UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Cálculo de medidas de riesgo para crédito personal vía análisis de supervivencia

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuaria

PRESENTA:

Rita Soriano Díaz

TUTOR

M. en C. Daniel Cervantes Filoteo

Ciudad Univercitaria, CDMX, 2018

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Soriano
Apellido materno	Díaz
Nombre(s)	Rita
Teéfono	56139251
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de cuenta	307309183
2. Datos del tutor	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Daniel
Apellido paterno	Cervantes
Apellido materno	Filoteo
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Fernando
Apellido paterno	Baltazar
Apellido materno	Larios
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Adán
Apellido paterno	Díaz
Apellido materno	Hernández
5. Datos del sinodal 3	
Grado	M. en F.
Nombre(s)	Jorge Luis
Apellido paterno	Reyes
Apellido materno	García
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Act.
Nombre(s)	Carlos Andrés
Apellido paterno	Rascón
Apellido materno	Díaz de León
7.Datos del trabajo escrito.	
Título	Cálculo de medidas de riesgo para crédito personal vía análisis de supervivencia
Subtitulo	
Número de páginas	89 p
Año	2018

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, en especial a mis padres Carmen y Alfredo por su infinito amor y apoyo en todo momento bueno o malo, y la paciencia para realizar este trabajo.

A Salvador por estar como una segunda figura paterna, por compartir tus conocimientos y habilidades.

A mi tutor M. en C. Daniel Cervantes Filoteo por su apoyo y dirección en este trabajo , por su amistad y cariño brindados a través de estos años que me ha permitido trabajar con él.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por abrirme sus puertas y a todos los profesores por sus enseñanzas y su tiempo.

A Cristian por todo el amor y apoyo brindado.

A mis amigos, Fercho y Memo por todas las risas y el apoyo durante el trabajo; a Laura por ser mi confidente y amiga en todo momento, Iván por su apoyo y cariño.

Con amor, Rita.

Índice general

Introducción

Este trabajo tiene origen en la complicada situación económica que se vive en México, la cual tiene una directa repercusión en su población y en las Instituciones Financieras, teniendo efectos como son tasas de interés altas y variables ocasionando como efecto colateral el incumplimiento hacia las Instituciones Financieras por parte de sus clientes.

¿Cuál es el rol que juega el actuario en la relación que tiene la Institución Financiera y el cliente?

El actuario trabajando con la Institución Financiera construyen un sistema de gestión de riesgos, con el objetivo de poder medir el riesgo que se asume al momento de la aprobación de créditos. Para esto diseñaremos un modelo, el cual sea capaz de clasificar a los clientes y asignar una probabilidad de incumplimiento para decidir la aprobación del crédito en base a su historial crediticio.

Por lo contrario, el actuario trabajando para la protección de los clientes a través de una institución supervisora que es la Comisión Nacional Bancaria y de Valore, tiene como medida de protección el cálculo de medidas de riesgo con las cuales deben conformar reservas las cuales avalen los productos financieros que comercializan; debido que el capital destinado a los créditos es dinero de los clientes que tienen cuentas de ahorro en las Instituciones Financieras y debe ser capaz de cumplir sus obligaciones adquiridas.

Como medida preventiva la CNBV en el caso de riesgo de crédito exige una reserva la cual depende de la estimación de una media de la distribución de pérdidas en un horizonte de tiempo establecido. El VaR que es una medida de riesgo la cual nos da la métrica para el requerimiento de capital por lo cual estudiaremos que significa una medida de riesgo y que tan buena es la medida establecida en la regulación, con la finalidad de cubrir las pérdidas que la reserva no alcanza absorber.

Las Instituciones Financieras en México se clasifican de diversas maneras, las Instituciones de Banca Múltiple dirigidas a un sector económico medio-alto, dejando fuera al nivel medio-bajo a manos de instituciones como son las Sociedades Financieras de Objeto Múltiple (SOFOM).

La información crediticia es manejada legalmente por las Sociedades de Información Crediticia; las cuales se encargan de la recopilación, manejo y seguridad de los datos relativos al historial crediticio de los usuarios que tienen relación con las Entidades Financieras, Empresas comerciales o Sofomes E.N.R.

Toda la información que es almacenada en la Base Primaria de Datos la cual tiene un acceso remoto autorizado únicamente por las Sociedades de Información Crediticia, razón por la cual buscamos una base bancaria ficticia de nombre *German Credit Data*. Teniendo como objetivo calcular las medidas de riesgo que minimizan las pérdidas para la Institución Financiera.

En el capítulo 1 tomaremos la perspectiva empresarial de una Institución Financiera desglosando los riesgos a los que está expuesto, llegando a entender la naturaleza del riesgo y dar pauta a los argumentos matemáticos para la medición cuantitativa; sin embargo no todos los riesgos son cuantificables y tenemos que adentrarnos en un proceso de administración de riesgos y la importancia que tiene para la salud financiera de la Institución, ya que es nuestra función como actuario administrar los riesgos para la toma de decisiones y ver la incertidumbre como una ventaja para evitar catástrofes financieras que generaran graves consecuencias económicas.

Desarrollaremos la historia que dio origen a las legislaciones vigentes y sus causales a raíz de las diversas crisis financieras que dejaron al descubierto las debilidades de los modelos de solvencia de aquel entonces; observaremos sus características llegando a la medida de riesgo creada por JP Morgan denominado como VaR *Value at Risk* el cual es un modelo estadístico basado en la teoría de probabilidad. No obstante veremos que esta medida no cumple ser un medida coherente, por lo que describiremos otra medida de riesgo coherente como lo es el *Expected Shortfall* ES.

Una vez definido lo que es el riesgo en el capítulo 2 pasaremos a la definición de riesgo de crédito y algunas definiciones que nos ayudaran a la medición y cálculo de la distribución de pérdida. También veremos lo que es el riesgo de reputación para lo cual existe un sistema de calificación y un modelo de calificación experta con el cual si el cliente fuera otra institución financiera se le puede calcular una probabilidad de incumplimiento de la institución.

Los modelos de riesgo y la medición de riesgo nos brindan un panorama del ciclo de la administración de riesgo sin enfocarnos en la parte técnica, lo cual es útil para la gente que está involucrada en la parte de desarrollo de productos, administradores de riesgo e implementación de modelos de riesgo.

Los modelos de riesgo tienen como base la definición de incumplimiento y la metodología para el cálculo de la exposición al incumplimiento (EAD) y la pérdida dado el incumplimiento (LGD) para los clientes que incurran en el incumplimiento antes definido.

Tendremos la clasificación de los modelos de crédito más comunes que son modelos estructurales y modelos de forma reducida, como sus ventajas y desventajas.

Uno de estos modelos son los modelos de supervivencia que manejaremos en el capítulo 3 y las bases de análisis de supervivencia con referencia a los métodos estadísticos para el análisis de datos de supervivencia de la Dr. Elisa Wang; como son tipos de datos censurados y truncamiento, diremos como afecta esto a la base de datos.

Con esta base pasaremos al cálculo de probabilidades de supervivencia de la muestra y de la función de probabilidad por medio del estimados Kaplan Meier. Y las características de los modelos de supervivencia como es la parametrización de la tasa de incumplimiento y la incorporación de covariantes.

Prosiguiendo con la aplicación en el capítulo 4, realizando un análisis descriptivo, definiremos como se aplica la censura y el truncamiento en nuestra base de datos y realizar la simulación correspondiente del portafolio calculando la exposición al incumplimiento (EAD), la pérdida dado el fallo(LGD) y la probabilidad de incumplimiento (PD).

Continuando con su aplicación en el capítulo 4, realizando un análisis descriptivo, aplicando la censura adecuada para realizar la simulación obteniendo datos como la distribución de pérdidas, valuación de pérdidas y poder proceder al objetivo de este trabajo que es calcular las medidas de riesgo.

Recordando la diversificación de riesgos es una estrategia para mitigar el riesgo, un portafolio bien diversificado con cientos de créditos, la probabilidad de una pérdida enorme es más pequeña que si toda los prestamos estuvieran en una sola cartera. Esto es lo que nos lleva a calcular el expected shortfall.

Finalizando en el capítulo 5 calcularemos medidas de riesgo como son VaR y ES y buscando ajustar una cuerva a la simulación; compararemos las diferencias entre ambas medidas.

Por último, concluir las ventajas y desventajas y posibles mejoras del modelo propuesto.

Capítulo 1

Administración de riesgos

Inicialmente el ser humano en el día a día *él riesgo* se le presenta inevitablemente, ya sea solo como una persona o formado parte de la sociedad, mediante alguna empresa pública o privada. Dependiendo de este contexto existen múltiples definiciones de riesgo aceptadas. En el diccionario de la Real Academia Española la definición de riesgo es: "Contingencia o proximidad de un daño". "Posibilidad de que se produzca un contratiempo o una desgracia, de que alguien o algo sufra perjuicio o daño".

Se pueden encontrar más definiciones para distintos contextos, el factor común en las definiciones es la *incertidumbre* de los resultados o daños; lo que marca la diferencia es como se presentan estos resultados y su alcance ya que pueden ser adversos o neutrales. Ante esta incertidumbre es necesario realizar un análisis cuantitativo y cualitativo de sus consecuencias para la generación de un plan de prevención para mitigar sus alcances.

Los riesgos a los que se encuentra expuesta cualquier empresa pueden tener diversos orígenes y consecuencias diversas, ya que hay riesgos que no pueden ser evitados y otros a los que se les puede elaborar una estrategia para evitarlos. La posición de riesgo que la entidad asume en caso de autorizar un crédito es que el crédito no sea pagado. Con respecto a la clasificación de riesgos, la CNBV define en sus disposiciones generales, *la Administración Integral de Riesgos*, los tipos de riesgos cuya definición refiere son citados en esta circular.

I. **Riesgos cuantificables** son aquéllos para los cuales es posible conformar bases estadísticas que permitan medir sus pérdidas potenciales, y dentro de éstos se encuentran los siguientes:

   a) ***Riesgos discrecionales***, que son aquéllos resultantes de la toma de una posición de riesgo, tales como el:

      ○ *Riesgo de crédito,* Si un crédito es otorgado y el deudor no hacer frente a la deuda, debido a múltiples razones como una austera situación financiera, falta de tiempo para realizar el pago, problemas legales del usuario,etc.

- *Riesgo de liquidez.* Se define como la incapacidad para cumplir con las necesidades presentes y futuras de flujos de efectivo afectando la operación diaria o las condiciones financieras de la Institución;
- *Riesgo de mercado.* Las instituciones financieras asumen un riesgo debido al movimiento de mercado de sus activos debido a la posible pérdida en el valor de sus inversiones u opciones. Por lo cual los métodos de valoración juegan un rol importante en la valuación de este riesgo para establecer la reserva sobre sus inversiones. Las fuentes clásicas de riesgo son grandes movimientos en los precios de acciones, tipos de cambio, precios de materias primas y tasas de interés.

b) ***Riesgos no discrecionales***, que son aquéllos provenientes de la operación del negocio, pero que no son producto de la toma de una posición de riesgo:

· *Riesgo Operacional.* Este riesgo nace por las fallas internas de control y fallas corporativas pueden generar grandes pérdidas para las Instituciones Financieras resultantes de procesos internos erroneos ya sea por personal o sistemas, incluso acontecimientos externos. Esta es la razón por la cual se deben establecer mecanismos de control adecuados, óptimos y preventivos para poder corregir los errores, fallas en el sistema e incluso fraude.

- *Riesgo tecnológico.* Es cuando las pérdidas son originadas por alteraciones o fallas derivadas del uso o dependencia en el hardware, software, sistemas, aplicaciones, redes y cualquier otro canal de distribución de información en la prestación de servicios bancarios con los clientes de la Institución.

- *Riesgo legal.* Se define como la pérdida por el incumplimiento de las disposiciones legales y administrativas aplicables, la emisión de resoluciones administrativas y judiciales desfavorables y la aplicación de sanciones, en relación con las operaciones que las Instituciones llevan a cabo.

II. **Riesgos no cuantificables.** Son aquellos derivados de eventos imprevistos para los cuales no se puede conformar una base estadística que permita medir las pérdidas potenciales, entre estos riesgos se encuentran los siguientes:

· *Riesgo de estratégico.* Se define como la pérdida por fallas en la toma de decisiones, en la implementación de los procedimientos que inciden en los resultados esperados para alcanzar los objetivos acordados por la Institución dentro de su plan estratégico.

· *Riesgo de negocio.* Se define como la pérdida atribuible a las características inherentes del negocio y a los cambios en el ciclo económico o entorno en el que opera la Institución.

· *Riesgo de reputación.* Se define como la pérdida por el deterioro en la percepción que tienen las distintas partes interesadas, tanto internas como externas, sobre su solvencia y viabilidad.

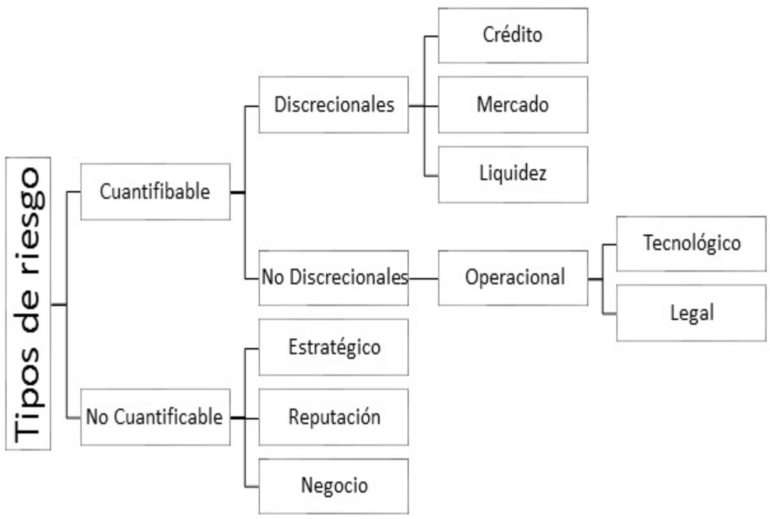


Figura 1.1: Tipos de riesgo.

1.1. ¿Por qué es importante la administración de riesgos financieros?

La administración de riesgos financieros es una rama especializada de las finanzas corporativas, que se dedica al manejo o cobertura de los riesgos financieros; mediante el asesoramiento y manejo de la exposición de la empresa a través del uso de instrumentos financieros diversos.

El objetivo de la administración de riesgos puede entenderse en dos perspectivas:

- Brindar seguridad a institución y a sus inversionistas que no sufrirán pérdidas económicas inaceptables(que no estén dentro del margen tolerable).

- Optimizar el desempeño financiero, tomando en cuanta el rendimiento ajustado por el riesgo.

Antes que nada hay que recordar que antes de que una IF fuera categorizada de esta manera, tuvo su fundamento como un negocio o empresa, el cual requiere una administración para la elaboración del producto final que en este trabajo es el crédito. Cualquier empresa puede verse afectada con pérdida, ya sean ocasionadas por daños informáticos, desastres naturales, guerras, políticas económicas nacionales o internacionales, etc.; en la naturaleza de los mercados financieros se asume un riesgo al pactarse una promesa de pago del usuario a la institución, que podría no concretarse.

Es necesario el estudio de estos eventos con el fin de gestionar correctamente su ocurrencia y poder establecer una estrategia para su prevención mediante planes de acción o la generación de reservas. Todo con el objetivo del sano desarrollo de la institución en el mercado financiero.

Hay dos principios en la administración de riesgos,el primero es *la administración de riesgo* basado en el peor resultado posible, para establecer como límite ese resultado y que cualquier otra consecuencia posible no lo traspasara; el segundo es *la administración de riesgo* que debe analizarse probabilísticamente la naturaleza de riesgo y obtener la mayor información posible para la mitigación del riesgo.

El proceso básico en administración de riesgo es el siguiente:

Figura 1.2: Proceso de administración de riesgo.

1. **Establecer contexto del evento.** Establece los criterios con los cuales se evalúan los riesgos y definir la estructura del análisis, identificación de recursos materiales, humanos y financieros de la empresa, en nuestro caso Institución Financiera.

2. **Identificar el riesgo.** Es necesario identificar la naturaleza y procedencia del riesgo.

3. **Analizar el riesgo.** Analizar los mecanismos de control existentes y cuantificar el riesgo en términos del alcance de sus consecuencias y sus probabilidades evaluados en estos mecanismos de control.

4. **Evaluar los riesgos.** Evaluación del posible impacto financiero a través de su adecuada cuantificación.

5. **Control y cobertura de riesgos.** Es el proceso de desarrollo de opciones y determinar las acciones para aumentar las oportunidades y reducir el efecto adverso del riesgo.

6. **Monitoreo del riesgo.** Monitoreo y revisión del desempeño de las estrategias y medidas establecidas para mitigar el riesgo, de forma paralela identificar nuevos riesgos para su optima reducción.

Esto puede ser estudiado desde múltiples perspectivas que van desde el punto del usuario, accionistas, instituciones, gobierno o sociedad dando un rango muy amplio de posibles respuestas.

Entonces para lograr una identificación efectiva de riesgos es necesario analizar la taxonomía de cada riesgo que están presentes en la operación. Por ejemplo, en los riesgos de mercado asociamos la volatilidad, liquidez, pero estos no están separados de otros, como son los riesgos operativos o los de crédito; es decir podemos ver el riesgo en el siguiente diagrama:

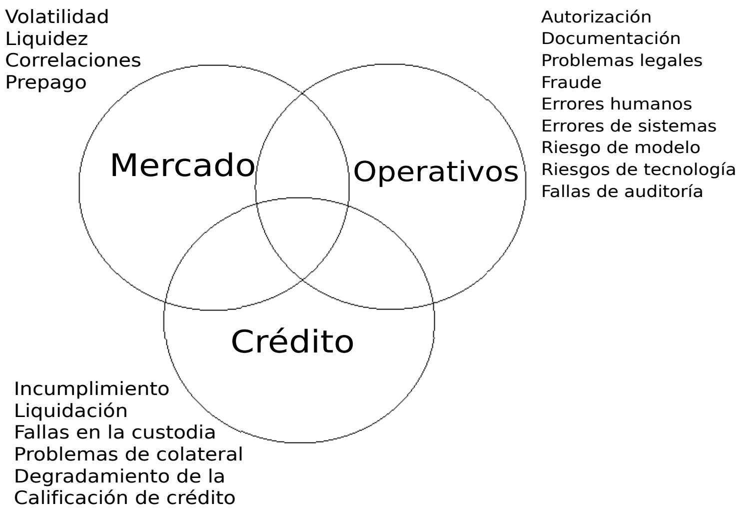


Figura 1.3: *Fuente: Alfonso de Lara Haro. Medición y control de riesgos financieros*

Desde la perspectiva social y económico se puede observar la importancia del papel que desempeñan las Instituciones Financieras en el desarrollo tanto en la microeconomía como en la macroeconomía de un país, ya que la sociedad hace un uso de los productos financieros; esto conlleva a una incertidumbre debido al frágil equilibro del sistema, mejor conocido como *riesgo sistémico.*

El desarrollo de productos financieros cada vez más complejos han provocado mayor estrés en el Sistema Financiero el último par de años, dando como consecuencias normas y estrategias más flexibles, eficientes y resistentes; capaces de soportar las crisis financieras ocurridas un cuarto de siglo atrás.

Para la faceta del accionista y de las Instituciones Financieras se puede observar que al momento de tener procesos de supervisaron adecuados más que implicar un gasto para la institución este proveerá una optimización en gastos y mayores ganancias.

La manera puntual en la cual la administración de riesgos aumenta el valor de la empresa son:

- La reducción de impuestos debido a la optimización del efectivo.
- Mejor apertura al mercado que como inversionista.
- Disminuir la probabilidad de bancarrota.
- Tener un proceso de optimización para una inversión óptima y minimizar el gasto en los mismos.

La administración de riesgos tiene como base poner en términos matemáticos las pérdidas, ganancias, factores de riesgo, medidas de riesgo y capital; esto con técnicas y herramientas brindadas por la probabilidad y estadística.

1.2. Instituciones Financieras objeto de estudio

El *Sistema Financiero Mexicano* (SMF) está conformado por instituciones, medios y mercados que canalizan la inversión y el ahorro, con el fin de brindar seguridad a los movimientos del dinero y los sistemas de pago establecidos en un marco legal. El marco legal establece que en el SMF hay instituciones financieras específicas dedicadas a la captación, administración y canalización de dinero, con el fin de poder brindar productos financieros como el crédito.

Las Instituciones Financieras (IF) autorizadas a otorgar crédito son:

- Instituciones de Banca Múltiple
- Instituciones Financieras de la Banca de Desarrollo
- Sociedades Financieras de Objeto Múltiple (SOFOM)
- Uniones de Crédito
- Sociedades Cooperativas de Ahorro y Préstamo.

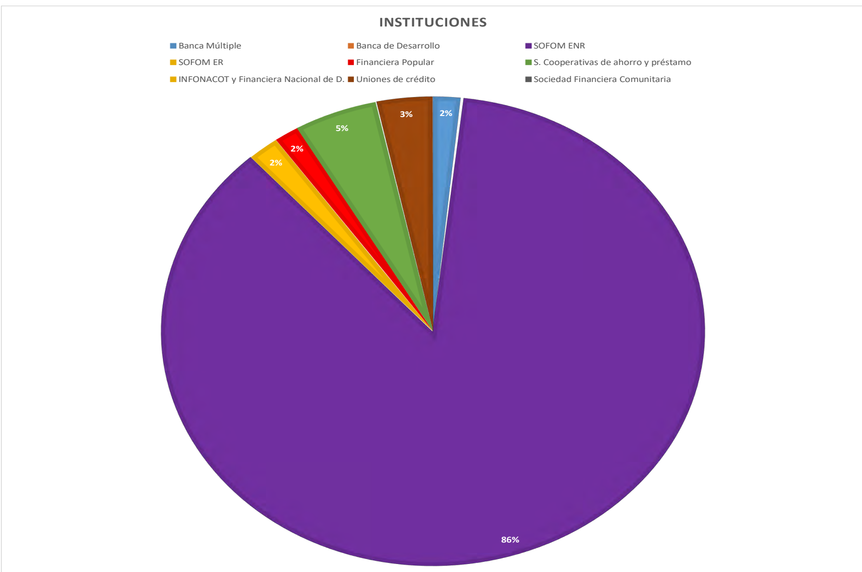
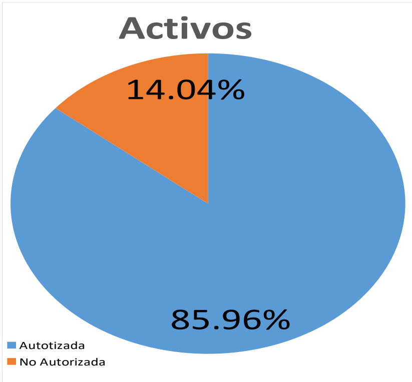


Figura 1.4: Conformación del Sistema financiero Mexicano. Datos: Buro de Instituciones Financieras. 2016.

En México se observa que en promedio las instituciones financieras autorizadas para la capación de recursos tienen en promedio 12 años en operación y un aproximado de 2 mil 804 millones de pesos en activos totales y 253 mil créditos activos, en comparación con las instituciones no autorizadas para la captación tienen de diferencia una vida activa de 9 años en operación, 458 millones de activos y 52 mil 427 créditos activos.



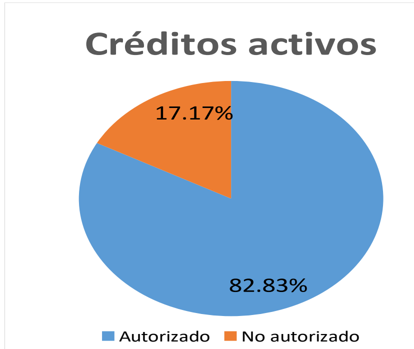


Figura 1.5: Información obtenida de Bencmarking de las microfinanzas en México 2015-2016, ProDesarrollo, Finanzas y Microempresa A.C.

Al cierre del segundo trimestre del 2016 se cuenta con una cartera bruta de 52 mil 31 millones de pesos.

Este mercado de este producto financiero está focalizado en clientes con estatus económico medio-bajo, emprendedores o empresas pequeñas que buscan un impulso económico. Existen tres tipos de productos de crédito que son: individual, solidaria y comunal; la primera está diseñada como un crédito personal, la segunda es para un grupo de 3 a 10 personas comprometidas a pagar el total del crédito otorgado de forma solidaria y por última para grupos de más de 10 personas; estos productos tienen un plazo de 4 hasta 72 meses.

En este trabajo nos enfocaremos en el crédito personal ya que este producto se basa en el otorgamiento de préstamos, donde la administración de riesgos forma parte fundamental para que una Institución Financiera pueda desarrollarse.

Después de la crisis bancaria que sufrió la economía mexicana en 1994-95, se desencadeno una importante reducción en el crédito personal e impulso la formación de instituciones de información crediticia, como el Buró de Crédito y adoptaron medidas regulatorias para reducir el riesgo crediticio. En los modelos tradicionales de calificación de crédito, se utilizan datos históricos y técnicas estadísticas para identificar las combinaciones de características de los usuarios de crédito que resultan en una alta probabilidad de no pago.

En esta legislación se maneja una institución que se encarga específicamente del manejo de datos históricos crediticios y llevan por razón Sociedad de Información de Crédito, actualmente en México se encuentran registradas dos sociedades: Circulo de Crédito y Trans Union; que mantiene la información del comportamiento histórico actualizada, esta base de datos es conocida como *Base Primaria de Datos*, que es integrada específicamente por la cartera vencida de las Instituciones Financieras de igual manera la información de operaciones crediticias fraudulentas.

En la actualidad las normas que tienen que seguir las IF para la medición de estas variables están establecidas por BANXICO y la CNBV, es decir, los mínimos requerimientos en lo que respecta a las variables de pérdida de los diversos riesgos que puedan presentarse, así como para el cálculo de las reservas para mitigarlo en caso de ocurrir. Las IF dan estatus de *castigado* a los créditos que no cumplen sus obligaciones en un plazo de días mayor a 180 días, ya que estas representan pérdidas por riesgos crediticios.

Ya teniendo en cuenta las características principales es posible elaborar un sistema de calificaciones para los solicitantes de crédito, incluso los que no tienen un historial crediticio. A medida que las IF otorguen una buena calificación con el objetivo de modificar la probabilidad de no pago, un buen usuario deberá tener una baja probabilidad de no pago, análogamente, un mal usuario tendrá una alta probabilidad de no pago.

Como en cualquier experimento, teniendo como hipótesis la calidad crediticia tendremos que identificar el *error tipo I*, que la emisión de crédito a usuarios que no lo merecían; el *error tipo II* es cuando no se le concede un crédito a usuarios que lo merecían.

	Autorizar crédito	No autorizar crédito
Buen usuario	No hay error	Error de tipo II (β)
Mal usuario	Error de tipo I (α)	No hay error

1.3. Tipos de crédito

Desde la perspectiva de riesgo de crédito existen varios tipos de crédito para el segmento individual.

- *Crédito revolvente.* Es un préstamo a corto plazo en el cual el deudor puede disponer de cierto límite de efectivo en el momento que lo requiera, que puede ser liquidado de manera mensual y una vez regresado el efectivo el efectivo del crédito disponible vuelve a ser el original.

- *Crédito personal.* Este préstamo se realiza para el uso libre del dinero solicitado, el cual deberá ser pagado ya sea por pagos periódicos o en un plazo determinado para liquidar el mismo. La entidad financiera comúnmente no exige requisitos como garantía o aval, por lo cual este tipo de crédito suele tener un alto costo financiero en comparación con los créditos hipotecarios o automotriz, y su periodicidad llega a ser de corto o largo plazo sin superar los 5 años.

- *Crédito ABCD (adquisicion de bienes de consumo duradero).* Es para la adquisición como su nombre lo indica de bienes muebles que se consumen en varios años como son electrodomésticos, decoración, etc.

- *Crédito automotriz.* Este préstamo es unicamente con el objetivo de comprar un automóvil nuevo, el cual es asegurado y se queda a "prenda" hasta que el deudor liquida su deuda más los intereses se se hayan pactado.

- *Crédito hipotecario.* Igual que el anterior se concentra en adquirir un bien inmueble ya sea nuevo, usado o terreno, con la garantía que se queda como hipoteca sobre el bien adquirido, el cual es liquidado de mediano o largo plazo que van desde 8 a 40 años respectivamente.

1.4. El desarrollo de la actividad bancaria

La actividad bancaria esta fuertemente ligada a la creación de la moneda para poder llevar a cabo diversas actividades como lo son el comercio, los prestamos, el cambio de moneda, etc., esto se remonta hasta la civilización Mesopotámica, donde se acostumbraba resguardar oro y plata en templos que se encargaban de su seguridad, los templos eran administrados por el gobierno quien se permitía usar estos recursos para el financiamiento de proyectos.

Posteriormente en el siglo XVIII A.C. en Babilonia, se registro la existencia de una piedra en la cual eran tallados los prestamos realizados por los sacerdotes de los templos, esto fue el inicio para llevar control de esta actividad y elaborar leyes para su regulación.

La actividad bancaria tuvo un auge durante la existencia de la civilización griega y romana, donde las actividades no únicamente eran realizadas por el gobierno si no también por sociedades públicas y privadas también conocidos como cambistas, cuyas funciones eran depósitos, cambio de moneda y crédito personal. Estos créditos solo tenían una tasa de interés de 10 %, la cual era insuficiente para cubrir el riesgo adquirido, lo que dio un impulso a la administración de los recursos.

Con la caída del Imperio Romano la actividad bancaria recayó y fue adoptada por la Iglesia Cristiana y Judía, las cuales comenzaron a funcionar como instituciones bancarias de deposito y financiamiento de personas acaudaladas y poderosas, así como a la monarquía para el financiamiento de guerras y cruzadas; las cuales llevaron a su expansión por toda Europa.

La palabra *banco* proviene de a paabra italiana *banca*, esto se adquirió debido a que los cambistas llevaban a cabo sus actividades en las bancas de las plazas centrales de Italia, cuando un cambista se iba a la quiebra la autoridad competente les imponía, entre otras penas, romper solemnemente ante la plaza el banco que ocupaba, como *bancarotta* término usado en la actualidad como bancarrota de *roto* la palabra italiana *rotta*.

Derivado del comercio internacional, los créditos a gran escala, sociedades de inversión y mercado de divisas sufrieron un gran desarrollo, de esta manera se estableció a mediados del siglo XVI en Londres *The Royal Exchange* el centro de cambio de moneda internacional de Europa; para el año 1600 se sufrió casi por un siglo tasas muy altas de inflación debido a la escases de oro y plata ya que el comercio seguía siendo una actividad de alto riesgo debido a pérdidas originadas por guerras constantes por las colonias, piratería y hundimientos de oro y plata provenientes de las colonias.

Mientras tanto a finales del siglo XVI en Venecia el banco estatal *"Banco della Piazzo di Rialto"* implemento un sistema de deposito a través de cheques para los comerciantes, evitando el movimiento de monedas, oro y plata.

El comercio se centro principalmente en Londres y un pequeño callejón que fue llegado a conocer como *"Exchange alley"* donde se encontraban cafeterías donde se publicaban listas de precios de materias primas, monedas, etc., en la puerta de los establecimientos; eventualmente se convertiría en la Bolsa de Londres.

El banco más antiguo activo es el Banco de Sucia se estableció en 1668, el Banco de Inglaterra inicio en 1694, ellos como bancos del estado realizaron ventas de bonos de gobierno, para convertirse en el banco de los bancos privados establecidos en el estado, con el objetivo de evitar las crisis bancarias, siendo este el último prestamista para ellos. Los bancos del estado también se encargaron de la emisión de billetes y moneda nacional. Nuevos bancos fueron fundados en Rusia, Escocia y Estados Unidos, en este último son el Banco de Pensilvania, Banco de América del Norte, Banco de Nueva York y el Banco de Massachusetts, establecidos después de su independencia de Gran Bretaña.

A inicios de 1900, Nueva York emergió como un nuevo centro financiero mundial ya que no solo participaban empresas y personas nacionales, si no también empresas europeas fueron depositantes y prestatarios de bancos en Nueva York. En 1905 en México, el gobierno reformo el sistema monetario al patrón oro, la cual tenía el objetivo de dar estabilidad el tipo de cambio y en las cuentas externas de la nación; esto culmino en 1913. Esta reforma tuvo como consecuencias la devaluación del peso de hasta el 50 %, seguido de una inflación, desestabilizando el Sistema Financiero.

En 1907 en Estados Unidos se dio una crisis financiera conocida como el *pánico de los banqueros* debido a la caída de la Bolsa de Nueva York, originado por el acaparamiento de activos por parte de los principales bancos de Nueva York, la especulación y la falta de regulación financiera provocando una depresión severa, lo cual provocó la caída de muchos de los bancos en Estados Unidos y teniendo un efecto generalizado a nivel mundial y una depreciación de la moneda mexicana.

A consecuencia de la crisis, Estados Unidos realizo una reforma bancaria y monetaria con el objetivo de ser capaz de proveer una reserva de activos líquidos, y que permita que la moneda y los créditos se contraigan y expandan a un plazo más grande. La legislación propuesta el 9 de enero de 1912 fue denominada Plan Aldrich, esta solicitaba el establecimiento de una Asociación de Reserva Nacional, la cual habría de realizar un préstamo de emergencia a los bancos miembros, gestionara la impresión de dinero y funcionaria como agente fiscal del gobierno de los Estados Unidos.

Durante la Primera Guerra Mundial(1914-1918) Estados Unidos contaba con las mayores reservas de oro por lo que tuvo que realizar préstamos a los países europeos, como las deudas internacionales se podía pagar únicamente con oro o mercancías, los estadounidenses realizaban importaciones de Europa con elevados derechos de aduana, provocando un impulso en la industria y la agricultura estadounidense por lo que los accionistas generaban una gran especulación, provocando que la gente invirtió dinero prestado dejando a la población con poca liquidez, así fue hasta el día 29 de octubre de 1929 conocido como la **Gran Depresión** debido a la caída de la bolsa de Nueva York.

Los países comenzaron a recuperarse parcialmente a media década de 1930, aunque no existió una recuperación total debido al inicio de la Segunda Guerra Mundial (1939-1945). Por otro lado cabe mencionar que como respuesta de los bancos centrales se estableciera el Banco Internacional de Pagos (1930) el cual era un organismo cuyo objetivo era suministrar mecanismos para sustituir el manejo de oro y contar con una apropiada estructura monetaria internacional, este banco se ubicó en Basilea, Suiza.

Al final de la guerra las potencias europeas como Reino Unido, Francia y Alemania, habían perdido el liderazgo económico así como la estabilidad que solían mantener, por lo contrario Estados Unidos se vio beneficiado con una economía más fuerte, ya que para 1945 era acreedor de la mayoría de los estados y controlaba dos tercios del total de las reservas mundiales de oro.

La economía se recuperó con los años, así con innovación en la tecnología. El mundo llego a ser altamente dinámico y tener actividades en el mercado las 24 horas del día, obligando a desarrollar un método de valoración a precios de mercado, y que en la administración se tome en cuenta los efectos de los diversos riesgos.

En 1973 comenzó una crisis económica conocida como *la crisis del petróleo*, originada por la Organización de Países Árabes Exportadores de Petróleo redujo el suministro de petróleo a los países aliados de Israel durante la guerra del Yom Kippur, provocando un efecto inflacionario en los países industrializados que eran dependientes del suministro de petróleo, forzando a Estados Unidos a abandonar el patrón oro en 1971, provocando la devaluación del dólar ese año y posteriormente en 1973; conociendo al petróleo como el oro negro.

Como cambio sistémico se dio la caída del sistema de tasas fijas como intereses y la insolvencia de algunos de los principales bancos de Estados Unidos, bajo estas circunstancias se vieron en la necesidad de crear una nueva coordinación de los bancos centrales para intercambiar información e intervenir en los mercados internacionales. Esto fue hasta el mes de diciembre de 1974 que se creó el Comité en Supervisión Bancaria entre los supervisores bancarios de los países integrantes del G-10[1].

Las funciones del Comité en Supervisión Bancaria (CSB) son tres:

- **Supervisar.-** Aquí se tiene la idea de establecer un foro apropiado para intercambiar información sobre la evolución del sector bancario, con el fin de detectar riesgos actuales del sistema financiero, compartir técnicas, asuntos y estrategias de supervisión para propiciar un entendimiento común.

- **Establecer estándares.-** Señalar los estándares, normas, directrices y buenas prácticas en materia de regulación y supervisión relacionado con la solvencia de las instituciones financieras.

- **Coordinar responsabilidades.-** Regular la aplicación de las normas de la CSB en los países miembros y otros países con el fin de obtener una aplicación oportuna, uniforme y eficaz, así como la designación de obligaciones en el organigrama del sistema financiero.

El Comité no esta constituido como una autoridad internacional en materia de supervisión, por lo que las recomendaciones o acuerdos no cuentan con fuerza legal, para llevar a cabo su mandato depende del compromiso de sus miembros.

[1]El G-10 denominado también como el Grupo de los Diez integrado por Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Italia, Japón, Países Bajos, Reino Unido, Suecia y Suiza

1.5. Basilea I

El Comité en Supervisión Bancaria hasta el mes de julio de 1988 publico un acuerdo titulado “Convergencia Internacional de medidas y normas de capital”, el cual para su fácil manejo es conocido como **Basilea I**, el contenido manejado es básicamente es el *control crediticio*, es decir las recomendaciones con un objetivo común fijando límites para el valor de los créditos que puede conceder una institución bancaria en función de su capital propio, estas recomendaciones se establecieron únicamente para las instituciones bancarias.

En el año 1994 se suscitó una crisis en México con repercusiones mundiales, provocada por la falta del país de reservas internacionales, causando una devaluación de la moneda mexicana, a lo que Estados Unidos respondió con un préstamo de $20 mil millones de dólares para México con el cual se pudieran cubrir las obligaciones contraídas con los acreedores. Los acreedores adquirieron Tesobonos debido al Tratado de Libre Comercio de América del Norte; los Tesobonos son un tipo de instrumento de deuda que aseguraba el pago en dólares, en lugar de pesos mexicanos, la primera emisión se realizó en 1989 por un monto de 10 millones de dólares, con un plazo de 182 días y una tasa nominal al vencimiento de 34.5 % anual; México no contaba con prácticas bancarias reguladas, lo que permitió la obtención de créditos en exceso que luego fueron de difícil recuperación.

El acuerdo establece niveles de requerimiento de capital para los bancos internacionales activos, tenía como defecto que únicamente tomaba en cuenta el riesgo de crédito, por lo que una revisión en 1996, el comité incluyo el **riesgo de mercado** en el cálculo del requerimiento mínimo de capital; el cual consiste en mantener una cantidad elevada de capital de forma obligatoria, con el objetivo de cubrir el riesgo de mercado ya que esta era la causa más frecuente de quiebra y crisis bancarias internacionales, permitiendo que las instituciones financieras utilicen su propio modelo interno para medir el riesgo de mercado.

1.6. Basilea II

El 26 de junio del 2004 el confederado del G-10 publicó un nuevo acuerdo sobre la supervisión del marco en materia de capital mínimo. El Nuevo Acuerdo de Capital, conocido como Basilea II, el marco de las recomendaciones presentan requisitos mínimos de capital mas sensibles al riesgo para las instituciones financieras, este maneja un marco de tres tipos de riesgo que se deben evaluar para asegurarse de poder cubrir los riesgos. Así como establecer una mayor transparencia de las instituciones financieras.

1.6.1. Pilar 1. Requerimiento de capital

Este pilar es que los riesgos que se deben tener en cuenta para calcular el *requerimiento mínimo de capital*, los cuales son riesgo de crédito, riesgo de mercado y riesgo operativo. Existen distintos enfoques para el cálculo de los riesgos como un Método Estándar y el Método Avanzado en Calificaciones Internas (IRP por sus siglas en inglés) Básico y Avanzado incorporando el riesgo operativo, es decir tiene en cuenta la calidad crediticia de los usuarios por medio de calificaciones internas y externas.

En el **método estándar** se calculan a través de las calificaciones lo que son: la probabilidad de incumplimiento y la severidad de la pérdida; donde las calificaciones son asignadas por agencias especializadas. Mientras que en el **método avanzado en calificaciones internas** como lo indica su nombre puede asignar no sólo las calificaciones de las agencias, si no asignar calificaciones internas para realizar sus propios parámetros para calcular los riesgos y las reservas.

1.6.2. Pilar 2. Proceso de supervisión

En este rubro se promueve una comunicación más activa entre supervisores e instituciones financieras, basada en cuatro principios:

- Brindar mecanismos internos que establezcan metas de capitalización proporcionales al nivel de riesgo.
- Instaurar una supervisión que evalué y apruebe las estrategias y controles internos de la instituciones financieras, que de igual forma cuente con la autorización de intervenir cuando la evaluación no sea satisfactoria.
- Establecer una reserva por arriba del mínimo establecido en la regulación a alguna institución financiera si es que la supervisión lo cree necesario.
- Imponer con prontitud medidas correctivas, en el caso de no cumplir con el capital regulatorio.

el primero enfocado a las instituciones financieras y los últimos a los supervisores.

1.6.3. Pilar 3. Disciplina de mercado

Consiste en una serie de recomendaciones y requerimientos de transparencia que permitan a las instituciones financieras en el mercado la valuación de riesgos, suficiencia de capital y procesos de administración en las instituciones de crédito, a través de publicación de la información periódica.

En el año 2012, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores implemento medidas y recomendaciones del acuerdo **Basilea III**, el cual modifica la normativa aplicada a las Instituciones Financieras con el objetivo de mejorar la calidad crediticia a través de cuatro medidas, la primera es la inclusión de un suplemento de conservación de capital, mejorar la calidad del capital , aumento de los ponderadores de riesgo para activos complejos y mejorar el límite de reconocimiento de obligaciones subordinadas para absorber la pérdida de 300 a 400 mil UDIS(unidades de inversión).

1.7. Basilea III

Basilea III es un conjunto de medidas acordadas internacionalmente que el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea ha desarrollado en respuesta a la crisis financiera de 2007-09. El objetivo de dichas medidas es reforzar la regulación, la supervisión y la gestión del riesgo de los bancos.

Pilar I

- Incremento del requerimiento mínimo de capital ordinario hasta el 4.5 % de los activos.
- Elevar el mínimo del total de capital ordinario hasta el 7 % y resestringe las distribuciones discrecionales cuando los niveles de capital del banco no cumplen el requerimiento del 7 %.
- Tener un capital con la capacidad de absorber pérdidas en el punto de no viabilidad.
- Los instrumentos de capital podrán convertirse en acciones ordinarias si se considera que el banco es inviable. Se reducirá así el riesgo moral incrementando la contribución del sector privado a la resolución de crisis bancarias futuras.
- Las restricciones del uso de modelos internos tienen por objeto reducir la variabilidad de los cálculos de los activos ponderados por riesgo de los bancos.
- Las revisiones de los métodos estándar para calcular
    - · el riesgo de crédito;
    - · el riesgo de mercado;
    - · el riesgo de ajuste de valoración del crédito; y
    - · el riesgo operacional
- Estricta supervición al operar con derivados, establecer un nuevo método estándar; y aumento de los requerimientos para las exposiciones dentro del sector financiero.

- Un suelo de capital revisado (*output floor*), basado en los métodos estándar de Basilea III, limita la reducción del capital regulador que un banco puede disfrutar por utilizar sus modelos internos en vez de los métodos estándar

Pilar II

Riesgo de tasas de interés en la cartera de inversión (IRRBB). Orientaciones exhaustivas sobre el proceso de gestión del IRRBB de los bancos: requisitos de divulgación mejorados; un umbral más estricto para identificar bancos atípicos; y un método estándar actualizado.

Pilar III

Se tendra un marco consolidado y mejorado, que incluye todas las reformas del marco de Basilea e introduce un cuadro de parámetros clave prudenciales de los bancos.

Exige un *Coeficiente de Cobertura de Liquidez (LCR)* a los bancos capaz de mantener suficientes activos líquidos de alta calidad para resistir 30 días en un escenario de financiación bajo una alta tensión.

Coeficiente de financiación estable neta (NSFR) es un indicador a largo plazo para reducir desajustes de liquidez, ofreciendo incentivos a los bancos para que utilicen fuentes de financiación estables.

1.8. Conceptos básicos de administración de riesgos

Pensemos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ donde están definidas variables aleatorias que representan el valor de las acciones y un portafolio de acciones, definiremos el ***valor*** del portafolio a tiempo s como $V(s)$, donde asumimos que $V(s)$ es observable al tiempo s.

Establecemos un horizonte de tiempo Δ, entonces definimos como *pérdida* del portafolio en $[s, s+\Delta]$ como:

$$L_{[s,s+\Delta]} := -(V(s+\Delta) - V(s))$$

La distribución $L_{[s,s+\Delta]}$ la denominamos la *distribución de pérdida.* Para estimar esta distribución tomaremos en cuenta los datos que son conocidos.

Hay que destacar que en la administración de riesgos son los que se presenta en la cola superior de la distribución de pérdidas, ya que ahí se encuentran las grandes pérdidas.

Definido una vez la unidad de tiempo Δ y el horizonte de tiempo, podemos usar notación de series de tiempo: $(L_t)_{t\in\mathbb{N}}$ con $L_t := L(t\Delta)$, la cual en función de la distribución de pérdida será:

$$L_{t+1} := L_{[t\Delta,(t+1)\Delta]} = -\left(V_{t+1} - V_t\right)$$

Donde el valor de V_t está construido en función del tiempo; $V_t = f(t, Z_t)$ donde $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y de un vector de dimensión d, $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})'$ que son los *factores de riesgo*, con frecuencia estos factores de riesgo son precios de acciones o tarifas de cambio obtenidas de forma logarítmica; son covariables macroeconómicas.

Si realizamos una simplificación para tener las diferencias entre los factores de riesgo por medio de una serie nos quedaría: $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ con $X_t := Z_t - Z_{t-1}$;

$$L_{t+1} = -\left(f(t+1, Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t)\right)$$

Ahora definimos un *operador de pérdida* por $l_{[t]} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,el cual definimos como:

$$l_{[t]}(x) := -\left[f(t+1, Z_t + x) - f(t, Z_t)\right] \text{,donde } x \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1}) \quad \text{la cual solo depende de una innovación } X_{t+1}$$

Si f es una función diferenciable de primer orden, podemos definir la pérdida en un intervalo de tiempo Δ como L^{Δ}_{t+1} de la siguiente manera:

$$L^{\Delta}_{t+1} := -\left[f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^{d} f_{Z_i}(t, Z_t) X_{t+1,i}\right]$$

donde $f_t = \frac{d}{dt} f$ y $f_{Z_i} = \frac{d}{df_{Z_i}} f$; y el operador de pérdida:

$$l^{\Delta}_{[t]}(x) := -\left[f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^{d} f_{Z_i}(t, Z_t) x_i\right]; \quad x \in \mathbb{R}; \quad x = (x_1, \ldots, x_d)$$

Ya que se conocen los datos anteriores de la distribución de pérdida podemos al portafolio como una serie de tiempo, por lo que una primera aproximación seria mediante una serie de tiempo estacionaria de factores de riesgo $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la cual tiene asociada una distribución estacionaria F_X sobre $\mathbb{R}^d$, teniendo como propiedad que (X_t) es invariante sobre periodos de tiempo, lo que nos indica estaciomariedad.

Denotaremos $\mathcal{F}_t$ como la σ-álgebra generada por la información recabada hasta tiempo t.

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s : s \leqslant t\right)$$

La distribución condicional de X_{t+1} dada la información en $\mathcal{F}_t$ la escribiremos como $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$.

En la mayoría de los modelos estacionarios de series de tiempo son importantes para la administración de riesgo, debido a que $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ no es igual a la distribución estacionaria F_X.

Con esto podemos llegar a la **distribución condicional de pérdida** $F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}$ es definido, como la distribución de pérdida $l_{[t]}(\bullet)$ sobre $F_{X_{t+1}|\mathcal{F}_t}$. Formalmente tenemos, para $l \in \mathbb{R}$.

$$F_{L_{t+1}|\mathcal{F}_t}(l) = \mathbb{P}\left(l_{[t]}(X_{t+1}) \leqslant l|\mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_{t+1} \leqslant l|\mathcal{F}_t\right)$$

Es decir, que la pérdida condicional nos da como resultado la distribución condicional de pérdida L_{t+1} del próximo periodo, dado la información del periodo anterior $\mathcal{F}_t$.

1.9. Medidas de riesgo

Existen diversas formas para medir el riesgo en el mercado de un portafolio. Una de ellas es a través de una función de distribución de pérdidas, a la cual es posible calcular sus propiedades como sus cuantiles y medidas de dispersión.

1.9.1. Valor en Riesgo (VaR)

Una empresa adquiere un riesgo con respecto a la volatilidad, es decir al cambio de precios y la intensidad de estos cambios, por lo que el **Valor en Riesgo (VaR)** tiene como idea de responder la pregunta de *¿Cual es el peor escenario de pérdida?* Podemos definir el VaR como *la máxima pérdida en un intervalo definido de tiempo que puede ocurrir con un cierto nivel de confianza.*

Dado los acontecimientos de la década de 1990, JP Morgan desarrollo el trabajo de Harry Markowitz, que consistía en la teoría de portafolios. JP Morgan tenia como objetivo tener un informe que combinara todo el riesgo de la empresa con solo 15 minutos antes del cierre diario del mercado, fue en 1994 que se publico la metodología del VaR, dándole manejo a parámetros básicos del riesgo.

Si consideramos un portafolio de acciones y un horizonte de tiempo Δ y una función de distribución de pérdida denotada por $F_L(l) = \mathbb{P}(L \leqslant l)$. Con esto se busca definir un estadístico con base en F_L, el cual mida la severidad del riesgo del portafolio sobre el periodo de tiempo Δ.

Estableciendo un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ definimos el **VaR** de un portafolio como el umbral tal que la pérdida sea menor o igual a el α con un nivel de confianza $(1-\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
VaR_\alpha(L) &= \text{ínf}\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L > l) \leqslant 1 - \alpha\} \\
&= \text{ínf}\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geqslant \alpha\}
\end{aligned}
$$

Lo que significa que para variables aleatorias continuas $F_L(VaR_\alpha(L)) = \alpha$. Razón por la que se puede decir que VaR es simplemente un *cuantil* de la distribución de pérdida.

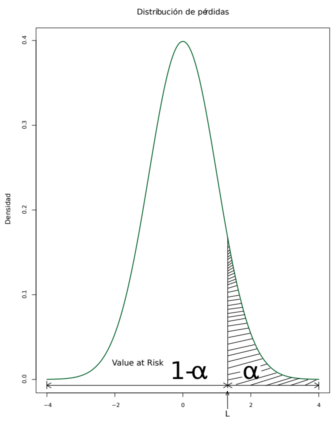


Figura 1.6: Valor en riesgo

Mean-Var Denotamos μ a la media de la función de pérdida.

$$VaR_\alpha^{mean} := VaR_\alpha - \mu$$

es usada para la adecuación de capital en lugar del VaR ordinario. Si el horizonte de tiempo Δ es diario el concepto de VaR_α^{mean} se conoce como *"ganancias diarias en situación de riesgo"*. La diferencia básica entre VaR_α y VaR_α^{mean} es irrelevante cuando μ es cercano a 0 debido a que el periodo de tiempo es corto, sin embargo cuando el horizonte es largo en particular con los precios de deuda usan VaR_α^{mean} para determinar la reserva de capital en caso de que ocurra una pérdida.

Para el cálculo de VaR_α ocuparemos las siguientes definiciones:

Inversa generalizada. Dado una función creciente $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos su inversa generalizada como:

$$T^{\leftarrow}(y) := \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\}$$

donde por convención en ínfimo de un conjunto vacio es ∞.

Función cuantil. Dada una funcion de distribución F, la inversa generalizada $F^{\leftarrow}$ es llamada *función cuantil* de F. Una vez establecido el cuantil α de F donde $\alpha \in (0, 1)$ esta dado por:

$$q_\alpha(F) := F^{\leftarrow}(\alpha) = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$$

En general para una variable aleatoria X con función de distribución F tenemos la siguiente notación $q_\alpha(X) := q_\alpha(F)$. Si F es continua y estrictamente creciente, tenemos que $F^{-1}(\alpha) = q_\alpha(F)$.

Para calcular el cuantil de una manera general usamos el siguiente lema:

En el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es el cuantil α de la función de distribución F si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$F(x_0) \geq \alpha \qquad \text{y} \qquad F(x) < \alpha, \forall x < x_0$$

Por ejemplo para calcular el VaR para una distribución de pérdida normal con media μ y varianza σ^2, y establecido $\alpha \in \mathbb{R}$. Trabajando con $L^* = \frac{L-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{L-\mu}{\sigma} < \frac{L^*-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{L^*-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{donde} \quad \Phi \sim N(0,1)$$

Como $\quad L^* \sim N(0,1) \Longrightarrow L^* = \Phi^{-1}(\alpha)$, entonces $L = \sigma L^* + \mu$

$$\Longrightarrow VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Análogamente

$$VaR_\alpha^{mean}(L) = \sigma$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar y $\Phi^{-1}(\alpha)$ es el cuantil α de Φ. Sólo falta mostrar que $F_L(VaR_\alpha) = \alpha$:

$$\mathbb{P}(L \leqslant VaR_\alpha) = \mathbb{P}\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \leqslant \Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

Y como F^{-1} es continua $\Longrightarrow F^{-1} = F^{\leftarrow}$ por lo que

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(L \leqslant VaR_\alpha) = \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right) = \alpha$$

1.9.2. Momentos parciales superiores

Originalmente el concepto de momentos en matemáticas proviene de la física; por ejemplo la media y la varianza son momentos de primer y segundo orden respectivamente y es posible expresar de forma más general momentos. Primero recordaremos la definición de momento de una función.

Definición Si X es una variable aleatoria con función de distribución $F_X(x)$ y un nivel de referencia τ, el momento de grado k es:

$$\mu_{k,\tau}(F_X(x)) = \mathbb{E}((\tau - X)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - x)^k \mathrm{d}F_X(x)$$

Los casos especiales son cuando el nivel de referencia τ iguala la media de la distribución es llamado *momento central*. El primer momento alrededor del cero es la media de la distribución y el segundo momento central es la varianza.

Como ya se dijo nos preocupa la cola suprerior de la distribición de pérdidas por lo que nos concentramos en el *upper partial moment* (UPM). Suponemos un grado $k \geq 0$ y un punto de referencia q, el $UPM(k,q)$ se define como:

$$UPM(k,q) = \int_q^\infty (l-q)^k \mathrm{d}F_l(l)$$

donde algunos valores específicos significan:

$$\begin{aligned} &\text{si } k=0 \quad \Longrightarrow UPM(0,q) = \mathbb{P}(L \geq q), \\ &\text{si } k=1 \quad \Longrightarrow UPM(1,q) = \mathbb{E}[(L-q)I_{\{L\geq q\}}]. \end{aligned}$$

Cuando mayor sea el valor de k, la medida de riesgo se conserva mejor debido a que asignamos más peso a las desviaciones desde el punto de referencia q.

1.9.3. Medidas coherentes de riesgo

Primero para poder definir una medida de riesgo establecemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un horizonte de tiempo Δ. Nombraremos como $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ el conjunto de todas las variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F})$, que es casi seguramente finito.

Los riesgos financieros son representados por un conjunto $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de variables aleatorias interpretadas como pérdidas del portafolio en un periodo de tiempo Δ, hay que recordar que $\mathcal{M}$ puede ser visualizado como un cono convexo, es decir, que para L_1,$L_2 \in \mathcal{M}$ implica que $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ y que $\forall \lambda > 0$ entonces $\lambda L_1 \in \mathcal{M}$.

Las medidas de riesgo son funciones reales $\varrho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Esta función $\varrho(L)$ puede ser interpretada como una cantidad de dinero que hay que inyectar debido a que ocurrió una pérdida L para que el sistema de control de riesgo tenga una posición aceptable, por ejemplo:

- Si la empresa tiene una pérdida de monto L y $\varrho(L) \leq 0$ el sistema de control de riesgo dirá que es posible continuar las operaciones sin la inyección de dinero;
- Si $\varrho(L) \geq 0$ indicaría que es necesario inyectar efectivo para que la empresa pueda ser capaz de hacer frente a sus obligaciones;
- Incluso cuando $\varrho(L) < 0$ existe capital que puede ser retirado.

Para que la medida $\varrho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sea ***medida de riesgo coherente***, para cualesquiera $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ debe cumplir los siguientes condiciones:

- **Invariante por traslación**: $\forall m \in \mathbb{R}$, entonces $\varrho(L_1 + m) = \varrho(L_1) + m$

- **Sub-aditividad**. $\varrho(L_1 + L_2) \leq \varrho(L_1) + \varrho(L_2)$
- **Homogeneidad positiva**. Para cualquier $n > 0$ entonces $\varrho(nL_1) = n\varrho(L_1)$
- **Monotonia**. Si $L_1 \leq L_2$ entonces casi seguramente $\varrho(L_1) \leq \varrho(L_2)$

Significado de las propiedades:

Invariante por traslación. Si el monto de pérdida L_1 incrementa un valor constante m, es decir, $L_1 + m$, entonces el monto total necesario $\varrho(L_1 + m)$ deberá incrementar en la misma manera $\varrho(L_1) + m$, debido a que $\tilde{L} = L - \varrho(L)$ dando resultado que $\varrho(\tilde{L}) = \varrho(L) - \varrho(L) = 0$, hay que recordar que esto es para determinado horizonte de tiempo y que L_1 puede aumentar o disminuir.

Sub-aditividad. Sigue el dicho *"una fusión de riesgos no crea un riesgo extra"* de los autores Artzner, Delbaen, Eber y Heath.

Homogeneidad positiva. Supongamos un portafolio de crédito con una pérdida $\varrho(L_1)$ y escalamos el riesgo un factor λ. Entonces la pérdida $\varrho(L_1)$ se convierte en una pérdida escalada $\varrho(\lambda L_1)$. En consecuencia, el capital necesario originalmente para cubrir el riesgo también cambiara a $\lambda\varrho(L_1)$, es el principio de diversificación de portafolios.

Monotonía. En este caso seria que *"cuanto mayor sea el riesgo mayor puede ser la pérdida"*.

Vamos demostrar que el VaR no es una medida coherente, probaremos que esta medida no es coherente ya que no cumple la sub-aditividad.

Sean dos variables independientes con distribución de pérdida Pareto:

$$F_{L_1}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) I_{x \geqslant 1}$$

$$F_{L_2}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) I_{x \geqslant 1}$$

También definimos $L = L_1 + L_2$, calculemos la función de distribución F_L; por medio de convoluciones llegamos a:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \int_1^{x-1} F_{L_1}(x-y) F_{L_2}(y) \mathrm{d}y \\ &= \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2\log(x-1)}{x^2}\right) Ix \geqslant 2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que esta es la función de distribución haciendo esta integral por partes (1).

Calculamos el $VaR_\alpha(L_1)$,$VaR_\alpha(L_2)$:

$$VaR_\alpha(L_1) = F_{L_1}^{\leftarrow}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \qquad , \qquad VaR_\alpha(L_2) = F_{L_2}^{\leftarrow}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$$

y sabemos

$$\Longrightarrow F_{L_1}(VaR_\alpha(L_1)) = \alpha \qquad , \qquad F_{L_2}(VaR_\alpha(L_2)) = \alpha$$

Notemos ahora:

$$\begin{aligned} F_L(VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2)) &= F_L\left(\frac{2}{1-\alpha}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{\frac{2}{1-\alpha}} - \frac{2\log(\frac{2}{1-\alpha})}{(\frac{2}{1-\alpha})^2} \\ &= 1 - (1-\alpha) - \frac{2\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})}{\frac{4}{(1-\alpha)^2}} \\ &= \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

donde $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \geqslant 1$ para $\alpha \in (0,1)$, por lo que $\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \geqslant 0$. Entonces:

$$\frac{(1-\alpha)^2}{2}\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \leqslant \alpha$$

$$\therefore F_L(VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2)) \leqslant F_L(VaR_\alpha(L))$$

y como F_L es no decreciente podemos aplicar la función inversa $F_L^{\leftarrow}$

$$\Longrightarrow VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2) \leqslant VaR_\alpha(L)$$

Por lo tanto el VaR_α no es una medida coherente. Al contrario queremos ver si ES_α es medida coherente.

1.9.4. Expected Shortfall

La palabra *shortfall* puede ser traducida al español como *deficit* lo cual significa *falta o escasez de algo que se juzga necesario*, aplicado en medidas de riesgo el ***expected shortfall*** se refiere al deficit esperado de la pérdida esperada que no podra ser cubierta por el VaR.

Definición. Sea una pérdida L con $\mathbb{E}(|L|) < \infty$ y con función de distribución F_L, el *expected shortfall(ES)* para un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ esta definido como:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)\mathrm{d}u$$

El VaR guarda una relación con el ES:

$$\begin{aligned}
VaR_u &\geqslant VaR_\alpha \qquad \text{donde} \quad u \geqslant \alpha\\
\Rightarrow \int_\alpha^1 VaR_u(L)\mathrm{d}u &\geqslant \int_\alpha^1 VaR_\alpha(L)\mathrm{d}u\\
\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)\mathrm{d}u &\geqslant \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\alpha(L)\mathrm{d}u\\
\Rightarrow ES_\alpha(L) &\geqslant \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha)VaR_\alpha(L) = VaR_\alpha(L)
\end{aligned}$$

En esta expresión se puede observar que cuando α es cercano a 1 el valor de $1/(1-\alpha)$ es grande y cuando α tiende a 0 entonces el valor $1/(1-\alpha)$ es cercano a 1, con lo que podemos observar que $ES_\alpha(L) \geq VaR_\alpha(L)$. Para una función de pérdida continua la expresión del ES puede ser interpretada como ocurre cuando el VaR es sobrepasado, para mostrarlo utilizaremos el siguiente lema.

Lema Sea L una variable aleatoria continua integrable de pérdida L con una función de distribución continua F_L y cualquier $\alpha \in (0,1)$ entonces:

$$ES_\alpha = \mathbb{E}(L|L \geq VaR_\alpha)$$

Demostración Sea U una variable aleatoria uniforme $U[0,1]$, de la cual sabemos que la v.a. $F_L^{\leftarrow}(U)$ tiene una función de distribución F_L. Debido a que por ser una uniforme cumple la siguiente propiedad:

$$F(y) \geq u \Longleftrightarrow F^{\leftarrow}(u) \leq y \quad y \in \mathbb{R}$$

por lo que $\mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq u) = \mathbb{P}(U \leq F(y)) = F(y)$.

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[L; L \geq q_\alpha(L)] = \mathbb{E}[F_L^{\leftarrow}(U); F_L^{\leftarrow}(U) \geq F_L^{\leftarrow}(\alpha)] = \mathbb{E}[F_L^{\leftarrow}(U); U \geq \alpha]$$

Lo cual podemos interpretar como la siguiente integral:

$$\mathbb{E}[F_L^{\leftarrow}(U); U \geq \alpha] = \mathbb{E}[F_L^{\leftarrow}(U)I_{u\geqslant\alpha}] = \int_0^1 F_L^{\leftarrow}(U)I_{u\geqslant\alpha}\mathrm{d}u = \int_\alpha^1 F_L^{\leftarrow}(u)\mathrm{d}u$$

y además

$$\mathbb{P}[L \geq q_\alpha(L)] = 1-\alpha \qquad \blacksquare$$

El lema anterior no sirve para variables aleatorias de pérdida discontinuas para todo α, pero para este tipo de variables aleatorias tenemos la siguiente expresión:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathbb{E}[L; L \geq q_\alpha] + q_\alpha[1-\alpha-\mathbb{P}(L \geq q_\alpha)]\right)$$

La demostración se puede leer en la proposición 3.2 de Acerbi y Tasche(2002).

Ejemplo Calcular el ES_α para una distribución gaussiana:
Supongamos que $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $\alpha \in (0, 1)$.

$$ES_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

donde $\phi \sim N(0, 1)$. Primero usamos el lema anterior y observamos que:

$$ES_\alpha(L) = \mu + \sigma \mathbb{E}\left[\frac{L-\mu}{\sigma} \mid \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_\alpha\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

Renombramos $\tilde{L} : \frac{L-\mu}{\sigma}$, para convertirla a una normal estándar

$$\Longrightarrow ES_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} l\phi(l)\mathrm{d}l$$

integrando por partes:

$$\Longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}[-\phi(l)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} = \frac{\phi[\Phi^{-1}(\alpha)]}{1-\alpha}$$

Por lo tanto

$$ES_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \qquad \text{donde} \quad \phi \sim N(0, 1)$$

Una manera de estimar el ES_α cuando el tamaño de la muestra es muy grande tenemos el siguiente lema.

Lema. Sea un conjunto $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias identicamente distribuidas con función de distribución F_L tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]} L_{i,n}}{[n(1-\alpha)]} = ES_\alpha(L)$$

donde $L_{1,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$ son estadísticos de orden, ordenados al revés $L_1,\ldots,L_n$ y $\lfloor n(1-\alpha)\rfloor$ es el menor entero tal que no rebase $n(1-\alpha)$.

Proposición El ES_α es medida coherente.

Demostración: Tenemos que una medida coherente debe cumplir 4 propiedades que son invarianza bajo traslaciones, homogeneidad positiva, monotonía y sub-aditividad; las primeras tres son faciles de ver mediante la representación del ES_α:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)\mathrm{d}u$$

debido a que el VaR cumple facilmente. Por lo que únicamente nos hace falta mostrar la sub-aditividad, para lo que consideramos una secuencia de variables aleatorias $L_1, \ldots, L_n$ identicamente distibuidas las cuales tienen asociadas su estadistico de orden $L_{1,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$ y proponemos un m arbitrario tal que $1 \leq m \leq n$ tenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} L_{i,n} = \sup\{L_{i_1} + \cdots + L_{i_m} : i_1 < \cdots < i_m \leq m\}$$

Sean L y L' v.a. con función de distribución conjunta y una secuencia de vectores aleatorios bivariados *iid* $(L_1, L'_1), \ldots, (L_n, L'_n)$ con la misma función de distribución. Nombrando $(L+L')_i := L_i + L'_i$ y $(L+L')_{i,n}$ para obtener el estadístico de orden $(L+L')_1, \ldots, (L+L')_n$ donde se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(L+L')_{i,n} = \sup\{(L+L')_{i_1} + \cdots + (L+L')_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq m\}\\ \leq \sup\{L_{i_1} + \cdots + L_{i_m} : i_1 < \cdots < i_m \leq m\}\\ + \sup\{L'_{i_1} + \cdots + L'_{i_m} : i_1 < \cdots < i_m \leq m\}\\ = \sum_{i=1}^{m} L_{i,n} + \sum_{i=1}^{m} L'_{i,n}\end{aligned}$$

donde si establecemos $m = [n(1-\alpha)]$ y hacemos que $n \to \infty$, usando el lema anterior tenemos que $ES_\alpha(L+L') \leq ES_\alpha(L) + ES_\alpha(L')$, cumpliendo la sub-aditividad. Por lo tanto el $ES_\alpha(L)$ es una medida coherente. ■

1.10. Métodos estándar para la medición de riesgos

En esta parte vamos a estudiar los métodos más comunes que se usan para medir los riesgos de mercado en periodos cortos de tiempo como pueden ser diarios, semanales, e incluso por horas dependiendo de la exactitud ó de la metodología para llegar a la distribución de pérdida $L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1})$, donde (X_{t+1}) es el vector de factores de riesgo de tiempo t a $t+1$ y $l_{[t]}$ es el operador de pérdida del portafolio a tiempo t.

1.10.1. Método de varianzas y covarianzas

Este método puede ser utilizado de forma condicional o incondicional, dependiendo del objetivo del estudio. Asumimos que el vector de factores de riesgo X_{t+1} tiene una distribución normal multivariada $X_{t+1} \sim N_d(\mu, \sum)$ donde $\mu \in \mathbb{R}^d$ es la media del vector y $\sum \in \mathbb{R}^{d\times d}$ la matriz de varianzas y covarianzas.

Se asume que la combinación lineal en términos de los factores de riesgo es una aproximación lo suficientemente exacta de la pérdida real, lo cual simplifica el problema $L^{\Delta}_{t+1} = l^{\Delta}_{[t]}(X_{t+1})$ donde $l^{\Delta}_{[t]}$ esta definido como $l^{\Delta}_{[t]}(x) :=$

$-\left[f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^{d} f_{Z_i}(t, Z_t)X_i\right]$ y definiremos el operador de pérdida linealizado como una función: $l_{[t]}^{\Delta}(x) = -(c_t + b_t'x)$; donde c_t es una constante y b_t un vector constante, ambos conocidos a tiempo t. Debido a que es una normal multivariada es que podemos decir que X_{t+1} debe tener una distribución normal univariada de la cual podemos obtener la media y la varianza como combinación lineal de variables aleatorias:

$$L_{t+1}^{\Delta} = l_{[t]}^{\Delta}(X_{t+1}) \sim N(-c_t - b_t'\mu, b_t' \sum b_t)$$

Para el análisis practico de una distribución incondicional de pérdida se requiere la estimación de μ y $\sum$ basados en el cambio histórico de los factores de riesgo $X_{t-n+1}, \ldots, X_t$, el cual se calcula simplemente como la media del vector y la matriz de covarianzas.

Por el contrario para una distribución condicional se asume que $X_{t+1}|\mathcal{F}_t \sim N_d(\mu_{t+1}, \sum_{t+1})$ donde μ_{t+1} y $\sum_{t+1}$ son la media condicional y la matriz de covarianza dada la información a tiempo t respectivamente; por ejemplo una aproximación de series de tiempo multivariado.

La debilidad de este método consiste en que la linealización no siempre ofrece una buena aproximación de la relación entre la distribución de pérdida y los cambios de factores de riesgo.

1.10.2. Simulación histórica

Este método lo que busca es la estimación de la distribución del operador de pérdida $L = l_{[t]}(X_s)$ con la distribución empírica de datos $X_{t-n+1}, \ldots, X_t$. Para esto se construye una base de datos univariados aplicando el operador de riesgo a cada uno de los datos históricos del vector de cambio de factores de riesgo, para obtener pérdidas históricas simuladas:

$$\tilde{L}_s = l_{[t]}(X_s) : s = t - n + 1, \ldots, t$$

Los valores de $\tilde{L}_s$ muestran lo que pasaría al portafolio si los factores de un día se llegaran a repetir. Realizándose una inferencia sobre la distribución de pérdida y medidas de riesgo usando simulaciones de los datos históricos. Este método es no condicional ya que se tiene de supuesto que el proceso de cambio de los factores de riesgo es estacionario con función de distribución F_X, entonces la f.d.d. empírica de los datos es consistente con el estimador F_X; es decir que la función de distribución empírica $\tilde{L}_{t-n+1}, \ldots, \tilde{L}_t$ es un estimador consistente de $l_{[t]}(X)$ sobre F_X. Basado en el teorema de los grandes números para series de tiempo, tenemos que para $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} F_n(l) : \quad &= \quad \frac{1}{n} \sum_{s=t-n+1}^{t} I_{\{\tilde{L}_s \leqslant l\}} && (1.1)\\ &= \quad \frac{1}{n} \sum_{s=t-n+1}^{t} I_{\{l_{[t]}(X_s) \leqslant l\}} && (1.2)\\ &\Longrightarrow \quad \mathbb{P}[l_{[t]}(x) \leqslant l] = F_L(l) && (1.3) \end{aligned}$$

donde X es una vector de factores de riesgo generico con distribución F_X y $L := l_{[t]}(x)$

En la practica para estimar el VaR usando el método de estimación empírico de cuantil, donde los cuantiles teóricos de la distribución de pérdida que son estimados por una muestra de cuantiles de los datos, ya que si ordenamos los valores de la muestra $\tilde{L}_{n,n} \leqslant \cdots \leqslant \tilde{L}_{1,n}$ un posible estimador del $VaR_\alpha(L)$ es $\tilde{L}_{[n(1-\alpha)]}$ que es el menor entero de $n(1-\alpha)$.

Esta metodología es de fácil implementación y reduce el problema a una dimensión para la estimación del estimador, sin la suposición de dependencia de los factores de cambios de riesgo. El éxito de la metodología radica en la recolección de los datos para el cálculo de los factores de riesgo, por lo que es importante el manejo de los huecos en la base de datos, así como satisfacer nuevos factores de riesgo. Estos problemas tendrán a reducir el valor efectivo de "n" y la media de las estimaciones empíricas del VaR y el ES tienen poca precisión.

El caso ideal de los datos es que "n" sea muy grande ya que el método es incondicional por lo cual se requieren varios escenarios extremos en el registro histórico para proveer más estimadores de la cola de la distribución de pérdida.

Capítulo 2

Riesgo de crédito

El *riesgo de crédito* es la posible pérdida que asume un agente económico como consecuencia del incumplimiento de las obligaciones contractuales que posiblemente incumben a las contrapartes con las que se relaciona.

El crédito tiene dos posturas de las cuales puede ser estudiado, es decir, la postura del deudor y la del acreedor; para razones de este trabajo tomaremos la posición de un acreedor. Por lo que manejamos como evento de incumplimiento en riesgo de crédito es cuando el deudor no es capaz de hacer frente a sus obligaciones también conocido como *riesgo de incumplimiento.* Este evento puede darse por múltiples causas como son: quiebra de la empresa, pérdida de tarjeta de crédito, fraudes, situaciones sociales, etc.

El estudio del riesgo de crédito existe una distinción entre el tipo de probabilidad de incumplimiento que maneja, uno es real y otro es implícito. La probabilidad real corresponde a las observaciones directas de los valores, conocida como *la probabilidad de incumplimiento o fallo* en fianzas; mientras que la probabilidad implícita que se refiere a la probabilidad de incumplimientode proveniente del mercado como son la especulación, rendimientos de bonos y acciones, etc.

2.1. Definiciones usuales

Definición. ***Pérdida*** son las amortizaciones no cubiertas por el deudor; una pérdida en riesgo de crédito es una vez dado el incumplimiento por parte del deudor en un horizonte de tiempo determinado se convertirán en pérdidas para la Institución Financiera.

Definición. Pérdida esperada (EL). *Expected loss.* Es la esperanza de que los deudores de un portafolio no cumplan sus obligaciones con su acreedor.

En este caso, se refiere a la media de la variable aleatoria de pérdidas por riesgo de crédito.

La idea básica de pérdida esperada la siguiente: supongamos que el banco asigna una probabilidad de incumplimiento a cada uno de sus usuarios, y una cantidad que se perdería por cliente en caso de incumplimiento, gastos administrativos, de cobranza, etc.; sumando estas cantidades obtendríamos la exposición al riesgo en el periodo.

Una entidad financiera esta expuesta a una situación de incertidumbre, debido a la cual desea tener una protección ante la pérdida repentina por la posibilidad de falta de pago de los clientes. En el caso especifico de las instituciones bancarias deben contar con una reserva de pérdida esperada, creada para cubrir las posibles pérdidas provenientes de la deuda emitida por la institución.

Definición. Probabilidad de incumplimiento (PD). *Probability of default.* Es la probabilidad de que el deudor deje de cumplir sus obligaciones contractuales. La cual se denomina como $(P_t)_{t\geqslant 0}$, donde t denota un punto de tiempo en el intervalo $[0,t]$. La función de las probabilidades de incumplimiento son conocidas como *curvas de crédito.*

Definición. Exposición al incumplimiento(EAD). *Exposure at default.* Esta cantidad que deben los deudores al momento de incumplimiento.

Definición. Severidad de la pérdida (LGD). *Loss given default.* Esto es lo que pierde un acreedor en caso de incumplimiento de los deudores; LGD es un monto de dinero y se mide como un porcentaje de la exposición.

Siguiendo esta idea básica definimos en una variable de pérdida $\tilde{L}$,

$$\tilde{L} = EAD \times LGD \times L \qquad donde \quad L = I_D$$

es decir,

$$\tilde{L} = \begin{cases} EAD \times LGD & \text{si hay incumplimiento} \\ 0 & \text{si no hay incumplimineto} \end{cases}$$

NOTA: Las cantidades PD, EAD y LGD como otras cantidades derivadas de ellas mismas, son medidas en un tiempo especifico.

2.2. Exposición al incumplimiento (EAD)

Retomando la idea de exposición al incumplimiento o exposure at default que es: *La cantidad que debe la contraparte al momento de incumplimiento*, podemos decir que es la exposición del banco contra el prestamista. Los bancos otorgan líneas de crédito las cuales funcionan como un límite de crédito para la exposición al incumplimiento de un solo deudor.

Por ejemplo, supongamos una mediana empresa cuya linea de crédito tiene un límite de crédito de 20 mil pesos. Asumiremos que esta línea de crédito tiene la siguiente estructura:

- El límite de la línea de crédito es de 20 mil pesos.
- El prestamista puede disponer de un máximo de 12 mil pesos en efectivo, dejando los 8 mil pesos restantes como pasivo contingente, es decir, un adeudo que no sé ha concretado pero tiene una posibilidad de ocurrir.

Por otro lado también se toma en cuenta las amortizaciones por el prestamista, que afecta directamente el valor EAD,

$$EAD_{efectivo} = I_D \times X \times [\text{límite de efectivo} - \text{efectivo tomado}](\text{U.M.})$$

donde:
D es el evento de que el prestamista tome efectivo de la línea de crédito.
$I_D \sim Ber(D)$
X es la variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde $X(w) \longrightarrow [0,1]$ para cada $w \in \Omega$; la cual describe la fracción que se va a retirar del efectivo disponible en la línea de crédito.

Otra parte de la exposición al fallo es el factor de conversión de crédito (CFF por sus siglas en inglés *Credit conversion factors for off-balance sheet exposures*), este factor afecta la exposición desde fuera de la hoja de balance, por ejemplo la garantía que ofrece el usuario al momento de tomar el crédito, esta se encuentra fuera de la contabilidad del banco; pero puede ser requerida por la institución en el momento que exista incumplimiento por parte del usuario.

La probabilidad de que esto ocurra es lo que conoceremos como el CFF, el cual multiplicaremos por el valor neto de la garantía para obtener el valor esperado de la exposición crediticia.

Notemos que entonces contamos con dos diferentes probabilidades que puede hacerse más compleja si tomamos en cuenta que se puede seguir retirando efectivo de la fracción restante si es que no se retiró ya por completo.
Asumiendo una independencia entre I_D y X, la cual nos deja una exposición esperada efectiva para la parte de efectivo no usada de la línea de crédito como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[EAD_{efectivo}] &= \mathbb{E}[I_D] \times \mathbb{E}[X] \times [\text{efectivo disponible}](\text{U.M.}), \quad \mathbb{E}[I_D] = \mathbb{P}(D) \\
&= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{E}[X] \times [\text{efectivo disponible}](\text{U.M.})
\end{aligned}$$

El monto restante de la línea de crédito podría ser utilizado para crear el pasivo contingente, los cuales están sujetos a distintas variables aleatorias.

2.3. Pérdida dado el incumplimiento (LGD)

El *loss given default (LGD)* se ve como la transacción determinada por "Uno menos la tasa de recuperación", es decir, que **LGD cuantifica la porción de pérdida que el banco sufriría en caso de incumplimiento**. La tasa de recuperación es un porcentaje cuyo pago está garantizado por medio de otros productos financieros, como colaterales, derivados, etc.; incluso por el mismo pago de las amortizaciones realizadas por el deudor. Un producto *colateral* es un activo de respaldo, es también llamado activo subyacente por ejemplo: derecho de cobro, inversiones, hipoteca, etc.

Hay que tener claro que LGD puede ser visto de distintas perspectivas, la primera como un monto de dinero ($LGD) y otro como un porcentaje de pérdida. Asumamos que un cliente tiene m productos crediticios con el banco y n productos de colaterales del banco para la recuperación en caso de incumplimiento, entonces a cada producto crediticio se le asigna un $\$EAD$ visto como monto de efectivo, por lo que para m productos tenemos $\$EAD_1, \ldots, \$EAD_m$, así como a los n colaterales de recuoperación les asignamos $\$REC_1, \ldots, \$REC_n$. Por lo que el universo consiste en m productos y n colaterales, a lo que llamamos *situación de* m a n.

Para obtener el balance neto de incumplimiento del cliente, se obtiene mediante

$$\$LGD = \text{máx}\left(0, (\$EAD_1 + \cdots + \$EAD_m) - (\$REC_1 + \cdots + \$REC_n)\right)$$

y como porcentaje obtenemos

$$LGD = \frac{\$LGD}{\$EAD_1 + \cdots + \$EAD_m}$$

Por lo cual otra definción es la siguiente:

$$\%\text{Recuperación} = \frac{\text{Valor presente de la recuperación} - \text{Costos de recuperación}}{\text{Importe de la deuda en el momento de incumplimiento}}$$

Por lo tanto:

$$LGD = 1 - \ \%\text{Recuperación}$$

El riesgo de crédito puede ser discernido por los tipos de probabilidad de incumplimiento, uno por ser explicito y el otro implicito. El enfoque de la probabilidad de incumplimiento implícita y explicita se les conocen como *credit spred puzzle* y *actual default* respectivamente.

Credit Spread Puzzle. Este se basa en la diferencia entre el valor inicial y el valor final de un bono corporativo, donde el exceso de rendimiento comparado con los bonos libres de riesgo en el mismo periodo de maduración.

Para esto necesitamos definir el tiempo de incumplimiento τ como la primera vez que la empresa no puede hacer frente a sus obligaciones en un periodo determinado, y el precio de un bono como una función $B(t,T)$.

Entonces consideramos un bono cupón cero con valor nominal unitario, es decir $B(T,T)=1$ y el tiempo de maduración T, definimos el *rendimiento a tiempo de maduración*, $t<T$ como la tasa de rendimiento compuesto continuamente hasta que el precio se a uno al tiempo T,

$$B(t,T)e^{(T-t)Y(t,T)}=1 \qquad \Longrightarrow Y(t,T)=-\frac{\log B(t,T)}{T-t}$$

donde $B(t,T)$ es el precio esperado del bono

$$B(t,T)=\mathbb{E}[\exp\{-\int_t^T (r(s)+\lambda(s))\mathrm{d}s\}]$$

y $r(s)$ es la tasa de interés y $\lambda(s)$ la tasa de incumplimiento.

La ***tasa de riesgo o incumplimiento*** esta definida por la tasa instantánea de incumplimiento condicionado por:

$$\lambda(t)=\lim_{h\downarrow 0}\mathbb{P}(t\leqslant\tau<t+h|\tau\geqslant t)=\frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.1}$$

Esta función indica la posibilidad de incumplimiento inmediato dado que el crédito esta vigente en ese momento. Un caso especifico es cuando $\lambda(s)\equiv 0$, con lo que tendríamos las características de un bono libre de riesgo $B_0(t,T)$ y un rendimiento inicial $Y_0(t,T)$. Por lo que el margen de crédito *"Spread"* que es la diferencia entre el precio de compra y el precio de venta de un activo, lo podemos calcular en el caso de los bonos como:

$$\begin{aligned} Spread(t,T) &= Y(t,T)-Y_0(t,T) \\ &= -\frac{\log(B(t,T)/B_0(t,T))}{T-t} \\ &= -\frac{\log(1-q(t,T))}{T-t} \end{aligned}$$

donde $q(t,T)=\mathbb{E}[\exp\{-\int_t^T\lambda(t)\mathrm{d}s\}]$ que es la probabilidad condicional $\mathrm{P}[\tau\leqslant T|\tau>t]$, donde τ es el tiempo de incumplimiento:

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0: F(t)\leqslant 0\} \quad \text{donde} \quad \inf 0=\infty$$

Actual default. Es el otro mundo del riesgo de crédito, que es el estudio de la probabilidad de riesgo de abajo hacia arriba en la estructura de crédito, es decir usuario a empresa. En la practica la industria incluye lo siguiente:

a) La *calificación de crédito* en finanzas corporativas establecidas por agencias de calificación como Moody, Standar & Poors y Fitch.

b) La *puntuación de crédito* en crédito de consumo de los usuarios establecidas por agencias como Equifax, Experian y TransUnion.

Las calificación y puntuación crediticia representa el valor crediticio de las corporaciones financieras y el usuario respectivamente. Las evaluaciones llevadas acabo por las agencias son calculadas con modelos estadísticos que obtienen la probabilidad esperada de incumplimiento; por ejemplo la agencia Moody utiliza un sistema de letras para calificación: AAA, AA, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, C, para representar la probabilidad de incumplimiento del más bajo al más alto.

Mientras que la puntuación de crédito al consumo, tiene un sistema conocido como FICO(por su desarrollador Fair Isaac Corporation), que se extiende de los 300 puntos que es muy mala hasta los 850 que es la mejor, y tiene el objetivo representar la calidad crediticia de un prestatario indicando si va a pagar su deuda.

2.4. Distribución de pérdidas

Definimos una variable de pérdidas L, que esta compuesta por tres factores que son: el indicador de incumplimiento, la exposición al incumplimiento y la severidad del incumplimiento. Donde la *severidad al incumplimiento* es una variable aleatoria referente a la proporción de EAD que será asumida como pérdida cuando se incurra en incumplimiento. Por lo que si consideramos que el portafolio tiene m créditos, las pérdidas que el portafolio puede ocasionar a la institución por el incumplimiento en el horizonte de tiempo $[0, T]$ será:

$$L = \sum_{j=1}^{m} \tilde{L}_j \qquad \text{donde } \tilde{L}_j \text{ es la pérdida del j-ésimo crédito en } [0, T]$$

El factor EAD no es considerada variable ya que se determina al momento de otorgar el crédito y SEV e I_D son variables aleatorias independientes debido a que la estimación de LGD se realiza sobre un grupo de observaciones distintas de probabilidades de incumplimiento. Por lo que podemos escribir:

$$L = \sum_{j=1}^{m} \tilde{L}_j = \sum_{j=1}^{m} [EAD_j \times SEV_j \times I_{D_j}]$$

La variable aleatoria L y su distribución son vitales para el cálculo de reservas en riesgo de crédito, como los requisitos del Comité de Supervisión Bancaria de Basilea.

Definición. Pérdida esperada.(EL) *Expected loss.*
Sea la variable $\tilde{L} = EAD \times LGD \times I_D$ de pérdida, el valor esperado es:

$$\mathbb{E}[\tilde{L}] = EL$$

es llamado la *pérdida esperada* del activo subyacente en riesgo de crédito.

Supongamos que los componentes de $\tilde{L}$ son independientes, entonces la pérdida esperada puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} EL = \mathbb{E}[\tilde{L}] &= \mathbb{E}[EAD] \times \mathbb{E}[LGD] \times \mathbb{E}[I_D] \\ &= \mathbb{E}[EAD] \times \mathbb{E}[LGD] \times PD \end{aligned}$$

donde $\mathbb{E}[I_D] = PD$, entonces $I_D \sim Ber(PD)$.

Ya que si los tres factores de $\tilde{L}$ son independientes entonces la esperanza de productos es el producto de las esperanzas y como EAD y LGD son valores constantes:

$$EL = EAD \times LGD \times PD$$

Entonces bajo el supuesto de que las variables de las cuales esta compuesta $\tilde{L}$ son independientes, tenemos

$$EL = \mathbb{E}[\tilde{L}] = \mathbb{E}[EAD \times LGD \times L] = \mathbb{E}[EAD \times LGD \times I_D]$$

$$\text{donde} \quad L = I_D \sim Ber(PD)$$

$$\Longrightarrow EL = \mathbb{E}[EAD] \times \mathbb{E}[LGD] \times \mathbb{E}[I_D] = \mathbb{E}[EAD] \times \mathbb{E}[LGD] \times PD$$

y como EAD y LGD son valores constantes, debido a que son vistos como un montos de efectivo,

$$EL = EAD \times LGD \times PD \qquad \blacksquare$$

2.5. Calificaciones

Las calificación son una opinión prospectiva sobre la calidad crediticia de un deudor respecto a una obligación financiera específica, resultado del análisis se la información pública y privada de fuentes relevantes de la empresa.

Originalmente las calificaciones no están derivadas de las PD ya que únicamente son utilizadas para calificar la calidad del crédito. La asignación de probabilidades de incumplimiento a los clientes es llamado *sistema de calificación*, y que puede ser visto como una discretización de las PD de forma ordinal, denominada *escala de calificación*, representada a través de una combinación de letras, donde una probabilidad baja de incumplimiento esta representada por AAA en la cual necesitamos un capital de reserva menor que con una calificación BB, e incluso con una C. Por ejemplo:

AAA	Crédito de alta calidad, extremamente confiable.
AA	Crédito de buena calidad, muy confiable.
A	Crédito susceptible a las condiciones económicas, sigue siendo un crédito de buena calidad.
BBB	Calificación menor en el grado de inversión
BB	Precaución necesaria. Mejor calidad de crédito para subinversiones.
B	Vulnerable a los cambios en las condiciones económicas. Actualmente se muestra capaz de cumplir sus obligaciones financieras.
CCC	Actualmente vulnerable al incumplimiento. Dependiente de condiciones económicas favorables.
CC	Altamente vulnerable al incumplimiento.
C	Próximo a la bancarrota. El pago de sus obligaciones continua.
D	El incumplimiento del pago de algunas de sus obligaciones ha ocurrido actualmente.

Tabla 2.1: S&P Calificaciones de emisión de crédito.

2.6. Sistemas de calificación

2.6.1. Sistemas de calificación causal

Consiste en un mecanismo que analiza las relaciones que existen entre el subyacente del manejador y el evento de fallo de la acción o prestatario. Un ejemplo es la calificación a los tramos de las obligaciones financieros que tienen colaterales (CDO), comúnmente son de tipo causal debido a que el modelo CDO deriva en escenarios donde estos tramos se ven afectados por una pérdida, así como la severidad, consecuencia directa de las *"turbulencias"* en el subyacente del portafolio de riesgo de crédito.

El sistema causal de calificaciones se basa en un mecanismo sobre las relaciones causales entre el portafolio y el evento de incumplimiento. Un ejemplo de calificación son los contratos colaterales de obligaciones de deuda (CDO por sus siglas en inglés), que comúnmente son de tipo causal, este modelo de CDO deriva en múltiples escenarios son considerados tramos afectados por una pérdida, así como tasar la severidad. Por lo que se pueden hacer una escala de calificaciones a través de esta combinación de letras.

Este modelo obliga a tomar en cuenta y entender cómo las causas de incumplimiento pueden suceder y cómo las pérdidas se van acumular bajo ciertas circunstancias, dando pie al desarrolo de modelos como el Moody's KMV, el cual esta en constante modificación de calificaciones y recalculando sus probabilidades de cambio de calificación.

2.6.2. Hoja de balance de calificaciones

En algunas situaciones una aproximación del sistema causal es difícil de construir directamente con el mecanismo de incumplimiento, por lo que el sistema de calificación causal no es una buena opción. Muchas compañías cuentan con una calificación externa, la cual es asignada por una agencia especializada, usando una hoja de balance de calificaciones para aproximar una calificación interna de la empresa.

Un analista debe tomar en cuenta las características cualitativas y cuantitativas de una empresa para hacer una proyección del futuro, por ejemplo:

- Ganancias futuras y flujos de efectivo
- Pasivos, obligaciones futuras a corto y largo plazo
- Estructura del capital
- Liquidez de las acciones
- Situación económica y política del país en que se encuentra la empresa; situación del mercado.
- La estructura de la empresa, planificación a corto y largo plazo, contar con una administración de calidad, etc.

La hoja de balance y reporte anual de la empresa acreedora es la fuente de información, cuyo contenido no es del todo enriquecedor, por lo que el analista construye en base a la hoja de balance una nueva hoja de balance con rangos basado en la calificación de la empresa en caso de fallo remoto. La calificación de la empresa acreedora esta calibrada con el PD basado en la frecuencia histórica de fallo, como sigue:

$$PD_{empresa} = \frac{1}{1 + \exp\left(-SCORE_{esmpresa}\right)} \tag{2.2}$$

donde el $SCORE_{empresa}$ representa la calificación final basado en las suma de rangos transformados. Un ejemplo típico de puntaje de crédito para el caso de créditos empresariales es el propuesto por Altman (1968)

Calificación privada de la empresa. Es un mecanismo básico en el mismo pero el orden de las calificaciones es distinto. Por ejemplo, se toma en cuenta la riqueza personal, ingresos, contexto social; para otorgar una calificación privada de la empresa.

2.6.3. Sistema de calificación experto

Existen portafolios los cuales a pasar de los años es difícil que presenten un fallo, en esta situación es difícil de manejar únicamente con la hoja de balance, debido a que el número de fallos es tan bajo que realizar una estadística. Estos portafolios son llamados *portafolios de bajo incumplimiento.*

Por lo que el análisis de estos portafolios aplica técnicas como métodos de respuesta ordinal para establecer una calificación de lejanía del fallo y calibrar la PD para un cliente, las aproximaciones son llamadas *sistema de calificación experto.*

2.6.4. Calibración entre las probabilidades de incumplimiento y la calificación

El proceso de asignar una probabilidad a una calificación es llamado *calibración*. El resultado final de proceso de calibración de probabilidades de incumplimiento a las calificaciones es un mapeo de probabilidades de incumplimiento.

$$R \longrightarrow PD(R)$$

donde dada una calificación R que tiene asignado una probabilidad de incumplimiento.

El proceso de calibración tiene los siguientes pasos:

I.- Definimos como $h_i(R)$ la frecuencia histórica de fallo de la calificación R en el año que se tiene registros, diremos que es el año 0, hasta el año actual t. Se calcula la media y la desviación estándar.

$$m(R) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{t} h_i(R), \qquad \text{donde n es el número de años en el rango}$$

$$s(R) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{t}(h_i(R) - m(R))^2}$$

La media $m(R)$ de la calificación R es una primera estimación de la probabilidad potencial de incumplimiento asignado a R y la desviación entandar $s(R)$ refleja la idea de la volatilidad y el error que $m(R)$ puede presentar.

II.- A continuación se realiza un mapeo de los valores esperados, es decir, $m(R)$ donde el eje x toma por clases las calificaciones. Posteriormente realizaremos una regresión lineal a las medias de las frecuencias $m(R)$; a modo de comentario fuerte existe evidencia de que las frecuencias de incumplimiento tienen un crecimiento exponencial con un decrecimiento de solvencia. Por ejemplo, usndo un ajuste exponencial con escala logaritmica, es decir, tendremos algo con esta forma:

$$PD(x) = a \times e^{bx}, \qquad x = 1, \ldots, 16$$

donde x son las califiaciones que están numeradas de 1 (Aaa) al 16 (B3); a,b son constantes obtenidos de la regresión exponencial.

III.- El último paso es usar la ecuación de regresión para la estimación de probabilidades de incumplimiento $PD(x)$ asignados a las clases x que corren del 1 al 16. La ecuación de regresión ha suavizado los errores de la muestra de datos históricos.

2.7. Modelos de riesgo de crédito

El acuerdo de Basilea II y el desarrollo del mercado de derivados genero un interés en los modelos de riesgo de crédito, creando un subcampo activo de las finanzas cuantitativas y la administración de riesgo. Existen dos grandes áreas de aplicación, que son: *la administración de riesgo de crédito y el análisis de los valores en riesgo crediticio.*

Naturaleza del problema

- **Falta de información pública y datos.** La información disponible de la calidad de las empresas de crédito es usualmente muy escasa. Esto genera problema para los préstamos corporativos, ya que para la administración de la empresa en mejor estar informado acerca de los verdaderos datos y proyectos económicos de la empresa ya que el riesgo de incumplimiento depende de este factor.

  Estadísticamente la falta de datos públicos es un obstáculo para la aplicación de los métodos estadísticos, debido a que estos modelos se realizan en un horizonte de tiempo anual se considera esta falta de datos "costosa" para la calibración de los modelos de riesgo de crédito.

- **Distribución de pérdida desigual.** Usualmente las distribuciones de pérdida de crédito son fuertemente desiguales con una cola superior pesada [1], al paso de los años el portafolio de crédito producirá constantes ganancias acompañadas por grandes pérdidas ocasionales. Por lo cual una cantidad razonable para capital de riesgo es requerida para un portafolio de deuda el cual es calculado con el cuantil 99.97 % de la distribución de pérdida.

- **El papel de la dependencia en el modelo.** La causa de mayor preocupación en la administración de riesgos de crédito es la ocurrencia desproporcionada en un periodo de tiempo por fallos. Este riesgo está directamente relacionado con la estructura dependiente de los eventos de fallo; la ocurrencia de fallos tiene un impacto en la cola superior de la distribución de pérdida.

---

[1]**Definición** *Sea una función de distribución F sobre $(0, \infty)$ es de cola pesada si para todos $t > 0$*

$$M(t) = \infty$$

donde $M(t) = E[e^{tX}]$ es la función generadora de momentos de la variable aleatoria X.

Para mayor información sobre distribuciones de cola pesada consultar Mikosch T.*Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes. Springer, 2004.*

Los modelos de administración de riesgo de crédito son usados para determinar la distribución de pérdida de un bono o deuda del portafolio en un periodo de tiempo así como la distribución de pérdida basado en las medidas de riesgo con el objetivo de hacer las reservas de riesgo de crédito. Estos modelos por lo regular son estáticos, lo que significa que esta enfocado en la distribución de pérdida en un periodo de tiempo con el objetivo de describir la evolución del riesgo a través del tiempo. Mientras que para el análisis de los valores en riesgo crediticio se usan modelos dinámicos, que son necesarios ya que el precio del valor depende del momento exacto del tiempo en que se encuentre.

Dependiendo de la formulación del problema se puede dividir los modelos como: *modelos estructurales o del "valor de la empresa"* y *modelos de forma reducida*.

2.8. Modelos estructurales

Estos modelos conocidos como del *valor de la empresa* debido a que la empresa no puede determinar el valor contractual de la deuda asumida ya que esta esta relacionada con el valor de sus acciones. Este enfoque fue inspirado en la metodología Black-Scholes-Merton para la valuación de acciones en la década de 1970.

El modelo antecesor de los modelos estructurales es el modelo de Merton(1974), el cual propone un mecanismo que mide la probabilidad de incumplimiento de una empresa en términos del valor de sus acciones y obligaciones que tiene al final de un periodo de tiempo y otro modelo es *"el primer tiempo de paso"*(Black y Cox, 1976).

Por otro lado los modelos dinámicos del valor de la empresa representan el incumplimiento a través del tiempo mediante una variable aleatoria que representa la caída del valor accionario por debajo del umbral establecido por las obligaciones.

2.8.1. Modelo de Merton

El modelo de Merton es un prototipo de los modelos estructurales con sus múltiples extensiones. Para este modelo se considera una empresa tal que el valor de sus acciones sigue un proceso estocástico (V_t), conformando un sistema de financiamiento por el cual tiene capital y emisión de deuda.

La emisión de deuda es a través de bonos, con el objetivo de obtener fondos de los mercados financieros a un periodo definido y una tasa de interés fija. Uno de los bonos más comunes en el mercado son los bonos cupón cero, este instrumento no paga intereses durante el periodo de maduración, es decir, cuando el bono es devuelto a un valor nominativo B; la ganancia de este bono es que el precio de emisión del bono es menor al valor nominativo B.

En el modelo la deuda es manejada con una estructura simple por medio de un cupón cero con tiempo T de maduración y valor nominal B, el cual de denota por B_t el cual es el valor de venta del bono cupón cero ya que este va aumentando conforme el tiempo de maduración; y el valor facial de la deuda emitida por la empresa se denota por S_t el cual puede ser mayor, igual o inferior al valor de mercado; asumiendo que es un mercado sin fricciones (es decir que no realiza pagos de impuestos u otras operaciones) y que el valor de las acciones de la empresa es simplemente la suma de ellas mismas. Esto es:

$$\Longrightarrow V_t = S_t + B_t \qquad , \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

También se asume que no se adquiere nueva deuda durante el periodo y no se pagan dividendos a los accionistas, así mismo el valor del bono solo adquiere sentido al tiempo de maduración T por lo que denotaremos el B_t como únicamente B. El incumplimiento ocurre cuando la empresa no puede hacer frente a sus obligaciones adquiridas llegado el tiempo de maduración T. Por lo que podemos tener dos casos:

- $V_t > B$ Lo cual nos indica que el valor de las acciones sobrepasa el valor de las obligaciones, por lo que la empresa obtendrá $S_t = V_t - B_t$, es decir $S_t > 0$ y entonces no existe incumplimiento.

- $V_t \leqslant B$ Nos indica que la empresa no ha podido cumplir con sus obligaciones, ya que el valor de las acciones es inferior al de las obligaciones. Por lo que la empresa se declara en bancarrota y se liquida para poder cubrir el resto de las obligaciones.

En resumen, obtenemos las siguientes relaciones:

$$S_T = \text{máx}(V_T - B, 0) = (V_T - B)^+ \tag{2.3}$$

$$B_T = \text{mín}(V_T, B) = B - (B - V_T)^+ \tag{2.4}$$

La ecuación (2.3) muestra el valor de la firma a tiempo T, es igual al pay-off de una opción call europeo en V_T, mientras que (2.4) nos muentra que la deuda de la empresa a tiempo de maduración, es el valor nominal de las obligaciones menos el pay-off de una opción put europea en V_T con precio de ejercicio B.

En el modelo Merton se asume que el proceso (V_t) se distribuye como un movimiento Browniano geométrico. Es decir:

$$V_T = V_0 e^{(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V W_t}$$

donde $\mu_V \in \mathbb{R}$,$\sigma_V > 0$ constantes, W_t es un proceso de Wiener. En particular $ln(V_t) \sim N(\ln V_0 + (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T, \sigma_V^2 T)$. Con lo que podemos calcular la probabilidad de incumplimiento como, usando la solución de V_t

$$\ln V_t = \ln V_0 + (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V W_t \qquad \text{donde } \mathbb{E}(W_t) = 0$$

$$\Longrightarrow \ln V_t = \ln V_0 + (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V \sqrt{T} N(0,1)$$

lo que nos indica que el modelo de Merton que tendríamos que $V_T \leqslant B$, cuando el valor de la empresa esta debajo del umbral B; la expresión final de la probabilidad de incumplimiento es:

$$\mathbb{P}(V_T \leqslant B) = \mathbb{P}(\ln V_T \leqslant \ln B) = \Phi\left(\frac{\ln(\frac{B}{V_0}) - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) \quad , \quad \Phi \sim N(0,1) \tag{2.5}$$

Podemos observar en (2.5) que la probabilidad de incumplimiento es creciente en B y decreciente en V_0 y μ_V, cuando $V_0 > B$, es creciente en σ_V el cual es perfectamente correcto en la intuición económica,ya que *"a mayor deuda es mayor la probabilidad de incurrir en incumplimiento"*.

Evaluando en el modelo Merton

En este modelo podemos evaluar los valores en términos del pay-off de V_t al tiempo de madurez T. Para lo que tenemos los siguientes supuestos:

(I) Se tiene un mercado financiero sin fricciones en continuo movimiento, es decir, sin gastos por operación, impuestos, etc.

(II) La tasa de interés libre de riesgo es determinista y denominada por $r \geqslant 0$.

(III) El proceso de evaluación de valores (V_t) es independiente de como la empresa es financiada, en particular del nivel de deuda adquirida B.

Resultados generales

Considerando el valor de la empresa a tiempo de maduración T y el pay-off $h(V_T)$, el cual tenemos en la ecuación (2.1) y (2.2). Usando dos formas de calcular el valor justo mediante la derivada $f(t, V_t)$ a tiempo $t \leqslant T$, bajo la derivada parcial que se aproxima a la función $f(t, v)$, la cual se obtiene resolviendo la ecuación derivada parcial:

$$rf(t,v) = f_t(t,v) + \frac{1}{2}\sigma_V^2 v^2 f_{vv}(t,v) + rvf_u(t,v) \qquad \text{para } t \in [0,T) \tag{2.6}$$

Con la condición $f(T, v) = h(v)$ donde se refleja la forma exacta de la demanda a un precio. Donde la ecuación (2.5) es la derivada parcial de Black-Scholes. Por lo que otra alternativa de cálculo de $f(t, V_t)$ es como la expectativa del valor del pay-off bajo la medida neutral de riesgo Q(llamada *aproximación de precio de riesgo neutral*).

Sobre la medida Q el proceso (V_t) satisface una ecuación diferencial estocástica $\mathrm{d}V_t = rV_t \mathrm{d}\tilde{W}_t$, para un movimiento Q-Browniano $\tilde{W}$ y μ_v fue remplazado por la tasa libre de riesgo r. La regla de precio de riesgo neutral queda como:

$$f(t, V_t) = E^Q\left(e^{-r(T-t)}h(V_T)|\mathcal{F}_t\right) \tag{2.7}$$

donde E^Q denota la esperanza bajo la medida Q.

Aplicación en el equilibrio y deuda

De acuerdo con la ecuación (2.1), el equilibrio de la empresa corresponde a una opción de call europea sobre (V_t) con un precio de ejercicio B a tiempo de maduración T. La solución de la ecuación derivada parcial (2.5), o el valor de riesgo neutral de la ecuación (2.6), obtenemos la opción call europea con Black-Scholes C^{BS}, como:

$$S_t = C^{BS}(t, V_t; r, \sigma_V, B, T) := V_t\Phi(d_{t,1}) - Be^{-r(T-t)}\Phi(d_{t,2}) \tag{2.8}$$

donde:

$$d_{t,1} = \frac{\ln V_t - \ln B + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}} \qquad y \qquad d_{t,2} = d_{t,1} - \sigma_V\sqrt{T-t}$$

Entonces sobre la medida de riesgo neutral Q la distribución de acciones logarítmicas a tiempo de maduración T dado por $\ln V_T \sim N(\ln V_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T, \sigma_V^2 T)$ evaluado en $t = 0$

$$Q(V_T \leqslant B) = Q\left(\frac{\ln V_T - (\ln V_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T)}{\sigma_V\sqrt{T}} \leqslant -d_{0,2}\right) = 1 - \Phi(d_{0,2})$$

donde $\Phi(d) = 1 - \Phi(-d)$, debido a que $1 - \Phi(d_{0,2})$ da la probabilidad dado el riesgo neutral.

Otra manera de calcular esta probabilidad es teniendo el valor inicial tal que $V_0 > B$, entonces por el lema de *Itô*:

$$\frac{V_t}{V_0} = \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \sim \log normal\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t\right)$$

Usando la notición de "distancia al tiempo de incumplimiento" ayuda a calcular la probabilidad condicional de incumplimiento, ya que retomando la idea de Singleton y Duffie(2003), definen la *"distancia al incumplimiento"* como una razón por medio de una función $X(t)$, como el número de desviaciones estándar, suponiendo que $\log(V_t)$ sobrepasa $\log(B)$,

$$\Longrightarrow X(t) := \frac{\log V_t - \log B}{\sigma} \qquad \log V_t > \log B$$

donde $X(t)$ sigue un proceso Wiener con la forma

$$X(t) = c + bt + W(t), \quad t \geqslant 0 \tag{2.9}$$

donde:

$$b = \frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \qquad \text{y} \qquad c = \frac{\log V_0 - \log B}{\sigma}$$

Por lo que la probabilidad condicional de incumplimiento en el tiempo de maduración T es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(V_T \leqslant B | V_t > B\right) &= \mathbb{P}\left(X(T) \leqslant 0 | X(t) > 0\right) \\ &= \Phi\left(\frac{X(t) + b(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right), \qquad \Phi \sim N(0,1)\end{aligned}$$

Esta ecuación (2.10) es importante ya que calcula la probabilidad de incumplimiento condicionado a que el valor de la empresa sea inferior al umbral de deuda B.

2.8.2. Modelo de Black y Cox

Es una extensión del modelo de Merton tal que el evento de incumplimiento puede ocurrir tan pronto como el valor de las acciones se acerque a una barrera delimitada de la deuda. Por las ecuaciones (2.8) y (2.9), V_t toca la barrera de deuda cuando la distancia de incumplimiento es igual a cero, es decir, $X(t) = 0$. Si establecemos que la distancia al incumplimiento como $c \equiv X_0 > 0$, considerando que:

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) \leqslant 0\}, \qquad \text{donde} \quad \inf \emptyset = \infty \tag{2.10}$$

Donde τ tiene una distribución Gaussiana inversa que tiene la siguiente función de densidad,

$$f(t) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{(c+bt)^2}{2t}\right\}, \qquad t \geqslant 0$$

También recordando la función de supervivencia $S(t)$ donde $\mathbb{P}(\tau > l)$, para cualquier $l \geqslant 0$,

$$S(t) = \Phi\left(\frac{c+bl}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2bc}\Phi\left(\frac{-c+bl}{\sqrt{t}}\right)$$

Sustituyendo en la definición de tasa de riesgo (2.11) con la densidad gaussiana inversa, obtenemos la tasa de riesgo del primer tiempo de llegada como:

$$\lambda(t; c, b) = \frac{\frac{c}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(c+bt)^2}{2t}\right\}}{\Phi\left(\frac{c+bt}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2bc}\Phi\left(\frac{-c+bt}{\sqrt{t}}\right)}$$

que es una función de riesgo de las más importantes en los modelos estructurales de riesgo de crédito, donde b es el parámetro de tendencia y c es la distancia al incumplimiento inicial, para más detalles en el capitulo IV de Aalen,Borgan y Gjessing [2]

[2] Aalen, O. Borgan, O. and Gjessing, H. K. (2008). Survival and Event History Analysis: A Process Point of View. Springer, New York.

2.8.3. Modelo KMV

Este modelo tiene como base teórica el modelo de Merton y fue desarrollado por la empresa privada KMV(por las siglas de sus fundadores Kealhofer, McQuown y Vasicek) en la década de 1990. Este modelo es comúnmente usado en la industria, cuya contribución más que las modificaciones teóricas, son las contribuciones realizadas al momento de la implementación gracias a su base de datos de la empresa y empresas afiliadas a su modelo. La privacidad del modelo solamente nos dejara mostrar las bases generales.

En el modelo KMV el resultado de interés es la frecuencia esperada de incumplimiento o EDF(por sus sigla en inglés: *expected default frecuency*) que es la probabilidad de que la empresa vaya a fallar en un periodo de tiempo. El EDF es una función del valor actual de la acción V_0, la media actualizada del valor de la acción μ_V , la volatilidad σ_V y el umbral B, entonces usando que $\Phi(d) = 1 - \Phi(-d)$ con T=1.

$$\Longrightarrow EDF_{Merton} = 1 - \Phi\left(\frac{\ln V_0 - \ln B + (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V}\right) \tag{2.11}$$

A diferencia el EDF_{KMV} tiene una estructura similar, sin embargo $1 - \Phi(\dot{})$ es remplazado por una función empírica decreciente, el umbral B es renombrado como $\tilde{B}$ representando la estructura de obligaciones de la empresa y cambia el argumento de la distribución normal por una función empírica más simple. Hay que notar que el modelo no asume que el valor inicial de las acciones V_0 es observable; ya que se usa una técnica interactiva de la ecuación de valor de la empresa.

Para calcular el EDF_{KMV}, el modelo KMV introduce una variable de estado, llamado *"distancia de incumplimiento (DD)"*(por sus siglas en inglés *distance to default*) :

$$DD := \frac{V_0 - \tilde{B}}{\sigma_V V_0}$$

donde $\tilde{B}$ representa el umbral predeterminado por las obligaciones de un año de la empresa. Esta razón es conocida como "el número de desviaciones que una empresa esta alejada del umbral $\tilde{B}$. De igual manera se asume que las empresas con igual DD tienen las mismas probabilidades de incumplimiento.

Por lo que haciendo uso de la base de datos de incumplimiento de la empresas, KMV calcula para cada umbral la proporción de empresas con DD en un pequeño rango que caiga en incumplimiento con ese umbral. Esta proporción EDF es estimada empíricamente. Donde la función EDF es decreciente y su forma exacta es propiedad de Moody's KMV.

2.9. Modelos de forma reducida.

En este modelo el evento de incumplimiento es manejado por un proceso de intensidad externo que esta relacionado con el valor de las acciones, ya que es tratado como un evento una variable aleatoria positiva cuya distribución depende de covariables económicas. Esta mezcla de modelos asume una independencia condicional de incumplimiento dados los factores comunes estocásticos.

El riesgo de incumplimiento de un deudor se asume que es dependiente de varios factores económicos, como factores macroeconómicos los cuales son tienen modelos estocásticos; estos factores son independientes del valor de la Institución Financiera; la dependencia entre los incumplimientos proviene de la dependencia de las probabilidades de incumplimiento individual del deudor y el conjunto de los factores económicos.

La *"intensidad de incumplimiento"* corresponde a la tasa de riesgo $\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$ definido en (2.1), la cual tiene su origen en los estudios de confianza estadísticos y análisis de supervivencia de tiempo de incumplimiento, considerando que $S(t)$ es una función absolutamente continua, recordando que

$$F(t) = 1 - S(t)$$

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}(F(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(1 - S(t))}{\mathrm{d}t}$$

entonces la tasa de riesgo es:

$$\lambda(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}(1-S(t))}{\mathrm{d}t}}{S(t)} = -\frac{\mathrm{d}[\log S(t)]}{\mathrm{d}t},$$

Entonces:

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s\right\}, t \geqslant 0$$

En el análisis de supervivencia $\lambda(t)$ se asume que es una función determinista a través del tiempo, por lo que el modelado de riesgo de crédito $\lambda(t)$ es tratado como variable estocástica; por lo que el tiempo de fallo τ es doblemente estocástica,lo que refiere que posiblemente es un proceso de conteo recurrente. En este caso nos importa el primer salto del proceso, por lo que la intensidad de fallo es equivalente a la tasa de riesgo.

Un ejemplo de las distribuciones de modelos de forma reducida en finanzas son:

$$\text{Vasicek} : \mathrm{d}\lambda(t) = \kappa(\theta - \lambda(t))\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t$$

$$\text{Cox-Ingersoll-Roll} : \mathrm{d}\lambda(t) = \kappa(\theta - \lambda(t))\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{\lambda(t)}\mathrm{d}W_t$$

$$\text{Saltos afines} : \mathrm{d}\lambda(t) = \mu(\lambda(t))\mathrm{d}t + \sigma(\lambda(t))\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}J_t$$

donde J_t es un proceso de salto y

$$\mu(\lambda(t)) = \kappa(\theta - \lambda(t))$$

y

$$\sigma(\lambda(t)) = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2\lambda(t)}$$

Este tipo de modelos proveen una manera sencilla de calcular la intensidad futura con el propósito de predecir la probabilidad condicional de incumplimiento. La dependencia de la intensidad de incumplimiento con la variable de estado $z(t)$ es manejado a traves de un modelo multivariado como $(\lambda(t), z(t))$.

Capítulo 3

Análisis de supervivencia

El análisis de supervivencia, como su nombre lo indica se puede relacionar directamente con el termino de supervivencia proveniente del latín *superviventia*, que significa "que sobrevive", en estadística sería en tasas de muerte o mortalidad.

Un significado más amplio es el análisis de tiempo de ocurrencia de cualquier evento que se desee estudiar, en nuestro caso estudiamos el tiempo de incumplimiento.

El problema que enfrenta esta área de la estadística es la calidad de los datos estudiados, debido a la ocurrencia de censura o truncamiento, lo que significa que el evento estudiado puede o no ocurrir en el periodo de estudio, o bien que los datos pueden estar incompletos. Sin embargo, eliminar estoy datos sería incorrecto ya que tendría una repercusión directa en el resultado, por lo que son contabilizados de manera distinta.

Para que nos sirve este contenido, vamos a tomar como experimento una cartera de crédito personal y el evento a estudiar será el incumplimiento, con el fin de poder calcular la probabilidad de incumplimiento.

Tenemos que tener en cuenta el manejo de estos tiempos de incumplimiento, cuyo manejo de los tiempos a continuación.

Los conceptos de este capitulo tienen como referencia a Elisa T. Wang (2003)[1] y Collett (2003)[2].

[1]Lee, Elisa T. Wang, John Wenyu (2003). Statistical Methods for Survival Data Analysis (3ra edición). New Jersey. Wiley.
[2]Collett, D. (2003), Modelling Survival Data in Medical Research (2da edición). London. Champman & Hall.

3.1. Tiempos de falla

En el análisis de supervivencia, tenemos una muestra de individuos para los cueles definiremos un evento especifico de interés, comúnmente llamado fallo, el cual se estudia después de un periodo será llamado tiempo de fallo o supervivencia. Cabe mencionar que solo necesita ser una medida escalable, por lo general es en tiempo real, pero esta también puede ser cambiada por kilómetros, escalas de eléctricas, etc.; el único requerimiento de estas es que no sean negativas.

Censura

La censura se presenta cuando el evento o fallo no se presenta en el periodo del estudio u ocurre un evento independiente que interfiere con la observación del individuo y el evento de interés, se le conoce como ***dato censurado***. Existen varios tipos de censura: censura por la derecha, censura por la izquierda o por intervalo.

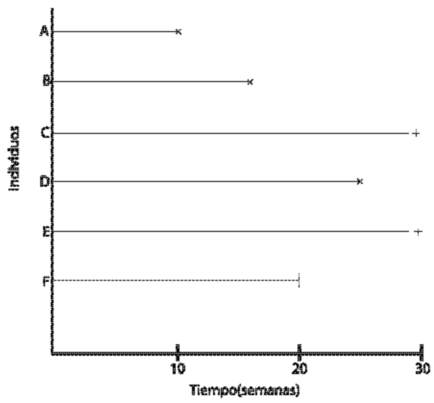
Censura por la derecha. Existen diversas formas de que se genere la censura. Estos mecanismos son: censura tipo I, censura tipo II y censura aleatoria.

Censura tipo I.
Es cuando el tiempo de supervivencia es observado en un intervalo de tiempo determinado, de lo contrario la observación se considera censurada por la derecha.

Primero veremos como se comporta una muestra de n individuos sin datos censurados, tendríamos que el i-ésimo tiene un tiempo de fallo T_i, donde T_i es nuestra variable aleatoria. Determinamos el tiempo de duración del estudio C_i, tiempo en el que el individuo puede o no fallar antes de C_i. Por lo que para cada individuo de la muestra se tiene $X_i = \text{mín}(T_i, C_i)$ acompañada de una variable indicadora D_i:

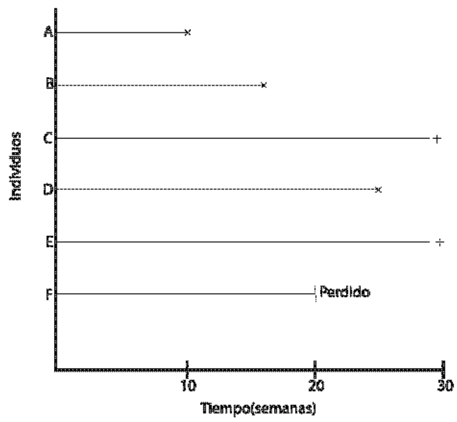
$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } T_i \leqslant C_i \textit{ no censurado} \\ 0 & \text{si } T_i > C_i \textit{ censurado} \end{cases}$$

En general a este tipo de observaciones se identifican con un signo "+". En este caso $C_i = c$, donde c marca el final del periodo observado el cual está determinado por el investigador.



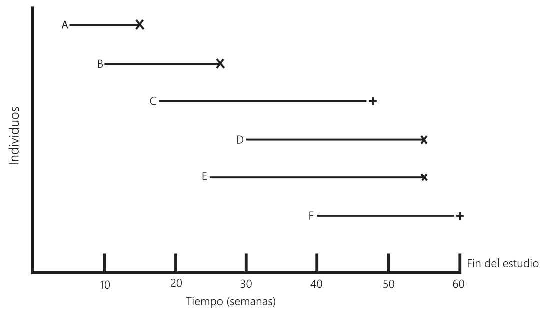
Mostramos el momento de falla con una "X", mientras que los datos que no presentan fallo se les considera censurados están marcados con un "+", son correspondientes a los individuos C y E.

Censura tipo II. Este tipo de censura se da cuando el estudio continua hasta que se presentan los primeros r fallos, donde $r < n$; por lo que sólo los primeros r tiempos $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant T_{(r)}$ son observados y dejando de fuera los $n - r$ tiempos, que estarán censurados por la derecha.



Este tipo de censura se presentan en pruebas de duración de aparatos electrónicos, donde todos los aparatos inician al mismo tiempo y la prueba se termina cuando los primeros r aparatos de los n fallan. Muestra censura tipo II en el dato "perdido"para el individuo E.

Censura tipo III o censura aleatoria. La censura aleatoria ocurre cuando los tiempos de censura C_i de cada individuo son consideradas variables aleatorias.



Las observaciones de censura de tipo I y tipo II son llamadas a menudo datos censurados uno a uno y las de tipo III observaciones censuradas progresivas. Otro nombre común para la censura tipo III es censura aleatoria.

Censura por la izquierda. El tiempo de vida T asociado a un indiviuo especifico en el estudio se considera *censurado por la izquierda* si es menor que un tiempo de censura C_L(L de *left* censurado por la izquierda); esto es que el evento estudiado ya le ha ocurrido al individuo antes del periodo de observación del estudio.

El tiempo de fallo es observado solo si $T_i \geqslant C_L$, en caso contrario $T_i < C_L$ decimos que la observación es censurada por la izquierda. Cabe mencionar que el hecho de que un dato censurado por la izquierda no implica que no pueda ser censurado por la derecha.

Doble censura. En algunas ocasiones cuando una observación es censurada por la izquierda es posible que se encuentre censurada por la derecha, en este caso los tiempos de fallo son llamados doblemente censurados. Entonces nuestra variable $X_i D_i$ esta conformada por:

$$X_i = \max\{\min(T_i, C_r), C_L\} \qquad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } C_L \leqslant T_i \leqslant C_r \\ 0 & \text{si } C_r \leqslant T_i \\ -1 & \text{si } C_L > T_i \end{cases}$$

Censura por intervalo.
La censura por intervalo ocurre cuando la información se obtuvo de un estudio y los tiempos de fallo sólo se conocen dentro de un intervalo, es decir, las observaciones se llevan acabo de manera intermitente en tiempos discretos, como pueden ser semanas, meses, años, etc.

Si el estudio esta dividido en m intervalos y antes de finalizar el intervalo i, $i < m$, no ocurre el evento de fallo pero para el intervalo de tiempo $(i+1)$ ya se presento el evento de interés, entonces se dice que T_i es censurado en el intervalo $(i, i+1]$.

Truncamiento

El truncamiento de datos de supervivencia ocurre solo cuando aquellos individuos cuyo tiempo de vida T esta en el intervalo de observación (A_l, B_r). En contraste con la censura donde por lo menos tenemos información parcial de los individuos; la inferencia para los datos truncados esta restringida por una estimación condicional.

Supongamos un intervalo de tiempo (A_l, B_r) entonces sólo nos interesan los tiempos de fallo T_i tales que $A_l < T_i \leqslant B_r$, ya que si no cumple esta condición no será observado.

Cuando B_r es finita tenemos *truncamiento por la izquierda* ya que solo observamos a los individuos cuyo tiempo de supervivencia T_i excede un tiempo de truncamiento A_l, es decir, $A_l < T_i$ dando el intervalo $[A_l, B_r = \infty]$. También se le conoce como *tiempo retrasado de entrada*.

El *truncamiento por la derecha* ocurre cuando $A_l = 0$, es decir, el tiempo de supervivencia T_i es observable solo cuando $T_i \leqslant B_r$. Los tiempos de fallo después de B_r no son tomados en cuenta en el estudio.

3.2. Función de supervivencia

La función de supervivencia es la principal herramienta para describir el tiempo de ocurrencia de un evento, así como la probabilidad de que un individuo sobreviva un tiempo especifico x. Esta definida como:

$$S(x) = \mathbb{P}(X > x)$$

Si X fuera una variable aleatoria continua, $S(x)$ es una función continua estrictamente decreciente. Y sería complemento de la función de distribución sería $S(x) = 1 - F(x)$ donde $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$. En términos de la función de densidad es:

$$S(x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty f(t)dt$$

En caso de que X sea una variable aleatoria discreta.

$$S(x) = \mathbb{P}(X > x) = \sum_{x_j > x} \mathbb{P}(x_j)$$

3.3. Función de riesgo

La función de riesgo es definida por una probabilidad condicional. Asumiendo que T es absolutamente continua y que tiene densidad de probabilidad, nos centraremos en los individuos que no han presentado fallo en el tiempo t y consideramos la probabilidad de que ocurra en un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \delta t]$.

Para la definición formal se considera la probabilidad de que una variable aleatoria asociada a un tiempo de supervivencia T se encuentre entre t y $t + \delta t$ dado que ya paso t, es decir, $\mathbb{P}(t \leqslant T < t + \delta t | T \geqslant t)$.

Entonces la función de riesgo $h(t)$, es el valor límite de esta cantidad cuando δt tiende a cero.

$$h(t) = \lim_{\delta t \to 0} \left\{ \frac{\mathbb{P}(t \leqslant T < t + \delta t | T \geqslant t)}{\delta t} \right\}$$

La función $h(t)$ se conoce como la tasa instantánea de muerte o fuerza de mortalidad, es decir, la aproximación a la probabilidad de que un individuo con tiempo T experimente fallo en el siguiente instante. Basado en teoría de la probabilidad condicional podemos obtener varias relaciones, aplicando la igualdad $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$; nos quedara

$$\frac{\mathbb{P}(t \leqslant T < t + \delta t)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)}$$

y en términos de la función de distribución y de supervivencia

$$\frac{F(t + \delta t) - F(t)}{S(t)}$$

donde $F(t)$ es la función de distribución de T,

$$\Longrightarrow h(t) = \lim_{\delta t \to 0} \left\{ \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t} \right\} \frac{1}{S(t)}$$

Hay diversas maneras de expresar la función de riesgo, en el cual la única restricción es que no sea negativa, es decir, $h(t) \geqslant 0$. Entonces por definición es la derivada de $F(t)$

$$h(t) = \left(\frac{d}{dt} F(t) \right) \frac{1}{S(t)}$$

Si T es una variable aleatoria continua

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d \ln[S(t)]}{dt}$$

Una relación con función de riesgo es la función de riesgo acumulada $H(t)$ que esta definida como:

$$H(t) = \int_0^t h(u)du = -ln[S(t)]$$

con respecto a la función de supervivencia continua

$$S(t) = \exp\{-H(t)\} = \exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}$$

Cuando T es una variable aleatoria discreta, la función de riesgo queda definida por:

$$h(t_j) = \mathbb{P}(t = t_j | T \geqslant t_j) = \frac{\mathbb{P}(t_j)}{S(t_{j-1})} \qquad j = 1, 2, \ldots \quad \text{donde} \quad S(t_0) = 1$$

Recordando que $\mathbb{P}(t_j) = S(t_{j-1}) - S(t_j)$ entonces:

$$h(t_j) = \frac{1 - S(t_j)}{S(t_{j-1})}$$

La función de supervivencia puede ser escrita como el producto de probabilidades condicionales de supervivencia

$$S(t) = \prod_{t_j \leqslant t} \frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} \qquad \Longrightarrow S(t) = \prod_{t_j \leqslant t} [1 - h(t_j)]$$

Y la función de riesgo acumulada

$$H(t) = \sum_{t_j \leqslant t} h(t_j)$$

Algunos autores como Cox y Oaks (1984) prefieren definir la función de riesgo acumulada para tiempo de vida discreta como:

$$H(t) = \sum_{t_j \leqslant t} \ln[1 - h(t_j)]$$

Ahora para calcular la función de supervivencia primero vamos a suponer que la muestra de tiempos de supervivencia no tiene ningún dato censurado, por lo que podríamos obtener la ***función de supervivencia empírica***, dada por:

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{número de individuos sobrevivientes hasta t}}{\text{número de individuos en la muestra}}$$

donde mediante equivalencias, $\hat{S}(t) = 1 - \hat{F}(t)$, la cual es la ***función de distribución empírica***.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de variables aleatorias identicamente distribuidas, donde X_i representa a un individuo del portafolio, la función de supervivencia empírica es:

$$\hat{S}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{X_n > t}}{n}$$

Cabe notar que $\hat{S}(0) = 1$ antes del primer tiempo de fallo y $\hat{S}(t_j) = 0$ donde t_j es el último tiempo de de fallo. El análisis de los datos puede ser utilizado con métodos paramétricos, los cuales son:

$$\text{Métodos paramétricos} = \begin{cases} \text{Distribución exponencial,} \\ \text{Distribución Weibull} \\ \text{Distribución Log-nomal} \end{cases}$$

Este método no puede ser utilizado con datos censurados, razón por la que son usados métodos no paramétricos para estimar $S(t)$ aptos para el manejo de datos censurados, como:

- Estimador Kaplan-meier
- Logrank
- Regresion de Cox

Para los datos de supervivencia censurados es fácil estimar la curva de supervivencia por el estimador Kaplan-Meier, la cual nos servirá de base para estimar la tasa de riesgo acumulada

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

por el estimador Nelson-Aalen. Es útil debido a que no son necesarios supuestos distributivos, y nos ayuda a comprobar gráficamente el ajuste de los modelos paramétricos.

3.3.1. Kaplan-Meier

El estimador Kaplan-Meier estima la probabilidad de supervivencia cada vez que se presenta un tiempo de fallo, utilizando de forma precisa los tiempos exactos marcando los inicios de un nuevo intervalo de tiempo; y puede obtenerse como un caso límite de un estimador actuarial propuesto por Bőhmer (1912) razón por que es nombrado *estimador de producto límite*.

En general supongamos que hay n individuos con su tiempo de observación $t_1, t_2, \ldots, t_n$, algunas de estas observaciones pueden ser censuradas por la derecha y también puede haber mas de un individuo con el mismo tiempo de supervivencia. Ordenamos los n individuos en forma ascendente de acuerdo al momento que se presenta el fallo, es decir, $t_{(1)} \leqslant t_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant t_{(n)}$ por lo que la función de supervivencia para i, donde $0 \leqslant i \leqslant n$, se puede estimar de la siguiente manera:

$$\hat{S}(t_{(i)}) = \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}$$

donde $n-i$ es el número de pacientes que sobreviven más de $t_{(i)}$, ya que si se presentan empates al momento de fallo, es decir, si $t_{(2)} = t_{(3)} = t_{(4)}$, la estimacion de supervivencia será:

$$\hat{S}(t_{(2)}) = \hat{S}(t_{(3)}) = \hat{S}(t_{(4)}) = \frac{n-4}{n}$$

El número de individuos vivos justo antes del tiempo $t_{(j)}$ incluyendo los que fallaron exactamente en este tiempo se denotaran como n_j y d_j para indicar el número de fallos en este tiempo, $j = 1, \ldots, r < n$.

El intervalo de tiempo entre $t_{(j)} - \delta$ y $t_{(j)}$ donde δ es un periodo de tiempo infinitesimal que incluye un tiempo de fallo. Entonces como hay n_j individuos vivos antes de $t_{(j)}$ y d_j son las muertes en ese tiempo, la probabilidad de que un individuo falle durante el intervalo $[t_{(j)} - \delta, t_{(j)}]$ está estimada por $\frac{d_j}{n_j}$.

Por lo que la probabilidad correspondiente estimada es $\frac{n_j - d_j}{n_j}$ que por la forma de construcción del intervalo $[t_{(j)}, t_{(j+1)} - \delta]$ no contiene fallos por lo que la probabilidad de supervivencia es 1 y la probabilidad conjunta de sobrevivir de $[t_{(j)} - \delta, t_{(j)}]$ y $[t_{(j)}, t_{(j+1)} - \delta]$ puede ser estimado por $\frac{n_j - d_j}{n_j}$; entonces cuando δ tiende a 0, $\frac{n_j - d_j}{n_j}$ se convierte en un estimado de la probabilidad de supervivencia de $[t_{(j)}, t_{(j+1)}]$.

Construimos una serie de intervalos que son determinados por el fallo en cada intervalo de tiempo, es decir:

$$S(t) = \mathbb{P}(\text{sobreviva los primeros t-1 días y sobreviva al menos un día más})$$

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

En el estimador Kaplan Meier interpretamos $S(t)$ como:

$$\hat{S}(t) = \begin{array}{l} \mathbb{P}(\text{\% de individuos que sobreviven t días dado que sobrevivieron t-1 días}) \\ \times\mathbb{P}(\text{\% de individuos que sobreviven t-1 días}) \end{array}$$

Suponiendo que el tiempo de fallo de un individuo es independiente de otro individuo, entonces la función estimada de supervivencia en cualquier intervalo de tiempo de los k intervalos de $t_{(k)}$ a $t_{(k+1)}, k = 1, \ldots, r$. Por lo que el estimador Kaplan Meier de la función de supervivencia esta dado por:

$$\hat{S}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } t < t_r \\ \prod\limits_{t_j \leqslant t} \left(\dfrac{n_j - d_j}{n_j} \right), & \text{si } t_r \leqslant t \end{array} \right\}$$

Recordando:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_j \leqslant t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{t_j \leqslant t} \left[1 - \frac{d_j}{n_j} \right]$$

El estimador Kaplan-Meier es una función escalonada cuyos saltos son en los tiempos observados y dependen no solamente del número de eventos observados en cada tiempo de fallo t_i, si no en el patrón de censura de los datos anteriores a t_i.

3.4. Modelos de supervivencia

Los modelos de riesgo están basados en los datos de crédito otorgados para ser manejados con el análisis de supervivencia, que definiremos posteriormente en un análisis de datos a través de tiempos de fallo; ya que el análisis de supervivencia se enfoca en un evento especifico de cada individuo, describiendo la ocurrencia del evento mediante curvas de supervivencia y tasas de riesgo y analizar la dependencia de covariables.

Estos modelos de supervivencia tienen las siguientes ventajas para su modelación y aproximación de riesgo de crédito, que son:

1. Poder parametrizar la tasa de fallo.
2. Incorporación de covariantes.
3. Hacer optimización en el modelado de portafolios de crédito.

Y que explicaremos a continuación.

3.4.1. Parametrizar la tasa de fallo

Este punto está basado en el origen de la tasa de riesgo, ya que analizamos los eventos ocurridos en el tiempo; es decir, querer definir el pasado para poder definir el presente y el futuro.

En el análisis de supervivencia existen varias distribuciones para parametrizar la intensidad o tasa de fallo ($\lambda(t)$), como son:

$$Exponencial: \qquad \lambda(t) = \alpha$$

$$Weibull: \qquad \lambda(t) = \alpha t^{\beta - 1}$$

$$Lognormal: \qquad \lambda(t) = \frac{1}{t\alpha}\frac{\phi(\log(t/\alpha))}{\Phi(-\log(t/\alpha))} \qquad donde \quad \phi(x) = \Phi^{'}(x)$$

$$Log-logistica: \qquad \lambda(t) = \frac{(\beta/\alpha)(t/\alpha)^{\beta-1}}{1+(t/\alpha)^{\beta}} \qquad \alpha, \beta > 0$$

Por ejemplo, la escala de log-localización transformada puede ser usada para modelar las tasas de riesgo; ya que dado el tiempo de fallo τ_0, una tasa base de riesgo $\lambda_0(t)$ y una función de supervivencia $S_0(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_0(s)ds\}$, entonces podemos modelar el tiempo de fallo futuro τ_i,

$$\log \tau_i = \mu_i + \sigma_i \log \tau_0 \quad , \qquad -\infty < \mu_i < \infty, \sigma_i > 0$$

con parámetros de riesgo (μ_i, σ_i) para modelar la función de supervivencia de la empresa de la siguiente manera:

$$S_i(t) = S_0\left(\left[\frac{t}{e^{\mu_i}}\right]^{\frac{1}{\sigma_i}}\right)$$

Como resultado podemos obtener la tasa de riesgo de la empresa,

$$\lambda_i(t) = -\frac{\mathrm{d}(\log S_i(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma_i t}\left[\frac{t}{e^{\mu_i}}\right]^{\frac{1}{\sigma_i}} \lambda_0\left(\left[\frac{t}{e^{\mu_i}}\right]^{\frac{1}{\sigma_i}}\right)$$

3.4.2. Incorporación de covariantes

Una covariante es una variable *explicativa*, es decir, que teniendo nuestro portafolio podamos comparar nuestras estimaciones no basándonos únicamente en el tiempo de fallo si no teniendo en cuenta el efecto de variables como lo son sexo, edad, calificación crediticia, etc.

Ahora consideremos que cada empresa tiene distintas covariantes $z_i \in \mathbb{R}^P$, las cuales pueden ser estáticas o variables en el tiempo. En el análisis de supervivencia estas covariantes se clasifican en dos grupos:

1. Modelos de riesgos proporcionales
2. Modelo de tiempo de vida acelerada

Por lo que la tasa de riesgo se toma del modelo clásico de regresión,

$$\lambda_i(t) = \lambda_0(t) r(z_i(t))$$

donde $\lambda_0(t)$ es la función de riesgo inicial y $r(z_i(t)) = \exp\{\theta^T z_i(t)\}$ donde r es un riesgo especifico de la empresa. De esta forma podemos calcular la *razón de riesgo* entre dos empresas:

$$\frac{\lambda_i(t)}{\lambda_j(t)} = \exp\left\{\theta^T[z_i(t) - z_j(t)]\right\} \qquad \theta \in \mathbb{R}^P$$

esto es constante si la diferencia $[z_i(t) - z_j(t)]$ es constante en el tiempo. Las covariantes $z_i(t)$ en ocasiones son transformadas antes de entrar al modelo. Para el análisis de supervivencia, la introducción de riesgos proporcionales esta incompleta sin la introducción de riesgos proporcionales de Cox(CoxPH).

El modelo de riesgos proporcionales de Cox considera $\lambda_i(t) = \lambda_0(t)\exp\{\theta^T z_i(t)\}$ dejando la tasa de riesgo inicial $\lambda_0(t)$ como desconocida, donde esta se puede estimar como $\hat{\lambda}_0(t)$ con modelos paramétricos y no parametricos, y suavizados con el análisis de datos de la empresa.

El segundo tipo de modelo de tiempo de vida acelerada (AFT por sus siglas en inglés) están basados en la escala transformada de log-localización del tiempo de fallo. Para este modelo se supone que $z_i(t)$ esta estática, entonces dado τ_0 con una tasa de riesgo inicial $\lambda_0(t)$ tenemos que la localización $\mu_i = \theta^T z_i$ con escala $\sigma_i = 1$(para simplificar), es decir, $\log \tau_i = \theta^T z_i + \log \tau_0$ entonces tenemos que la función de supervivencia y la tasa de riesgo:

$$S_i(t) = S_0\left(t\exp\{-\theta^T z_i(t)\}\right) \qquad , \qquad \lambda_i(t) = \lambda_0\left(t\exp\{-\theta^T z_i(t)\}\right)\exp\{-\theta^T z_i\}$$

Las covariantes z_i puede inducir un multiplicador de riesgo relativo $\lambda_i(t)/\lambda_0(t) = e^{\theta^T z_i(t)}$ o el tiempo de aceleración de fallo $\tau_i/\tau_0 = e^{\theta^T z_i(t)}$.

3.4.3. Correlación de incumplimiento crediticio

La correlación que existen entre los portafolios puede indicar que si esta correlación es positiva, este portafolio incrementara el nivel de la volatilidad total dado un nivel esperado total (presente en la teoría de portafolios Markowitz).

La correlación de fallo puede ser caracterizada por análisis de supervivencia multivariado, por lo que existen dos enfoques: Correlación entre la intensidad de fallo entre las covariantes y correlación por copulas.

Para mayor referencia de la correlación entre la intensidad de fallo de las covariables se encuentra Hougaard (2000)[3] y Aalen (2008)[4], mientras que para la correlación por copulas esta Nelsen(2006)[5].

[3] Hougaard, P. (2000). Analysis of Multivariate Survival Data. Springer, New York.

[4] Aalen, O. Borgan, O. and Gjessing, H. K. (2008). Survival and Event History Analysis: A Process Point of View. Springer, New York.

[5] Nelsen, R. B. (2006). An introduction to copulas (2da edición). Springer, New York.

Capítulo 4

Aplicación

La base de datos *German credit* cuenta con 30 variables de 1000 personas que desean obtener un crédito. La base tiene una variable que nos indica si una persona es *"buena"* las cuales son 700 personas o si tienen una *"mala"* calificación, las cuales son las 300 personas restantes.

A continuación tenemos una tabla que resume los datos de la base.

Tabla 4.1: German Credit

	No. de Personas		Porcentaje	
	Credibilidad			
	Buena	Mala	Buena	Mala
Edad				
19-26	145	94	14.50 %	9.40 %
27-34	210	98	21.00 %	9.80 %
35-42	172	48	17.20 %	4.80 %
43-50	91	29	9.10 %	2.90 %
51-58	42	17	4.20 %	1.70 %
59-66	30	11	3.00 %	1.10 %
67-75	10	3	1.00 %	0.30 %
No. de créditos				
1	433	200	43.30 %	20.00 %
2	241	92	24.10 %	9.20 %
3	22	6	2.20 %	0.60 %
4	4	2	0.40 %	0.20 %
Estado de pago de anterior crédito				
Sin créditos/ Todos créditos saldados	15	25	1.50 %	2.50 %
Todos los créditos en este banco saldados	21	28	2.10 %	2.80 %
Créditos existentes al corriente	361	169	36.10 %	16.90 %
Presenta atrasos es créditos anteriores	60	28	6.00 %	2.80 %
Incumplimiento(en otros bancos)	243	50	24.30 %	5.00 %

Propósito del crédito				
Automotriz(nuevo)	145	89	14.50 %	8.90 %
Automotriz(usado)	86	17	8.60 %	1.70 %
Muebles	123	58	12.30 %	5.80 %
Radio/televisión	218	62	21.80 %	6.20 %
Decoración	8	4	0.80 %	0.40 %
Remodelación/reparación	14	8	1.40 %	0.80 %
Educación	28	22	2.80 %	2.20 %
Vacaciones	8	0	0.80 %	0.00 %
Capacitación	63	1	6.30 %	0.10 %
Negocio	0	64	0.00 %	6.40 %
Otros	7	5	0.70 %	0.50 %
Otros planes de crédito				
Banco(Otro)	82	57	8.20 %	5.70 %
Tiendas departamentales	28	19	2.80 %	1.90 %
Ninguno	590	224	59.00 %	22.40 %
Garantía				
Ninguna	635	272	63.50 %	27.20 %
Aval	23	18	2.30 %	1.80 %
Garantía	42	10	4.20 %	1.00 %
Mayor valor				
Bienes inmuebles	222	60	22.20 %	6.00 %
Cuenta de ahorro/seguro de vida	161	71	16.10 %	7.10 %
Automóvil/otros	230	102	23.00 %	10.20 %
Ninguna propiedad/Desconocido	87	67	8.70 %	6.70 %
Cuenta de ahorro (Marcos alemanes)				
Menor a 100 DM	386	217	38.60 %	21.70 %
100<...0<500 DM	69	34	6.90 %	3.40 %
500<...=<1000 DM	52	11	5.20 %	1.10 %
Mayor a 1000 DM	42	6	4.20 %	0.60 %
No tiene cuenta de ahorro/Desconocido	151	32	15.10 %	3.20 %
Sexo y estado civil				
Hombre divorciado	30	20	3.00 %	2.00 %
Hombre soltero	201	109	20.10 %	10.90 %
Hombre casado/ viudo	402	146	40.20 %	14.60 %
Mujer	67	25	6.70 %	2.50 %
Dependientes económicos				
1	591	254	59.10 %	25.40 %
2	109	46	10.90 %	4.60 %
Ocupación				
Desempleado no residente	15	7	1.50 %	0.70 %
Desempleado residente	144	56	14.40 %	5.60 %
Empleado gobierno	444	186	44.40 %	18.60 %

Empresario	97	51	9.70 %	5.10 %
Trabajador extranjero				
Sí	591	254	59.10 %	25.40 %
No	109	46	10.90 %	4.60 %
Duración empleo actual(años)				
Desempleado	39	23	3.90 %	2.30 %
Menor a 1	102	70	10.20 %	7.00 %
1<...<= 4	235	104	23.50 %	10.40 %
4<...<=7	135	39	13.50 %	3.90 %
Mayor a 7 años	189	64	18.90 %	6.40 %
Vivienda				
Rentada	109	70	10.90 %	7.00 %
Propia	528	186	52.80 %	18.60 %
Sin renta	63	44	6.30 %	4.40 %
Duración en domicilio actual(Años)				
1	94	36	9.40 %	3.60 %
2	211	97	21.10 %	9.70 %
3	106	43	10.60 %	4.30 %
4	289	124	28.90 %	12.40 %
Teléfono				
Ningún número registrado	409	187	40.90 %	18.70 %
Número registrado a su nombre	291	113	29.10 %	11.30 %

¿Para qué nos sirven todos estos datos?

Esto nos va a servir para poder tener una estimación sobre la capacidad de pago de un candidato a un crédito, es decir que si con lo que gana es capaz de solventar no solo las amortizaciones del banco si no la vida propia y la de sus dependientes económicos en caso de tener.

También saber cuánto tiempo lleva trabajando con su patrón actual para saber el plazo que puede ser correcto para el monto solicitado. De igual manera saber si cuenta con un patrimonio que pueda usar como garantía o un negocio propio el cual avale la solvencia a través de las hojas de balance del negocio.

Las características que presenta una persona con alta probabilidad de fallo son: de 27 a 34 años de edad, con un solo crédito,con el crédito al corriente o incumplimiento en créditos anteriores, no presentan algún tipo de garantía y son extranjeros con vivienda propia en el extranjero.

Retomando el sistema financiero mexicano las únicas instituciones autorizadas para otorgar crédito son las Instituciones de Banca Múltiple, Sociedades financieras de Objeto Múltiple (SOFOM); estas instituciones operan su crédito al consumo al momento de desembolsar un importe monetario "c", el cual es otorgado basado en su calificación crediticia del deudor obtenida de alguna de las Sociedades de Información Crediticia, con la cual se podrá establecer un tiempo de pago; así como el costo del servicio llamado *interés*.

Por lo general el plazo será por m mensualidades, entonces el interés estará definido por $I = imc$, donde i es la *tasa de interés del crédito*. Las amortizaciones del usuario serán cubiertas en k amortizaciones cuyo valor será: $\frac{c(1+im)}{k}$ esos periodos de tiempo se manejan con fechas calendario por lo que en caso de no llevar a cabo la amortización correspondiente comenzaran a contar como *"días de atraso de la amortización"*, llegando a un límite de días entonces se dirá que son *"días de atraso del crédito"*.

La suma de las amortizaciones exigibles, es igual a la exposición al riesgo EAD_n y cuando el usuario realiza todos sus pagos en tiempo y forma, se dice que el crédito está *saldado*; en ese momento el usuario dejara de tener obligaciones con la Institución Financiera si así se desea.

Cartera vencida:
Información contenida en el Anexo 33 B-6 de las Disposiciones de carácter general aplicables a las instituciones de crédito.

La cartera se considera vencida cuando las amortizaciones no hayan sido liquidadas en su totalidad en los términos pactados originalmente, considerando lo siguiente:

a) Si los adeudos en créditos de pago único de principal e intereses al vencimiento tienen más de 30 días naturales vencidos

b) Crédito de pago único a principal al vencimiento y pago periódico de intereses presentan 90 o más días naturales de vencidos

c) Crédito con pagos periódicos parciales a principal e intereses si presentan 90 o más días naturales vencidos

d) Créditos revolventes en caso de presentar 2 periodos de facturación vencidos(por lo regular son mensuales) corresponde a 60 o más días naturales vencidos

e) Existen créditos especiales cuyo objeto es remodelación de vivienda se extienda hasta 180 días de incumplimientoa partir de la fecha en la que se tengan facturaciones vencidas.

Por lo cual tomaremos el periodo máximo de 180 días de atraso del crédito, se dice que el crédito cayó en el incumplimiento y se encuentra en el estado de *castigado*, momento en el que la institución financiera asume el valor EAD_n como una pérdida ya que se traspasa la cobranza a un departamento jurídico, todo debido a que la institución financiera tiene nula probabilidad de recuperar las amortizaciones exigibles dado los costos de cobranza.

Estado	Días de atraso(mín)	Días de atraso(máx)
0	0	0
1	1	30
2	31	60
3	61	90
4	91	120
5	121	150
6	151	180
7	Crédito castigado	
8	Crédito saldado	

Tabla 4.2: Estado del crédito

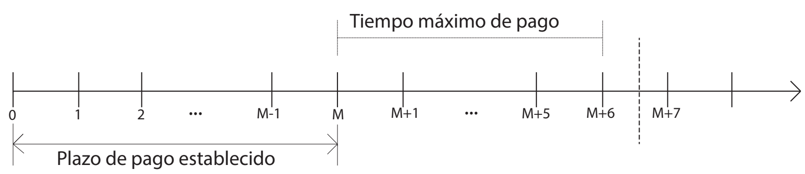


Figura 4.1: Donde M es el número de meses y podemos observar el límite para llevar acabo el pago(línea punteada), de no ser así estará castigado

Los plazos más comunes a los que se otorgan los créditos van desde los 3 meses hasta los 72 dependiendo del monto del préstamo,a los cuales también aplican diversas tasas de interés. Se debe hacer notar que estos plazos son cortos a comparación de créditos hipotecarios.

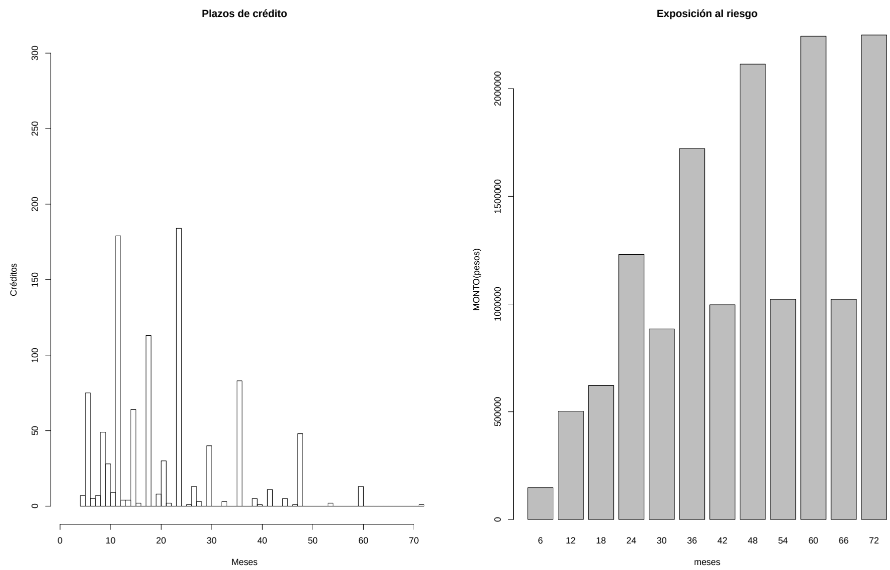


Figura 4.2: La distribución de creditos por plazos y por exposición al riesgo. Gráficas de elaboración propia con base en la base de datos german credit.

La media de los plazos de crédito son los 20 meses observando dos picos en la distribución que es el 12^{vo} mes y el 24^{vo} mes; mientras que la exposición al riesgo se observa que mientras mayor sea el plazo mayor es el riesgo monetariamente hablando. De igual manera observamos una tendencia de los deudores a contraer créditos por años enteros, ya sea por la liquidez que se tiene al final del año coincidiendo con la entrega de aguinaldos, cajas de ahorro, etc. El grueso de los créditos se encuentra con plazos menores a 3 años, dando una pauta a la comercialización de este tipo de créditos con mayor facilidad.

4.1. Valuación de pérdidas

Una parte del modelo pendiente es el cálculo de LGD_n y una vez obtenidas podremos concluir la distribución de pérdidas.

Pérdida dado el incumplimiento (LGD_n)

Retomando la definición, este valor se estima tomando los valores de los créditos castigados de la muestra, del cual tenemos una reducción a solo 300 datos de créditos castigados que fueron incluidos para el cálculo de la probabilidad de incumplimiento.

Tenemos un porcentaje de la cantidad de los deudores al momento del incumplimiento dado por EAD_n, el importe castigado(pérdida) lo denotaremos por CHO_n proveniente del inglés *Charge Off* con lo cual definiremos la severidad como el siguiente cociente:

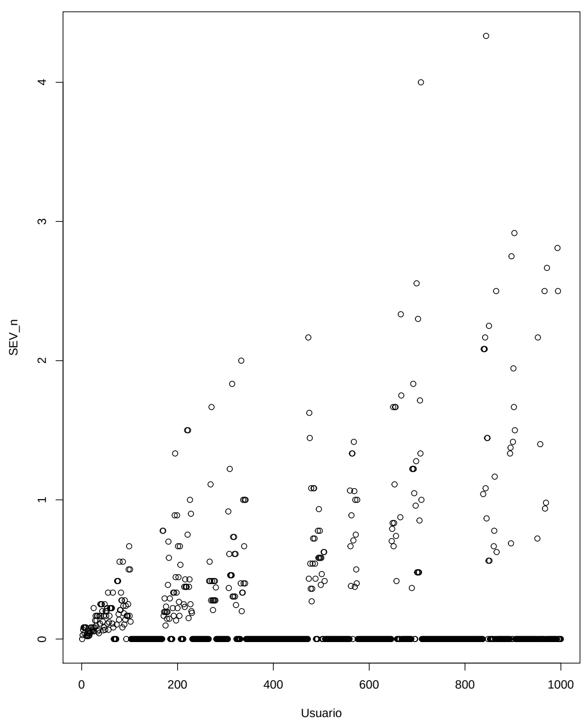
$$SEV_n = \frac{CHO_n}{EAD_n}$$

Con esta definición seremos capaces de definir la pérdida dado el incumplimiento LGD_n de la siguiente manera:

$$LGD_n = \mathbb{E}[SEV_n] = \sum_{n=1}^{N} \frac{SEV_n}{N}$$

$$\mathbb{V}[SEV_n] = \sum_{n=1}^{N} \frac{(SEV_n - LGD)^2}{N}$$

Podemos ver el resultado gráfico del cálculo de SEV_n.



4.2. Simulación

Para verificar las medidas de riesgo llevaremos acabo una simulación de una variable aleatoria a partir de su función de distribución, utilizando uno de ellos métodos más utilizados el cual consiste en tomar una distribución uniforme $U_{(0,1)}$, aplicando la siguiente proposición:

Proposición Sea $U_{(0,1)}$ una variable aleatoria uniforme definida en el intervalo (0,1). Para cualquier función de distribución estrictamente continua, F, definiremos la variable aleatoria Y como:

$$Y = F^{-1}(U_{(0,1)})$$

Donde Y tiene función de distribución F, por lo cual denotaremos a $F^{-1}(x) = y$ el valor para el cual $F(y) = x$.

Demostración Por hipótesis tenemos lo siguiente:

$$F_Y(a) = \mathbb{P}[Y \leqslant a] = \mathbb{P}[F^{-1}(U_{(0,1)}) \leqslant a]$$

Como $F(x)$ es estrictamente creciente, podemos afirmar que $F^{-1}(U_{(0,1)}) \leqslant a$ si y solo si $U_{(0,1)} \leqslant F(a)$, por consecuencia:

$$F_Y(a) = \mathbb{P}[U_{(0,1)} \leqslant F(a)] = F(a) \quad \text{ya que es una uniforme } U_{(0,1)} \qquad \blacksquare$$

Siguiendo esta proposición podemos simular variables aleatorias X con una función de distribución dada F generando números aleatorios $U_{(0,1)}$, haciendo $X = F^{-1}(U_{(0,1)})$. En caso de que la variable aleatoria X sea de tipo discreto tendremos que:

$$\mathbb{P}[X = x_j] = P_j \quad \text{para} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tal que

$$\sum_{j}^{n} P_j = 1$$

Para este método existe una regla de decisión la cual es:

$$X = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & \text{si } U_{(0,1)} \leq P_1 \\ x_2 & \text{si } P_2 \leq U_{(0,1)} \leq P_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{si } \sum_1^{j-1} P_n \leq U_{(0,1)} \leq \sum_1^{j} Pn \\ \vdots & \end{array} \right\}$$

tomando como base que

$$\mathbb{P}[X = x_j] = \sum_{1}^{j-1} P_n \leq U_{(0,1)} \leq \sum_{1}^{j} P_n = P_j$$

A través de la simulación de escenarios podemos mantener los supuestos de la distribución de pérdidas L y que los datos generados sean consistentes, obteniendo créditos que se comporten de acuerdo a la probabilidad de incumplimiento.

Con lo que podemos decir que la suma de N variables aleatorias simuladas independientes, L_n y que tenemos su distribución para posteriormente sumarlas para obtener la distribución L. Tomando las frecuencia relativa de estos distintos valores para hacer una aproximación de los valores de su función de distribución (conocida como *función empírica*).

Tomando el r-ésimo valor de la variable aleatoria L lo denotaremos por $S^r(L)$ será:

$$S^r(L) = \sum_{n=i}^{N} S^r(L_n) = \sum_{n=i}^{N} EAD_n LGD_n S^r(D_n)$$

donde el valor $S^r(D_n)$ lo obtendremos de una simulación paralela de N números aleatorios de una distribución aleatoria uniforme $U^r_{(0,1)n}$ con la siguiente regla de decisión:

$$S^r(D_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } U^r_{(0,1)n} < PD_n \\ 0 & \text{si } e.o.c. \end{cases}$$

Obteniendo un valor simulado de la variable aleatoria L, teniendo que simular R pérdida, es decir, $S^1(L), S^2(L), \ldots, S^R(L)$ y realizar la suma obteniendo la *distribución empírica*:

$$F_L^{emp}(l) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} S^r(L) I_{(0,l)}$$

Una herramienta para verificar la normalidad de un grupo de observaciones, $F_L^{emp}(l)$ es a través de un gráfico *QQ-plot*, el cual gráfica una prueba analítica de hipótesis nula de similitud.

Ordenando los valores $S^{r_1} \leqslant S^{r_2} \leqslant \cdots \leqslant S^{r_N}$ y definiremos el cuantil α, q_α de la función empírica de pérdida como:

$$q_\alpha = \begin{cases} \alpha S^{r[n\alpha]}(L) + (1-\alpha) S^{r[n\alpha]+1}(L) & \text{si } n\alpha \in \mathbb{N} \\ S^{r[n\alpha]}(L) & \text{si } n\alpha \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

donde $[n\alpha] = \text{mín}\,\{k \in 1, 2, \ldots, R | n\alpha \leqslant k\}$

Parte importante de una simulación es el costo en recursos que puede consumir esta simulación.

Vamos a comparar el número de escenarios contra el tiempo de compilación que lleva cada uno:

Número de escenarios	Segundos
100	4.15
200	8.20
300	12.01
400	15.40
500	19.32
600	23.20
700	26.93
800	31.01
900	35.08
1000	38.16
2000	76.49
3000	114.52
4000	154.78
5000	196.75
5500	212.01
6500	249.10
7500	286.12
8500	327.09
9500	364.53
10000	383.21
11000	421.35
15000	580.37
20000	871.26
25000	960.02
30000	1280.31
40000	1544.06

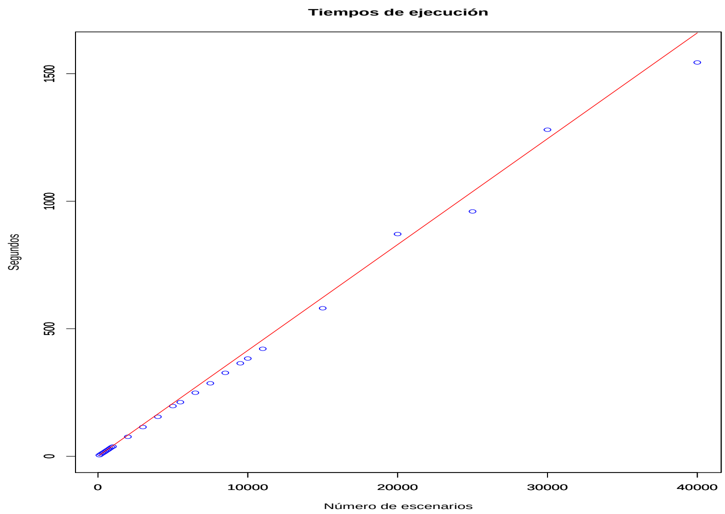
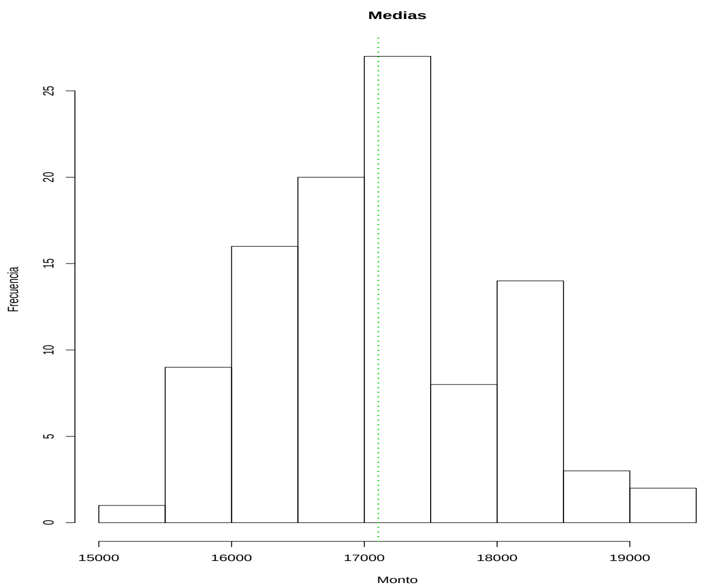


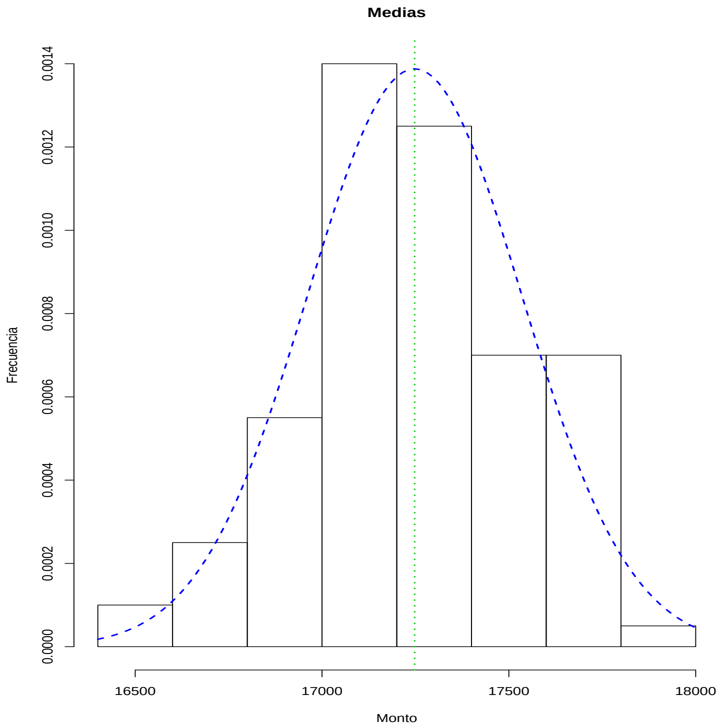
Figura 4.3: Podemos observar que el tiempo de ejecución crece de manera lineal

Por ejemplo, si realizamos 100 corridas de 100 escenarios de pérdidas podremos observar el siguiente histograma con respecto a las medias de cada variable aleatoria de pérdida:



Aun que podemos observar que el rango entre el máximo y el mínimo es amplio.

Sin embargo si realizamos el mismo procedimiento con 100 corridas de 500 escenarios obtenemos lo siguiente:



Donde de igual manera observaremos que el rango de medias se reduce significativamente.

Realizando múltiples corridas de cada uno realizamos la siguiente tabla, donde tenemos un rango de $[17100, 17300]$.

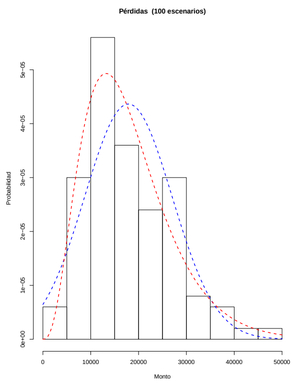
Número de escenarios	E[L]	σ_L
100	17199.92	8522.16
200	17192.44	9335.18
300	17209.82	9504.99
400	17108.84	8764.19
500	17174.379	8773.01
600	17128.53	9051.881
700	17237.12	9335.93
800	17115.00	9241.69
900	17242.22	9241.12
1000	17166.74	9191.83
2000	17188.82	8855.26
3000	17220.42	9144.22
4000	17035.24	8978.78
5000	17228.58	9022.11
5500	17108.24	8953.87
6500	17137.61	9024.44
7500	17222.69	9054.11
8500	17112.77	9116.55
9500	17291.81	9077.50
10000	17164.58	9088.11
11000	17234.46	9194.08
15000	17160.31	9040.45
20000	17210.43	9101.65
25000	17189.98	9046.56
30000	17170.44	9072.06
40000	17239.68	9104.50

De igual manera podemos ver como a manera que hacemos grande el número de escenarios, se puede ir ajustando una distribución gamma, ya que de primera instancia trate de ajustar una distribución normal.

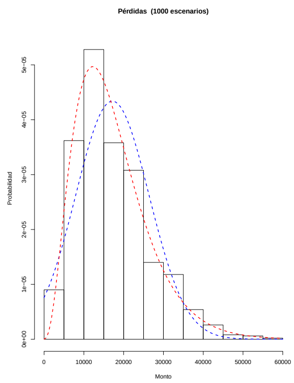
4.3. Incumplimiento

El riesgo de incumplimiento se mide a través de la distribución condicional de la variable aleatoria T, el tiempo de incumplimiento, dado el vector de covariantes X. El detalle de la variable T es que no es observable debido al mecanismo de censura.

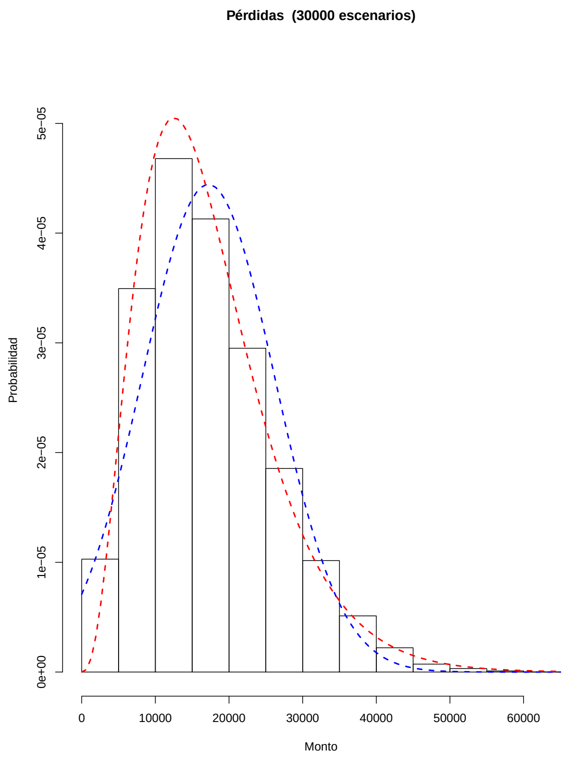
En la práctica, la proporción de créditos que caen en incumplimiento es pequeño en comparación con los créditos activos y los datos censurados es grande, lo que provoca el mal funcionamiento de los métodos estadísticos. Por otra parte el tamaño de muestra es comúnmente muy grande, lo que en el análisis de supervivencia nos permite trabajar con el problema de los datos censurados.



(a) 100 escenarios



(b) 1000 escenarios



(c) 30000 escenarios

En nuestro caso presenta censura por la derecha en dos situaciones la primera cuando el crédito es saldado y por mantener su crédito al corriente. Teniendo un intervalo de tiempo $[0, \tau]$ como horizonte de tiempo del estudio, este horizonte puede ser variable dependiendo el intervalo de tiempo que se quiera analizar, comúnmente el análisis de comportamiento crediticio es mensual, por ejemplo:

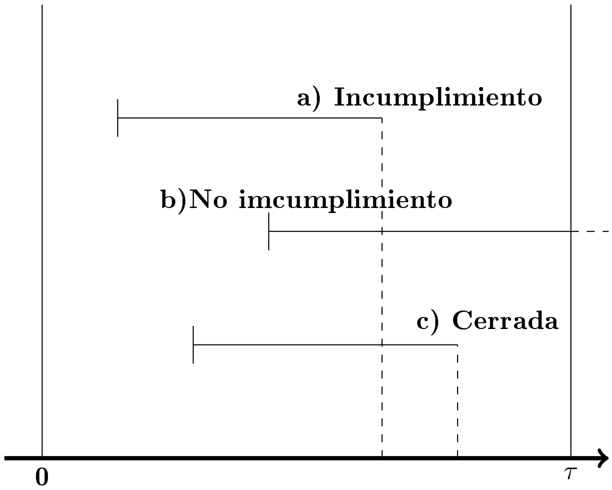


Figura 4.4: Tiempo de incumplimiento en riesgo de crédito

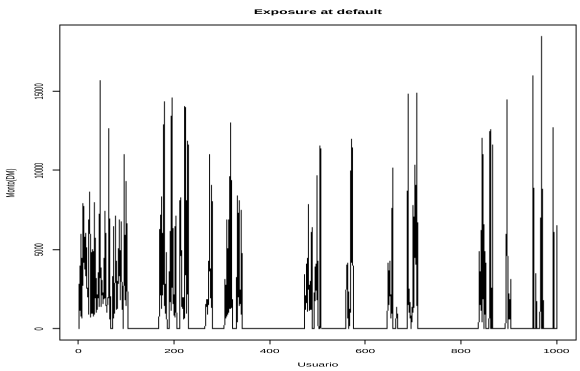
a) En este caso se muestra un crédito que presenta incumplimiento antes del horizonte de tiempo del estudio.

b) En este caso se muestra que el crédito no presenta incumplimiento dentro del intervalo de tiempo del estudio y continua de manera activa.

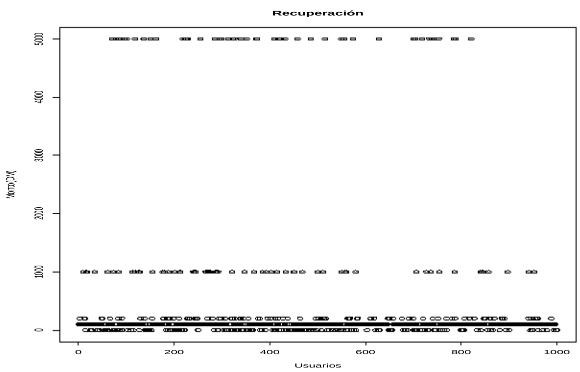
c) En este caso el crédito no presento incumplimiento, ya que fue pagado en forma por lo cual concluyo la obligación y fue cerrado dentro del intervalo del estudio (Figura 4.3).

Un pequeño detalle del incumplimiento y su relación con la pérdida neta es que no necesariamente son la misma cantidad ya que es necesario considerar todos los flujos asociados al usuario relacionas con la recuperación, positivos(ahorros y pagos) y negativos(costos internos y jurídicos), tomando en cuenta algunos aspectos que tienen que ser cuantificables:

1 La cantidad recuperable, es decir el EAD.

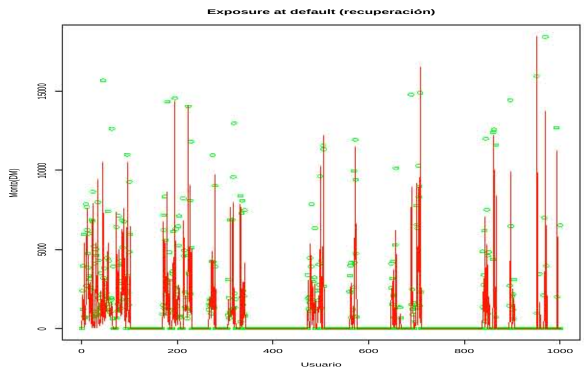


2 El valor de la cantidad recuperada, es decir que si se ha recuperado algún valor desde la fecha de incumplimiento.



3 Los costos originados de la recuperación del crédito.

Aquí mostramos como se visualizan las pérdidas después de la recuperación a través de los ahorros de las cuentas de ahorro contenidas en el banco. De se puede ver como el monto de pérdida de algunos individuos ya no alcanza el monto original de pérdida.



Teniendo claro estos aspectos, calculamos:

$$\%\text{Recuperación} = \frac{\text{Valor presente de la recuperación} - \text{Costos de recuperación}}{\text{Importe de la deuda en el momento de incumplimiento}}$$

Por lo tanto:

$$LGD = 1 - \ \%\text{Recuperación}$$

Ahora supongamos una fecha de evaluación y el portafolio de n créditos, tenemos que calcular la probabilidad de incumplimiento de un crédito c_j de plazo m, que se encuentra en un tiempo $t < m + 7$, lo que nos quiere decir que el crédito esta atrasado pero no se encuentra ni castigado, ni saldado. Debido a que nuestros datos cuentan con censura por la derecha no podemos calcularlo de manera tradicional, para lo cual podemos obtener las probabilidades por el método del estimador Kaplan Meier.

A continuación se presentan resultados del etimador Kaplan Meier de la base de datos German Credit. Esta base de datos de crédito alemán (el cual esta disponible en ftp.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases/statlog/) contiene 30 variables para 1000 aspirantes a crédito.

Tabla 4.3: Resultados Estimador Kaplan Meier con R

Tiempo	Usuario	Número de evento	F. Supervivencia	F(t)	Error Estándar
4	949	6	0.9937	0.0063	0.00257
5	929	1	0.9926	0.0074	0.00278
6	908	66	0.9205	0.0795	0.00893
7	833	5	0.9149	0.0851	0.00922
8	812	6	0.9082	0.0918	0.00955
9	789	35	0.8679	0.1321	0.0113
10	736	25	0.8384	0.1616	0.01236
11	696	9	0.8276	0.1724	0.01271
12	670	130	0.667	0.333	0.01627
13	529	4	0.6619	0.3381	0.01635
14	509	3	0.658	0.342	0.0164
15	497	52	0.5892	0.4108	0.01724
16	442	1	0.5879	0.4121	0.01726
18	431	71	0.491	0.509	0.01783
20	352	7	0.4813	0.5187	0.01786
21	337	21	0.4513	0.5487	0.0179
22	313	2	0.4484	0.5516	0.01791
24	295	128	0.2538	0.7462	0.01644
26	159	1	0.2522	0.7478	0.01641
27	153	8	0.239	0.761	0.0162
28	142	2	0.2357	0.7643	0.01615
30	137	27	0.1892	0.8108	0.01524
33	106	2	0.1857	0.8143	0.01516
36	97	46	0.0976	0.9024	0.01233
39	51	4	0.09	0.91	0.01195
42	44	8	0.0736	0.9264	0.01109
45	35	1	0.0715	0.9285	0.01097
47	33	1	0.0693	0.9307	0.01085
48	31	20	0.0246	0.9754	0.00709
54	10	1	0.0221	0.9779	0.0068
60	7	7	0	1	0

Con esto ya podemos aplicar algunas igualdades para los casos discretos.

$$f(t_j) = \mathbb{P}(T = t_j) \qquad\qquad S(t) = 1 - F(t) = \sum_{t_j > t} f(t_j)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \mathbb{P}(T = t_j | T \geqslant t_j) = \frac{\mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T \geqslant t_j)} \qquad\qquad H(t) = \sum_{t_j \leqslant t} h(t_j)$$

Tabla 4.4: Valores equivalentes a la función de supervivencia

t	S(t)	F(t)	f(t)	h(t)	H(t)
0	1	0	0.006	0.006	0
4	0.9937	0.0063	0.0063	0.006339941632283	0.006339941632283
5	0.9926	0.0074	0.0011	0.00110820068507	0.007448142317353
6	0.9205	0.0795	0.0721	0.078326996197719	0.085775138515072
7	0.9149	0.0851	0.0056	0.006120887528692	0.091896026043763
8	0.9082	0.0918	0.0067	0.007377229685091	0.099273255728855
9	0.8679	0.1321	0.0403	0.046433920958636	0.14570717668749
10	0.8384	0.1616	0.0295	0.03518606870229	0.18089324538978
11	0.8276	0.1724	0.0108	0.013049782503625	0.193943027893405
12	0.667	0.333	0.1606	0.240779610194903	0.434722638088308
13	0.6619	0.3381	0.0051	0.007705091403535	0.442427729491843
14	0.658	0.342	0.0039	0.005927051671733	0.448354781163576
15	0.5892	0.4108	0.0688	0.116768499660557	0.565123280824132
16	0.5879	0.4121	0.0013	0.002211260418439	0.567334541242571
18	0.491	0.509	0.0969	0.197352342158859	0.76468688340143
20	0.4813	0.5187	0.0097	0.020153750259713	0.784840633661144
21	0.4513	0.5487	0.03	0.066474628849989	0.851315262511133
22	0.4484	0.5516	0.0029	0.006467439785905	0.857782702297038
24	0.2538	0.7462	0.1946	0.766745468873129	1.62452817117017
26	0.2522	0.7478	0.0016	0.006344171292625	1.63087234246279
27	0.239	0.761	0.0132	0.055230125523013	1.6861024679858
28	0.2357	0.7643	0.0033	0.014000848536275	1.70010331652208
30	0.1892	0.8108	0.0465	0.245771670190275	1.94587498671235
33	0.1857	0.8143	0.0035	0.01884760366182	1.96472259037417
36	0.0976	0.9024	0.0881	0.90266393442623	2.8673865248004
39	0.09	0.91	0.0076	0.084444444444444	2.95183096924485
42	0.0736	0.9264	0.0164	0.222826086956521	3.17465705620137
45	0.0715	0.9285	0.0021	0.029370629370629	3.204027685572
47	0.0693	0.9307	0.0022	0.031746031746033	3.23577371731803
48	0.0246	0.9754	0.0447	1.81707317073171	5.05284688804974
54	0.0221	0.9779	0.0025	0.113122171945699	5.16596905999544
60	0	1	0.0221	0	5.16596905999544

4.4. Distribución de pérdidas

Una *pérdida* en riesgo de crédito es una vez dado el incumplimiento por parte del usuario en un horizonte de tiempo determinado, las amortizaciones no cubiertas por el usuario, se convertirán en pérdidas para la Institución Financiera.

Definimos una variable de pérdidas L, que esta compuesta por tres factores que son: el indicador de incumplimiento, la exposición al incumplimiento y la severidad del incumplimiento. Donde la *severidad al incumplimiento* es una variable aleatoria referente a la proporción de EAD que será asumida como pérdida cuando se incurra en incumplimiento.

Por lo que la variable de pérdida L quedará determinada por:

$$L_j = EAD_j \times SEV_j \times I_D \quad \text{para el j-ésimo crédito}$$

Por lo que si consideramos que el portafolio tiene m créditos, las pérdidas que el portafolio puede ocasionar a la institución por el incumplimiento en el horizonte de tiempo $[0, T]$ será:

$$L = \sum_{j=1}^{m} L_j \qquad \text{donde } L_j \text{ es la pérdida del j-ésimo crédito en } [0, T]$$

El factor EAD no es considerada variable ya que se determina al momento de otorgar el crédito y SEV e I_D son variables aleatorias independientes debido a que la estimación de LGD se realiza sobre un grupo de observaciones distintas de probabilidades de incumplimiento. Por lo que podemos escribir:

$$L = \sum_{j=1}^{m} L_j = \sum_{j=1}^{m} [EAD_j \times SEV_j \times I_{D_j}]$$

La variable aleatoria L y su distribución son vitales para el cálculo de reservas en riesgo de crédito, con los requisitos del Comité de Supervisión Bancaria de Basilea.

En el sistema financiero mexicano, el órgano central Banco de México(BANXICO) estableció en la circular 34/2010 en el punto 3.9 de la misma lo siguiente:

> “En el evento de que el Titular haya autorizado a la Emisora a cargar el saldo deudor vencido de la Cuenta en alguna cuenta de depósito o de inversión abierta con ella, sólo podrá efectuar el cargo respectivo cuando dicho saldo deudor esté vencido durante más de noventa días naturales y se trate de cargos que no hayan sido objetados en tiempo por el Titular, cuya aclaración se encuentre pendiente de resolver”

Con la cual se acredita a la Institución Financiera tomar los activos de la cuenta de deposito o ahorros del usuario, dando como consecuencia un porcentaje de recuperación. A continuación mostraremos la distribución de pérdidas sin recuperación(izquierda) y la distribución de pérdidas con el porcentaje de recuperación(derecha):

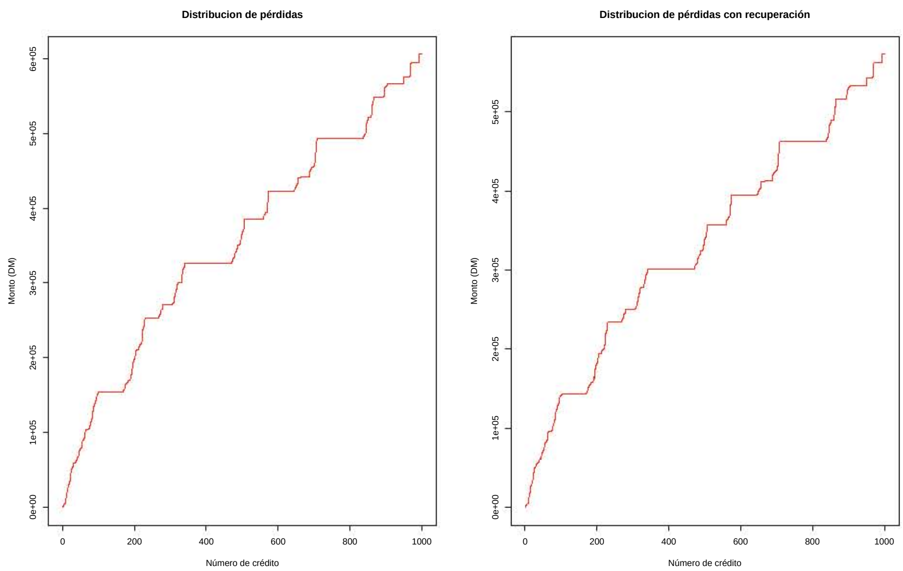


Figura 4.5: La distribución de pérdidas. Podemos notar que no existe mucha diferencia con la recuperación.

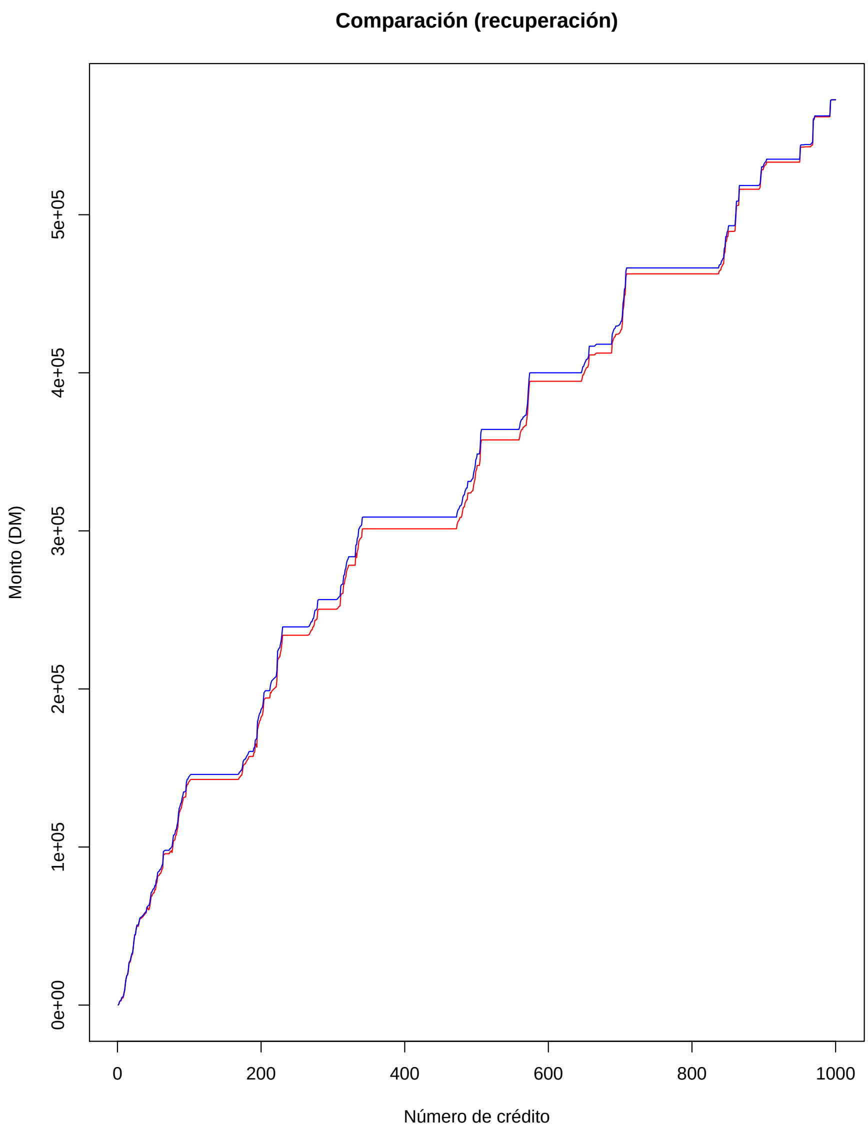


Figura 4.6: Podemos ver que no existe una gran diferencia si superponemos las gráficas la distribución de pérdidas con recuperación es la roja y se evidencia que no cambia de forma importante la distribución, solo modifica la cantidad de los saltos.

Capítulo 5

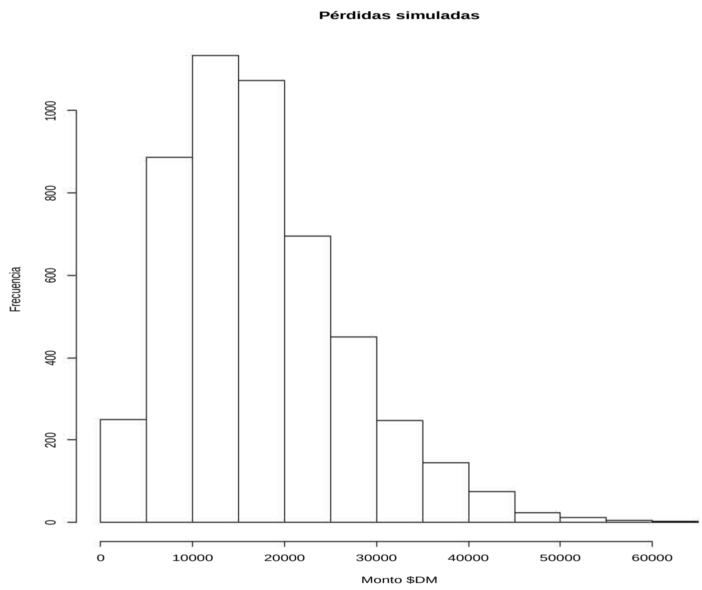
Medidas de Riesgo

Ahora vamos a calcular las medidas de riesgo explicadas anteriormente como son Pérdida Esperada, Valor en Riesgo y Expected Shortfall.

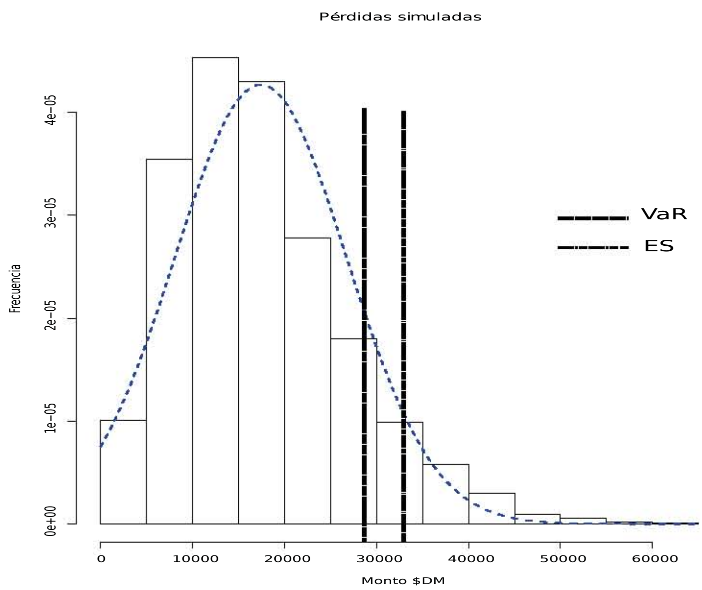
Hay que recordar que estas medidas de riesgo no son medidas atemporales, ya que dependen de un periodo de tiempo relativo a la fecha de evaluación de estas medidas. Para estas medidas de riesgo generalmente se toma un periodo máximo del máximo de sus créditos que son 72 meses. El cual es el tiempo que tarda en llegar a su horizonte de tiempo el crédito más largo.

Una vez realizada la simulación de las pérdidas del portafolio usando los cálculos de supervivencia con el objetivo de verificar que las pérdidas se distribuyen de manera normal. Esta simulación se realizo de acuerdo al planteamiento hecho en la sección 4.2, donde R=5000 escenarios de pérdidas, por lo cual se llevaron a cabo $5,000 \times 1,000 = 5,000,000$ para la obtención de valores de fallo 1 ó 0 (dependiendo del valor aleatorio de $U^r_{(0,1)n}$ y de las probabilidades obtenidas de nuestro modelo de supervivencia PD_n), las indicadoras de incumplimiento D_n, estos valores serán multiplicados por sus respectivos valores de EAD_n y LGD_n obteniendo como resultado final un valor simulado de las pérdidas para cada uno de los créditos del portafolio, y al sumarlas obtener el escenario de pérdidas del portafolio.

Mostramos el histograma de los escenarios de pérdidas:



Podemos ajustar una curva normal de media \$17,407.18 y desviación estándar \$9,342.439.



Prueba de bondad de ajuste.

Un análisis básico de la simulación nos indica que las pérdidas tienen los siguientes valores de curtosis y asimetría:

Estadísticos	
Asimetría	0.8305148
Curtosis	3.819284

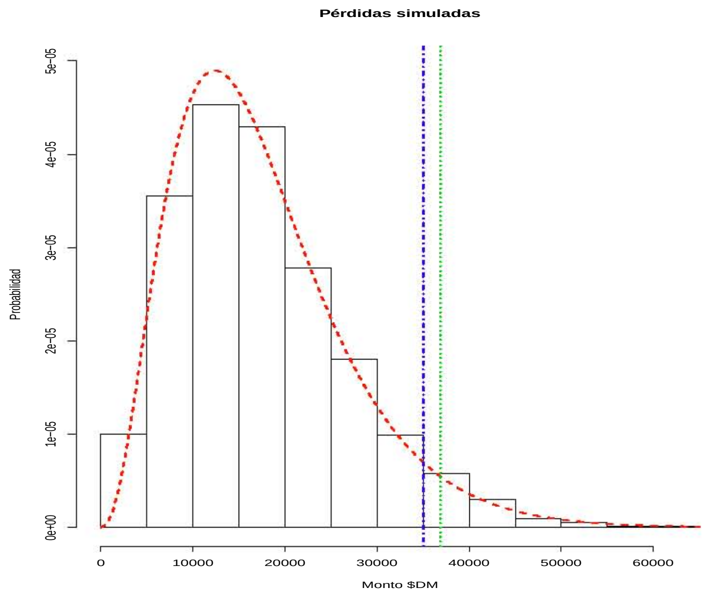
Recordando la definición de curtosis mide que tan elongada es una función de distribución, en nuestro caso que es mayor a tres podemos esperar un pico alto y colas alargadas. Como tenemos un coeficiente de asimetría positivo tenemos que tiene una asimetría derecha, es decir que los escenarios de pérdida simulados rebasan la media, entonces pasando a la curtosis se muestra positiva por lo cual podemos decir que es ligeramente mayor a la distribución normal. En el riesgo financiero es poco común encontrar un factor de riesgo la cual siga una distribución de pérdidas normal.

En este caso ambos estadísticos nos indican que puede que asemeje una distribución normal, pero sobre sale de la normal.

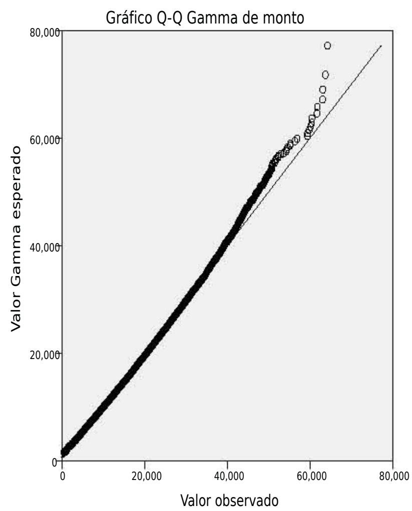
Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Parámetros normales	
Media	17407.1
Desviación estándar	9342.439
Máximas diferencias extremas	
Absoluta	.059
Positivo	.059
Negativo	-.043
Estadístico de prueba (Z)	0.059
Sig. asintótica (bilateral)	0.000

Como el valor de del estadístico $Z > 0.05$ rechazamos que sea normal, por lo cual nos vemos en la necesidad de ajustar otra distribución, por lo cual no haremos con una función gamma; $L \sim Gamma(\alpha = 3.47, \beta = 5010.08)$



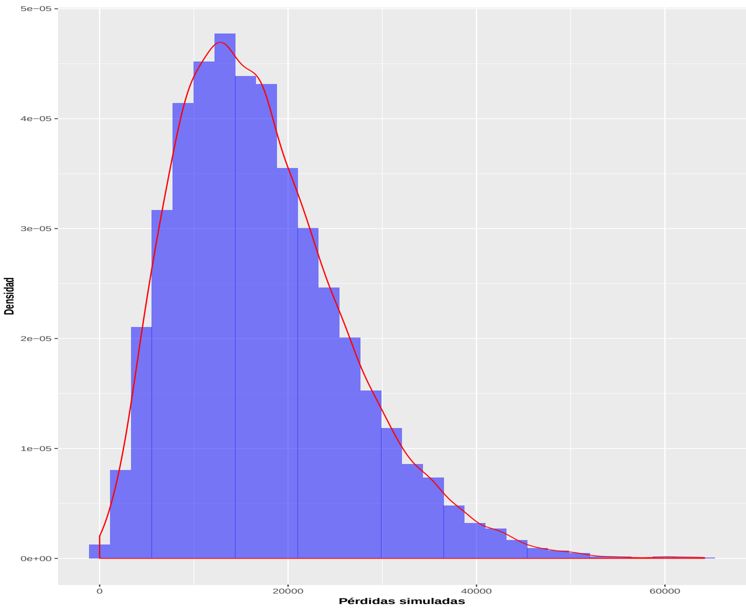
Corroboramos elaborando un Q-Qplot:



Podemos observar que la función gamma se ajusta a la función de distribución propuesta excluyendo la cola derecha, esto nos da evidencia de que la cola es más pesada que la de una distribución gamma. Esto es importante ya que es la cola que ocuparemos para el cálculo de las medidas de riesgo.

Un método que podría usar para afinar el ajuste de la cola derecha sería utilizando la Teoría de Valores Extremos el cual lo podemos estudiar en *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values* de Stuart Coles.

Elaborando un ggplot:



En esta tabla mostramos las medidas de riesgo obtenidas, podemos observar que como era esperado entre mas se reduce α menor es la diferencia entre VaR_α y ES_α.

α	VaR_α	ES_α
0.1	29,899.01	33,221.13
0.05	35,019.67	36,862.82
0.01	46,035.07	46,500.07
0.001	60,651.81	60,712.52

Sus medidas de riesgo las cuales fueron $VaR = 60,651.81$ y $ES = 60,712.52$ con $\alpha = 0.001\,\%$. Todo esto en sencillas palabras es que la pérdida esperada sería de $\$17,407.18$ para el cual tendríamos que tener un capital económico de $\$60,651.81$ para tener todas las obligaciones pendientes cubiertas bajo los reglamentos de la CNBV y por último un expected shorfall de $\$60,712.52$; todo esto bajo un $\alpha = 0.001$.

Capítulo 6

Conclusiones

La conformación de "nuevas" Instituciones Financieras como son las Sociedades Financieras de Objeto Múltiple implica cumplir la legislación existente en México.

Este tipo de sociedades no necesariamente cuentan con grandes bases de datos ni con un departamento de investigación en metodología en riesgo de crédito, razón por la cual recurrimos al diseño de un modelo que nos permita asignar probabilidades a los clientes tomando en cuenta sus características personales, plazo y monto del crédito con lo cual conformar la reserva estipulada por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores; este cálculo será estudiado únicamente de manera interna.

Este trabajo es una propuesta para calcular las medidas de riesgo de una cartera de crédito personal de una institución financiera con muy poca información sobre sus usuarios, únicamente tomando su calificación crediticia o incluso la falta de la misma en caso de que sea un usuario entrando al mercado financiero, para posteriormente poder calcular una reserva regulatoria de capital establecida por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores.

Manejamos una opción para la valuación de pérdidas de este tipo de Instituciones Financieras, basado en datos personales y su reporte de crédito personal al cual se puede acceder a través de las Instituciones de Información Crediticia. El cálculo del monto de pérdidas nos es útil para tener una reserva la cual tiene objetivos en el balance que se entrega a la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y lo más importante es poder hacer frente a las obligaciones adquiridas al momento de conceder a un crédito a un usuario.

Teniendo en cuenta esto se asigna una probabilidad de incumplimiento vía supervivencia y con lo cual tener un criterio de decisión para la aprobación de crédito y posteriormente poder hacer un historial de pagos, en el cual podemos ver la morosidad que llegan a tener los usuarios y en que horizonte de tiempo.

Usando una función de supervivencia y tomando como base el modelo estructural de Merton calculamos las probabilidades de supervivencia, función de densidad, función de probabilidad y función de riesgo. El cálculo de estas probabilidades es bajo el supuesto de independencia de cada uno de los usuarios, sin tomar en cuenta la situación económica del país y de la institución financiera.

Llevando acabo la simulación llegamos a que las pérdidas pueden ser ajustadas a una distribución gamma, calculamos sus medidas de riesgo las cuales fueron $VaR_\alpha = 60651.81$ y $ES_\alpha = 60712.52$ con $\alpha = 0.001\,\%$, es decir, $VaR_\alpha = 60651.81$ es la cantidad que no será superada con 99.999 % de confianza y ES_α es si la pérdida llega a superar el VaR_α entonces se espera una pérdida de \$60712.52.

Podemos observar que la diferencia entre VaR_α y el ES_α no es muy amplia numéricamente, pero recordando que contablemente esto nos indica la reserva que debemos conformar. Las instituciones de crédito están obligadas por ley a crear reservas preventivas en función de la calidad de sus carteras crediticias.

"La mayor capitalización y creación de reservas de las instituciones financieras dará una mejor protección a las inversiones del público en las mismas, incrementará su competitividad internacional y estimulará el papel que estas instituciones deben jugar en el desarrollo económico del país."

Ley de Instituciones de Crédito.

Podemos concluir que el modelo es aplicable en el caso de ser una Institución Financiera con escasez de datos, o simplemente no contar con el software comercial para calcular estas medidas y podemos llegar a un resultado coherente.

Continuando con la comparación el ES_α es una buena medida de riesgo para mitigar el riesgo a comparación del VaR_α, aunque elegir el ES_α como medida implicaría un costo de oportunidad al aumentar la cantidad de las reservas.

Por lo cual entiendo por que como Institución Financiera elegiría el VaR como medida de riesgo, repitiendo que no es por ser la mejor si no la cual optimizaría el valor complementario del portafolio debido a que permitiría mayor movimiento del capital para generar utilidades.

Apéndice A

Inversa generalizada y cuantiles

Sea F una función creciente, es decir, una función que satisface $y > x \Longrightarrow F(y) \geqslant F(X)$, con desigualdad estricta de lado derecho para una pareja tal que $y > x$. Esta es una función creciente la cual puede llegar a tener secciones constantes; para eliminar esto podemos suponer que F es estrictamente creciente, entonces si $y > x \Longrightarrow F(y) > F(x)$. Observaremos algunos hechos útiles de las transformaciones crecientes de las variables aleatorias. Estrictamente hablando la inversa generalizada es conocida como *inversa generalizada por la izquierda.*

Lema

i) Si X es una variable aleatoria y F es creciente, entonces $\{X \leqslant x\} \subset \{F(X) \leqslant F(x)\}$ y

$$\mathbb{P}(F(X) \leqslant F(x)) = \mathbb{P}(X \leqslant x) + \mathbb{P}(F(X) = F(x) \quad I_{X>x}) \tag{A.1}$$

ii) Si T es la función de distribución de la variable aleatoria X, entonces $\mathbb{P}(T(X) \leqslant T(x)) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$

La segunda afirmación se deduce de (A.1) ya que para cualquier x, el evento $\{T(X) = T(x)I_{X>x}\}$ que corresponde a una parte constante de la función de distribución T y tiene masa de probabilidad cero.

La inversa generalizada de una función creciente F esta definida por $F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : F(x) \leqslant y\}$, recordando que por convención $\inf \emptyset = \infty$. Estrictamente hablando la inversa generalizada es conocida como *inversa generalizada por la izquierda.*

Proposición 3 (propiedades de la inversa generalizada). Sea una funcón creciente F, se tiene lo siguiente:

i) $F^{\leftarrow}$ es una función creciente, una función continua por la izquierda.

ii) F es continua $\Longleftrightarrow F^{\leftarrow}$ es estrictamente creciente.

iii) F es estrictamente creciente $\Longleftrightarrow F^{\leftarrow}$ es continua.

Para las siguientes propiedades asumiremos que $F^{\leftarrow}(y) < \infty$.

iv) Si F es continua por la derecha, $F(x) \leqslant y \Longleftrightarrow F^{\leftarrow}(y) \geqslant x$.

v) $F^{\leftarrow} \circ F(x) \leqslant x$.

vi) $F \circ F^{\leftarrow}(y) \geqslant y$.

vii) F es estrictamente creciente $\Longrightarrow F^{\leftarrow} \circ F(x) = x$.

viii) F es continua $\Longrightarrow F \circ F^{\leftarrow}(y) = y$.

Aplicamos el concepto de inversa generalizada a las funciones de distribución. Si T es una función de distribución, entonces la inversa generalizada $T^{\leftarrow}$ es conocida como la función cuantil de T. En este caso para un $\alpha \in (0,1)$ usamos la siguiente notación $q_{\alpha}(T) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ para el cuantil α de T.

Proposición 4. Si X es una variable aleatoria con función de distribución F, entonces

$$\mathbb{P}(F^{\leftarrow} \circ F(X) = X) = 1$$

Bibliografía

[1] Aalen, O., Borgan, O., and Gjessing, H. *Survival and event history analysis: a process point of view.* Springer Science & Business Media, 2008.

[2] Alexander, C. *Market models: A guide to financial data analysis.* John Wiley & Sons, 2001.

[3] Altman, E. I., and Hotchkiss, E. *Corporate financial distress and bankruptcy: Predict and avoid bankruptcy, analyze and invest in distressed debt*, vol. 289. John Wiley & Sons, 2010.

[4] Bluhm, C., Overbeck, L., and Wagner, C. *Introduction to credit risk modeling.* Crc Press, 2016.

[5] Cao, R., Vilar, J. M., Devia, A., Veraverbeke, N., Boucher, J.-P., and Beran, J. Modelling consumer credit risk via survival analysis.

[6] de México, B. Definiciones básicas de riesgos. *Recuperado de: http://www. banxico. org. mx* (2005).

[7] de México, B. Glosario de términos del sistema financiero mexicano. *Recuperado de: http://www. banxico. org* (2010).

[8] Desarrollo, P. Benchmarking de las microfinanzas en méxico 2013.

[9] Duffie, D., and Singleton, K. J. *Credit risk: pricing, measurement, and management.* Princeton University Press, 2012.

[10] Fight, A. *Credit risk management.* Butterworth-Heinemann, 2004.

[11] Klein, J. P., and Moeschberger, M. L. *Survival analysis: techniques for censored and truncated data.* Springer Science & Business Media, 2005.

[12] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. *Loss models: from data to decisions*, vol. 715. John Wiley & Sons, 2012.

[13] McDonald, R. L., Cassano, M., and Fahlenbrach, R. *Derivatives markets*, vol. 2. Addison-Wesley Boston, 2006.

[14] McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools.* Princeton University Press, 2015.

[15] Saunders, A., and Allen, L. *Credit risk management in and out of the financial crisis: new approaches to value at risk and other paradigms*, vol. 528. John Wiley & Sons, 2010.

[16] Van Gestel, T., and Baesens, B. *Credit Risk Management: Basic concepts: Financial risk components, Rating analysis, models, economic and regulatory capital.* Oxford University Press, 2009.

[17] Vasicek, O. A. *Probability of loss on loan portfolio.* Wiley Online Library, 1987.

[18] y de Valores, C. N. B. Circular única de bancos. *Recuperado de: http://www.cnbv.gob.mx* (2011).

[19] Zhang, A. *Statistical methods in credit risk modeling.* PhD thesis, University of Michigan, 2009.