Universidad Nacional
Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Acciones Propias de Grupos Localmente Compactos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:

Matemático

PRESENTA:
Marcos Torres Vivanco

TUTOR
Dr. Sergey Antonyan

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.
Mayo, 2018

Índice general

Introducción

La teoría de grupos topológicos de transformaciones estudia los invariantes bajo movimientos (o transformaciones) que ocurren en cierto espacio topológico bajo la acción de un grupo dotado de una topología. Esta teoría se origina con la definición de geometría como el estudio de invariantes bajo un grupo de transformaciones dada por Felix Klein, y con el estudio de las simetrías de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que realizó el matemático noruego Sophus Lie.

Cuando el grupo actuante tiene la propiedad de ser compacto se obtienen muchos resultados fuertes y herramientas que no están disponibles para el caso de los grupos no compactos. No obstante, al considerar únicamente los grupos compactos estamos excluyendo a muchos otros que resultan interesantes dentro de la teoría, por ejemplo, a los flujos de ecuaciones diferenciales en los cuales el grupo actuante, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es localmente compacto.

En consecuencia, se ha buscado generalizar la teoría de grupos compactos que se tiene para que englobe también clases de grupos no compactos. Es en esta búsqueda en donde surge el concepto de acción propia, cuya función es ayudar a que los grupos localmente compactos recuperen las propiedades presentes en los grupos compactos.

Este trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo revisaremos los principales resultados de topología general que ocuparemos a lo largo de este trabajo, así como la definición y las propiedades más importantes de redes. En el segundo capítulo revisaremos la definición de grupo topológico de transformaciones y algunos resultados de la teoría que se desarrolla con ellos, en particular revisaremos el caso de los grupos topológicos de transformaciones para grupos compactos. Por último, en el tercer capítulo veremos las tres definiciones de acción propia más importantes en la literatura y la relación que existe entre ellas, así como las condiciones bajo las cuales son equivalentes.

Este trabajo fue realizado gracias al apoyo del programa PAPIIT-UNAM IN-17511.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Topología general

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados importantes de topología general que estaremos utilizando a lo largo de este trabajo. Para consultar las pruebas o profundizar en más resultados se puede consultar [**1**] ó [**2**].

Algunos de estos conceptos son los relacionados con compacidad, por lo que recordaremos dichas definiciones y algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ es una **cubierta abierta** de X si $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, también diremos que $\{U_i\}_{i\in I}$ cubre a X. Si un subconjunto, $\{U_j\}_{j\in J}$, de $\{U_i\}_{i\in I}$ cubre a X, diremos que es una **subcubierta** de $\{U_i\}_{i\in I}$.*

Definición 1.1.2. *Sea X un espacio topológico, decimos que X es **compacto** si para toda cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de X existe una subcubierta finita $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$ que cubre a X. Si K es un subconjunto de X tal que es compacto con la topología relativa a X, entonces diremos que K es un **subconjunto compacto** de X.*

Definición 1.1.3. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X, si $\overline{A}$ es compacto, entonces decimos que A es **precompacto**.*

Definición 1.1.4. *Un conjunto X es **localmente compacto** si para toda $x \in X$ y para toda V vecindad de x, existe una vecindad precompacta U de x tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.*

Los axiomas de separación nos permiten poner ciertas restricciones a los espacios topológicos con los que trabajamos, las definiciones de dichos axiomas cambian dependiendo de la literatura consultada, por lo que para evitar cualquier tipo de confusión, enunciaremos las definiciones de dichos axiomas.

Definición 1.1.5. *Decimos que X es un espacio T_0 si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un abierto U de X tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.*

Definición 1.1.6. *Decimos que X es un espacio T_1 si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen dos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$, pero $x \notin V$, $y \notin U$.*

Proposición 1.1.1. *Un espacio X es T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado.*

Definición 1.1.7. *Decimos que X es un espacio T_2 o de Hausdorff si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen dos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$.*

Los conjuntos compactos nos permiten generalizar las propiedades que cumplen los conjuntos finitos, en particular, algunas propiedades que se cumplen para puntos de un espacio topológico. Como ejemplo a continuación veremos una caracterización de los espacios Hausdorff relacionada con espacios compactos.

Proposición 1.1.2. *Un espacio es T_2 si y sólo si para cualquier par de conjuntos compactos ajenos K_1 y K_2 existen dos vecindades ajenas U y V de K_1 y K_2 respectivamente.*

Definición 1.1.8. *Decimos que X es un espacio T_3 si para cualquier punto x y cualquier cerrado F de X que no contenga a x existen dos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$, $F \subset V$. Si, además, X es T_1 diremos que es* ***regular****.*

Por otro lado, se puede caracterizar a los espacios T_3 como sigue:

Proposición 1.1.3. *El espacio topológico X es T_3 si y sólo si para todo punto x y todo abierto U que contiene a x existe otro abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Definición 1.1.9. *Decimos que X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ si para cualquier subconjunto cerrado F y cualquier punto x que no pertenece a F, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y, para todo y en F, $f(y) = 1$. Si, además, X es T_1 decimos que es* ***completamente regular****.*

Definición 1.1.10. *Decimos que X es un espacio T_4 si para cualquieresquiera cerrados F y E de X existen dos abiertos ajenos U y V tales que $F \in U$, $E \subset V$. Si, además, X es T_1 diremos que es* ***normal****.*

Además se puede ver que los axiomas de separación cumplen que todo espacio normal es completamente regular, todo espacio completamente regular es regular, todo espacio regular es T_2 y todo espacio T_i es T_{i-1} para todo $i \in \{2, 1\}$.

Cuando restringimos nuestra teoría a los espacios de Hausdorff obtenemos nuevos resultados en los conjuntos compactos y localmente compactos.

Proposición 1.1.4. *X es un espacio de Hausdorff localmente compacto si y sólo si para todo $x \in X$ existe una vecindad U tal que $\overline{U}$ es compacto.*

Proposición 1.1.5. *Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Teorema 1.1.1. *Todo espacio localmente compacto y Hausdorff es un espacio de Tychonoff.*

Definición 1.1.11. *Para cualquier función $f : X \to Y$, definimos la **gráfica** de f como el conjunto:*

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$$

.

Teorema 1.1.2. *(Teorema de la gráfica cerrada) Sea X un espacio topológico y Y un espacio de Hausdorff compacto, entonces la gráfica de f es cerrada si y sólo si f es continua.*

Definición 1.1.12. *Una función suprayectiva $p : X \to Y$ es una **identificación** o **función cociente** si Y tiene la **topología cociente**, es decir, un subconjunto U de Y es abierto si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto. Al espacio Y con la topología cociente se le conoce como **espacio cociente** de X.*

La topología cociente es la más fina que hace que la función $p : X \to Y$ sea una función continua.

Es posible probar que la composición de funciones cocientes es nuevamente una función cociente.

Proposición 1.1.6. *Toda función suprayectiva, continua y abierta (o cerrada) es una función cociente.*

El regreso de la proposición 1.1.6 no es cierto en general, es decir existen funciones cocientes que no son abiertas o cerradas.

Las funciones cocientes cumplen la siguiente propiedad universal

Proposición 1.1.7 (Propiedad Universal del Cociente)**.** *Sea $p : X \to Y$ una función suprayectiva y continua, la topología cociente es la única que cumple que para cualquier espacio Z y cualquier función $f : Y \to Z$, f es continua si y sólo si $f \circ p$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f\circ p"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Teorema 1.1.3. *(Teorema de Transgresión) Sea $p : X \to Y$ una función cociente. Toda función continua $f : X \to Z$ que envía cada fibra $p^{-1}(y)$ en un único punto de Z induce una única función continua $\widetilde{f} : Y \to Z$ tal que $\widetilde{f}p = f$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Es importante mencionar que si $p : X \to Y$ es una función cociente, el espacio cociente en general no preservará las propiedades de X, en particular los axiomas de separación como podemos ver en el ejemplo 1.1.1.

Ejemplo 1.1.1. *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con su topología usual y sea $Y = \{0, 1\}$. Definimos la función $p : \mathbb{R} \to Y$,*

$$p(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Notemos que p es suprayectiva, por lo que podemos darle a Y la topología cociente con respecto de p. Dado que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son abiertos, la topología de Y es la topología indiscreta, por lo tanto, Y no es ni siquiera T_0 pues no es posible separar el punto 0 del punto 1, pero es cociente de $\mathbb{R}$, que un espacio métrico que cumple con todos los axiomas de separación.

1.2. Redes

Muchas de las pruebas que se realizan en este trabajo utilizan el concepto de red y sus propiedades. La definición de red es una generalización de las ampliamente conocidas sucesiones y es por eso que presentamos una introducción y algunos resultados importantes sobre redes. Para profundizar más en las proposiciones y en las pruebas de esta sección se puede consultar [**1**].

Definición 1.2.1. *Sea A un conjunto diferente del vacío, con una relación binaria $\preceq$. Entonces $(A,\preceq)$ es un **preorden** si:*

- *$\alpha \preceq \alpha$ para todo $\alpha \in A$ (reflexiva)*
- *$\alpha_1 \preceq \alpha_2$, $\alpha_2 \preceq \alpha_3$ implica $\alpha_1 \preceq \alpha_3$ (transitiva)*

*Se dice que un conjunto preordenado $(A,\preceq)$ es un **conjunto dirigido** si además cumple:*

- *Para todo $\alpha, \alpha' \in A$ existe α'' tal que $\alpha \preceq \alpha''$ y $\alpha' \preceq \alpha''$*

Naturalmente, la notación $a \succeq b$ significa que $b \preceq a$.

Definición 1.2.2. *Una **red** en un conjunto diferente del vacío X es una función $r : A \to X$ donde $(A,\preceq)$ es un conjunto dirigido. Al punto $r(\alpha)$ se le denota x_α, por lo que la red suele denotarse $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ o simplemente (x_α). Si $E \subset X$ y para todo $\alpha \in A$ tenemos $x_\alpha \in E$, decimos que (x_α) es una red en E.*

De ahora en adelante, cuando hablemos de la red (x_α), a menos que se mencione explicitamente, supondremos que el conjunto dirigido donde se encuentran los índices de la red es A.

Definición 1.2.3. *Se dice que A' es un **conjunto cofinal** en A cuando satisface que para todo $\alpha \in A$ existe $\alpha' \in A'$ tal que $\alpha \preceq \alpha'$.*

Notemos que un conjunto cofinal es un conjunto dirigido.

Definición 1.2.4. *Una función $s : B \to A$, donde B y A son conjuntos dirigidos, es una **función creciente cofinal** si cumple que:*

1. *Si $\beta_1 \preceq \beta_2$ entonces $s(\beta_1) \preceq s(\beta_2)$*
2. *Para toda $\alpha \in A$ existe $\beta \in B$ tal que $\alpha \preceq s(\beta)$, es decir, la imagen de B bajo s, $s(B)$, es un conjunto cofinal en A.*

Definición 1.2.5. *Una **subred** de la red $r : A \to X$ es la composición de una función creciente cofinal $s : B \to A$, donde B es un conjunto dirigido, seguida de la red r.*

Si escribimos α_β en lugar de $s(\beta)$, podemos denotar a una subred $(x_{s(\beta)})_{\beta\in B}$ como $(x_{\alpha_\beta})_{\beta\in B}$, o también lo denotamos como (x_β).

Definición 1.2.6. *Sea (x_α) una red en X. Decimos que $x \in X$ es un punto* ***límite*** *o de* ***convergencia*** *si para cada vecindad V de x existe un $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$. Si sucede lo anterior, decimos que la red (x_α)* ***converge*** *a x y lo denotamos $(x_\alpha) \rightsquigarrow x$*

Una red puede converger a varios puntos, el conjunto de todos los puntos de convergencia es denotado como $\operatorname{lím}_{\alpha\in A} x_\alpha$ ó $\operatorname{lím} x_\alpha$.

Definición 1.2.7. *Un punto $z \in X$ es un* ***punto de acumulación*** *o* ***adherencia de la red*** *(x_α) si para cualquier $\alpha \in A$ y para cualquier abierto V de z, existe un $\alpha' \succeq \alpha$ tal que $x_{\alpha'} \in V$.*

Ejemplo 1.2.1. *El conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales con la relación usual $\leq$ constituye un conjunto dirigido, por lo que toda sucesión (x_n) es un caso particular de una red, una subsucesión (x_{n_k}) es una subred. Las definiciones usuales de convergencia y punto de acumulación coinciden con las correspondientes definiciones en redes.*

Ejemplo 1.2.2. *Sea $\mathcal{N}$ una base local de x en un espacio topológico X, entonces $(\mathcal{N}, \supset)$, donde el preorden es $\supset$, es un conjunto dirigido. Ya sabemos que $\supset$ es transitiva y reflexiva, ahora, dadas dos vecindades básicas V_1 y V_2 existe una vecindad básica V_3 contenida en $V_1 \cap V_2$, por lo tanto $(\mathcal{N}, \supset)$ es dirigido. Un conjunto $\mathcal{N}'$ es cofinal si es una base local de x. Por otro lado, toda red $(x_V)_{V\in\mathcal{N}}$ en X construida de tal manera que $x_V \in V$ para todo $V \in \mathcal{N}$ converge a x.*

La siguiente proposición nos muestra la relación entre los puntos de acumulación y los puntos de convergencia.

Proposición 1.2.1. *Sea (x_α) una red en X. Se tiene:*

1. *Si $x_\alpha \rightsquigarrow x$ entonces x es un punto de acumulación de (x_α) y toda subred de (x_α) converge a x.*
2. *z es un punto de acumulación de la red (x_α) si y sólo existe una subred de (x_α) convergente a z.*

Una de las ventajas de trabajar con redes es que nos brindan una caracterización de los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio topológico.

Proposición 1.2.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

- *Un subconjunto F de X es cerrado si y sólo si, para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que $x_\alpha \rightsquigarrow x$ y $x_\alpha \in F$ para toda $\alpha \in A$, tenemos que $x \in F$.*
- *Un subconjunto V de X es abierto si y sólo si, para todo $x \in V$ y toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que $x_\alpha \rightsquigarrow x$, existe un $\alpha_0 \in A$ tal que $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$.*

Las redes también nos dan una caracterización útil de los puntos cerradura.

Proposición 1.2.3. *Sea E un subconjunto de un espacio X. Entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe una red (x_α) en E tal que converge a x.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $x \in \overline{E}$, para cada vecindad V de x existe un punto $x_V \in V$. Entonces, construimos la red (x_V) en E con índices en el conjunto dirigido $(\mathcal{N}, \supset)$, que es la misma red del ejemplo 1.2.2, por lo tanto $(x_V) \rightsquigarrow x$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que una red (x_α) en E converge a x en X, entonces, toda vecindad V de x contiene puntos de la red y por lo tanto intersecta a E, por lo que $x \in \overline{E}$. $\square$

Las redes también nos ayudan a dar una caracterización de los conjuntos compactos, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *X es compacto si y sólo si toda red X tiene una subred convergente X.*

El siguiente problema nos resultará de gran utilidad pues da una caracterización de la continuidad de una función en términos de redes.

Proposición 1.2.5. *Una función $f : X \to Y$ es continua en x_0 si y sólo si siempre que una red (x_α) converge a x_0 en X, la red $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x_0)$ en Y.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es continua en x_0 y $x_\alpha \rightsquigarrow x_0$ en X, para toda vecindad V de $f(x_0)$ en Y, existe una vecindad U de x_0 tal que $f(U) \subset V$, por lo que existe un índice α_0 tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$. Por lo tanto, $f(x_\alpha) \in V$, lo cual significa que $f(x_\alpha) \rightsquigarrow f(x_0)$.

$\Leftarrow$) Probemos esta parte por contradicción. Supongamos que f no es continua en x_0, entonces alguna vecindad V_0 de $f(x_0)$ no contiene a $f(U)$ para toda vecindad U de x_0, por lo que para toda U vecindad de x_0 podemos elegir $x_U \in U$ un punto tal que $f(x_U) \notin V_0$. De este modo, tenemos que por construcción la red (x_U) converge a x_0, pero $(f(x_U))$ no converge a $f(x_0)$, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis. $\square$

En los espacios de Hausdorff las redes se portan muy bien pues no hay redes que converjan a más de un punto.

Proposición 1.2.6. *Un espacio X es de Hausdorff si y sólo si ninguna red en X converge a más de un punto.*

Demostración. $\Rightarrow$) Demostremos por reducción al absurdo, supongamos X es de Hausdorff y que existe una red (x_α) que converge a dos puntos distintos x y y. Sean U y V vecindades de x y y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces, como (x_α) converge a x existe α' tal que si $\alpha \succeq \alpha'$, entonces $\alpha \in U$. Análogamente, existe α'' tal que $\alpha \succeq \alpha''$, entonces $\alpha \in V$. Como A es un conjunto dirigido, existe α_0 tal que $\alpha_0 \succeq \alpha'$ y $\alpha_0 \succeq \alpha''$, entonces para todo $\alpha \succeq \alpha_0$ tenemos que $x_\alpha \in U$ y $x_\alpha \in V$, lo cual es una contradicción pues U y V son ajenos. Por lo tanto, si X es Hausdorff ninguna red puede converger a más de un punto.

$\Leftarrow$) Lo probaremos por contraposición. Supongamos que X no es de Hausdorff, entonces existen x y x' puntos distintos de X de manera que cada vecindad V de x se intersecta con una vecindad V' de x'. Definamos el conjunto:

$$A = \{(V, V') \mid V \text{ vecindad de } x, V'\text{vecindad de x'}\}$$

Y definimos el orden $(V, V') \preceq (U, U')$ si $V \supset U$ y $V' \supset U'$. Entonces, $(A, \preceq)$ es un conjunto dirigido. Eligiendo $x_{(V,V')} \in V \cap V'$ obtenemos una red $(x_{(V,V')})$ que converge a x y a x' en X. $\square$

Capítulo 2

Nociones básicas

2.1. Grupos topológicos

En este capítulo presentaremos las nociones básicas de los denominados grupos topológicos de transformaciones. A lo largo de este trabajo, nos ocuparemos únicamente de los espacios topológicos completamente regulares y simplemente los llamaremos espacios topológicos; en caso de no tratar con ellos, lo mencionaremos.

Los grupos topológicos son el resultado del estudio conjunto de la teoría de grupos y de la topología. Tal y como lo indica su nombre, un grupo topológico es un conjunto con estructura de grupo y de espacio topológico donde ambas estructuras se relacionan de manera adecuada. Lo anterior motiva la siguiente definición:

Definición 2.1.1. *Un conjunto G con una operación binaria $*$ y una familia de subconjuntos τ de G se llama **grupo topológico** si:*

1. *$(G, *)$ es un grupo;*
2. *(G, τ) es un espacio topológico;*
3. *La función de multiplicación $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g, h) = g * h$ y la función de inversión $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$ son continuas.*

Un grupo topológico se denota como la terna $(G, *, \tau)$ o, si no hay ambigüedad, simplemente como G. En ocasiones el símbolo de operación binaria puede no escribirse, por lo que $g * h$ suele denotarse como gh. El elemento neutro del grupo G suele denotarse e_G o, en caso de que no haya confusión, se denota simplemente como e.

Si A y B son subconjuntos de G entonces denotamos

$$AB = \{ab \ : \ a \in A, b \in B\}$$

En el caso que $A = \{a\}$, simplemente lo denotamos aB y análogamente para Ab.

Si A es un subconjunto de G, definimos A^n recursivamente de la siguiente manera:

$$A^1 = A$$

$$A^n = A^{n-1}A$$

El inverso de un subconjunto de G lo denotamos

$$A^{-1} = \{a^{-1} \ : \ a \in A\}$$

.

Proposición 2.1.1. *Sea $(G, *)$ un grupo y τ una topología de G. Entonces $(G, *, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función de división $\rho : G \times G \to G$, $\rho(g, h) = g * h^{-1}$, es continua.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que G es un grupo topológico, entonces la multiplicación del grupo y la inversión son funciones continuas por lo que $\rho(g, h) = \mu(g, \iota(h))$ es continua.

$\Leftarrow$) Ahora, si ρ es continua, notemos que ι se puede factorizar como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & G \times G \arrow[d, "\rho"] \\ & G \end{tikzcd}$$

donde $f : G \to G \times G$, es el encaje $f(g) = (e_G, g)$, implicando que ι es continua. Además $\mu(g, h) = \rho(g, \iota(h))$ por lo que μ es continua. $\square$

Ejemplo 2.1.1.

1. *Cualquier grupo G puede ser visto como grupo topológico. Si dotamos a G de la topología discreta entonces G es un grupo topológico pues las funciones de multiplicación e inversión son continuas.*
2. *El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y con la operación de suma es un grupo topológico.*

Definición 2.1.2. *Sea G un grupo topológico y sea $g \in G$ un elemento fijo, entonces las funciones $L_g : G \to G$, $L_g(x) = g * x$ y $R_g : G \to G$, $R_g(x) = x * g$ son llamadas la **traslación izquierda por** g **y la traslación derecha por** g, respectivamente.*

Las funciones que acabamos de definir nos ayudarán a probar muchas de las propiedades que se cumplen en los grupos topológicos que no son válidas en los espacios topológicos en general.

Teorema 2.1.1. *Sea G un grupo topológico, para un $g \in G$ sean L_g y R_g las traslaciones izquierda y derecha respectivamente y sea ι la inversión en G. Entonces:*

1. *Las funciones L_g y R_g son homeomorfismos de G en sí mismo.*
2. *La función ι también es un homeomorfismo de G en sí mismo.*

Demostración.

1. Basta probar la afirmación para una de las funciones, el otro caso es completamente análogo, por lo que lo probaremos para la traslación izquierda, L_g. Primero veamos que L_g es una biyección. Si $L_g(x) = L_g(y)$, entonces $gx = gy$, y multiplicando por el inverso de g por la izquierda de la igualdad tenemos que $x = y$. Así, L_g es inyectiva. Ahora, si $y \in G$ entonces $L_g(g^{-1}y) = gg^{-1}y = y$ y por lo tanto L_g es suprayectiva, por lo que concluimos que L_g es biyectiva.

   La función L_g es la restricción de la función μ al conjunto $\{g\} \times G$, por lo que es continua. La inversa de L_g es la función $L_{g^{-1}}$, la cual es continua, por lo tanto L_g es un homeomorfismo.
2. Veamos que la inversión es una biyección. Si $\iota(x) = \iota(y)$, entonces $x^{-1} = y^{-1}$ y, dado que G es un grupo, los inversos son únicos, por lo que $x = y$, así que es inyectiva. Si $y \in G$ entonces $\iota(y^{-1}) = y$, por lo que ι es suprayectiva. Con esto concluimos que ι es una biyección.

   Por definición de grupo topológico ι es continua, además es su propia inversa, por lo tanto es un homeomorfismo.

$\square$

Definición 2.1.3. *Decimos que un espacio topológico X es homogéneo si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.*

Proposición 2.1.2. *Todo grupo topológico es un espacio homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo topológico y sean $x, y \in G$, si definimos $h = L_{yx^{-1}}$, tenemos que $h(x) = L_{yx^{-1}}(x) = yx^{-1}x = y$, además, por el teorema 2.1.1 tenemos que $L_{yx^{-1}}$ es un homeomorfismo, por lo tanto existe un homeomorfismo $h : G \to G$ tal que $h(x) = y$, es decir G es un espacio homogéneo. $\square$

La ventaja de trabajar con espacios homogéneos es que podemos generalizar las propiedades locales a todo el espacio, esto nos permite incluso analizar a los espacios en un único punto y en el caso de los grupos topológicos tenemos un elemento del espacio muy especial, el neutro del grupo.

Estos son los resultados principales de la teoría de grupos topológicos que usaremos en este trabajo. Para mayores referencias sobre la extensa teoría de grupos topológicos, véase [**3**]

2.2. Grupos topológicos de transformaciones

En esta sección presentaremos una introducción a la teoría de grupos topológicos de transformaciones, para profundizar más en los temas y definiciones de dicha teoría se puede consultar [**4**] o [**5**].

Definición 2.2.1. *Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una **acción de G en X** es una función continua $\theta : G \times X \to X$ que satisface:*

1. $\theta(e, x) = x$ *para cada* $x \in X$
2. $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$ *para cualesquiera* $g, h \in G$ *y cada* $x \in X$.

*En este caso decimos que X es el **espacio fase** de la acción θ.*

Si no hay riesgo de confusión, denotaremos a $\theta(g, x)$ como $g * x$ o simplemente como gx.

Definición 2.2.2. *Un **grupo topológico de transformaciones** es una terna (G, X, θ) donde G es un grupo topológico, X es un espacio topológico y θ es una acción de G en X.*

*También decimos que X es un $G-$**espacio**, y en caso de que no se mencione supondremos que la acción es θ.*

La acción θ de G en X induce para cada $g \in G$ la función:

$$\theta_g : X \to X, \ \ \theta_g(x) = \theta(g, x)$$

a la cual llamaremos **traslación** por g.

Proposición 2.2.1. *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones. Entonces, para todo $g \in G$ la función θ_g es un homeomorfismo.*

Demostración. Dado que θ_g es la restricción de θ al conjunto $\{g\} \times X$ y por la continuidad de θ, tenemos que θ_g es continua.

Ahora, veamos que tiene inversa continua. Primero notemos que $\theta_e = Id_X$, donde $e \in G$ es el neutro del grupo y la función Id_X es la identidad en X. También notemos que $\theta_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = \theta_g(\theta_h(x))$. Por lo tanto $\theta_{gh} = \theta_g \circ \theta_h$

Entonces, tenemos $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \theta_e = Id_X$. Análogamente, $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = Id_X$. Por lo tanto, $\theta_{g^{-1}} = (\theta_g)^{-1}$, es decir, θ_g tiene una inversa continua, así que es un homeomorfismo. □

Observemos que, si tenemos un subconjunto S de G y dado que θ_g es un homeomorfismo de X en sí mismo, muchas de las propiedades de S se preservarán bajo traslaciones. Por ejemplo, si S es abierto entonces gS también lo será; lo mismo pasa si S es cerrado, compacto o conexo.

Para facilitar nuestro trabajo con los grupos topológicos de transformaciones a continuación enunciaremos algunos términos y notaciones con los que trabajaremos de manera frecuente.

Definición 2.2.3. *Sea X un $G-$espacio y sean $H \subset G$, $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces tenemos las siguientes definiciones y notaciones:*

- *El conjunto $HA = \{ha : h \in H, a \in A\}$ se llama la* ***H-saturación*** *de A y si $H = G$ simplemente decimos la saturación de A. Cuando $H = \{g\}$ se denotará $\{g\}A = gA$.*
- *A es un* ***conjunto invariante*** *en X respecto a la acción θ si $GA = A$.*
- *$G(x) = \{gx : g \in G\}$ es la* ***órbita*** *de x. Al* ***conjunto de órbitas*** *se le denota por X/G. Por otro lado, la* ***proyección orbital*** *se define como la función $\pi : X \to X/G$, donde $\pi(x) = G(x)$.*
- *El conjunto $G_A = \{g \in G : gA = A\}$, es el* ***estabilizador*** *de A. Si $A = \{x\}$ se denotará G_x.*
- *x es un* ***punto fijo*** *si $G_x = G$. Al* ***conjunto de puntos fijos*** *lo denotaremos por X^G .*

Las siguientes proposiciones, que nos darán información muy útil sobre las definiciones anteriores, se trabajarán sobre un grupo topológico de transformaciones (G, X, θ).

Proposición 2.2.2. *A es un conjunto invariante si y sólo si $gA \subset A$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Es claro que si A es un conjunto invariante entonces $gA \subset A$ para todo $g \in G$.

Supongamos ahora que $gA \subset A$ para todo $g \in G$, en particular $g^{-1}A \subset A$ entonces $A = (gg^{-1})A = g(g^{-1}A) \subset gA$, de donde tenemos la igualdad $gA = A$. Por lo tanto $GA = \bigcup_{g \in G} gA = A$. □

Proposición 2.2.3. *El estabilizador G_A, cuando $A \neq \emptyset$, es un subgrupo de G.*

Demostración. Sea $g \in G_A$, entonces $gA = A$, por lo que $A = g^{-1}A$, es decir, $g^{-1} \in G_A$. Ahora, sean $g, h \in G$, así, $(gh)A = g(hA) = gA = A$. Por lo tanto $G_A \leq G$. □

Si $A = \{x\}$, al grupo G_x se le llama el **grupo de isotropía** de x.

Dado que G_A es un subgrupo, podemos considerar el conjunto G/G_A de clases laterales y dotarlo de la topología cociente.

Proposición 2.2.4. *Dos órbitas o bien son iguales o bien son ajenas.*

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos de X. Supongamos que sus órbitas no son ajenas y sea $x \in G(x_1) \cap G(x_2)$, entonces existen g_1 y $g_2 \in G$ tales que $g_1 x_1 = x = g_2 x_2$. De este modo, $x_1 = g_1^{-1} g_2 x_2 \in G(x_2)$ y $x_2 = g_2^{-1} g_1 x_1 \in G(x_1)$ y por lo que $G(x_1) \subset G(x_2) \subset G(x_1)$, por lo tanto $G(x_1) = G(x_2)$. □

El **espacio de órbitas** ó **espacio orbital** de un $G-$espacio es el espacio topológico conformado por el conjunto de órbitas X/G dotado de la topología cociente respecto a la proyección orbital $\pi : X \to X/G$, es decir, un subconjunto $U \in X/G$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto.

Es importante notar que cuando mencionamos la órbita de x nos podemos referir al subconjunto del espacio X o a un elemento del espacio X/G para evitar confusiones denotaremos con $\widetilde{x}$ a la órbita de x vista como elemento de X/G y seguiremos denotando con $G(x)$ a la órbita de x vista como subconjunto de X.

Proposición 2.2.5.

1. *Si U es un conjunto abierto en X, entonces SU es abierto para todo subconjunto S de G.*
2. *Si F es un conjunto cerrado en X, entonces SF es cerrado para todo conjunto finito S de G.*

Demostración.

1. Sea U un abierto de X, entonces $SU = \bigcup_{g \in S} gU$ es abierto por ser unión de abiertos.
2. Sea F un cerrado de X, entonces $SF = \bigcup_{g \in S} gF$ es cerrado por ser unión finita de cerrados.

□

Corolario 2.2.1. *La acción $\theta : G \times X \to X$ es abierta.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición 2.2.5, pues si S es un abierto de G y A es un abierto de X, entonces $\theta(S \times A) = SA$. □

Recordemos que en general una función cociente no es abierta, pero en el caso de la proyección orbital de un grupo topológico de transformaciones tenemos que siempre es abierta.

Proposición 2.2.6. *La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es abierta y, cuando G es finito, π es también cerrada.*

Demostración. Sea U un abierto de X, entonces $\pi^{-1}\pi(U) = GU$ es abierto por la proposición 2.2.5, pero X/G tiene la topología cociente por lo que $\pi(U)$ es un abierto en X/G.

Cuando G es finito, si C es un cerrado en X, entonces, $\pi^{-1}\pi(C) = GC$ es cerrado por la proposición 2.2.5, y por lo tanto $\pi(C)$ también es cerrado en X/G. $\square$

Del mismo modo en que sucede en el resto de las ramas de las matemáticas, una vez definido nuestro objeto de estudio, queremos saber condiciones de igualdad o equivalencia para éste. A continuación presentaremos una forma de ver cuándo dos espacios topológicos sobre los que actúa un mismo grupo son equivalentes.

Definición 2.2.4. *Sean X y Y dos $G-$espacios, decimos que una función continua $\phi : X \to Y$ es **equivariante** cuando $\phi(gx) = g\phi(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$.*

Proposición 2.2.7. *Sean X y Y dos $G-$espacios con proyecciones orbitales $\pi : X \to X/G$ y $\pi' : Y \to Y/G$ y sea $\phi : X \to Y$ una función equivariante. Entonces:*

1. *ϕ induce una única función continua $\phi/G : X/G \to Y/G$, tal que $\pi' \circ \phi = \phi/G \circ \pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/G \arrow[r, "\phi/G"'] & Y/G \end{tikzcd}$$

2. *Si $\psi : Y \to Z$ es equivariante, entonces $\psi \circ \phi : X \to Z$ es equivariante y $(\psi \circ \phi)/G = (\psi/G) \circ (\phi/G)$.*
3. *Si ϕ es un homeomorfismo, entonces $\phi^{-1} : Y \to X$ es también equivariante, $\phi^{-1}/G = (\phi/G)^{-1}$ y $X/G \cong Y/G$*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $\widetilde{x} \in X/G$ un elemento arbitrario. Entonces, $\pi^{-1}(\widetilde{x}) = G(x)$ para algún $x \in X$, por lo que

$$(\pi' \circ \phi)(\pi^{-1}(\widetilde{x})) = (\pi' \circ \phi)(G(x)) = \pi'(G\phi(x)) = \widetilde{\phi(x)}$$

   Por lo tanto, $\pi' \circ \phi$ envia las fibras π^{-1} a un único punto en Y/G, entonces por el teorema de transgresión 1.1.3 existe una única función continua $\phi/G : X/G \to Y/G$ tal que $\pi' \circ \phi = \phi/G \circ \pi$.
2. Si $\psi : Y \to Z$ es equivariante, entonces $(\psi \circ \phi)(gx) = \psi(g\phi(x)) = g(\psi \circ \phi)(x)$, por lo tanto $\psi\phi$ es equivariante.

   Ahora, si $\pi'' : Z \to Z/G$ es la proyección orbital, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi'"] & Z \arrow[d, "\pi''"] \\ X/G \arrow[r, "\phi/G"'] & Y/G \arrow[r, "\psi/G"'] & Z/G \end{tikzcd}$$

Entonces, $\pi'' \circ \psi \circ \phi = (\psi/G) \circ (\phi/G) \circ \pi$, pero por el primer inciso $(\psi \circ \phi)/G$ es la única función que cumple $\pi'' \circ (\psi \circ \phi) = (\psi \circ \phi)/G \circ \pi$, por lo tanto $(\psi \circ \phi)/G = (\psi/G) \circ (\phi/G)$.

3. Si ϕ es un homeomorfismo, entonces tenemos:

$$\phi^{-1}(gx) = \phi^{-1}(g(\phi \circ \phi^{-1}(x))) = (\phi^{-1} \circ \phi)g(\phi^{-1}(x)) = g\phi^{-1}(x)$$

Por lo tanto, ϕ^{-1} es equivariante.

Ahora, notemos que la identidad en X, $Id_X : X \to X$, es una función equivariante, y que $Id_X \circ \pi = \pi \circ Id_{X/G}$, es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Id_X"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ X/G \arrow[r, "Id_{X/G}"'] & X/G \end{tikzcd}$$

No obstante, por el primer inciso, la única función de X/G en X/G que hace dicho diagrama conmutativo es Id_X/G, por lo que $Id_X/G = Id_{X/G}$. Con este resultado y por el segundo inciso tenemos:

$$Id_{X/G} = Id_X/G = (\phi \circ \phi^{-1})/G = (\phi/G) \circ (\phi^{-1}/G)$$

Como el inverso de una función es único, entonces $\phi^{-1}/G = (\phi/G)^{-1}$, y así, $(\phi/G)^{-1}$ es continua, por lo que $X/G \cong Y/G$.

□

Definición 2.2.5. *Sean X y Y dos grupos topológicos de transformaciones que comparten el mismo grupo G, decimos que (G, X, θ) y (G, Y, ϕ) son **equivalentes** si existe un homeomorfismo equivariante entre X y Y. También se dice que los G-espacios X y Y son **equivalentes** y se denota $X \cong_G Y$.*

A continuación veremos la definición de diferentes tipos de acciones.

Definición 2.2.6. *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones. Entonces decimos que una acción es:*

- ***trivial*** *si $G(x) = G$, para todo $x \in X$.*
- ***libre*** *si $G_x = \{e\}$.*
- ***efectiva*** *o **fiel** si $\cap_{x \in X} G_x = \{e\}$.*

- ***transitiva*** *si sólo tiene una órbita, o, lo que es lo mismo, para todo* x_1 *y* $x_2 \in X$ *existe* $g \in G$ *tal que* $x_1 = gx_2$.

Proposición 2.2.8. *Sea* (G, X, θ) *un grupo topológico de transformaciones. Si la acción es transitiva, entonces el espacio* X *es homogéneo.*

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos arbitrarios de X. Dado que la acción es transitiva, existe $g \in G$ tal que $x_1 = gx_2$, por lo tanto, el homeomorfismo $\theta_g : X \to X$ manda x_1 a x_2. □

Ejemplo 2.2.1.

1. *Sea* $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ *y* $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\theta(r, (x_1, x_2)) = (x_1 + r, x_2)$. *En este caso las órbitas son líneas rectas y los grupos de isotropía son triviales, por lo que la acción es libre.*

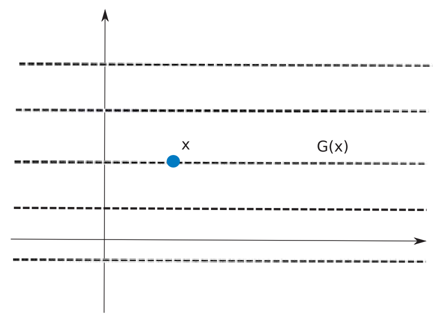

Figura 1. La acción de trasladar horizontalmente.

2. *Sea* G *un grupo topológico, entonces la función multiplicación* μ *es una acción de* G *sobre si mismo* $\mu(g, h) = gh$. *Sea* g_1 *y* g_2 *elementos de* G, *entonces* $\mu(g_1 g_2^{-1}, g_2) = g_1 g_2^{-1} g_2 = g_1$. *Por lo tanto la acción de* G *sobre* G *es transitiva.*

   De la misma manera, si H *es un subgrupo de* G, H *actúa sobre* G *restringiendo la función multiplicación. En este caso la órbita de* $g \in G$ *es la clase lateral derecha* Hg.
3. *Si* (G, X, θ) *es un grupo topológico de transformaciones y si* $x \in X$, *podemos restringir la acción* θ *a la órbita de* x *y tenemos la acción* $\theta|_{G(x)}(g', gx) = g'gx$. *Por lo tanto,* $G(x)$ *es un* $G-$*espacio.*
4. *Si* H *es un subgrupo, y si* $G/H = \{gH : g \in G\}$ *es el espacio formado por las clases laterales izquierdas con la topología cociente, entonces* G *actúa sobre* G/H *de la siguiente manera:* $\theta(g', gH) = g'gH$.

   La función θ *es una acción pues* $\theta(e, gH) = egH = gH$ *y tenemos que:*

$$\theta(g_1, \theta(g_2, gH)) = \theta(g_1, g_2 gH) = g_1 g_2 gH = \theta(g_1 g_2, gH)$$

Definición 2.2.7. *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones, entonces para cada $x \in X$ la acción θ induce una función continua:*

$$\theta^x : G \to X,$$

$$\theta^x(g) = gx$$

*a la cual llamaremos **movimiento** sobre x.*

Notemos que la imagen de θ^x es la órbita de x, $G(x)$.

Proposición 2.2.9. *Sea X un G-espacio, entonces los grupos de isotropía son cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$, entonces $\{x\}$ es cerrado pues X es Hausdorff y por lo tanto T_1, entonces por la continuidad de θ^x tenemos que $(\theta^x)^{-1}(x) = G_x$ es cerrado. □

Sabemos por el ejemplo 2.2.1 que G y $G(x)$ son $G-$espacios. Y dado que θ es acción, entonces $\theta^x(gh) = (gh)x = g(hx) = g\theta^x(h)$. Por lo tanto, θ^x es equivariante.

Para la siguiente proposición necesitamos recordar que el estabilizador es un subgrupo de G y que el conjunto de clases laterales de un subgrupo de G es un $G-$espacio.

Proposición 2.2.10. *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones, sea $x \in X$ y $\theta^x : G \to G(x)$ el movimiento sobre x. Entonces la función*

$$\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x)$$

$$\overline{\theta^x}(gG_x) = gx$$

está bien definida, es biyectiva, continua y es equivariante.

Demostración. Primero veamos que la función está bien definida, sean g y h elementos de G tales que $gG_x = hG_x$, entonces $h^{-1}g \in G_x$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} h^{-1}gx &= x \\ gx &= hx \\ \overline{\theta^x}(gG_x) &= \overline{\theta^x}(hG_x) \end{aligned}$$

De este modo $\overline{\theta^x}$ está bien definida.

Ahora veamos que es biyectiva. Sea $gx \in G(x)$, entonces, como $\overline{\theta^x}(gG_x) = gx$, tenemos que es suprayectiva. Sean $g, h \in G$ tales que

$gG_x \neq hG_x$, entonces, $h^{-1}g \notin G_x$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} h^{-1}gx &\neq x \\ gx &\neq hx \\ \overline{\theta^x}(gG_x) &\neq \overline{\theta^x}(hG_x) \end{aligned}$$

Es decir, $\overline{\theta^x}$ es inyectiva, por lo que es biyectiva.

Sea $q : G \to G/G_x$ la función cociente $q(g) = gG_x$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[dr, "q"'] & G(x) \\ & G/G_x \arrow[u, "\overline{\theta^x}"'] \end{tikzcd}$$

Verifiquemos que cumple las condiciones del teorema de transgresión (1.1.3). Tenemos que $q^{-1}(gG_x) = \{h \in G : h^{-1}g \in G_x\}$ y si h es un elemento arbitrario de $q^{-1}(gG_x)$, entonces $h^{-1}gx = x$ y así, $hx = gx$. Es decir, $\theta^x(h) = \theta^x(g)$ para todo $h \in q^{-1}(gG_x)$, por lo tanto θ^x envía los puntos de la fibra $q^{-1}(gG_x)$ en un único punto; además dado que q es una función cociente, entonces, por el teorema de transgresión, existe una única función continua f tal que $fq = \theta^x$. Sin embargo, tenemos que el diagrama de arriba es conmutativo y como la función f es única, entonces $f = \overline{\theta^x}$, por lo que $\overline{\theta^x}$ es continua.

Finalmente, $\overline{\theta^x}$ es equivariante pues $\overline{\theta^x}(g(hG_x)) = \overline{\theta^x}(ghG_x) = ghx = g\overline{\theta^x}(hG_x)$. $\square$

2.3. Acciones de grupos compactos

Al suponer la compacidad de un grupo topológico G, se obtiene una teoría muy rica y llena de muchos resultados en el estudio de los grupos topológicos de transformaciones en los que actúa G. En su libro [**5**], Bredon se encarga de estudiar exclusivamente los G-espacios cuando G es compacto. En esta sección revisaremos algunos de estos resultados.

Proposición 2.3.1. *Sea un G un grupo topológico compacto y X un $G-$espacio, entonces la acción $\theta : G \times X \to X$ es una función cerrada.*

Demostración. Sea F un cerrado de $G \times X$ y sea $x \in \overline{\theta(F)}$, entonces por la proposición 1.2.3 existe una red $(g_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ en F tal que $\lim g_\alpha x_\alpha = x$.

Como G es compacto, por la proposición 1.2.4, la red $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ tiene una subred $(g_\beta)_{\beta \in B}$ convergente a un elemento g en G. Dado que la inversión $\iota : G \to G$, $\iota(g) = g^{-1}$ es una función continua, por la proposición 1.2.5 tenemos que la red (g_β^{-1}) converge a g^{-1}. Entonces:

$$\lim\ x_\beta = \lim\ g_\beta^{-1}(g_\beta x_\beta) = g^{-1}x$$

Por lo tanto $\lim\,(g_\beta, x_\beta) = (g, g^{-1}x) \in F$, pues F es cerrado y las redes en F sólo convergen a puntos en F. Entonces $gg^{-1}x = x \in \theta(F)$. Por lo que $\theta(F) = \overline{\theta(F)}$. □

Proposición 2.3.2. *Sea X un G-espacio, con G un grupo compacto y sea $x \in X$. Entonces:*

1. *Para todo A cerrado de G y C cerrado de X, el conjunto AC es un cerrado de X.*
2. *La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es cerrada.*

Demostración.

1. Por la proposición 2.3.1 tenemos que θ es cerrada y como $A \times C$ es cerrado en $G \times X$ entonces $\theta(A \times C) = AC$ es cerrado.
2. Sea C un conjunto cerrado en X. Dado que X/G tiene la topología cociente, entonces $\pi(C)$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}\pi(C) = GC$ es cerrado, lo cual es cierto por el primer inciso de esta proposición.

□

Proposición 2.3.3. *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones con G compacto y $x \in X$, entonces:*

1. *El movimiento $\theta^x : G \to G(x)$ es una función cerrada.*
2. *La función $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x)$ es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración.

1. Sea F un conjunto cerrado en G, dado que G es compacto entonces F es compacto. Como θ^x es continua, entonces $\theta^x(F)$ es un compacto de $G(x)$. Además, dado que todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado, entonces $\theta^x(F)$ es cerrado.
2. Ya sabemos que $\overline{\theta^x}$ es una función biyectiva, continua y equivariante, probaremos que es cerrada. Sabemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[dr, "q"'] & G(x) \\ & G/G_x \arrow[u, "\overline{\theta^x}"'] \end{tikzcd}$$

   Entonces, si F es un cerrado de G/G_x, tenemos $\overline{\theta^x}(F) = \overline{\theta^x} \circ q \circ q^{-1}(F) = \theta^x \circ q^{-1}(F)$. Como q es continua, $q^{-1}(F)$ es cerrado. Asimismo, por el inciso pasado sabemos que θ^x es cerrada, por lo que $\theta^x \circ q^{-1}(F)$ es cerrado. Concluimos que $\overline{\theta^x}$ es una función cerrada, por lo cual es también un homeomorfismo equivariante.

$\square$

Proposición 2.3.4. *Sea X un G-espacio, con G un grupo compacto y sea $x \in X$. Entonces:*

1. *Las órbitas son compactas y cerradas.*
2. *Los grupos de isotropía G_x son cerrados y compactos.*

Demostración.

1. Dado que G es un subconjunto compacto, es también un cerrado en su propia topología, podemos afirmar por la proposición 2.3.3 que el movimiento es una función continua y cerrada. De este modo, $\theta^x(G) = G(x)$ es compacto y cerrado en X.
2. Por la proposición 2.2.9 los grupos de isotropía son cerrados, y dado que G es compacto, entonces G_x también lo será, puesto que los conjuntos cerrados contenidos en compactos también son compactos.

$\square$

Proposición 2.3.5. *Sea X un G-espacio con G compacto, toda vecindad U de un conjunto invariante A de X contiene una vecindad invariante W tal que $A \subset W \subset U$.*

Demostración. Sea A un conjunto invariante de X y U una vecindad que contiene a A, definimos $V = (X/G) \setminus \pi(X \setminus U)$ y afirmamos que V es un vecindad de $\pi(A)$. Primero notemos que, por la proposición 2.3.2, la proyección π es cerrada y por lo tanto V es abierto.

Ahora probaremos que $\pi(A) \subset V$, para eso demostraremos que $\pi(X \setminus U) \subset X/G \setminus \pi(A)$. Procedamos por contradicción, supongamos que existe $x \in X \setminus U$ tal que $\pi(x) \notin X/G \setminus \pi(A)$, o lo que es equivalente $\pi(x) \in \pi(A)$. Entonces como A es invariante, $G(x) \subset A$, esto implica que $x \in A$ y esto contradice que $A \subset U$. Por lo tanto, $\pi(X \setminus U) \subset X/G \setminus \pi(A)$, que es equivalente a $\pi(A) \subset X/G \setminus \pi(X \setminus U) = V$. Por lo tanto, como A es invariante, $\pi^{-1}\pi(A) = A \subset \pi^{-1}(V)$.

Ahora veamos que $\pi^{-1}(V)$ es invariante. Para eso basta notar que si $x \in \pi^{-1}(V)$, entonces $\pi(x) \in \pi\pi^{-1}(V) = V$, por lo que $G(x) = \pi^{-1}\pi(x) \in \pi^{-1}(V)$. Entonces, para cualquier $g \in G$, $gx \in \pi^{-1}(V)$.

Por último, veamos que $\pi^{-1}(V) \subset U$. Sea $v \in V$, como $V = X/G \setminus \pi(X \setminus U)$, entonces $\pi^{-1}(v) \cap X \setminus U = \emptyset$, y por lo tanto, $\pi^{-1}(v) \subset U$. Esto significa que $\pi^{-1}(V) \subset U$.

Por lo tanto, el conjunto $\pi^{-1}(V)$ es una vecindad invariante tal que $A \subset \pi^{-1}(V) \subset U$. □

En el ejemplo 1.1.1 mostramos un caso en donde el espacio cociente de un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ no necesariamente es $T_{3\frac{1}{2}}$, y dado que estamos trabajando con espacios completamente regulares nos gustaría que el espacio de órbitas sea un espacio completamente regular también. En la siguiente proposición veremos que si el grupo G es compacto, se cumple esta propiedad.

Proposición 2.3.6. *Sea X un G-espacio con G un grupo compacto y proyección orbital $\pi : X \to X/G$. Si X es T_i entonces X/G es T_i, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Demostración. Si X es un espacio T_1, entonces cada punto es cerrado, y por la proposicion 2.3.2 la proyección orbital es cerrada. Así $\pi(x) = \widetilde{x}$ es un cerrado en X/G para todo $x \in X$, por lo tanto X/G es T_1.

Si X es un espacio T_2, entonces tomemos dos puntos $\widetilde{x_1}$ y $\widetilde{x_2}$ de X/G, los conjuntos $\pi^{-1}(\widetilde{x_1})$ y $\pi^{-1}(\widetilde{x_2})$ son dos órbitas ajenas. Dado que las órbitas son compactas cuando G es compacto y como X es T_2, entonces por las proposiciones 1.1.2 y 2.3.5 existen dos vecindades ajenas e invariantes U y V de $\pi^{-1}(\widetilde{x_1})$ y $\pi^{-1}(\widetilde{x_2})$ respectivamente, por lo que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son dos vecindades ajenas de $\widetilde{x_1}$ y $\widetilde{x_2}$.

El caso cuando X es T_3 ó T_4 es completamente análogo a el caso de T_2. □

Cuando se pierde la propiedad de que el grupo que actúa sobre X es compacto, se pierden muchos de estos resultados, aún cuando el grupo sea localmente compacto. Esto lo podemos ver en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.1. *Sea $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los reales positivos, sea $X = \mathbb{R}^2$ y $\theta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida como $\theta(r, x) = rx$.*

Notemos que $G((0,0)) = (0,0)$, y si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ entonces $G(x, y) = \{(sx, sy) \ : \ s \in (0, \infty), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Por lo tanto, si $(x, y) \neq (0,0)$, la órbita $G(x, y)$ no es cerrada pues no contiene al punto $(0,0)$, el cual es punto de acumulación, en adición tampoco es compacta.

El espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^+$, no es T_0 pues todas las vecindades del punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ contienen a una bola con centro en $(0,0)$, por lo tanto el único abierto de $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^+$ que contiene a $\pi((0,0))$, donde π es la proyección, es el espacio total.

Todo esto sucede a pesar de que $\mathbb{R}^+$ es un grupo topológico localmente compacto y metrizable.

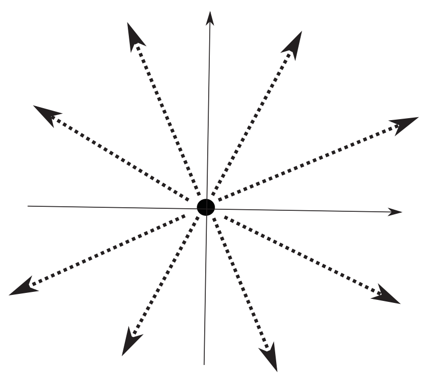

FIGURA 2. Acción cuyas órbitas no son cerradas ni compactas.

Ejemplo 2.3.2. *Sea $G = \mathbb{R}$ y $X = \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ el toro, y sea a un número irracional. Definimos a la acción*

$$\theta(t, (z_1, z_2)) = (z_1 e^{(2\pi i t)}, z_2 e^{(2\pi i a t)})$$

La acción es libre, para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tenemos que $\mathbb{R}_{(z_1,z_2)} = \{e\}$. Las órbitas se enredan de manera infinita alrededor del toro y son un conjunto denso. Por lo tanto, para toda vecindad de (z_1, z_2) existen una infinidad de arcos ajenos de su órbita. De este modo, la función

$$\overline{\theta^{(z_1,z_2)}} : \mathbb{R}/\mathbb{R}_{(z_1,z_2)} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}(z_1, z_2)$$

no es un homeomorfismo.

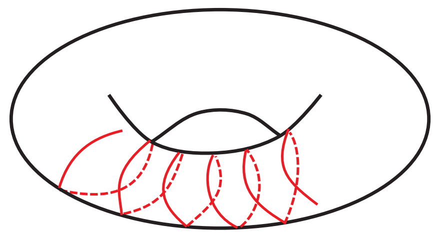

Figura 3. Órbita en el toro irracional.

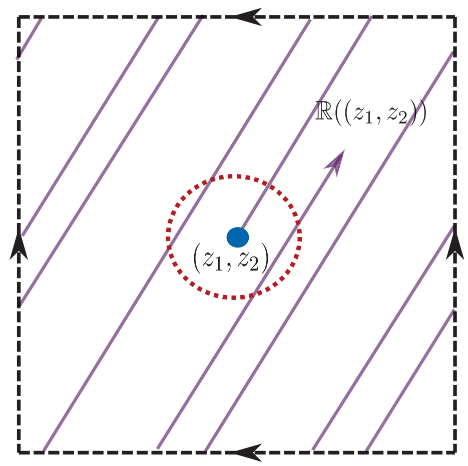

Figura 4. Órbita en el toro irracional en otro modelo del toro.

Capítulo 3

Acciones propias

3.1. Acciones Cartan propias

Como vimos en la sección pasada, los grupos localmente compactos pierden algunas de las propiedades que tienen los grupos compactos, por lo que, si queremos generalizar dichas propiedades, debemos pedirle ciertas condiciones a la acción del grupo G.

A continuación veremos la definición de un tipo especial de acciones en $G-$espacios, las acciones propias. La definición de dichas acciones fue dada en 1960 por Palais en [4], y fue usada para extender algunas propiedades presentes en las acciones de grupos compactos de Lie hacia las acciones de grupos localmente compactos.

Definición 3.1.1. *Sean U y V subconjuntos de un G-espacio X, definimos el **transportador** de U en V, al cual denotamos $\langle U, V\rangle$, como:*

$$\langle U, V\rangle = \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$$

Proposición 3.1.1. *Sean U, V dos subconjuntos de un G-espacio X, entonces $\langle U, V\rangle = \langle V, U\rangle^{-1}$*

Demostración. Tenemos que $gU \cap V = g(U \cap g^{-1}V)$, entonces:

$$\langle U, V\rangle = \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\} = \{g \in G \mid g(U \cap g^{-1}V) \neq \emptyset\} = \langle V, U\rangle^{-1}$$

□

Definición 3.1.2. *Sean U y V subconjuntos de un G-espacio X, decimos que U es **delgado relativo** a V si $\langle U, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Si U es delgado relativo consigo mismo entonces decimos que U es **delgado**.*

El orden de los conjuntos no importa en la definición de delgado relativo, como podemos notar en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *Sean U y V subconjuntos de un G-espacio X, entonces U es delgado relativo de V si y sólo si V es delgado relativo de U.*

Demostración. Por la proposición 3.1.1 tenemos que $\langle U, V\rangle = \langle V, U\rangle^{-1}$, por lo tanto, si $\langle U, V\rangle$ es precompacto, también lo será $\langle V, U\rangle^{-1}$

y dado que la función inversión $\iota : G \to G$ es un homeomorfismo, $\iota(\langle V, U\rangle^{-1}) = \langle V, U\rangle$ también es precompacto. $\square$

Proposición 3.1.3. *Sean U y V subconjuntos delgados relativos de un G-espacio X, entonces también lo son:*

1. *Cualesquiera dos traslaciones de U y V.*
2. *Cualesquiera dos subconjuntos $U' \subset U$ y $V' \subset V$.*

Demostración.

1. Lo probaremos para el caso en el que las dos traslaciones son izquierdas, cuando son derechas o una es izquierda y la otra es derecha, es análogo.

   Sean g_1U y g_2V traslaciones de U y V. Afirmamos que $g_2\langle U, V\rangle g_1^{-1} = \langle g_1U, g_2V\rangle$. Sea $g_2gg_1^{-1} \in g_2\langle U, V\rangle g_1^{-1}$ así,

   $$(g_2gg_1^{-1})g_1U \cap g_2V = g_2gU \cap g_2V.$$

   Dado que $g \in \langle U, V\rangle$, existe $x \in gU \cap V$ por lo tanto $g_2x \in g_2gU \cap g_2V$, entonces $(g_2gg_1^{-1})g_1U \cap g_2V \neq \emptyset$, es decir $(g_2gg_1^{-1}) \in \langle g_1U, g_2V\rangle$.

   Ahora sea $g \in \langle g_1U, g_2V\rangle$ entonces $gg_1U \cap g_2V \neq \emptyset$, por lo tanto:

   $$g_2^{-1}gg_1U \cap g_2^{-1}g_2V \neq \emptyset$$
   $$g_2^{-1}gg_1U \cap V \neq \emptyset$$

   Lo que significa que $g_2^{-1}gg_1 \in \langle U, V\rangle$, por lo tanto $g \in g_2\langle U, V\rangle g_1^{-1}$. Con esto tenemos que $g_2\langle U, V\rangle g_1^{-1} = \langle g_1U, g_2V\rangle$ y dado que la traslación es un homeomorfismo se tiene que $\langle U, V\rangle$ es precompacto, entonces $g_2\langle U, V\rangle g_1^{-1} = \langle g_1U, g_2V\rangle$ es precompacto.
2. Tomemos dos subconjuntos $U' \subset U$ y $V' \subset V$. Si $\langle U', V'\rangle$ es vacío se implica que es precompacto, por lo tanto supongamos que no es vacío. Afirmamos que $\langle U', V'\rangle \subset \langle U, V\rangle$ Sea $g \in \langle U', V'\rangle$, entonces $gU' \cap V' \neq \emptyset$, pero $gU' \subset gU$ y $V' \subset V$, entonces $\emptyset \neq gU' \cap V' \subset gU \cap V$, por lo tanto $g \in \langle U, V\rangle$.

   Como $\langle U', V'\rangle \subset \langle U, V\rangle$ y dado que el operador cerradura es monótono tenemos $\overline{\langle U', V'\rangle} \subset \overline{\langle U, V\rangle}$, y por la compacidad de $\overline{\langle U, V\rangle}$, entonces $\overline{\langle U', V'\rangle}$ es compacto por ser un cerrado contenido en un compacto.

$\square$

Definición 3.1.3. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Sea X un G-espacio, decimos que X es un* ***espacio propio en el sentido de Cartan*** *o* ***espacio de Cartan*** *si cada punto x de X*

tiene una vecindad delgada. También decimos que la acción de G sobre X es ***Cartan propia****.*

Algunas de las propiedades que se cumplen cuando el grupo que actúa en un G-espacio es compacto, también se cumplen en el caso en que tenemos un G-espacio de Cartan, como las que veremos a continuación.

Proposición 3.1.4. *Sea G un grupo localmente compacto. Sea X un G-espacio de Cartan y $x \in X$, entonces:*

1. *Las órbitas son cerradas en X.*
2. *El grupo de isotropía de x es compacto.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $y \in \overline{G(x)}$ y sea U una vecindad delgada de y. Por la proposición 1.2.3, sabemos que existe una red $(g_\alpha x)_{\alpha \in A}$ en $G(x)$ que converge a y, entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que $g_\alpha \in U$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$.

   Sea $\alpha \succeq \alpha_0$ entonces $g_\alpha \in U$ y sabemos que
   $$(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1})(g_{\alpha_0} x) = g_\alpha x$$
   además como $g_\alpha x$ y $g_{\alpha_0} x$ están en U, tenemos que $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}) \in \langle U, U \rangle$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$.

   Por lo tanto, la red $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1})_{\alpha \succeq \alpha_0}$ está contenida en el compacto $\overline{\langle U, U \rangle}$, y por la proposición 1.2.4 existe una subred $(g_\beta g_{\alpha_0}^{-1})_{\beta \in B}$ convergente.

   La traslación derecha $R_{g_{\alpha_0}}$ es una función continua, entonces por la proposición 1.2.5 la red
   $$(R_{g_{\alpha_0}}(g_\beta g_{\alpha_0}^{-1}))_{\beta \in B} = (g_\beta g_{\alpha_0}^{-1} g_{\alpha_0})_{\beta \in B} = (g_\beta)_{\beta \in B}$$
   converge a un elemento g de G.

   Por el primer inciso de la proposición 1.2.1 sabemos que toda subred de una red converge al mismo punto, entonces:
   $$y = \lim g_\alpha x = \lim g_\beta x = gx$$
   Por lo tanto $y = gx \in G(x)$. Concluimos así que $G(x) = \overline{G(x)}$.
2. Sea V una vecindad delgada de x. Entonces $\{x\} \subset V$, por la proposición 3.1.3 tenemos que el conjunto $\langle \{x\}, \{x\} \rangle = G_x$ es precompacto, pero los grupos de isotropía son cerrados, por lo tanto G_x es compacto.

□

Por la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.1. *Sea G un grupo localmente compacto. Sea X un G-espacio Cartan propio T_1 entonces X/G es un espacio T_1.*

Demostración. Dado que X/G tiene la topología cociente, entonces $\{x\}$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(x) = G(x)$ es cerrado, lo cual es cierto por la proposición 3.1.4, por lo tanto X/G es T_1. $\square$

A pesar de que los espacios de Cartan preservan algunas de las propiedades que cumplen los $G-$espacios con G compacto, sigue sin ser una buena generalización a los grupos localmente compactos. En el siguiente ejemplo mostramos que la propiedad de heredar el axioma de separabilidad T_2 al espacio de órbitas no es cierta en general en los espacios de Cartan.

Ejemplo 3.1.1. *Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1\}$, y $G = \mathbb{R}$.*

Definimos la acción θ de $\mathbb{R}$ en X como:

a) $\theta(t, (-1, y_0)) = (-1, y_0 - t)$
b) $\theta(t, (1, y_0)) = (1, y_0 + t)$
c) *Para (x_0, y_0), con $-1 < x_0 < 1$, sea $\Gamma_{(x_0,y_0)}$ la traslación vertical de la gráfica de la función $y = \frac{x^2}{1-x^2}$, tal que $(x_0, y_0) \in \Gamma_{(x_0,y_0)}$. Definimos $\theta(t, (x_0, y_0))$ como el punto (x, y) en $\Gamma_{(x_0,y_0)}$ tal que la longitud del arco de $\Gamma_{(x_0,y_0)}$ entre (x_0, y_0) y (x, y) es $|t|$ y x es mayor o menor que x_0 dependiendo de si t es positivo o negativo.*

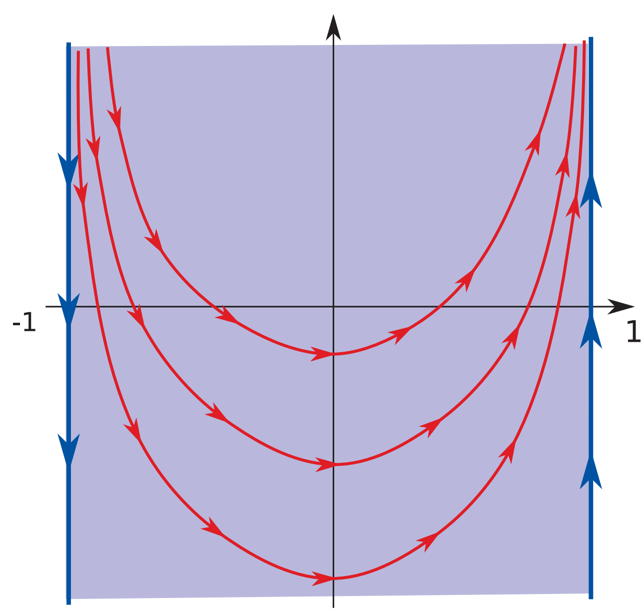

Figura 1. Órbitas de la acción θ en X.

Notemos que si $K \subset X$ es un conjunto acotado, entonces K es delgado si y sólo si no interseca al mismo tiempo a las líneas $x = 1$ y $x = -1$. Por lo tanto, X es un $\mathbb{R}-$espacio de Cartan.

Pero notemos que la $\mathbb{R}$ saturación de cualquier abierto que contenga a la órbita de $\mathbb{R}((-1, y))$ interseca a cualquier abierto de la órbita $\mathbb{R}((1, y))$, pues las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas de las gráficas $\Gamma_{(x_0, y_0)}$, entonces no podemos separar a dichas órbitas en dos abiertos invariantes. Por lo tanto el espacio de órbitas X/G no es T_2

Proposición 3.1.5. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio de Cartan y $x \in X$, entonces el movimiento inducido por x, $\theta^x : G \to G(x)$, $\theta^x(g) = gx$, es una función abierta.*

Demostración. Por la proposición 2.1.2 sabemos que G es un espacio homogéneo, por lo tanto, basta probar que si U es una vecindad de e en G, entonces $\theta^x(U) = Ux$ es abierto en X. Supongamos ahora que no es abierto, entonces existe una red $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ tal que $g_\alpha \notin U(x)$ pero $g_\alpha x \rightsquigarrow x$.

Si que $g_\alpha \in UG_x$ tenemos así que $g_\alpha x \in U(x)$, pero sabemos que $g_\alpha x \notin U(x)$ se implica que $g_\alpha \notin UG_x$.

Afirmamos que ninguna subred de $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a un elemento de G_x. Supongamos que sí, entonces sea $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ una subred tal que $\lim g_\gamma = g \in G_x$, como $g \in G_x \subset UG_x$ y dado que U es abierto, tenemos que UG_x es abierto, por lo tanto existe γ_0 tal que $g_\gamma \in UG_x$ para todo $\gamma \succeq \gamma_0$, lo cual es una contradicción pues ningún g_α pertenece a UG_x.

Sea V una vecindad delgada de x. Como $g_\alpha x \rightsquigarrow x$, entonces existe una subred $(g_\beta)_{\beta \in B}$ tal que $g_\beta x \in V$, dado que $x \in V$ y $g_\beta x \in V$, tenemos que $(g_\beta)_{\beta \in B} \subset \langle V, V\rangle \subset \overline{\langle V, V\rangle}$. Este último es compacto pues V es delgado, por lo tanto, por la proposición 1.2.4, la red $(g_\beta)_{\beta \in B}$ tiene una subred que converge a un elemento $g \in G$.

De este modo, dado que en los espacios Haussdorff las redes tienen un único punto de convergencia y dado que toda subred converge al mismo punto que la red, tenemos que $gx = \lim g_\alpha x = x$, por lo tanto $g \in G_x$, lo cual contradice que ninguna subred de (g_α) converge a un elemento de G_x. Por lo tanto U es abierto. $\square$

Proposición 3.1.6. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un $G-$espacio de Cartan y $x \in X$, la función biyectiva $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x)$, $gG_x \to gx$, es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración. Sabemos que la función $\overline{\theta^x}$ se factoriza como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[dr, "q"'] & G(x) \\ & G/G_x \arrow[u, "\overline{\theta^x}"'] \end{tikzcd}$$

donde $q : G \to G/G_x$ es la función cociente, por lo tanto si tenemos un abierto U de G/G_x su preimagen bajo q, $q^{-1}(U)$, es un conjunto abierto de U, y dado que θ^x es abierta, entonces $\theta^x(q^{-1}(U)) = \overline{\theta^x} q q^{-1}(U) = \overline{\theta^x}(U)$ es abierto.

Podemos concluir que $\overline{\theta^x}$ es abierta, continua, biyectiva y equivariante, por lo que es un homeomorfismo equivariante. $\square$

3.2. Acciones Bourbaki propias

Nicolas Bourbaki nos presenta otra definición de acción propia en su obra [**6**]. Antes de continuar necesitamos definir lo que es una función perfecta y ver algunas de sus propiedades.

Definición 3.2.1. *Sean X y Y espacios topológicos, decimos que la función continua $f : X \to Y$ es **perfecta**, si:*

1. *f es cerrada,*
2. *para todo $y \in Y$, su fibra $f^{-1}(y)$ es compacta.*

Notemos que todo homeomorfismo es una función perfecta, pero como vemos en el siguiente ejemplo no toda función perfecta es homeomorfismo:

Ejemplo 3.2.1. *Consideremos los espacios $X = \{1, 2\}$, $Y = \{0\}$ con la topología discreta, y sea $h : X \to Y$ la función constante $h(x) = 0$, dicha función es continua, cerrada y la fibra $f^{-1}(0) = \{1, 2\}$ es un conjunto compacto, pero no es un homeomorfismo pues h no es una biyección.*

Las siguientes propiedades nos ayudarán al momento de trabajar con funciones perfectas y la demostración de las mismas se puede encontrar en [**1**].

Proposición 3.2.1. *Sea $f : X \to Y$ una función perfecta, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La composición de funciones perfectas es perfecta.*
2. *El producto de dos funciones perfectas es perfecta.*
3. *Para todo cerrado C de X la restricción $f|_C : C \to Y$ es perfecta.*
4. *Si $g : X \to Z$ es perfecta, entonces la diagonal de f y g, $(f, g) : X \to Y \times Z$, $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$, también es perfecta.*

Una definición intimamente relaciona con la de función perfecta es la de función propia.

Definición 3.2.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos, decimos que f es **propia** si la preimagen de cualquier conjunto compacto de Y es compacto en X.*

Proposición 3.2.2. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos. Si f es perfecta entonces f es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \to Y$ una función perfecta. Sea K un subconjunto compacto de Y y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de $f^{-1}(K)$. Entonces para todo $k \in K$ tenemos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para $f^{-1}(k)$. Dado que f es perfecta entonces $f^{-1}(k)$ es compacto, por lo que existe una subcubierta abierta finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $f^{-1}(k)$, es decir, para todo $k \in K$ existe un subconjunto finito $\beta_k \subset A$ tal que $f^{-1}(k) \subset \cup_{\lambda \in \beta_k} U_\lambda$. El conjunto $X \setminus \cup_{\lambda \in \beta_k} U_\lambda$ es cerrado en X, por lo tanto $f(X \setminus \cup_{\lambda \in \beta_k} U_\lambda)$ es cerrado en Y, pues f es cerrada por ser perfecta. Entonces el conjunto

$$V_k = Y \setminus f(X \setminus \cup_{\lambda \in \beta_k} U_\lambda)$$

es abierto en Y. Notemos que V_k contiene a k, por lo que $K \subset \cup_{k \in K} V_k$ y, dado que K es compacto, existe una subcubierta abierta finita de $\cup_{k \in K} V_k$ que cubre a K, es decir, existe un subconjunto finito $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset K$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n V_{k_i}$. Como cada subconjunto $\beta_k \subset A$ es finito entonces el conjunto de índices $B = \cup_{i=1}^n \beta_{k_i}$ es unión finita de conjuntos finitos, por lo tanto B es finito. Por como construimos a V_k tenemos que $V_k \subset \cup_{\lambda \in \beta_k} U_\lambda$, entonces

$$f^{-1}(K) \subset f^{-1}(\cup_{i=1}^n V_{k_i}) \subset \cup_{\lambda \in B} U_\lambda$$

es decir, encontramos una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $f^{-1}(K)$, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto, por lo tanto f es propia. $\square$

Ambas definiciones, la de función perfecta y función propia, son equivalentes cuando el espacio Y es localmente compacto, donde $f : X \to Y$. Esta y otras equivalencias las podemos resumir en la siguiente proposición, cuyas pruebas se pueden encontrar en [**4**], [**6**] y en [**1**].

Proposición 3.2.3. *Sean X y Y espacios topológicos con Y localmente compacto y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces son equivalentes*

- *f es perfecta,*
- *f es propia,*
- *f es universalmente cerrada, es decir, para cada espacio Z, la función $f \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cerrada,*
- *Para cada red $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X tal que $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ converge a un punto $y \in Y$, existe una subred $(x_\beta)_{\beta \in B}$ de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ que converge a un punto $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definición 3.2.3. *Sea X un G-espacio, decimos que X es un* ***espacio propio en el sentido de Bourbaki*** *o* ***espacio Bourbaki propio*** *si la función continua $\delta : G \times X \to X \times X$, definida como:*

$$\delta(g, x) = (x, gx)$$

es perfecta. En este caso diremos que la acción de G en X es ***propia en el sentido de Bourbaki****.*

Por la proposición 3.2.3 y de la definición 3.2.3 tenemos la siguiente definición alternativa que nos será muy útil pues nos permite trabajar con redes.

Corolario 3.2.1. *Sean G un grupo topológico y X un $G-$espacio. Entonces, X es Boubaki propio si y sólo si dados $x,\ y \in X$, para cada red (g_α) de G y para cada red (x_α) de X tales que (x_α) converge a x y $(g_\alpha x_\alpha)$ converge a y, existe una subred (g_β) de (g_α) que converge a un $g \in G$ tal que $gx = y$.*

Sabemos que si tenemos un espacio X entonces, $X \times X$ es localmente compacto si y sólo si X es localmente compacto, de este hecho y por la proposición 3.2.3 y de la definición 3.2.3, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *Sea X un G-espacio con X localmente compacto, X es un espacio Bourbaki propio si y sólo si la función $\delta : G\times X \to X\times X$, $\delta(g,x) = (x, gx)$ es propia.*

Lema 3.2.1. *Sea X un espacio compacto, entonces la proyección $\pi_2 : X \times Y \to Y$, $\pi_2((x,y)) = y$ es una función perfecta.*

Demostración. Primero veamos que π_2 es una función cerrada. Sea C un subconjunto cerrado en $X \times Y$, queremos ver que $\pi_2(C)$ es un subconjunto cerrado en Y. Sea $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red contenida en $\pi_2(C)$ tal que $(y_\alpha) \rightsquigarrow y$, queremos probar que $y \in \pi_2(C)$.

Dado que $y_\alpha \in \pi_2(C)$, podemos elegir para todo $\alpha \in A$ un punto $x_\alpha \in X$ tal que $(x_\alpha, y_\alpha) \in C$. Por la compacidad de X tenemos que existe una subred $(x_\beta)_{\beta\in B}$ de $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que converge a un punto $x \in X$. Entonces, tenemos $(x_\beta) \rightsquigarrow x$ y que $(y_\beta) \rightsquigarrow y$, por lo tanto $(x_\beta, y_\beta) \rightsquigarrow (x, y)$, y dado que C es cerrado, entonces $(x, y) \in C$, por lo tanto $y \in \pi_2(C)$.

Ahora, si $y \in Y$, entonces $\pi_2(\{y\}) = X \times \{y\}$, el cual es compacto por la compacidad de X, por lo tanto π_2 es una función perfecta. □

Proposición 3.2.4. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio, entonces:*

1. *La acción θ de G en X es una función perfecta, $\theta : G\times X \to X$.*
2. *La proyección orbital $\pi : X \to X/G$ también es perfecta.*
3. *La acción de G en X es Bourbaki propia.*

Demostración. 1. Consideremos la función $\phi : G \times X \to G \times X$ dada por $\alpha(g,x) = (g, gx)$. Por la continuidad de la acción θ tenemos que α es continua y su inversa es $\alpha^{-1}(h,y) = (h, h^{-1}y)$, por lo que es un homeomorfismo. Entonces, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\theta"'] & G \times X \arrow[d, "\pi_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Como G es compacto, por el Lema 3.2.1 π_2 es perfecta. Por lo tanto $\theta = \pi_2 \circ \alpha$.

2. Para verificar que π es cerrada, sea $A \subset X$ cerrado, $p(A)$ es cerrado si y sólo si $p^{-1}(p(A))$ lo es. Entonces,

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = GA = \theta(G \times A)$$

es cerrado pues $G \times A$ es cerrado en $G \times X$ y θ es perfecta. Además, por la continuidad del movimiento inducido θ^x, tenemos que cada fibra es compacta $p^{-1}(\overline{x}) = G(x) = \theta^x(G)$ pues G es compacto. Por lo tanto, π es perfecta.

3. Para ver que X es un G-espacio Bourbaki propio observemos que δ es la diagonal de π_2 y θ, es decir $\delta = (\pi_2, \theta)$, por lo que es perfecta.

$\square$

Para los resultados posteriores necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.2. *Sean X y Y dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Definimos el conjunto $K = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$, el cual es un subconjunto de $X \times X$. Entonces, Y es un espacio de Hausdorff si y sólo si K es cerrado.*

Proposición 3.2.5. *Sea G un grupo topológico y X un $G-$espacio Bourbaki propio. Entonces X/G es de Hausdorff.*

Demostración. Sea $R = \{(x, y) \in X \times X \mid \pi(x) = \pi(y)\}$ el producto fibrado de la proyección orbital $\pi : X \to X/G$. Entonces, X/G es de Hausdorff si y sólo si $R \subset X \times X$ es cerrado. Como $\delta : G \times X \to X \times X$ es perfecta, en particular es cerrada, por lo que $\delta(G \times X) = R$ es cerrado. $\square$

Proposición 3.2.6. *Sea G un grupo topológico y X un $G-$espacio Bourbaki propio. Entonces, para cada $x \in X$ se tiene:*

1. *El movimiento inducido $\theta^x : G \to X$ es una función perfecta.*
2. *El subgrupo estabilizador G_x es compacto.*
3. *La órbita $G(x) \subset X$ es cerrada.*
4. *La función biyectiva $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x)$ es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración.

1. Si restringimos δ a la preimagen $\delta^{-1}(\{x\} \times X) = G \times \{x\}$ tenemos que es una función perfecta, pues $G \times \{x\}$ es cerrado de $G \times X$. Ahora observemos que θ^x se factoriza como
$$\begin{tikzcd} G \times \{x\} \arrow[r, "\delta"] & \{x\} \times X \arrow[d, "\pi_2"] \\ G \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\theta^x"] & X \end{tikzcd}$$
donde f es el homeomorfismo $f(g) = (g, x)$. Luego, $\theta^x = \pi_2 \delta f$ es perfecta.
2. Ahora, $G_x = (\theta^x)^{-1}(x)$ es compacto pues θ^x es perfecta.
3. Como θ^x es perfecta entonces $\theta^x(G) = G(x) \subset X$ es cerrado.
4. Finalmente, consideremos el siguiente diagrama conmutativo
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[d, "p"] & X \\ G/G_x \arrow[r, "\overline{\theta^x}"] & G(x) \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$
donde $i : G(x) \to X$ es la inclusión y $p : G \to G/G_x$ es la proyección. Sea $C \subset G/G_x$ un subconjunto cerrado, entonces tenemos
$$\overline{\theta^x}(C) = \overline{\theta^x}(pp^{-1}(C)) = \theta^x(p^{-1}(C))$$
es cerrado en X y por lo tanto en $G(x)$.

□

Los $G-$espacios Bourbaki propios se definen en general y no requieren que el grupo sea localmente compacto. Sin embargo, en el caso en que el grupo G es localmente compacto, las acciones Bourbaki propias tienen una caracterización que nos resultará muy útil para extender nuestra teoría y generalizar las propiedades de los grupos compactos, además de que nos permitirá comparar nuestra definición de acción propia con otras definiciones.

Teorema 3.2.1. ***Caracterización acciones Bourbaki propias.*** *Sea G un grupo topológico localmente compacto. La acción de G en X es propia en el sentido de Bourbaki si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ existen vecindades V_x, V_y en X de x y y respectivamente, tales que son delgadas relativas entre ellas.*

Demostración. Si G es compacto, la cerradura de cualquiera de sus subconjuntos es compacta, luego, por el resultado obtenido en la Proposición 3.2.4, la caracterización se cumple para cualquier G-espacio con $V_x = V_y = X$. Consideremos entonces el caso cuando G no es compacto.

$\Rightarrow$) Supongamos que la acción de G en X es Bourbaki propia. Sea $G^* = G \cup \{\infty\}$ la compactación por un punto de G. Consideramos la gráfica de la acción $\Gamma = \{(g, x, gx) \mid g \in G, x \in X\}$ como subconjunto de $G^* \times X \times X$. Afirmamos entonces que Γ es cerrado en $G^* \times X \times X$.

Sea $\Gamma' = \{(g, g) \mid g \in G\}$ la gráfica de la inclusión $G \hookrightarrow G^*$, entonces, por el teorema de la gráfica cerrada (1.1.2), $\Gamma' \subset G \times G^*$ es cerrado. Usando el homeomorfismo canónico de $G \times G^*$ a $G^* \times G$ podemos suponer que $\Gamma' \subset G^* \times G$ es cerrado. Dado que la acción de G en X es Bourbaki propia la función $\delta : G \times X \to X \times X$, $\delta(g, x) = (x, gx)$ es perfecta y la función $Id_{G^*} : G^* \to G^*$ también es perfecta, recordando que el producto de dos funciones perfectas es una función perfecta, entonces tenemos que $Id_{G^*} \times \delta : G^* \times G \times X \to G^* \times X \times X$, $(g, g, x) \to (g, x, gx)$ es perfecta.

Como $\Gamma' = \{(g, g) \mid g \in G\} \subset G^* \times G$ es cerrado entonces $\Gamma' \times X \subset G^* \times G \times X$ es cerrado, por lo tanto la imagen

$$(Id_{G^*} \times \delta)(\Gamma' \times X) = \{(g, x, gx) \mid g \in G, x \in X\} = \Gamma$$

es un cerrado de $G^* \times X \times X$.

Dado que el producto de el producto de espacios regulares es un espacio regular, tenemos que $G^* \times X \times X$ es regular, además

$$(\{\infty\} \times X \times X) \cap \Gamma = \emptyset$$

entonces, para cualesquiera x, $y \in X$ existen vecindades V_x, V_y en X de x e y respectivamente y un subconjunto compacto K de G tales que $((G \setminus K) \cup \{\infty\}) \times V_x \times V_y$ es una vecindad de (∞, x, y), en el espacio $G^* \times X \times X$, ajena a Γ.

Supusimos que G no era compacto, así que $K \subsetneqq G$, lo que implica que $G \setminus K \neq \emptyset$. Sea $h \in G \setminus K$, entonces $(\{h\} \times V_x \times V_y) \cap \Gamma = \emptyset$, y por la definición de Γ tenemos que $hV_x \cap V_y = \emptyset$ entonces

$$\{g \in G \mid gV_x \cap V_y \neq \emptyset\} = \langle V_x, V_y \rangle \subset K$$

y como K es compacto de G tenemos que $\langle V_x, V_y \rangle$ tiene cerradura compacta en G.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que para cualesquiera $x, y \in X$ existen vecindades V_x, V_y en X de x y y respectivamente, tales que son delgadas relativas entre ellas y veamos que $\delta : G \times X \to X \times X$, $\delta(g, x) = (x, gx)$ es perfecta.

Sea $F \subset (G \times X)$ cerrado, mostraremos que $\delta(F) \subset (X \times X)$ es cerrado. En efecto, sea $(x, y) \in \overline{\delta(F)}$. Entonces, existe una red $(g_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ en F tal que $\delta(g_\alpha, x_\alpha) \rightsquigarrow (x, y)$. Por la definición de δ, esto sucede si y sólo si $x_\alpha \rightsquigarrow x$ y $g_\alpha x_\alpha \rightsquigarrow y$. Sean V_x, V_y vecindades de x y y delgadas relativas entre ellas. Entonces, existe un índice α_0 tal que $x_\alpha \in V_x$ para cada $\alpha \succeq \alpha_0$ y existe un $\alpha_1 \succeq \alpha_0$ tal que $g_\alpha x_\alpha \in V_y$ para cada $\alpha \succeq \alpha_1$. En este caso,

$$g_\alpha x_\alpha \in g_\alpha V_x \cap V_y \quad \text{para cada } \alpha \succeq \alpha_1.$$

Esto significa que la red $(g_\alpha)_{\alpha \succeq \alpha_1}$ está contenida en $\langle V_x, V_y \rangle$. Como este último conjunto tiene cerradura compacta en G, debe existir una subred convergente $(g_\beta)_{\beta \in B}$ de $(g_\alpha)_{\alpha \geq \alpha_1}$. Si $g_\beta \rightsquigarrow g$, entonces como $x_\beta \rightsquigarrow x$, tenemos $(g, x) \in \overline{F} = F$. De dónde $(x, gx) \in \delta(F)$. Como la acción es continua, $g_\beta x_\beta \rightsquigarrow gx$, así que $gx = y$, por lo que $(x, y) \in \delta(F)$, lo que implica que $\delta(F)$ es cerrado.

Observemos finalmente que para $(x, y) \in X \times X$, la fibra correspondiente es un conjunto compacto.

$$\delta^{-1}(x, y) = \{(g, z) \mid (z, gz) = (x, y)\} = \{(g, x) \mid gx = y\} = \langle x, y \rangle \times \{x\}$$

Pero $\langle x, y \rangle \subset G$ es cerrado y está contenido en $\langle V_x, V_y \rangle$, por lo que es compacto al igual que la fibra. □

Proposición 3.2.7. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y X un $G-$espacio. Si X es un espacio Bourbaki propio, entonces X es un espacio Cartan propio.*

Demostración. Sea $x \in X$ un elemento arbitrario, dado que G es localmente compacto, por lel teorema 3.2.1 existen dos vecindades V y U de x delgadas relativas. Dado que $U \cap V \subset U$ y $U \cap V \subset V$, por la proposición 3.1.1 tenemos que $U \cap V$ es una vecindad delgada de x, por lo que X es Cartan propio. □

3.3. Acciones Palais propias

En su trabajo [**7**], Palais dio una definición de acción propia más fuerte que la dada por Cartan. Ésta es la definición más usada en la literatura y al tipo de acciones que define se les llama acciones Palais propias o simplemente acciones propias.

Definición 3.3.1. *Un subconjunto S de un G-espacio X es un **subconjunto pequeño** de X si cada punto de X tiene una vecindad delgada relativa a S.*

Definición 3.3.2. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Sea X un G-espacio, decimos que X es un **espacio propio en el sentido de Palais** si cada punto X tiene una vecindad pequeña. En este caso decimos que la acción del grupo G en X es **Palais propia** o simplemente **propia**.*

Notemos que la definición de espacio Cartan propio es local, pues las vecindades delgadas sólo son delgadas relativas consigo mismas, mientras que la definición de Palais propio es global. Es por esto que tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces, cada $G-$espacio Palais propio es Cartan propio.*

Demostración. Sea X un $G-$espacio propio en el sentido de Palais y $x \in X$. Sea S una vecindad pequeña de x y V una vecindad de x delgada relativa a S. Entonces, por la proposición 3.1.3, $V \cap S \subset V$ es una vecindad delgada de x. □

Los espacios Palais propios también son una generalización de los espacios Bourbaki propios.

Proposición 3.3.2. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si X es un $G-$espacio Palais propio, entonces es un $G-$espacio Bourbaki propio.*

Demostración. La prueba de este hecho se sigue inmediatamente de la definición de espacio Palais propio y de la caracterización de los espacios Bourbaki propios, este último visto en el teorema 3.2.1. □

Como corolario directo de esta proposición tenemos que en los espacios Palais propios se cumplen todos los resultados que tenemos para los espacios Cartan propios y los espacios Bourbaki propios.

Corolario 3.3.1. *Sea G un grupo localmente compacto. Sea X un $G-$espacio Palais propio, entonces:*

- *Las órbitas son cerradas en X.*

- *El grupo de isotropía de x es compacto.*
- *Si X es un espacio T_1, entonces X/G es un espacio T_1.*
- *Si X es un espacio T_2, entonces X/G es un espacio T_2.*
- *La función biyectiva $\overline{\theta^x} : G/G_x \to G(x)$, $gG_x \to gx$ es un homeomorfismo equivariante.*

Lema 3.3.1. *Sea G un grupo localmente compacto y X un $G-$espacio. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y $H \subset G$ es compacto, entonces la función:*

$$\phi : X \to \mathbb{R}$$

$$\phi(z) = \sup_{g\in H} f(gz)$$

es continua.

Demostración. Sea $z \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tanto la acción de G en X como f son continuas, por lo que para todo $g \in G$ existen vecindades $W_g \subset G$ de g y $V_g \subset X$ de z tales que

$$|f(hy) - f(gz)| < \varepsilon$$

para cualesquiera $h \in W_g$, $y \in V_g$.

El conjunto $\{W_g\}_g \in G$ es una cubierta para G y en particular para H, por la compacidad de H, existen $g_1, \ldots, g_n \in G$, tal que $H \subset \bigcup_{i=1}^n W_{g_i}$. Definimos $V_0 = \bigcap_{i=1}^n$ la vecindad correspondiente de z.

Entonces, para cada $y \in V_0$ y cada $g \in H$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g \in W_{g_i}$. Como $y \in V_0 \subset V_{g_i}$,

$$|f(gy) - f(gz)| < \varepsilon$$

por lo tanto

$$|\sup_{g\in H} f(gy) - \sup_{g\in H} f(gz)| < \varepsilon$$

Es decir, ϕ es continua en z. □

Existen espacios que son Bourbaki propios pero no son Palais propios. A continuación mostramos un ejemplo de un espacio que a pesar de ser Bourbaki propis no cumplen con ser Palais propio. Dicho ejemplo se encuentran en el artículo [**8**], el cual se recomienda consultar para profundizar más en el ejemplo.

Ejemplo 3.3.1. *Sean M y N variedades suaves de dimensión finita con M compacto y tales que* $\dim(N) \geq \dim(M)$*. Sea $Imm(M, N)$ el espacio de las inmersiones suaves que van de M a N. Si consideramos* *el grupo de Lie de Fréchet $Diff(M)$ de todos los difeomorfismos de M, entonces*

$$\phi : Diff(M) \times Imm(M,N) \to Imm(M,N)$$

$$\phi(f,g) = g \circ f$$

es una acción suave que es Bourbaki propia, de hecho el espacio de órbitas $Imm(M,N)/Diff(M)$ es un espacio de Hausdorff, pero el grupo $Diff(M)$ no es localmente compacto, por lo que la acción no es Palais propia.

La propiedad de ser Palais propio resulta ser aún más fuerte que ser Bourbaki o Cartan propio, pues si el espacio fase es de Tychonoff también lo será el espacio de órbitas. La prueba de dicho resultado se encuentra en [**7**], pero se utilizan resultados de teoría de la medida. Aquí presentamos una prueba más elemental, la cual puede encontrarse en [**9**].

Proposición 3.3.3. *Sea G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio y de Tychonoff, entonces X/G es de Tychonoff.*

Demostración. Sean $\widetilde{x} \in X/G$ y $\widetilde{F} \subset X/G$ un cerrado tal que, $\widetilde{x} \notin \widetilde{F}$. Sea $\pi : X \to X/G$ la función orbital y supongamos que $\widetilde{x} = \pi(x)$ para algún $x \in X$. Si $F = \pi^{-1}(\widetilde{F})$, entonces $F \subset X$ es cerrado, invariante y ajeno a la órbita $G(x)$. Mostraremos que existe una función continua e invariante $\phi : X \to [0,1]$ tal que $\phi(G(x)) = 1$ y $\phi(F) = 0$.

Sea $U \subset X$ una vecindad pequeña de x. Como X es de Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \backslash U) = 0$. Para cada $z \in X$ definimos ϕ como

$$\phi(z) = \sup_{g \in G} f(gz).$$

Veamos que ϕ es invariante. En efecto, para cada $h \in G$, $z \in X$, tenemos

$$\phi(hz) = \sup_{g \in G} f(g(hz)) = \sup_{g \in G} f((gh)z) = \sup_{t \in G} f(tz) = \phi(z)$$

pues $R_h : G \to G$, $R_h(g) = gh$ es un homeomorfismo en G. Es claro que $\phi(G(x)) = 1$ y $\phi(F) = 0$. Ahora probaremos la continuidad de ϕ.

Sea $x \in X$. Dado que U es una vecindad pequeña, existe una vecindad $V \subset X$ de z tal que $K = \overline{\langle U, V \rangle}$ es compacto. Sea $y \in V$, afirmamos que

$$\phi(y) = \sup_{g \in K^{-1}} f(gy).$$

En efecto, pues si $g \notin K^{-1}$, entonces $g^{-1} \notin \langle U, V \rangle$, es decir, $g^{-1}U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, dado que $y \in V$, tenemos que $y \notin g^{-1}U$ o, lo que es lo mismo, $gy \notin U$. Por lo que $f(gy) = 0$.

Por la compacidad de K y por el lema 3.3.1 tenemos que ϕ es continua en V pero como tomamos un z arbitrario tenemos que ϕ es continua es todo X.

Como ϕ es invariante, se factoriza a través de la proyección orbital p y una función continua $\widetilde{\phi}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & {[0,1]} \\ X/G \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\widetilde{\phi}(\widetilde{x}) = 1$ y $\widetilde{\phi}(\widetilde{F}) = 0$. □

A continuación presentamos dos ejemplos interesantes de acciones Palais propias, que muestran su importancia y presencia en la literatura matemática. El primer ejemplo se encuentra en [**10**] y el segundo en [**11**].

Ejemplo 3.3.2. *Diremos que un espacio métrico (X, d) es propio, o de Heine-Borel, si todas las bolas de radio finito tienen cerradura compacta. Si (X, d) es un espacio métrico propio entonces su grupo $Iso(X) = \{f : X \to X \ : \ d(f(x), f(y)) = d(x, y)\}$ de todas las isometrías de X es localmente compacto y la acción:*

$$\phi : Iso(X) \times X \to X$$

$$\phi(f, x) = f(x)$$

es Palais propia.

Ejemplo 3.3.3. *Denotemos con $cc(\mathbb{R}^n)$ al hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, equipado con la métrica de Hausdorff:*

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B)\}$$

donde d es la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos con $cb(\mathbb{R}^n)$ al subespacio de $cc(\mathbb{R}^n)$ que consiste de todos los cuerpos compactos convexos de $\mathbb{R}^n$ de interior no vacío.

Sea $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_v(x) = v + x$ la traslación por el vector v y sea $GL(n)$ el grupo general lineal, es decir, el grupo de todas los automorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $Aff(n)$ al grupo de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$, es decir:

$$Aff(n) = \{\phi \circ T_v \ : \ \phi \in GL(n),\, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Tenemos que para todo $g \in G$ y todo $A \in cb(\mathbb{R}^n)$ el conjunto $gA = \{ga \ : \ a \in A\}$ tiene interior no vacío por lo que $gA \in cb(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos definir la acción:

$$\phi : Aff(n) \times cb(\mathbb{R}^n) \to cb(\mathbb{R}^n)$$

$$\phi(f, A) = f[A]$$

dicha acción es continua y es Palais propia.

Ya hemos visto que si G es localmente compacto entonces todo $G-$espacio Palais propio es Bourbaki propio y que todo $G-$espacio Bourbaki propio es Cartan propio. A continuación veremos en qué casos estas definiciones coinciden.

Lema 3.3.2. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio de Cartan y X/G es regular, entonces X es un G-espacio propio en el sentido de Palais.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U una vecindad delgada de x en X. Sea $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital, sabemos por la proposición 2.2.6 que π es abierta. Entonces $\pi(U)$ es un abierto de $\pi(x) = \widetilde{x}$ en X/G.

Como X/G es un espacio regular, existe una vecindad abierta $\widetilde{W}$ en X/G tal que $\widetilde{x} \in \widetilde{W} \subset \overline{\widetilde{W}} \subset \pi(U)$. Por lo tanto, $W = \pi^{-1}(\widetilde{W})$ es una vecindad abierta e invariante de $G(x)$ en X y $F = \pi^{-1}(\overline{\widetilde{W}})$ es un conjunto cerrado e invariante de $G(x)$ tal que $x \in G(x) \subset W \subset F \subset \pi^{-1}(U) = G(U)$. Definimos $O = W \cap U$ y afirmamos que O es una vecindad pequeña de $x \in X$.

Si $y \in G(U)$, entonces existe $g \in G$ tal que $y \in gU$ y, por la proposición 3.1.3, tenemos que gU es vecindad abierta de y delgada relativa a U; además, por la misma proposición, gU es delgado relativo a O.

Si $y \notin G(U)$, entonces $X \setminus F$ es una vecindad abierta e invariante de y. Además dado que $O \subset W \subset F$, entonces $\langle X \setminus F, O\rangle = \emptyset$ por lo que $X \setminus F$ es delgado relativo a O. Por lo tanto, X es un espacio Palais propio. $\square$

Lema 3.3.3. *Sea X un espacio localmente compacto y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva, continua y abierta. Entonces, Y es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $y \in Y$ y V una vecindad de y. Dado que f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y por la continuidad de f tenemos que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x. Como X es localmente compacto, existe una vecindad de x, U, tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset f^{-1}(V)$, y $\overline{U}$ es compacto. Por lo tanto, $f(x) = y \in f(U) \subset f(\overline{U}) \subset V$, y dado que f es abierta y continua tenemos que $f(U)$ es abierto y que $f(\overline{U})$ es compacto. Además sabemos que todo subconjunto compacto en un espacio Hausdorff es cerrado, entonces $f(\overline{U})$ es cerrado y dado que la cerradura de un conjunto es el menor cerrado que lo contiene, tenemos:

$$y \in f(U) \subset \overline{f(U)} \subset f(\overline{U}) \subset V$$

Por lo tanto, Y es localmente compacto. $\square$

Teorema 3.3.1. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio localmente compacto, entonces son equivalentes:*

i) *La acción de G en X es propia en el sentido de Bourbaki.*
ii) *La acción de G en X es propia en el sentido de Cartan y X/G es Hausdorff.*
iii) *La acción de G en X es propia en el sentido de Palais.*

DEMOSTRACIÓN. $i) \Rightarrow ii)$. Esta implicación se sigue de las proposiciones 3.2.5 y 3.2.7.

$ii) \Rightarrow iii)$. Como la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es continua, abierta y suprayectiva y como X es localmente compacto, por el lema 3.3.3 se sigue que X/G es localmente compacto. Por hipótesis, X/G también es de Hausdorff, entonces por la proposición 1.1.1 X/G es (completamente) regular. Y, por el lema 3.3.2, X es propio en el sentido de Palais.

$iii) \Rightarrow i)$ Se sigue de la proposición 3.3.2. $\square$

3.4. Acciones propiamente discontinuas

En su artículo [**7**] R. Palais menciona que la elección del nombre de la acciones propias viene de la definición clásica de acción propiamente discontinua en la teoría de grupos discretos, puesto que en el caso de que el grupo topológico G sea discreto, es decir esta dotado de la topología discreta, entonces una acción (Palais) propia será propiamente discontinua.

En la literatura matemática existen diferentes definiciones de acción propiamente discontinua, primero veamos una de las definiciones más usadas y después la relación que existe entre algunas de las demás definiciones de acción propiamente discontinua y las acciones propias.

Definición 3.4.1. *La acción de un grupo discreto G en un espacio X se llama* ***propiamente discontinuo*** *si cada par de puntos $x, y \in X$ existen vecindades U de x y V de y tales que $gU \cap V \neq \emptyset$ para todos los elementos $g \in G$, salvo para una cantidad finita.*

Esta definición aparece en [**12**] y en [**13**], en [**14**] la definición es la misma pero se pide la condición de que el espacio fase de la acción sea localmente compacto.

Proposición 3.4.1. *Si G es un grupo discreto y X es un $G-$espacio Palais propio entonces la acción de G en X es propiamente discontinua.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, dado que X es Palais propio existe una vecindad pequeña, S de x. Como S es pequeña, para $y \in X$ existe una vecindad U tal que es delgado relativo con S es decir el conjunto $\langle S, V\rangle$ es precompacto, por lo que $\overline{\langle S, V\rangle}$ es compacto. En la topología discreta los conjuntos compactos son finitos por lo tanto $\overline{\langle S, V\rangle}$ es finito, y como

$$\langle S, V\rangle = \{g \in G \mid gS \cap V \neq \emptyset\} \subset \overline{\langle S, V\rangle}$$

entonces $gS \cap V \neq \emptyset$ solo para una cantidad finita de $g \in G$, por lo tanto la acción de G en X es propiamente discontinua. $\square$

En el caso de que el el espacio fase X sea localmente compacto tenemos las siguientes equivalencias con dos de las definiciones de acción propiamente discontinua, cuya prueba podemos encontrar en [**13**].

Proposición 3.4.2. *Sea G un grupo discreto y X un $G-$espacio localmente compacto, entonces los siguientes son equivalentes:*

a) *X es Palais propio.*
b) *Para cualquier conjunto compacto $K \subset Y$, $K \cap (gK) = \emptyset$ para todo $g \in G$ salvo una cantidad finita.*
c) *La acción de G en X es propiamente discontinua.*

Demostración. Probaremos que (a) implica (b). Supongamos que la acción de G en X es Palais propia, entonces X es un espacio Bourbaki propio y por la proposición 3.2.2 la función $\delta : G \times X \to X \times X$ es una función propia. Si $K \subset X$ es compacto, entonces el conjunto

$$\phi^{-1}(K \times K) = \{(g, x) \in G \times X \mid x \in K, gx \in K\}$$

es compacto. Por lo tanto la proyección de $\phi^{-1}(K \times K)$ a G es compacto y por lo tanto finito, pues G es discreto. En esta proyección están incluidas todas las $g \in G$ tales que $K \cap (gK) \neq \emptyset$, por lo que $(a) \Rightarrow (b)$.

Ahora supongamos que se vale (b) y probemos (c). Dado que X es localmente compacto, para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen vecindades precompactas U y U', de x y y respectivamente. Sea K el conjunto compacto $\overline{U} \cup \overline{U'}$, entonces por la hipótesis de (b) el conjunto de las $g \in G$ tales que $K \cap (gK) = \emptyset$es finito, lo que implica que la acción es propiamente discontinua, es decir implica (c).

Finalmente, supongamos que se vale (c) y probemos (a). Sea L un subconjunto compacto arbitrario de $X \times X$. Como X es propiamente discontinuo, para cualquier $(x, x') \in L$, existen vecindades U y U', de x y x' respectivamente, tales que $gU \cap U' \neq \emptyset$, además $U \times U'$ es vecindad de (x, x'). Si repetimos el mismo procedimiento para todo $(x, x') \in L$ entonces obtenemos una familia de vecindades $U \times U'$ que forman una cubierta abierta de L y como L es compacto existe una cantidad finita de dichas vecindades, $U_1 \times U_1', \ldots, U_m \times U_m'$, que cubren a L.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto $S_i = \{g \in G \mid U_i \cap (g^{-1}U_i') \neq \emptyset\}$ es finito, entonces $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ y $K = \pi_1(L) \subset Y$. Entonces tenemos que $\delta^{-1}(L)$ está contenido en el conjunto compacto $S \times K$. Estamos trabajando con espacios de Hausdorff y los conjuntos compactos son cerrados en los espacios de Hausdorff, por lo que L es cerrado en $X \times X$ y, como δ es continua, $\delta^{-1}(L)$ es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, por lo que es compacto, entonces δ es una función propia y como X es localmente compacto por el corolario 3.2.2 δ es perfecta, por lo que la acción de G en X es Bourbaki propia y por el teorema 3.3.1 y por la compacidad local de X, la acción es Palais propia. Por lo que $(c) \Rightarrow (a)$ □

En la definición de propiamente discontinuo algunos autores, como Bredon en [**15**], piden que exista una vecindad $\langle U, U \rangle = \{e\}$ donde e es el neutro del grupo, en lugar de pedir que $\langle U, U \rangle$ sea finito. En [**13**] tenemos el siguiente corolario de la proposición 3.4.2, relacionado con dicha definición de acción propiamente discontinua.

Corolario 3.4.1. *Si G es un grupo discreto que actúa libremente en un espacio localmente compacto X Palais propio, entonces todo punto $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $U \cap (gU) = \emptyset$ para todo $g \neq e$, donde e es el neutro de G.*

Demostración. Por la proposición 3.4.2 (c), existen vecindades U y U' de x tales que $U \cap (gU') = \emptyset$ para todo $g \in G$, excepto para una cantidad finita de elementos del grupo $e, g_1, \ldots, g_m \in G$. Dado que la acción es libre y X es Hausdorff, para cada g_i existen vecindades ajenas W_i de x y W_i' de $g_i x$. Sea

$$\widetilde{U} = U \cap U' \cap W_1 \cap (g_1^{-1} W_1') \cap \cdots \cap W_m \cap (g_1^{-1} W_m').$$

Veamos que $\widetilde{U}$ cumple las propiedades deseadas. Primero notemos que $\widetilde{U}$ es una vecindad de x. Ahora sea $g \in G$ consideremos dos casos:

Caso 1. Si $g = g_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, y sea $y \in \widetilde{U} \subset g_i^{-1} W_i'$, entonces $g_i y \in W_i'$, el cual es ajeno de W_i y, como $\widetilde{U} \subset W_i$, W_i' también es ajeno a $\widetilde{U}$. Esto prueba que $\widetilde{U} \cap (g_i \widetilde{U}) = \emptyset$.

Caso 2. Si $g \in G$ no pertenece al elemento $\{e, g_1, \ldots, g_m\}$, entonces para cualquier $y \in \widetilde{U} \subset U'$, tenemos que $gy \in gU'$, el cual es ajeno a U y, como $\widetilde{U} \subset U$, U' también es ajeno a $\widetilde{U}$.

Por lo tanto $\widetilde{U} \cap (g\widetilde{U}) = \emptyset$ solo para $g = e$. □

Bibliografía

[1] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag Berlin, Berlin, 1989.

[2] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[3] Mikhail Tkachenko Alexander Arhangel'skii. *Topological Groups and Related Structures*. Atlantis Press, 2008.

[4] Sylvia de Neymet. *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2005.

[5] Glen E. Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press, Inc., 1972.

[6] N. Bourbaki. *General Topology, Chapters I-IV*. Springer Verlag, 1989.

[7] Richard S. Palais. On the existence of slices for actions of non-compact lie groups. *Annals of Mathematics*, 73(2):295–323, 1961.

[8] Peter Michor Vicente Cervera, Francisca Mascaro. The action of the diffeomorphism group on the space of immersions. *Differential Geometry and its Applications*, 1:391–401, 1991.

[9] Hugo Juárez Anguiano. *Acciones Propias y dimensión*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.

[10] G. Noskov H. Abels, A. Manoussos. Proper actions and proper invariant metrics. *Journal of the London Mathematical Society*, 83(3).

[11] Sergey Antonyan Natalia Jonard. Affine group acting on hyperspaces of compact convex subsets of $\mathbb{R}^n$. *Fundamenta Mathematicae*, 223:99–136, 2013.

[12] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[13] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2011.

[14] William P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Princeton University, 1980.

[15] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.