right\| \geq 1$ para todo n. Por tanto, la sucesión $\left(\frac{y_n}{r}\right)$ satisface $(*)$ y lo mismo sucede para (y_n). $\square$

La condición (C') tiene la siguiente consecuencia para álgebras de Fréchet.

Proposición 5.2.2. *Supongamos que A es un álgebra de Fréchet con idéntico. Si A satisface la condición (C'), entonces para cada $x \in A$, con $x \neq 0$, su radio espectral $r(x)$ cumple que $r(x) = \sup_{f \in M^{\#}(A)} |f(x)| = \infty$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $|f(x)| \leq \alpha < \infty$ para toda $f \in M^{\#}(A)$. Sea (y_n) la sucesión definida como $y_{2n} = x$ y $y_{2n-1} = \frac{x}{n}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, $y_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y $y_n \nrightarrow 0$. Si f es cualquier funcional lineal multiplicativa en A, entonces:

$$\begin{aligned} \inf_n |f(y_n)| &\leq \inf_n |f(y_{2n})| \\ &\leq \inf\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual contradice la condición (C'). Por tanto, $r(x) = \sup_{f \in M^{\#}(A)} |f(x)| = \infty$. □

Corolario 5.2.1. *La condición (C') no se cumple bajo cualquiera de las siguientes hipótesis:*

(a) A es un álgebra de Banach con idéntico.

(b) A es un álgebra de Fréchet que es Q-álgebra con idéntico.

Demostración. (a) Supongamos que A satisface la condición (C'). Por la Proposición 2.3.8, $\|f\| \leq 1$ para todo $f \in M^{\#}(A)$. Así $|f(x)| \leq \|x\|$, por lo que $\sup_{f \in M^{\#}(A)} |f(x)| < \infty$ para todo $x \in A$. Esto contradice la Proposición 5.2.2.

(b) Supongamos que A satisface la condición (C'). Afirmamos que para cada $a \in A$, su espectro $\sigma(a)$ es acotado. Supongamos que no es acotado; luego, existe una sucesión (λ_n) en $\sigma(a)$ tal que $\lambda_n \neq 0$ para todo n y $|\lambda_n| \to \infty$. Así, para todo n se cumple

$$\begin{aligned} &a - \lambda_n e \notin G(A), \quad \text{es decir,} \\ &\tfrac{a}{\lambda_n} - e \notin G(A), \end{aligned}$$

de donde, al hacer tender n a infinito, concluimos que $-e \notin G(A)$, lo cual es un absurdo. Por tanto, nuestra afirmación es cierta y $\sigma(a)$ es acotado, y entonces $\sup_{f \in M^{\#}(A)} |f(x)| < \infty$. Esto contradice la Proposición 5.2.2. □

Observación 5.2.1. Con la hipótesis (b) del corolario anterior, se tiene que $\sigma(a)$ no sólo es acotado sino que es compacto.

Demostración. Claramente la función

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : \mathbb{C} & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & a - \lambda e \end{array}$$

es continua. Sabemos que $G(A)$ es abierto porque A es una Q-álgebra, por lo que $\Lambda^{-1}(G(A))$ es abierto, y tenemos

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{-1}(G(A)) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} \,|(a - \lambda e) \in G(A)\} \\ & = & \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \,|(x - \lambda e) \notin G(A)\} \\ & = & \mathbb{C} \setminus \sigma(a). \end{array}$$

Por lo tanto, $\sigma(a)$ es cerrado. □

Como el corolario anterior sugiere, es difícil encontrar ejemplos de álgebras que satisfagan la condición C o la C', y de hecho Husain y Ng no exhiben ninguno en sus artículos. Afortunadamente, para nuestra condición D no tenemos este inconveniente.

Ejemplo 5.2.1. Consideremos el álgebra $C([0,1])$ de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con la topología de convergencia puntual, es decir, la topología dada por las seminormas m-convexas $p_t(f) = |f(t)|$, para cada $t \in [0,1]$ y $f \in C([0,1])$. Sea (f_n) una sucesión en $C([0,1])$ que está fuera de una vecindad de cero. Existen $p_{t_1}, \ldots, p_{t_k}$ y $r > 0$ tales que para cada $n \geq 1$, $p_{t_i}(f_n) \geq r$ para alguna $1 \leq i \leq k$. Así, si consideramos la unión $\{n \,|p_{t_1}(f_n) \geq r\} \cup \ldots \cup \{n \,|p_{t_k}(f_n) \geq r\}$, alguno de estos k conjuntos debe ser infinito, con lo cual podemos construir una subsucesión (f_{n_m}) y un funcional lineal multiplicativo $\varphi_{t_i}(f) = f(t_i)$, que satisfacen $\inf_m |\varphi_{t_i}(f_{n_m})| \geq r > 0$. Por ende, el álgebra $C([0,1])$ satisface la condición D.

Para comprobar que nuestra condición no es demasiado laxa, exhibimos ahora un ejemplo de un álgebra que no satisface la condición D.

Ejemplo 5.2.2. Consideremos el álgebra $C([0,2])$ de funciones escalares continuas en $[0,2]$, con la topología dada por la norma del supremo. Sea (f_n) la sucesión dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si}\, 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ -nx + 2 & \text{si}\, \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si}\, \frac{2}{n} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Podemos ver que $\|f_n\|_\infty = 1$ para todo $n \geq 1$, por lo que (f_n) está fuera de una vecindad de cero. Sin embargo, como los funcionales lineales multiplicativas en $C([0,2])$ son de la forma $\varphi_t(f) = f(t)$ para algún $t \in [0,2]$, siempre existe $m \geq 1$ tal que $\frac{2}{m} < t$, de donde $\inf_n |\varphi_t(f_n)| \leq \varphi_t(f_m) = 0$. Por lo tanto, la sucesión (f_n) no tiene ninguna subsucesión que satisfaga la condición $(*)$; es decir, el álgebra $C([0,2])$ no satisface la condición D.

Ahora, usaremos la condición D para probar los resultados concernientes a la continuidad de homomorfismos de álgebras, comenzando por el siguiente lema.

Lema 5.2.1. *Sean A un álgebra topológica secuencialmente completa y $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en A que converge a 0. Si A es:*
(a) metrizable o bien
(b) localmente convexa,
entonces existen una sucesión $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ en A y una subsucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ tales que $c_n = z_n + c_{n+1}^2$ para todo $k \geq 1$.

Demostración. En esta primera parte de la prueba sólo usaremos que A es un álgebra topológica.

Sea $(g_m)_{m=0}^{\infty}$ la sucesión de funciones $g_m : A^{m+1} \longrightarrow A$ definida recursivamente como: g_0 es la identidad de A, $g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2^2$, y $g_m(x_1,...,x_{m+1}) = g_1(x_1, g_{m-1}(x_2,...,x_{m+1}))$ si $m > 1$.

Afirmamos que cada g_m es continua para todo $m \geq 1$. La función g_0 es la identidad en A y por tanto, continua. En tanto que $g_1(x_1,x_2) = p_1(x_1,x_2) + p_2(x_1,x_2)^2$, donde p_i, con $i = 1,2$, son las proyecciones del producto $A \times A$, que son continuas, al igual que la función $x \to x^2$ definida en A. Así, g_1 es también continua.

Supongamos que la afirmación es cierta para algún $m \geq 1$. La función $g_{m+1}(x_1,...,x_{m+2}) = g_1(x_1, g_m(x_2,...,x_{m+2}))$ es la composición

$$g_1 \circ ((P_1(x_1,...,x_{m+2}), (g_m \circ P_2)(x_1,...,x_{m+2}))),$$

donde $P_1((x_1,...,x_{m+2})) = x_1$ y $P_2((x_1,...,x_{m+2})) = (x_2,...,x_{m+2})$. Como todas las funciones en la composición son continuas, ésta también lo es.

Para $m \geq 1$ tenemos

$$g_m(x_1,...,x_m,0) = g_{m-1}(x_1,...,x_m) \tag{5.4}$$

En efecto, $g_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2^2$; de donde, $g_1(x_1,0) = x_1 = g_0(x_1)$. Supongamos cierta la igualdad para algún $m \geq 1$. Entonces, por definición y la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} g_{m+1}(x_1,...,x_{m+1},0) &= g_1(x_1, g_m(x_2,...,x_{m+1},0)) \\ &= g_1(x_1, g_{m-1}(x_2,...,x_{m+1})) \\ &= g_m(x_1,...,x_{m+1}). \end{aligned}$$

con lo que queda probada la igualdad (5.4)

En la segunda parte de la prueba construiremos la subsucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$.

a) Supongamos que A es metrizable. Llamemos d a la distancia invariante bajo traslaciones que define la topología de A. Tomemos una sucesión (ε_n) de reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.

Hagamos $z_1 = y_1$ y supongamos que se han definido $z_1, z_2, \ldots, z_n$, con $z_j = y_{m_j}$ y $1 = m_1 < m_2 < \cdots < m_n$. Por la continuidad de las funciones g_m y en vista de que $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ converge a 0, existe un natural N tal que

$$d(g_{n+1-j}(z_j, ..., z_n, y_N), g_{n+1-j}(z_j, ..., z_n, 0) < \varepsilon_n$$

para $1 \leq j \leq n$. Sea m_{n+1} el menor natural N que cumple lo anterior y es mayor que m_n. Definimos $z_{n+1} = y_{m_{n+1}}$. Queda definida una subsucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(y_m)_{m=1}^{\infty}$, que por construcción y la igualdad (5.4), satisface

$$d(g_{n+1-j}(z_j, ..., z_n, z_{n+1}), g_{n-j}(z_j, ..., z_n) < \varepsilon_n \tag{5.5}$$

para $1 \leq j \leq n$ y $n \geq 1$.

Sea $k \geq 1$. Probaremos que $(g_{p-k}(z_k, ..., z_p))_{p \geq k}$ es de Cauchy en A y por tanto, convergente. Fijemos $k \geq 1$. Por la desigualdad (5.5), obtenemos que $q > p > k$ implica

$$\begin{array}{rc} & d(g_{q-k}(z_k, ..., z_p), g_{p-k}(z_k, ..., z_q) \\ \leq & \sum_{n=p}^{q-1} d(g_{n+1-k}(z_k, ..., z_{n+1}), g_{n-k}(z_k, ..., z_n) \\ \leq & \sum_{n=p}^{\infty} \varepsilon_n. \end{array}$$

□

Y como $\sum_{n=p}^{\infty} \varepsilon_n \to 0$ cuando $p \to \infty$, concluimos que la sucesión $(g_{p-k}(z_k, ..., z_p))_{p \geq k}$ es de Cauchy.

b) Si A es localmente convexa, entonces a partir de donde inicia *a*) en la prueba, se sustituye d por cualquiera de las seminormas $\|\cdot\|$ que definen la topología de A, con los cambios formales correspondientes, y se concluye que $(g_{p-k}(z_k, ..., z_p))_{p \geq k}$ es de Cauchy para la seminorma $\|\cdot\|$.

Finalmente, construimos la sucesión $(c_k)_{k=1}^{\infty}$.

Por lo visto en la prueba en *a*) y *b*), y al ser A secuencialmente completa, tenemos que $(g_{p-k}(z_k, ..., z_p))_{p \geq k}$ converge para cada $k \geq 1$, digamos a c_k.

Por definición,

$$g_{p-k}(z_k, ..., z_p) = g_1(z_k, g_{p-k-1}(z_{k+1}, ..., x_p)) \quad = \quad z_k + g_{p-k-1}(z_{k+1}, ..., x_p)^2$$

para todo $k \geq 1$. Al hacer tender p a ∞, concluimos que $c_k = z_k + c_{k+1}^2$ para todo $k \geq 1$.

Teorema 5.2.1. *Sea A un álgebra topológica real secuencialmente completa. Si A es:*

(a) metrizable o bien

(b) localmente convexa, y

B es un álgebra real topológica, que satisface la condición (D). Entonces todo operador lineal $T : A \longrightarrow B$ tal que $T\left(x^2\right) = T\left(x\right)^2$ para $x \in A$, es secuencialmente continuo. En el caso (a), T es entonces continuo.

Demostración. Supongamos que T no es secuencialmente continuo. Existe una sucesión (x_m) en A tal que $x_m \to 0$ y $Tx_m \nrightarrow 0$; así, podemos suponer que la sucesión (Tx_m) que se queda fuera de una vecindad de 0 en B. Por la condición (D), existen una subsucesión (x_{m_k}) y una funcional lineal multiplicativa f en B, tales que $\varepsilon = \operatorname{ínf}_k \left|f\left(T\left(x_{m_k}\right)\right)\right| > 0$. Claramente $\left(\frac{x_{m_k}}{\varepsilon}\right) \longrightarrow 0$ y como el producto en A es continuo, se cumple que $\left(\frac{x_{m_k}}{\varepsilon}\right)^2 \longrightarrow 0$.

Hacemos $y_k = \left(\frac{x_{m_k}}{\varepsilon}\right)^2$. Del lema anterior, se sigue que existen una subsucesión $(z_n) = (y_{k_n})$ de (y_k) y una sucesión (c_n) en A tales que $c_n = z_n + c_{n+1}^2$ para todo $n \geq 1$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
f\left(T\left(z_n\right)\right) &= f\left(T\left(\frac{x_{m_{k_n}}}{\varepsilon}\right)\right)^2 \\
&\geq \left(\operatorname*{ínf}_k f\left(T\left(\frac{x_{m_k}}{\varepsilon}\right)\right)\right)^2 = 1
\end{aligned}
$$

y $T\left(c_n\right) = T\left(z_n\right) + T\left(c_{n+1}\right)^2$ para todo $n \geq 1$.

Tenemos, pues

$$
\begin{aligned}
f\left(T\left(c_n\right)\right) &= f\left(T\left(z_n\right)\right) + f\left(T\left(c_{n+1}\right)\right)^2 \\
&\geq 1 + f\left(T\left(c_{n+1}\right)\right)^2
\end{aligned}
$$

para todo $n \geq 1$. De donde, $f\left(T\left(c_n\right)\right)^2 \geq f\left(T\left(c_n\right)\right) \geq 1$ y

$$
f\left(T\left(c_1\right)\right) \geq 1 + \overbrace{1 + ...1}^{n} + f\left(T\left(c_{n+1}\right)\right)^2 \geq n
$$

para todo $n \geq 1$, lo que es absurdo. □

Obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 5.2.2. *[10, Teorema 1 y Teorema 2] Sean A y B dos álgebras reales, la primera m-convexa conmutativa y secuencialmente completa, y la segunda de Banach conmutativa y que satisface (C). Si el operador lineal $T : A \to B$ es tal que $T(x^2) = T(x)^2$ para todo $x \in A$, entonces T es acotado. En particular, toda funcional lineal real multiplicativa definida en A es acotada.*

Demostración. Por el teorema anterior, T es secuencialmente continuo y de esto se sigue que es acotado. □

Hemos enunciado el corolario anterior como se hace en [10, Teorema 1 y Teorema 2], pero como vemos en la prueba no es necesario que A y B sean conmutativas, como tampoco lo es que B sea completa.

Corolario 5.2.3. *[11, Teorema 1, Corolario 1]Sean A y B dos álgebras topológicas reales metrizables y completas, y supongamos que B satisface (C'). Si el operador lineal $T : A \to B$ es tal que $T(x^2) = T(x)^2$ para todo $x \in A$, entonces T es continuo. En particular, cada homomorfismo de álgebra entre A y B es continuo.*

Nuevamente vemos que en el Corolario anterior sobran hipótesis. No es necesario que B sea metrizable y completa, sino sólo topológica.

Corolario 5.2.4. *Si A es una B_0-álgebra (o Fréchet) real, entonces A es funcionalmente continua.*

Motivado por este resultado y para finalizar este trabajo, daremos el siguiente, que mezcla la noción de secuencialidad con la condición D y que responde parcialmente de modo afirmativo el Problema de Michael

Teorema 5.2.2. *Sean A, B dos álgebras localmente convexas con producto continuo y secuencialmente completas, tales que A es secuencial y B satisface la condición D. Entonces todo homomorfismo de álgebras $T : A \longrightarrow B$ es secuencialmente continuo. En particular, toda funcional lineal multiplicativa en A es secuencialmente continua.*

Demostración. Supongamos que T no es secuencialmente continua. Existe una sucesión (x_n) en A tal que $x_n \to 0$ y $Tx_n \nrightarrow 0$. Existe una subsucesión de (Tx_n) que se queda fuera de una vecindad de 0 de B. Podemos suponer, cambiando, de ser necesario, (x_n) por una subsucesión, que es la propia sucesión. Tomemos $y_n = \frac{1}{2}Tx_n$ para cada n. Por hipótesis existen una funcional lineal multiplicativa f en B y una subsucesión (y_{n_k}) tales que $\varepsilon = \text{ínf}_k \left| f\left(y_{n_k}\right)\right| > 0$; es decir,

$$\left| f \circ T \left(\frac{x_{n_k}}{\varepsilon} \right) \right| \geq 2 \tag{5.6}$$

para todo $k \geq 1$. Hagamos $z_k = \frac{x_{n_k}}{\varepsilon}$ para cada $k \geq 1$; entonces $z_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, y como A es secuencial, existe $k_0 \geq 1$ tal que y $z_{k_0}^m \to 0$ cuando $m \to \infty$. Además, como T es un homomorfismo de álgebras, $f \circ T$ es una funcional lineal multiplicativa. Por la Proposición 5.1.1, $\left| f \circ T\left(z_{k_0}\right)\right| = \left| f\left(\frac{Tx_{n_{k_0}}}{\varepsilon} \right) \right| \leq 1$, y por la desigualdad (5.6), $\left| f_m \circ T \left(\frac{x_{n_{k_0}}}{\varepsilon} \right) \right| \geq 2$, lo que es una contradicción. Así, $Tx_n \to 0$ y T es secuencialmente continua. □

Apéndice A

El espacio $[0, \Omega)$

A.1. El espacio $[0, \Omega]$

Tomaremos como axioma que existe un conjunto A no numerable, bien ordenado, con elemento máximo Ω, y tal que para todo $x \in A$ distinto de Ω, el conjunto de sus predecesores $S(x) = \{y \in A \,|y < x\}$ es a lo más numerable. Los elementos de A son llamados *ordinales*, y Ω es llamado el *primer ordinal no numerable*. Si denotamos por 0 al elemento mínimo de A, a partir de ahora escribiremos $[0, \Omega]$ en lugar de A. El espacio $[0, \Omega) = [0, \Omega] \setminus \{\Omega\}$ es llamado el *espacio de los ordinales estrictamente menores que el primer ordinal no numerable.* En este apéndice trabajaremos sobre el espacio $[0, \Omega]$, teniendo siempre presente que $[0, \Omega)$ es un subespacio.

Un ordinal $x \in [0, \Omega]$ es llamado el *inmediato sucesor* de y, si x es el mínimo ordinal mayor que y. Un ordinal y es llamado el *inmediato predecesor* de x, si x es el sucesor inmediato de y.

Los espacios $[0, \Omega]$ y $[0, \Omega)$ tienen las siguientes propiedades básicas:

- Hay ordinales en $[0, \Omega]$ que no tienen predecesor inmediato, por ejemplo, Ω, ya que si x fuera su predecesor inmediato, entonces Ω sería el mínimo ordinal mayor que x, pero como Ω es el elemento máximo, tendríamos que $y < x$ para todo $y \in [0, \Omega)$ y entonces, $A = S(x) \cup \{x, \Omega\}$ sería a lo más numerable, lo que es una contradicción.

Un ordinal de $[0, \Omega]$ es llamado *ordinal límite* si no tiene predecesor inmediato.

- Todo elemento en $[0, \Omega)$ tiene sucesor inmediato, y éste es menor que Ω. En efecto, como $x < \Omega$, existe en $[0, \Omega]$ el mínimo ordinal y mayor que x. Si $y = \Omega$ entonces x sería su predecesor inmediato, lo cual ya vimos que no es posible.

- El conjunto $[0, \Omega)$ contiene una copia de los naturales: llamemos 1 al sucesor inmediato de 0, 2 al sucesor inmediato de 1, y así sucesivamente. El orden de esta copia es igual al orden natural.
- En $[0, \Omega]$ todo subconjunto no vacío tiene supremo (el supremo es, por definición, el mínimo de las cotas superiores del conjunto).

Teorema A.1.1. *Si* $B \subset [0, \Omega)$ *es numerable y no vacío, entonces* $\sup B < \Omega$.

Demostración. Es claro que el conjunto:

$$C = \{y \in [0, \Omega] \,|\, y \leq x \,\text{para alguna}\, x \in B\} = \bigcup_{x \in B} S(x) \cup \{x\}$$

es numerable, por lo que $C \neq [0, \Omega]$. Sea γ el primer elemento de $[0, \Omega]$ que no está en C. Entonces $y \notin C$ si y sólo si $y \geq \gamma$, es decir $C = \{y \in [0, \Omega] \,| y < \gamma\}$. Por ende, γ tiene una colección de predecesores a lo más numerable, de donde $\gamma < \Omega$ y γ es una cota superior de B, por lo que $\sup B \leq \gamma < \Omega$. $\square$

A.2. Topología del orden

Ahora construiremos una topología para el espacio $[0, \Omega]$ y a $[0, \Omega)$ le daremos la de subespacio. Consideremos la topología τ que tiene como subbase a los conjuntos de la forma:

$$\begin{aligned} [0, z) &= \{y \in [0, \Omega] \,| y < z\} \\ (x, \Omega] &= \{y \in [0, \Omega] \,| x < y\} \end{aligned}$$

con $x < \Omega$ y $z \geq 1$.

Sean $x, y, z, w \in [0, \Omega]$ con $x < \Omega$ y $z \geq 1$, $z < w$ y $y < x$. Entonces:

$$\begin{aligned} [0, z) \cap [0, w) &= [0, z) \\ (x, \Omega] \cap (y, \Omega] &= (x, \Omega] \\ [0, z) \cap (x, \Omega] &= (x, z) \,. \end{aligned}$$

donde, $(x,z) = \{y \in [0,\Omega] \,|x < y < z\}$. Observamos que $(x,z) = \emptyset$ *si* $z \leq x$.

Por lo tanto, una base para la topología τ está dada por los conjuntos de la forma $[0,z)$, $(x,\Omega]$ y (x,z), con $x < \Omega$, $z \geq 1$ y $x < z$.

El espacio $([0,\Omega]\,,\tau)$ y su subespacio $[0,\Omega)$ poseen las siguientes propiedades:

Proposición A.2.1. $[0,\Omega)$ *es* 1°*-numerable.*

Demostración. Una base local del ordinal 0 es el conjunto $[0,1)$. Si $x \in (0,\Omega)$, una base local de x está dada por la familia $\{(a,x+1)\}_{a<x}$, la cual es a lo más numerable. Por ende, $[0,\Omega)$ es 1-numerable. □

Proposición A.2.2. $[0,\Omega)$ *es abierto en* $[0,\Omega]$*. Así,* Ω *es cerrado.*

Demostración. Si $x \in (0,\Omega)$, entonces el abierto básico $(0,x+1)$ cumple que $x \in (0,x+1) \subset [0,\Omega)$. Además, $0 \in [0,1) \subset [0,\Omega)$, lo que termina la prueba. □

Proposición A.2.3. $[0,\Omega]$ *es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x < z$. Si existe $x < y < z$, entonces los abiertos básicos $[0,y)$ y $(y,\Omega]$ separan a x y z. Si no existe tal y, entonces x es el predecesor inmediato de z; así, los abiertos básicos $[0,z) = [0,x]$ y $(x,\Omega] = [z,\Omega]$ separan a x y z. □

Proposición A.2.4. $[0,\Omega]$ *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0,\Omega]$, y consideremos:

$$C = \{y \in [0,\Omega] \,|[0,y] \text{ es cubierto por una subcubierta finita de} \mathcal{U}\}\,.$$

Existen $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ que contienen a 0 y 1 respectivamente; luego $0,1 \in U_0 \cup U_1$, o lo que es igual, $[0,1] \subset U_0 \cup U_1$. Por ende $1 \in C$, es decir $C \neq \emptyset$. Sea $\alpha = \sup C$, entonces $1 \leq \alpha$ y veremos que $\alpha \in C$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U$. Si $\alpha = \Omega$, existe un abierto básico $(x,\Omega]$ tal que $(x,\Omega] \subset U$, y si $\alpha < \Omega$, existe $x < \alpha$ tal que $(x,\alpha+1) \subset U$. En ambos casos, podemos encontrar $x < y < \alpha$ tal que $y \in C$; es decir, hay una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para $[0,y]$. De donde $\alpha \in C$, ya que $[0,\alpha] \subset [0,y] \cup U$.

Por otra parte, si $\alpha < \mathit{\Omega}$, entonces $\alpha + 1 \in C$, pues $[0,\alpha+1] = [0,\alpha] \cup \{\alpha+1\}$, lo que es imposible. Por tanto, $\alpha = \mathit{\Omega}$. □

Definición A.2.1. Sea X un espacio topológico y $(x_n) \subset X$ una sucesión. Decimos que $x \in X$ es *punto de aglomeración* de (x_n) si para toda vecindad V de x se tiene que $x_n \in V$ para una infinidad de índices n.

Proposición A.2.5. $[0,\Omega)$ *es numerablemente compacto.*

Demostración. Por el Teorema [14, Teorema 92.3], basta ver que toda sucesión $(x_n) \subset [0,\Omega)$ tiene un punto de aglomeración.

Como $[0,\Omega]$ es compacto, también es numerablemente compacto. Por el teorema recién citado, (x_n) tiene un punto de aglomeración $x \in [0,\Omega]$; pero Ω no puede ser tal x, pues por el Teorema A.1.1, $\sup(x_n) < \Omega$ y entonces, $(\sup(x_n)+1,\Omega]$ no contiene puntos de (x_n). Por ende $x \in [0,\Omega)$, como queríamos probar. □

Proposición A.2.6. $[0,\Omega)$ *es compacto por sucesiones.*

Demostración. Se sigue del hecho de que es 1-numerable y numerablemente compacto ([14, Teorema 92.5]). □

Proposición A.2.7. $[0,\Omega)$ *no es separable y por consiguiente,* $[0,\Omega]$ *tampoco lo es.*

Demostración. Si $B \subset [0,\Omega)$ es algún subconjunto numerable, entonces $\sup B < \Omega$ por el Teorema A.1.1, de donde $(\sup B+1,\Omega)\cap B = \emptyset$. Por tanto, $[0,\Omega)$ no es separable. □

Proposición A.2.8. $[0,\Omega)$ *no es compacto.*

Demostración. La colección $\{[0,x+1)\,|x\in[0,\Omega)\}$ es una cubierta abierta de $[0,\Omega)$. Sin embargo, para cualquier subcolección finita $\{[0,x_i)\}_{i=1}^n$ de la cubierta, tenemos que $(\max(x_i)+1,\Omega) \nsubseteq \bigcup_{i=1}^n [0,x_i)$. Por tanto, $\{[0,x_i)\}_{i=1}^n$ no cubre a $[0,\Omega)$, lo que muestra que $[0,\Omega)$ no es compacto. □

Proposición A.2.9. *Toda función continua* $f : [0,\Omega) \longrightarrow \mathbb{F}$ *es eventualmente constante; es decir, existe* $s \in [0,\Omega)$ *tal que* f *es constante en* (s,Ω).

Demostración. Afirmamos que para todo $n \geq 1$ existe $r_n \in [0,\Omega)$, tal que $|f(r) - f(r_n)| < \frac{1}{n}$ si $r > r_n$. Supongamos que no es cierto, entonces existen $n_0 \geq 1$ y una sucesión (r_k) en $[0,\Omega)$, estrictamente creciente, tales que $|f(r_{k+1}) - f(r_k)| \geq \frac{1}{n_0}$ para todo $k \geq 1$. Tenemos que $\sup(r_k) < \Omega$ y $r_k \longrightarrow \sup(r_k)$ por ser creciente la sucesión;. Sin embargo, la sucesión $(f(r_k))$ no es convergente, por no no ser de Cauchy. Esto contradice la continuidad de f y prueba nuestra afirmación.

Tomemos la sucesión (r_n) con la propiedad señalada y sea $s = \sup\{r_n|\, n \geq 1\}$. Tenemos $s < \Omega$ y si $r > s$, entonces$|f(r) - f(r_n)| < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Como $[0,\Omega)$ es compacto por sucesiones, existe una subsucesión (r_{n_k}) de (r_n) tal que $r_{n_k} \longrightarrow r_0$ para algún $r_0 \in [0,\Omega)$. Entonces, $r > s$ implica

$|f(r) - f(r_{n_k})| < \frac{1}{n_k}$ para todo $k \geq 1$ y al hacer tender k a ∞, concluimos que $f(r) = f(r_0)$. $\square$

Apéndice B

Límite inductivo

Definición. Un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ junto con una familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios localmente convexos y operadores lineales $\varphi_i : X_i \to X$, para $i \in I$, es llamado un sistema inductivo. A la máxima topología localmente convexa en X que hace continua a cada φ_i se le llama la topología del límite inductivo asociada al sistema $(X_i, \varphi_i)_{i\in I}$ y (X, τ) es llamado el límite inductivo del sistema.

La topología indiscreta es localmente convexa y hace continua a cualquier función cuyo codominio esté topologizado con ella. De esto se sigue que siempre existe la topología del límite inductivo

B.1. Límite inductivo estricto de espacios localmente convexos

Obtendremos en esta sección lo que se llama el límite inductivo estricto, a partir de un sistema inductivo de espacios localmente convexos con propiedades adicionales a las pedidas anteriormente.

Definición B.1.1. Sean (X_n, τ_n) una sucesión creciente de subespacios localmente convexos de un espacio vectorial X tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ y (P_n) una sucesión de familias de seminormas tales que cada P_n induce la topología τ_n. Supongamos que la inclusión $i_n : X_n \to X_{n+1}$ es un homeomorfismo sobre su imagen; es decir, la topología de X_n está inducida por la de X_{n+1}. Sea P la familia de todas las seminormas p en X tales que $p|_{X_n}$ es τ_n-continua para cada $n \geq 1$. A la topología localmente convexa τ_P determinada por P se le llama la *topología del límite inductivo estricto* para la familia $\{(X_n, i_n) \,|n \geq 1\}$.

Observamos que P es una familia saturada; más aún, coincide con la colección de todas las seminormas continuas para τ_P .

Por 1.2.5, decir que $p|_{X_n}$ es continua para cada $n \geq 1$ es equivalente a pedir que exista una seminorma τ_n-continua p_n tal que $p(x) \leq p_n(x)$ para todo $x \in X_n$.

En lo que sigue (X_n, τ_n)*,* X*,* P *y* τ_P *tienen el mismo significado que en la definición anterior, y cuando no haya confusión escribiremos sólo* τ*, omitiendo el subíndice* P*.*

Proposición B.1.1. *La topología* τ *es la topología de límite inductivo para la familia* $\{X_n, i_n\}$ *, es decir es la máxima topología localmente convexa en* X *que hace continua a cada inclusión* $\iota_n : X_n \hookrightarrow X$*.*

Demostración. Sean $q \in P$ y $n \geq 1$. Notemos que $q(\iota_n(x)) = q(x) = q|_{X_n}(x)$ para todo $x \in X_n$ y $q|X_n$ es una seminorma τ_n-continua. Así, por el Teorema 1.2.14 y la Proposición 1.2.5, ι_n es τ-continua. Ahora sea τ' una topología tal que $\iota_n : X_n \hookrightarrow X$ es continua para cada $n \geq 1$, y sea q' una seminorma en X, τ'-continua. Dado $n \geq 1$ existe una seminorma τ_n-continua p_n tal que $q'|_{X_n}(x) = q'(\iota_n(x)) \leq p_n(x)$ para todo $x \in X_n$, por lo que $q'|_{X_n}$ es τ_n-continua para cada $n \geq 1$. Así, $q' \in P$ y entonces, $\tau' \subset \tau$. □

Teorema B.1.1. *Sea* $\mathcal{N}(X)$ *la familia de todos los subconjuntos* $V \subset X$ *que son balanceados, convexos y tales que* $V \cap X_n \in \mathcal{N}(X_n)$*, donde* $\mathcal{N}(X_n)$ *es el sistema de todas las vecindades de cero en* X_n *. Entonces* $\mathcal{N}(X)$ *es una base de vecindades del cero para la topología* τ*.*

Demostración. Si $V \in \mathcal{N}(X)$ entonces V es absorbente en X, pues $V \cap X_n$ es absorbente en X_n para todo $n \geq 1$. Si p es su funcional de Minkowski en X, p es una seminorma en X. Como $V \cap X_n$ es vecindad del cero en X_n, existe una seminorma τ_n-continua p_n tal que $\{x \in X_n \,| p_n(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in X \,| p(x) \leq 1\}$ (recordamos que $p(x) \leq 1$ para todo $x \in V$, por ser p la funcional de Minkowski de V). De donde, $p(x) \leq p_n(x)$ para todo $x_n \in X_n$, es decir $p|_{X_n} \leq p_n$. Por tanto, $p \in P$, y como $\{x \in X \,| p(x) < 1\} \subset V$ concluimos que V es una vecindad del cero en la topología τ.

Sea $p \in P$ y $V = \{x \in X \,| p(x) < 1\}$. Entonces V es absorbente, balanceado y convexo. Además $V \cap X_n = \{x \in X_n \,| p|_{X_n}(x) < 1\}$, y como $p|_{X_n}$ es una seminorma τ_n-continua tenemos que $V \cap X_n \in \mathcal{N}(X_n)$. Por lo tanto $V \in \mathcal{N}(X)$ y como toda τ_n-vecindad del cero en X contiene un conjunto del mismo tipo que V, se sigue que $\mathcal{N}(X)$ es una base de vecindades de 0 en la topología τ. □

Corolario B.1.1. *Si B es un subconjunto acotado en algún X_n, entonces B es acotado en X.*

Demostración. Sea $p \in P$. Como B es acotado en X_n y $p|_{X_n}$ es τ_n-continua, existe $M > 0$ tal que $p|_{X_n}(B) \leq M$, por ende $B \subset X$ es acotado. □

Proposición B.1.2. *Dada una seminorma continua p en un subespacio Z de un espacio localmente convexo Y, existe una seminorma q en Y tal que $p = q|_Z$.*

Demostración. Como Z es un subespacio de Y, existe una seminorma $q_0 : Y \longrightarrow \mathbb{F}$ continua en Z tal que $p(z) \leq q_0(z)$ para todo $z \in Z$. Consideremos los conjuntos $V = \{y \in Y \,|q_0(y) < 1\}$ y $W = \{z \in Z \,|p(z) < 1\}$, entonces $V \cap Z \subset W$. Tomemos en Y la envolvente convexa U de $V \cup W$, la cual es una vecindad balanceada y convexa del cero en Y, y entonces su funcional de Minkowski q es una seminorma continua en Y. Si $z \in Z$ y $p(z) < 1$ entonces $q(z) \leq 1$ porque $z \in W$, por tanto $q(z) \leq p(z)$ para todo $z \in Z$.

Para probar que se da la igualdad de p y $q|_Z$, tomemos ahora $z \in Z$ tal que $q(z) < 1$. Para $q(z) < \lambda < 1$ se cumple que $z \in \lambda U$; así, existe una combinación convexa $\alpha v + \beta w$, con $v \in V$ y $w \in W$, tal que $z = \lambda\alpha v + \lambda\beta w$. Si $\alpha > 0$ entonces $v = \frac{1}{\lambda\alpha} z - \frac{\beta}{\alpha} w \in V \cap Z \subset W$; por tanto, $p(v) < 1$ y así $p(z) \leq \lambda\alpha p(v) + \lambda\beta p(w) \leq \lambda(\alpha p(v) + \beta p(w)) \leq \lambda$. Si $\alpha = 0$ entonces $p(z) = \lambda p(w) < \lambda$. En ambos casos tenemos que $p(z) \leq \lambda$. Al hacer tender $\lambda \longrightarrow 1$ por la izquierda, concluimos que $p(z) \leq 1$. Por tanto, $p(z) \leq q(z)$ para todo $z \in Z$. Esto junto con lo antes probado, nos dice que $p = q|_Z$. □

Corolario B.1.2. *Dada una seminorma p_n en X_n, τ_n-continua, existe una seminorma p_{n+1} en X_{n+1}, τ_{n+1}-continua, tal que $p_n = p_{n+1}|_{X_n}$.*

Corolario B.1.3. *Dados $n \geq 1$ y una seminorma p_n en X_n, τ_n-continua, existe una sucesión $(p_{n+r})_{r=1}^{\infty}$ tal que cada p_{n+r} es una seminorma en X_{n+r}, τ_{n+r}-continua , $p_{n+r} = p_{n+r+1}|_{X_{n+r}}$ y $p_n = p_{n+r}|_{X_n}$ para todo $r \geq 1$.*

Demostración. Construiremos la sucesión $(p_{n+r})_{r=1}^{\infty}$ por inducción. Por el corolario anterior, para $r = 1$ existe una seminorma p_{n+1} en X_{n+1} que es τ_{n+1}-continua y tal que $p_n = p_{n+1}|_{X_n}$. Supongamos ahora que se han construido $p_{n+1}, \ldots, p_{n+r}$ con las propiedades correspondientes. Por el corolario anterior existe una seminorma p_{n+r+1} en X_{n+r+1} que es τ_{n+r+1}-continua y tal que $p_{n+r} = p_{n+r+1}|_{X_{n+r}}$. Entonces, $p_n = p_{n+r}|_{X_n} = p_{n+r+1}|_{X_n}$, terminando la definición por inducción. □

Corolario B.1.4. *Sean $n \geq 1$ y $p_n : X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma τ_n-continua. Existe una seminorma $p \in P$ tal que $p|_{X_n} = p_n$.*

Demostración. Tomemos la sucesión $(p_{n+r})_{r=1}^{\infty}$ como en el corolario anterior. Definimos la seminorma p en X como $p|_{X_{n+r}} = p_{n+r}$ para cada $r \geq 1$ y $p|_{X_i} = p_n|_{X_i}$ si $1 \leq i \leq n$. Como $p_{n+r} = p_{n+r+1}|_{X_{n+r}}$ y $p_n = p_{n+r}|_{X_n}$ para todo $r \geq 1$, esta seminorma está bien definida y por su definición $p|_{X_m}$ es τ_m continua para todo $m \geq 1$, por lo que $p \in P$. □

Corolario B.1.5. *Supongamos que (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de naturales, p_k es una seminorma τ_{n_k}-continua en X_{n_k} y $p_{k+1}|_{X_{n_k}} = p_k$ para cada $k \geq 1$. Entonces existe una seminorma $p \in P$ tal que $p|_{X_{n_k}} = p_k$.*

Demostración. Definimos la seminorma p en X de la siguiente manera: si $n \geq 1$, $p|_{X_n} = p_k|_{X_{n_k}}$, donde k es el primer natural tal que $n \leq n_k$. Es claro que $p|_{X_n}$ está bien definida porque (X_n) es creciente, (X_{n_k}) es una subsucesión y $p_{k+1}|_{X_{n_k}} = p_k$. Tenemos $p|_{X_{n_k}} = p_k$ por definición y $p|X_n = p_k|X_n$ es τ_n continua para todo $n \geq 1$, por tanto, $p \in P$. □

Proposición B.1.3. *La topología de límite inductivo estricto en X induce la topología τ_n de cada X_n, y es de Hausdorff si cada (X_n, τ_n) lo es.*

Demostración. Por la Proposición B.1.1 tenemos que $\tau|_{X_n} \subset \tau_n$ para cada $n \geq 1$. Y dada una seminorma p_n en X_n, τ_n-continua, existe, por el Corolario B.1.4, una seminorma $p \in P$ tal que $p|_{X_n} = p_n$. Así que por el teorema 1.2.14 se tiene que $\tau_n \subset \tau|_{X_n}$.

Sea $x \in X$ distinto de 0. Como $x \in X_n$ para alguna $n \geq 1$ y cada X_n es de Hausdorff, existe una seminorma p_n en X_n que es τ_n-continua y tal que $p_n(x) \neq 0$. Por el Corolario B.1.4, existe una seminorma $p \in P$ tal que $p(x) \neq 0$; es decir, (X, τ) es de Hausdorff. □

Proposición B.1.4. *Si cada X_n es cerrado en X_{n+1} entonces X_n es cerrado en X para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus X_n$, entonces $x \in X_{n+r}$ para algún $r \geq 1$. Como τ_{m+1} induce la topología τ_m en X_m para cada $m \geq 1$ y X_n es cerrado en X_{n+1}, entonces X_n es un subespacio cerrado de X_{n+r}. Existe una seminorma p_{n+r} en X_{n+r}, que es τ_{n+r}-continua, tal que $p_{n+r}(x-y) > 1$ para todo $y \in X_n$. Por el Corolario B.1.4 $p(x-y) > 1$ para una seminorma $p \in P$, es decir $x \notin \overline{X_n}^{\tau}$. O sea, $X_n = \overline{X_n}^{\tau}$. □

Lema B.1.1. *Sea Z un subespacio cerrado de un espacio localmente convexo Y. Si $y_0 \notin Z$ entonces existe una seminorma continua p en Y tal que $p(\lambda y_0 + z) = |\lambda|$ para todo $z \in Z$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. En particular $p(y_0) = 1$.*

Demostración. Por el Corolario (1.2.1) existe $f \in Y^*$ tal que $f(y_0) = 1$ y $f(Z) = 0$. La seminorma $p(y) = |f(y)|$ cumple lo que queremos. $\square$

Lema B.1.2. *Supongamos que cada X_n es cerrado en X_{n+1} y $B \subset X$ es acotado en X, entonces $B \subset X_n$ para algún $n \geq 1$.*

Demostración. Supongamos que $B \nsubseteq X_n$ para para todo $n \geq 1$. Para $n_0 = 1$ tomemos $x_1 \in B \backslash X_{n_0}$. Existe $n_1 > n_0$ tal que $x_1 \in X_{n_1}$. Existe $x_2 \in B \backslash X_{n_1}$, con $n_2 > n_1$, tal que $x_2 \in X_{n_2}$, e inductivamente podemos encontrar una sucesión de naturales (n_k), estrictamente creciente, y una sucesión (x_n) en B tales que $x_k \notin X_{n_{k-1}}$, pero $x_k \in X_{n_k}$.

Sea p_0 la seminorma idénticamente cero en X_n. Por el lema anterior, existe una seminorma p_1 que es τ_{n_1}-continua y tal que $p_1(x_1) = 1$ y $p_1(X_{n_0}) = 0$.

Consideremos $Z = X_{n_1} \oplus \langle x_2 \rangle$ y definamos $q_2 : Z \longrightarrow \mathbb{F}$ como

$$q_2(x + \lambda x_2) = p_1(x) + 2|\lambda|.$$

Es claro que q_2 es una seminorma en Z porque $p_1, |\cdot|$ son seminormas (continuas) en X_{n_1} y $\langle x_2 \rangle$, respectivamente. Notemos que si $z \in Z$, $q_2(z) = p_1(P_1(z)) + 2|P_2(z)|$, donde P_1, P_2 son las proyecciones de Z en X_{n_1} y $\langle x_2 \rangle$, respectivamente.

En el cociente $Z \diagup X_{n_1}$ se tiene que $x_0 + \lambda_0 x_2 \in \overline{x + \lambda x_2}$ si y sólo si $\lambda - \lambda_0 = 0$. Por consiguiente, $\overline{x + \lambda x_2} = \overline{\lambda x_2}$ y en consecuencia la restricción del operador cociente $\langle x_2 \rangle \xrightarrow{\pi} Z \diagup X_{n_1}$ es un homeomorfismo. El Teorema 1.2.5 nos dice que las proyecciones P_1, P_2 son continuas, así que q_2 también lo es. Como $Z \subset X_{n_2}$, existe, por la Proposición B.1.2, una seminorma p_2 en X_{n_2}, τ_{n_2}-continua, tal que $p_2|_Z = q_2$, de donde $p_2(x_2) = 2$ y $p_2|_{X_{n_1}} = p_1$.

Continuando este proceso inductivo, podemos construir una sucesión de seminormas (p_k) tal que cada p_k es una seminorma en X_{n_k}, τ_{n_k}-continua, $p_{k+1}|_{X_{n_k}} = p_k$ y $p_k(x_k) = k$. Por el Corolario B.1.5 existe una seminorma continua p en X tal que $p|_{X_{n_k}} = p_k$, y entonces B no es acotado con respecto a p, lo cual es una contradicción. Por tanto, $B \subset X_n$ para algún $n \geq 1$. $\square$

Proposición B.1.5. *Supongamos que cada X_n es cerrado en X_{n+1} y $B \subset X$. El conjunto B es acotado en X si y sólo si $B \subset X_n$ para algún n y B es acotado en X_n.*

Demostración. Parte «sólo si». Por el lema anterior $B \subset X_n$ para algún n. Sabemos que dada una seminorma p_n en X_n, existe $p \in P$ tal que $p|_{X_n} = p_n$, y como p es acotada en B, se tiene que $p_n(B)$ es acotado.

La parte «si» es el Corolario B.1.1. □

Lema B.1.3. *Supongamos que $(x_i)_{i \in I}$ es una red de Cauchy en X y denotemos con $\succsim$ el orden en I. Existe $m \geq 1$ tal que para cada pareja $(i, V) \in I \times \mathcal{N}(X)$ existe $j \succsim i$ tal que $x_j \in V + X_m$.*

Demostración. Supongamos falso el resultado. Para cada $n \geq 1$ existe una pareja $(i_n, V_n) \in I \times \mathcal{N}(X)$ tal que $j \succsim i_n$ implica que $x_j \notin V_n + X_n$. Podemos tomar las vecindades V_n de manera que $V_1 \supset V_2 \ldots$, sustituyendo V_{n+1} por $V_{n+1} \cap V_n$ cuando sea necesario. Definimos:

$$V = co\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \cap X_n\right)$$

Como $V_n \cap X_n \in \mathcal{N}(X_n)$ y $V_n \cap X_n \subset V \cap X_n$ entonces $V \cap X_n \in \mathcal{N}(X_n)$ para todo $n \geq 1$, y como además V es balanceado y convexo se sigue que $V \in \mathcal{N}(X)$ por el teorema B.1.1.

Afirmamos que $V \subset V_n + X_n$ para todo $n \geq 1$. Dado que el conjunto $V_n + X_n$ es convexo para todo $n \geq 1$ y por la definición de envolvente convexa basta ver que $V_m \cap X_m \subset V_n + X_n$ siempre que $m, n \geq 1$. Si $m \leq n$ entonces $V_m \cap X_m \subset X_m \subset X_n \subset V_n + X_n$, y si $m > n$ entonces $V_m \cap X_m \subset V_m \subset V_n \subset V_n + X_n$. Así, $V \subset V_n + X_n$.

Al ser $(x_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy existe $i_0 \in I$ tal que $x_j - x_{i_0} \in V$ para toda $j \succsim i_0$. Sea $n \geq 1$ tal que $x_{i_0} \in X_n$. Entonces $j \succsim i_0$ implica que $x_j \in V + X_n \subset V_n + X_n$; de donde, $j \succsim \max(i_0, i_n)$ implica $x_j \in V_n + X_n$, lo que contradice la elección de (i_n, V_n). □

Teorema B.1.2. *Supongamos que cada X_n es cerrado en X_{n+1}. Entonces, X es completo si y sólo si cada X_n es completo.*

Demostración. Supongamos que X es completo. Sean $n \geq 1$ y $(x_i)_{i \in (I, \succsim)}$ una red de Cauchy en X_n. Dados $p \in P$ y $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in I$ tal que $p|_{X_n}(x_i - x_j) < \varepsilon$ si $i, j \succsim i_0$. O sea, $(x_i)_{i \in I}$ es una red de Cauchy en X y por ende, converge a algún $x \in X$. Por ser X_n cerrado en X (Proposición B.1.4) , concluimos que $x \in X_n$.

Recíprocamente, supongamos que cada X_n es completo y $(x_i)_{i \in I}$ es una red de Cauchy en X. En el conjunto $I \times \mathcal{N}(X)$ definimos el orden parcial dado como $(k, V) \succcurlyeq (k', V')$ si $k \succsim k'$ y $V \subset V'$, el cual claramente dirige a $I \times \mathcal{N}(X)$ porque $\succsim$ y el orden inverso dado por la contención, dirigen a cada factor de $I \times \mathcal{N}(X)$. Para cada (k, V) definimos $x_{(k,V)} := x_j$ con $j \succsim k$ y $x_j \in V + X_m$, donde m,j y x_j son como en el lema anterior, y para cada $x_{(k,V)}$ sea $x^m_{(k,V)} \in X_m$ tal que $x_{(k,V)} - x^m_{(k,V)} \in V$.

Afirmamos que $\left(x^m_{(k,V)}\right)_{\{(k,V),\succcurlyeq\}}$ es una red de Cauchy en X_m. Dada $V_0 \in \mathcal{N}(X)$, sea $W \in \mathcal{N}(X)$ tal que $W + W + W \subset V_0$: Por ser $(x_i)_{i\in I}$ de Cauchy, existe $i_0 \in I$ tal que $x_i - x_{i'} \in W$ si $i, i' \succsim i_0$.

Tenemos:

$$x^m_{(k,V)} - x^m_{(k',V')} = \left(x^m_{(k,V)} - x_{(k,V)}\right) + \left(x_{(k,V)} - x_{(k',V')}\right) + \left(x_{(k',V')} - x^m_{(k',V')}\right)$$

Luego $(k, V), (k', V') \succcurlyeq (i_0, W)$ implica:

$$x^m_{(k,V)} - x^m_{(k',V')} \in (W + W + W) \cap X_m \subset V_0 \cap X_m$$

Lo que prueba nuestra afirmación. Así, $\left(x^m_{(k,V)}\right)_{(k,V)}$ converge en X_m, digamos a x. Veremos que $x_k \to x$ en X.

Dada $V_0 \in \mathcal{N}(X)$ sea $W \in \mathcal{N}(X)$ tal que $W + W + W \subset V_0$. Existen $i_0 \in I$ y (k_1, V_1) tales que $x_i - x_j \in W$ si $i, j \succsim i_0$ y $x^m_{(k,V)} - x \in W \cap X_m$ si $(k, V) \succcurlyeq (k_1, V_1)$. Podemos tomar $k_1 \succsim i_0$ y $V_1 \subset W$.

Como

$$x_k - x = \left(x_k - x_{(k_1,V_1)}\right) + \left(x_{(k_1,V_1)} - x^m_{(k,V_1)}\right) + \left(x^m_{(k,V_1)} - x\right)$$

tenemos: $k \succsim k_1$ implica $x_k - x \in W + W + W \subset V_0$; es decir, $x_k \longrightarrow x$ en X. □

Proposición B.1.6. *Si cada X_n es cerrado en X_{n+1} y es bornológico, entonces X es bornológico*

Demostración. Sea p una seminorma acotada en X; por el teorema 1.2.22, basta ver que p es continua, lo que en este caso equivale a que restringida a cada X_n sea continua. Si $B \subset X_n$ es acotado, también es acotado en X por el corolario B.1.1, entonces $p|_{X_n}$ es una seminorma acotada en X_n, y como X_n es bornológico se sigue que $p|_{X_n}$ es continua, como queríamos probar. □

Proposición B.1.7. *Si cada X_n es barrilado, entonces X es barrilado.*

Demostración. Sea $B \subset X$ un barril; luego, $B \cap X_n$ es un barril. Por ende $B \cap X_n \in \mathcal{N}(X_n)$, pues X_n es barrilado. Así, por el Teorema B.1.1, $B \in \mathcal{N}(X)$ y X es barrilado. como queríamos probar. □

Apéndice C

El álgebra $\mathscr{D}(\Omega)$

En este apéndice, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para $n \geq 1$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n)$ elementos de $\mathbb{N}_0^n$, definimos:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$
- $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$
- $\beta \leq \alpha$ si $\beta_i \leq \alpha_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
- $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$, si $\beta \leq \alpha$.
- Si $f : \mathit{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. entonces $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$ en caso de que existan estas derivadas parciales en x.

Fórmula de Leibniz Si $D^\alpha f$ y $D^\alpha g$ existen, entonces:

$\mathbf{D}^\alpha fg = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta f \, D^{\alpha-\beta} g$

C.1. El álgebra $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$

Sea $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ el álgebra de las funciones $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en Ω. Dotemos a $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ con la llamada $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ $-$topología que está dada por las seminormas:

$$p_{\alpha,K}(f) = \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $K \subset \Omega$ es compacto no vacío.

En todo lo que sigue se considera esta topología en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$.

La familia $\mathcal{Q}$ de seminormas de la forma

$$q_{r,K}(f) = \max_{|\beta|\le r} \sup_{x\in K} \left| D^\beta f(x) \right|$$

con r número natural y $K \subset \Omega$ compacto, genera la misma topología.

En efecto, sean $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $K \subset \Omega$ es compacto. Claramente $p_{\alpha,K} \le q_{r,K}$ si $|\alpha| \le r$. Por otra parte, dada $q_{r,K}$, tenemos que:

$$q_{r,K}(f) = \max_{|\beta|\le r} p_{\beta,K}(f).$$

Por el Teorema 1.2.14, $(Id, \{p_{\alpha,K}\}) \longrightarrow (Id, \{q_{\alpha,K}\})$ es continua; de donde, $\{p_{\alpha,K}\}$ y $\{q_{r,K}\}$ generan la misma topología.

Proposición C.1.1. *$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ es m-convexa.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$, y $q_{r,K} \in \mathcal{Q}$. Para cada $|\alpha| \le r$, la fórmula de Leibniz implica que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} |D^\alpha fg(x)| &\le \sup_{x\in K} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|D^\beta f(x)\right| \left|D^{\alpha-\beta} g(x)\right| \\
&\le \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} q_{r,K}(f)\, q_{r,K}(g) \\
&\le M_r q_{r,K}(f)\, q_{r,K}(g)
\end{aligned}$$

donde $M_r = \max_{|\alpha|\le r} \left(\sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \right)$. Por tanto, $q_{r,K}(fg) \le M_r q_{r,K}(f)\, q_{r,K}(g)$. Por el Lema 2.3.1, $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ es m-convexa. □

Lema C.1.1. *Existe una sucesión creciente S de compactos $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ en Ω, tales que $K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$, y todo compacto de Ω está contenido en algún conjunto de esta sucesión.*

Demostración. Si Ω es todo $\mathbb{R}^n$, entonces la sucesión $B_i[0]$ cumple lo que queremos. Supongamos ahora que $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$. Definimos:

$$K_i = B_i[0] \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \ge \frac{1}{i} \right\}.$$

El conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d\left(x, \mathbb{R}^n \diagdown \Omega\right) \geq \frac{1}{i}\right\}$ está contenido en Ω, pues

$$d\left(x, \mathbb{R}^n \diagdown \Omega\right) = 0 \text{ si y sólo si } x \in \mathbb{R}^n \diagdown \Omega$$

y dicho conjunto es cerrado, al ser $d\left(\cdot, \mathbb{R}^n \diagdown \Omega\right)$ una función continua. Por ende, $K_i \subset B_i[0]$ es un compacto de Ω. Además, es claro que $K_i \subset B_{i+1}(0) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d\left(x, \mathbb{R}^n \diagdown \Omega\right) > \frac{1}{i+1}\right\}$, el cual es un abierto contenido en K_{i+1}, de donde $K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$. Por último, si $K \subset \Omega$ es compacto, existe $i \geq 1$ tal que $K \subset B_i[0]$ y $K \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d\left(x, \mathbb{R}^n \diagdown \Omega\right) \geq \frac{1}{i}\right\}$, donde, la segunda contención es cierta porque $d\left(\cdot, \mathbb{R}^n \diagdown \Omega\right)$ alcanza su máximo en el compacto K, y el máximo es positivo, pues $K \subset \Omega$. □

Proposición C.1.2. $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ *es metrizable.*

Demostración. Para cada $q_{r,K}$ en $\mathcal{Q}$ existe K_i en la sucesión S construida en el lema anterior, tal que $q_{r,K} \leq q_{r,K_i}$. Concluimos que la topología de $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ está determinada por la familia numerable de seminormas $\{q_{r,K_i} | r, i \geq 1\}$, así que $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ es metrizable, por el Teorema 1.2.21. □

Proposición C.1.3. $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ *es bornológica.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.2.9. □

Proposición C.1.4. *Sea (g_j) una sucesión de funciones reales en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con derivadas parciales continuas de primer orden en Ω. Si (g_j) y $\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)$ convergen uniformemente en todo compacto no vacío de Ω, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces:*

(a) El límite puntual g de la sucesión (g_j) existe en Ω, y $\lim_{j \to \infty} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$, para cada $1 \leq i \leq n$ y $x \in \Omega$.

(b) La función g y sus derivadas parciales de primer orden, son continuas en Ω.

Demostración. Para cada $x \in \Omega$, $\lim_{j \to \infty} g_j(x)$ existe porque todo subconjunto de Ω de un sólo punto es compacto, y de este modo queda definida la función g.

Veamos ahora que la función límite puntual g cumple la segunda parte de (a). Sean $z \in \Omega$, con $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leq i \leq n$ y $D \subset \Omega$ un disco abierto, centrado en z. Como (g_j) y $\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)$ convergen uniformemente en D, se tiene que al fijar todas las coordenadas de z excepto la i-ésima, obtenemos las funciones $g^i(x) = g(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n)$, $g_j^i(x) = g_j(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ y $\frac{dg_j^i}{dx} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ que determinan sucesiones de funciones reales tales que en un intervalo abierto, centrado en z_i, convergen uniformemente. Por tanto, $\lim_{j\to\infty} \frac{d}{dx} g_j^i = \frac{d}{dx} g^i$ en dicho intervalo. En especial, $\lim_{j\to\infty} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(z) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(z)$.

Como para cada $1 \le i \le n$ se cumple que las convergencia $g_j \longrightarrow g$ y $\frac{\partial g_j}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}$ son uniformes en todo disco cerrado contenido en Ω, y ambas son sucesiones de funciones continuas, por hipótesis, concluimos que g y sus derivadas parciales de primer orden son continuas en Ω. □

Decir que una sucesión (f_j) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ significa que $p_{K,\alpha}\left(f_{j'} - f_j\right) \to 0$ cuando $j, j' \to \infty$. para todo compacto no vacío $K \subset \Omega$ y todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$, lo que equivale a que para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0$ la sucesión $(D^\alpha f_j)_j$ es uniformemente de Cauchy en cada en cada compacto no vacío $K \subset \Omega$. y por tanto, converge uniformemente en cada uno de estos conjuntos. En particular, al tomar α como la n-ada 0, tenemos que (f_j) converge uniformemente en cada compacto a su límite puntal y por tanto, éste es una función continua, pues cada f_j lo es.

Lema C.1.2. *Si (f_j) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, entonces para todo $1 \le i \le n$ y $r \ge 1$ se tiene que la sucesión $\left(\frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}\right)_j$ es de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Sean $1 \le i \le n$, $r \ge 1$, $K \subset \Omega$ compacto no vacío y $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$. Por hipótesis $p_{K,\beta}\left(f_{j'} - f_j\right) \to 0$ cuando $j, j' \to \infty$ para cualquier $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n)$. En particular esto sucede cuando $\beta_i = \alpha_i + r$, $\beta_k = \alpha_k$ para $k \ne i$. Así, $p_{K,\alpha}\left(\frac{\partial^r f_{j'}}{\partial x_i^r} - \frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}\right) \to 0$ cuando $j, j'\infty$. Esto prueba que $\left(\frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}\right)_m$ es de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$. □

Corolario C.1.1. *Sean (f_j) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ y f su límite puntual en Ω. Entonces, para todo $r \ge 0$ y todo $1 \le i \le n$, la sucesión $\left(\frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}\right)$ converge puntualmente a $\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}$, la convergencia es uniforme en compactos y $\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}$, para $1 \le i \le n$, es continua en Ω.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre r. Sabemos que el resultado es cierto para $r = 0$ y la proposición anterior muestra que también lo es para $r = 1$.

Supongamos ahora que vale para algún $r \ge 1$. Por el lema anterior, $\left(\frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}\right)$ y $\left(\frac{\partial^{r+1} f_j}{\partial x_i^{r+1}}\right)$ convergen uniformemente en compactos de Ω para todo

$1 \leq i \leq n$. Aplicando la proposición anterior a la sucesión $\left(\frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}\right)_j$, con $1 \leq i \leq n$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^r f_j}{\partial x_i^r}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^r f}{\partial x_i^r}(x) \\
&= \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_i^{r+1}}(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$ y $\frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_i^{r+1}}(x)$, para $1 \leq i \leq n$, es continua en Ω, □

Proposición C.1.5. *$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ es completa.*

Demostración. Sean (f_j) un sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ y f su límite puntual en Ω. Consideremos $p_{K,\alpha}$, con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$. Probaremos que $f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ y $f_j \overset{p_{K,\alpha}}{\longrightarrow} f$. Por el corolario anterior, podemos concluir que $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f_j(x) \longrightarrow \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$, con convergencia uniforme en compactos y $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$ es continua en Ω. Por el Lema C.1.2, la sucesión $\left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f_j\right)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, se sigue, de nuevo por el Corolario C.1.1 que $\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f_j(x) \longrightarrow \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$, con convergencia uniforme en compactos y $\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$ es continua en Ω. Procediendo inductivamente, tenemos que $\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_i^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f_j(x) \longrightarrow \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_i^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$ en Ω, y esta convergencia es uniforme en compactos y $\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_i^{\alpha_n}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f(x)$ es continua en Ω. Al ser α arbitraria $f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ y $p_{K,\alpha}(f_j - f) \longrightarrow 0$, como queríamos probar. □

Proposición C.1.6. *$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ es barrilada.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.2.10. □

C.2. El álgebra $\mathscr{D}(\Omega)$ de las funciones de prueba

Para cada $K \subset \Omega$ compacto no vacío, definimos:

$$\mathscr{D}(K) = \{f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega) \,|\, supp(f) \subset K\}$$

con la topología inducida por la de $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, donde $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0\}}$ es el soporte de f. Entonces $\mathscr{D}(K)$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, pues si $(f_j) \subset \mathscr{D}(K)$ y $f_j \longrightarrow f$ en $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, claramente $supp(f) \subset K$. Por lo tanto, $\mathscr{D}(K)$ es un álgebra m-convexa, metrizable, completa, bornológica y barrilada.

Definimos

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{E}^{\infty}(\Omega) \,|\, supp\,(f) \text{ es compacto}\}.$$

El espacio $\mathscr{D}(\Omega)$ como subálgebra topológica de $\mathcal{E}^{\infty}(\Omega)$ es un álgebra m-convexa y cada $\mathscr{D}(K)$ es un ideal de $\mathscr{D}(\Omega)$ y su topología coincide con la inducida por la $\mathscr{D}(\Omega)$.

En $\mathscr{D}(\Omega)$ se considerará otra topología. Si (K_n) es la sucesión creciente de compactos construida en el Lema C.1.1, entonces $(\mathscr{D}(K_n))$ es una sucesión creciente de álgebras y

$$\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}(K_n).$$

Tenemos que $\mathscr{D}(K_n)$ es cerrado en $\mathscr{D}(K_{n+1})$ y la inclusión

$$i_n : \mathscr{D}(\mathscr{K}) \to \mathscr{D}(K_{n+1})$$

es un homeomorfismo sobre su imagen para cada $n \geq 1$.

Damos a $\mathscr{D}(\Omega)$ la topología $\mathcal{T}$ del limite inductivo estricto asociado al sistema $\{\mathscr{D}(K_n), i_n\}_{n\geq 1}$. De acuerdo al Teorema 4.5.2, el álgebra $(\mathscr{D}(\Omega), \mathcal{T})$ es un álgebra m-convexa la cual es llamada el *álgebra de las funciones de prueba (test) en Ω.*

Observación C.2.1. Para definir las álgebras aquí consideradas podemos tomar funciones complejas en lugar de reales. Usando las relaciones de éstas con sus partes reales e imaginarias, y lo visto para las funciones reales, podemos obtener los resultados correspondientes para dichas álgebras complejas.

Bibliografía

[1] CH. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhikerâs Guide. Third edition.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[2] G.R. Allan. A spectral theory for locally convex algebras. *London Math. Soc.*, 3,15:399–421, 1965.

[3] V.K. Balachandran. *Topological Algebras.* North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 2000.

[4] E. Beckenstein, L. Narici, and C. Suffel. *Topological Algebras.* Elsevier Science, 1977.

[5] F.F. Bonsall and J. Duncan. *Complete normed algebras.* Springer-Verlag, 1973.

[6] A. El Kinani, L. Oubbi, and M. Oudadess. Spectral and boundedness radii in locally convex algebras. *Georgian Math. J.*, 5 no. 3:233–241, 1998.

[7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.

[8] J. Horvath. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.

[9] T. Husain. Infrasequential topological algebras. *Canad. Math. Bull.*, 22,4:413–418, 1979.

[10] T. Husain and Ng S-B. Boundedness of multiplicative linear functionals. *Canadian Math. Bull.*, 17:213–215, 1974.

[11] T. Husain and Ng S-B. On continuity of algebra homomorphisms and uniqueness of metric topology. *Math. Zeit*, 139:1–4, 1974.

[12] T. Husain and Ng S-B. On the boundedness of multiplicative and positive functionals. *Journal of Australian Math. Soc.*, XXI:498–503, 1976.

[13] G.A. Jospeh. Multiplicative functionals and a class of topological algebras. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 3:391–399, 1977.

[14] R.H. Kasriel. *Undergraduate topology.* W. B. Saunders Company, Philadelphia,Londres,Toronto, 1971.

[15] A. Mallios. *Topological Algebras, Selected Topics.* North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1986.

[16] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[17] E. A. Michael. *Locally multiplicatively-convex topological algebras.* Mem. Amer. Math. Soc. 11.

[18] M. Oudadess. Examples of infrasequential algebras. *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, 316:93–101, 1994.

[19] M. Oudadess. Examples and comparison of infrasequential algebras. *Math. Stud. (Tartu)*, 6:139–155, 2013.

[20] W. Rudin. *Functional Analysis. Second Edition.* McGraw-Hill, New York, 1991.

[21] A. Toma. Integral representation for powers of elements in locally m-convex algebras and applications. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (2) 58 no. 1:29–40, 2009.

[22] S Warner. Polynomial completeness in locally multiplicatively convex algebras. *Duke Math.*, 23:1–11, 1956.