Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El axioma de forcing propio, un camino desde los principios

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Fernando Pardo Sixtos

TUTORA

Dra. Gabriela Campero Arena

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Agradecimientos

A la Dra. Gabriela Campero, quien, además de abrirme las puertas del universo de la teoría de conjuntos, siempre gusta de aportar consejos y compartir sus experiencias sobre el trabajo y la vida.

Al Dr. Michael Hrusak, a quien debo la mayoría del conocimiento avanzado de teoría de conjuntos, y a quien agradezco el haberme dado la oportunidad de colaborar en el libro del que esta tesis formará parte.

Al Conacyt, que a través de su programa de apoyo a ayudantes de SNI III, me ha permitido trabajar junto a personas brillantes del mundo de la teoría de conjuntos, aprender cada día más y comenzar una vida independiente.

A mis padres, Leopoldo y Carmen, quienes con su ejemplo, sus enseñazas, apoyos, regaños y enormes esfuerzos han formado a la persona que ahora soy.

A mi hermano, Miguel, a quien sé que siempre puedo acudir en busca de un consejo, un amigo o un cómplice.

A mi novia, Andrea, cuyo apoyo incondicional me ha animado a tomar retos cada vez más difíciles de manera serena, sensata y eficiente; quien además, ha convertido algunos de mis años más pesados, también en los más felices.

A todos aquellos amigos con los que he rivalizado, competido y discutido, por mostrarme que los mejores resultados se obtienen a través del intercambio de ideas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este texto tiene como objetivo presentar el método de forcing de modo que el lector pueda aprender la técnica de iteraciones y la forma de aplicarla, sin la necesidad de profundizar en los tecnicismos que justifican por qué el método funciona. Para ello, tomaremos el enfoque axiomático que el Dr. Michael Hrusak utiliza en el libro de teoría de conjuntos que está escribiendo junto con el autor de esta tesis, y profundizaremos en algunos de los resultados ahí expuestos; más aún, se espera que gran parte de este texto pase a formar parte de dicho libro.

Fijaremos como meta final la demostración de la consistencia relativa del axioma de forcing propio. Esto porque la complejidad del mismo axioma y la cantidad de conocimientos requeridos para entender la prueba, nos presentan un camino rico en teoría, que podemos utilizar para entender gradualmente el método de forcing y las iteraciones, así como algunos resultados correspondientes a la teoría de modelos, pero útiles en la teoría de conjuntos.

Iniciaremos presentando algunos de los elementos básicos de la teoría de conjuntos. Daremos un vistazo a las relaciones, las funciones y los números ordinales y cardinales. Dedicaremos una sección a hablar de los órdenes parciales, que son objetos clave para el desarrollo del método de forcing. Terminaremos el capítulo con una introducción poco formal a la teoría de modelos y explicaremos el uso y utilidad de los modelos clase.

En el siguiente capítulo introduciremos el método de forcing, mostraremos los principios que asumiremos de manera axiomática y analizaremos algunas de las propiedades básicas de la relación de forcing. Expondremos la relación entre las extensiones genéricas y las propiedades combinatorias que puede tener el orden con el que se está forzando. En las últimas dos secciones del capítulo introductiremos las iteraciones. Inicaremos utilizando el forcing de Cohen para ejemplificar el uso de la más sencilla de las iteraciones: el forcing producto. Posteriormente daremos la definición formal de iteración de dos pasos y lo ejemplificaremos con el forcing random.

En el cuarto capítulo presentaremos la prueba de la consistencia relativa del axioma de Martin. Utilizaremos dicha demostración para introducir al lector a la idea de iteraciones infinitas, técnica que posteriormente retomaremos para el axioma de forcing propio.

Dedicaremos los últimos dos capítulos del texto a hablar del axioma de forcing propio. En el primero de ellos explicaremos qué son los clubs y conjuntos estacionarios tanto en el sentido tradicional como en el sentido de Jech. Esto para poder hablar de lo que significa que un forcing sea propio y su equivalencia modelo teorética. Dentro del último capítulo, expondremos la prueba de la consistencia relativa del axioma de forcing propio y los conceptos necesarios para desarrollarla. Iniciaremos explorando la existencia de los cardinales supercompactos y su relación con la existencia de las funciones de Laver. Posteriormente, analizaremos las iteraciones infintas con soporte numerable y sus propiedades de preservación respecto a forcings propios. Concluiremos el texto con la demostración mencionada y enunciaremos un par de aplicaciones que reflejen la utilidad de este axioma.

Este texto está dirigido a estudiantes de licenciatura o posgrado que dominen los temas correspondientes a los primeros dos cursos de teoría de conjuntos impartidos en la facultad de ciencias; para estudiar con mayor profundidad los temas básicos se recomienda consultar [1]. Si bien el texto no profundizará en temas fuera del área de la teoría de conjuntos, el lector logrará tener mejor comprensión de las ideas si cuenta con conocimientos básicos de topolgía, teoría de la medida y análisis matemático.

Capítulo 2

Elementos básicos

Axiomas de la teoría de conjuntos

La axiomatización actualmente aceptada de la teoría de conjuntos y sobre la cual estaremos trabajando consta de los siguientes axiomas:

1. **axioma de existencia** - $\exists x\ (x = x)$;
2. **axioma de par** - $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$;
3. **axioma de unión** - $\forall x\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \leftrightarrow \exists y \in x\ (w \in y))$;
4. **axioma de extensionalidad** - $\forall x\ \forall y\ (x = y \leftrightarrow \forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y))$;
5. **axioma de potencia** - $\forall x\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \leftrightarrow w \subseteq x)$;
6. **axioma de comprensión** - Dada una fórmula φ con una variable libre,
$$\forall x\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \leftrightarrow w \in x \wedge \varphi(w));$$
7. **axioma de reemplazo** - Dada una fórmula φ con dos variables libres tal que si $\varphi(x, y) = \varphi(x, z)$, entonces $y = z$, se tiene que
$$\forall x\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \leftrightarrow\ \exists v \in x\ \varphi(v, w));$$
8. **axioma de infinito** - $\exists x\ (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x\ (y \cup \{y\} \in x))$
9. **axioma de elección** - $\forall x\ \forall y \in x\ (y \neq \emptyset \rightarrow \prod_{y \in x} y \neq \emptyset)$[1];
10. **axioma de regularidad** - $\forall x\ (x \neq \emptyset\ \rightarrow\ \exists y \in x\ \forall w \in x\ (w \notin y))$.

[1] $\prod_{y \in x} y$ denota al conjunto de las funciones $f\colon y \to \bigcup y$ tales que para cualquier $x \in y$, $f(x) \in x$.

Cabe aclarar que la lista anterior contiene 8 axiomas y 2 esquemas de axiomas, los cuales son reemplazo y comprensión, que en realidad representan listas infinitas de axiomas, uno para cada fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos.

Además de los conjuntos, nos daremos el lujo de hablar de ciertas colecciones de conjuntos de la forma $\{x : \varphi(x)\}$, donde φ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. A dichas colecciones le llamaremos *clases* y, aunque todos los conjuntos son clases, existen clases que no son conjuntos, a estos objetos les llamaremos *clases propias*. Obsérvese que hablar de una clase C, es hablar sobre los conjuntos que cumplen la fórmula que define a C; por lo tanto, no podemos cuantificar sobre clases, pues estaríamos cuantificando sobre fórmulas y éstas no son elementos del universo de la teoría de conjuntos. El hecho de que no podamos cuantificar sobre fórmulas es la causa de que tengamos que utilizar esquemas de axiomas en lugar de una lista finita.

Funciones y relaciones

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, las funciones y relaciones no son más que conjuntos de pares ordenados con algunas propiedades especiales. Nosotros nos permitiremos hablar de *funciones clase* y *relaciones clase*, es decir, clases que satisfacen las propiedades que hacen que un conjunto sea una relación o una función.

Dados x y y conjuntos, decimos que el conjunto $\{\{x\},\{x,y\}\}$ es el *par ordenado* de x y y, lo denotamos como (x,y). El producto cartesiano de X y Y es la clase $\{(x,y) : x \in X \land y \in Y\}$, la denotamos como $X \times Y$.

Es fácil ver que esta definición de par ordenado satisface las propieddades típicas que se le pide a este objeto. Diremos que una clase R es una *relación* si todos sus elementos son pares ordenados. A continuación se enlistan algunas de las propiedades y notación para una relación R:

- dadas clases X y Y, diremos que la clase $\{(x,y) : (x,y) \in R \land x \in X \land y \in Y\}$ es la *restricción* de R a $X \times Y$ y la denotamos como $R \restriction X \times Y$;
- dada una clase X, denotamos a la restricción de R a $X \times X$ como $R \restriction X$;
- $\mathrm{dom}(R) = \{x : \exists y\ ((x,y) \in R\}$, dicho conjunto es el *dominio* de R;
- $\mathrm{im}(R) = \{y : \exists x\ ((x,y) \in R\}$, dicho conjunto es la *imagen* de R;
- para cualesquiera conjuntos x, y, escribimos $x\ R\ y$ para denotar que $(x,y) \in R$;
- R es *reflexiva* si para cualesquiera $x \in \mathrm{dom}(R)$, $x\ R\ x$;
- R es *transitiva* si para cualesquiera x, y, z, si $x\ R\ y$ y $y\ R\ z$, entonces $x\ R\ z$;
- R es *simétrica* si para cualesquiera x, y, si $x\ R\ y$, entonces $y\ R\ x$;

- R es *de equivalencia* si es reflexiva, transitiva y simétrica;
- R es *antireflexiva* si para cualquier x, $\neg(x\ R\ x)$;
- R es *antisimétrica* si para cualesquiera x, y, si $x\ R\ y$ y $y\ R\ x$, entonces $x = y$.

Diremos que un conjunto f es una *función*, si es una relación y para cualquier $x \in \mathrm{dom}(f)$, existe un único $y \in \mathrm{im}(f)$ tal que $(x, y) \in f$. Tenemos las siguientes propiedades y notación para una función f:

- dada una clase X, escribimos $f \restriction X$ para denotar a la clase $\{(x, y) : (x, y) \in f \wedge x \in X\}$, obsérvese que esta notación tiene un significado distinto cuando f es función además de ser relación;
- dadas unas clases X y Y, escribimos $f \colon X \to Y$ para expresar que f es una función con dominio X e imagen contenida en Y;
- dadas unas clases X y Y, escribimos $f; X \to Y$ para expresar que f es una función con dominio contenido en X e imagen contenida en Y, a dichas funciones se les conoce como *funciones parciales*.
- para cualesquiera conjuntos x, y, escribimos $f(x) = y$ para denotar que $(x, y) \in f$;
- dada una clase A, $f''A = \{b : \exists a \in A\ (f(a) = b)\}$, decimos que $f''A$ es la *imagen* de A bajo f;
- dada una clase B, $f^{-1}[B] = \{a : \exists b \in B\ (f(a) = b)\}$, decimos que $f^{-1}[B]$ es la *imagen inversa* de B bajo f;
- f es *inyectiva* si para cualesquiera $x, y \in \mathrm{dom}(f)$, si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$;
- dadas unas clases X y Y, $f \colon X \to Y$ es *sobre* si para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- dadas unas clases X y Y, $f \colon X \to Y$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobre;
- dada una clase Y y un conjunto A, ${}^{A}Y$ denota a la clase de todos los conjuntos que son funciones con dominio A e imagen contenida en Y.

Naturalmente si las clases R o f son conjuntos, entonces las clases definidos a partir de ellas, como el dominio, imagen, imagen directa e imagen inversa, también son conjuntos.

Números ordinales y cardinales

En esta sección mencionaremos algunas de las definiciones y propiedades importantes relativas a los números ordinales y cardinales. Evitaremos las pruebas porque se pueden ser encontradas en la literatura fácilmente, en particular en [1].

Definición 2.1. Decimos que un conjunto x es *transitivo* si todo elemento de x está contenido en x.

Alternativamente podríamos decir que x es transitivo si $\in\restriction x$ es una relación transitiva. En adelante utilizaremos la notación $\langle X, R\rangle$ para denotar que R es una relación contenida en la clase $X \times X$. Algunas veces escribiremos $\langle X, R\rangle$ en lugar de R para resaltar al dominio de la relación.

Definición 2.2. Un conjunto α es un *número ordinal* si:

1. α es transitivo y
2. $\langle \alpha, \in\restriction \alpha\rangle$ es un buen orden.

Recordemos que $\langle X, R\rangle$ es un *buen orden* si, $R \subseteq X \times X$, R es un orden parcial estricto[2] y todo subconjunto de X tiene un elemento R-mínimo[3]. Obsérvese que estamos tratando a la pertenencia $\in$ como una relación contenida en $\alpha \times \alpha$, haremos este tipo de cosas muy a menudo e incluso podríamos hablar de $\in$ como una relación clase sobre el universo.

Definición 2.3. Sea α un número ordinal, decimos que

- $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, a dicha s la llamamos *operación sucesor*;
- α es un *número natural* si $\langle \alpha, \ni\restriction \alpha\rangle$ es un buen orden, donde $\ni$ es la pertenencia inversa;
- α es un *ordinal sucesor* si existe un ordinal β tal que $\alpha = s(\beta)$.
- α es un *ordinal límite* si es no vacío y no es ordinal sucesor, denotaremos a la clase de los ordinales límite como Lim.

Bajo esta definición lo números naturales son aquellos ordinales que podemos construir a partir del conjunto vacío utilizando únicamente la operación sucesor, por ello denotaremos como 0 al conjunto vacío y como n al conjunto que resulta de aplicar n veces la operación sucesor al 0. Denotaremos como ω al conjunto de los números naturales y escribiremos ON para denotar a la clase propia de los números ordinales.

[2] R es transitiva y antireflexiva.

[3] x es R-mínimo en una clase Y si para cualquier $y \in Y$, si $x \neq y$, entonces $\neg(y\ R\ x)$.

Proposición 2.4. *Si α es un número ordinal, entonces $\alpha = \{\beta \in ON : \beta \in \alpha\}$.*

Proposición 2.5. *Si A un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup A$ es un número ordinal. Diremos que dicho ordinal es el supremo del conjunto A.*

Definiremos el orden $<$ en la clase ON como $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$ y utilizaremos los dos símbolos indistintamente. Se puede probar que $<$ es un *orden total* en ON, es decir, $<$ es un orden parcial estricto y, dados $\alpha, \beta \in \mathsf{ON}$, se cumple que $\alpha < \beta$ o $\beta < \alpha$ o $\alpha = \beta$ y solo una de ellas. También podemos decir que $<$ es un buen orden sobre ON en el sentido de que todo subconjunto (en realidad toda subclase) de ON tiene un elemento $<$-mínimo, esta última propiedad es lo que nos garantiza el principio de inducción transfinita.

Teorema 2.6 (Inducción transfinita)**.** *Sea φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, entonces*

$$\forall \alpha \in \mathsf{ON}\ (\forall \beta < \alpha\ (\varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)) \to \forall \alpha \in \mathsf{ON}\ \varphi(\alpha)$$

En otras palabras, si el hecho de que una propiedad se cumpla para todos los ordinales menores que un ordinal α implica que α cumple dicha propiedad, entonces todos los ordinales cumplen la propiedad.

La primera parte de la implicación es equivalente a probar que dada una fórmula φ:

1. $\varphi(0)$;
2. $\forall \alpha \in \mathsf{ON}\ (\varphi(\alpha) \to \varphi(s(\alpha))$ *y*
3. $\forall \alpha \in \mathsf{Lim}\ (\forall \beta < \alpha\ (\varphi(\beta))) \to \varphi(\alpha)$.

Utilizaremos las dos formas de la inducción indistintamente, dependiendo de cual sea más conveniente. Nótese que podemos restringir esta inducción a cualquier ordinal, por ejemplo, el enunciado restringido a ω se vería del siguiente modo:

$$\forall n \in \omega\ (\forall m < n\ (\varphi(n)) \to \varphi(m)) \to \forall n \in \omega\ (\varphi(n)),$$

que representa a la inducción fuerte para los números naturales.

Teorema 2.7. *Sea A un conjunto tal que $\langle A, R\rangle$ es un buen orden, entonces existe un único $\alpha \in \mathsf{ON}$ tal que $\langle A, R\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$[4]. Decimos que dicho α es el* tipo de orden *de $\langle A, R\rangle$ y lo denotamos como* $\mathrm{ot}(A, R)$. *En caso de que sepamos de qué orden hablamos, escribiremos únicamente* $\mathrm{ot}(A)$.

Existe una definición recursiva para la suma y el producto de ordinales, pero la siguiente equivalencia refleja mejor el tipo de estructuras que se obtienen al realizar las operaciones. Antes de la definición recordemos que $<_{X\times Y}$ es el *orden lexicográfico* para $X \times Y$, si se cumple que

[4] Existe $f\colon A \to \alpha$ biyectiva tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que $a\ R\ b$ si y solo si $f(a) \in f(b)$.

$$(x_0, y_0) <_{X\times Y} (x_1, y_1) \text{ si y solo si } x_0 <_X x_1 \text{ o } (x_0 = x_1 \text{ y } y_0 <_Y y_1).$$

Definición 2.8. Sean α, β ordinales, definimos la suma y el producto de ordinales, como

- $\alpha + \beta = \mathrm{ot}((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta))$;
- $\alpha \cdot \beta = \mathrm{ot}(\beta \times \alpha)$,

donde los productos están ordenados con el orden lexicográfico.

Con el axioma de elección podemos garantizar que para cada conjunto A existe un buen orden $\leq_A$ para A, esto junto con el teorema 2.7 nos asegura que existe un ordinal α_A y una biyección de un ordinal α_A a A. Nos gustaría considerar a α_A como el tamaño de A, sin embargo, nada nos garantiza que el ordinal α_A sea único.

Definición 2.9. Decimos que un ordinal κ es un *número cardinal*, si dado $\alpha < \kappa$ no existe una función biyectiva de α a κ.

Siguiendo esta idea de "tamaño", diremos que un conjunto es infinito si no hay un número natural con el que se pueda biyectar. Se puede ver fácilmente que ω es el primer cardinal y se puede demostrar que existen tantos cardinales como ordinales, más aún, enumeraremos a los números cardinales infinitos usando a los ordinales de forma que $\omega = \omega_0$, y ω_α es el α-ésimo número cardinal. Así, si $\beta < \alpha$, entonces $\omega_\beta < \omega_\alpha$. Denotaremos al *cardinal sucesor* de un cardinal κ como κ^+, es fácil ver que κ^+ es mayor que el sucesor de κ como ordinal siempre que κ sea infinito, de hecho, todo cardinal infinito es un ordinal límite, aunque no todo ordinal límite es un cardinal.

Dado un conjunto A denotaremos como $|A|$ al único cardinal con el que $|A|$ es biyectable. Con esta notación podemos definir las operaciones de artimética cardinal.

Definición 2.10. Sean κ y μ dos cardinales, definimos la suma, producto y exponenciación cardinal como

- $\kappa + \mu = |\kappa \cup \mu|$;
- $\kappa \cdot \mu = |\kappa \times \mu|$;
- $\kappa^\mu = |{}^\mu\kappa|$, frecuentemente denotaremos al conjunto ${}^\mu\kappa$ como κ^μ, si nos referimos al conjunto de funciones o al cardinal quedará claro por el contexto en que utilicemos esta notación.

Teorema 2.11 (Cantor)**.** *Dado un conjunto A no existe una función biyectiva de A a $\mathcal{P}(A)$. Más aún, $|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

El teorema anterior es el que nos permite asegurar que existe un cardinal mayor que ω y, de hecho, motiva la hipótesis del continuo, que denotamos como CH y que podemos escribir sencillamente como

$$2^\omega = \omega_1.$$

El último concepto del que hablaremos en esta sección es la *cofinalidad* de un ordinal α, que intuitivamente es la mínima cantidad de saltos de longitud menor a $|\alpha|$ que debemos realizar para llegar del 0 a α. En general si $\langle X, R\rangle$ es un orden total y $A \subseteq X$, decimos que A es *R-cofinal* en X si $\forall x \in X\ \exists a \in A\ (x\ R\ a)$, es decir, si A es no acotado en X.

Definición 2.12. Sean α y β ordinales.

1. Diremos que β es *cofinal* en α si existe una función $f : \beta \to \alpha$ tal que $f''\beta$ es $\in$-cofinal en α.
2. Se le llama *cofinalidad* de α al mínimo ordinal cofinal en α, y se denota como $cof(\alpha)$.
3. Si $\alpha = cof(\alpha)$, decimos que α es *regular*.
4. Si $\alpha \neq cof(\alpha)$, decimos que α es *singular*.

Proposición 2.13. *Sea α un ordinal, entonces*

1. *$cof(\alpha)$ es un cardinal;*
2. *si α es límite y no cardinal, entonces α es singular;*
3. *si α es un ordinal límite, entonces $cof(\aleph_\alpha) \leq \alpha$;*
4. *si α es un ordinal, entonces α^+ es regular.*

Órdenes parciales

Dado un conjunto A, un subconjunto $\mathbb{P}$ de A y una relación $\leq_{\mathbb{P}}$ sobre $\mathbb{P}$ decimos que $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}\rangle$ es un *orden parcial* si y solo si $\leq_{\mathbb{P}}$ es transitivo, reflexivo y antisimétrico. En algunos casos necesitaremos que el orden sea estricto, en cuyo caso solo pediremos que sea transitivo y antireflexivo, usualmente los denotaremos con el símbolo $<_{\mathbb{P}}$. Para aligerar la notación escribiremos únicamente $\leq$ o $<$ cuando el contexto no propicie confusiones.

Usualmente los órdenes parciales que nos interesan tienen un elemento máximo al cual denotaremos como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, dichos órdenes son los elementos clave para desarrollar el método del forcing y por lo mismo, los llamaremos *nociones de forcing* o únicamente *forcings*.

Definición 2.14. Sea $\mathbb{P}$ un forcing y $p, q \in \mathbb{P}$. Decimos que p es *compatible* con q, denotado como $p \parallel q$, si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. En caso contrario, decimos que p y q son *incompatibles* y lo denotamos como $p \perp q$.

La noción de compatibilidad nos permite definir los siguientes conceptos importantes para el desarrollo del método de forcing.

Definición 2.15. Sea $\mathbb{P}$ un forcing y $p \in \mathbb{P}$, decimos que

1. $D \subseteq \mathbb{P}$ es un subconjunto *denso debajo de* p[5], si todos elemento de D es menor o igual que p y para cada $q \leq p$, existe $r \in D$ tal que $r \leq q$;

2. $D \subseteq \mathbb{P}$ es un subconjunto *predenso debajo de* p, si todo elemento de D es menor o igual que p y para cada $q \leq p$, existe $r \in D$ tal que $r \parallel q$;

3. $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena debajo de* p, si todo elemento de A es menor o igual que p y dados $q, r \in A$, $q \perp r$. Si, además, A es maximal con respecto a la contención, diremos que A es *anticadena maximal debajo de p;*

4. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro, si dados $r, q \in \mathbb{P}$:

   - si $r \in G$ y $r \leq q$, entonces $q \in G$ y
   - si $r \in G$ y $q \in G$, entonces $r \parallel q$.

Es natural preguntarnos cuándo podremos intercambiar un forcing por otro y obtener los mismos resultados, para ello se necesita que los órdenes sean lo suficientemente parecidos en el siguiente sentido.

Definición 2.16. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos forcings e $i\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, decimos que

1. i es un *encaje*, si preserva orden e incompatibilidad, es decir,

$$\forall p, r \in \mathbb{P}\ ((p \leq r \to i(p) \leq i(r)) \land (p \perp r \to i(p) \perp i(r));$$

2. i es un *encaje regular*, si es un encaje y

$$\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists p \in \mathbb{P}\ \forall r \in \mathbb{P}\ (r \parallel p \to i(r) \parallel q);$$

3. i es un *encaje completo*, si es un encaje regular y dada $n \in \omega$ y $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$:

$$\exists q \in \mathbb{Q}\ \forall m \in n+1\ (q \leq i(p_m)) \to \exists p \in \mathbb{P}\ \forall m \in n+1\ (i(p) \leq p_m);$$

4. i es un *encaje denso*, si su imagen es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$.

Algunas veces en lugar de la definición anterior de encaje regular, utilizaremos las siguientes equivalencias:

- si $A \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena maximal, entonces $i''A$ es una anticadena maximal en $\mathbb{Q}$;

- si $D \subseteq \mathbb{P}$ es predenso, entonces $i''D$ es un subconjunto predenso de $\mathbb{Q}$.

[5] En caso de que p sea $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ omitiremos las palabras "debajo de p".

A continuación listamos algunas sencillas pero importantes propiedades combinatorias que pueden tener los forcings.

Definición 2.17. Sea $\mathbb{P}$ un forcing, decimos que

1. $\mathbb{P}$ es *sin átomos*, si $\forall p \in \mathbb{P}\ \exists q, r \leq p\ (q \perp r)$;

2. $\mathbb{P}$ es *separativo*, si $\forall p, q \in \mathbb{P}\ (p \not\leq q \to \exists r \in \mathbb{P}\ (r \leq p \wedge r \perp q))$;

3. $\mathbb{P}$ tiene la *condición de la cadena contable*, abreviado *ccc*, si toda anticadena de $\mathbb{P}$ es a lo más numerable;

4. dado un cardinal κ, $\mathbb{P}$ tiene la κ*-cc* si toda anticadena de $\mathbb{P}$ tiene cardinalidad menor que κ;

5. $\mathbb{P}$ es σ*-cerrado*, si toda cadena de $\mathbb{P}$ numerable tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$;

6. dado un cardinal κ, $\mathbb{P}$ es κ*-cerrado* si toda cadena de $\mathbb{P}$ con cardinalidad menor que κ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$.

En este trabajo siempre que hablemos de un orden parcial, asumiremos que es sin átomos y separativo.

Recursión y buena fundación

Pensemos en cómo funciona la recursión en los números naturales. Digamos que queremos definir una función f como la función factorial, entonces para definir $f(n+1)$ debemos tener definido $f(n)$, pues $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$. De este modo podemos seguir hasta que lo único que sea necesario conocer sea $f(0)$. Obsérvese que la idea clave es llegar a algún punto donde la función ya está definida.

Siguiendo esta idea, para definir una función con dominio el universo bastaría que para cada conjunto conociéramos el valor de la función en cada uno de sus elementos, pero ¿cómo saber si este proceso termina? Esto es justo lo que nos garantiza el axioma de buena fundación y la razón por la que es tan importante para el desarrollo del método de forcing.

Proposición 2.18. *No existe una cadena descendente de conjuntos ordenada por la pertenencia ($\in$), además, el elemento mínimo de toda cadena maximal es el conjunto vacío.*

Demostración. Supongamos que existe un conjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ tal que $x_{n+1} \in x_n$ para cada n, entonces por el axioma de regularidad, existe $m \in \omega$ tal que $x_j \notin x_m$ para ninguna $j \neq m$, pero esto contradice que $x_{m+1} \in x_m$. Para la segunda parte, supongamos que $\{x_n : n \leq m\}$ es una cadena descendiente maximal y que $x_m \neq \emptyset$, entonces existe y tal que $y \in x_m$, por lo que la cadena original no era maximal. $\square$

La proposición anterior formaliza nuestra idea y nos permite enunciar el teorema de recusión.

Teorema 2.19. *Dado un conjunto o clase A y una función (clase) $F\colon A\times \mathsf{V}\to \mathsf{V}$, donde V es el universo. Entonces existe una única función (clase) $G\colon A\to \mathsf{V}$ tal que*

$$\forall x \in A\ (G(x) = F(x, G \restriction x)).$$

Omitiremos la demostración del teorema porque solo es una generalización de la demostración del teorema de recursión para números naturales, la cual puede ser encontrada fácilmente en la literatura. Existen algunas otras versiones del teorema de recursión equivalentes pero con ligeras variaciones que pueden resultar útiles en ciertos casos, por ejemplo, versiones donde F utiliza únicamente un argumento.

Más adelante presentaremos algunas funciones cuya existencia se puede formalizar por el teorema anterior y, aunque evitaremos entrar en detalles sobre sus construcciones recursivas, vale la pena aclarar que es el teorema de recursión el que nos permite usar libremente dichas herramientas.

Modelos y relativización

Aunque nuestro acercamiento a la teoría de modelos será limitado y, en muchos aspectos informal, en esta sección trataremos de establecer los conceptos básicos de estructuras, modelos, modelos clase y submodelos elementales. Esto con el fin de avanzar de una manera más fluida en las secciones siguientes, sin embargo, se recomienda al lector interesado en teoría de conjuntos que profundice en los temas aquí mencionados.

En la lógica matemática, un *lenguaje* es una colección de símbolos para constantes, relaciones y funciones que posteriormente tienen una interpretación en un universo. El lenguaje de la teoría de conjuntos consta únicamente de un símbolo de relación binaria que se interpretará como la pertenencia.

Diremos que una *estructura* $\mathfrak{A}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una sucesión finita formada por un conjunto A (el universo de $\mathfrak{A}$) y las interpretaciones de los elementos de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{A}$. Formalmente debríamos ser más cuidadosos con la distinción entre los elementos de $\mathcal{L}$ como objetos sintácticos y sus interpretaciones dentro de la estructura. Pero por el momento, tal diferencia no es relevante para nosotros.

Utilizando los símbolos usuales de la lógica de primer orden, podemos construir enunciados del lenguaje $\mathcal{L}$. Diremos que una estructura $\mathfrak{A}$ es un *modelo* para una colección de enunciados Σ, si cada uno de los enunciados de Σ es verdadero en $\mathfrak{A}$, después de realizar las interpretaciones correspondientes de los elementos de $\mathcal{L}$. Como ejemplo, consideremos el axioma del vacío como enunciado del lenguaje $\mathcal{L} = \{R\}$, es decir, el enunciado

$$\exists x\ \forall y\ \neg(y\ R\ x).$$

Dicho enunciado puede ser verdadero en una estructura donde no se hable de la pertenencia, un ejemplo de ello es la estructura $\mathfrak{A}$ que tiene como universo al conjunto $\{a, b\}$ de dos elementos distintos y tal que R se interpreta en $\mathfrak{A}$ como la relación $\{(a, b)\}$. Como $\neg(b\ R\ a)$ y $\neg(a\ R\ a)$, $\mathfrak{A}$ es modelo del axioma de vacío.

Para denotar que $\mathfrak{A}$ es modelo de una colección de enunciados Σ, escribimos $\mathfrak{A} \models \Sigma$, del mismo modo, si queremos decir que cierto enunciado φ es verdadero en $\mathfrak{A}$, escribimos $\mathfrak{A} \models \varphi$. Formalmente no definimos qué significa que un enunciado sea verdadero en una estructura $\mathfrak{A}$, para este trabajo bastará con tener una idea intuitiva de la verdad. Sin embargo, es importante tener en mente algunas de las características de la *noción de verdad de Tarski* para una estructura $\mathfrak{A}$ de un lenguaje $\mathcal{L}$:

1. si φ es un enunciado de $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ si y solo si $\mathfrak{A} \not\models \varphi$;

2. si φ y ψ son enunciados de $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{A} \models \psi$;

3. si φ y ψ son enunciados de $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi$ o $\mathfrak{A} \models \psi$;

4. si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ con una variable libre, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x\ (\varphi(x))$ si y solo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$;

5. si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ con una variable libre, entonces $\mathfrak{A} \models \forall x\ (\varphi(x))$ si y solo si para toda $a \in A$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$.

Como ya mencionamos, los axiomas de ZFC son enunciados de un lenguaje que tiene como único elemento a una relación binaria. Y como ya vimos con el axioma del vacío, los modelos de ZFC no necesariamente tienen que interpretar a esta relación como la pertenencia, pero resulta mucho más conveniente si sí lo hacen. A dichos modelos les llamaremos *módelos estándar de* ZFC. Además, si una estructura para el lenguaje de la teoría de conjuntos es de la forma $\langle M, \in\rangle$, escribiremos M en lugar de $\langle M, \in\rangle$ para referirnos a ella. Por ejemplo,

$$M \models \exists x\ \forall y\ \neg(y \in x).$$

Aunque en la definición de modelo pedimos explícitamente que el universo sea un conjunto, nos daremos el lujo de permitir que los modelos puedan ser clases propias. Por ejemplo, el universo V es modelo de ZFC, más aún, el universo constructible L es una clase propia, modelo de ZFC. Esto nos lleva al concepto de relativización.

Dada una clase M obtenemos la *relativización* de una fórmula φ a M al acotar a todos los cuantificadores de φ con M y la denotamos como φ^M. Como ejemplo mostramos el enunciado del axioma del par:

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y),$$

y a su relativización a M:

$$\forall x \in M\ \forall y \in M\ \exists z \in M\ \forall w \in M\ (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Diremos que una fórmula φ es verdadera en M si todos sus parámetros son elementos de M y φ^M es verdadera en el universo. En caso de que M sea un conjunto y no una clase propia, esta noción de verdad coincide con la noción de verdad tradicional.

Definición 2.20. Decimos que un conjunto (o clase) x es transitivo si

$$\forall y\ (y \in x \to y \subseteq x).$$

Es fácil ver que si una clase M es transitiva, entonces M es modelo del axioma de extensionalidad. Más aún, la noción de igualdad en M coincide con la noción de igualdad de cualquier otra clase transitiva. En ese sentido, diremos que una fórmula φ es *absoluta* para clases transitivas si es verdadera en toda clase transitiva que contenga a sus parámetros. Del mismo modo, una fórmula puede ser absoluta para modelos de ZFC o para cualquier tipo de clases con alguna propiedad particular.

Proposición 2.21. *Si φ es una fórmula con todos sus cuantificadores acotados, entonces φ es absoluta para clases transitivas.*

Cuando los cuantificadores no son acotados no podemos dar resultados tan generales como el anterior, pero podemos asegurar que “los existes suben” y “los para todos bajan”. Es decir, si M y N son clases transitivas con $M \subseteq N$, y $\varphi(x)$ es una fórmula de una sola variable con parámetros en M, entonces

- si $\exists x \varphi(x)$ es cierta en M, entonces $\exists x \varphi(x)$ es cierta en N y
- si $\forall x \varphi(x)$ es cierta en N, entonces $\forall x \varphi(x)$ es cierta en M.

A continuación enlistamos algunos de los conceptos que son absolutos para modelos transitivos de $\mathsf{ZF} - \mathsf{P}$, es decir, modelos de todos los axiomas de ZFC sin potencia ni elección.

- ser un conjunto transitivo;
- ser un ordinal;
- ser un ordinal sucesor;
- ser un ordinal límite;
- ser un número natural;
- ser el conjunto de todos los números naturales;

- ser una relación;
- ser una función;
- ser una biyección;
- ser un conjunto finito;
- ser la suma $\alpha + \beta$, donde α y β son ordinales.

A menudo utilizaremos argumentos de absolutez sin decir explícitamente en dónde y cómo se están aplicando, se espera que el análisis de los ejemplos anteriores dé la habilidad necesaria para rellenar los huecos. Regularmente los argumentos se siguen de que un modelo con dichas características tiene todo lo necesario para enunciar y verificar cierta propiedad.

El concepto de relativización no se limita a los modelos estándar; por ejemplo, si N es una clase y R es una relación sobre N, podemos relativizar el axioma del par a $\langle N, R\rangle$ del siguiente modo:

$$\forall x \in N\ \forall y \in N\ \exists z \in N\ \forall w \in N\ (w\ R\ z \leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

Como hicimos previamente, diremos que un enunciado del lenguaje de la teoría de conjuntos es cierto en $\langle N, R\rangle$ si su relativización es cierta en el universo. Habrá ocasiones en que, aunque $\langle N, R\rangle$ no sea estándar, la relación R se comportará bastante parecido a la pertenencia en el sentido de la siguiente definición.

Definición 2.22. Sea N una clase y R una relación binaria sobre N, decimos que

- R es *bien fundada* sobre N si para todo subconjunto A de N existe $x \in A$ tal que $\neg(y\ R\ x)$, para todo $y \in A$;
- R es *tipo conjunto* sobre N si para todo $x \in N$, la clase $\{y : y\ R\ x\}$ es un conjunto;
- R es *extensional* sobre N si

$$\forall x \in M\ \forall y \in N\ (x = y \leftrightarrow \forall z \in N\ (z\ R\ x \leftrightarrow z\ R\ y)).$$

El siguiente teorema nos permite asegurar que una estructura $\langle M, R\rangle$ que cumple dichas condiciones, en efecto, se comporta como la pertenencia.

Teorema 2.23 (Teorema del colapso de Mostowski)**.** *Sea R una relación binaria bien fundada, extensional y tipo conjunto en una clase N. Entonces existe una única clase transitiva M tal que $\langle N, R\rangle$ es isomorfa a $\langle M, \in\rangle$. Es decir, existe una función $\pi\colon N \to M$ biyectiva tal que si φ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con n variables libres y $x_1, \ldots, x_n \in N$, entonces la relativización de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a $\langle N, R\rangle$ se cumple si y solo si la relativización de $\varphi(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$ a $\langle M, \in\rangle$ se cumple.*

La idea para demostrar el teorema del colapso de Mostowski es construir, utilizando el teorema de recursión, una función $\pi\colon N \to \mathsf{V}$ tal que $\pi(x) = \{\pi(y) : y\, R\, x\}$, para cada $x \in N$, y definir $M = \mathrm{im}(\pi)$. Dicha π será el isomorfismo entre M y N. De la idea de la demostración podemos ver que el modelo N se colapsa a una parte inicial del universo, de ahí el nombre del teorema.

El teorema de Löwenheim-Skolem y los submodelos elementales

Aunque nosotros solo utilizaremos modelos de ZFC o de $\mathsf{ZF} - \mathsf{P}$, enunciaremos el concepto de submodelos elementales y el teorema de Löwenheim-Skolem en su versión para cualquier estructura.

Definición 2.24. Sea $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Decimos que $\mathfrak{B}$ es *subestructura* de $\mathfrak{A}$, si

- el universo B de $\mathfrak{B}$ está contenido en el universo A de $\mathfrak{A}$;
- si R es uno de los símbolos de relación de $\mathcal{L}$ interpretado en $\mathfrak{A}$, entonces $R \restriction B$ es el mismo símbolo de relación interpretado en $\mathfrak{B}$;
- si f es uno de los símbolos de función de $\mathcal{L}$ interpretado en $\mathfrak{A}$, entonces $f \restriction B$ es el mismo símbolo de función interpretado en $\mathfrak{B}$;
- la interpretación de cada constante del lenguaje es la misma tanto en $\mathfrak{A}$, como en $\mathfrak{B}$.

Además, diremos que $\mathfrak{B}$ es una *subestructura elemental* de $\mathfrak{A}$, denotado como $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$ si dada una fórmula φ del lenguaje $\mathcal{L}$ con n variables libres y $x_1, \ldots, x_n \in B$, se tiene que

$$\mathfrak{B} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Usualmente usaremos la palabra *submodelos* en lugar de subestructuras y diremos que N es un submodelo elemental de M si $\langle N, \in\rangle \preceq \langle M, \in, \rangle$.

Teorema 2.25. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ con universo A, κ un cardinal tal que* $\text{máx}(|\mathcal{L}|, \omega) \leq \kappa \leq |A|$ *y $S \subseteq A$ con $|S| \leq \kappa$. Entonces existe una estructura $\mathfrak{B}$ tal que S está contenido en el universo de $\mathfrak{B}$, $|B| = \kappa$ y $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.*

Del teorema anterior podemos garantizar que dado un modelo de ZFC, podemos encontrarle muchos submodelos elementales. Sin embargo, los teoremas de incompletud de Gödel nos garantizan que no podemos encontrar un modelo de ZFC cuyo elemento sea un conjunto sin suponer previamente la existencia de otro modelo de este tipo. Es por ello que nosotros realizamos pruebas de consistencia relativa, es decir, suponemos que ZFC tiene un modelo para luego construir otro modelo donde se cumplan los axiomas o enunciados que nosotros deseamos.

Aunque no podamos construir un modelo conjunto de ZFC, sí existen conjuntos que modelan únicamente una parte de los axiomas. Ejemplos de ello son algunos estratos de la jerarquía de los conjuntos bien fundados, explorada en [1], y las familias de conjuntos *hereditariamente menores* que cierto cardinal. Estos últimos son los que utilizaremos en este trabajo.

Definición 2.26. Sea x un conjunto. Denotamos como $\mathrm{trcl}(x)$ a la cerradura transitiva de x, es decir, al mínimo conjunto transitivo que contiene a x.

Es sencillo probar que dado un conjunto x, la cerradura transitiva de x siempre existe, más aún, la podemos construir cerrando x bajo la pertenencia ω veces.

Definición 2.27. Sea θ un cardinal infinito. Decimos que

- un conjunto x es *hereditariamente menor que* θ si $|\mathrm{trcl}(x)| < \theta$;
- $H(\theta)$ denota al conjunto de todos los conjuntos hereditariamente menores que θ.

Teorema 2.28. *Sea θ un cardinal infinito, tenemos que*

- $|H(\theta)| = 2^{<\theta}$ *y*
- *si θ es un cardinal regular no numerable, entonces $H(\theta)$ es modelo de* $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P}$*. El hecho de que sea modelo del axioma de elección se sigue de que estamos asumiendo el axioma de elección para el universo.*

La segunda propiedad enunciada en el teorema anterior nos permite considerar a algunos conjuntos $H(\theta)$ como submodelos del universo, en el sentido que si θ es lo suficientemente grande, ciertas verdades se cumplirán en $H(\theta)$ si y solo si se cumplen en el universo. Además, los submodelos elementales de los conjuntos $H(\theta)$ pueden ser utilizados para probar importantes resultados combinatorios. Daremos un ejemplo de esto demostrando el lema del Δ-sistema, resultado que necesitaremos más adelante en el texto.

Decimos que una familia D es un $\Delta-$sistema si existe r tal que para cualesquiera $d_1, d_2 \in D$, $r = d_1 \cap d_2$.

Lema 2.29 ($\Delta-$sistema)**.** *Toda familia no numerable de conjuntos finitos contiene un $\Delta-$sistema no numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia no numerable de conjuntos finitos, podemos suponer que cada a_α es un subconjunto de ω_1, por lo que $\mathcal{A} \in H(\omega_2)$. Por Löwenheim-Skolem, un submodelo elemental numerable M de $H(\omega_2)$ tal que $\mathcal{A} \in M$. Sea $\delta = \omega_1 \cap M$, como M es numerable existe $\alpha < \omega_1$ tal que $a_\alpha \nsubseteq M$, sea $r = a_\alpha \cap \delta$, esta r será la raíz de nuestro $\Delta-$sistema.

Obsérvese que si $\alpha < \delta$, entonces $H(\omega_2) \models \alpha$ *es numerable*, y por absolutez $\omega \in M$, por lo que, por elementalidad, $M \models \alpha$ *es numerable*. Del mismo modo, si $\alpha \in M$ y $\alpha > \delta$, entonces α es no numerable en M. Tomemos β un ordinal numerable en M, entonces $\beta < \delta$, por lo que

$$H(\omega_2) \models r \subseteq a_\alpha \wedge a_\alpha \setminus r \neq \emptyset \wedge \text{mín}(a_\alpha \setminus r) > \beta,$$

en particular,

$$H(\omega_2) \models \exists a \in \mathcal{A}\ (r \subseteq a \wedge a \setminus r \wedge \text{mín}(a \setminus r) > \beta),$$

y por elementalidad,

$$M \models \exists a \in \mathcal{A}\ (r \subseteq a \wedge a \setminus r \wedge \text{mín}(a \setminus r) > \beta).$$

Como tomamos un ordinal cualquiera que fuera numerable en M,

$$M \models \forall \beta < \omega_1\ \exists a \in \mathcal{A}\ (r \subseteq a \wedge a \setminus r \wedge \text{mín}(a \setminus r) > \beta)$$

y finalmente, utilizando de nuevo la elementalidad, concluimos que

$$H(\omega_2) \models \forall \beta < \omega_1\ \exists a \in \mathcal{A}\ (r \subseteq a \wedge a \setminus r \wedge \text{mín}(a \setminus r) > \beta).$$

Ahora construiremos recursivamente un $\Delta-$sistema $\mathcal{D} = \{d_\alpha \in \mathcal{A} : \alpha < \omega_1\}$. Para ello fijemos un ordinal $\alpha < \omega_1$ y supongamos que ya hemos construido d_ξ para cada $\xi < \alpha$, consideremos $\beta := \sup\{\text{máx}(d_\xi) : \xi < \alpha\}$. Por la regularidad de ω_1, $\xi < \omega_1$, entonces existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $r \subseteq a$, $a \setminus r \neq \emptyset$ y $\text{mín}(a \setminus r) > \beta$, definamos d_α como dicha a. Esta construcción garantiza que $\mathcal{D}$ es un $\Delta-$sistema no numerable. $\square$

Terminaremos la sección con un poco de notación. En caso de que un conjunto A tenga una definición, denotaremos como A^M al conjunto obtenido de interpretar dicha definición en la clase M. Por ejemplo, ω_1^M es el primer ordinal en M para el cual no existe una biyección con ω en M; $(\mathcal{P}(A))^M$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A que son elementos de M y el conjunto $(H(\theta))^M$ es el conjunto de todos los elementos de M cuya cerradura transitiva tenga cardinalidad menor que θ en M.

Capítulo 3

Forcing

Aclaremos que el enfoque de esta tesis es axiomático, es decir, asumiremos que el método de forcing cumple ciertas propiedades sin necesidad de demostrarlas, pues algunas de estas pruebas son muy técnicas y no aportan familiaridad con el uso del método. Del mismo modo trataremos de explicar lo mejor posible los pasos más importantes para el desarrollo y comprensión del método del forcing, mientras que evitaremos ahondar en demostraciones que correspondan a otras áreas de la matemática, o bien, en aquellas que interrumpirían el flujo de la información y que por tanto afectarían el objetivo didáctico de este trabajo.

Principios de forcing

De aquí en adelante M denotará un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ un forcing.

Definición 3.1. Decimos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* $\mathbb{P}$*-genérico* sobre M, si $D \cap G \neq \emptyset$ para todo $D \in M$ subconjunto denso de $\mathbb{P}$.

Teorema 3.2 (Rasiowa-Sikorski)**.** *Sea $\mathbb{P} \in M$ un forcing y $p \in \mathbb{P}$. Entonces existe un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M con $p \in G$.*

Demostración. Enumeremos a la familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ como $\{D_n : n \in \omega\}$, esto se puede hacer porque M es un modelo numerable. Construiremos una cadena decreciente de elementos de $\mathbb{P}$ de modo que

- $p_0 \in D_0$ y $p_0 \leq p$;
- para cada $n > 0$, $p_{n+1} \in D_{n+1}$ y $p_{n+1} < p_n$.

Sea $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega \ (p_n \leq q)\}$, G es el filtro buscado. □

Ya que $\mathbb{P}$ es un elemento de M y M es modelo del axioma de comprensión, podría parecer que G es un elemento de M, el detalle clave es que la enumeración de los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ en M no tiene que ser un elemento de M.

Definición 3.3. Sea $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

1. Definimos recursivamente la función $\mathrm{val}_G : M \to \mathsf{V}$ tal que

$$\mathrm{val}_G(\dot{x}) = \{\mathrm{val}_G(\dot{y}) : \exists p \in G \ (y, p) \in x\}.$$

2. Definimos la extensión genérica de M por G como

$$M[G] = \{\mathrm{val}_G(\dot{x}) : \dot{x} \in M\}.$$

3. Diremos que $\dot{y}$ es un nombre para $x \in M[G]$, si $val_G(\dot{y}) = x$.

El método de forcing nos permite crear modelos que tengas "más" cosas a partir de un modelo base M. La belleza de esta técnica es que no solo nos permite construir extensiones sino que podemos hablar de sus elementos a partir de nombres, es decir, elementos que ya estaban en M pero que bajo una decodificación, resultan ser elementos de la extensión generalmente muy distintos al elemento original.

La definición anterior deja un amplio margen para lo que queramos llamar nombre, en realidad, podemos considerar a cualquier elemento de M como nombre, aunque muchas veces su valuación sea vacía o carezca de importancia. A continuación daremos de manera recursiva una definición más específica, pero en tanto sea posible trataremos de referirnos a los nombres como la idea superficial de la definición anterior.

Definición 3.4. Si $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial, decimos que una relación $\dot{x} \in M$ es un $\mathbb{P}$-nombre si dado $z \in \dot{x}$ existe un $\mathbb{P}$-nombre $\dot{y}$ y un $p \in \mathbb{P}$ tal que $z = (\dot{y}, p)$.

Si bien podemos tener muchos nombres para un mismo objeto, definiremos el nombre canónico para $x \in M$ como

$$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}) : y \in x\}.$$

Independientemente del filtro genérico G que elijamos, podemos garantizar que $val_G(\check{x}) = x$; de este modo podemos concluir que $M \subseteq M[G]$. De manera similar, dado un filtro genérico G, definimos

$$\dot{\Gamma} = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\},$$

dicho conjunto es tal que $val_G(\dot{\Gamma}) = G$, por lo tanto, $G \in M[G]$.

Definición 3.5. Sea $p \in \mathbb{P}$, φ una fórmula con n variables libres y $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ nombres en M. Decimos que p forza $\varphi(\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n})$, si para cada filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, con $p \in G$ se cumple que

$$M[G] \models \varphi(val_G(\dot{x_1}), \ldots, val_G(\dot{x_n}))$$

y lo denotamos como

$$p \Vdash \text{“}\varphi(\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n})\text{”}.$$

La notación del punto arriba de los símbolos ($\dot{x}$) es utilizada frecuentemente en la literatura, pero es muy común que su significado varíe de un autor a otro; a continuación explicamos qué significará para este trabajo y se recomienda al lector que revise este detalle al consultar cualquier libro que utilice esta notación. Aunque todo elemento del modelo base puede ser un nombre, escribiremos $\dot{x}$ para resaltar que estamos pensando a $\dot{x}$ como nombre y que solo nos interesan las propiedades que tiene como nombre. Cuando, al contrario, no nos interese el comportamiento de un elemento $x \in M$ como nombre, lo escribiremos sin el punto. Dentro de las fórmulas de forcing evitaremos escribir nombres canónicos, es decir, escribiremos $p \Vdash$ “$\varphi(x)$” para referirnos a la fórmula $p \Vdash$ “$\varphi(\check{x})$”.

Dado $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico, tenemos los siguientes principios que, aunque en realidad son teoremas, asumiremos como axiomas. Pues sus demostraciones no son relevantes para aprender a aplicar el método y los formalismos involucrados escapan a los objetivos de este trabajo.

Principio 3.6 ($M[G]$ **es modelo).** *$M[G]$ es un modelo estándar transitivo numerable de* ZFC *con los mismos ordinales que M y es el mínimo modelo estándar transitivo numerable que extiende a M y tal que $G \in M[G]$.*

Principio 3.7 (**Toda verdad en** $M[G]$ **está forzada).** *Si $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M$ y $\varphi(\mathrm{val}_G(\dot{x}_1), \ldots, \mathrm{val}_G(\dot{x}_n))$ es un enunciado con todos sus parámetros enlistados tal que $M[G] \models \varphi(\mathrm{val}_G(\dot{x}_1), \ldots, \mathrm{val}_G(\dot{x}_n))$, entonces existe $p \in G$ tal que $p \Vdash$ “$\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$”.*

Principio 3.8 (**Maximalidad).** *Si $p \in G$, φ es una fórmula con una variable libre y $p \Vdash$ “$\exists x\ \varphi(x)$”, entonces existe $\dot{y} \in M$ tal que $p \Vdash$ “$\varphi(\dot{y})$”.*

Principio 3.9 (**Definibilidad).** *La relación $\Vdash$ es definible en M, es decir, si φ es una fórmula con n variables libres, hay una fórmula ψ con $n+2$ variables libres tal que*

$$p \Vdash \text{“}\varphi(\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n})\text{” si y solo si } M \models \psi(\mathbb{P}, p, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n).$$

Como último detalle sobre nuestra notación, supongamos que tenemos un elemento $x \in M[G]$, entonces sabemos que existe un nombre $\dot{y} \in M$ tal que $val_G(\dot{y}) = x$. Para evitar decir esto cada vez que sea necesario, denotaremos como $\underset{\sim}{\dot{x}}$ a un nombre cuya valuación sea x.

La relación de forcing ($\Vdash$) cumple algunas propiedades básicas que vale la pena tener en mente:

- si $p \Vdash$ "φ" y $q \leq p$, entonces $q \Vdash$ "φ";
- si $\mathbb{P} \in M$ es un forcing, G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p \in G$ y $M[G] \models \varphi$, entonces existe $q \leq p$ en G tal que $q \Vdash$ "φ";
- si $p \nVdash$ "φ", entonces existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash$ "$\neg\varphi$";
- $p \nVdash$ "$\varphi \wedge \neg\varphi$";
- $p \Vdash$ "$\varphi \wedge \psi$" si y solo si $p \Vdash$ "φ" y $p \Vdash$ "ψ";
- $p \Vdash$ "$\neg\varphi$" si y solo si para todo $q \leq p$ se tiene que $q \nVdash$ "φ";
- $p \Vdash$ "$\varphi \vee \psi$" si y solo si el conjunto $\{r \leq p \mid r \Vdash \text{"}\varphi\text{"} \vee r \Vdash \text{"}\psi\text{"}\}$ es denso bajo p;
- $p \Vdash$ "$\forall x\ (\varphi(x))$" si y solo si para cualquier nombre $\dot{a}$, $p \Vdash$ "$\varphi(\dot{a})$" .

Forcings κ-cc y κ-cerrados

En esta sección veremos que este tipo de órdenes tienen propiedades importantes de preservación de cofinalidades y cardinalidades. Además, estableceremos algunas otras propiedades que nos permitirán acotar el tamaño de ciertos conjuntos en la extensión genérica desde el modelo base.

Recordemos que κ es un cardinal en M si y solo si no existe una biyección en M entre algún ordinal más pequeño y κ, pero ¿qué pasa en $M[G]$? Típicamente $M[G]$ es un modelo con más elementos y, en particular, con más funciones, resulta natural preguntarse si aparece alguna función de un ordinal más pequeño en κ. Dicha pregunta motiva nuestra siguiente definición.

Definición 3.10. Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Decimos que

- dado κ un cardinal en M, $\mathbb{P}$ *preserva κ como cardinal* si
$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{"}\kappa \text{ es un cardinal"};$$
- dado un ordinal $\alpha \in M$, $\mathbb{P}$ *preserva la cofinalidad de α* si para cualquier ordinal θ,
$$M \models \operatorname{cof}(\alpha) = \theta \text{ implica que } \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{"}\operatorname{cof}(\alpha) = \theta\text{"};$$
- $\mathbb{P}$ *preserva cardinalidades*, si $\mathbb{P}$ preserva κ como cardinal, para todo cardinal κ;
- $\mathbb{P}$ *preserva cofinalidades*, si $\mathbb{P}$ preserva la cofinalidad de α, para todo ordinal α.

Proposición 3.11. *Sea $\mathbb{P} \in M$ un forcing y κ un cardinal regular en M. Entonces, si $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades mayores o iguales a κ, $\mathbb{P}$ preserva cardinalidades mayores o iguales a κ.*

Demostración. Como $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades mayores o iguales a κ, $\mathbb{P}$ preserva κ como cardinal y preserva a todo cardinal sucesor mayor o igual a κ. Fijemos θ, tal que θ es un cardinal límite en M mayor que κ. Supongamos, para llegar a una contradicción, que hay $\alpha < \theta$ tal que existe, en $M[G]$, una función $f\colon \alpha \to \kappa$ suprayectiva. Trabajando en M, $|\alpha| < \theta$, sea $\theta_0 = \text{máx}\{|\alpha|^+, \kappa\}$. Como θ es un cardinal límite, $\theta_0 < \theta$, además, θ_0 es regular y mayor o igual a κ, por lo que es un cardinal en $M[G]$. Obsérvese que en $M[G]$, $\alpha < \theta_0 < \theta$, por lo que $\theta \subseteq \text{im}(f)$ y, como consecuencia, θ_0 no es un cardinal de $M[G]$, lo cual es una contradicción. □

Si bien en las extensiones genéricas pueden aparecer nuevos subconjuntos de un elemento del modelo base, resulta que, de cierto modo, ya conocemos un poco de su estructura desde el modelo original.

Lema 3.12 (Representación de nombres)**.** *Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y sean $p \in \mathbb{P}$, $\dot{B}, A \in M$ tales que $p \Vdash$ "$\dot{B} \subseteq A$". Entonces para cualquier $a \in A_a$, existe una anticadena $A_a \subseteq \mathbb{P}$ maximal debajo de p y existe $f_a\colon A_a \to 2$ tal que si $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p \in G$, entonces*

$$\text{val}_G(\dot{B}) = \{a \in A : \exists q \in A_a \cap G \ \ (f_a\,(q) = 1)\}\,.$$

Demostración. Dado un elemento $a \in A$, el conjunto

$$D_a := \{q \leq p : q \Vdash \text{“}a \in \dot{B}\text{”} \vee q \Vdash \text{“}a \notin \dot{B}\text{”}\}$$

es denso debajo de p. Sea A_a una anticadena maximal debajo de p contenida en D_a, que existe por el Lema de Zorn, y $f_a\colon A_a \to 2$ tal que $f_a\,(q) = 1$ si y solo si $q \Vdash$ "$a \in \dot{B}$". □

Definición 3.13. Sea $\mathbb{P} \in M$ un forcing, $p \in \mathbb{P}$ y $A \in M$. Decimos que $\dot{B}$ es un nombre *p-estándar* si para cada $a \in A$, existe una anticadena A_a maximal debajo de p y existe una función $f_a\colon A_a \to 2$ tal que

$$\dot{B} = \{(\check{a}, q) : a \in A \wedge q \in A_a \wedge f_a(q) = 1\}.$$

Observe que el lema anterior nos garantiza que, dado $A \in M$, los nombres p-estándar son suficientes para nombrar a todos los subconjuntos de A forzados por un elemento p.

Corolario 3.14 (Representación de nombres)**.** *Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y $p \in \mathbb{P}$, sean $\dot{f}, A, B \in M$ tales que $p \Vdash$ "$\dot{f} : A \to B$". Entonces para cualquier $a \in A$, existe, en M, una anticadena A_a maximal debajo de p y $f_a\colon A_a \to B$ tal que si $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p \in G$, entonces*

$$\text{val}_G(\dot{f})(a) = b \textit{ si y solo si } \exists q \in A_a \cap G \ f_a(q) = b.$$

Demostración. Obsérvese que $p \Vdash$ "$\dot{f} \subseteq A \times B \wedge \forall a \in A\ \exists! b \in B\ ((a,b) \in \dot{f})$". Para cada $(a,b) \in A \times B$, sean $A_{(a,b)}$ y $f_{(a,b)} \colon A_{(a,b)} \to 2$, los conjuntos construidos como en la demostración del lema anterior. Para cada $a \in A$, definamos $A_a = \{q \in \bigcup_{b \in B} A_{(a,b)} : f_{(a,b)}(q) = 1\}$, dicho conjunto es una anticadena maximal debajo de p por cómo se definieron las funciones $f_{(a,b)}$ en la demostración del lema anterior. Como $p \Vdash$ "$\forall a \in A\ \exists! b \in B\ ((a,b) \in \dot{f})$", podemos definir, para cada $a \in A$, una función $f_a \colon A_a \to B$ tal que $f_a(q) = b$ si y solo si $f_{(a,b)}(q) = 1$. □

Definición 3.15. Sea $\mathbb{P} \in M$ un forcing, $A, B \in M$ y $p \in \mathbb{P}$. Decimos que $\dot{g}$ es un nombre *p-estándar* para una función entre A y B si para cada $a \in A$, existe una anticadena A_a maximal debajo de p y una función $f_a \colon A \to B$ tal que

$$\dot{g} = \{((a,b), q) : (a,b) \in A \times B \wedge q \in A_a \wedge f_a(q) = b\}.$$

Del mismo modo que para subconjuntos, los nombres p-estándar son suficientes para cubrir a todas las funciones entre elementos del modelo base que son forzados por un elemento p.

Corolario 3.16 (Lema del tubo)**.** *Sean $\kappa, \mathbb{P} \in M$ tales que κ es un cardinal en M y $\mathbb{P}$ es un forcing con la κ-cc. Sean $A, B, \dot{g} \in M$ y $p \in \mathbb{P}$ tales que $p \Vdash$ "$\dot{g} \colon A \to B$". Entonces existe, en M, $F \colon A \to \mathcal{P}(B)$ tal que para cualquier $a \in A$,*

1. *$|F(a)| < \kappa$ y*
2. *$p \Vdash$ "$\dot{g}(a) \in F(a)$".*

Demostración. Para cada $a \in A$, tomemos A_a y f_a como en el corolario anterior. Sea $C = \bigcup\{\mathrm{im}(f_a) : a \in A\}$ y sea $F \colon A \to \mathcal{P}(C)$ tal que para cada $a \in A$, $F(a) = \mathrm{im}(f_a)$. Se sigue de la definición de F que para cualquier $a \in A$, $p \Vdash$ "$\dot{g}(a) \in F(a)$", con lo que se prueba (2), mientras que (1) se sigue de que para cualquier a, $|A_a| < \kappa$. □

El corolario anterior es particularmente útil, si lo aplicamos a funciones cofinales entre ordinales.

Teorema 3.17. *Sea κ un cardinal no nuumerable. Todo forcing con la κ-cc preserva cofinalidades mayores o iguales a κ y, como consecuencia, si κ es regular, también preserva cardinales mayores o iguales a κ.*

Demostración. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial con la κ-cc en M y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Sean $\alpha \in M$ tal que $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \kappa$ y sea $\beta < \mathrm{cof}(\alpha)$ un ordinal. Sea $f \in M[G]$ una función de β a α, basta probar que $\mathrm{im}(f)$ no es cofinal en α. Por el corolario 3.16, existe $F : \beta \to \mathcal{P}(\alpha)$, en M, tal que

1. $|F(\xi)| < \kappa$, para todo $\xi < \beta$, y
2. $M[G] \models \forall \xi < \beta\ (f(\xi) \in F(\xi))$.

Como, en M, $\mathrm{cof}(\lambda) \geq \kappa > \omega$, para cada $\xi < \beta$, existe $\gamma_\xi < \lambda$ tal que $F(\xi) \subseteq \gamma_\xi$. Entonces $\gamma := \sup\{\gamma_\xi : \xi < \beta\}$ es menor que λ y $\bigcup \mathrm{im}(F) \subseteq \gamma$, por lo tanto $\mathrm{im}(f) \subseteq \gamma < \lambda$. $\square$

Los forcing κ-cerrados hacen lo mismo que los κ-cc pero "por abajo", es decir, preservan las cofinalidades menores o iguales a κ. Obsérvese que la idea clave de la demostración anterior es que, aunque puedan existir nuevas funciones de κ a λ, nunca serán funciones cofinales. Por otro lado, si forzamos con un orden κ-cerrado, nunca aparecerán nuevas funciones cuyo dominio sea un ordinal menor a κ y codominio un elemento del modelo base.

Proposición 3.18. *Sean $\mathbb{P} \in M$ un forcing κ-cerrado, $\alpha < \kappa$ un ordinal en M, $X \in M$, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $f\colon \alpha \to X$ una función en $M[G]$. Entonces $f \in M$.*

Demostración. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{\underset{\sim}{f}}\colon \alpha \to X$". Basta demostrar que el conjunto

$$D := \{q \leq p : \exists h\ (h\colon \alpha \to X \wedge q \Vdash \text{“}\dot{\underset{\sim}{f}} = h\text{”})\}$$

es denso bajo p.

Fijemos $q \leq p$ y construyamos recursivamente un par de sucesiones $\{p_\xi \in \mathbb{P} : \xi < \alpha\}$ y $\{x_\xi \in X : \xi \leq \alpha\}$ tales que

1. $p_0 \leq q$;
2. $\forall \xi_0, \xi_1 < \alpha\ (\xi_0 < \xi_1 \to p_{\xi_0} \geq p_{\xi_1})$;
3. $\forall \xi < \alpha\ (p_\xi \Vdash \text{“}\dot{\underset{\sim}{f}}(\xi) = x_\xi\text{”})$.

Empecemos por el paso base. Sabemos que $q \Vdash$ "$\exists x \in X\ (\dot{\underset{\sim}{f}}(x) = 0)$", por lo que el conjunto $X' := \{r \leq q : \exists x \in M\ (r \Vdash \text{“}\dot{\underset{\sim}{f}}(0) = x\text{”}\}$ es no vacío, tomemos $p_0 \in X'$ y x_0 tal que $p \Vdash$ "$\dot{\underset{\sim}{f}}(0) = x_0$". La construcción para el paso sucesor $\xi + 1$ es análoga cambiando 0 por $\xi + 1$ y q por p_ξ. La construcción para el paso límite es análoga cambiando 0 por γ y p por una cota inferior de la cadena $\{r_\xi : \xi < \gamma\}$.

Una vez que ya están construidas dichas sucesiones, tomemos, utilizando que $\mathbb{P}$ es κ-cerrado, una cota inferior r para $\{p_\xi : \xi < \alpha\}$ y definamos $h\colon \alpha \to X$ tal que para cada $\xi < \alpha$, $h(\xi) = x_\xi$. Podemos concluir que $r \in D$ y, por lo tanto, D es un subconjunto denso bajo p. $\square$

Corolario 3.19. *Todo forcing κ-cerrado preserva cofinalidades menores o iguales a κ.*

Demostración. Sea λ un cardinal tal que $cof(\lambda) \leq \kappa$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe θ tal que $M \models \theta < cof(\lambda)$, y que en $M[G]$ existe $f\colon \theta \to \lambda$ una función cofinal. Por la proposición anterior, $f \in M$, por lo tanto, $M \models \theta \geq cof(\lambda)$, lo cual es una contradicción. $\square$

Forzando con productos y el forcing de Cohen

El principio 3.6 nos garantiza que dado un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, el modelo $M[G]$ también será un modelo estándar transitivo numerable, por lo que nada nos impide tomar otro forcing $\mathbb{Q} \in M[G]$, un filtro H, $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$ y construir la correspondiente extensión genérica $M[G][H]$. La importancia de las iteraciones radica en poder encontrar otro forcing $\mathbb{P}_1$ sobre M y un filtro $\mathbb{P}_1$-genérico G_1 tal que $M[G][H] = M[G_1]$. Empezaremos analizando el caso más sencillo, donde tanto $\mathbb{P}$ como $\mathbb{Q}$ pertenecen al modelo original M.

Dados dos forcing $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$, podemos ordenar a su producto cartesiano lexicográficamente, es decir,

$$(p, q) \leq_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} (p', q') \text{ si y solo si } p \leq_{\mathbb{P}} p' \text{ y } q \leq_{\mathbb{Q}} q'.$$

$\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ así ordenado es un forcing con el elemento $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$ como máximo. Además, las funciones $i_{\mathbb{P}} \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ e $i_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ definidas como $i_{\mathbb{P}}(p) = (p, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$ e $i_{\mathbb{Q}}(q) = (\mathbb{1}_{\mathbb{P}}, q)$ resultan ser encajes regulares. En adelante asumiremos que el producto está ordenado de esta manera a menos que se especifique lo contrario.

Teorema 3.20 (Lema del producto)**.** *Sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ forcings, $G \subseteq \mathbb{P}$, $H \subseteq \mathbb{Q}$. Los siguientes son equivalentes:*

1. *$G \times H$ es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M;*
2. *G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H es un filtro $\mathbb{Q}-$genérico sobre $M[G]$;*
3. *H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[H]$.*

Además, si una de las condiciones se cumple, entonces $M[G][H] = M[H][G] = M[G\times H]$.

Demostración. Veamos que (1) implica (2). Basta probar que, en general, si K es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M, entonces $G_1 = i_{\mathbb{P}}^{-1}[K]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $H_1 = i_{\mathbb{Q}}^{-1}[K]$ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_1]$. Obsérvese $(p, q) \in K$ si y solo si $(p, \mathbb{1}) \in K$ y $(\mathbb{1}, q) \in K$, lo que equivale a que $p \in G_1$ y $q \in H_1$. Por lo tanto $K = G_1 \times H_1$.

Es fácil ver que si $D \in M$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, entonces $D_1 := D \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$, se sigue de la observación previa que $G_1 \cap D \neq \emptyset$. Fijemos $E \subseteq \mathbb{Q}$ un denso en $M[G_1]$, y sea $p \in G_1$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{\underset{\sim}{E}}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$", consideremos el conjunto

$$E_1 = \{(r, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q} : \exists p_0 \leq r \ (p_0 \Vdash \text{“} q \in \dot{\underset{\sim}{E}} \text{”})\}.$$

Afirmamos que E_1 es denso bajo $(p, \mathbb{1})$. Para demostrarlo, fijemos $(p_0, q_0) \leq (p, \mathbb{1})$, entonces

$$p_0 \Vdash \text{“}\exists r \ (r \in \dot{\underset{\sim}{E}} \wedge r \leq q_0)\text{”}.$$

Sea G_0 un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p_0 \in G$, en $M[G_0]$ existe $s \in \mathbb{Q} \cap val_{G_0}(\dot{\underset{\sim}{E}})$ tal que $s \leq q_0$, entonces existe $p_1 \leq p_0$ tal que $p_1 \Vdash$ "$s \in \dot{\underset{\sim}{E}}$" y, por lo tanto, $(p_0, s) \in E_1$. Finalmente, como E_1 es denso en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, se sigue que $H_1 \cap E \neq \emptyset$.

Demostremos que (2) implica (1). Es claro que $G \times H$ es un filtro. Fijemos $D \in M$ un subconjunto denso de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ y consideremos, en $M[G]$, al conjunto

$$D_1 := \{q_0 \in \mathbb{Q} : \exists p_0 \in G \ (p_0, q_0) \in D\}.$$

Como $G \in M[G]$, $D_1 \in M[G]$, si demostramos que D_1 es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$, entonces existirá $q_0 \in H$ y $p_0 \in G$ tal que $(p_0, q_0) \in D$, lo que completa la prueba. Para ver que D_1 es denso fijemos $q \in \mathbb{Q}$, y consideremos el conjunto

$$E := \{p \in \mathbb{P} : \exists q_0 \leq q \ (p, q_0) \in D\},$$

este conjunto es denso,, pues D es denso. Así, existen $p_0 \in G \cap E$ y $q_0 \in \mathbb{Q}$ tales que $(p_0, q_0) \in D$, se sigue que $q_0 \in D_1$ y $q_0 \leq q$, que es lo que buscábamos.

La equivalencia entre (3) y (1) se demuestra de manera análoga. Obsérvese que como $G \times H \in M[G \times H]$, podemos asegurar que $G \in M[G \times H]$ y, por el principio 3.6, $M[G] \subseteq M[G \times H]$. Del mismo modo, por extender a $M[G]$ y contener a H, $M[G][H] \in M[G \times H]$. De manera similar $G \times H \in M[G][H]$, por lo tanto, $M[G][H] = M[H][G] = M[G \times H]$. $\square$

Para mostrar una aplicación de nuestro primer método de iteración utilizaremos el *forcing de Cohen*, que es uno de los órdenes más estudiados y de los más sencillos para empezar a construir extensiones genéricas. Dado un conjunto I, se define el forcing de Cohen como

$$\mathbb{C}_I = \{p; I \to 2 : |p| < \omega\},$$

con un orden $\leq_{\mathbb{C}_I}$ tal que para cualesquiera dos condiciones $p, q \in \mathbb{C}_I$,

$$p \leq_{\mathbb{C}_I} q \leftrightarrow q \subseteq p.$$

Aunque I puede ser un conjunto cualquiera, si $I = \kappa$ con κ un cardinal, diremos que $\mathbb{C}_\kappa$ es el forcing para agregar κ reales de Cohen, la razón de este nombre quedará más clara con ayuda de una definición y un par de proposiciones.

Definición 3.21. Decimos que $x \in 2^\omega$ es *Cohen sobre* M si el conjunto $G := \{x \restriction F : F \in [\omega]^{<\omega}\}$ es un filtro $\mathbb{C}_\omega$-genérico en M.

Obsérvese que si G es un filtro $\mathbb{C}_I$-genérico, entonces $\bigcup G \in {}^I 2$. En el caso $I = \omega$, $\bigcup G$ es un real que, típicamente, se encuentra en $M[G]$ pero no en el modelo base M, en otras palabras, al forzar con $\mathbb{C}_\omega$ agregamos al menos un real de Cohen.

Lema 3.22 (De descomposición para $\mathbb{C}_I$)**.** *Sea I un conjunto y $J \subseteq I$. Entonces $\mathbb{C}_I \cong \mathbb{C}_J \times \mathbb{C}_{I \setminus J}$.*

Demostración. Definamos $i\colon \mathbb{C}_I \to \mathbb{C}_J \times \mathbb{C}_{I\setminus J}$ tal que $i(p) = (p \restriction J, p \restriction I \setminus J)$. Dicha función es biyectiva y preserva el orden. $\square$

Si $J \subseteq I$, denotaremos al encaje natural $i_{\mathbb{C}_J}\colon \mathbb{C}_J \to \mathbb{C}_J \times \mathbb{C}_{I\setminus J}$ como i_J.

El lema anterior sugiere que podemos aplicar el lema del producto para demostrar propiedades interesantes sobre este forcing, sin embargo, primero es necesario hablar un poco del espacio topológico 2^ω (equipado con la topología producto), y su relación con el árbol binario $2^{<\omega}$.

Definición 3.23. Introduciremos algunas nociones sobre el árbol binario.

1. Si $s \in 2^{<\omega}$, definimos al *cono de s* como
$$\langle s\rangle = \{r \in 2^{<\omega} : s \subseteq r\}.$$
2. Decimos que $T \subseteq 2^{<\omega}$ es un *árbol*, si para cada $r \in T$ existe $r' \in T$ tal que $r \subseteq r'$ y para cada $n \in \mathrm{dom}(r)$, $r \restriction n \in T$.
3. Decimos que $T \subseteq 2^{<\omega}$ es un *árbol nunca denso*, si T es un árbol y para cada $r \in T$ existe $s \in 2^{<\omega}$ tal que $r \subseteq s$ y $\langle s\rangle \cap T = \emptyset$.
4. Si $T \subseteq 2^{<\omega}$ es un árbol, definimos al conjunto de las *ramas* de T como
$$[T] = \{x \in 2^\omega : \forall n\ x \restriction n \in T\},$$
de manera similar, si $s \in 2^{<\omega}$,
$$[s] = \{x \in 2^\omega : s \subseteq x\}.$$

En general, se pide a los árboles que el conjunto de todas las condiciones mayores a un elemento dado sea un buen orden. Obsérvese que nuestros árboles ya cumplen esta propiedad por el solo hecho de ser subconjuntos de $2^{<\omega}$.

El lector familiarizado con topología recordará que si X es un espacio topógico, entonces $N \subseteq X$ es *nunca denso* si y solo si para cada $x \in X \setminus N$ existe una vecindad V de x tal que $V \cap N = \emptyset$. El iniciso (3) de la definición anterior está íntimamente relacionado con los conjuntos nunca densos de 2^ω, pues un conjunto $N \subseteq 2^\omega$ es cerrado nunca denso si y solo si existe un árbol $T \subseteq 2^{<\omega}$ nunca denso tal que $N = [T]$.

Obsérvese que si fijamos un árbol $T \subseteq 2^{<\omega}$ en M, el conjunto $[T]$ puede ser distinto si se construye en M o se construye en el universo. El siguiente teorema es testigo de esto.

Teorema 3.24. *Un real $c \in 2^\omega$ es Cohen sobre M si y solo si para cada árbol nunca denso $T \subseteq 2^{<\omega}$ con $T \in M$, $c \notin [T]$.*

Nótese que el teorema anterior habla del conjunto $[T]$ construido en el universo y no del conjunto $[T]^M$.

Recordemos que si X es un espacio topológico, decimos que $Y \subseteq X$ es *magro* si es unión numerable de subconjuntos nunca densos de X. En el caso de 2^ω, podemos asumir que un conjunto magro es unión numerable de conjuntos cerrados nunca densos.

Definición 3.25. Un subconjunto X de 2^ω es un *conjunto de Luzin*, si para cualquier subconjunto magro N de 2^ω, $X \cap N$ es numerable.

Como aplicación del forcing producto construiremos un módelo que contenga un conjunto de Luzin del tamaño máximo posible, es decir, de tamaño $\mathfrak{c}$ [1]. Para ello necesitamos calcular el valor de $\mathfrak{c}$ en la extensión que se obtiene de forzar con el orden $\mathbb{C}_\kappa$. Iniciaremos dando una cota superior, y nos ocuparemos de la cota inferior dentro de la demostración del resultado mencionado.

Lema 3.26. *Sea κ un cardinal en M tal que $M \models \kappa^\omega = \kappa$ y sea G un filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico sobre M. Entonces $M[G] \models \mathfrak{c} \leq \kappa$.*

Demostración. Primero veamos, por contrapuesta, que $\mathbb{C}_\kappa$ tiene la ccc. Sea $A \subseteq \mathbb{C}_\kappa$ no numerable, entonces existe un Δ-sistema $A' \subseteq A$ no numerable con raíz r. Se sigue que existe $\sigma\colon r \to 2$ tal que $A_0 := \{p \in A' : p \restriction r = \sigma\}$ es no numerable, en particular, tiene dos elementos distintos y cualesquiera dos elementos de A_0 son compatibles, por lo tanto, A no puede ser anticadena.

Obsérvese que cada elemento de 2^ω en la extensión tiene que ser nombrado por algún elemento de $\mathbb{C}_\kappa$, y $|\mathbb{C}_\kappa| = \kappa$. Como $\mathbb{C}_\kappa$ tiene la ccc, hay a los más $(\kappa^\omega)^\omega \cdot 2^\omega$ posibles nombres p-estándar, pero $\kappa^\omega = \kappa$, por lo que $\kappa > \omega$ y $(\kappa^\omega)^\omega > 2^\omega$. Por lo tanto, hay $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ posibles funciones en la extensión genérica. $\square$

Una idea muy útil al trabajar con iteraciones es dividir el orden con el que se va a forzar en dos partes, de tal modo que después de forzar con la primera parte ya aparezcan objetos que tienen propiedades que nos interesan en la extensión genérica. El siguiente lema nos sugiere cómo partir el orden cuando el objeto que queremos que aparezca es una función entre elementos del modelo base.

Lema 3.27. *Sean κ un cardinal en M y G un filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico sobre M. Sean además $A, B \in M$ y $f\colon A \to B$ en $M[G]$. Entonces existe $J \subseteq \kappa$ con $|J| \leq \text{máx}(|A|, \omega)$ tal que $f \in M[H]$, donde $H = i_J^{-1}[G]$.*

Demostración. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash$ "$\underset{\sim}{\dot{f}}\colon A \to B$", por el corolario 3.14, para cada $a \in A$, existe una anticadena A_a maximal debajo de p, y una función $f_a\colon A_a \to B$ tal que $f(a) = b$

[1] $\mathfrak{c}$ se utiliza para denotar el tamaño del continuo, es decir, $\mathfrak{c} = |{}^\omega 2|$.

si y solo si existe $q \in A_a \cap G$ tal que $f_a(q) = b$. Sea $J = \{\mathrm{dom}(p) : \exists a \in A\ (p \in A_a)\}$, como $\mathbb{C}_\kappa$ tiene la ccc, $|J| \leq A$. Finalmente, por la definición de H, el conjunto

$$\{(a,b) : \exists q \in A_a \cap H\ (f_a(q) = b)\}$$

está en $M[H]$, y dicho conjunto es igual a f. □

Teorema 3.28. *Sea κ un cardinal en M tal que $\kappa^\omega = \kappa$. Sea G un filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico sobre M. Entonces hay un conjunto de Luzin de cardinalidad $\mathfrak{c}$ en $M[G]$.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$, definamos $g_\alpha \colon \omega \to 2$ tal que $g_\alpha(m) = (\bigcup G)(\alpha \cdot \omega + m)$. Primero demostraremos que si $\alpha \neq \beta$, entonces $g_\alpha \neq g_\beta$ y, posteriormente, veremos que el conjunto $A = \{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es de Luzin en $M[G]$.

Sean $\alpha, \beta < \kappa$ ordinales distintos, consideremos el conjunto

$$E_{\alpha,\beta} := \{q \in \mathbb{C}_\kappa : \exists n \in \omega\ (q(\alpha \cdot \omega + n) \neq q(\beta \cdot \omega + n))\}.$$

Para ver que dicho conjunto es denso, fijemos $p \in \mathbb{C}_\kappa$, como p es finita, existe $m \in \omega$ tal que $\alpha \cdot \omega + m \notin \mathrm{dom}(p)$ y $\beta \cdot \omega + m \notin \mathrm{dom}(p)$. Definamos $q = p \cup \{(\alpha \cdot \omega + m, 0), (\beta \cdot \omega + m, 1)\}$, claramente $q \leq p$ y $q \in E_{\alpha,\beta}$. Podemos concluir que $g_\alpha \neq g_\beta$. Como consecuencia, en $M[G]$ hay al menos κ reales, por lo que $M[G] \models \kappa \geq \mathfrak{c}$ y, por el lema 3.26, $M[G] \models \kappa = \mathfrak{c}$.

Demostremos que A es un conjunto de Luzin. Fijemos un subconjunto magro de 2^ω $N \in M[G]$, entonces $N = \bigcup_{n \in \omega} [T_n]$ con cada T_n un subárbol nunca denso de $2^{<\omega}$, podemos identificar a N con un real $x \in M[G]$. Por el lema anterior, existe $J \subseteq \kappa$ con $|J| \leq |x| = \omega$ tal que si $H = i_{\mathbb{C}_J}[G]$, entonces $N \in M[H]$. Se sigue que J intersecta a lo más a una cantidad numerable de segmentos de la forma $[\alpha \cdot \omega, \alpha \cdot \omega + \omega)$.

Por la proposición 3.24, para concluir basta demostrar que si $\alpha < \kappa$ es tal que $J \cap [\alpha \cdot \omega, \alpha \cdot \omega + \omega) = \emptyset$, entonces g_α es Cohen sobre $M[H]$. Sean $G_{g_\alpha} = i^{-1}_{[\alpha \cdot \omega, \alpha \cdot \omega + \omega)}[G]$ y $K = i^{-1}_{\kappa \setminus J \cup [\alpha \cdot \omega, \alpha \cdot \omega + \omega]}[G]$, por el lema del producto, $M[G] = M[H][G_{g_\alpha}][K]$ y G_{g_α} es $\mathbb{C}_\omega$-genérico sobre $M[H]$, se sigue, por definición, que g_α es Cohen sobre $M[H]$. □

Antes de concluir esta sección, analizaremos un poco más el trabajo que realizamos en la demostración anterior. Una vez que fijamos $N \in M[G]$ magro, decimos que podemos identificarlo con un real x, dicha identificación se hace de la siguiente manera. El árbol binario $2^{<\omega}$ tiene tamaño ω, entonces cada uno de los subárboles T_n está identificado con una función $x_n \colon \omega \to 2$, por lo que podemos identificar a la unión de sus ramas con una función $x' \colon \omega \times \omega \to 2$ y, naturalmente, podemos cambiar x' por una función $x \colon \omega \to 2$.

Cuando garantizamos que $x \in M[H]$, al mismo tiempo garantizamos que para cada n, el árbol $T_n \in M[H]$. Nótese que, al ser T_n un subconjunto de $2^{<\omega}$, T_n puede o no estar en el modelo base, pero una vez que está en $M[H]$ el teorema nos garantiza que $g_\alpha \notin [T_n]$. Es un detalle crucial, pero fácil de pasar por alto, que en el teorema 3.24 se asegura que $g_\alpha \notin [T_n]$ en el universo y no solo $g_\alpha \notin [T_n]^{M[H]}$.

Además de servir como ejemplo del uso del lema del producto, este último teorema debió haber dejado claro que, en efecto, el forcing $\mathbb{C}_\kappa$ agrega κ reales de Cohen.

Iteración de dos pasos y el forcing random

En la sección anterior vimos que forzar con $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ equivale a forzar primero con un orden $\mathbb{P}$ y luego con un orden $\mathbb{Q}$ que también pertenece al modelo base. Si el segundo orden no pertenece al modelo base, utilizaremos la *iteración de dos pasos*, que nos permite hablar de las propiedades de forcing del segundo orden parcial mediante su nombre.

Definición 3.29. Sea $\mathbb{P}$ un forcing y $\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}}$ y $\dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}}$ $\mathbb{P}$-nombres tales que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\langle \dot{\mathbb{Q}}, \dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}} \rangle \text{ es un forcing con elemento máximo } \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}}\text{”}.$$

Decimos que la *iteración de dos pasos* de $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$, denotada como $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, es el conjunto tal que

$$(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \text{ si y solo si } p \in \mathbb{P},\ \dot{q} \in \operatorname{dom}(\dot{\mathbb{Q}}) \text{ y } p \Vdash \text{“}\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\text{”}.$$

Por el principio de definibilidad (3.9), la iteración de dos pasos pertenece al modelo base. $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es un forcing, si le damos el siguiente orden:

$$(p_1, \dot{q}_1) \leq_{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}} (p_0, \dot{q}_0) \leftrightarrow p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_0 \wedge p_1 \Vdash \text{“}\dot{q}_1 \dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}} \dot{q}_0\text{”}.$$

Denotaremos al encaje natural de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ como $i \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, dicho encaje está definido como $i(p) = (p, \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}})$.

Obsérvese que si en la definición anterior no pedimos que para cualquier elemento $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, $\dot{p} \in \operatorname{dom}(\dot{\mathbb{Q}})$, entonces $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ resultaría ser una clase propia. Es por ello que tomamos a $\dot{\mathbb{Q}}$ como un $\mathbb{P}$-nombre, que por definición es una relación. Si quisiéramos utilizar el concepto general de nombre, tendríamos que escribir

$$(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \text{ si y solo si } p \in \mathbb{P} \text{ y } \exists p_0 \in \mathbb{P} \text{ tal que } (\dot{q}, p_0) \in \dot{\mathbb{Q}} \text{ y } p \Vdash \text{“}\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\text{”}.$$

No se hizo de este modo porque, además de ser más fácil de escribir y recordar, es conveniente que el lector entienda poco a poco la noción de $\mathbb{P}$-nombre y las ventajas que ésta tiene.

Recordemos que, en la sección anterior, fue el lema del producto el que nos permitió forzar con un solo orden en lugar de dos. Como era de esperarse, tenemos un resultado parecido para la iteración de dos pasos.

Teorema 3.30. *Sean $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in M$ una iteración de dos pasos y K un filtro $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-genérico. Sean $G = i^{-1}[K]$ y $H := \{\mathrm{val}_G(\dot{q}) : \dot{q} \in \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}}) \wedge \mathrm{val}_G(\dot{q}) \in \mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}) \wedge \exists p \in \mathbb{P}\ ((p, \dot{q}) \in K)\}$. Entonces G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, H es $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$-genérico sobre $M[G]$ y $K = G*H$, donde*

$$G * H = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \wedge \mathrm{val}_G(\dot{q}) \in H\}.$$

Demostración. Para ver que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, fijemos D un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ y definamos en M el conjunto $D' = \{\dot{q} \in \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}}) : \exists p \in \mathbb{P}\ p \Vdash \text{“}\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\text{”}\}$. Afirmamos que el conjunto $D \times D'$ es denso en $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Sea $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, por la densidad de D, existe $p_0 \in D$ tal que $p_0 \leq p$. Además, por definición, $p \Vdash \text{“}\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\text{”}$, por lo que $p_0 \Vdash \text{“}\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\text{”}$. Por lo tanto, $(p_0, \dot{q}) \in D \times D'$ y $(p_0, \dot{q}) \leq (p, \dot{q})$. Como K es $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-genérico, existe $(p, \dot{q}) \in K \cap (D \times D')$, entonces $(p, \dot{\mathbb{1}}_{\mathbb{Q}}) \in K$, de donde $p \in i^{-1}[K] = G$.

El hecho de que G sea $\mathbb{P}$-genérico garantiza que $H \in M[G]$. Procederemos a probar que es $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$-genérico. Sea E un subconjunto denso de $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$. Como toda verdad es forzada, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \text{“}\underset{\sim}{\dot{E}}$ es un subconjunto denso de $\dot{\mathbb{Q}}\text{”}$, consideremos el conjunto

$$E_1 := \{(r, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : r \Vdash \text{“}\dot{q} \in \underset{\sim}{\dot{E}}\text{”}\}.$$

Afirmamos que E_1 es un conjunto denso debajo de $(p, \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}})$. Sea $(p_1, q_1) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ con $p_1 \leq p$, entonces $p_1 \Vdash \text{“}\exists q_0\ (q_0 \in \underset{\sim}{\dot{E}} \wedge q_0 \leq \dot{q}_1)\text{”}$. Por el principio de maximalidad, existe $\dot{s} \in M$ tal que $p_1 \Vdash \text{“}\dot{s} \in \underset{\sim}{\dot{E}} \wedge \dot{s} \leq q_1\text{”}$, pero $\dot{s}$ podría no estar en $\mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}})$, veamos que siempre podemos encontrar un representante. Sea G_1 un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p_1 \in G_1$, entonces hay algún $\dot{r} \in \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}})$ tal que $\mathrm{val}_G(\dot{s}) = \mathrm{val}_G(\dot{r})$, y como toda verdad es forzada, existe $p_2 \leq p_1$ tal que $p_2 \Vdash \text{“}\dot{r} \in \underset{\sim}{\dot{E}} \wedge \dot{r} \leq \dot{q}_1\text{”}$, entonces $(p_2, \dot{r}) \leq (p_1, \dot{q}_1)$ y $(p_2, \dot{r}) \in E_1$.

Sea $(p_0, \dot{q}) \in E_1 \cap K$, entonces $p_0 \in G$ y $p_0 \Vdash \text{“}\dot{q} \in \underset{\sim}{\dot{E}}\text{”}$. Por lo tanto, $M[G] \models \mathrm{val}_G(\dot{q}) \in \mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}) \wedge \mathrm{val}_G(\dot{q}) \in \mathrm{val}_G(\underset{\sim}{\dot{E}})$ y, como consecuencia, $E \cap H \neq \emptyset$. Con esto concluimos que H es $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$-genérico sobre $M[G]$.

Demostremos que $K = G * H$. Por lo demostrado anteriormente, $G * H$ está bien definido. Tomemos $(p, \dot{q}) \in G * H$, por la defінción de G, existe $(p, \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in K$ y, por la definición de H, existe $p_0 \in G$ tal que $(p_0, \dot{q}) \in K$. Como K es un filtro, existe $(p_1, \dot{q}_1) \in K$ tal que $(p_1, \dot{q}_1) \leq (p, \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}}), (p_0, \dot{q})$, entonces $p_1 \leq p$ y $p_1 \Vdash \text{“}\dot{q}_1 \leq \dot{q}\text{”}$. Por lo tanto, $(p_1, \dot{q}_1) \leq (p, \dot{q})$, y en consecuencia, $(p, \dot{q}) \in K$. Para probar que $K \subseteq G * H$, basta ver que si $(p, \dot{q}) \in K$, entonces $(p, \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in K$, de donde $p \in G$ y, por la definición, $\mathrm{val}_G(\dot{q}) \in H$. $\square$

Para ejemplificar el uso del teorema anterior, utilizaremos el forcing random, que no es más que un orden de las clases de equivalencia de conjuntos medibles no nulos en 2^κ.

En adelante, cuando hablemos del espacio 2^I asumiremos que está equipado con la topología producto, que tiene como base al conjunto

$$\mathcal{B}_I = \{B^\rho : \rho; I \to 2 \wedge |\rho| < \omega\},$$

donde $B^\rho := \{f \in 2^I : \rho \subseteq f\}$.

Definición 3.31. Denotamos como Baire(2^I) a la mínima σ-álgebra generada por la base $\mathcal{B}_I$, es decir, al mínimo conjunto que contiene a $\mathcal{B}_I$ y que es cerrado bajo uniones numerables y complementos.

Aunque aquí mostramos la definición exclusivamente para espacios 2^I, podemos aplicar esta definición a cualquier espacio X, si fijamos una base $\mathcal{B}$ para X. Observe que si además X es segundo numerable, entonces Baire(X) es el conjunto de los borelianos de X.

Además de ser un espacio toplógico, podemos pensar al espacio 2^I como un grupo topológico localmente compacto, por lo tanto, tiene una medida de Haar μ_I. Se puede encontrar más información sobre medidas de Haar en [4], a nosostros nos basta saber que dicha medida cumple que

- si B^ρ es un elemento de $\mathcal{B}_I$, entonces $\mu_I(B^\rho) = \frac{1}{2^{|\rho|}}$, y
- todo elemento de Baire(2^I) es μ_I-medible.

Una vez que establecimos que el espacio 2^I tiene una medida, podemos definir la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(2^I)$

$$A \sim B \text{ si y solo si } A \triangle B \in \mathcal{N}(2^I), \tag{$*$}$$

donde $\mathcal{N}(2^I) := \{A \in 2^I : \mu_I(A) = 0\}$ y $\triangle$ es la diferencia simétrica. Por comodidad, denotaremos a $\mathcal{N}(2^I)$ como $\mathcal{N}_I$, además, si un conjunto tiene μ_I-medida 0, diremos que es μ_I-nulo, o solo nulo, si no hay riesgo de ambigüedades.

Lema 3.32. *La relación definida en* $(*)$ *es de equivalencia (denotaremos a la clase de equivalencia de* A *como* $[A]_{\mathcal{N}_I}$*), además, el conjunto cociente (denotado como* $\mathbb{B}(I)$*) es un* álgebra booleana *si lo equipamos con las siguientes operaciones:*

- $[A]_{\mathcal{N}_I} \wedge [B]_{\mathcal{N}_I} = [A \cap B]_{\mathcal{N}_I}$;
- $[A]_{\mathcal{N}_I} \vee [B]_{\mathcal{N}_\mathcal{I}} = [A \cup B]_{\mathcal{N}_I}$;
- $\neg[A]_{\mathcal{N}_I} = [2^\omega \setminus A]_{\mathcal{N}_I}$.
- $\mathbb{0} = [\emptyset]_{\mathcal{N}_I}$;
- $\mathbb{1} = [2^\omega]_{\mathcal{N}_I}$.

Demostración. La relación $\sim$ es trivialmente simétrica y reflexiva, para ver que es transitiva fijemos $A, B, C \in$ Baire(2^I) tales que $A \sim B$ y $B \sim C$. Podemos escribir a $A \triangle C$ como $(A \triangle B) \triangle (B \triangle C)$ y, como la diferencia simétrica de dos conjuntos nulos es nula, se sigue que $A \sim C$.

Para la segunda parte recordemos que un álgebra booleana debe cumplir las siguientes propiedades:

1. **asociatividad:** $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ y $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
2. **conmutatividad:** $x \wedge y = y \wedge x$ y $x \vee y = y \vee x$;
3. **absorción:** $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$;
4. **distributividad de $\wedge$ sobre $\vee$:** $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
5. **complemento:** $x \wedge \neg x = \mathbb{0}$ y $x \vee \neg x = \mathbb{1}$.

Sean $A, B, C \in \mathrm{Baire}(2^I)$, a continuación probaremos que se cumplen las propiedades.

Los primeros 4 incisos se siguen de las propiedades básicas de álgebra de conjuntos. Para el inciso 5 basta ver que

$$[A]_{\mathcal{N}_I} \wedge \neg [A]_{\mathcal{N}_I} = [A \cap (2^I \setminus A)]_{\mathcal{N}_I} = [\emptyset]_{\mathcal{N}_I} = \mathbb{0}$$

y

$$[A]_{\mathcal{N}_I} \vee \neg [A]_{\mathcal{N}_I} = [A \cup (2^I \setminus A)]_{\mathcal{N}_I} = [2^I]_{\mathcal{N}_I} = \mathbb{1}.$$

□

Dada un álgebra boolena, podemos darle un orden $\leq$ de manera natural definiéndolo como $p \leq q$ si y solo si $p \vee q = q$, esto nos permite forzar con ellas.

La medida en $\mathrm{Baire}(2^I)$ induce una medida en el álgebra booleana $\mathbb{B}(I)$. Se puede probar, utilizando dicha medida, que $\mathbb{B}(I)$ tiene la ccc. Además, $\mathbb{B}(I)$ es un álgebra booleana σ-completa[2], estas dos propiedades implican que $\mathbb{B}(I)$ es un álgebra booleana completa[3]. Aunque omitiremos la prueba de estos hechos, daremos una definición que motiva su importancia y, más adelante, utilizaremos esta propiedad para probar uno de los lemas clave de esta sección. Los resultados no demostrados de esta sección se pueden encontrar enunciados para 2^ω y su conjunto de borelianos en [3]; las pruebas para esta sección se generalizan de manera natural.

Definición 3.33. Sea $\mathbb{B}$ un álgebra booleana completa y φ un enunciado del lenguaje de la teoría de conjuntos, definimos el *valor booleano de* φ, denotado como $[\![\varphi]\!]$, como el supremo del conjunto de todos los elementos $b \in \mathbb{B}$ tales que

$$b \Vdash \text{“}\varphi\text{”}.$$

Es claro que el valor booleano siempre existe, si el álgebra booleana es completa.

[2]Un álgebra booleana $\mathbb{B}$ es *σ-completa*, si todo subconjunto numerable de $\mathbb{B}$ tiene supremo.
[3]Un álgebra booleana $\mathbb{B}$ es *completa*, si todo subconjunto de $\mathbb{B}$ tiene supremo.

Cabe mencionar que el *teorema de dualidad de Stone* nos asegura que podemos intercambiar un forcing por un álgebra boolena completa y viceversa, lo que nos permite accesar a las propiedades de los valores booleanos siempre que sea conveniente. Más sobre el teorema de dualidad de Stone se puede consultar en [2].

Definiremos a los *reales random* de manera similar a como definimos los reales de Cohen, con la pequeña diferencia que los definiremos para cualquier espacio 2^I y no solo para 2^ω.

Definición 3.34. Decimos que $r \in 2^I$ es I-*random* sobre M, si existe un filtro $\mathbb{B}(I)$-genérico G sobre M tal que $\{r\} = \bigcap\{B \in M : [B]_{\mathcal{N}_I} \in G\}$.

En la definición anterior cometimos un abuso de notación que se volverá común para el resto de la sección, el cual es el de utilizar los mismos símbolos para objetos en M y para sus definiciones interpretadas fuera de M. Observe que cualquier elemento de Baire(2^I) tiene una receta para construirse en términos del conjunto de las funciones parciales finitas de I a 2 (el cual es absoluto para cualquier modelo transitivo que contenga a I), dicha receta puede codificarse como una función. Entonces la expresión

$$\{r\} = \bigcap\{B \in M : [B]_{\mathcal{N}_I} \in G\},$$

quiere decir que r es el único elemento tal que r pertenece a la interpretación de la definición de B en el universo, para cada B tal que la función que lo define está en M y con $[B]_{\mathcal{N}_I} \in G$.

Se puede probar que dado un filtro G, $\mathbb{B}(I)$-genérico,

$$\bigcap\{B \in M : [B]_{\mathcal{N}_I} \in G\} = \bigcap\{B^\rho : \rho; I \to 2 \wedge |\rho| < \omega \wedge [B^\rho]_{\mathcal{N}_I} \in G\}.$$

Esto nos garantiza que para cada filtro G, $\mathbb{B}(I)$-genérico, existe un único real I-random r como en la definición anterior. Entonces

$$\mathbb{1}_{\mathbb{B}(I)} \Vdash \text{“}\exists x\ (\{x\} = \{B^\rho : |\rho| < \omega \wedge [B^\rho]_{\mathcal{N}_I}\} \in \dot{\Gamma})\text{”},$$

por lo que, por el principio de maximalidad, existe un nombre $\dot{r}_I$ tal que $\{\mathrm{val}_G(\dot{r}_i)\} = \bigcap\{B \in M : [B]_{\mathcal{N}_I} \in G\}$, para cualquier filtro G, $\mathbb{B}(I)$-genérico. Diremos que un nombre con esta última propiedad es un nombre canónico para un real I-random y utilizaremos $\dot{r}_I$ para denotar a uno de estos nombres.

Proposición 3.35. *Una función $r \in 2^I$ es I-random sobre M si y solo si para cada subconjunto nulo $N \in$ Baire(2^I), r no pertenece a la interpretación de N en el universo.*

No demostraremos la proposición anterior para evitar entrar en detalles de topología y medida, pero detengámonos un momento para entender este resultado. Observemos que si un conjunto I pertenece a M, entonces el conjunto de funciones parciales finitas

$\{\rho : \rho; I \to 2\}$ también es un elemento de M. Ahora, dado un conjunto nulo $N \in \text{Baire}(2^I)$, podemos escribirlo como $N = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde U_n es un abierto Baire para cada n, entonces N tiene un código (una receta para construirse). La proposición nos dice que si un conjunto N es nulo en 2^I, podemos seguir la receta para construirlo en el universo y r no estará en el conjunto que obtengamos. Nótese que tanto la medida como el código dependen únicamente de elementos de M, por lo que si un conjunto es nulo en M, entonces es nulo en cualquier modelo que lo extienda.

Definición 3.36. Decimos que un conjunto es de *Sierpinski* si $X \cap N$ es numerable para cada subconjunto nulo N de 2^ω.

El lector podrá darse cuenta que la definición de un conjunto de Sierpinski es muy similar a la de un conjunto de Luzin, y como en la sección anterior, lo utilizaremos para ejemplificar el uso de la iteracón de dos pasos. Demostraremos que existe un conjunto de Sierpinski de tamaño $\mathfrak{c} = \kappa$ en el modelo resultante de forzar con $\mathbb{B}(\kappa)$.

Para aligerar la notación, dado un real r, I-random, escribiremos $M[r]$ para referirnos a la extensión $M[G]$, donde G es el filtro que se garantiza en la definición 3.34.

Lema 3.37. *Sea I un conjunto tal que $I = J_0 \cup J_1$ con J_0 y J_1 conjuntos ajenos y sea $Y \subseteq 2^I = 2^{J_0} \times 2^{J_1}$. Entonces*

1. *$\{x \in 2^{J_0} : Y_x \in \mathcal{N}_{J_1}\}$ es medible en 2^{J_0};*
2. *$Y \in \mathcal{N}_I$ si y solo si $\{x \in 2^{J_0} : Y_x \notin \mathcal{N}_{J_1}\} \in \mathcal{N}_{J_0}$.*

Donde si $x \in 2^{J_0}$ y $Y \in 2^I$, $Y_x := \{y \in 2^{J_1} : (x, y) \in Y\}$.

El resultado anterior se conoce como el teorema de Fubini y su demostración escapa a los objetivos de este texto, pero se puede encontrar más al respecto en [4].

Formalmente, para nuestros siguientes resultados deberíamos de introducir el concepto de *función Baire*, sin embargo, hablar de ellas nos desviaría demasiado. Por lo que las pensaremos como funciones que podemos utilizar en la definición de conjuntos sin que éstas causen que el nuevo conjunto no sea Baire.

Lema 3.38 (Baire reading of names)**.** *Sean J_0, J_1 conjuntos ajenos, sean $B \in \text{Baire}(2^{J_0})$ y $\dot{f} \in M$ tales que $[B] \Vdash$ "$\dot{f} \in 2^{J_1}$". Entonces existe una función $F\colon B \to 2^{J_1}$ Baire tal que si r es un real I-random sobre M con $r \in B$, entonces $M[r] \models F(r) = \text{val}_r(\dot{f})$.*

Demostración. Para cada $j \in J_1$ y cada $i \in 2$ tomemos $C^i_j \in [\![\dot{f}(j) = i]\!] \wedge [B]$ tales que $\{C^0_j, C^1_j\}$ es una partición de B.

Definamos $F\colon B \to 2^{J_1}$ tal que

$$F(x)(j) = i \text{ si y solo si } x \in C^i_j.$$

Sea r un real I-random con $r \in B$, resta ver que $M[r] \models F(r) = val_r(\dot{f})$. Fijemos $j \in J_1$, si $M[r] \models val_r(\dot{f})(j) = i$, existe $[C] \leq [B]$ tal que $r \in C$ y $[C] \Vdash$ "$\dot{f}(j) = i$"; entonces $[C] \leq [C_j^i]$, por lo que $r \in C_j^i$ y $F(r)(j) = i$, que es lo que buscábamos. $\square$

Lema 3.39. *Sean $I, J_0, J_1 \in M$ y tales que $I = J_0 \cup J_1$ y $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Sea $\dot{X}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)} \Vdash$ "$\dot{X} \in \mathrm{Baire}(2^{J_1})$". Entonces existe $Y \in \mathrm{Baire}(2^I) \cap M$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)} \Vdash$ "$\dot{Y}_{\dot{r}_{J_0}} = \dot{X}$".*

Demostración. Por argumentos relacionados con la construcción recursiva de la σ-álgebra $\mathrm{Baire}(2^{J_0})$ y que, por ser propios del área de teoría descriptiva de conjuntos, no mencionaremos aquí, existe un conjunto $Y' \in \mathrm{Baire}(2^I) \cap M$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(I)} \Vdash$ "$\exists x \in 2^{J_0}\ (Y_x = \dot{X})$". Por el principio de maximalidad, existe $\dot{f}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(I)} \Vdash$ "$\dot{f} \in 2^{J_0} \wedge Y_{\dot{f}} = \dot{X}$". Para dicha $\dot{f}$, tomemos $F\colon 2^{J_0} \to 2^{J_1}$ como en el lema anterior, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)} \Vdash$ "$F(\dot{r}_{J_0}) = \dot{f}$". Sea $Y = \{(x, y) : (F(x), y) \in Y'\}$, como Y' y F son Baire, $Y \in \mathrm{Baire}(2^I)$, se sigue que $\mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)} \Vdash$ "$Y_{\dot{r}_{J_0}} = \dot{X}$". $\square$

Lema 3.40 (De descomposición para $\mathbb{B}(\kappa)$)**.** *Sean $I, J_0, J_1 \in M$ conjuntos tales que $I = J_0 \cup J_1$ y $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Se tiene que*

1. *si r_I es I-random sobre M, entonces $r_{J_0} := r_I \restriction J_0$ es J_0-random sobre M y $r_{J_1} := r_I \restriction J_1$ es J_1-random sobre $M[r_{J_0}]$;*
2. *si r_{J_0} es J_0-random sobre M y r_{J_1} es J_1-random sobre $M[r_{J_0}]$, entonces $r_I := r_{J_0} \cup r_{J_1}$ es I-random sobre M.*

Demostración. Para (1). Sea $A \in \mathrm{Baire}(2^{J_0}) \cap \mathcal{N}_{J_0}$, el conjunto $B := \{f \in 2^I : f \restriction J_0 \in A\}$ está en $\mathcal{N}_I$, por lo que $r_I \notin B$, entonces $r_{J_0} \notin A$.

Ahora veremos que r_{J_1} es J_1-random sobre $M[r_{J_0}]$. Sea $X \in \mathrm{Baire}(J_1) \cap \mathcal{N}_{J_1} \cap M[r_{J_0}]$ y sea $\dot{X} \in M$ un nombre tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)} \Vdash \text{“}\dot{X} \in \mathcal{N}_{J_1} \wedge (\underset{\sim}{X} \in \mathcal{N}_{J_1} \to \underset{\sim}{X} = \dot{X}\text{”}),$$

dicho nombre existe por el principio de maximalidad. Por el lema anterior existe $Y \in \mathrm{Baire}(2^{J_0} \times 2^{J_1}) \cap M$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)} \Vdash \text{“}Y_{\dot{r}_{J_0}} = \dot{X}\text{”}.$$

Afirmamos que $Y \in \mathcal{N}_I$. Supongamos que no y sea $Z = \{x \in 2^{J_0} : Y_x \notin \mathcal{N}_{J_1}\}$, entonces, por el lema 3.37, $Z \notin \mathcal{N}_{J_0}$.

Tomemos $Z' \subseteq Z$ tal que $Z' \in \mathrm{Baire}(2^{J_0}) \setminus \mathcal{N}_{J_0}$. Como $[Z'] \leq \mathbb{1}_{\mathbb{B}(J_0)}$, $[Z'] \Vdash$ "$\dot{X} \in \mathcal{N}_{J_0}$", entonces $[Z'] \Vdash$ "$Y_{\dot{r}_{J_0}} \in \mathcal{N}_{J_0}$" por lo que si r es un real J_0-random con $r \in Z$, $M[r] \models Y_r \in \mathcal{N}_{J_0}$, por lo que $r \notin Z$, lo cual es una contradicción,, pues $r \in Z' \subseteq Z$.

Demostremos (2). Sea $Y \in \text{Baire}(2^{J_0} \times 2^{J_1}) \cap \mathcal{N}_I \cap M$, supongamos que $r_I \in Y$. Consideremos $Z := \{x \in 2^{J_0} : Y_x \notin \mathcal{N}_{J_1}\}$, por el lema 3.37, $Z \in \mathcal{N}_{J_0}$, y como r_{J_0} es J_0-random, $r_{J_0} \notin Z$. Por lo tanto, $M[r_{J_0}] \models Y_{r_{J_0}} \in \mathcal{N}_{J_1}$ y $r_{J_1} \notin Y_{r_{J_0}}$, finalmente se sigue que $r_I \notin Y$. $\square$

Con la notación que introducimos para la iteración de dos pasos, el teorema anterior nos dice que si $I = J_0 \cup J_1$ con J_0 y J_1 conjuntos ajenos, entonces forzar con $\mathbb{B}(I)$ es equivalente a forzar con $\mathbb{B}(J_0) * \mathbb{B}(J_1)$.

Consideremos un conjunto $A \in \text{Baire}(2^\kappa)$, para construirlo se ven involucrados únicamente un número numerable de elementos de κ, diremos que dicho conjunto es el *soporte* de A y lo denotaremos como *supp*(A). Es claro que el soporte de todo conjunto Baire es numerable.

Teorema 3.41. *Sea M un modelo de $\mathsf{ZFC} + \kappa^\omega = \kappa$, y sea $r \in 2^\kappa$ un real κ-random sobre M. Entonces en $M[r]$ existe un conjunto de Sierpinski de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \kappa$, definamos $x_\alpha \colon \omega \to 2$, como $x_\alpha(n) = r(\alpha \cdot \omega + n)$. Demostraremos que $S := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto de Sierpinski de tamaño κ.

Para ver que es de tamaño κ veamos que si $\alpha < \beta$, entonces $x_\alpha \neq x_\beta$. Sean $r_\alpha = r \restriction [0, \alpha \cdot \omega + \omega)$ y $r_\beta = r \restriction [\beta \cdot \omega, \beta \cdot \omega + \omega)$. Observemos que $x_\alpha \in M[r_\alpha]$, además $\{x_\alpha\} \in \mathcal{N}_\omega$. Tenemos que $x_\beta \in M[r_\alpha \cup r_\beta]$ y, por el lema de descomposición, r_β es $\mathbb{B}([\beta \cdot \omega, \beta \cdot \omega + \omega))$-random sobre $M[r_\alpha]$. Se sigue que x_β no pertenece a ningún elemento de $\mathcal{N}_\omega \cap M[r_\alpha]$. Por lo tanto, $x_\beta \notin \{x_\alpha\}$ y $x_\alpha \neq x_\beta$.

Sea $N \in M[r]$ un conjunto nulo de 2^ω, sin pérdida de la generalidad N es G_δ, entonces hay una función $c : \omega \to 2$ que codifica a N. Sea $B \in \text{Baire}(2^\kappa)$ tal que $[B] \Vdash$ "$c \in 2^\omega$". Por el lema 3.38, podemos concluir que es suficiente una familia numerable de elementos $\{A_n \subseteq B : n \in \omega\}$ para decidir la existencia de c y sus valores en $M[r]$. Consideremos el conjunto

$$W' = \{\alpha < \kappa : \exists n \in \omega \ (\text{supp}(A_n) \cap [\alpha, \alpha \cdot \omega + \omega) \neq \emptyset)\}.$$

Es claro que dicho conjunto es numerable, por lo que el conjunto $W := \bigcup_{\alpha \in W'} [\alpha, \alpha \cdot \omega + \omega)$ tambiés es numerable. Podemos concluir que si $r_W = r \restriction W$, entonces $N \in M[r_W]$, además, como W' es numerable, $N \cap S$ es numerable, pues solo hay una cantidad numerable de ordinales α tales que $r \restriction [\alpha \cdot \omega, \alpha \cdot \omega + \omega) \subseteq r_W$. Para cada ordinal $\beta \notin W'$, $r \restriction [\beta \cdot \omega, \beta \cdot \omega + \omega)$ es $\kappa \setminus W$-random (lema 3.40), además, como corolario de ese mismo lema podemos decir que $M[r] = M[r_W][r \restriction \kappa \setminus W]$, lo cual completa la demostración de que S es un conjunto de Sierpinski.

De la existencia de S, podemos concluir que $M[r] \models \kappa \geq \mathfrak{c}$. Por otro lado, sabemos, por el lema 3.38, que toda función $c \in 2^\omega \cap M[r]$ está determinada por una cantidad numerable de elementos de Baire(2^κ); por lo que si logramos probar que $[\text{Baire}(2^\kappa)]^\omega = \kappa$, tendremos que $M[r] \models \kappa = \mathfrak{c}$. Basta demostrar que $|\text{Baire}(2^\kappa)| = \kappa$, esto se sigue de que la base de Baire(2^κ) tiene a lo más $\kappa \cdot 2^\omega = \kappa$ elementos, entonces cada uno de los ω_1 pasos de su construcción recursiva es de tamaño κ. Finalmente, la unión de ω_1 conjuntos de tamaño κ tiene tamaño a lo más $\omega_1 \cdot \kappa = \kappa$. $\square$

La idea principal de la demostración anterior es que las iteraciones nos permiten avanzar hasta un punto conveniente de la extensión donde podamos garantizar la existencia de un objeto en particular, por ejemplo, la existencia de un conjunto nulo; y a partir de ahí, seguir extendiendo pero ahora con acceso a información extra que nos permite utilizar otras herramientas.

Capítulo 4

La consistencia del axioma de Martin

En este capítulo extenderemos la técnica del forcing iterado para poder realizar una cantidad infinita de pasos, posteriormente la utilizaremos para construir un modelo del axioma de Martin. Además de servir como ejemplo, esta construcción es similar a la técnica utilizada para demostrar la consistencia del axioma de forcing propio, por lo que es un buen primer acercamiento a nuestro resultado principal.

Iteración con soporte finito

En el capítulo anterior vimos que podemos realizar iteraciones de dos pasos, por lo que, inductivamente, es sencillo construir iteraciones finitas tan grandes como queramos. Sin embargo, para poder realizar iteraciones de longitudes infinitas necesitaremos añadir algunas condiciones para hacernos cargo de los pasos límite.

Definición 4.1. Sea α un ordinal límite. Consideremos una sucesión $\langle(\mathbb{P}_\beta, \mathbb{Q}_\beta) : \beta < \alpha\rangle$. Decimos que un conjunto $\mathbb{P}_\alpha$ es una *α-iteración con soporte finito* si

1. $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$;
2. si $\beta \leq \alpha$, entonces $\mathbb{P}_\beta$ es un forcing;
3. si $\beta \leq \alpha$ y $p \in \mathbb{P}_\beta$, entonces p es una función tal que $\mathrm{dom}(p) \in [\beta]^{<\omega}$;
4. si $\beta < \alpha$, entonces $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$, $\dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$ y $\dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$ son $\mathbb{P}_\beta$-nombres tales que
$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \text{“}\langle\dot{\mathbb{Q}}_\beta, \dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\rangle \text{ es un forcing con elemento máximo } \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\text{”};$$
5. si $\beta < \alpha$, $p \in \mathbb{P}_\alpha$ y $\beta \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $p(\beta) \in \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}}_\beta)$ y $p(\beta) \neq \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$;

6. si $\beta < \alpha$ y $p \in \mathbb{P}_{\beta+1}$, entonces $p \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$;
7. si $\beta < \alpha$, $p \in \mathbb{P}_{\beta+1}$ y $\beta \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $p \restriction \beta \Vdash$ "$p(\beta) \in \dot{\mathbb{Q}}_\beta$";
8. si $\beta < \alpha$ y $p_0, p_1 \in \mathbb{P}_{\beta+1}$, entonces $p_0 \leq_{\mathbb{P}_{\beta+1}} p_1$ si y solo si
   - $\mathrm{dom}(p_1) \subseteq \mathrm{dom}(p_0)$,
   - $p_0 \restriction \beta \leq_{\mathbb{P}_\beta} p_1 \restriction \beta$ y
   - $\beta \in \mathrm{dom}(p_0) \cap \mathrm{dom}(p_1) \Rightarrow p_0 \restriction \beta \Vdash$ "$p_0(\beta) \dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta} p_1(\beta)$";
9. si $\beta \leq \alpha$ es un ordinal límite, entonces $p \in \mathbb{P}_\beta$ si y solo si para cualquier $\xi < \beta$, $p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$;
10. si $\beta \leq \alpha$ es un ordinal límite y $p_0, p_1 \in \mathbb{P}_\beta$, entonces

$$p_0 \leq_{\mathbb{P}_\beta} p_1 \text{ si y solo si } \forall \xi < \beta \ (p_0 \restriction \xi \leq_{\mathbb{P}_\xi} p_1 \restriction \xi).$$

Obsérvese que las condiciones de la definición anterior nos garantizan que para construir una α-iteración con soporte finito, únicamente necesitamos definir $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$, para cada $\beta < \alpha$, pues los conjuntos $\mathbb{P}_\beta$ quedan determinados automáticamente.

Podríamos alterar la definición anterior para que los elementos de $\mathbb{P}_\beta$ tengan dominio β en lugar de tener dominio contenido en β. En cuyo caso, necesitaríamos pedir que el conjunto $\{\xi < \beta : p(\xi) \neq \dot{\mathbb{1}}_{\mathbb{Q}_\beta}\}$, conocido como el soporte de p, sea finito, para cada $p \in \mathbb{P}_\beta$. Las dos formas de definir la iteración son equivalentes, y aunque esta última forma parece ilustrar mejor la idea de *soporte finito*, utilizaremos la primera, pues resultará más sencilla de manipular. Además, nuestra definición nos permite escribir a una α-iteración con soporte finito como

$$\mathbb{P}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{P}_\beta.$$

Proposición 4.2. *Sean α un ordinal límite, $\mathbb{P}_\alpha$ una α-iteración con soporte finito y $\beta, \xi \in \alpha$ tales que $\beta < \xi$. Entonces la identidad* $\mathrm{id}\colon \mathbb{P}_\beta \to \mathbb{P}_\xi$ *es un encaje regular.*

Demostración. Basta ver que la identidad preserva anticadenas maximales. Sea $A \subseteq \mathbb{P}_\beta$ una anticadena maximal y tomemos $p \in \mathbb{P}_\xi$. Sabemos que $p \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$, entonces existe $r \in A$ tal que r y $p \restriction \beta$ son compatibles en $\mathbb{P}_\beta$. Fijemos $r' \in \mathbb{P}_\beta$ tal que $r' \leq_{\mathbb{P}_\beta} r$ y $r \leq_{\mathbb{P}_\beta} p \restriction \beta$, se sigue que $r' \cup (p \setminus (p \restriction \beta)) \leq_{\mathbb{P}_\xi} r, p$. Por lo tanto,, A es un anticadena maximal de $\mathbb{P}_\xi$.

□

Teorema 4.3. *Sea α un ordinal límite y sea $\mathbb{P}_\alpha$ una α-iteración con soporte finito tal que para cada $\beta < \alpha$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ tiene la ccc". Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ tiene la ccc.*

Utilizaremos inducción transifinita para demostrar el teorema anterior. Con el fin de encargarnos del paso sucesor, primero probaremos el resultado equivalente para la iteración de dos pasos.

Lema 4.4. *Sea* $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ *una iteración de dos pasos tal que* $\mathbb{P}$ *tiene la ccc y* $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ *"*$\dot{\mathbb{Q}}$ *tiene la ccc". Entonces* $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ *tiene la ccc.*

Demostración. Supongamos, para llegar a una contradicción, que el conjunto $A = \{(p_\alpha, \dot{q}_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Consideremos el nombre $\dot{x} := \{(\check{\alpha}, p_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ y fijemos G un filtro $\mathbb{P}$'genérico sobre M, se sigue de la definición de valuación, que el conjunto $val_G(\dot{x})$ es el conjunto de los ordinales α tales que $p_\alpha \in G$.

Veamos que $\mathrm{val}_G(\dot{x})$ es numerable, como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}$ tiene la ccc", basta probar que el conjunto $\{p_\alpha : \alpha \in \mathrm{val}_G(\dot{x})\}$ es una anticadena. Supongamos que no es una anticadena, entonces existen $\beta_0, \beta_1 \in \mathrm{val}_G(\dot{x})$ tales que $\mathrm{val}_G(\dot{q}_{\beta_0}) \parallel \mathrm{val}_G(\dot{q}_{\beta_1})$. Tomemos $r \in G$ con $r \leq p_{\beta_0}, p_{\beta_1}$ y tal que $r \Vdash$ "$\dot{q}_{\beta_0} \parallel \dot{q}_{\beta_1}$". Por el principio de maximalidad, existe $\dot{q}$ tal que $(r, \dot{q}) \leq (p_{\beta_0}, \dot{q}_{\beta_0}), (p_{\beta_1}, \dot{q}_{\beta_1})$; lo cual no es posible, pues estamos asumiendo que A es una anticadena. Por lo tanto, $\mathrm{val}_G(\dot{x})$ es una anticadena y, como consecuencia, es numerable.

Como lo anterior fue demostrado para cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$|\dot{x}| = \omega$", entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\exists f \colon \omega \to \omega_1\ (\dot{x} = \mathrm{im}(f))$", y por el principio de maximalidad existe $\dot{f} \in M$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{f} \colon \omega \to \omega_1 \wedge \mathrm{im}(\dot{f}) = \dot{x}$". Como $\mathbb{P}$ tiene la ccc, ω_1^M coincide con el ω_1 de cualquier extensión genérica. Aplicando el lema 3.14, existe $F \colon \omega \to \mathcal{P}(\omega_1)$ tal que para cualquier $n \in \omega$, $|F(n)| < \omega_1$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{f}(n) \in F(n)$". Debido a que ω_1 es regular, existe $\beta < \omega_1$ tal que $\mathrm{im}(F) \subseteq \beta$, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{x} \subseteq \beta$". Tomemos G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p_\beta \in G$, entonces $M[G] \models \beta \in val_G(\dot{x})$, por lo que $M[G] \models \beta \in \beta$, lo cual no puede pasar. La contradicción viene de que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$|\dot{x}| = \omega$", lo que a su vez es consecuencia de que A sea una anticadena no numerable. Por lo tanto, $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ tiene la ccc.

□

Regresando a la definición de α-iteración, se puede ver que dado $\xi < \alpha$, $\mathbb{P}_{\xi+1}$ es isomorfo a $\mathbb{P}_\xi * \dot{\mathbb{Q}}_\xi$, por lo que el lema anterior nos garantiza el paso sucesor en la demostración del teorema. Para terminar, basta revisar que para cada ordinal límite $\gamma \leq \alpha$, $\mathbb{P}_\gamma$ tiene la ccc.

Demostración. Del teorema 4.3 Fijemos $A \subseteq \mathbb{P}_\gamma$ no numerable. Consideremos la familia $B = \{\mathrm{dom}(p) : p \in A\}$, B es una familia de conjuntos finitos. Entonces existe un $\Delta-$sistema B' de tamaño ω_1 con raíz R, y como R es finito, existe $\beta < \gamma$ tal que $R \subseteq \beta$. El conjunto $\{p \restriction \beta : p \in B'\}$ está contenido en $\mathbb{P}_\beta$, y por la hipótesis de inducción, $\mathbb{P}_\beta$ tiene la ccc. Por lo tanto, existen $p_0, p_1 \in B$ tales que $p_0 \restriction \beta$ y $p_1 \restriction \beta$ son compatibles en $\mathbb{P}_\beta$. Tomemos $s \in \mathbb{P}_\beta$ tal que $s \leq p_0 \restriction \beta, p_1 \restriction \beta$, es fácil ver que $s' := s \cup (p_0 \setminus (p_0 \restriction \beta)) \cup (p_1 \setminus (p_1 \restriction \beta))$ es menor o igual que p_0 y p_1, por lo que A no puede ser una anticadena. □

Obsérvese que el hecho de que cada elemento de $\mathbb{P}_\alpha$ tuviera soporte finito fue pieza clave para la demostración del teorema anterior. De hecho, el teorema es falso si se permite que los elementos del forcing tengan dominio numerable en lugar de finito.

La consistencia del axioma de Martin.

El *axioma de Martin*, dentado como MA, es el primero y más sencillo de los axiomas de forcing. Asegura que si $\mathbb{P}$ es un forcing con la ccc, y $\mathcal{D}$ es una familia de menos de $\mathfrak{c}$ subcojuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro para $\mathbb{P}$ que intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$. Recordemos que la existencia de un filtro genérico no es trivial, de hecho, el siguiente resultado ilustrará por qué pedimos que las familias de densos tengan tamaño menor a $\mathfrak{c}$.

Proposición 4.5. *Existe una familia $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{c}$ subconjuntos densos de $\mathbb{C}_\omega$ tal que para cualquier filtro $G \subseteq \mathbb{C}_\omega$, hay $D \in \mathcal{D}$ tal que $G \cap D = \emptyset$.*

Demostración. Para cada $f \in 2^\omega$ y cada $n \in \omega$, sean

$$D_f = \{p \in \mathbb{C}_\omega : \exists m \in \mathrm{dom}(p)\ (f(m) \neq p(m))\}$$

y

$$E_n = \{p \in \mathbb{C}_\omega : n \in \mathrm{dom}(p)\},$$

es claro que cada uno de estos conjuntos es denso y que hay $\mathfrak{c}$ de ellos. Veamos que la familia $\mathcal{D} := \{D_f : f \in 2^\omega\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$ cumple el enunciado. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe un filtro $G \subseteq \mathbb{C}_\omega$ que intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$. Como G intersecta a todos los conjuntos E_n, $\bigcup G \in 2^\omega$, sea $g = \bigcup G$. Sabemos que $G \cap D_g \neq \emptyset$, entonces existe $p \in \mathbb{C}_\omega$ y $m \in \omega$ tal que $p \subseteq g$ y $p(m) \neq g(m)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no puede existir un filtro que intersecte a todos los elementos de $\mathcal{D}$. $\square$

Definición 4.6. Dado un cardinal θ, denotamos como $\mathsf{MA}(\theta)$ al enunciado que afirma que si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $\mathcal{D}$ es una familia de θ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que para cualquier $D \in \mathcal{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$.

Es claro que el forcing $\mathbb{C}_\omega$ tiene la ccc, por lo que la proposición anterior nos asegura $\neg\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$, lo que implica que para cualquier $\theta \geq \mathfrak{c}$, $\neg\mathsf{MA}(\theta)$. Por otro lado, el teorema de Rasiowa-Sikorski nos garantiza $\mathsf{MA}(\omega)$. Si queremos probar que en un modelo se cumple el axioma de Martin, tendremos que probar que en dicho modelo se cumple cada instancia $\mathsf{MA}(\theta)$, para lo que a su vez necesitaríamos probar el enunciado de $\mathsf{MA}(\theta)$ para cada orden $\mathbb{P}$ con la ccc. El siguiente lema nos facilitará el trabajo.

Proposición 4.7. *Sea θ un cardinal, entonces $\mathsf{MA}(\theta)$ es equivalente a que para cualquier forcing $\mathbb{P}$ con $|\mathbb{P}| \leq \theta$ y para cualquier familia $\mathcal{D}$ de θ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, exista un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que para cualquier $D \in \mathcal{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración. Demostraremos la dirección no trivial utilizando submodelos elementales. Sea $\mathbb{P}$ un forcing con la ccc de tamaño θ y sea $\mathcal{D} = \{D_\xi : \xi < \theta\}$ una familia de θ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Sea κ un cardinal regular lo suficientemente grande tal que $\mathcal{D} \cup \{\mathbb{P}\} \subseteq H(\kappa)$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem, fijemos N un submodelo elemental de $H(\kappa)$ de tamaño θ y tal que $\mathcal{D} \cup \theta \cup \{\theta\} \cup \{\mathbb{P}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{P}}\} \subseteq N$.

Sea $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \cap N$, queremos probar que $\mathbb{Q}$ es un orden parcial con la ccc, con elemento máximo $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ y tal que para cualquier $\xi < \theta$, $D_\xi \cap \mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$. Probaremos únicamente la afirmación sobre los densos y que $\mathbb{Q}$ tiene la ccc, lo demás se sigue de manera análoga. Sea $\xi < \theta$, y $p \in \mathbb{Q}$, entonces

$$H(\kappa) \models \exists q \ (q \in D_\xi \wedge q \leq p),$$

por elementalidad,

$$N \models \exists q \ (q \in D_\xi \wedge q \leq p),$$

entonces existe $q \in N$ tal que

$$N \models q \in D_\xi \wedge q \leq p,$$

y de nuevo por elementalidad,

$$H(\kappa) \models q \in D_\xi \wedge q \leq p,$$

por lo tanto, existe $q \in D_\xi \cap \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$.

Ahora veremos que $\mathbb{Q}$ tiene la ccc, para ello basta ver que si dos condiciones son incompatibles en $\mathbb{Q}$, entonces son incompatibles en $\mathbb{P}$, o, equivalentemente, si dos condiciones de $\mathbb{Q}$ son compatibles en $\mathbb{P}$, entonces son compatibles en $\mathbb{Q}$. Sean $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$ tales que

$$H(\kappa) \models \exists r \ (r \in \mathbb{P} \wedge r \leq q_0 \wedge r \leq q_1),$$

por elementalidad,

$$N \models \exists r \ (r \in \mathbb{P} \wedge r \leq q_0 \wedge r \leq q_1),$$

entonces existe $r \in N$ tal que

$$N \models r \in \mathbb{P} \wedge r \leq q_0 \wedge r \leq q_1,$$

por lo tanto existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \leq q_0, q_1$.

Como $\mathbb{Q}$ tiene la ccc y tamaño menor o igual que θ, existe un filtro $G \subseteq \mathbb{Q}$ tal que para cualquier $\xi < \theta$, $G \cap D_\xi \neq \emptyset$. Como $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$, el conjunto $\{p \in \mathbb{P} : \exists q \in G \ (q \leq p)\}$ es el filtro testigo para $\mathsf{MA}(\theta)$. $\square$

Naturalmente podemos suponer que todos los órdenes parciales son de la forma $\langle \alpha, \trianglelefteq \rangle$ con α un ordinal y $\trianglelefteq \subseteq \alpha \times \alpha$. Y gracias a la proposición anterior, si queremos demostrar $\mathsf{MA}(\theta)$, podemos considerar únicamente a los órdenes parciales de la forma $\langle \theta, \trianglelefteq \rangle$.

La idea para costruir un modelo donde se cumpla el axioma de Martin es forzar con una iteración con soporte finito, de modo que todo orden a considerar aparezca en algún paso de la iteración. De esta forma también aparecerán los filtros genéricos correspondientes a dicho orden y serán elementos de la extensión resultante de forzar con el orden completo.

Para determinar qué tan larga debe ser dicha iteración, necesitamos contar la cantidad de nombres en el modelo base necesarios para cubrir todos lo órdenes de la extensión.

Lema 4.8. *Sean $\mathbb{P} \in M$ un forcing, $\alpha \in M$ un ordinal, $p \in M$ y $\dot{\trianglelefteq}_0 \in M$ tal que $p \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq}_0 \rangle$ es un forcing con la ccc". Entonces existe un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$-estándar $\dot{\trianglelefteq} \in M$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{\trianglelefteq} = \dot{\trianglelefteq}_0$".*

Demostración. Es claro que $\langle \alpha, \in \rangle$ es un orden parcial con la ccc en cualquier extensión genérica, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ forza que existe $\leq_\alpha$ tal que $\langle \alpha, \leq_\alpha \rangle$ es un forcing con la ccc y si $\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq}_0 \rangle$ es un forcing con la ccc, entonces $\leq_\alpha = \dot{\trianglelefteq}_0$. Por el principio de maximalidad, podemos tomar un nombre $\dot{\trianglelefteq}_1 \in M$ para dicho $\leq_\alpha$.

En particular, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{\trianglelefteq}_1 \subseteq \alpha \times \alpha$", entonces, por el lema 3.12, existe un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$-estandar $\dot{\trianglelefteq}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{\trianglelefteq} = \dot{\trianglelefteq}_1$". Por lo tanto, $p \Vdash$ "$\dot{\trianglelefteq}_0 = \dot{\trianglelefteq}$". □

Si en el enunciado del lema anterior agregamos que

$$p \Vdash \text{“}\dot{D}_0 \text{ es un subconjunto denso de } \langle \alpha, \dot{\trianglelefteq}_0 \rangle\text{”},$$

entonces podemos asegurar que existe un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$-estándar $\dot{D}$ tal que $p \Vdash$ "$D_0 = \dot{D}$".

Lema 4.9. *Sean $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ forcings tales que $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ y la identidad de $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ es un encaje regular, sean α un ordinal y $\dot{\trianglelefteq}$ un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$-estándar tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$ tiene la ccc". Entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$ tiene la ccc"*

Demostración. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\neg(\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$"$)$. Entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$ no tiene la ccc". Consideremos G un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M con $p \in G$ y sea $F = G \cap \mathbb{P}$, demostraremos que F es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Para ver que F es un filtro fijemos $p_0, p_1 \in F$, ambas condiciones son elementos de G, entonces p_0 y p_1 son compatibles en $\mathbb{Q}$, y como la identidad es encaje, p_0 y p_1 son compatibles en $\mathbb{P}$. Sea $D = \{p \in \mathbb{P} : p \leq p_0 \wedge (p \perp p_1 \vee p \leq p_1)\}$, D es un denso bajo p_0. Tomemos una anticadena $A \subseteq D$ maximal bajo p_0, como la identidad es encaje regular, A es una anticadena maximal bajo p_0 en $\mathbb{Q}$, por lo que existe $p \in G \cap A$. Es claro que $p \in G \cap \mathbb{P}$ y $p \leq p_1$, pues si p y p_1 fueran incompatibles en $\mathbb{P}$, serían incompatibles en $\mathbb{Q}$, porque la identidad es encaje. Para probar que F es $\mathbb{P}$-genérico basta ver que intersecta a todas las anticadenas maximales de $\mathbb{P}$. Tomemos $A \subseteq \mathbb{P}$ una anticadena maximal de $\mathbb{P}$, como la inclusión es un encaje regular, A es una anticadena maximal de $\mathbb{Q}$ y como G es $\mathbb{Q}$-genérico, se sigue $G \cap A \neq \emptyset$ y $G \cap A \subseteq F \cap A$.

Obérvese que, por cómo definimos los nombres $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$-estándar, todas sus segundas coordenadas están en $\mathbb{P}$, esto es cierto para los elementos de sus elementos y así sucesivamente. Por lo tanto, $val_G(\dot{\trianglelefteq}) = val_F(\dot{\trianglelefteq})$, y $val_G(\dot{\trianglelefteq}) \in M[F]$. Como $p \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$ no tiene la ccc", existe, en $M[F]$, una anticadena A no numerable de $\langle \alpha, \mathrm{val}_F(\dot{\trianglelefteq}) \rangle$. Nótese que $M[F] \subseteq M[G]$, entoces $A \in M[G]$, lo cual es una contradicción. $\square$

A continuación construiremos la iteración buscada. Sea $\kappa \in M$ un cardinal regular no numerable tal que $M \models 2^{<\kappa} = \kappa$. Queremos construir una κ-iteración con soporte finito $\mathbb{P}_\kappa$ tal que

1. $|\mathbb{P}_\xi| < \kappa$ para cada $\xi < \kappa$;
2. $|\mathbb{P}_\kappa| = \kappa$;
3. si $\xi < \kappa$, entonces $\mathbb{P}_\xi$ tiene la ccc;
4. $1 < |\mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}}_\xi)|$ para una cantidad cofinal de ordinales $\xi < \kappa$;
5. si $\xi < \kappa$, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ tiene la ccc".

Para la construcción, fijemos una función $f\colon \kappa \to \kappa \times \kappa$ biyectiva tal que para cualquier $\alpha \in \kappa$, si $f(\alpha) = (\alpha_0, \alpha_1)$, entonces $\alpha_0 \leq \alpha$. Supongamos que ya hemos construido $\mathbb{P}_\xi$ y procedamos a definir $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$. Consideremos la sucesión de pares $\{(\alpha_\xi^\mu, \dot{\trianglelefteq}_\xi^\mu) : \mu < \kappa\}$ tal que para cada $\mu < \kappa$, $\alpha_\xi^\mu < \kappa$ y $\dot{\trianglelefteq}_\xi^\mu$ es un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi}$-estándar para un subconjunto de $\alpha_\xi^\mu \times \alpha_\xi^\mu$ y tal que todo par $(\alpha, \dot{\trianglelefteq})$ que cumpla esas dos propiedades es un elemento de la sucesión. Dicha sucesión sí tiene longitud a lo más κ, pues dado $\alpha < \kappa$, hay a lo más $|\alpha \times \alpha| \cdot |\mathbb{P}_\xi|^\omega \cdot 2^\omega$ posibles nombres $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi}$-estándar para subconjuntos de $\alpha \times \alpha$, y dicho producto es menor o igual a κ, porque $2^{<\kappa} = \kappa$.

Sean β y μ tales que $f(\xi) = (\beta, \mu)$, por la elección de f, $\beta \leq \xi$. Consideremos el nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta}$-estándar $\dot{\trianglelefteq}_\beta^\mu$. Por el lema 4.2, $\dot{\trianglelefteq}_\beta^\mu$ es un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi}$-estándar, pues todas las anticadenas de $\mathbb{P}_\beta$ también son anticadenas de $\mathbb{P}_\xi$ y comparten el mismo elemento máximo. Si $\mathbb{1}_\xi \Vdash$ "$\langle \alpha_\beta^\mu, \dot{\trianglelefteq}_\beta^\mu \rangle$ tiene la ccc", hagamos $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \langle \alpha_\beta^\mu, \dot{\trianglelefteq}_\beta^\mu \rangle$, de lo contrario, fijemos $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \{\emptyset\}$". Con esto queda definida nuestra iteración $\mathbb{P}_\kappa$, veamos que cumple las propiedades que queríamos.

Como $\alpha_\beta^\mu < \kappa$, $|\mathbb{P}_\xi| \leq |\mathbb{P}_\xi| + |\mathbb{P}_\xi \times \alpha_\beta^\mu| \leq \kappa$, esto prueba (1). El inciso (3) se sigue del teorema 4.3. El inciso (4) se sigue de que hay órdenes ccc de cualquier cardinalidad menor a κ y que κ es regular. Esto último, junto con los argumentos del inciso (1), nos garantiza que $|\mathbb{P}_\kappa| = \kappa$. Con esto finalizamos la construcción de $\mathbb{P}_\kappa$, procedamos al resultado principal de la sección.

Teorema 4.10. *Sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M. Entonces*

$$M[G] \models \mathsf{MA}.$$

Demostración. Primero probaremos que para cada cardinal $\theta < \kappa$, $M[G] \models \mathsf{MA}(\theta)$. Esto nos garantizará que $M[G] \models \kappa \leq \mathfrak{c}$. Fijemos $\theta < \kappa$, por la proposición 4.7 y el lema 4.8, basta fijar $\alpha \leq \theta$ y $\dot{\trianglelefteq}$ un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa}$-estándar tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$ tiene la ccc" y probar que el enunciado se cumple para dicho orden. Sea $\mathcal{D} = \{D_\beta : \beta < \theta\}$ una familia de subconjuntos densos de $\langle \alpha, \mathrm{val}_G(\dot{\trianglelefteq}) \rangle$, para cada β podemos escoger un nombre $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa}$-estándar $\dot{E}_\beta$ tal que $\mathrm{val}_G(\dot{E}_\beta) = D_\beta$. Obsérvese que la cantidad de elementos de $\mathbb{P}_\kappa$ utilizados en la construcción de los nombres antes mencionados es menor que κ, y como κ es regular, existe $\xi_0 < \kappa$ tal que todos los nombres mencionados se construyen a partir de $\mathbb{P}_{\xi_0}$.

Por el lema 4.9, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash$ "$\langle \alpha, \dot{\trianglelefteq} \rangle$", entonces existe $\mu < \kappa$ tal que $\dot{\trianglelefteq} = \dot{\trianglelefteq}^{\mu}_{\xi_0}$, fijemos ξ tal que $f(\xi) = (\xi_0, \mu)$. Además, $\mathbb{P}_{\xi+1} \cong \mathbb{P}_\xi * \langle \alpha, \dot{\trianglelefteq}^{\mu}_{\xi_0} \rangle$, y por consecuencias de la prueba del lema 4.9, $G \cap \mathbb{P}_{\xi+1}$ es un filtro $\mathbb{P}_\xi$-genérico sobre M. Por el teorema 3.30, $M[G \cap \mathbb{P}_{\xi+1}]$ tiene un filtro de $\langle \alpha, \mathrm{val}_G(\dot{\trianglelefteq}^{\mu}_{\beta}) \rangle$ que intersecta a todos los conjuntos densos de $\langle \alpha, \mathrm{val}_G(\dot{\trianglelefteq}) \rangle$ que se encuentren en $M[G \cap \mathbb{P}_\xi]$, y, por la elección de ξ_0, estos son todos los densos que nos interesan.

Resta ver que $M[G] \models \kappa = \mathfrak{c}$. Como κ es no numerable, sabemos que $\kappa^\omega = \kappa$, además, $|\mathbb{P}_\kappa| = \kappa$ y $\mathbb{P}_\kappa$ tiene la ccc. Por lo que podemos utilizar los mismos argumentos que dimos en el lema 3.26 para asegurar que $M[G] \models \mathfrak{c} \leq \kappa$. Finalmente, como para cualquier cardinal θ, $M[G] \models \mathsf{MA}(\theta)$, $M[G] \models \forall \theta < \kappa\ (\theta < \mathfrak{c})$. Por lo tanto, $M[G] \models \kappa \leq \mathfrak{c}$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

En esta prueba se resalta una vez más el hecho de que las iteraciones nos permitan detenernos en algún paso intermedio conveniente, para luego seguir forzando con acceso a la información que se obtuvo al analizar el lugar dónde nos detuvimos. En la siguiente sección dicha idea se llevará aún más lejos, encajando una iteración en otra más larga con más información.

Capítulo 5

Forcings Propios

Hasta el momento hemos hablado del modelo base *desde afuera*, es decir, nosotros vemos al modelo como un conjunto con un comportamiento especial. Esto representa un obstáculo, pues si queremos hablar de cosas que tienen una definición, como los conjuntos $H(\theta)$, nos vemos obligados a especificar dónde estamos realizando la interpretación, lo que a futuro hará más pesada la notación. En adelante, cambiaremos este comportamiento y observaremos al modelo *desde adentro*, más aún, nos daremos el lujo de pensar que lo que estamos extendiendo es el universo V para construir un universo más grande $\mathsf{V}[G]$. Aparentemente, este cambio deja de lado la formalidad, sin embargo, únicamente estamos realizando un cambio en nuestra *forma de hablar*.

Por el cambio de lenguaje terminaremos diciendo cosas como "$x \in \mathsf{V}$", y aunque parezca sin sentido, o innecesario, nos sirve para decir que x es un elemento del modelo base.

Los conjuntos estacionarios en el sentido tradicional

Sabemos que cada número ordinal ordenado por la pertenencia es un orden total, y como tal, podemos darle la topología del orden, que tiene como base al conjunto de los intervalos abiertos. Se puede ver que la siguiente definición coincide con las nociones típicas de un conjunto cerrado y no acotado en dicha topología.

Definición 5.1. Sea γ un ordinal límite, decimos que

- $C \subseteq \gamma$ es *cerrado*, si para cualquier $X \subseteq C$ tal que $\bigcup X \in \gamma$, $\bigcup X \in C$;
- $C \subseteq \gamma$ es *no acotado*, si para cualquier $\beta < \gamma$ existe $\alpha > \beta$ tal que $\alpha \in C$;
- $S \subseteq \gamma$ es un conjunto *estacionario*, si para cualquier conjunto cerrado y acotado $C \subseteq \gamma$, $S \cap C \neq \emptyset$.

A un conjunto cerrado no acotado le llamaremos *club* que abrevia “close and unbounded”.

Continuaremos la sección enunciando. aunque no siempre demostrando, algunos resultados para resaltar las importantes propiedades combinatorias de este tipo de conjuntos.

Proposición 5.2. *Sea γ un ordinal límite con cofinalidad no numerable y sean C_0, C_1 clubs en γ. Entonces $C_0 \cap C_1$ es un club en γ.*

Demostración. Es fácil ver que la intersección de dos cerrados es cerrado. Para demostrar que la intersección es no acotada basta fijar $\alpha < \gamma$ y construir una sucesión creciente $\{c_n \in C_0 \cup C_1 : \alpha < \omega\}$ tal que

- $c_0 \in C_0$ y $c_0 > \alpha$, y
- para cualesquiera $i \in 2$ y $n \in \omega$, si $c_n \in C_i$, entonces $c_{n+1} \in C_{1-i}$ y $c_n < c_{n+1}$.

Como C_0 y C_1 son cerrados, es claro que $\bigcup_{n\in\omega} c_n \in C_0 \cap C_1$, y por la primera condición, dicho elemento es mayor que α. □

La demostración anterior se puede generalizar para una cantidad numerable de clubs $\{C_n : n \in \omega\}$, para ello basta pedir que la sucesión $\{c_n : n \in \omega\}$ sea tal que $c_0 \in C_1$, $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_0$, $c_3 \in C_1$, $c_4 \in C_2$, $c_5 \in C_0$ y así sucesivamente de manera trenzada. Si además pedimos que γ sea un cardinal regular, podemos asegurar que la intersección de toda familia de clubs de tamaño menor que γ es un club. Por otro lado, no podemos garantizar que la intersección de una familia de γ clubs es un club, pero sí que su intersección diagonal es un club (proposición 5.4). La demostración, que no incluiremos aquí, hace uso del siguiente lema.

Lema 5.3. *Sea κ un cardinal regular no numerable. Entonces para cada $f\colon \kappa \to \kappa$, el conjunto $\{\gamma < \kappa : \gamma$ es un ordinal límite y $f''\gamma \subseteq \gamma\}$ es un club en κ.*

Proposición 5.4. *Sea κ un cardinal regular no numerable y sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha \subseteq \alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de clubs. Entonces el conjunto $\{\alpha < \kappa : \forall \xi < \alpha\ (\alpha \in C_\xi)\}$, conocido como la* intersección diagonal *de la familia $\mathcal{C}$, es un club en κ.*

El siguiente teorema, conocido como *Pressing Down Lemma* o *lema de Fodor* es una de las herramientas básicas para probar que un conjunto es estacionario o construir uno de ellos.

Teorema 5.5. *Sea κ un cardinal no numerable, $S \subseteq \kappa$ un conjunto estacionario y $f\colon S \to \kappa$ una función tal que para cada $\alpha \neq 0$, $f(\alpha) < \alpha$. Entonces existe $\mu < \kappa$ tal que $f^{-1}(\mu)$ es un conjunto estacionario.*

Demostración. Supongamos, para llegar a una contradicción, que no existe dicho μ. Entonces existe una familia $\{C_\xi \subseteq \kappa : \xi < \kappa\}$ de clubs de κ tal que para cada $\xi < \kappa$, $f^{-1}(\xi) \cap C_\xi = \emptyset$. Sea Δ la intersección diagonal de dicha familia, por el lema anterior, Δ es un club. Fijemos $\alpha \in S \cap \Delta$, entonces $\alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi$, por otro lado, $f(\alpha) < \alpha$; se sigue que $\alpha \in C_{f(\alpha)}$, lo cual es una contradicción pues $\alpha \in f^{-1}(f(\alpha))$. $\square$

Para ejemplificar el uso de conjuntos estacionarios analizaremos el espacio ω_1 equipado con la topología del orden.

Proposición 5.6. *Toda función continua $g\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ es eventualmente constante, es decir, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que para toda $\beta > \alpha$, $g(\beta) = g(\alpha)$.*

Demostración. Construiremos una sucesión de ordinales $\{\alpha_n \in \omega_1 : n < \omega\}$ tal que

$$\forall n \in \omega\ \forall \beta, \gamma > \alpha_n\ (|g(\beta) - g(\gamma)| < 2^{-n}). \tag{$*$}$$

Una vez construida dicha sucesión, tomaremos $\alpha := \bigcup\{\alpha_n : n \in \omega\}$, se sigue que si $\beta, \gamma > \alpha$, entonces $g(\beta) = g(\gamma)$.

Fijemos $n \in \omega$ y construyamos α_n. Sea Lim el conjunto de los ordinales límite menores a ω_1, es claro que Lim es un club, por lo que también es un conjunto estacionario. Para cada $\gamma \in Lim$, sea $U^n_\gamma = (g(\gamma) - 2^{-(n+1)}, g(\gamma) + 2^{-(n+1)})$, por continuidad, el conjunto $\{\beta < \gamma : g''[\beta, \gamma + 1) \subseteq U^n_\gamma\}$ es no vacío. Sea $\beta^n_\gamma < \gamma$ el mínimo de dicho conjunto. Definamos $f_n\colon Lim \to \omega_1$ tal que para cada $\gamma \in Lim$, $f_n(\gamma) = \beta^n_\gamma$. Claramente f_n cumple las hipótesis del lema de Fodor, entonces existe α_n tal que $f_n^{-1}(\alpha_n)$ es un conjunto estacionario. Veamos que α_n satisface $(*)$. Sea $\beta, \gamma > \alpha_n$, como todo conjunto estacionario de ω_1 es no acotado, existe $\xi \in f^{-1}(\alpha_n)$ tal que $\xi > \beta, \gamma$, entonces $g''[\alpha_n, \xi{+}1) \subseteq U^n_\gamma$, en particular, $g(\beta), g(\gamma) \in U^n_\gamma$, y como consecuencia, $|g(\beta) - g(\gamma)| < 2^n$.

$\square$

La proposición anterior tiene como consecuencia que ω_1 es un espacio pseudocompacto, es decir, que toda función continua a los reales es acotada. Terminaremos la secciòm caracterizando los subespacios metrizables de ω_1, haciendo uso una vez más del lema de Fodor.

Proposición 5.7. *Todos los subespacios numerables de ω_1 son metrizables.*

Demostración. Basta probar que para cualquier $\alpha < \omega_1$, podemos encajar el intervalo $[0, \alpha]$, como orden, en los racionales. Demostraremos esto por inducción sobre α.

Si $\alpha = 0$, la afirmación es clara. Supongamos que $[0, \alpha]$ está encajado en $\mathbb{Q}$, podemos suponer que existe un encaje $e\colon [0, \alpha] \to \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, definamos $e_1 : [0, \alpha + 1] \to (0, 2) \cap \mathbb{Q}$ como $e_1 \restriction_{[0,\alpha]} = e$ y $e_1(\alpha + 1) = 1$, es claro que e_1 es un encaje.

Sea $\gamma < \omega_1$ un ordinal límite, y sea $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión creciente y cofinal en γ con $\alpha_0 = 0$. Por la hipótesis de inducción, para cualquier $n \in \omega$ existe un encaje

$e_n\colon [\alpha_n, \alpha_{n+1}) \to (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k}) \cap \mathbb{Q}$. Sea $e : [0, \gamma] \to [1, 2]$ tal que $e \restriction [\alpha_n, \alpha_{n+1}] = e_n$ y $e(\gamma) = 2$, se sigue que e es un encaje de $[0, \gamma]$ en $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$. .

□

Proposición 5.8. *Si $A \subseteq \omega_1$ contiene un club, entonces $\omega_1 \setminus A$ es metrizable.*

Demostración. Sea $A \subseteq \omega_1$ tal que existe $C \subseteq A$ cerrado no acotado. Sea $\alpha \in \omega_1 \setminus C$ y consideremos el conjunto $\{\beta \in C : \beta < \alpha\}$. Como C es cerrado, $\alpha_M := \bigcup\{\beta \in C : \beta < \alpha\}$ es un elemento de C y sea $\alpha_m = \min\{\beta \in C : \alpha < \beta\}$. Como (α_M, α_m) es numerable, (α_M, α_m) es metrizable, entonces $\bigcup\limits_{\alpha \in \omega_1 \setminus C} (\alpha_M, \alpha_m) = \omega_1 \setminus C$ es metrizable. □

Recordemos que un espacio topológico es *paracompacto* si toda cubierta abierta tiene un *refinamiento abierto localmente finito*. A su vez, un refinamiento de una cubierta $\mathcal{U}$ es otra cubierta $\mathcal{V}$ con la propiedad que para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$. Y una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio X es *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x que intersecta solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.

El siguiente teorema nos permite hablar de los espacios metrizables utilizando la noción de paracompacidad, la cual está más relacionada con la combinatoria. Dicho teorema y más sobre paracompacidad se puede consultar en [5].

Teorema 5.9. *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

Teorema 5.10. *Un subespacio $X \subseteq \omega_1$ es metrizable si y solo si X no es estacionario.*

Demostración. El recíproco se sigue de que el complemento de todo subconjunto que contenga a un club es metrizable.

Probemos la implicación. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe $S \subseteq \omega_1$ estacionario y paracompacto. Para cada $\alpha \in S$, sea $U_\alpha = [0, \alpha+1)$ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in S\}$. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$ localmente finito. Si $\alpha \in S$ es un ordinal límite, fijemos $\beta_\alpha < \alpha$ tal que $[\beta_\alpha, \alpha+1)$ intersecta únicamente a un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Definamos $f : S \to \omega_1$ tal que $f(\alpha) = \beta_\alpha$, si α es límite, y $f(\alpha) = \beta$, si $\alpha = \beta + 1$. Entonces, por el lema de Fodor, existe $\gamma \in \omega_1$ tal que $f^{-1}(\gamma)$ es estacionario.

Veamos que existe $\alpha \in S$ tal que $[\gamma, \alpha + 1)$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{V}$, con esto llegaremos a la contradicción buscada. Definamos recursivamente una sucesión creciente $\{\alpha_n \in f^{-1}(\gamma) : n \in \omega\}$ y una sucesión $\{V_n \in \mathcal{V} : n \in \omega\}$ tales que

- si n y m son números naturales distintos, entonces $V_n \neq V_m$, y
- para cualquier $n \in \omega$, $\alpha_n \in V_n$ y $V_n \subseteq U_{\alpha_{n+1}}$.

Realicemos la construcción. Para el paso base basta tomar $\alpha_0 \in f^{-1}(\gamma)$ y $V_0 \in \mathcal{V}$ con $\alpha_0 \in V_0$, que existe pues $\mathcal{V}$ es cubierta. Para el paso sucesor supongamos que ya tenemos definidas las sucesiones hasta el paso n. Como $\mathcal{U}$ es refinamiento de $\mathcal{V}$, existe $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ tal que $\alpha_{n+1} \in f^{-1}(\gamma)$, $V_n \subseteq U_{\alpha_n}$, fijemos $V_{n+1} \in \mathcal{V}$ tal que $\alpha_{n+1} \in V_{n+1}$.

Sea $\alpha \in f^{-1}(\gamma)$ un ordinal límite tal que $\alpha \geq \bigcup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Obsérvese $[\gamma, \alpha + 1)$ intersecta a cada uno de los V_n, por lo que α es el elemento de S buscado. $\square$

Conjuntos estacionarios generalizados

Existe una definición para conjunto cerrado y acotado que generaliza a la versión de la sección anterior para conjuntos que no son ordinales. Le llamaremos definición de conjunto cerrado y acotado generalizado, y será la que utlizaremos para definir a los forcings propios.

Definición 5.11. Sea X un conjunto y $C \subseteq [X]^{\leq\omega}$, decimos que

- C es *no acotado*, si $\forall a \in [X]^{\leq\omega}\ \exists c \in C\ (a \subseteq c)$;
- C es *cerrado*, si dada una sucesión $\{c_n \in C : n \in \omega\}$ tal que $c_n \subseteq c_{n+1}$, se tiene que $\bigcup\limits_{n\in\omega} c_n \in C$;
- C es un *club*, si es cerrado y acotado;
- un conjunto $S \subseteq [X]^{\leq\omega}$ es *estacionario*, si intersecta a todo club de $[X]^{\leq\omega}$.

Volvamos por un momento al lema 5.3 de la sección anterior. Básicamente nos dice que el conjunto de todos los ordinales límite que sean en algún modo cerrados bajo una función es un club. Podríamos cambiar el conjunto de los ordinales límite por un club cualquiera, y el enunciado seguiría siendo cierto, lo cual nos indica que todo club contiene otro club de este estilo. Esta es la idea clave para la "equivalencia" que mostraremos a continuación.

Definición 5.12. Sea X un conjunto y $f\colon [X]^{<\omega} \to [X]^{\leq\omega}$. Decimos que $a \in [X]^{\leq\omega}$ es un *punto de cerradura* de f, si para todo conjunto finito $a' \subseteq a$, $f(a') \subseteq a$.

Lema 5.13. *Sea X un conjunto y $f\colon [X]^{<\omega} \to [X]^{\leq\omega}$, y sea C_f el conjunto de los puntos de cerradura de f. Entonces C_f es un club.*

Demostración. Iniciaremos probando que C_f es cerrado. Fijemos una cadena $\{c_n \in C : n \in \omega\}$ y sea $c = \bigcup\limits_{n\in\omega} c_n$. Tomemos a un subconjunto finito a de c, entonces existe $n \in \omega$ tal que $a \subseteq c_n$ y, como c_n es un punto de cerradura de f, se sigue que $f''a \subseteq c_n \subseteq c$. Por lo tanto, $c \in C_f$.

Para ver que C_f es no acotado, fijemos $a \in [X]^{\leq\omega}$. Construiremos una sucesión $\{c_n \in [X]^{\leq\omega} : n \in \omega\}$. Sea $c_0 = a$, suponiendo que tenemos definido c_n, sea $c_{n+1} = \bigcup\{f(b) : b \in [c_n]^{<\omega}\}$, entonces $c_{n+1} \in [X]^{\leq\omega}$ pues, como c_n es numerable, solo tiene una cantidad numerable de conjuntos finitos. Tomemos $c = \bigcup\limits_{n\in\omega} c_n$, $c \in [X]^{\leq\omega}$, por un razonamiento similar al del párrafo anterior, c es un punto de cerradura de f. Por lo que $a \in c$, y como consecuencia, C_f es no acotado. $\square$

Lema 5.14. *Sea X un conjunto y $C \subseteq [X]^{\leq\omega}$ un club. Entonces existe una función $f\colon [X]^{<\omega} \to [X]^{\leq\omega}$ tal que si C_f es el conjunto de todos los puntos de cerradura de f, entonces $C_f \subseteq C$.*

Demostración. Definiremos f de manera recursiva sobre el tamaño de los elementos de $[X]^{<\omega}$. Sea $f(0) = \emptyset$ y para cada $x \in X$, sea $f(x)$ tal que $f(x) \in C$ y $x \in f(x)$, esto se puede hacer porque C es no acotado. Supongamos que ya definimos f para cualquier subconjunto de X de tamaño n, fijemos $x \in [X]^{n+1}$ y sea $f(x)$ un elemento de C tal que $\bigcup\{f(a) : a \in [x]^n\} \subseteq f(x)$. Dicha $f(x)$ existe porque la unión es numerable y C es no acotado. Para probar que $C_f \subseteq C$, fijemos un elemento $a := \{a_n : n \in \omega\}$ de C_f, y para cada n, sea $b_n = \{a_m : m \leq n\}$. Se sigue de la definición de f que para cualquier $n \in \omega$, $f(b_n) \subseteq f(b_{n+1})$ y $f(b_n) \in C$, y como C es cerrado, $c := \bigcup_{n\in\omega} f(b_n) \in C$. Claramente $a \subseteq c$, pues si $b \in b_n$, entonces $b \in f(b_n)$. Por otro lado, $c \subseteq a$ pues, como C_f es el conjunto de puntos de cerradura de f, para cada $n \in \omega$, $f(b_n) \subseteq a$. Por lo tanto, $a = c$ y como consecuencia $C_f \in C$. $\square$

Podemos refinar aún más el resultado anterior si en lugar de usar funciones con imagen en los subconjuntos numerables de X, tomamos funciones con imagen contenida en X. Sea $g\colon [X]^{<\omega} \to X$. Diremos que un conjunto $b \in [X]^{\leq\omega}$ es *cerrado bajo g*, si para cualquier subconjuntos finito y no vacío a de b, $g(a) \in b$.

Proposición 5.15. *Sean X un conjunto, $g\colon [X]^{<\omega} \to X$ y C_g la familia de todos los subconjuntos numerables de X cerrados bajo g. Entonces C_g es un club.*

Demostración. Sea $f\colon [X]^{<\omega} \to [X]^{\leq\omega}$ tal que para cada $a \in [X]^{<\omega}$, $f(a) = \{g(a)\}$ y $f(\emptyset) = \emptyset$. Por el lema 5.13, el conjunto C_f, compuesto por todos los puntos de cerradura de f, es un club. Es claro que $C_f = C_g$, pues

$$\begin{aligned} b \in C_f &\Leftrightarrow \forall a \in [b]^{<\omega}\ (f(a) \subseteq b) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in [b]^{<\omega}\ (g(a) \in b) \\ &\Leftrightarrow b \in C_g. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5.16. *Sea X un conjunto y $C \subseteq [X]^{\leq\omega}$ un club. Entonces existe $g\colon [X]^{<\omega} \to X$ tal que $C_g \subseteq C$, donde C_g es la familia de todos los subconjuntos numerables de X cerrados bajo g.*

Demostración. Supondremos que existe λ un cardinal tal que $X = \lambda$, podríamos evitar esto tomando un buen orden para X, pero eso implicaría hacer más pesada la notación.

Sea $f\colon [\lambda]^{<\omega} \to [\lambda]^{\leq\omega}$ definida como en la demostración del lema 5.14. Para cada $n \in \omega$, fijemos $g_n\colon [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ tal que para cualquier $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $f(a) = \{g_n(a) : n \in \omega\}$.

Sea $h : \omega \to \omega \times \omega$ una biyección tal que $h = (h_0, h_1)$ y para cada $n \in \omega$, $h_1(n) \leq n$. Sea $g\colon [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ tal que para cada $\alpha < \lambda$, $g(\{\alpha\}) = \alpha + 1$, y si $n \in \omega \setminus 2$ y $a = \{\alpha_m \in X : m \leq n\}$ está ordenado de manera creciente, entonces $g(a) = g_{h_0(n)}(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{h_1(n)}\})$. Resta ver que $C_g \subseteq C$, para ello demostraremos que $C_g \subseteq C_f$, donde C_f es el conjunto de todos los puntos de cerradura de f. Fijemos $b \in C_g$, $a \in [b]^{<\omega}$ y $n \in \omega$, basta ver que $g_n(a) \in b$. Como a es finito, existe $m \in \omega$ tal que $a = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}$ ordenado de manera creciente. Como h es una biyección, existe $m' \geq m$ tal que $h_0(m') = n$ y $h_1(m') = m$. Además, b es infinito, pues si $\alpha \in b$, entonces $g(\{\alpha\}) \in b$ y $g(\{\alpha\}) = \alpha + 1$, por lo que existen $m' - m$ elementos $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m'} \in b$ mayores que α_m. Se sigue que

$$g(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m'}\}) = g_{h_0(m')}(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{h_1(m')}\}) = g_n(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\})$$

y $g(\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m'}\}) \in b$, pues $b \in C_g$, lo que completa la prueba. □

El resultado del teorema anterior es tan relevante que algunos autores definen club como exactamente estos conjuntos C_g. Esto se debe a que comúnmente no nos interesan los clubs como tal, sino el filtro que estos generan y, por el teorema anterior, dicho filtro es el mismo que el generado por los conjuntos C_g.

Proposición 5.17. *La intersección de dos clubs es un club.*

Demostración. Sea X un conjunto y $C_0, C_1 \subseteq [X]^{\leq\omega}$ clubs. Es fácil ver que la intersección es cerrada. Para ver que es no acotada, fijemos $a \in [X]^{\leq\omega}$ y, de manera similar a la demostración de la proposición análoga de la sección anterior, construyamos una sucesión $\{c_n : n \in \omega\}$ tal que

- $c_0 \in C_0$ y $a \subseteq c_0$ y
- para cualesquiera $i \in 2$ y $n \in \omega$, si $c_n \in C_i$, entonces $c_{n+1} \in C_{1-i}$ y $c_n \subseteq c_{n+1}$.

De nuevo es claro, por ser cerrados, que $\bigcup_{n\in\omega} c_n$ pertenece tanto a C_0 como a C_1, por lo que podemos concluir que la intersección es no acotada. □

Del mismo modo que en la sección anterior esta demostración se puede generalizar para la intersección de una cantidad numerable de clubs.

Proposición 5.18. *Sea X un conjunto y $\{C_x \subseteq [X]^{\leq\omega} : x \in X\}$ una familia de clubs en $[X]^{\leq\omega}$. Entonces la intersección diagonal, es decir, el conjunto*

$$\Delta := \{c \in [X]^{\leq\omega} : \forall x \in c \ (c \in C_x)\}$$

es un club.

Demostración. Veamos que Δ es un conjunto cerrado. Sea $D = \{d_n \in \Delta : n \in \omega\}$ una cadena creciente numerable y sea $d = \bigcup D$. Fijemos $x \in d$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in d_n$, y como D es una cadena, se cumple que para cada $m \geq n$, $x \in d_m$. Por la definición de Δ, se sigue para cada $m \geq n$, $d_m \in C_x$. Por lo tanto, $d \in C_x$, pues C_x es cerrado.

Para probar que Δ es no acotado, fijemos $a \in [X]^\omega$, utilizaremos fuertemente que cualquier intersección numerable de clubs es un club. Construyamos una sucesión $\{d_n \in [X]^{\leq\omega} : n \in \omega\}$ tal que

- $d_0 \in \bigcap_{x \in a} C_x$ y $a \subseteq d_0$, y
- para cualquier $n \in \omega$, $d_{n+1} \in \bigcap_{x \in d_n} C_x$ y $d_n \subseteq d_{n+1}$.

Sea $d = \bigcup_{n \in \omega} d_n$. Es claro que $a \subseteq d$, resta ver que $d \in \Delta$. Fijemos $x \in d$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in d_n$. Por construcción, para cada $m \geq n$, $x \in d_m$, entonces para cada $m \geq n$, $d_{m+1} \in C_x$ y, como C_x es cerrado. $d \in C_x$, que es lo que queríamos demostar. □

Como era de esperarse, tenemos un resultado que generaliza al importante lema de Fodor. Omitiremos su demostración, pues es similar a la prueba del lema de Fodor de la sección anterior, pero utilizando la intersección diagonal definida en el teorema anterior.

Teorema 5.19. *Sea X un conjunto, $S \subseteq [X]^{\leq\omega}$ un conjunto estacionario y $f\colon S \to X$ una función de elección Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f^{-1}(x_0)$ es estacionario.*

La siguiente proposición analiza la relación entre los conjuntos estacionarios de un conjunto y los conjuntos estacionarios de sus subconjuntos y superconjuntos. Este resultado nos será útil más adelante.

Proposición 5.20. *Sean X y Y conjuntos tales que $Y \subseteq X$. Se cumple lo siguiente.*

1. *Si $S \subseteq [X]^{\leq\omega}$ es un conjunto estacionario, entonces el conjunto $S' := \{x \cap Y : x \in S\}$ es estacionario en Y.*
2. *Si $S \subseteq [Y]^{\leq\omega}$ es un conjunto estacionario, entonces el conjunto $S' := \{x \in [X]^{\leq\omega} : x \cap Y \in S\}$ es estacionario en X.*

Demostración. (1) se sigue de que si C es un club de $[Y]^{\leq\omega}$, entonces el conjunto $C' := \{x \in [X]^{\leq\omega} : x \cap Y \in C\}$ es un club de X.

Para (2) probaremos que el conjunto de las intersecciones de elementos de un club de $[X]^{\leq\omega}$ con Y, contiene a un club de $[Y]^{\leq\omega}$. Por el lema 5.14, basta demostrar que para cada función $f : [X]^{<\omega} \to [X]^{\leq\omega}$, existe una función $f_0\colon [Y]^{<\omega} \to [Y]^{\leq\omega}$ tal que para cualquier $y \in C_{f_0}$, existe $x \in C_f$ tal que $y = x \cap Y$, donde C_f y C_{f_0} son los conjuntos de los puntos de cerradura de f y f_0, respectivamente. Para cada $b \in [Y]^{<\omega}$, sea $x_b = \bigcap\{x \in C_f : b \subseteq x\}$.

Fijemos b y veamos que x_b es un punto de cerradura de f. Sea $a \in [x_b]^{<\omega}$, si $x \in C_f$ es tal que $b \subseteq x$, entonces $x_b \subseteq x$ y, en particular, $a \in [x]^{<\omega}$, por lo que $f(a) \subseteq x$. Por la definición de x_b, $f(a) \subseteq x_b$. Definamos $f_0 \colon [Y]^{<\omega} \to [Y]^{\leq\omega}$ como $f_0(b) = x_b \cap Y$.

Para probar que dicha f_0 funciona, tomemos $y \in C_{f_0}$ enumerado como $\{y_n : n \in \omega\}$. Para cada n, sea $a_n = \{y_m : m \leq n\}$, se sigue, por definición, que para cada $n \in \omega$, $x_{a_n} \subseteq x_{a_{n+1}}$. Sea $x = \bigcup_{n\in\omega} x_{a_n}$, como C_f es un cerrado, $x \in C_f$ y claramente $y \subseteq x \cap Y$, resta ver que $x \cap Y \subseteq y$. Sea $a \in x \cap Y$, por definicón existe $n \in \omega$ tal que $a \in x_{a_n}$, entonces $a \in f_0(a_n)$. Se sigue que $a \in y$, pues y es un punto de cerradura de f_0. $\square$

Terminaremos la sección con un resultado que nos permite encontrar clubs cuyos elementos son submodelos elementales de algún modelo dado. Esta herramienta resultará muy útil en la siguiente sección, pues daremos una equivalencia de ser forcing propio en términos de submodelos elemenetales.

Proposición 5.21. *Si $\mathfrak{B}$ es una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ con universo B, entonces el conjunto $C := \{A \in [B]^{\leq\omega} : A$ es el universo para una estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}\}$ es un club.*

Demostración. Veamos que es no acotado. Sea $A' \in [B]^{\leq\omega}$, por el teorema de Löwenheim-Skolem existe una subestructura elemental $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{B}$ con universo numerable A tal que $A' \subseteq A$, se sigue que $A \in C$. El hecho de que C sea cerrado se sigue de que la unión de una cadena numerable de subestructuras elementales es una subestructura elemental, y de que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. $\square$

Forcings Propios

La noción de forcing propio fue introducida por Shelah en 1982, con el fin de abstraer los elementos que concedían a los forcing ccc y σ-cerrados sus propiedades de preservación. Iniciaremos con una definición que depende totalmente de método del forcing, y que ilustra las propiedades de preservación de las que hablábamos. Posteriormente pasaremos a una definición modelo teórica.

Definición 5.22. Un forcing $\mathbb{P}$ es *propio*, si preserva conjuntos estacionarios de $[\lambda]^{\leq\omega}$, para cada cardinal λ no numerable. En otras palabras, $\mathbb{P}$ es propio si dado $S \subseteq [\lambda]^{\leq\omega}$ un conjunto estacionario en M se tiene que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\check{S}$ es estacionario".

Veamos un pequeño pero importante ejemplo, para entender esta definición.

Proposición 5.23. *Sean $\mathbb{P}$ un forcing propio, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico y λ un cardinal no numerable. Si $\dot{a}$ es tal que $V[G] \models \mathrm{val}_G(\dot{a}) \in [\lambda]^{\leq\omega}$, entonces existe $b \in [\lambda]^{\leq\omega}$ en el modelo base tal que $V[G] \models val_G(\dot{a}) \subseteq b$.*

Demostración. Trabajando en $V[G]$ es claro que el conjunto $C := \{x \in [\lambda]^{\leq\omega} : val_G(\dot{a}) \subseteq x\}$ es un club. Fijemos $S \subseteq [\lambda]^{\leq\omega}$ un conjunto estacionario, entonces $V[G] \models$ *S es estacionario.* Por lo tanto, $V[G] \models S \cap C \neq \emptyset$, y como S es un elemento del modelo base, se cumple lo que queríamos. □

La proposición anterior tiene como corolario que todo forcing propio preserva a ω_1. Existen algunos resultados referentes a colapsos y preservación de cardinales al forzar con órdenes propio, pero para los objetivos del texto bastará con saber que ω_1 se preserva.

Como era de esperarse, tanto los forcings con la ccc como los forcings σ-cerrados resultan ser forcing propios.

Proposición 5.24. *Si $\mathbb{P}$ es un forcing con la ccc, entonces $\mathbb{P}$ es propio.*

Demostración. Sea λ un cardinal, $\dot{C}$ un nombre y $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\dot{C} \in [\lambda]^{\leq\omega} \text{ y } \dot{C} \text{ es un club”}.$$

Demostraremos que existe un club C' en el modelo base tal que $p \Vdash$ “$C' \subseteq \dot{C}$”, lo que implicará que todo conjunto estacionario del modelo base siga siendo estacionario en la extensión.

Sea $C' = \{a \in [\lambda]^{\leq\omega} : p \Vdash \text{“}a \in \dot{C}\text{”}\}$. Es claro que $p \Vdash$ “$C' \subseteq \dot{C}$”, falta probar que C es un club para concluir la prueba. Sea $\{c_n \in C' : n \in \omega\}$ una cadena creciente y sea $c = \bigcup\limits_{n\in\omega} c_n$. Obsérvese que

$$p \Vdash \text{“}\dot{C} \text{ es un club y } \forall n \in \omega\ (c_n \in \dot{C} \wedge c_n \subseteq c_{n+1})\text{”},$$

por lo tanto, $p \Vdash$ “$c \in \dot{C}$”.

Para demostrar que C' es no acotado fijemos $a \in [\lambda]^{\omega}$. Construiremos una sucesión de nombres $\{\dot{c}_n : n \in \omega\}$ tal que

- $p \Vdash$ “$\forall n \in \omega\ (\dot{c}_n \subseteq \dot{c}_{n+1}) \wedge a \subseteq \dot{c}_0$” y
- existe c tal que $p \Vdash$ “$c = \bigcup\limits_{n\in\omega} \dot{c}_n$”.

Una vez que se cumplan estas dos condiciones y como $p \Vdash$ “$\dot{C}$ es un club” podemos concluir que $p \Vdash$ “$c \in \dot{C}$”.

Realizaremos la construcción recursivamente definiendo además una sucesión de conjuntos $\{a_n \in [\lambda]^{\leq\omega} : n \in \omega\}$ tal que:

1. $a_0 = a$.
2. $p \Vdash$ “$a_n \subseteq \dot{c}_n$”.
3. $p \Vdash$ “$\dot{c}_n \subseteq a_{n+1}$”.

Supongamos que para alguna n tenemos construido a_n y construyamos $\dot{c}_n$ y a_{n+1}. Como $p \Vdash$ "$\dot{C}$ es no acotado" y por el principio de maximalidad, existe un nombre $\dot{c}_n$ tal que $p \Vdash$ "$a_n \subseteq \dot{c}_n \wedge \dot{c}_n \in \dot{C}$". Como consecuencia, existe un nombre $\dot{f}$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{f}\colon \omega \to \lambda \wedge \dot{f}''\omega = \dot{c}_n$". Por el lema del tubo (3.16), existe $F\colon \omega \to \mathcal{P}(\lambda)$ tal que $F(m)$ es numerable para cada $m \in \omega$ y $p \Vdash$ "$\forall m \in \omega\ (\dot{f}(m) \in F(m))$". Se sigue que si definimos $a_{n+1} = \bigcup\limits_{m\in\omega} F(m)$, entonces $p \Vdash$ "$\dot{c}_n \subseteq a_{n+1}$".

Finalmente, por las propiedades (2) y (3) se sigue que $p \Vdash$ "$\bigcup\limits_{n\in\omega} a_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} \dot{c}_n$", además las propiedades (1) y (2) garantizan que $p \Vdash$ "$a \subseteq \dot{c}_0$". $\square$

Obsérvese que para los forcings ccc nos preocupan dos cosas, que aparezcan nuevos subconjuntos numerables de κ y que aparezcan nuevos clubs. En el caso de los forcings σ-cerrados, solo nos preocupa que aparezcan nuevos clubs, pues, por el resultado 3.18, los forcing σ-cerrados no agregan subconjuntos numerables de un ordinal.

Proposición 5.25. *Si $\mathbb{P}$ es un forcing σ-cerrado, entonces $\mathbb{P}$ es propio.*

Demostración. Sea $S \subseteq [\lambda]^{\leq\omega}$ un conjunto estacionario y, utilizando el teorema 5.16, supongamos, para llegar a una contradicción, que existe $p \in \mathbb{P}$ y $\dot{g} \in M$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\dot{g}\colon [\lambda]^{<\omega} \to \lambda \wedge \forall x \in S\ \exists y \in [x]^{<\omega}\ (\dot{g}(y) \notin x)\text{”}. \qquad (*)$$

Sea θ un cardinal regular no numerable lo suficientemente grande tal que $\mathbb{P}, \mathcal{P}(\mathbb{P}), p, \dot{g}, \lambda, \mathcal{P}(\lambda) \in H(\theta)$. Como $H(\theta)$ es transitivo, $H(\theta) \models p \Vdash$ "$\dot{g}\colon [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$". Sea C el conjunto de los submodelos elementales de $H(\theta)$ que tienen a $\mathbb{P}$ y a λ, por la proposición 5.21, C es un club. Por la proposición 5.20, existe $N \in C$ tal que si $x := N \cap \lambda$, entonces $x \in S$. Obsérvese que $x \in H(\theta)$, pues $\mathcal{P}(\lambda) \in H(\theta)$.

Enumeremos $x^{<\omega} = \{a_n : n \in \omega \setminus 1\}$. Construyamos un par de sucesiones $\{p_n \in \mathbb{P} : n \in \omega\}$ y $\{\alpha_n \in x : n \in \omega \setminus 1\}$ de modo que

- $p_0 = p$,
- para cualquier $n > 1$, $H(\theta) \models p_n \Vdash$ "$\dot{g}(a_n) = \alpha_n$", y
- para cualquier $n \in \omega$, $p_n \geq p_{n+1}$ y $\alpha_n \in x$.

Realicemos la construcción recursivamente. Supongamos que ya tenemos p_n, sabemos que $H(\theta) \models p_n \Vdash$ "$\dot{g}\colon [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$", entonces

$$H(\theta) \models \exists p' \leq p_n\ \exists \alpha' \in \lambda\ (p' \Vdash \text{“}\dot{g}(a_{n+1}) = \alpha'\text{”}),$$

y, como N es un submodelo elemental de $H(\theta)$,

$$N \models \exists p' \leq p_n\ \exists \alpha' \in \lambda\ (p' \Vdash \text{“}\dot{g}(a_{n+1}) = \alpha'\text{”}).$$

Entonces existe $p_{n+1} \in \mathbb{P} \cap N$ y $\alpha_{n+1} \in \lambda \cap N$ tales que $p_{n+1} \leq p_n$ y

$$N \models p_{n+1} \Vdash \text{“}\dot{g}(a_n) = \alpha_{n+1}\text{”},$$

y, por elementalidad,

$$H(\theta) \models p_{n+1} \Vdash \text{“}\dot{g}(a_n) = \alpha_{n+1}\text{”}.$$

Esto termina la construcción.

Como $\mathbb{P}$ es σ-cerrado, existe un elemento $q \in \mathbb{P}$ que es cota inferior para $\{p_n : n \in \omega\}$, entonces

$$H(\theta) \models q \Vdash \text{“}\dot{g}''x^{<\omega} \subseteq x\text{”}.$$

Veamos que como consecuencia $q \Vdash$ “$\dot{g}''x^{<\omega} \subseteq x$”. Sea G un filtro con $q \in G$, entonces G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $H(\theta)$, pues $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \in H(\theta)$, por lo que todo denso de $\mathbb{P}$ en $H(\theta)$ es un denso de $\mathbb{P}$ en V. Como $\dot{g} \in H(\theta)$ y $H(\theta)$ es transitivo, la valuación de $\dot{g}$ según G en $H(\theta)$ coincide con la valuación de $\dot{g}$ según G en V y, como el enunciado no tiene variables libres, se sigue que

$$\mathsf{V}[G] \models \mathrm{val}_G(\dot{g})''x^{<\omega} \subseteq x.$$

Por lo tanto, $q \Vdash$ “$\dot{g}''x^{<\omega} \subseteq x$”, lo cual contradice $(*)$, pues $q \leq p$. □

Si regresamos a la definición de la relación $\Vdash$, nos daremos cuenta que únicamente la definimos para modelos estándar transitivos de $\mathsf{ZF} - \mathsf{P}$, sin embargo, el conjunto N de la demostración anterior no tiene por qué ser un modelo de este tipo, lo que nos lleva a preguntarnos por qué podemos decir cosas como

$$N \models p_{n+1} \Vdash \text{“}\dot{g}(a_n) = \alpha_{n+1}\text{”}.$$

Por el principio de definibilidad, existe una fórmula φ del lenguaje de la teoría de conjuntos tal que

$$p_{n+1} \Vdash \text{“}\dot{g}(a_n) = \alpha_{n+1}\text{” si y solo si } \varphi(\mathbb{P}, p_{n+1}, a_n, \alpha_{n+1}),$$

y, por ser una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con parámetros en N, tiene un valor de verdad en N. Es dicho valor lo que nos interesa, sin importar qué signifique la interpretación de la fórmula φ en N.

El uso del conjunto $H(\theta)$ de la demostración anterior nos sugiere que no necesitamos conocer a todo el universo para saber cuándo un forcing $\mathbb{P}$ es propio. Es esta la idea principal para la equivalencia módelo teóica de la definición de forcing propio.

Definición 5.26. Sean θ un cardinal regular, M un submodelo elemental de $H(\theta)$ y $\mathbb{P}$ un forcing tal que $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M$. Decimos que $p \in \mathbb{P}$ es una condición $(M, \mathbb{P})$-*genérica*, si para cada $D \in M$ subconjunto denso de $\mathbb{P}$, $D \cap M$ es un subconjunto predenso debajo de p[1].

[1]No pediremos que todo elemento de $D \cap M$ sea menor que p, pero sí que para cada $q \leq p$, exista $r \in D \cap M$ tal que $r \parallel q$.

Observación 5.27. *Si θ es un cardinal regular y $X \in H(\theta)$, entonces $\mathcal{P}(X) \subseteq H(\theta)$*

Observación 5.28. *Si $\mathbb{P}$ es un forcing y θ es un cardinal regular con $\mathbb{P} \in H(\theta)$, entonces*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\theta \text{ es un cardinal regular”}.$$

El nombre “condición $(M, \mathbb{P})$-genérica”proviene del hecho de que estas condiciones forzan que los filtros genéricos intersectan dentro del modelo, a todo conjunto denso que pertenece al modelo.

Proposición 5.29. *Sean $\mathbb{P}$, θ y M como en la definición anterior y sea $p \in \mathbb{P}$. Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *p es $(M, \mathbb{P})$-genérica;*
2. *para cada $D \in M$ subconjunto denso de $\mathbb{P}$, $p \Vdash$ “$D \cap M \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$”;*
3. *para cada $A \in M$ anticadena maximal de $\mathbb{P}$, $p \Vdash$ “$A \cap M \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$”.*

Demostración. El hecho de que (1) y (2) sean equivalentes se sigue de propiedades básicas de los conjuntos densos y los filtros. Probemos que (2) implica (3), el recíproco se prueba de manera similar. Sea $A \in M$ una anticadena maximal, entonces

$$H(\theta) \models \exists D \subseteq \mathbb{P}\ (D \text{ es denso debajo de } p \text{ y } \forall p_0 \in D\ \exists p_1 \in A\ (p_0 \leq p_1)),$$

por lo que, por elementalidad, existe $D \in M$ tal que

$$H(\theta) \models D \text{ es denso debajo de } p \text{ y } \forall p_0 \in D\ \exists p_1 \in A\ (p_0 \leq p_1).$$

Esto es suficiente para asegurar (3), ya que los filtros genéricos son cerrados hacia arriba. $\square$

Teorema 5.30. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$\mathbb{P}$ es propio.*
2. *Para todo cardinal regular θ con $\mathbb{P} \in H(\theta)$, existe un club $C \subseteq [H(\theta)]^{\leq\omega}$ de submodelos elementales de $H(\theta)$ tal que para cada $M \in C$, $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M$ y para cada $p \in \mathbb{P} \cap M$, hay una condición $q \leq p$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérica.*
3. *Existe un cardinal regular θ con $\mathbb{P} \in H(\theta)$ y existe un club $C \subseteq [H(\theta)]^{\leq\omega}$ de submodelos elementales de $H(\theta)$ tal que para cada $M \in C$, $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M$ y para cada $p \in \mathbb{P} \cap M$, hay una condición $q \leq p$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérica.*

Demostración. Primero haremos una observación general. Por la proposición 5.21, tenemos que para todo cardinal regular θ tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$, el conjunto

$$C_\theta := \{M \in [H(\theta)]^{\leq\omega} : M \preceq H(\theta) \wedge \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M\}$$

es un club.

Iniciaremos demostrando que (1) implica (2) por contrapuesta. Asumamos que existe un cardinal regular no numerable θ tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$ y que no satisface (2). Sea $S' \subseteq C_\theta$ el conjunto de todos los $M \in C_\theta$ tales que existe un elemento de $M \cap \mathbb{P}$ que no se puede extender a una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica. Tenemos que S' es un conjunto estacionario, pues si $C' \subseteq [H(\theta)]^{\leq\omega}$ es un club, entonces $C' \cap C_\theta$ es un club, y como θ no cumple (2), $C' \cap S' \neq \emptyset$. Sea $f\colon S' \to \bigcup S'$ tal que para cada $M \in S'$, $f(M) \in \mathbb{P} \cap M$ y no existe una condición menor o igual que $f(M)$ que sea $(M, \mathbb{P})$-genérica. Por el lema de Fodor, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $f^{-1}(p)$ es estacionario. Tomemos $S := f^{-1}(p)$, probaremos que $p \Vdash$ "S no es estacionario".

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p \in G$. Construiremos, en $\mathsf{V}[G]$, un club $C \subseteq (H(\theta))^{\mathsf{V}}$ tal que $\mathsf{V}[G] \models S \cap C \neq \emptyset$. Trabajando en $\mathsf{V}[G]$, sea $\theta_0 > \theta$ un cardinal tal que $G \in H(\theta_0)$ y sea C_0 el club de submodelos elementales numerables de $H(\theta_0)$ que tienen a G como elemento. Por la proposición 5.20, el conjunto

$$\{M \in [(H(\theta))^{\mathsf{V}}]^{\leq\omega} : M \preceq (H(\theta))^{\mathsf{V}} \wedge \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M \wedge \exists M' \in C_0\ (M' \cap (H(\theta))^{\mathsf{V}} = M)\}$$

es un club de $(H(\theta))^{\mathsf{V}}$.

Afirmación. Si $M \in C \cap \mathsf{V}$ y $D \in M$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, entonces $M \cap D \cap G \neq \emptyset$.

Demostremos la afirmación. Fijemos $M \in C$ y sea $M' \in C_0$ tal que $M' \cap (H(\theta))^{\mathsf{V}} = M$. Sea $D \in M$, entonces $D \in \mathsf{V}$, y como G es $\mathbb{P}$-genérico, $D \cap G \neq \emptyset$. Además, $D \subseteq H(\theta_0)$ y $G \in H(\theta_0)$, por lo que $H(\theta_0) \models D \cap G \neq \emptyset$, por elementalidad, $M' \models D \cap G \neq \emptyset$, por lo tanto, existe $r \in D \cap G \cap M'$. Por otro lado, $\mathbb{P} \subseteq (H(\theta))^{\mathsf{V}}$, entonces $D \subseteq (H(\theta))^{\mathsf{V}}$, podemos concluir que $r \in D \cap (H(\theta))^{\mathsf{V}} \cap M' \cap G = D \cap M \cap G$. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Para ver que $\mathsf{V}[G] \models S \cap C = \emptyset$, basta probar que para cada $M \in C \cap \mathsf{V}$, hay una condición menor o igual que p que es $(M, \mathbb{P})$-genérica. Fijemos $M \in C \cap V$, entonces

$$\mathsf{V}[G] \models \textit{para cada } D \in M, \textit{ si } D \textit{ es un subconjunto denso de } \mathbb{P}, \textit{ entonces } D \cap M \cap G \neq \emptyset.$$

Entonces existe $q \leq p$ en G tal que

$$q \Vdash \text{“}\textit{si } D \in M \textit{ es un subconjunto denso de } \mathbb{P}, \textit{ entonces } D \cap \dot{\Gamma} \cap M \neq \emptyset\text{”}.$$

Es claro que si $D \in M$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, entonces q forza que D es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Por lo tanto, por la proposición 5.29, q es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica.

Hasta el momento tenemos que $V[G] \models C \cap S \neq \emptyset$, por lo que S no es estacionario en $\mathsf{V}[G]$. Finalmente, si tomamos $\lambda = |H(\theta)|$, la biyección entre λ y $H(\theta)$ nos permite concluir que existe un subconjunto estacionario de $[\lambda]^{\leq\omega}$ que no es estacionario en la extensión, por lo tanto, $\mathbb{P}$ no es un forcing propio.

Demostremos que (2) implica (1) por contrapuesta. Supongamos que $\mathbb{P}$ no es propio, entonces existe un cardinal λ, un subconjunto estacionario S de $[\lambda]^{\leq\omega}$, $\dot{C}$ un nombre y $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\dot{C} \text{ es un club de } [\lambda]^{\leq\omega} \text{ y } S \cap \dot{C} = \emptyset\text{”}.$$

Sea θ un cardinal regular tal que $\mathbb{P}, S, \dot{C}, [\lambda]^{\leq\omega} \in H(\theta)$. Consideremos los conjuntos

$$C' := \{M \in [H(\theta)]^{\leq\omega} : M \preceq H(\theta) \wedge \mathbb{P}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{P}}, \lambda, \dot{C}, p \in M\}$$

y

$$S' := \{M \in [H(\theta)]^{\leq\omega} : M \cap \lambda \in S\}.$$

Sabemos que C' es un club de $[H(\theta)]^{\leq\omega}$, y, por la proposición 5.20, S' es un subconjunto estacionario de $[H(\theta)]^{\leq\omega}$. Como la intersección de cualesquiera dos clubs es un club, podemos asegurar que $S_0 := S' \cap C'$ es un subconjunto estacionario de $[H(\theta)]^{\leq\omega}$. Demostraremos que para cada $M \in S_0$, no existe una condición $q \leq p$ que sea $(M, \mathbb{P})$-genérica; de este modo se cumplirá $\neg(2)$, pues todo club tiene intersección no vacía con S_0.

Tomemos $M \in S_0$ y supongamos, para llegar a una contradicción, que existe una condición $q \leq p$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérica. Como M es numerable, $M \cap \lambda$ es numerable, entonces podemos escoger una sucesión de conjuntos finitos $\{x_n \subseteq M \cap \lambda : n \in \omega\}$ tal que $\bigcup_{n\in\omega} x_n = M \cap \lambda$, y como cada x_n es finito, podemos asegurar que para cada $n \in \omega$, $x_n \in M$. Queremos construir una sucesión de nombres $\{\dot{a}_n \in M : n \in \omega\}$ tal que

- para cada $n \in \omega$, $p \Vdash$ “$\dot{a}_n \in \dot{C}$” y
- para cada $n \in \omega$, $p \Vdash$ “$\dot{a}_n \cup x_n \subseteq \dot{a}_{n+1}$”.

Construyamos dicha sucesión recursivamente. Sabemos que $H(\theta) \models \exists \dot{a}\ (p \Vdash \text{“}\dot{a} \in \dot{C}\text{”})$, por lo tanto, podemos obtener el $\dot{a}_0 \in M$ deseado por elementalidad. Supongamos que ya tenemos construido $\dot{a}_n$. Sabemos que $H(\theta) \models p \Vdash$ “$\dot{C}$ es no acotado”, entonces

$$H(\theta) \models \exists \dot{a}\ (p \Vdash \text{“}\dot{a} \in \dot{C} \wedge \dot{a}_n \cup x_n \subseteq \dot{a}\text{”})$$

y, por elementalidad, podemos encontrar el $\dot{a}_{n+1}$ deseado.

Afirmación: Si $\dot{a} \in M$ es un nombre tal que $p \Vdash$ “$\dot{a} \in [\lambda]^{\leq\omega}$”, entonces $q \Vdash$ “$\dot{a} \subseteq M \cap \lambda$”.

Demostremos la afirmación. Por elementalidad, podemos fijar un nombre $\dot{f} \in M$ tal que $p \Vdash$ “$\dot{f} : \omega \to \lambda \wedge \dot{a} \subseteq \mathrm{im}(\dot{f})$”. Veamos que si tomamos $n \in \omega$, entonces $q \Vdash$ “$\dot{f}(n) \in M$”. Fijemos $n \in \omega$, sea $D_n = \{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee \exists \alpha \in \lambda\ (r \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = \alpha\text{”})\}$, dicho conjunto es denso en $\mathbb{P}$, y es un elemento de M, pues todos los parámetros utilizados para definirlo están en M. Como q es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica, $D_n \cap M$ es predenso abajo de q. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe $q_0 \leq p$ tal que $q_0 \Vdash$ "$\dot{f}(n) \notin M$". Sabemos que existe $q_1 \in M \cap D_n$, tal que $q_1 \parallel q_0$, por elementalidad existe $\alpha \in M \cap \lambda$ tal que $q_1 \Vdash$ "$\dot{f}(n) = \alpha$", entonces $q_1 \Vdash$ "$\dot{f}(n) \in M$", lo cual contradice la existencia de q_0. Con esto termina la prueba de la afirmación.

Por la afirmación anterior, $q \Vdash$ "$\dot{a}_n \subseteq M \cap \lambda$" para cada $n \in \omega$. Como $q \Vdash$ "$\dot{C}$ es cerrado" y $\bigcup\limits_{n\in\omega} x_n = M \cap \lambda$, podemos concluir que $q \Vdash$ "$M \cap \lambda \in \dot{C}$", lo cual es una contradicción, pues $M \cap \lambda \in S$ y $p \Vdash$ "$\dot{C} \cap S = \emptyset$".

El hecho de que (2) implique (3) se cumple trivialmente, pues siempre existe un cardinal θ regular lo suficientemente grande tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$.

Demostremos que (3) implica (2). Sea θ testigo de (3) y sea C el club garantizado por (3) para θ. Tomemos un cardinal θ_1 tal que $\mathbb{P} \in H(\theta_1)$, existen dos casos.

Caso 1: $\theta_1 < \theta$. Consideremos el conjunto

$$C' := \{M \in [H(\theta_1)]^{\leq\omega} : M \preceq H(\theta_1) \wedge \mathbb{P}, \leq_p, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M \wedge \exists M' \in C\ (M = M' \cap H(\theta_1))\},$$

dicho conjunto es un club. Veamos que C' funciona. Sean $M \in C'$ y $p \in M$. Por definición, existe $M' \in C$ tal que $M' \cap H(\theta_1) = M$, entonces $p \in M'$, por lo que existe una condición $q \leq p$ que es $(M', \mathbb{P})$-genérica; probemos que q también es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica. Sea $D \in M$ un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, entonces $D \in M'$, y por la proposición 5.29, $q \Vdash$ "$M' \cap D \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$". Como $\mathbb{P} \in H(\theta_1)$, $D \subseteq H(\theta_1)$, entonces $M' \cap D = M \cap D$, por lo tanto, $q \Vdash$ "$M \cap D \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$", que es lo que queríamos demostrar.

Caso 2: $\theta_1 > \theta$. Por la demostración del inciso (2) de la proposición 5.20, existe un club C' de submodelos elementales numerables de $H(\theta_1)$ tal que para cualquier $M \in C'$, $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M$ y $M \cap H(\theta) \in C$; veamos que dicho C' funciona. Sean $M \in C'$ y $p \in M$, como $\mathbb{P} \subseteq H(\theta)$, $p \in M \cap H(\theta)$, entonces existe $M' \in C$ tal que $p \in M'$ y $M' = M \cap H(\theta)$, por lo que existe una condición $q \leq p$ que es $(M', \mathbb{P})$-genérica. Sea $D \in M$, entonces $D \in M'$, pues $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \subseteq H(\theta)$. Del mismo modo que en el caso anterior, $D \cap M = D \cap M'$ y $q \Vdash$ "$M \cap D \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$". □

Anteriormente dijimos que dado un modelo no transitivo, no queda claro lo que significa la relación de forzar dentro del modelo, de hecho, no es claro qué cosa es una extensión genérica de dicho modelo. Si bien es posible hablar del conjunto $M[G]$ sin importar las propiedades de M, podría pasar que en $M[G]$ aparezcan elementos de V que no están en M. El hecho de que extendamos con un forcing propio, nos garantiza que podemos evitar este comportamiento que resulta, de cierta forma, patológico.

Observación 5.31. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing, θ un cardinal regular con $\mathbb{P} \in H(\theta)$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V. Como θ se preserva, $H(\theta)[G] \subseteq (H(\theta))^{V[G]}$, esto nos garantiza que cualquier $x \in H(\theta)[G] \cap \mathsf{V}$ está en $H(\theta)$, por lo que el comportamiento patológico del que se habló en el párrafo anterior tampoco ocurre con $H(\theta)$.*

Proposición 5.32. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing, θ un cardinal regular tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$ y $M \preceq H(\theta)$ con $\mathbb{P}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{P}} \in M$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico y existe una condición $p \in G$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérica, entonces $M[G] \cap \mathsf{V} = M$.*

Demostración. Consideremos $x \in M$, aunque dentro de M podemos interpretar la construcción del nombre canónico $\check{x}$, no podemos garantizar que $\mathrm{val}_G(\check{x}^M) = x$. Necesitaremos de la elementalidad entre M y $H(\theta)$ para probar que $M \subseteq M[G]$. Sabemos que

$$H(\theta) \models \exists \dot{x}\ (p \Vdash \text{“}\dot{x} = \check{x}\text{”}),$$

por elementalidad, existe $\dot{x} \in M$ tal que

$$M \models p \Vdash \text{“}\dot{x} = \check{x}\text{”},^{2}$$

por lo que $p \Vdash$ “$\dot{x} = \check{x}$”, que es lo que queríamos.

Demostremos que $M[G] \cap \mathsf{V} \subseteq M$. Sea $\dot{x} \in M$ tal que $\mathrm{val}_G(\dot{x}) \in \mathsf{V}$. Consideremos el conjunto

$$D := \{q : \exists y\ (q \Vdash \text{“}\dot{x} = \check{y}\text{”}) \vee \forall y\ (q \Vdash \text{“}\dot{x} \neq \check{y}\text{”})\},$$

D es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, además, la definición de D se puede interpretar en M y, por la observación anterior y la elementalidad de M, el conjunto obtenido de dicha interpretación coincide con D. Como p es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica, $p \Vdash$ “$D \cap M \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$”, entonces existe $q \in G \cap D \cap M$. Como $\mathrm{val}_G(\dot{x}) \in \mathsf{V}$ y $q \in D$, existe y_0 tal que $q \Vdash$ “$\dot{x} = \check{y}_0$”. Por la observación anterior, $y_0 \in H(\theta)$, entonces

$$H(\theta) \models \exists y\ (q \Vdash \text{“}\dot{x} = \check{y}\text{”}),$$

y por la elementalidad de M, existe $y \in M$ tal que

$$H(\theta) \models q \Vdash \text{“}\dot{x} = \check{y}\text{”},$$

por lo que $\mathrm{val}_G(\dot{x}) \in M$. □

Ahora que sabemos que, utilizando un forcing propio, podemos extender los submodelos elementales de $H(\theta)$ de una manera “adecuada”, veremos que estas extensiones también son modelos de $\mathsf{ZF} - \mathsf{P}$. Más aún, la elementalidad se conserva al extender.

Proposición 5.33. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing, θ un cardinal regular tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$ y $M \preceq H(\theta)$ con $\mathbb{P}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{P}} \in M$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico y existe una condición $p \in G$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérica, entonces $M[G] \preceq H(\theta)[G]$.*

[2] En esta expresión, $\check{x}$ se refiere a $\check{x}^M$.

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción sobre la construcción de fórmulas. Es rutinario ver que el enunciado es cierto para fórmula atómicas, negaciones y conjunciones; falta probar que dada una fórmula φ con $n+1$ variables libres y cualesquiera $x_1,\dots,x_n \in M[G]$ se tiene que si $H(\theta)[G] \models \exists x\ (\varphi(x,x_1,\dots,x_n))$, entonces $M[G] \models \exists x\ (\varphi(x,x_1,\dots,x_n))$.

Sean φ y $x_1,\dots,x_n \in M[G]$ como en el párrafo anterior y sean $\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n \in M$ tales que para cada $i \leq n$, $\mathrm{val}_G(\dot{x}_i) = x_i$. Dentro de M, definamos el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} : \exists \dot{x}\ (r \Vdash \text{“}\varphi(\dot{x},\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)\text{”}) \vee r \Vdash \text{“}\neg(\exists x\ (\varphi(x,\dot{x}_1,,\dots,\dot{x}_n)))\text{”}\},$$

dicho conjunto está en $H(\theta)$ y, en $H(\theta)$, se ve como

$$\{r \in \mathbb{P} : (H(\theta) \models \exists \dot{x}\ (r \Vdash \text{“}\varphi(\dot{x},\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)\text{”})) \vee (H(\theta) \models r \Vdash \text{“}\neg(\exists x\ (\varphi(x,\dot{x}_1,,\dots,\dot{x}_n)))\text{”})\},$$

por lo que es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Como p es una condición $(M,\mathbb{P})$-genérica, $p \Vdash$ “$M \cap D \cap \dot{\Gamma} \neq \emptyset$”. Se sigue que existe $\dot{x} \in M$ y $r \in G \cap M$ tal que $H(\theta) \models r \Vdash$ “$\varphi(\dot{x},\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)$”, entonces $H(\theta)[G] \models \varphi(\mathrm{val}_G(\dot{x}),x_1,\dots,x_n)$. Por lo tanto, por la hipótesis inductiva, $M[G] \models \varphi(\mathrm{val}_G(\dot{x}),x_1,\dots,x_n)$, lo que concluye la demostración. $\square$

Observación 5.34. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing y sea θ un cardinal regular tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$, en la observación 5.31 vimos que $H(\theta)[G] \subseteq (H(\theta))^{\mathsf{V}[G]}$. En realidad, podemos cambiar esta contención por una igualdad. Se sabe que para cada nombre $\dot{x}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ “$\dot{x} \in H(\theta)$”[3], existe $\dot{y} \in H(\theta)$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ “$\dot{x} = \dot{y}$”. La construcción se realiza de manera recursiva y se puede encontrar en [7]. Como consecuencia, se tiene que para cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico, $H(\theta)[G] = (H(\theta))^{V[G]}$.*

Terminaremos la sección probando que el resultado 5.32 caracteriza a las funciones $(M,\mathbb{P})$-genéricas. Más aún, restringir el enunciado a la clase de los números ordinales es suficiente.

Proposición 5.35. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing, θ un cardinal regular tal que $\mathbb{P} \in H(\theta)$ y M un submodelo elemental numerable de $H(\theta)$ tal que $\mathbb{P}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{P}} \in M$. Si $p \in \mathbb{P}$ es tal que $p \Vdash$ “$\check{M}[\dot{\Gamma}] \cap \mathsf{ON} \subseteq \check{M}$”, entonces p es una condición $(M,\mathbb{P})$-genérica.*

Demostración. Sea $D \in M$ un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V con $p \in G$, necesitamos demostrar que $D \cap M \cap G \neq \emptyset$. Sabemos que, en $H(\theta)$, existen un ordinal λ y una biyección $f\colon \lambda \to D$. Por elementalidad, podemos suponer que tanto λ como f son elementos de M. Como cualquier filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V es $\mathbb{P}$-genérico sobre $H(\theta)$, existe un nombre $\dot{x} \in H(\theta)$ tal que p forza que $\dot{x}$ es el mínimo ordinal ξ tal que $f(\xi) \in D \cap \dot{\Gamma}$; por elementalidad, podemos tomar dicho $\dot{x}$ en M. Por la hipótesis, existe un ordinal $\alpha \in M$ tal que $\mathrm{val}_G(\dot{x}) = \alpha$, entonces $f(\alpha) \in M$ y $f(\alpha) \in D \cap G$. Por lo tanto, $D \cap M \cap G \neq \emptyset$ y p es una condición $(M,\mathbb{P})$-genérica. $\square$

[3] Aquí se habla de la definición de $H(\theta)$, no de $H(\theta)$ como elemento del modelo base.

Capítulo 6

El axioma de Forcing Propio

El *Axioma de Forcing Propio*, abreviado como PFA, es el enunciado que asegura que si $\mathbb{P}$ es un forcing propio y $\mathcal{D}$ es una familia de ω_1 subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$. Es en realidad, el mismo enunciado que $\mathsf{MA}(\omega_1)$ cambiando ccc por propio. La prueba de su consistencia relativa también es similar a la del axioma de Martin, sin embargo, necesitamos un par de herramientas más antes de aventurarnos a la demostración.

Cardinales supercompactos

Los *cardinales supercompactos* son un tipo de *cardinales grandes*, que reciben ese nombre pues, de existir, sus propiedades implicarían que deben ser mayores que casi cualquier otro cardinal cuya existencia se pueda probar en ZFC. Los cardinales grandes tiene la peculiar característica de que no se ha probado si su existencia es consistente con ZFC, pero sí se ha demostrado que es consistente que no existan.

Iniciaremos con una definición combinatoria de los cardinales supercompactos y dedicaremos el resto de la sección a su caracterización con submodelos y encajes elementales.

Definición 6.1. Sean κ y λ cardinales. Decimos que un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}([\lambda]^{<\kappa})$ es κ, λ*-normal* si:

1. $\mathcal{U}$ es κ-completo, es decir, $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones de menos de κ elementos;
2. para cada $\alpha < \lambda$, $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : \alpha \in a\} \in \mathcal{U}$, y
3. si $A \in \mathcal{U}$ y $F : A \to \lambda$ es una función de elección, entonces existe $\alpha \in \lambda$ tal que $F^{-1}(\alpha) \in \mathcal{U}$.

Diremos que el conjunto utilizado en (2) es el *cono de* α y lo denotaremos como $\langle \alpha \rangle$. Obsérvese que el inciso (3) es muy similar a lo que asegura el lema de Fodor para conjuntos estacionarios. Por lo mismo, y para ahorrarnos tiempo, diremos que $\mathcal{U}$ cumple *Fodor* si $\mathcal{U}$ tiene dicha propiedad.

Definición 6.2. Un cardinal κ es *supercompacto*, si para cada $\lambda \geq \kappa$ existe un ultrafiltro κ, λ-normal.

Sean M y N clases, decimos que $j\colon M \to N$ es un *encaje elemental* si dada una fórmula φ con n variables libres y para cualesquiera elementos $x_1, \ldots, x_n \in M$, se tiene que

$$M \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ si y solo si } N \models \varphi(j(x_1), \ldots, j(x_n)).$$

Como se mencionó anteriormente, existe una equivalencia de cardinales supercompactos que hace uso de los encajes elementales. Estos encajes frecuentemente tendrán como dominio clases propias y, por lo tanto, no serán elementos del universo. Esta pequeña libertad va más allá de la *forma de hablar* que adoptamos desde el capítulo anterior. Aunque sí haremos algunas observaciones más al respecto, en general asumiremos que existen las herramientas necesarias para formalizar los encajes. Dicha formalización, además de ser complicada, es bastante técnica y queda fuera del alcance de este trabajo. En el caso de encajes del universo en alguna clase, pediremos que los encajes sean distintos de la identidad.

Definición 6.3. Sean M una clase transitiva y $j\colon \mathsf{V} \to M$ un encaje elemental. Decimos que el *punto crítico* de j es el mínimo ordinal α tal que $j(\alpha) \neq \alpha$ y lo denotamos como $\mathrm{crit}(j)$.

Lema 6.4. *Si M es una clase transitiva y $j\colon \mathsf{V} \to M$ es un encaje elemental, entonces*

1. *si θ es un cardinal tal que para todo $\alpha \leq \theta$, $j(\alpha) = \alpha$, entonces $j \restriction H(\theta)$ es la función identidad;*

2. *existe un cardinal κ tal que* $\mathrm{crit}(j) = \kappa$.

Demostración. Demostraremos (1) utilizando inducción sobre los números cardinales. Como base, obsérvese que con una sencilla inducción sobre los números naturales se puede probar que $j \restriction H(\omega)$ es la identidad. Sea θ un cardinal tal que $j(\theta) = \theta$, y para todo cardinal $\mu < \theta$, $j(\mu) = \mu$ y $j \restriction H(\mu)$ es la identidad. Supongamos que el enunciado no se cumple para θ, por la base de inducción, existe $x \in H(\theta)$ no vacío y tal que x es $\in$-minimal tal que $j(x) \neq x$. Como $x \in H(\theta)$, existe $f\colon \theta \to x$ tal que $x = \mathrm{im}(f)$, se sigue, por elementalidad y por la transitividad de M, que $j(x) = \mathrm{im}(j(f))$. Fijemos $\alpha < \theta$, sabemos que $j(\alpha) = \alpha$ y $j(\theta) = \theta$, entonces, por elementalidad,

$$M \models \mathrm{dom}(j(f)) = \theta \wedge j(f)(\alpha) = j(f(\alpha))$$

y, por la elección de x, $j(f(\alpha)) = f(\alpha)$. Se sigue que $\mathrm{im}(j(f)) = \{j(f(\alpha)) : \alpha < \theta\} = \{f(\alpha) : \alpha < \theta\} = x$, lo cual es una contradicción a la elección de x.

Demostremos (2). Obsérvese que por el inciso anterior, existe un ordinal α tal que $\mathrm{crit}(j) = \alpha$, de lo contrario $j \upharpoonright V$ sería la identidad, pero en nuestra definición de encaje pedimos que esto no sucediera. Supongamos, para llegar una contradicción, que α es un ordinal no cardinal, es decir, existe $\beta < \alpha$ y una biyección $f \colon \beta \to \alpha$. Por elementalidad,

$$M \models j(f) \text{ es una biyección de } \beta \text{ a } j(\alpha).$$

Fijemos γ tal que $\alpha \leq \gamma < j(\alpha)$. Existe $\xi < \beta$ tal que

$$M \models j(f)(\xi) = \gamma.$$

Por otro lado $\xi \in \mathrm{dom}(f)$, entonces existe γ_0 tal que $f(\xi) = \gamma_0$. Como $\gamma_0 < \alpha$ y $\xi < \alpha$, $j(\gamma_0) = \gamma_0$ y $j(\xi) = \xi$, se sigue que

$$N \models j(f)(\xi) = \gamma_0 \wedge j(f)(\xi) = \gamma,$$

lo cual es una contradicción, pues $\gamma_0 < \alpha \leq \gamma$. $\square$

Teorema 6.5. *Un cardinal κ es* supercompacto *si y solo si para cada $\lambda \geq \kappa$ existe una clase transitiva M y un encaje $j \colon \mathsf{V} \to M$ tal que*

1. $\mathrm{crit}(j) = \kappa$;
2. $\lambda < j(\kappa)$, *y*
3. $[M]^\lambda \subseteq M$.

A un encaje que cumpla estas características le llamamos encaje κ, λ-supercompacto.

Empezaremos por probar la implicación del teorema. Fijemos κ y λ cardinales tales que $\lambda \geq \kappa$ y fijemos un filtro κ, λ-normal $\mathcal{U}$.

Definición 6.6. Sean f y g funciones con dominio $[\lambda]^{<\kappa}$, decimos que

1. $f =_{\mathcal{U}} g$ si y solo si $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) = g(a)\} \in \mathcal{U}$;
2. $g \in [f]$ si y solo si $g =_{\mathcal{U}} f$;
3. $[g] \in_{\mathcal{U}} [f]$ si y solo si $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : g(a) \in f(a)\} \in \mathcal{U}$;
4. la clase $\mathrm{Ult}(\mathcal{U}) := {}^{[\lambda]^{<\kappa}}\mathsf{V} \big/ {=_{\mathcal{U}}}$ es la κ, λ-*ultrapotencia* de $\mathcal{U}$;
5. dado un conjunto x, $C_x \colon [\lambda]^{<\kappa} \to M$ es tal que para toda $a \in [\lambda]^{<\kappa}$, $C_x(a) = x$;
6. $j_{\mathcal{U}} \colon \mathsf{V} \to \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$ es tal que para cada conjunto x, $j_{\mathcal{U}}(x) = [C_x]$;
7. $d \colon [\lambda]^{<\kappa} \to [\lambda]^{<\kappa}$ es la función identidad.

Estaremos utilizando la notación de la defineión anterior para el resto de la sección. Obsérvese que podemos ver fácilmente que la relación $=_{\mathcal{U}}$ es de equivalencia, por lo que la definicón de ultraproducto tiene sentido. El uso de los ultraproductos está basado en el *teorema de Łoś*, que enunciaremos a continuación, pero que no demostraremos. Las pruebas pueden ser encontradas en [6] y [9].

Teorema 6.7 (Łoś)**.** *Si φ es una fórmula con n variables libres y $[f_1], \ldots, [f_n] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$, entonces*

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{U}) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \textit{ si y solo si } \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : V \models \varphi(f_1(a), \ldots, f_n(a))\} \in \mathcal{U}.$$

Corolario 6.8. $\mathrm{Ult}(\mathcal{U})$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. *si* $[f], [g] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$, *entonces* $[f] \in_{\mathcal{U}} [g]$ *si y solo si* $\mathrm{Ult}(\mathcal{U}) \models [f] \in [g]$;
2. *si* $[f], [g] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$, *entonces* $[f] =_{\mathcal{U}} [g]$ *si y solo si* $\mathrm{Ult}(\mathcal{U}) \models [f] = [g]$;
3. $j_{\mathcal{U}}$ *es un encaje elemental de* $\langle \mathsf{V}, \in \rangle$ *en* $\langle \mathrm{Ult}(\mathcal{U}), \in_{\mathcal{U}} \rangle$.

Podría parecer que introducir notación para funciones tan triviales como la identidad es una pérdida de tiempo, no obstante, nos permite visualizar algunas pruebas y propiedades de manera más sencilla. Por ejemplo, podemos reescribir a $\mathcal{U}$ como

$$\{X \subseteq [\lambda]^{<\kappa} : [d] \in_{\mathcal{U}} j_{\mathcal{U}}(X)\},$$

pues si tomamos $X \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$, entonces

$$\begin{aligned} [d] \in_{\mathcal{U}} j_{\mathcal{U}}(X) &\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : d(a) \in C_X\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : a \in X\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Nuestro siguiente paso es aplicar el teorema del colapso de Mostowski a $\mathrm{Ult}(\mathcal{U})$ para construir una clase transitiva en la que podamos encajar a V. La siguiente proposición nos garantiza que, en efecto, $\mathrm{Ult}(\mathcal{U})$ cumple con las hipótesis necesarias.

Proposición 6.9. *La clase* $\langle \mathrm{Ult}(\mathcal{U}), \in_{\mathcal{U}} \rangle$ *es bien fundada y tipo conjunto.*

Demostración. Primero veamos que es tipo conjunto. Fijemos $f \colon [\lambda]^{<\kappa} \to \mathsf{V}$. Dada $U \in \mathcal{U}$, podemos definir el conjunto

$$F_U = \{g \colon U \to \bigcup \mathrm{im}(f) : \forall a \in U \ (g(a) \in f(a))\}.$$

Sea $\mathcal{F} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} F_U$, por el axioma de remplazo, la clase $\{[g] : g \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto. Por otro lado,

$$\{[g] : [g] \in_{\mathcal{U}} [f]\} = \{[g] : g \in \mathcal{F}\}.$$

Para ver que es bien fundada, tomemos una sucesión $\{[f_n] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U}) : n \in \omega\}$ de modo que para cada n, $[f_{n+1}] \in_{\mathcal{U}} [f_n]$. Para cada n, sea

$$U_n = \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f_{n+1}(a) \in f_n(a)\}.$$

Por la definición de $\in_{\mathcal{U}}$, cada U_n es un elemento de $\mathcal{U}$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Tomando a en dicha intersección, encontramos una sucesión $\in$-decreciente infinita en el universo, lo cual no puede pasar, pues V es modelo de ZFC.

$\square$

Por el teorema del colapso de Mostowski, sabemos que existe una clase transitiva $M_{\mathcal{U}}$ y un isomorfismo $\pi\colon \mathrm{Ult}(\mathcal{U}) \to M_{\mathcal{U}}$. Es fácil ver que la composición $\pi \circ j_{\mathcal{U}}$ es un encaje elemental de V a $M_{\mathcal{U}}$. Diremos que dicha composición es el *encaje $\mathcal{U}$-canónico de* V.

Lema 6.10. *Sea j el encaje $\mathcal{U}$-canónico de V, entonces*

1. $\pi([d]) = j''\lambda$,
2. $\mathcal{U} = \{X \subseteq [\lambda]^{<\kappa} : j''\lambda \in j(X)\}$.

Demostración. Sea $[f] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi([f]) \in \pi([d]) &\Leftrightarrow [f] \in_{\mathcal{U}} [d]\\
&\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) \in d(a)\} \in \mathcal{U}\\
&\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) \in a\} \in \mathcal{U}\\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \lambda\ \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) = \alpha\} \in \mathcal{U} \qquad (*)\\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \lambda\ (f =_{\mathcal{U}} C_\alpha)\\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \lambda\ (\pi([f]) = \pi([C_\alpha]) = j(\alpha)).
\end{aligned}$$

$(*)$ se sigue de que $\mathcal{U}$ cumple Fodor y de que $\mathcal{U}$ tiene a todos los conos como elementos. Esto prueba (1), y (2) se sigue de la forma alternativa de escribir a $\mathcal{U}$. $\square$

Lema 6.11. *Sea $h\colon [\lambda]^{<\kappa} \to \kappa$ tal que $h(a) = \mathrm{ot}(a)$. Entonces $\lambda = \pi([h])$.*

Demostración. Sea φ un fórmula tal que

$$\varphi(\alpha, a) \text{ si y solo si } \mathrm{ot}(a) = \alpha,$$

entonces

$$\mathsf{V} \models \forall a \in [\lambda]^{<\kappa}\ (\varphi(h(a), a)),$$

por lo que

$$M_{\mathcal{U}} \models \forall a \in [j(\lambda)]^{<j(\kappa)}\ (\varphi(j(h)(a), a)).$$

Por lo tanto $j(h)$, calcula el tipo de orden en $M_{\mathcal{U}}$. Además, j es inyectivo y preserva el orden, por lo tanto, $j''\lambda$ tiene tipo de orden λ, se sigue que $j(h)(j''\lambda) = \lambda$.

Si demostramos que $M_{\mathcal{U}} \models \pi([h]) = j(h)(j''\lambda)$, entonces, por la transitividad de $M_{\mathcal{U}}$, se cumpliría que $\pi(h) = \lambda$. Basta demostrar que $[h] =_{\mathcal{U}} j_{\mathcal{U}}(h)([d])$, lo cual es sencillo, pues $C_h(a) = h$ y $d(a) = a$ por definición, entonces $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : h(a) = C_h(a)(d(a))\} = [\lambda]^{<\kappa}$, que trivialmente está en $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $\pi([h]) = \lambda$. $\square$

Con la siguiente proposición concluiremos la demostración de la primera parte del teorema.

Proposición 6.12. *Si j es el encaje $\mathcal{U}$-canónico de V, entonces j es un encaje κ, λ-supercompacto.*

Demostración. Necesitamos probar que

1. $\lambda \in j(\kappa)$;
2. si $\alpha < \kappa$, entonces $j(\alpha) = \alpha$;
3. $[M_{\mathcal{U}}]^\lambda \subseteq M_{\mathcal{U}}$.

Para probar (1), obsérvese que $[h] \in_{\mathcal{U}} [C_\kappa]$ pues, $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : h(a) \in \kappa\} = [\lambda]^{<\kappa}$.

Demostraremos (2) por inducción sobre α. Por elementalidad, $j(\emptyset) = \emptyset$. Fijemos $\alpha < \kappa$ y supongamos que para cada $\beta < \alpha$, $j(\beta) = \beta$. Veamos que $\alpha \subseteq j(\alpha)$. Sea $\beta < \alpha$, por la hipótesis de inducción, tenemos que $\pi([C_\beta]) = \beta$. Por lo que basta demostrar que $[C_\beta] \in_{\mathcal{U}} [C_\alpha]$, lo cual es cierto, pues $\{a \in [\lambda]^{<\lambda} : \beta \in \alpha\} \in \mathcal{U}$. Para la otra contención, tomemos $[f] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$ tal que $[f] \in_U [C_\alpha]$, entonces $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) \in \alpha\} \in \mathcal{U}$. Sea

$$A = \bigcap_{\beta<\alpha} \langle\beta\rangle \cap \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) \in \alpha\},$$

sabemos que $A \in \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es κ-completo. Además, para cada $\beta < \alpha$, $\langle\beta\rangle \in \mathcal{U}$. Sea $g = f \restriction A$, entonces g es una función de elección y como $\mathcal{U}$ cumple Fodor, existe $\beta < \alpha$ tal que $g^{-1}(\beta) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\{a \in A : g(a) = \beta\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es filtro, $\{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) = C_\beta(a)\} \in \mathcal{U}$, se sigue que $[f] =_{\mathcal{U}} [C_\beta]$ y $\pi([f]) = j(\beta) = \beta$. Por lo tanto, $j(\alpha) = \alpha$.

Demostremos (3). Fijemos $A \in [M_{\mathcal{U}}]^\lambda$ enumerado como $\{\pi([f_\alpha]) : \alpha < \kappa\}$, y definamos $g\colon [\lambda]^{<\kappa} \to \mathsf{V}$ como $g(a) = \{f_\alpha(a) : \alpha \in a \wedge \forall\beta < \kappa\ (f_\beta(a) = f_\alpha(a) \to \beta \in a)\}$; veremos que $\pi([g]) = A$. Para demostrar que $A \subseteq \pi([g])$, fijemos $\alpha < \kappa$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi([f_\alpha]) \in \pi([g]) &\Leftrightarrow [f_\alpha] \in_{\mathcal{U}} [g] \\
&\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f_\alpha(a) \in g(a)\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : \alpha \in a\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow \langle\alpha\rangle \in \mathcal{U},
\end{aligned}$$

la útlima equivalencia es cierta porque $\mathcal{U}$ es κ, λ-normal.

Demostremos que $\pi([g]) \subseteq A$. Fijemos f tal que $[f] \in_{\mathcal{U}} [g]$, entonces el conjunto

$$U := \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) \in g(a)\}$$

es un elemento de $\mathcal{U}$. Tomemos la función $h\colon U \to \lambda$ tal que para cada $a \in U$,

$$h(a) = \text{mín}\{\alpha : f_\alpha(a) = f(a)\}.$$

Por la definición de g, h es una función de elección, y como $\mathcal{U}$ cumple Fodor, existe β tal que $h^{-1}(\beta) \in \mathcal{U}$. Se sigue que $[f] =_{\mathcal{U}} [f_\beta]$, que es lo que queríamos demostrar. □

Con esto termina la demostración de la implicación del teorema 6.5. Para la demostración del recíproco, fijemos dos cardinales λ y κ con $\lambda \geq \kappa$ y fijemos M e i tales que $i\colon \mathsf{V} \to M$ es un encaje κ, λ-supercompacto. Sea

$$\mathcal{U} = \{A \subseteq [\lambda]^{<\kappa} : i''\lambda \in i(A)\}, \tag{$*$}$$

obsérvese que para que $\mathcal{U}$ pueda ser no vacío, se requiere que $i''\lambda \in M$, lo cual se cumple porque i es un encaje κ, λ-supercompacto. Probaremos que $\mathcal{U}$ es κ, λ-normal.

Iniciemos demostrando que $\mathcal{U}$ es κ-completo. Sea $\mu < \kappa$ y sea $Y = \{X_\alpha : \alpha < \mu\}$ un subconjunto de $\mathcal{U}$, obsérvese que como $i(\mu) = \mu$, $i(Y) = \{i(X_\alpha) : \alpha < \mu\}$. Por la definición de $\mathcal{U}$ tenemos que $i''\lambda \in i(X_\alpha)$ para cada $\alpha < \mu$, entonces $i''\lambda \in \bigcap i(Y)$. Se sigue que $i''\lambda \in i(\bigcap(Y))$ y, por lo tanto, $\bigcap Y \in \mathcal{U}$.

Veamos que todos los conos están en $\mathcal{U}$. Sea $\alpha < \lambda$, tenemos que

$$i(\langle\alpha\rangle) = \{a \in [i(\lambda)]^{<i(\kappa)} : i(\alpha) \in a\},$$

el cual es claramente un elemento de $\mathcal{U}$ pues, trivialmente, $i(\alpha) \in i''\lambda$. Obsérvese que esta definición de $i(\langle\alpha\rangle)$ se está interpretando en M y no en V.

Falta probar que $\mathcal{U}$ cumple Fodor. Fijemos $A \in \mathcal{U}$ y una función de elección $F\colon A \to \lambda$. Por elementalidad, $i(F)\colon i(A) \to i(\lambda)$ es una función de elección, en particular, $i(F)(i''\lambda) \in i''\lambda$, por lo que hay $\alpha < \lambda$ tal que $i(F)(i''\lambda) = i(\alpha)$, entonces $i''\lambda \in i(F)^{-1}(i(\alpha)) = i(F^{-1}(\alpha))$. Por lo tanto, $F^{-1}(\alpha) \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es κ, λ-normal.

Con esto terminamos la prueba del teorema 6.5. Vale la pena resaltar que en $(*)$, durante esta última demostración, estamos utilizando el encaje i para definir un conjunto dentro del universo; por ello necesitamos asumir que el encaje "existe" en el sentido de que es definible por una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos.

Supongamos que existe un cardinal supercompacto κ, sean M una clase transitiva e $i\colon \mathsf{V} \to M$ el encaje κ, λ-supercompacto garantizado por κ. Como vimos en la demostración anterior, el conjunto $\mathcal{U} = \{A \subseteq [\lambda]^{<\kappa} : i''\lambda \in i(A)\}$ es un ultrafiltro κ, λ-normal. Resulta ser que ni el modelo $M_{\mathcal{U}}$ construido a partir de este ultrafiltro, ni el encaje $\mathcal{U}$-canónico de V necesariamente coinciden con M e i, respectivamente. Pero la siguiente proposición nos asegura que, hasta cierto punto, tienen que ser parecidos.

Proposición 6.13. *Si $\kappa, \lambda, \mathcal{U}, j$ y M son como en el párrafo anterior, entonces existe un encaje elemental $l\colon M_{\mathcal{U}} \to M$ tal que $l \restriction H(\lambda^+)$ es la identidad y $l \circ j = i$.*

Demostración. Sea $l\colon M_{\mathcal{U}} \to M$ tal que para cada $[f] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$, $l(\pi([f])) = i(f)(i''\lambda)$. Para ver que los valores de l no dependen de los representantes, obsérvese que

$$\begin{aligned}\pi([f]) = \pi([g]) &\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : f(a) = g(a)\} \in \mathcal{U}\\ &\Leftrightarrow i''\lambda \in \{a \in [i(\lambda)]^{<i(\kappa)} : i(f)(a) = i(g)(a)\}\\ &\Leftrightarrow i(f)(i''\lambda) = i(g)(i''\lambda).\end{aligned}$$

Veamos que l es encaje elemental. Fijemos una fórmula φ con n variables libres y $[f_1], \ldots, [f_n] \in \mathrm{Ult}(\mathcal{U})$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Ult}(\mathcal{U}) \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) &\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : \mathsf{V} \models \varphi(f_1(a), \ldots, f_n(a))\} \in \mathcal{U}\\ &\Leftrightarrow \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : M \models \varphi(i(f_1)(i(a)), \ldots, i(f_n)(i(a)))\} \in \mathcal{U}\\ &\Leftrightarrow M \models \varphi(i(f_1)(i''\lambda), \ldots, i(f_n)(i''\lambda)).\end{aligned}$$

Es claro que $i = l \circ j$, pues si tomamos $x \in V$, entonces

$$l(j(x)) = (l(\pi([C_x]))) = i(C_x)(i''\lambda) = C_{i(x)}(i''\lambda) = i(x).$$

El hecho de que l sea la identidad en $H(\lambda^+)$, se sigue de que $[M_{\mathcal{U}}]^\lambda \subseteq M_{\mathcal{U}}$ y $[M]^\lambda \subseteq M$. □

Como ya mencionamos, los cardinales supercompactos son un tipo de cardinales grandes, para darnos una idea de su tamaño los compararemos con otros cardinales grandes más fáciles de entender.

Definición 6.14. Sea κ un cardinal no numerable.

- κ es *medible*, si existe un utlrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ que sea κ-completo y *no principal*, es decir, que no sea generado por un solo elemento.
- κ es *inaccesible*, si $2^\theta < \kappa$ para cada $\theta < \kappa$.
- κ es *fuertemente inaccesible*, si es regular e inaccesible.

El concepto de cardinal fuertemenete inaccesible es más faćil de entender y nos da una mejor idea de que tan grandes son los cardinales grandes. Además, se puede probar fácilmente que si κ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces el κ-ésimo estrato de la jerarquía de los conjuntos bien fundados es un modelo de ZFC, es decir, κ es tan grande que dicho estrato ya es suficiente para el desarrollo de la terоría de conjuntos.

Probaremos que todo cardinal supercompacto es medible, y que todo cardinal medible es fuertemente inaccesible. Aunque no lo demostraremos, es bueno saber que , bajo ciertas suposiciones, existen modelos donde hay cardinales fuertemente inaccesibles no medibles y cardinales medibles no supercompactos.

Proposición 6.15. *Todo cardinal supercompacto es medible.*

Demostración. Sea κ un cardinal supercompacto, sea M una clase transitiva y $j\colon \mathsf{V} \to M$ un encaje κ, κ-supercompacto. Sabemos que κ es no numerable, pues por la elementalidad de j, $j(n) = n$ para cada $n \in \omega$; por lo tanto, $\omega \subseteq M$ y, por elementalidad, $j(\omega) = \omega$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq \kappa : \kappa \in j(U)\}.$$

Veamos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{U}$ y que $\kappa \in \mathcal{U}$. Fijemos $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$, entonces $\kappa \in j(U_0) \cap j(U_1)$, por lo que

$$M \models j(U_0) \cap j(U_1) \neq \emptyset,$$

podemos concluir, por elementalidad, que $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. La prueba de que $\mathcal{U}$ es cerrado hacia arriba y de que todo subconjunto de κ o su complemento están en $\mathcal{U}$ se realizan de manera análoga.

Veamos que $\mathcal{U}$ es no principal. Supongamos que $\mathcal{U}$ es principal, obsérvese que como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, existe $\alpha < \kappa$ tal que $\{\alpha\}$ genera a todo $\mathcal{U}$, pues podemos partir a cualquier elemento de $U \in \mathcal{U}$ con tamaño mayor a uno en dos pedazos ajenos tal que uno de ellos está en $\mathcal{U}$. Por elementalidad,

$$M \models \forall \xi \ (\xi \in j(\{\alpha\}) \leftrightarrow \xi = j(\alpha)),$$

y sabemos que $j(\alpha) = \alpha$ .Por lo tanto $\kappa \notin j(\{\alpha\})$, lo cual es una contradicción.

Veamos que $\mathcal{U}$ es κ-completo. Sea $\mu < \kappa$ y fijemos una función $f\colon \mu \to \mathcal{U}$ y sea $X = \bigcap_{\alpha<\mu} f(\alpha)$; probaremos que $\kappa \in j(X)$. Como $j(\mu) = \mu$, por elementalidad,

$$M \models \forall x \ (x \in j(X) \leftrightarrow \forall \alpha < \mu \ (x \in j(f)(\alpha))).$$

Para terminar basta ver que para cada $\alpha < \mu$, $j(f(\alpha)) = j(f)(\alpha)$, lo cual es cierto pues para cada $\alpha < \mu$, $j(\alpha) = \alpha$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es κ-completo. □

Obsérvese que lo único que utilizamos del encaje j en la demostración anterior, es que fuera elemental y que κ fuera el punto crítico. Se puede probar, con argumentos de ultrapotencias similares a los que utilizamos en esta sección, que la existencia de un cardinal medible equivale a la existencia de un encaje elemental del universo en alguna clase transitiva con punto crítico en dicho cardinal. Al ver esta equivalencia, no debería sorprendernos que los cardinales supercompactos surgieran como una generalización de los cardinales medibles. Vale la pena comentar que los cardinales medibles reciben ese nombre pues los ultrafiltros inducen una medida que toma valores en el $\{0, 1\}$ y que tiene propiedades interesantes, se puede consultar más sobre el tema en [9].

Proposición 6.16. *Todo cardinal medible es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Fijemos un cardinal medible κ. Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ un ultrafiltro κ-completo y no principal.

Primero probaremos que es regular. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe $\theta < \kappa$ tal que $\mathrm{cof}(\kappa) = \theta$ y sea $\{\alpha_\xi : \xi < \theta\}$ una sucesión creciente y cofinal de κ. Obsérvese que como $\mathcal{U}$ es no principal, para cada $\beta < \kappa$, el conjunto $\kappa \setminus \{\beta\}$ está en $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es κ-completo, para cada $\xi < \theta$, el conjunto $U_\xi := \bigcap_{\beta < \alpha_\xi} \kappa \setminus \{\beta\}$ es un elemento de $\mathcal{U}$. Como $\theta < \kappa$, $\bigcap_{\xi < \theta} U_\xi \in \mathcal{U}$, pero la sucesión es cofinal en κ, por que $\emptyset \in \mathcal{U}$, lo cual contradice que $\mathcal{U}$ sea un filtro.

Ahora demostremos que κ es inaccesible. Fijemos $\theta < \kappa$ y supongamos, para llegar a una contradicción, que existe una función inyectiva $f\colon \kappa \to \mathcal{P}(\theta)$. Para cada $\alpha < \theta$, consideremos a los conjuntos $U^0_\alpha := \{\xi < \kappa : \alpha \in f(\xi)\}$ y $U^1_\alpha := \{\xi < \kappa : \alpha \notin f(\xi)\}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro tenemos que $U^i_\alpha \in \mathcal{U}$, para alguna $i \in 2$. Para cada α denotemos como U_α a dicho conjunto. Como $\theta < \kappa$ y $\mathcal{U}$ es κ-completo, $\bigcap_{\alpha < \theta} U_\alpha \in \mathcal{U}$, llamemos U a dicha intersección. Para llegar a una contradicción, probaremos que U tiene únicamente un elemento. Tomemos $\beta_0, \beta_1 \in U$. Obsérvese que para cada $\alpha < \theta$, si $\alpha \in f(\beta_0)$, entonces $\beta_0 \in U^0_\alpha$, por lo que $U^0_\alpha \in \mathcal{U}$, se sigue que $\beta_1 \in U^0_\alpha$, y como consecuencia $\alpha \in f(\beta_1)$. Del mismo modo si $\alpha \notin f(\beta_0)$, entonces $\alpha \notin f(\beta_1)$. Por lo tanto $f(\beta_0) = f(\beta_1)$ y, por la inyectividad de f, $\beta_0 = \beta_1$. $\square$

Corolario 6.17. *Si κ es un cardinal supercompacto y $j\colon \mathsf{V} \to M$ es un encaje elemental con punto crítico κ, entonces $j \restriction H(\kappa)$ es la función identidad.*

Demostración. Se sigue de que κ es un cardinal límite y regular junto con el lema 6.4. $\square$

Como último resultado de esta sección, probaremos la existencia de las *funciones de Laver*, las cuales son un tipo de funciones de adivinación y nos ayudarán a "encargarnos" de los forcing propios en la iteración que utilizaremos para construir un modelo del axioma de forcing propio.

Definición 6.18. Sea κ un cardinal. Decimos que $L\colon \kappa \to H(\kappa)$ es una *función de Laver*, si para cualquier cardinal regular $\lambda \geq \kappa$ y para cualquier $A \in H(\lambda)$, existe un ultrafiltro κ, λ-normal $\mathcal{U}$, tal que $j(L)(\kappa) = A$, donde j es el encaje $\mathcal{U}$-canónico de V.

Teorema 6.19. *Si κ es un cardinal supercompacto, entonces existe una función de Laver.*

Demostración. Sea φ una fórmula tal que $\varphi(\mu, g, \nu)$ si y solo si

1. μ y ν son cardinales regulares;

2. $\mu \leq \nu$;

3. $g\colon \mu \to H(\mu)$, y

4. existe $A \in H(\nu)$ tal que para cualquier ultrafiltro ν,μ-normal $\mathcal{U}$, si j es el encaje $\mathcal{U}$-canónico de V, entonces $j(g)(\mu) = A$.

Diremos que un conjunto A que sea como en (4) es un testigo para $\varphi(\mu, g, \nu)$, y denotaremos como $\nu_{g,\mu}$ al mínimo cardinal ν tal que $\varphi(\mu, g, \nu)$.

Afirmación: Si dados $\mu < \kappa$ y g, existe ν tal que $\varphi(\mu, g, \nu)$, entonces $\nu_{g,\mu} < \kappa$.

Para probar la afirmación, fijemos un cardinal $\mu < \kappa$ y $g\colon \mu \to H(\mu)$ tales que para cada $\nu < \kappa$, $\neg\varphi(\mu, g, \nu)$. Probaremos que para cada $\eta \geq \kappa$, $\neg\varphi(\mu, g, \eta)$.

Tomemos cardinales $\eta > \mu$ y $\lambda' > 2^{|\mathcal{P}([\eta]^{<\mu})|}$ y sea $i\colon \mathsf{V} \to M$ un encaje κ, λ'-supercompacto. Sabemos que

$$\mathsf{V} \models \forall \nu < \kappa \; (\neg\varphi(\mu, g, \nu))$$

entonces,

$$M \models \forall \nu < i(\kappa) \; (\neg\varphi(i(\mu), i(g), \nu)).$$

Además, $i(\mu) = \mu$, porque $\mu < \operatorname{crit}(i)$. Por el lema 6.4 y el hecho de que $g \in H(\kappa)$, $i(g) = g$. Por lo tanto,

$$M \models \forall \nu < i(\kappa) \; (\neg\varphi(\mu, g, \nu)).$$

Como λ' es lo suficientemente grande y $[M]^{\lambda'} \subseteq M$, M tiene a los ultrafiltros η,μ-normales, por lo tanto, $\varphi(\mu, g, \eta)$ es falsa en el universo. Esto termina la prueba de la afirmación.

Continuemos con la prueba del teorema. Supongamos, para llegar a una contradicción, que no existe una función de Laver. Para cada $f : \kappa \to H(\kappa)$, sea $\lambda_f > \kappa$ el mínimo cardinal regular tal que existe un conjunto $A \in H(\lambda_f)$ que es un contraejemplo. Sea λ tal que para cada $f\colon \kappa \to H(\kappa)$, $\lambda > 2^{|\mathcal{P}([\lambda_f]^{<\kappa})|}$.

Fijemos $\lhd$ un buen orden para $H(\kappa)$ con tipo de orden κ, que existe porque $|H(\kappa)| = 2^{<\kappa}$ y κ es un cardinal fuertemente inaccesible. Sea

$$B = \{\mu < \kappa : \mu \text{ es un cardinal regular y } \forall g\colon \mu \to H(\mu) \; (\exists \nu \; (\varphi(\mu, g, \nu))\}.$$

Definiremos $L\colon \kappa \to H(\kappa)$ recursivamente de modo que

- si $\mu \notin B$, entonces $L(\mu) = 0$, y
- si $\mu \in B$, entonces $L(\mu)$ es el $\lhd$-mínimo testigo para $\varphi(\mu, L \restriction \mu, \nu_{g,\mu})$.

Sea $i\colon \mathsf{V} \to M$ un encaje κ, λ-supercompacto, entonces

1. $i(\lhd) \restriction H(\kappa) = \lhd$, y
2. $i(L) \restriction \kappa = L$.

Sea $X = i(L)(\kappa)$, $X \neq 0$ pues $M \models \kappa \in i(B)$, pues estamos suponiendo que no hay funciones de Laver y para cada $F\colon \kappa \to H(\kappa)$, M tiene a todos los ultrafiltro κ, λ_f-normales. En particular,

$$M \models \varphi(\kappa, i(L) \restriction \kappa, \lambda_{i(L)\restriction\kappa}).$$

Por elementalidad,

$$M \models i(L)(\kappa) \text{ es el } i(\lhd)\text{-mínimo testigo de } \varphi(\kappa, i(L \restriction \kappa), \lambda_{i(L\restriction\kappa)})),$$

y por las observaciones anteriores,

$$M \models X \text{ es el } \lhd\text{-mínimo testigo de } \varphi(\kappa, L, \lambda_L).$$

Una vez más, como λ_L es mucho menor que λ, M tiene todos los ultrafiltros de $[\lambda_L]^{<\kappa}$, entonces

$$V \models X \text{ es testigo de } \varphi(\kappa, L, \lambda_L)$$

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{U} := \{a \in [\lambda]^{<\kappa} : i''\lambda \in i(a)\},$$

como ya vimos $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Sea j el encaje $\mathcal{U}$-canónico de V y sea l como en la proposición 6.13. Obsérvese que $j(L)(\kappa) = l^{-1}(i(L)(\kappa)) = l^{-1}(X)$. Además, $X \in H(\lambda_L) \subseteq H(\lambda)$. Por lo tanto, $l(X) = X$, y como consecuencia, $j(L)(\kappa) = X$, lo cual contradice que X sea testigo de $\varphi(\kappa, L, \lambda_L)$. La contradicción proviene de suponer que no existen funciones de Laver, por lo que hemos acabado la prueba del teorema. $\square$

Iteración con soporte numerable

A diferencia de lo que sucede con los órdenes que tienen la ccc, ser σ-cerrado no se preserva bajo iteraciones con soporte finito, pero sí bajo iteraciones con soporte numerable. Como ser forcing propio es una propiedad más fuerte que ser σ-cerrado, podría ser que para preservar forcings propios fuera necesario pedir más condiciones al soporte, pero afortunadamente, este no es el caso y probaremos que nos basta con el soporte numerable.

Definición 6.20. Sea α un ordinal límite. Consideremos una sucesión $\langle(\mathbb{P}_\beta, \mathbb{Q}_\beta) : \beta < \alpha\rangle$. Decimos que un conjunto $\mathbb{P}_\alpha$ es una *α-iteración con soporte numerable* si

1. $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$;
2. si $\beta \leq \alpha$, entonces $\mathbb{P}_\beta$ es un forcing;
3. si $\beta \leq \alpha$ y $p \in \mathbb{P}_\beta$, entonces p es una función tal que $\mathrm{dom}(p) \in [\beta]^{\leq\omega}$;
4. si $\beta < \alpha$, entonces $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$, $\dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$ y $\dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$ son $\mathbb{P}_\beta$-nombres tales que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \text{“}\langle \dot{\mathbb{Q}}_\beta, \dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\rangle \text{ es un forcing con elemento máximo } \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\text{”};$$

5. si $\beta < \alpha$, $p \in \mathbb{P}_\alpha$ y $\beta \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $p(\beta) \in \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}}_\beta)$ y $p(\beta) \neq \dot{\mathbb{1}}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$;
6. si $\beta < \alpha$ y $p \in \mathbb{P}_{\beta+1}$, entonces $p \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$;
7. si $\beta < \alpha$, $p \in \mathbb{P}_{\beta+1}$ y $\beta \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $p \restriction \beta \Vdash$ "$p(\beta) \in \dot{\mathbb{Q}}_\beta$";
8. si $\beta < \alpha$ y $p_0, p_1 \in \mathbb{P}_{\beta+1}$, entonces $p_0 \leq_{\mathbb{P}_{\beta+1}} p_1$ si y solo si
   - $\mathrm{dom}(p_1) \subseteq \mathrm{dom}(p_0)$,
   - $p_0 \restriction \beta \leq_{\mathbb{P}_\beta} p_1 \restriction \beta$ y
   - $\beta \in \mathrm{dom}(p_0) \cap \mathrm{dom}(p_1) \Rightarrow p_0 \restriction \beta \Vdash$ "$p_0(\beta) \dot{\leq}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta} p_1(\beta)$";
9. si $\beta \leq \alpha$ es un ordinal límite, entonces $p \in \mathbb{P}_\beta$ si y solo si para cualquier $\xi < \beta$, $p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$;
10. si $\beta \leq \alpha$ es un ordinal límite y $p_0, p_1 \in \mathbb{P}_\beta$, entonces

$$p_0 \leq_{\mathbb{P}_\beta} p_1 \text{ si y solo si } \forall \xi < \beta\ (p_0 \restriction \xi \leq_{\mathbb{P}_\xi} p_1 \restriction \xi).$$

Tenemos un resultado similar al de iteraciones con soporte finito sobre la preservación de condiciones de cadena, con la diferencia de que la cardinalidad que se preserva depende de la longitud de la iteración.

Proposición 6.21. *Sea $\kappa > \omega_1$ un cardinal regular y $\mathbb{P}_\kappa$ una iteración con soporte numerable tal que para toda $\beta < \kappa$, $\mathbb{P}_{\beta+1}$ tiene la κ-cc. Entonces $\mathbb{P}_\kappa$ tiene la κ-cc.*

Demostración. Sea $S = \{\alpha \in \kappa : \mathrm{cof}(\alpha) > \omega\}$. El conjunto S es trivialmente estacionario pues dentro de cada club podemos construir una sucesión creciente de tamaño ω_1 y su límite estará en dicho club. Consideremos un conjunto $A := \{p_\xi : \xi < \kappa\}$ contenido en $\mathbb{P}_\kappa$ y enumeremos a S como $\{\alpha_\xi : \xi < \kappa\}$. Como el dominio de todas las condiciones de $\mathbb{P}_\kappa$ es numerable, para cada $\xi < \kappa$, $\mathrm{dom}(p_\xi) \cap \alpha_\xi$ está acotado en α_ξ. Sea $f : S \to \kappa$ tal que $f(\alpha_\xi)$ es cota superior para $\mathrm{dom}(p_\xi) \cap \alpha_\xi$ dentro de α_ξ, entonces, por el lema de Fodor, existe $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}(\alpha)$ es estacionario.

Como los conjuntos estacionarios son no acotados, podemos construir fácilmente un conjunto $S' := \{\beta_\delta \in f^{-1}(\alpha) : \delta < \kappa\}$ tal que para cada $\delta < \kappa$, $\mathrm{dom}(p_{\beta_\delta}) \subseteq \beta_{\delta+1}$. Como $\mathbb{P}_\alpha$ tiene la κ-cc, existen δ_0, δ_1 y $p \in P_\alpha$ tales que $\delta_0 < \delta_1$ y $p \leq_{\mathbb{P}_\alpha} p_{\beta_{\delta_0}} \restriction \alpha, p_{\beta_{\delta_1}} \restriction \alpha$. Obsérvese que $\mathrm{dom}(p_{\beta_{\delta_0}}) \cap (\mathrm{dom}(p_{\beta_{\delta_1}}) \setminus \alpha) = \emptyset$, por lo tanto, $p \cup p_{\delta_0} \restriction (\kappa \setminus \alpha) \cup p_{\delta_1} \restriction (\kappa \setminus \alpha) \leq_{\mathbb{P}_\kappa} p_{\delta_0}, p_{\delta_1}$. Por lo tanto, A no es una anticadena, por lo que toda cadena de $\mathbb{P}_\kappa$ tiene tamaño menor que κ. $\square$

Las iteraciones con soporte numerable preservan forcings propios en el mismo sentido que las iteraciones con soporte finito preservan forcings con la ccc. Para la demostración necesitaremos una equivalencia de la definición de forcing propio que hable de submodelos elementales, pero no de clubs.

Lema 6.22. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Entonces $\mathbb{P}$ es propio si y solo si existe un cardinal regular θ con $\mathbb{P} \in H(\theta)$ tal que para cualquier submodelo elemental numerable M de $H(\theta)$ con $\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in M$ y para cualquier $p \in \mathbb{P} \cap M$, existe una condición $q \leq p$ que sea $(M, \mathbb{P})$-genérica.*

Demostración. El recíproco es claro pues, para cualquier θ, el conjunto de todos los submodelos elementales numerables de $H(\theta)$ es un club. Demostremos la otra implicación. Sea θ_0 el mínimo cardinal tal que $\mathbb{P} \in H(\theta_0)$. Sea θ un cardinal regular lo suficientemente grande tal que $H(\theta_0) \in H(\theta)$, fijemos un submodelo elemental numerable M de $H(\theta)$ con $\mathbb{P}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{P}} \in M$. Obsérvese que en $H(\theta)$ se cumple que existe un cardinal regular μ con $\mathbb{P} \in H(\mu)$ y un club C de $H(\mu)$ tal que para cada $N \in C$, si $p \in N \cap \mathbb{P}$, entonces p se puede extender a una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica. Por elementalidad, podemos tomar dichos μ y C en M; además, por el teorema 5.16, podemos suponer que existe $g\colon [H(\mu)]^{<\omega} \to H(\mu)$ en M tal que C es la familia de subconjuntos numerables de $H(\mu)$ cerrados bajo g.

Sea $N = M \cap H(\mu)$, veamos que $N \in C$. Sea $a \in [N]^{<\omega}$, como a es finito, $a \in M$, entonces $g(a) \in M \cap H(\mu) = N$. Resta ver que podemos extender cualquier condición de $M \cap \mathbb{P}$ a una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica. Fijemos $p \in M \cap \mathbb{P}$, como $\mathbb{P} \subseteq H(\mu)$, $p \in N$, entonces existe una condición $q \leq p$ que es $(N, \mathbb{P})$-genérica. Sabemos que $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \subseteq H(\mu)$, se sigue que q también es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica.

□

Si un cardinal θ cumple el lema anterior, diremos que θ es testigo de que $\mathbb{P}$ sea propio. Como era de esperarse, antes de probar que la iteración con soporte numerable de forcings propios es propia, demostraremos que el resultado se cumple para la iteración de dos pasos.

Lema 6.23. *Sea $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ una iteración de dos pasos tal que $\mathbb{P}$ es propio y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}$ es propio". Entonces $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es un forcing propio.*

Demostración. Sea θ un cardinal testigo de que $\mathbb{P}$ sea propio y tal que $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in H(\theta)$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ forza que θ es testigo de que $\dot{\mathbb{Q}}$ sea propio.

Afirmación. Sea M un submodelo elemental numerable de $H(\theta)$ con $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}, \dot{\leq}_{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}}, \dot{\mathbb{1}}_{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}} \in M$. Sea $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ tal que p es una condición $(M, \mathbb{P})$-genérica y $\dot{q} \in M$. Entonces existe $\dot{r}$ tal que

$$p \Vdash \text{“}\dot{r} \in \dot{\mathbb{Q}} \text{ y } \dot{r} \leq \dot{q} \text{ y } \dot{r} \text{ es una condición } (M[\dot{\Gamma}], \dot{\mathbb{Q}})\text{-genérica”}.$$

Demostremos la afirmación. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico con $p \in G$. Por la proposición 5.32, $M[G] \preceq H(\theta)[G]$, además $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}), \mathrm{val}_G(\dot{q}) \in M[G]$. Como $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}) \in (H(\theta))^{V[G]}$ y θ es testigo de que $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$ es propio, existe un elemento de $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$ que extiende a $\mathrm{val}_G(\dot{q})$ y que es $(M[G], \mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}))$-genérico. Como G puede ser un filtro cualquiera con $p \in G$,

$$p \Vdash \text{“existe } r \text{ tal que } r \in \dot{\mathbb{Q}} \text{ y } r \leq \dot{q} \text{ y } r \text{ es una condición } (M[\dot{\Gamma}], \dot{\mathbb{Q}})\text{-genérica”},$$

el principio de maximalidad nos garantiza el nombre buscado, lo que termina la prueba de la afirmación.

Fijemos un submodelo elemental numerable M de $H(\theta)$ tal que $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}}, \leq_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}} \in M$ y fijemos $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}} \cap M$, veamos que podemos extender $(p, \dot{q})$ a una condición $(M, \mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}})$-genérica. Como θ es testigo de que $\mathbb{P}$ sea propio, existe una condición $p_0 \leq p$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérica. Sea $\dot{q}_0 \in \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}})$ la condición garantizada en la afirmación anterior. Es claro que $(p_0, \dot{q}_0) \leq (p, \dot{q})$, veamos que $(p_0, \dot{q}_0)$ es una condición $(M, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérica.

Sea $D \in M$ un subconjunto denso de $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ y sea $G * H$ un filtro $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-genérico sobre V con $(p_0, \dot{q}_0) \in G * H$. Podemos definir, en M, el nombre

$$\dot{E} = \{(\dot{r}, s) : (s, \dot{r}) \in D\},$$

la densidad de D implica que $\mathrm{val}_G(\dot{E})$ es un subconjunto denso de $\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})$. Nótese que $\mathrm{val}_G(\dot{E}) \in M[G]$, entonces $M[G] \cap \mathrm{val}_G(\dot{E}) \cap H \neq \emptyset$, fijemos $\dot{r}_1 \in M$ tal que $\mathrm{val}_G(\dot{r}_1)$ está en dicha intersección. Como $\mathrm{val}_G(\dot{r}_1) \in \mathrm{val}_G(\dot{E})$, existes $(s, \dot{r}_2) \in D$ tal que

$$H(\theta)[G] \models s \in G \wedge \mathrm{val}_G(\dot{r}_2) = \mathrm{val}_G(\dot{r}_1),$$

entonces existe $p_1 \leq p_0$ en G tal que existe $(s, \dot{r}_2) \in D$ de modo que

$$H(\theta) \models p_1 \Vdash \text{“}s \in \dot{\Gamma} \wedge \dot{r}_2 = \dot{r}_1\text{”}.$$

Obsérvese que el nombre $\dot{\Gamma}$ puede ser definido en M, entonces, por elementalidad, podemos tomar $(s, \dot{r}_2) \in D \cap M$ de modo que

$$H(\theta) \models p_1 \Vdash \text{“}s \in \dot{\Gamma} \wedge \dot{r}_2 = \dot{r}_1\text{”}.$$

Veamos que $(s, \dot{r}_2) \in G * H$. Como $p_1 \in G$, $s \in G$, del mismo modo, como $p_1 \in G$, $\mathrm{val}_G(\dot{r}_2) = \mathrm{val}_G(\dot{r}_1) \in H$. Con esto concluimos que $(s, \dot{r}_2) \in M \cap D \cap G * H$.

Como todo filtro $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-genérico es de la forma $G * H$, $(p_0, \dot{q}_0)$ forza que cualquier filtro genérico intersecta a D dentro de M. Por lo tanto $(p_0, \dot{q}_0)$ es una condición $(M, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérica y $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es un forcing propio. □

El teorema principal de la sección se seguirá de la generalización de la afirmación utilizada en la prueba del lema anterior. Sea $\mathbb{P}_\alpha$ un α-iteración con soporte numerable. Dado $\beta < \alpha$, podemos encontrar un $\mathbb{P}_\alpha$-nombre $\dot{\mathbb{R}}_\beta$ tal que para cualquier filtro G_β, $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre V,

$$\mathsf{V}[G_\beta] \models \mathrm{val}_{G_\beta}(\dot{\mathbb{R}}_\beta) = \{p \upharpoonright [\beta, \alpha) : p \in \mathbb{P}_\alpha \wedge p \upharpoonright \alpha \in G_\beta\}.$$

Decimos que dicho nombre es un cociente de la iteración. El forcing $\mathbb{P}_\alpha$ se puede encajar densamente en $\mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{R}}_\beta$, por lo que es equivalente forzar con cualquiera de ellos. Para evitar confusiones escribiremos $\Vdash_\beta$ para denotar que estamos forzando con $\mathbb{P}_\beta$ y denotaremos como $\dot{\Gamma}_\beta$ al nombre canónico para los filtros $\mathbb{P}_\beta$-genéricos.

Teorema 6.24. *Sea $\mathbb{P}_\alpha$ una α-iteración con soporte numerable tal que para culquier $\beta < \alpha$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ es propio". Sea θ un cardinal regular lo suficientemente grande tal que para cada $\beta < \alpha$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta}$ forza que θ es testigo de que $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ es propio y sea M un submodelo elemental numerable de $H(\theta)$ con $\mathbb{P}_\alpha, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha}, \leq_{\mathbb{P}_\alpha} \in M$. Sean $\beta < \alpha$ en M, $p \in \mathbb{P}_\beta$ una condición $(M, \mathbb{P}_\beta)$-genérica y sea $\dot{q} \in M$ un $\mathbb{P}_\beta$-nombre tal que $p \Vdash_\beta$ "$\dot{q} \in \dot{\mathbb{R}}_\beta$". Entonces existe $r \in \mathbb{P}_\alpha$ tal que r es una condición $(M, \mathbb{P}_\alpha)$-genérica, $r \restriction \beta = p$ y $p \Vdash_\beta$ "$r \restriction [\beta, \alpha) \leq \dot{q}$".*

Demostración. Realizaremos la demostración por inducción transfinita. El paso sucesor se sigue de la demostración del lema anterior. Para el paso límite, fijemos un ordinal límite α tal que para cualquier $\xi < \alpha$, el enunciado es cierto. Fijemos β, M, p y $\dot{q}$ como en las hipótesis del lema. Sea $\gamma = \alpha \cap M$, como M es numerable, existe una sucesión creciente $\{\beta_n : n \in \omega\}$ cofinal en γ tal que $\beta_0 = \beta$. Enumeremos como $\{\dot{\xi}_n : n \in \omega\}$ al conjunto de todos los $\mathbb{P}_\alpha$-nombres $\dot{\xi} \in M$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash_\alpha$ "$\dot{\xi}$ es un ordinal". Encontraremos la condición $(M, \mathbb{P}_\alpha)$-genérica buscada utilizando la proposición 5.35.

Construiremos una sucesión de ternas $\{(p_n, \dot{q}_n, \dot{\mu}_n) : n \in \omega\}$ tal que $p_0 = p$, $p \Vdash_{\beta_0}$ "$\dot{q}_0 \leq \dot{q}$" y para cada $n \in \omega$,

1. $p_n \in \mathbb{P}_{\beta_n}$, p_n es una condición $(M, \mathbb{P}_{\beta_n})$-genérica y $\dot{q}_n$ y $\dot{\mu}_n$ son $\mathbb{P}_{\beta_n}$-nombres;
2. $p_n \Vdash_{\beta_n}$ "$\dot{q}_n \in \dot{\mathbb{R}}_{\beta_n} \cap M[\dot{\Gamma}_{\beta_n}] \wedge \dot{\mu}_n \in M[\dot{\Gamma}_{\beta_n}] \wedge \dot{q}_n \Vdash_{\dot{\mathbb{R}}_{\beta_n}}$ "$\dot{\xi}_n = \dot{\mu}_n$" $\wedge (n > 0 \to \dot{q}_n \leq \dot{q}_{n-1} \restriction [\beta_n, \alpha])$"[1];
3. $p_n \Vdash_{\beta_n}$ "$p_{n+1} \restriction [\alpha_n, \alpha_{n+1}) \leq \dot{q}_n \restriction \alpha_{n+1}$".

Realicemos la construcción. Para el paso base ya tenemos definido p_0, tomemos un filtro G_{β_0}, $\mathbb{P}_{\beta_0}$-genérico con $p_0 \in G_{\beta_0}$. Denotemos como $\mathbb{R}_{\beta_0}$ a $\mathrm{val}_{G_{\beta_0}}(\dot{\mathbb{R}}_{\beta_0})$ y como q a $\mathrm{val}_{G_{\beta_0}}(\dot{q})$. Sea H un filtro $\mathbb{R}_{\beta_0}$-genérico con $q \in H$, sabemos que existe un ordinal $\xi \in H(\theta)[G_{\beta_0}]$ tal que $\mathrm{val}_{G_{\beta_0} * H}(\dot{\xi}_0) = \xi$, entonces existe $q' \in H$ con $q' \leq q$ tal que $q' \Vdash_{\mathbb{R}_{\beta_0}}$ "$\dot{\xi}_0 = \xi$". Por la elementalidad entre M y H, podemos tomar $\mathbb{P}_{\beta_0}$-nombres $\dot{\mu}_0$ y $\dot{q}_0$ en M que cumplan (2). Para el paso inductivo, supongamos que ya hemos construido p_n y repitamos la construcción del paso base cambiando p_0 por p_n y $\dot{q}$ por $\dot{q}_n$, esto nos da $\dot{q}_n$ y $\dot{\mu}_n$ que cumplen (1) y (2). Para obtener una condición p_{n+1} que cumpla (1) y (3) basta aplicar la hipótesis de la inducción transfinita a p_n, $\dot{q}_n$, y β_{n+1}.

Ahora que tenemos construida dicha sucesión, fijemos $r = \bigcup_{n \in \omega} p_n$, entonces $r \in \mathbb{P}_\gamma$, por lo que $r \in \mathbb{P}_\alpha$, resta ver que r es la condición buscada. Es claro que $r \restriction \beta = p$, además, no solo se cumple que $p \Vdash_\beta$ "$r \restriction [\beta, \alpha) \leq \dot{q}$", sino que para cada $n \in \omega$,

$$p_n \Vdash_{\beta_n} \text{"} r \restriction [\beta_n, \alpha) \leq \dot{q}_n \text{"}. \tag{$*$}$$

[1] La expresión $\dot{q}_n \Vdash_{\dot{\mathbb{R}}_{\beta_n}}$ "$\dot{\xi}_n = \dot{\mu}_n$" significa que dado un filtro G_{β_n}, $\mathbb{P}_{\beta_n}$-genérico sobre V, y dado un filtro H, $\mathrm{val}_{G_{\beta_n}}(\dot{\mathbb{R}}_{\beta_n})$-genérico sobre $\mathsf{V}[G_{\beta_n}]$ con $\mathrm{val}_{G_{\beta_n}}(\dot{q}_n) \in H$, $\mathrm{val}_{G_{\beta_n}}(\dot{\mu}_n) = \mathrm{val}_{G_{\beta_n} * H}(\dot{\xi}_n)$.

Obsérvese que todo ordinal que pueda aparecer en alguna extensión de M tiene un nombre $\dot{\xi}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash_\alpha \text{“}\dot{\xi} \text{ es un ordinal”}.$$

Entonces, para ver que r es una condición $(M, \mathbb{P}_\alpha)$-genérica, basta demostrar que para cualquier filtro G y cualquier $n \in \omega$, $\mathrm{val}_G(\dot{\xi}_n) \in M$. Esto se sigue de que si G_{β_n} es la retricción de G a $\mathbb{P}_{\beta_n}$, entonces $r \restriction \beta_n \in G_{\beta_n}$, y como se cumple $(*)$ y $r \restriction \beta_n$ es una condición $(M, \mathbb{P}_{\beta_n})$-genérica, $\mathrm{val}_G(\dot{\xi}_n) = \mathrm{val}_{G_{\beta_n}}(\dot{\mu}_n) \in M$.

□

Corolario 6.25. *Sea $\mathbb{P}_\alpha$ una α-iteración con soporte numerable tal que para culquier $\beta < \alpha$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash$ “$\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ es propio”. Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ es un forcing propio.*

Demostración. La prueba se sigue de tomar $\beta = 0$ en el teorema anterior. □

Al ver el enunciado de este corolario, podría parecer que demostrar el teorema anterior es mucho más de lo que necesitamos para la prueba del corolario. Pero si uno trata de demostrar el corolario de manera inductiva, notará que, de cierto modo, se necesita garantizar que las condiciones de iteraciones intermedias del forcing se puedan completar y extender a condiciones genéricas. Esta es la idea detrás del teorema y la razón por la que fue necesario probarlo.

La consistencia del Axioma de Forcing Propio

Como mencionamos anteriormente, el Axioma de Forcing Propio, denotado como PFA, es el enunciado que asegura que si $\mathbb{P}$ es un forcing propio y $\mathcal{D}$ es una familia de ω_1 subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro G de $\mathbb{P}$ que intersecta a todos los elementos de D. La idea para probar su consistencia relativa es similar a la utilizada para el axioma de Martin; construiremos una iteración con soporte numerable de tal modo que en algún momento nos “encargaremos” de cada forcing propio del modelo base.

En adelante asumiremos la existencia de un cardinal supercompacto, al cual denotaremos como κ. Primero realizaremos la construcción del forcing propio con el que forzaremos. Sea $L\colon \kappa \to H(\kappa)$ una función de Laver y construyamos una κ-iteración con soporte numerable $\mathbb{P}_\kappa$. Fijemos $\beta < \kappa$ y supongamos que ya hemos construido $\mathbb{P}_\beta$, definamos $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ del siguiente modo:

- si $L(\beta) = (\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathcal{D}})$ y, $\dot{\mathbb{Q}}$ y $\dot{\mathcal{D}}$ son $\mathbb{P}_\beta$-nombres tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta}$ forza que $\dot{\mathbb{Q}}$ es un forcing propio y $\dot{\mathcal{D}}$ es una familia de menos de κ densos de $\dot{\mathbb{Q}}$, entonces $\dot{\mathbb{Q}}_\beta = \dot{\mathbb{Q}}$;
- $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash$ “$\dot{\mathbb{Q}}_\beta = \{\emptyset\}$”, en otro caso.

Como la iteración con soporte numerable de forcings propios es propio, podemos asegurar que el paso $\mathbb{P}_\kappa$ de la iteración es un forcing propio. Además, cada $\mathbb{P}_\beta$, con $\beta < \kappa$, es de tamaño menor que κ, demostremos esto último por inducción transfinita.

Es claro que $|\mathbb{P}_0| < \kappa$. Supongamos que $|\mathbb{P}_\beta| < \kappa$. Por definición todo elemento de $\mathbb{P}_{\beta+1}$ es o un elemento de $\mathbb{P}_\beta$, o un elemento de $\mathbb{P}_\beta$ unido con un elemento de $\{\beta\} \times \mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}}_\beta)$. Claramente $\{\emptyset\}$ tiene tamaño menor que κ y todo elemento en la imagen de L tiene tamaño hereditariamente menor que κ. Por lo tanto, $|\{\beta\} \times \dot{\mathbb{Q}}_\beta| < \kappa$ y $|\mathbb{P}_{\beta+1}| < \kappa$. El paso límite se sigue de que por la regularidad de κ, si $\beta < \kappa$, entonces existe un cardinal $\mu < \kappa$ tal que $\mathbb{P}_\beta$ tiene a lo más $|\mu^\omega \times \mu^\omega| < \kappa$ elementos.

Como consecuencia tenemos que todo $\mathbb{P}_\beta$ con $\beta < \kappa$ tiene la κ-cc, por lo tanto, por la proposición 6.21, $\mathbb{P}_\kappa$ tiene la κ-cc. Además, κ es un cardinal regular, entonces κ preserva ordinales mayores o iguales a κ.

Teorema 6.26. *Sean G un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico, $\mathbb{Q}$ un forcing propio en $\mathsf{V}[G]$ y $\mathcal{D}$ una familia de menos de κ densos de $\mathbb{Q}$ en $\mathsf{V}[G]$. Entonces existe un filtro de $\mathbb{Q}$ en $\mathsf{V}[G]$ que intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$.*

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que el orden $\mathbb{Q}$ es un ordinal α_0 equipado con un orden $\trianglelefteq$. Podemos garantizar que existen nombres $\dot{\mathbb{Q}}$ y $\dot{\mathcal{D}}$ tales que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \text{“}\dot{\mathbb{Q}} \text{ es propio y } \dot{\mathcal{D}} \text{ es una colección de menos de } \kappa \text{ densos de } \dot{\mathbb{Q}}\text{”}.$$

En efecto, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa}$ forza que existen $\leq_{\alpha_0}$ y $\mathcal{D}_0$ tales que

- $\langle \alpha_0, \leq_{\alpha_0} \rangle$ es un forcing propio;
- $\mathcal{D}_0$ es una colección de menos de κ densos de $\langle \alpha_0, \leq_{\alpha_0} \rangle$, y
- si $\langle \alpha_0, \underset{\sim}{\dot{\trianglelefteq}} \rangle$ es un forcing propio y $\underset{\sim}{\dot{\mathcal{D}}}$ es una colección de menos de κ densos de $\underset{\sim}{\dot{\mathbb{Q}}}$, entonces $\underset{\sim}{\dot{\trianglelefteq}} = \leq_{\alpha_0}$ y $\underset{\sim}{\dot{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}_0$.

Sea θ un cardinal regular tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa}$ forza que θ es testigo de que $\dot{\mathbb{Q}}$ sea propio y sea $\lambda > \theta \cdot \kappa$. Sea $L\colon \kappa \to H(\kappa)$ una función de Laver, entonces existe una clase transitiva M y un encaje κ, λ-supercompacto $j\colon \mathsf{V} \to M$ tal que $j(L)(\kappa) = (\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathcal{D}})$. Tenemos que $\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathcal{D}} \in M$, pues M es transitivo. Obsérvese que, por elementalidad,

$$M \models j(\mathbb{P}_\kappa) \text{ es una iteración de longitud } j(\kappa),$$

dicha iteración se construye interpretando la construcción de $\mathbb{P}_\kappa$ en M utilizando $j(L)$ en lugar de L y $j(\kappa)$ en lugar de κ. Pero recordemos que $j(L) \restriction \kappa = L$, por lo que para cada $\alpha < \kappa$, $\mathbb{P}_\alpha$ es el α-ésimo paso de la iteración $j(\mathbb{P}_\kappa)$. Además, el conjunto $\mathbb{P}_\kappa$ obtenido como el paso κ de la iteración en M coincide con el $\mathbb{P}_\kappa$ del universo y, por lo tanto, G es un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M.

Trabajemos en M. Sabemos que la iteración $j(\mathbb{P}_\kappa)$ tiene longitud mayor a κ y utiliza a $j(L)$ como guía, veremos que el conjunto $\dot{\mathbb{Q}}_\kappa$, correspondiente a esta iteración, es el nombre $\dot{\mathbb{Q}}$ que habíamos fijado. Como ya tenemos que $j(L)(\kappa) = (\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathcal{D}})$, basta demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. En M se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa}$ forza que $\dot{\mathbb{Q}}$ es un forcing propio.

Demostremos la afirmación. Sea G_0 un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre V, veamos que, en $M[G_0]$, θ es testigo de que $\mathrm{val}_{G_0}(\dot{\mathbb{Q}})$ es propio. Para ello basta probar que $(H(\theta))^{\mathsf{V}[G_0]} = (H(\theta))^{M[G_0]}$ y que $([H(\theta)]^{\leq\omega})^{\mathsf{V}[G_0]} = ([H(\theta)]^{\leq\omega})^{M[G_0]}$.

Primero veremos que $[M[G_0]]^\lambda \subseteq M[G_0]$. Sea $\{\mathrm{val}_{G_0}(\dot{x}_\xi) : \xi < \lambda\}$ una familia de elementos de $M[G_0]$. Como $[M]^\lambda \subseteq M$, $\{(\dot{x}_\xi : \xi < \lambda\} \in M$, entonces el conjunto $\dot{X} := \{(\dot{x}_\xi, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa}) : \xi < \lambda\}$ está en M. Por lo tanto, $\mathrm{val}_{G_0}(\dot{X}) = \{\mathrm{val}_{G_0}(\dot{x}_\xi) : \xi < \lambda\}$ y es un elemento de $M[G_0]$.

Es claro que $(H(\theta))^{M[G_0]} \subseteq (H(\theta))^{\mathsf{V}[G_0]}$. Para probar la otra contención, supongamos que existe $x \in (H(\theta))^{\mathsf{V}[G_0]} \setminus (H(\theta))^{M[G_0]}$. Por definición $|\mathrm{trcl}(x)| < \theta < \lambda$, tomemos $y \in \mathrm{trcl}(x)$ el $\in$-mínimo elemento de $\mathrm{trcl}(x)$ tal que $y \notin M[G_0]$. Tenemos que $|y| < \lambda$, por lo que $\{z : z \in y\}$ es una colección de menos de λ elementos de $M[G_0]$, entonces $y \in M[G_0]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(H(\theta))^{\mathsf{V}[G_0]} \subseteq (H(\theta))^{M[G_0]}$. Finalmente, como $\lambda > \omega$, $([H(\theta)]^{\leq\omega})^{\mathsf{V}[G_0]} = ([H(\theta)]^{\leq\omega})^{M[G_0]}$. Esto termina la prueba de la afirmación.

Para nuestro siguiente argumento uitilizaremos que si $p \in \mathbb{P}_\kappa$, entonces $j(p) = p$. Esto se sigue de que $j \restriction H(\kappa)$ es la identidad y de que $p \in H(\kappa)$. En efecto, $\mathrm{im}(L) \subseteq H(\kappa)$ y, como κ es un cardinal regular, $\mathrm{dom}(p) \in H(\kappa)$.

Como $j(\mathbb{P}_\kappa)$ es una iteración en M, podemos concluir que, dentro de M, $\mathbb{P}_{\kappa+1} = \mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathbb{Q}}$. Así, $j(\mathbb{P}_\kappa) = \mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathbb{Q}} * \dot{\mathbb{R}}$, para algún $\dot{\mathbb{R}}$. Sea $H_1 * H_2$ un filtro $j(\mathbb{P}_\kappa)$-genérico sobre V, entonces el filtro $H := G * H_1 * H_2$ es un filtro $j(\mathbb{P}_\kappa)$-genérico sobre V, estos filtros también son genéricos sobre M. Obsérvese que, por elementalidad, si $\dot{x}$ es un $\mathbb{P}_\kappa$-nombre, entonces $j(\dot{x})$ es un $j(\mathbb{P}_\kappa)$-nombre. Además, si $p \in G$, entonces $j(p) \in G * H_1 * H_2$, esto porque $j(p) = p$ y $p \in G$.

Podemos levantar el encaje j a un nuevo encaje $j^*\colon \mathsf{V}[G] \to M[H]$ tal que $j^*(\mathrm{val}_G(\dot{x})) = \mathrm{val}_H(j(\dot{x}))$. Veamos que j^* está bien definido, para ello basta probar que si $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son tales que $\mathrm{val}_G(\dot{x}) = \mathrm{val}_G(\dot{y})$, entonces $\mathrm{val}_H(j(\dot{x})) = \mathrm{val}_H(j(\dot{y}))$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{x} = \dot{y}$", entonces $j(p) \Vdash$ "$j(\dot{x}) = j(\dot{y})$" y, del párrafo anterior, sabemos que $j(p) \in H$. Por lo tanto, $\mathrm{val}_H(j(\dot{x})) = \mathrm{val}_H(j(\dot{y}))$. La prueba de que j^* es un encaje elemental se sigue de la misma manera.

Sabemos que el filtro H_1 es un filtro $(\mathbb{P}_\kappa)$-genérico sobre V, entonces $H_1 \cap D \neq \emptyset$, para cada $D \in \mathcal{D}$. Consideremos $K' := \{j^*(p) : p \in H_1\}$, por nuestra elección de λ, $|K'| < \lambda$, entonces $K' \in M[H]$, pues $[M[H]]^\lambda \subseteq M[H]$. Dentro de $M[H]$, sea K el $j^*(\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}))$-filtro generado por K'. Por ahora asumamos que K intersecta a todos los elementos de $j^*(\mathrm{val}_G(\dot{\mathcal{D}}))$, entonces

$$M[H] \models \text{ existe un filtro de } j^*(\mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}})) \text{ que intersecta a todos los elementos de } j^*(\mathrm{val}_G(\dot{\mathcal{D}})),$$

y por elementalidad,

$$V[G] \models \text{ existe un filtro de } \mathrm{val}_G(\dot{\mathbb{Q}}) \text{ que intersecta a todos los elementos de } \mathrm{val}_G(\dot{\mathcal{D}}).$$

Por lo tanto $V[G] \models \mathsf{PFA}$. Falta probar que dicho conjunto K sí intersecta a todos los elementos de $j^*(\mathrm{val}_G(\dot{\mathcal{D}}))$.

Obsérvese que si $\alpha < \kappa$, entonces, por elementalidad, $j(\check{\alpha})$ es el $j(\mathbb{P}_\kappa)$-nombre canónico para $j(\alpha)$. Pero $\alpha < \mathrm{crit}(j)$, entonces $j(\check{\alpha})$ es el $j(\mathbb{P}_\kappa)$-nombre canónico para α. Por definición, $j^*(\mathrm{val}_G(\check{\alpha})) = \mathrm{val}_H(j(\check{\alpha}))$. Por lo tanto, $j^*(\alpha) = \alpha$, para toda $\alpha < \kappa$. Sabemos que existe $\mu < \kappa$ tal que $|\mathcal{D}| = \mu$, entonces existe una función $f\colon \mu \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ tal que $\mathcal{D} = \mathrm{im}(f)$. Por elementalidad,

$$M[H] \models \mathrm{dom}(j^*(f)) = \mu \text{ y } j^*(\mathcal{D}) = \mathrm{im}(j(f)).$$

Es claro que si tomamos $\alpha < \kappa$ y $p \in f(\alpha)$, entonces $j^*(p) \in j^*(f)(j^*(\alpha))$, pero $j^*(\alpha) = \alpha$, por lo tanto, $j^*(p) \in j^*(f)(\alpha)$. Podemos concluir que si $p \in H_1 \cap f(\alpha)$, entonces $j^*(p) \in K \cap j^*(f)(\alpha)$, por lo tanto, K intersecta a todos los elementos de $\mathcal{D}$. □

Corolario 6.27. *Si G es un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre V, entonces $\mathsf{V}[G] \models \mathsf{PFA}$.*

Demostración. Por el teorema anterior, basta probar que $\mathsf{V}[G] \models \kappa = \omega_2$. Trabajemos en $\mathsf{V}[G]$. Sea $\alpha < \kappa$ un ordinal infinito y consideremos el forcing

$$\mathrm{Col}(\alpha, \omega_1) := \{p; \omega_1 \to \alpha : |p| \leq \omega\},$$

ordenado por la contención inversa. Este forcing es σ-cerrado, por lo que es propio. Para cada $\beta < \alpha$, sea

$$D_\beta = \{p \in \mathrm{Col}(\alpha, \omega_1) : \beta \in \mathrm{im}(p)\}.$$

Cada uno de estos conjuntos es denso en $\mathrm{Col}(\alpha, \omega_1)$ y en total hay menos de κ de ellos, entonces existe un filtro G que los intersecta a todos. Se sigue que $\bigcup G$ es una función con dominio contenido en ω_1 e imagen α, por lo tanto, $|\alpha| \leq \omega_1$.

Como κ es regular y $\mathbb{P}_\kappa$ tiene la κ-cc, κ es un cardinal en $\mathsf{V}[G]$. Por lo tanto, $\mathsf{V}[G] \models \kappa = \omega_2$. □

Con esto completamos la prueba del enunciado principal del texto. Vale la pena resaltar que aunque el camino fue largo, no era posible tomar atajos si lo que queríamos era lograr entender la prueba de la consistencia del axioma de forcing propio. Esta demostración utiliza conceptos básicos de lógica y números ordinales, necesita fuertemente del manejo de submodelos elementales, hace uso de los colapsos y órdenes bien fundados, y se basa en la técnica de iteraciones de longitud infinita que introducimos con el axioma de Martin. Se espera que el análisis llevado a cabo en este texto sobre cada uno de estos temas sea suficiente para que el lector, más allá de entender una prueba, ahora tenga bases firmes para adentrarse en las profundidades del complejo, variado y bello universo de la teoría de conjuntos.

Algunas aplicaciones del axioma de forcing propio

Terminaremos el texto enunciando un par de aplicaciones del axioma de forcing propio. Esto nos servirá para darnos una idea de la importancia de la consistencia de este axioma, no obstante, no realizaremos ninguna prueba en esta sección. Nuestro primer resultado es conocido como el axioma de coloraciones abiertas y se denota como OCA.

Dado un conjunto cualquiera X, podemos pensar que una función $c\colon [X]^2 \to 2$ es una coloración que pinta, con dos colores, a los subconjuntos de X con 2 elementos. En este sentido, podemos decir que un subconjunto Y de X es *monocromático*, si existe $i \in 2$ tal que para cualquier conjunto $\{y_0, y_1\} \in [Y]^2$, $c(\{y_0, y_1\}) = i$.

Teorema 6.28 (Ramsey)**.** *Dada una coloración $c\colon [\omega]^2 \to \omega$, existe un conjunto monocromático de ω de tamaño ω.*

Por muy sencillo que parezca, el teorema de Ramsey no se cumple para la mayoría de los cardinales no numerables. De hecho, se sabe que un cardinal κ que cumpla el teorema de Ramsey debe ser un cardinal *débilmente compacto*, que entra en la categoría de los cardinales grandes.

El axioma de coloraciones abiertas nos indica que cierto tipo de coloraciones de los espacios métricos separables se comportan de una manera agradable.

Definición 6.29. Sea X un espacio métrico separable y $c\colon [X]^2 \to 2$ una coloración. Decimos que la coloración c es *abierta*, si para cualesquiera $a, b \in X$ tales que $c(\{a, b\}) = 0$, existen abiertos ajenos U, y V tales que $a \in U$, $b \in V$ y para cualesquiera $x \in U$ y $y \in V$, $c(\{x, y\}) = 0$.

Definición 6.30 (Axioma de coloraciones semiabiertas (SOCA))**.** Si X es un espacio métrico separable no numerable y $c\colon [X]^2 \to 2$ es una coloración abierta, entonces existe un subconjunto de X no numerable y monocromático.

Definición 6.31 (Axioma de coloraciones abiertas (OCA))**.** Si X es un espacio métrico separable no numerable y $c\colon [X]^2 \to 2$ es una coloración abierta, entonces se cumple alguno de los siguientes enunciados:

1. X contiene un subconjunto no numerable y monocromático de color 0;
2. X es una unión numerable de subconjuntos monocromáticos de color 1.

Se puede ver que OCA implica SOCA. Pero el resultado que nos interesa es el siguiente.

Teorema 6.32 (Todorčević)**.** PFA *implica* OCA.

Con esto nos hemos dado una idea de las implicaciones que tiene PFA si lo aplicamos, por ejemplo, al espacio métrico separable de los números reales.

La siguiente aplicación responde una pregunta aparentemente muy sencilla sobre topología.

Definición 6.33. Decimos que un espacio toplógico es un S-espacio si es regular y hereditariamente separable, pero no Lindelöf.

La existencia de un S-espacio se puede probar asumiendo que existe un *árbol de Suslin*, es decir, un árbol de tamaño ω_1 en el cual toda cadena y toda anticadena sea numerable. A su vez, la existencia de estos árboles se puede probar asumiendo el principio de *diamante* de Jensen, el cual se cumple en el universo constructivo de Gödel. Demostrar que los S-espacios podían no existir resultó ser un problema bastante más complicado.

Teorema 6.34. PFA *implica que no existen S-espacios.*

Se recomienda al lector interesado consultar la tesis de maestría de Osvaldo Guzmán González [8], texto en el que se exponen los dos ejemplos aquí mencionados, junto con algunas otras aplicaciones del axioma de forcing propio.

Bibliografía

[1] Amor Montaño, J.A. Campero Arena, G. y Miranda Perea, F.E. (2014). *Teoría de Conjuntos. Curso Intermedio*, Segunda Edición, México, Las Prensas de Ciencias.

[2] Porter, J.R. Woods, R. G. (1988). *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, USA, Springer-Verlag.

[3] Bartoszyński, T. Judah, H. (1995). *Set Theory. On the structure of the real line*, USA, A K Peters.

[4] Halmos, P.R. (1974). *Measure Theory*, USA, Springer-Verlag.

[5] Engelking, R. (1989). *General Topology. Revised and completed edition*, Alemania, Heldermann.

[6] Hodges, W. (1993), *Model Theory*, Reino Unido, Cambridge University Press.

[7] Shelah, S. (1982). *Proper Forcing, Lecture Notes in Mathematics 940*, Alemania, Springer-Verlag.

[8] Guzmán González, O. (2013), *Consecuencias de PFA y forcing con modelos como condiciones laterales* (tesis de maestría), UNAM, México.

[9] Jech, T. (2006). *Set Theory. The third milleium edition. revised and expanded*, Alemania, Springer.

[10] Kunen K. (2013). *Set Theory*, Reino Unido, College Publications.

[11] Jech, T. (1986). *Multiple Forcing*, Reino Unido, Cambridge University Press.

[12] Nemman, I. (2011). *Forcing (Lecture Notes for Math 223S, Spring 2011)*, Recuperado de http://www.math.ucla.edu/ ineeman/223s.1.11s/223s-spring11-lecture-notes-6-5.pdf.

[13] Schlindwein, C. *Understanding preservation theorems, Chapter IV of Proper and Improper Forcing, I*, Arch. Math. Logic (2014) 53: 171. https://doi.org/10.1007/s00153-013-0361-8