UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA PROPIEDAD LINEAL EN LA ITERACIÓN FINITA DEL OPERADOR SUMA SOBRE LAS FUNCIONES ARITMÉTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ENRIQUE TORRES MIGUEL

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RODOLFO SAN AGUSTÍN CHI

CIUDAD UNIVESITARIA, CDMX. 2018

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Apellido paterno
   Apellido materno
   Nombre(s)
   Teléfono
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Carrera
   Número de cuenta

2. Datos del tutor
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno

3. Datos del sinodal 1
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno

4. Datos del sinodal 2
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno

5. Datos del sinodal 3
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno

6. Datos del sinodal 4
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno

7. Datos del trabajo escrito
   Título
   Número de páginas
   Año

1. Datos del alumno
   Torres
   Miguel
   Enrique
   552022135
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   303241953

2. Datos del tutor
   Doctor
   Rodolfo
   San Agustín
   Chi

3. Datos del sinodal 1
   Doctor
   José David
   Flores
   Peñaloza

4. Datos del sinodal 2
   Doctor
   Ricardo
   Gómez
   Aiza

5. Datos del sinodal 3
   Doctor
   Juan José
   Montellano
   Ballesteros

6. Datos del sinodal 4
   Doctor
   Juan José
   Alba
   González

7. Datos del trabajo escrito.
   Estudio de la propiedad lineal en la iteración finita del operador suma sobre las funciones aritméticas
   102 p
   2018

Para
Alexa E. y Luis E.

Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de un estimulante acercamiento con las Matemáticas, en ellas he encontrado un medio desafiante en el cual han convergido la ansiedad y la curiosidad presentes en este extraño vicio que resulta estudiarlas. Por tal motivo, es necesario agradecer a todas las personas que han sido determinantes en la culminación de este trabajo. Primero, le agradezco a mi asesor el Dr. Rodolfo San Agustín Chi todo su apoyo incondicional, su paciencia y amabilidad mostrados hacia mi persona, su valioso tiempo y sobre todo, la aportación de su amplia experiencia matemática, sin su guía difícilmente se hubiera concluido este trabajo de manera satisfactoria. De igual forma agradezco, a todos los profesores que en su momento me brindaron su tiempo y que por cuestiones puramente personales, lamentablemente me impidieron seguir contando con su apoyo. Agradezco los estímulos y cuestionamientos de todos los amigos que mostraron interés en mi trabajo y que, enriquecieron de una u otra forma mi capacidad de reflexión. De forma muy significativa agradezco a mis padres, los principales precursores de mi desarrollo profesional y personal, sus consejos y palabras de aliento siempre las tengo presentes. Le agradezco a mi esposa su cariño y confianza en mis capacidades, su apoyo ha sido un impulso determinante.

En general, agradezco a todas las personas que directa e indirectamente influyeron en la conclusión de esta tesis. Por último y no menos importante, le agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, su visión y valores presentes en la Facultad de Ciencias han sido contribuciones invaluables para mi desarrollo profesional.

Enrique Torres Miguel

Prefacio

Durante el siglo pasado el Análisis Combinatorio tuvo un avance significativo gracias a la introducción del concepto de Álgebras de Incidencia. La importancia de esta estructura matemática radica en que es una generalización de diversos conceptos clásicos del Análisis Combinatorio, matemáticos como Gian-Carlo Rota sentaron las bases y desarrollaron la teoría de forma extensa. En este contexto, el presente trabajo tiene como principal objetivo, estudiar la propiedad lineal de la iteración del operador Suma Σ sobre las funciones aritméticas, a menudo desapercibida en el Análisis Combinatorio, debido en gran medida a que en el contexto más general de las Álgebras de Incidencia, ésta se deriva de forma inmediata de la asociatividad de la convolución de las funciones de incidencia. Sin embargo, esta propiedad resulta ser una herramienta fundamental en el estudio de diversos problemas del Análisis Combinatorio, por lo tanto, es necesario presentar dicha propiedad de una manera elemental y detallada de tal forma que se haga presente su importancia. Hemos optado por restringir el estudio a un caso particular de las Álgebras de Incidencia, por dos razones fundamentales. Primero, la estructura del texto está pensada de tal forma que los conceptos y resultados que se pretenden exponer vayan surgiendo de una manera intuitiva, partiendo del estudio de problemas clásicos del Análisis Combinatorio, los cuales sirven como referencia al situarse en el contexto más general. Y la segunda, al centrarnos en las funciones aritméticas, una vez presentada la definición de función iterada respecto al operador Suma Σ, mostraremos una notación completamente nueva para denotar dichas iteraciones, esta notación tiene una importancia implícita en el Análisis Combinatorio, ya que gracias al uso de ésta, no solo se puede sintetizar de forma alternativa la solución de diversos problemas, sino que da la pauta en la generación y solución de nuevos problemas, por ejemplo algunas generalizaciones de la suma geométrica, entre otros, las cuales serán presentadas al término de cada apartado.

En síntesis, la idea esencial de esta tesis es hacer un estudio de la propiedad en cuestión de la forma más original e independientemente posible. Con esto nos referimos a que los conceptos, demostraciones y los problemas expuestos han sido pensados de forma muy selectiva de tal modo que sirvan como un acercamiento elemental hacia lo presentado con gran maestría y elegancia por diversos autores, y es precisamente su trabajo lo que sirve como inspiración del nuestro.

Índice general

Introducción

Como nos centraremos en un caso particular de las Álgebras de Incidencia, resulta necesario verificar la certeza de la propiedad en cuestión incluso en esta estructura más general. Sin embargo, como se ha optado por un acercamiento elemental, nos limitaremos a presentar un breve análisis de los conceptos de Álgebras de Incidencias y la propiedad lineal de iteración del operador Suma Σ sobre las funciones de incidencia. Para un estudio más detallado y completo sobre las Álgebras de Incidencias se pueden revisar [4] y [7].

Álgebras de Incidencia

Primero veamos algunas definiciones.

Definición 0.0.1 *Un conjunto* $(P, \leq)$ *parcialmente ordenado, es un conjunto* P *provisto con una relación denotada como* $\leq$*, tal que*

(i) $a \leq a \ \forall a \in P$

(ii) $a \leq b \ , \ b \leq a \ \Rightarrow \ a = b \ \forall a, b \in P$

(iii) $a \leq b \ , \ b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c \ \forall a, b, c \in P$

Definición 0.0.2 *Sean* $a, b \in P$ *donde* $(P, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado. Se llama intervalo al conjunto* I *tal que*

$$I = \{ \, x \, : \, a \leq x \leq b \, \} \, .$$

y se denota como $[\, a, \, b \,]$

Definición 0.0.3 *Un conjunto parcialmente ordenado* $(P, \leq)$ *es localmente finito, si todo intervalo es finito.*

Definición 0.0.4 *Sea* $(P, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y* $\mathbb{K}$ *un campo de característica cero. Entonces definamos el siguiente conjunto,*

$$\Lambda(P) = \left\{ \, f \, : \, P^2 \to \mathbb{K} \, \mid \, f(x,y) = 0 \;\; x \nleq y \;\; , \;\; \forall x, y \in P \, \right\} .$$

Entonces en $\Lambda(P)$ *se definen las siguientes operaciones;*

(i) $(f+g)(x,y) := f(x,y) + g(x,y) \ \ \forall f, g \in \Lambda(P)$

(ii) $(\alpha f)(x,y) := \alpha f(x,y) \ \ \forall f \in \Lambda(P) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(iii)

$$(f * g)(x,y) := \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) g(z,y)$$

Es claro que la suma del inciso (iii) está bien definida porque $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado localmente finito. Por otra parte, es inmediato que el producto, también llamado convolución, es asociativo

$$\begin{aligned}
(f * g) * h &= \sum_{x \leq z \leq y} (f * g)(x, z) h(z, y) \\
&= \sum_{x \leq z \leq y} \left(\sum_{x \leq w \leq z} f(x, w) g(w, z) \right) h(z, y) \\
&= \sum_{x \leq w \leq z \leq y} f(x, w) g(w, z) h(z, y) \\
&= \sum_{x \leq w \leq y} f(x, w) \left(\sum_{w \leq z \leq y} g(w, z) h(z, y) \right) \\
&= \sum_{x \leq w \leq y} f(x, w)(g * h)(w, y) = f * (g * h)
\end{aligned}$$

Definición 0.0.5 *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y $\mathbb{K}$ un campo de característica cero. Entonces, al conjunto $(\,\Lambda(P)\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,*\,)$ se le llama álgebra de incidencia del conjunto P sobre $\mathbb{K}$.*

A los elementos de $\Lambda(P)$ se les conoce como funciones de incidencia.

Definición 0.0.6 *Sea $(\,\Lambda(P)\,,\,\mathbb{K}\,,\,+\,,\,*\,)$ un álgebra de incidencia. Entonces, definamos las siguientes funciones*

(i) $\forall a \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$a_{\mathbb{K}} \in \Lambda(P) \Leftrightarrow a_{\mathbb{K}} := a_{\mathbb{K}}(x, y) = \begin{cases} a_{\mathbb{K}} & x \leq y \\ 0_{\mathbb{K}} & x \nleq y \end{cases}$$

En particular, sea

$$1_{\mathbb{K}} := \zeta(x, y) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & x \leq y \\ 0_{\mathbb{K}} & x \nleq y \end{cases}$$

(ii) Sea $\delta \in \Lambda(P)$ tal que

$$1_{\mathbb{K}} := \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x, z) \delta(z, y)$$

entonces, se tiene que

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

(iii) Sea $\mu \in \Lambda(P)$ tal que

$$\delta(x, y) := \sum_{x \leq z \leq y} \zeta(x, z) \mu(z, y).$$

Ahora que ya contamos con los elementos suficientes de las álgebras de incidencia mostraremos como se aplican los conceptos que se abordarán a lo largo de este texto, situándonos en este contexto más general.

Conceptos de funciones iteradas de una funciones de incidencia respecto al operador Suma Σ

Definición 0.0.7 *Sea $f \in \Lambda(P)$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de la función f, es la función de incidencia h, tal que*

$$h(x,y) = \sum_{x \leq z_1 \leq y} \sum_{z_1 \leq z_2 \leq y} \cdots \sum_{z_{m-2} \leq z_{m-1} \leq y} \sum_{z_{m-1} \leq z_m \leq y} f(z_m, y)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{x \leq z \leq y}{}_m f(z,y)$$

esto es,

$$\sum_{x \leq z \leq y}{}_m f(z,y) = \sum_{x \leq z_1 \leq y} \sum_{z_1 \leq z_2 \leq y} \cdots \sum_{z_{m-2} \leq z_{m-1} \leq y} \sum_{z_{m-1} \leq z_m \leq y} f(z_m, y).$$

Análogamente a lo anterior, se tiene lo siguiente.

Definición 0.0.8 *Sea $f \in \Lambda(P)$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m de la función f respecto al operador Suma Σ, es la función de incidencia h, tal que*

$$f(x,y) = \sum_{x \leq z_1 \leq y} \sum_{z_1 \leq z_2 \leq y} \cdots \sum_{z_{m-2} \leq z_{m-1} \leq y} \sum_{z_{m-1} \leq z_m \leq y} h(z_m, y)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{x \leq z \leq y}{}_{-m} f(z,y)$$

esto es,

$$\sum_{x \leq z \leq y}{}_{-m} f(z,y) = \sum_{x \leq z_1 \leq y} \sum_{z_1 \leq z_2 \leq y} \cdots \sum_{z_{m-2} \leq z_{m-1} \leq y} \sum_{z_{m-1} \leq z_m \leq y} h(z_m, y).$$

Definición 0.0.9 *Sean $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. Entonces definimos la siguiente función de incidencia*

$$\theta_m(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y}{}_m \delta(z,y)$$

Con esta última definición ya contamos con los elementos suficientes para describir la linealidad en la iteración del operador Suma sobre las funciones de incidencias.

Teorema 0.0.10 *Para cualquier función de incidencia f se tiene que*

$$\sum_{x \leq z \leq y}{}_m f(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \theta_m(x,z) f(z,y) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Solución. *Se sigue de las definiciones anteriores y de la asociatividad del producto de Cauchy.* ■

Es importante mencionar que lo que se describe en el resultado anterior es que al iterar un número finito de veces el operador Suma sobre una función de incidencia, la función de incidencia resultante se puede calcular mediante una simple suma que involucra a la función de incidencia original y una función de incidencia que es independiente de la función original sobre la que se realizan las iteraciones. Realmente, resulta sencillo presentar dicho resultado al situarnos en los conceptos de Álgebras de Incidencia. Sin embargo, pese a esta simpleza, esta propiedad resulta ser una herramienta muy poderosa cuando se abordan diversos problemas del Análisis Combinatorio, presentados en casos concretos de las Álgebras de Incidencia. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es analizar de una forma elemental, la trascendencia que esta propiedad tiene sobre las funciones aritméticas.

Funciones aritméticas y la propiedad lineal en la iteración finita sobre el operador Suma

Antes que nada, estaremos trabajando sobre el conjunto de funciones aritméticas, esto es, funciones de dominio natural y valores complejos denotado como $A(\mathbb{N})$ es decir, $A(\mathbb{N}) = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$. Por otra parte, es inmediato verificar que las funciones de aritméticas son un álgebra de incidencia respecto al producto de Cauchy sobre el campo de los números complejos. Por último, en lo que resta de esta introducción dejaremos de lado las referencias históricas e intentaremos hacer todo lo posible por describir de forma breve los resultados más importantes de cada apartado, al igual que sus aplicaciones más significativas.
Sin más preámbulo, en la primera sección partimos analizando la solución del **Problema 1.1.1**; encontrar el valor de la suma de los primeros n números naturales elevados a una potencia p, este problema nos permite mostrar la importancia que existe en aplicar iteraciones del operador Suma sobre las funciones aritméticas. Se hace presente la necesidad de formular una definición y una notación que describan la iterada del operador Suma sobre las funciones aritméticas en general, lo cual se logra como veremos a continuación;

Definición 1.1.4 Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f, respecto al operador Suma, es la función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k)$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

Por otra parte, se demuestra un resultado fundamental para el texto porque está ligado a varias demostraciones del primer capítulo;

Teorema 1.1.2 Sean f, g, h y p funciones aritméticas tales que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$$
$$\sum_{k=1}^{n} h(k) = p(n)$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k).$$

Además, se demuestra la primera versión del teorema de linealidad sobre las iteraciones del operador Suma respecto de las funciones aritméticas;

Teorema 1.1.9 Para cualquier función aritmética f se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-2}{k-1} f(n+1-k) \ \ \forall m > 0.$$

Para finalizar la sección, en las aplicaciones se presenta dos generalizaciones equivalentes de la suma geométrica. Estos ejemplos son gran importancia porque se ocuparán como referencia en secciones posteriores.

i) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ y $\forall v \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) v^{k-1}(1-v)^m + \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r)(v-1)^{r-1} v^n = 1$$

ii) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} \ x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m.$$

donde

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} \left[\frac{1}{k}\right].$$

En la segunda sección, mostramos la definición de iterada dual;

Definición 1.2.1 Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m respecto al operador Suma de la función f, es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} h(k_m) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} f(k).$$

Por otro lado, se enuncia una generalización del **Teorema 1.1.9**;

Teorema 1.2.5 Para cualquier función aritmética f se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\theta_m(n) = \begin{cases} \binom{m+k-2}{k-1}, & m > 0, \\ \left[\frac{1}{n}\right], & m = 0, \\ (-1)^{n-1}\binom{-m}{n-1}, & m < 0. \end{cases}$$

La importancia de este resultado se hace visible porque describe de forma unificada la linealidad del operador Suma respecto a la iteración para las definiciones de iterada e iterada dual de una función aritmética. Finalizamos dando unas extensiones complejas de los conceptos previos y en este contexto se deducen identidades que generalizan la suma geométrica, como se podrá ver en el **Problema 1.2.11**.

En el segundo capítulo, se introducen los conceptos de iteradas respecto a una función aritmética fija;

Definición2.1.2 Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f respecto de la función aritmética g es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n+1-k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1+1-k_2) \cdots$$

$$g(k_{m-2}+1-k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}+1-k_m) f(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k).$$

y por otro lado,

Definición 2.1.5 Sean $f \in A(\mathbb{N})$, $g \in A(\mathbb{N})$ con $g(1) \neq 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m f respecto de la función g es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n+1-k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1+1-k_2) \cdots$$

$$g(k_{m-2}+1-k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}+1-k_m) h(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]} f(k).$$

De igual forma se demuestra la linealidad del operador Suma en la iteración respecto a una función aritmética dada. Conviene advertir que estas generalizaciones están lejos de ser redundantes, ya que son la base para poder definir y entender cómo funcionan las iteradas del operador Suma, cuando la suma se realiza sobre el conjunto de multi-índices que representan las particiones positivas de un número natural.

Por lo tanto, usando la **Notación 2.1.13** se tiene que;

$\forall f \in A(\mathbb{N})$ y $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{\mu_m^{k_r}(n)} f(k_r) = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r+\cdots+k_m=n+m-1 \\ 1\leq r\leq m}} f(k_r).$$

Y con ayuda de lo siguiente,

Observación 2.1.16 Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y para toda $f \in A(\mathbb{N})$ se tiene que

$$\sum_{\mu_m^{r}(n)} f(k_r) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m-1} f(k)$$

utilizando la **Definición 2.1.2** esto es equivalente a

$$\sum_{\mu_m^{r}(n)} f(k_r) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[1,\theta_{m-1}(n)]} f(k)$$

Entonces se proponen las iteradas del operador Suma sobre el conjunto de multiíndices que representan las particiones positivas de un número natural como sigue;

Definición 2.1.15 Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado p sobre el operador

$$\sum_{\mu_p^{r}(n)} [\ ]$$

de f, es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{\mu_m^{r_1}(n)} \sum_{\mu_m^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\mu_m^{r_{p-1}}(k_{p-2})} \sum_{\mu_m^{r_p}(k_{r_{p-1}})} f(k_p)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\mu_m^{r}(n)}{}_{p} f(k_r).$$

De forma análoga se define la función iterada dual para este caso,

Definición 2.1.17 Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado p sobre el operador

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

de f, es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{\mu_m^{r_1}(n)} \sum_{\mu_m^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\mu_m^{r_{p-1}}(k_{p-2})} \sum_{\mu_m^{r_p}(k_{r_{p-1}})} h(k_p)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\mu_m^r(n)}{}_{-p} f(k_r).$$

Estas definiciones más que ser repetitivas son expuestas con la intención de que sean ilustrativas, si bien los problemas relacionados con el conjunto de multi-índices que representan a las particiones positivas de números naturales son abundantes en la literatura, la idea de iterar sobre dichos conjuntos es casi nula. Por tal motivo, estas iteraciones son presentadas hasta en el segundo capítulo, se demuestra el teorema de linealidad para este caso y como es de esperarse los resultados del primer capítulo surgen como casos particulares. Para finalizar la sección se introduce el concepto usual de convolución de Cauchy, una herramienta fundamental como se muestra en las aplicaciones, ya que el combinarse con los conceptos anteriormente descritos, se pueden deducir interesantes identidades finitas como se muestran en el **Problema 2.1.27**.

Por último, en las últimas dos secciones se muestra cómo se relacionan el concepto de iterada del operador suma sobre las funciones aritméticas con las matrices infinitas de entradas complejas. Además, se toma como referencia la suma sobre los factores de un número natural para determinar que es posible realizar la suma sobre sucesiones de subconjuntos de números naturales considerados con su orden usual, se generalizan las definiciones de función iterada e iterada dual y se muestra que la propiedad lineal está determinada por las propiedades del álgebra de matrices triangulares infinitas. Se concluye mostrando algunos ejemplos del uso de estos conceptos.

Capítulo 1

Fundamentos

1.1. Conceptos básicos

En esta sección estudiaremos el comportamiento del operador Suma usualmente denotado como Σ, respecto a la iteración sobre funciones aritméticas, introduciremos la definición de función iterada de una función aritmética. Para cada función aritmética f y $m \in \mathbb{N}$, se dirá que la función iterada de grado m de f, respecto al operador Suma, es la función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k)$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

Demostraremos la propiedad lineal que existe en dicha iteración, daremos una prueba elemental a la propiedad asociativa respecto a la convolución de las funciones aritméticas y expondremos algunas aplicaciones.

1.1.1. Preliminares

Como punto de partida, consideremos lo siguiente,

Problema 1.1.1 *Hallar una fórmula para*

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Antes de comenzar a analizar la solución del problema anterior, vale la pena aclarar que hemos elegido este problema en particular, como punto inicial de esta tesis, debido a que el planteamiento y solución de este, sirvieron como inspiración de este trabajo y la razón de esto es simple: existen dos métodos totalmente análogos con los que dicho problema se puede resolver de manera efectiva; el método telescópico y el método iterativo. No obstante que el primero es el más simple, el segundo es más general, y precisamente, el método iterativo, es el que nos sirve como punto de referencia en el estudio de la propiedad lineal del operador Suma respecto a la iteración sobre funciones aritméticas.

Método telescópico[1]

Recordemos que una solución elemental de este problema, esta implícitamente ligada a la función $f_p(n) = n^p - (n-1)^p$, pues se basa en dos características fundamentales.
La primera es su propiedad telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n} f_p(k) = n^p \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Y la segunda, se puede desarrollar en potencias menores de n^p :

$$f_p(n) = n^p - \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} (-1)^r n^{p-r} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Así, la solución del problema se reduce a calcular la fórmula para las potencias menores, puesto que

$$f_p(n) = \sum_{r=0}^{p-1} \binom{p}{r+1} (-1)^r n^{p-r-1}$$

entonces, aplicando el operador Suma a la igualdad anterior, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} f_p(n) = \sum_{r=0}^{p-1} \binom{p}{r+1} (-1)^r \sum_{k=1}^{n} k^{p-r-1} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

y como

$$\sum_{k=1}^{n} f_p(k) = n^p \qquad \forall n, p \in \mathbb{N},$$

[1]Este método de solución puede verse en Spivak, M. (1984). Calculus Vol. I, II. Editorial Reverté, Barcelona.

entonces

$$\sum_{r=0}^{p-1} \binom{p}{r+1} (-1)^r \sum_{k=1}^{n} k^{p-r-1} = n^p.$$

Por lo tanto, dando valores a los $p-1$ términos en la igualdad anterior y despejando se obtiene la solución de

$$\sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Es notable la simpleza de esta solución, sin embargo, como ya se ha mencionado, nuestra idea es mostrar un método más general, que nos permitirá dar solución a diversos problemas aplicando el operador Suma de forma recursiva.

Método iterativo

Procederemos de forma similar al método anterior. Primero, observamos que para cualquier función aritmética f al aplicarle el operador Suma

$$\sum_{k=1}^{n} [\ \ ],$$

haciendo correr el límite superior n en todo el conjunto de números naturales, se define una nueva función aritmética g de modo tal que

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

y si aplicamos nuevamente el operador Suma, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} f(k).$$

Por lo tanto, recordando que

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces aplicando el operador Suma a la igualdad anterior, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} 1 \tag{1.1}$$

Por otro lado, aplicando el operador Suma a la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

se tiene que,

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} k = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}. \tag{1.2}$$

Por otra parte, aplicando el operado Suma a (1.1) tenemos que

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} k = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1. \tag{1.3}$$

Así, despejando la suma de los cuadrados en (1.2) y sustituyendo (1.1) y (1.3) se tiene que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1.$$

De manera análoga y utilizando lo anterior podemos deducir que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 6\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - 6\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

y que,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 &= 24\sum_{v=1}^{n}\sum_{t=1}^{v}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - 36\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 \\ &+ 14\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la idea es hallar una expresión de

$$\sum_{k=1}^{n} k^p,$$

en términos de

$$\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1}\cdots\sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} 1. \tag{1.4}$$

En resumen, lo este método de solución del **Problema 1.1.1** nos plantea, es encontrar el valor de la suma (1.4) para poder resolverlo. Es claro que a diferencia del método telescópico, el método iterativo tiene un grado de complejidad mayor, sin embargo, hay que mencionar que este razonamiento es la base de lo que se pretende mostrar en este texto. Además, de que obtener la solución de (1.4) resulta casi inmediata como veremos a continuación.

Primero notemos que,

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n = \binom{n}{1}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}$$

y aplicando el operador Suma a la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} k$$

se tiene que

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} k,$$

por lo tanto,

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$$

Así, procediendo de manera recursiva se conjetura que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

donde

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} 1.$$

Antes de demostrar esto, necesitamos introducir un resultado fundamental, no solo para la solución del problema anterior, sino que es una herramienta indispensable en la demostración de varios resultados que se presentarán a lo largo de este texto.

Teorema 1.1.2 *Sean f, g, h y p funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$$
$$\sum_{k=1}^{n} h(k) = p(n)$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k)$$

Demostración.

Primero, definimos las siguientes funciones aritméticas

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k)$$
$$Y(n) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k)$$

entonces aplicaremos inducción sobre n.

i) Demostraremos que $X(n) = Y(n)$ para $n = 1$.
Notemos que,

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{k=1}^{1} f(2-k)p(k) = f(1)p(1) = f(1)h(1) \\ Y(1) &= \sum_{k=1}^{1} h(2-k)g(k) = h(1)g(1) = h(1)f(1) = f(1)h(1) \end{aligned}$$

entonces, se tiene que $X(1) = Y(1)$.

ii) Ahora, supongamos que $X(n) = Y(n)$ es cierta hasta alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces, demostraremos que $X(n+1) = Y(n+1)$. Notemos que,

$$\begin{aligned} X(1) &= f(1)p(1) \\ X(2) &= f(2)p(1) + f(1)p(2) \\ X(3) &= f(3)p(1) + f(2)p(2) + f(1)p(3) \\ &\vdots \\ X(n-1) &= f(n-1)p(1) + f(n-2)p(2) + f(n-3)p(3) + \cdots + f(1)p(n-1) \\ X(n) &= f(n)p(1) + f(n-1)p(2) + f(n-2)p(3) + \cdots + f(2)p(n-1) + f(1)p(n) \\ X(n+1) &= f(n+1)p(1) + f(n)p(2) + f(n-1)p(3) + \cdots + f(2)p(n) + f(1)p(n+1) \end{aligned}$$

así, sumando las igualdades anteriores se tiene que;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} X(k) &= \left(f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)+f(n)+f(n+1)\right)p(1)+ \\
&\quad \left(f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)+f(n)\right)p(2)+ \\
&\quad \left(f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)\right)p(3)+ \\
&\quad +\cdots+ \\
&\quad \left(f(1)+f(2)+f(3)\right)p(n-1)+\left(f(1)+f(2)\right)p(n)+\left(f(1)\right)p(n+1)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} X(k) &= g(n+1)p(1)+g(n)p(2)+\cdots+g(3)p(n-1)+g(2)p(n)+g(1)p(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} g(n+2-k)p(k) \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

análogamente,

$$\begin{aligned}
Y(1) &= h(1)g(1) \\
Y(2) &= h(2)g(1)+h(1)g(2) \\
Y(3) &= h(3)g(1)+h(2)g(2)+h(1)g(3) \\
&\vdots \\
Y(n-1) &= h(n-1)g(1)+h(n-2)g(2)+h(n-3)g(3)+\cdots+h(1)g(n-1) \\
Y(n) &= h(n)g(1)+h(n-1)g(2)+h(n-2)g(3)+\cdots+h(2)g(n-1)+h(1)g(n) \\
Y(n+1) &= h(n+1)g(1)+h(n)g(2)+h(n-1)g(3)+\cdots+h(2)g(n)+h(1)g(n+1)
\end{aligned}$$

y sumando las igualdades anteriores se tiene que;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} Y(k) &= \left(h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(n-1)+h(n)+h(n+1)\right)\ g(1) \\
&\quad +\left(h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(n-1)+h(n)\right)\ g(2) \quad + \\
&\quad \left(h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(n-1)\right)\ g(3)+\cdots+ \\
&\quad \left(h(1)+h(2)+h(3)\right)g(n-1)\left(h(1)+h(2)\right)\ g(n)+\left(h(1)\right)g(n+1)
\end{aligned}$$

así que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} Y(k) &= p(n+1)g(1)+p(n)g(2)+\cdots+p(3)g(n-1)+p(2)g(n)+p(1)g(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} g(n+2-k)p(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p(n+2-k)g(k) \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

entonces, comparando las igualdades (1.5) y (1.6) se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n+1} X(k) = \sum_{k=1}^{n+1} Y(k)$$

y por la hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} X(k) = \sum_{k=1}^{n} Y(k)$$

por lo tanto, se tiene que $X(n+1) = Y(n+1)$ *.*

■

Ahora, retomaremos uno de nuestros problemas pendientes.

Problema 1.1.3 [2] *Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

donde

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} 1.$$

Solución.

Procederemos por inducción sobre m.

i) Para el caso $m = 1$*, la igualdad es inmediata.*

ii) Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cierta hasta alguna $m \in \mathbb{N}$*. Entonces necesitamos probar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} 1 = \binom{m+n}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} 1 = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{r}{}_{m-1} 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-2}{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-2}{k-1} = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[2]Este es un problema común en Análisis Combinatorio, la solución más frecuente usa argumentos combinatorios, como puede verse en [5]. La solución que presentamos es puramente inductiva y algebraica.

Ahora, aplicaremos el ***Teorema 1.1.2*** *a lo siguiente,*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}=\binom{m+n-1}{n-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n}1=n$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\binom{m+k-2}{k-1} \tag{1.7}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\binom{m+k-1}{k-1}=\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+k-2}{k-1} \qquad \forall k,m\in\mathbb{N}$$

esto implica que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+k-2}{k-1} \tag{1.8}$$

Así, comparando (1.7) y (1.8) se deduce que,

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\binom{m+k-2}{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+k-2}{k-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

y manipulando esta igualdad, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{m+k-2}{k-1}=\frac{(mn+1)}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}=\frac{(mn+1)}{m+1}\binom{m+n-1}{n-1}$$

Sustituyendo lo anterior en (1.8), ésta se reduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)}{m}\binom{m+n-2}{k-1}\\
&= \left(\frac{m-1}{m}\right)\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-2}{k-1}+\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{k=1}^{n}k\binom{m+k-2}{k-1}\\
&= \left(\frac{m-1}{m}\right)\binom{m+n-1}{n-1}+\left(\frac{1}{m}\right)\frac{(mn+1)}{(m+1)}\binom{m+n-1}{n-1}\\
&= \binom{m+n}{n-1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Así, aplicando el operador Suma a la hipótesis de inducción y gracias a la última igualdad se prueba que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\,1=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}{}_{m}\,1=\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k-1}=\binom{m+n}{n-1} \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

Por lo tanto, regresando al Problema1.1.1, recordemos algunas de las igualdades que ya habíamos obtenido anteriormente y que nos condujeron al Problema1.1.3 ;

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 6\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - 6\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^4 = 24\sum_{v=1}^{n}\sum_{t=1}^{v}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - 36\sum_{t=1}^{n}\sum_{r=1}^{t}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 + 14\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} 1 - \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} 1.$$

Entonces usando lo obtenido en el Problema1.1.3, se deduce que;

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{r=1}^{p} g(p,r) \sum_{k=1}^{n}{}_r\, 1 = \sum_{r=1}^{p} g(p,r) \binom{r+n+1}{n-1} \qquad \forall n, p \in \mathbb{N},$$

donde *g(p,r)*[3] son constantes que solo depende del parámetro p. Para finalizar, no está de más comentar la importancia que tiene lo expuesto anteriormente para el desarrollo posterior del texto. Ya que la estructura de este, ha sido pensada para que cada sección sea una generalización de las anteriores, es necesario visualizar de forma clara la idea de lo que se ha pretendido mostrar hasta el momento. En la demostración **Problema1.1.3** se puede observar de forma implícita, que para cualquier función aritmética f al aplicarle recursivamente el operador Suma, haciendo correr el límite superior n en todo el conjunto de números naturales, se define una nueva función aritmética g, que representa dicha iteración. Así el problema estriba en encontrar una expresión general para dicha función, y como se pudo notar en la demostración de tal problema, el Teorema 1.1.2 es una herramienta indispensable. Por lo tanto, el siguiente paso es proveernos de una definición y una notación adecuada, para abordar el caso general, y eso es precisamente lo que haremos continuación.

[3]Estas constantes que aparecen en la solución del Problema1.1.1, dependiendo de su forma de expresión reciben diversos nombres, las que se exponen aquí son una variación de los Números de Stirling de primera especie.

1.1.2. Definición de iteradas respecto al operador Suma

Como ya habíamos mencionado, necesitamos introducir una definición que se pueda aplicar a cualquier función aritmética, para esto denotaremos al conjunto de las funciones aritméticas de forma usual como $A(\mathbb{N})$. Entonces veamos lo siguiente.

Definición 1.1.4 [4] *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f, respecto al operador Suma, es la función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m).$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k)$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m)$$

Observación 1.1.5 *Para cualquier función aritmética f, diremos que la misma función f es su función iterada de grado 0 y denotaremos esto como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n).$$

Observación 1.1.6 *Hay que advertir, que la **Definición 1.1.4** no es aplicable al siguiente caso.*

Supongamos que

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n,k),$$

entonces, aplicando el operador Suma, a esta igualdad se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} f(k,s)$$

y como puede observarse la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} f(k,s)$$

*es de una naturaleza distinta a las que se han manejado hasta el momento, pues depende tanto del límite superior como del límite inferior del operador, a diferencia de lo que se expresa en la **Definición 1.1.4**. Este caso lo estudiaremos más adelante.*

[4] Esta definición, en su forma simple, puede verse en términos de antidiferencias en [6] y [1].

Antes de continuar, notemos algunas cuestiones; la **Definición 1.1.4** es equivalente a la definición de antidiferencia y comúnmente se usan los símbolos Δ^{-1} y ∇ para denotar al operador antidiferencia. Aunque resulta irrelevante la notación, nosotros no nos apegaremos a la terminología usual, optaremos por el símbolo

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}$$

ya que, para los objetivos de este trabajo, es el que mejor describe la esencia de la **Definición 1.1.4**, esto es, que se está realizando una suma sobre una función aritmética dada, lo cual únicamente denota la suma de los n primeros valores de la iteración correspondiente, tomados con el orden usual de $\mathbb{N}$.

Veamos lo que queremos describir con lo anterior,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) \\
\sum_{k=1}^{n}{}_{2} f(k) &= \sum_{k=1}^{1} f(k) + \sum_{k=1}^{2} f(k) + \cdots + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \\
\sum_{k=1}^{n}{}_{3} f(k) &= \sum_{k=1}^{1}{}_{2} f(k) + \cdots + \sum_{k=1}^{n-1}{}_{2} f(k) + \sum_{k=1}^{n}{}_{2} f(k) \\
\sum_{k=1}^{n}{}_{4} f(k) &= \sum_{k=1}^{1}{}_{3} f(k) + \cdots + \sum_{k=1}^{n-1}{}_{3} f(k) + \sum_{k=1}^{n}{}_{3} f(k)
\end{aligned}$$

Con esto podemos ver que en

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m)$$

se tiene que

$$1 \leq k_m \leq k_{m-1} \leq \cdots \leq k_2 \leq k_1 \leq n$$

y lo que esto indica, es simplemente el orden de los sumandos en las iteraciones.

Análisis del Método Iterativo

Como se observó anteriormente, la demostración del **Problema 1.1.3** se puede advertir un hecho relevante; supongamos que

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$
$$n = \sum_{k=1}^{n} 1$$

entonces aplicando el **Teorema 1.1.2** resulta que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\, f(k)$$

y según la **Definición 1.1.4**, esto implica que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\, f(k).$$

Análogamente, si suponemos que

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k),$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\, g(k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\, g(k)$$

y por la **Definición 1.1.4** tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{3}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\, g(k)$$

pero, aplicando el **Teorema 1.1.2** a las siguientes igualdades

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$
$$\binom{n+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$$

se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\, g(k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1-k}{2} f(k)$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{3}\, f(k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1-k}{2} f(k)$$

por la **Definición 1.1.4**.

Entonces, este análisis sugiere que no importa que función aritmética tomemos, siempre podremos calcular

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, f(k)$$

en términos de la función *f*. Demostremos lo anterior.

Definición 1.1.7 *Sean $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} \left[\frac{1}{k}\right]$$

Observación 1.1.8 *De la **Definición 1.1.4** tenemos que*

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m-1} 1$$

ya que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k}\right]$$

por lo tanto,

$$\theta_m(n) = \binom{m+k-2}{k-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

En adelante, denotaremos de forma usual al conjunto de los números naturales que incluyen al cero como $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ahora que ya contamos con lo necesario, vamos a exponer nuestro primer resultado sobre la linealidad del operador Suma sobre las funciones aritméticas, es conveniente dejar claro de qué forma se hace presente la linealidad, esto es, cuando se itera el operador Suma un número finito de veces sobre una función aritmética fija, la expresión resultante se puede reducir a una simple suma de dos funciones aritméticas, la función aritmética inicial sobre la que se realiza la iteración y una función que aparecerá de forma constante la cual no dependerá de la función sobre la que se aplica la iteración, sino del número de veces que use el operador Suma.

Teorema 1.1.9 *(Primera versión) Para cualquier función aritmética f se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Demostración. Se aplicará inducción sobre m.

(i) Probaremos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_0(n+1-k) f(k) \qquad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por la **Observación 1.1.5**, resulta que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n) \qquad \forall f \in A(\mathbb{N})$$

*y por la **Definición 1.1.7** sabemos que*

$$\theta_0(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_0(n+1-k) f(k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k}\right] f(n+1-k) = f(n) \qquad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

Así, comparando igualdades se concluye que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_0(n+1-k) f(k) \quad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

(ii) Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)f(k)$$

es cierta hasta alguna $m \in \mathbb{N}^*$ *y* $\forall f \in A(\mathbb{N})$ *Demostraremos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{m+1}(n+1-k)f(k) \quad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por el **Teorema 1.1.2** y **Definición 1.1.7** sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) = \theta_{\ m+1}(n)$$

si suponemos que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n),$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{m+1}(n+1-k)f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)g(k)$$

*por el **Teorema 1.1.2**.*

Por otro lado, de la hipótesis de inducción se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} g(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k)g(k)$$

*y por la **Definición 1.1.4***

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m} g(k).$$

Por lo tanto, comparando las últimas igualdades se concluye que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{m+1}(n+1-k)f(k) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

■

Con esto último, hemos logrado demostrar la propiedad lineal en una versión simple de la iteración del operador Suma sobre las funciones aritméticas. Así, para finalizar esta sección, expondremos una serie de ejemplos, en los cuales, se hacen presentes los conceptos anteriores.

1.1.3. Aplicaciones

Los ejemplos sobre los cuales se pueden trabajar los conceptos de linealidad respecto a la iteración del operador Suma son diversos, basta con tomar una suma finita de una función aritmética y aplicar el operador Suma de forma recurrente. Sin embargo, existen ejemplos que por su naturaleza valen la pena tomarse un momento para analizarlos. Por lo tanto, hemos optado por no extendernos, solo elegimos unos escasos ejemplos que pueden ser generalizados o que tienen una relación con la solución de otros problemas. En lo siguiente, pondremos **SG** para denotar a la suma geométrica, ya que nos referiremos a ella en varias ocasiones.

Problema 1.1.10 ***(SG versión simétrica simple)***

*Aplicar **Definición 1.1.4** y el **Teorema 1.1.9** a la suma geométrica*

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

y demostrar la siguiente generalización

$$\sideset{}{_m}\sum_{k=1}^{n} x^k + \sideset{}{_n}\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

o de forma explícita,

$$\sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} x^{k_m} + \sum_{r_1=1}^{m} \cdots \sum_{r_n=1}^{r_{n-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{r_n} = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m.$$

Solución.

Procederemos por inducción sobre m.

*El caso n=1 es claro aplicando la **Definición 1.1.4**. Ahora supongamos que la igualdad,*

$$\sideset{}{_m}\sum_{k=1}^{n} x^k + \sideset{}{_n}\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

es cierta hasta alguna $m \in \mathbb{N}$, entonces aplicando el operador

$$\sum_{k=1}^{n} [\quad]$$

*a ambos lados de la igualdad anterior y usando la **Definición 1.1.4** obtenemos que*

$$\sideset{}{_{m+1}}\sum_{k=1}^{n} x^k + \sum_{k=1}^{n} \sideset{}{_k}\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{k=1}^{n} x^k \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \quad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \tag{1.9}$$

*por el **Teorema 1.1.9** tenemos que*

$$\sideset{}{_k}\sum_{r=1}^{m} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{r=1}^{m} \binom{m+k-r-1}{m-r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r.$$

Además

$$\sum_{r=1}^{m}\binom{m+k-r-1}{m+1-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}=\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r},$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\\ &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

y como

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{(m+1-r)+k-2}{k-1}=\binom{(m+1-r)+n-1}{n-1}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} &= \sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1-r)+n-1}{n-1}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}\\ &= \sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

Así, sustituyendo lo anterior en (1.9) y utilizando la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}x^{k}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad \forall x\neq 1$$

obtenemos que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\,x^{k}+\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}=\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} \quad \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m} = -\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} + x^{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \qquad \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$$

entonces se sigue que,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1}\,x^{k}+\sum_{r=1}^{m}\binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1}=x^{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \tag{1.10}$$

y por el ***Teorema 1.1.9*** *sabemos que,*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m+1}{}_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^r &= \sum_{r=1}^{m+1} \binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{m} \binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r + \binom{n-1}{0} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \\
&= \sum_{r=1}^{m} \binom{(m+1)+n-r-1}{(m+1)-r} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r + \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1}
\end{aligned}$$

por lo tanto, sustituyendo lo anterior en la igualdad (1.10) se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+1} x^k + \sum_{r=1}^{m+1}{}_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

■

Problema 1.1.11 ***(SG forma simétrica equivalente)*** *Demostrar que los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i)

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) v^{k-1} (1-v)^m + \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r)(1-v)^{r-1} v^n = 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall v \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}.$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_m x^k + \sum_{r=1}^{m}{}_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}.$$

Solución. *Primero notemos que por el* ***Teorema 1.1.9*** *se tiene lo siguiente,*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m}{}_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^r &= \sum_{r=1}^{m} \theta_n(m+1-r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{m+1-r} \\
&= \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1} \qquad \forall m \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \neq 0, 1
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{r=1}^{m}{}_n \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r) \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1} \qquad \forall m \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \neq 1, 0.$$

Análogamente, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_m x^k = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^n \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \neq 1, 0$$

entonces sumando las igualdades anteriores se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k+\sum_{r=1}^{m}{}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^n\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}+\sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^m\left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1}$$

por otro lado, sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k+\sum_{r=1}^{m}{}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)x^n\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}+\sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^m\left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1}=x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m.$$

Ahora, dividiendo la igualdad anterior por $x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m$ *obtenemos*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)\left(\frac{x-1}{x}\right)^m\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}+\sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)\left(\frac{1}{x}\right)^n\left(\frac{x-1}{x}\right)^{r-1} = 1 \qquad \forall x\neq 0,1 \quad (1.11)$$

Por último, haciendo el cambio de variable $v=\frac{1}{x}$ *se tiene que* $x=\frac{1}{v}$ *y* $\frac{x-1}{x}=1-v$. *Así, sustituyendo en la igualdad (1.11) se concluye que*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)v^{k-1}(1-v)^m + \sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)(v-1)^{r-1}v^n = 1 \quad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall v\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}.$$

El recíproco se prueba análogamente.

■

Problema 1.1.12 *Probar que* $\forall p,q,n,m\in\mathbb{N}$ *y* $\forall x\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ *se tiene que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{r+p}\, x^k+\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{k+q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\, x^k\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right).$$

Solución. *Para probar esto sólo hay que definir las siguientes funciones:*

$$f(m,n)=\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k \quad y \quad g(n,m)=\sum_{r=1}^{m}{}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r \quad \forall m,n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\neq 0,1$$

entonces por el ***Problema 1.1.10*** *sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k+\sum_{r=1}^{m}{}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r = x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

lo que implica que,

$$f(m,n) \;+\; g(n,m) = \; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m \in \mathbb{N} \; y \; \forall x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

así, aplicando los operadores

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{p}[\;\;] \;\; y \;\; \sum_{r=1}^{m}{}_{q}[\;\;] \quad \forall n,m,p,q \in \mathbb{N}$$

a la igualdad anterior se tiene que

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} f(r,k) + \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k,r) = \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\; x^k \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \quad \forall n,m,p,q \in \mathbb{N}, x \neq 0,1.$$

Por otro lado, utilizando la ***Definición 1.1.4*** *observamos que*

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} f(r,k) &= \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{s=1}^{k}{}_{r} x^s \\ &= \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p+r} x^k \quad \forall n,m,p,q \in \mathbb{N}, x \neq 0,1\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k,r) &= \sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{t=1}^{r}{}_{k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^t \\ &= \sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{t=1}^{r}{}_{k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^t \\ &= \sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{q+k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r \quad \forall n,m,p,q \in \mathbb{N}, x \neq 0,1\end{aligned}$$

y, por último

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{p} x^k \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{p} x^k\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right).$$

Por lo tanto, comparando las igualdades anteriores se sigue que,

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\sum_{k=1}^{n}{}_{r+p} x^k + \sum_{k=1}^{n}{}_{p}\sum_{r=1}^{m}{}_{k+q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{p} x^k\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{q}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right)$$
$$\forall n,m,p,q \in \mathbb{N}, x \neq 0,1.$$

■

Problema 1.1.13 *Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+m-2}{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \ \ y \ \ \forall\, |x| < 1$$

utilizando la igualdad,

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^{k-1} (1-x)^m \quad + \quad \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r)\,(1-x)^{r-1}\, x^n \ = \ 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ y \ \forall x \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}.$$

Solución.

Sólo hay que aplicar el operador $\lim_{n\to\infty}$ *a la siguiente igualdad,*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^{k-1} (1-x)^m \quad + \quad \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r)\,(1-x)^{r-1}\, x^n \ = \ 1$$

para obtener que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^{k-1} (1-x)^m \quad + \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{m} \theta_n(r)\,(1-x)^{r-1}\, x^n \ = \ \lim_{n\to\infty} 1$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^{k-1} (1-x)^m \quad + \quad \sum_{r=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \theta_n(r) x^n \right) (1-x)^{r-1} \ = \ 1 \qquad (1.12)$$

Por otro lado, por las propiedades de los límites sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^{k-1} (1-x)^m \quad &= \quad (1-x)^m \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) x^{k-1} \\ &= \quad (1-x)^m \sum_{n=1}^{\infty} \theta_m(n) x^{n-1} \\ &= \quad (1-x)^m \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m+n-2}{n-1} x^{n-1} \end{aligned}$$

y, dado que

$$\left(\lim_{n\to\infty} \theta_n(r) x^n \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \binom{n+r-2}{n-1} x^n \right) = 0 \quad \forall \quad |x| < 1$$

entonces sustituyendo lo anterior en la igualdad (1.12) se concluye que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+m-2}{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \ \ y \ \ \forall\, |x| < 1.$$

■

Problema 1.1.14 *Supongamos que* $\sum_{k=1}^{n} g(k) = f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^p - k^p\right) f(k) = (n+1)^p f(n) \ - \ \sum_{k=1}^{n} k^p g(k) \quad \forall p \in \hat{\mathbb{N}}.$$

Solución. *Se aplicará inducción sobre* p.

El caso $p = 0$ *es claro. Sea* $p = 1$ *veamos que*

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^1 - k^1\right) f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

además,

$$(n+1)^1 f(n) \ - \ \sum_{k=1}^{n} k^1 g(k) = (n+1) f(n) \ - \ \sum_{k=1}^{n} k g(k) \quad \forall \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, por la ***Definición 1.1.4*** *sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = f(n) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}{}_2\, g(k) = \sum_{k=1}^{n} f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por el ***Teorema 1.1.9*** *tenemos que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}{}_2\, g(k) &= \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) g(k) \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^{n} g(k) - \sum_{k=1}^{n} k g(k) \quad \forall \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Así, comparando las igualdades anteriores se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = (n+1) f(n) - \sum_{k=1}^{n} k g(k) \quad \forall \in \mathbb{N}.$$

Ahora, supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^p - k^p\right) f(k) = (n+1)^p f(n) \ - \ \sum_{k=1}^{n} k^p g(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cierta hasta alguna $p \geq 0$. *Entonces, aplicando el operador Suma a la igualdad anterior y utilizando la* ***Definición 1.1.4*** *se tiene que,*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_2 \ \left((k+1)^p - k^p\right) f(k) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^p f(k) \ - \ \sum_{k=1}^{n}{}_2\, k^p g(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}{}_2 \left((k+1)^p - k^p\right) f(k) \ + \sum_{k=1}^{n}{}_2\, k^p g(k) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^p f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, por el ***Teorema 1.1.9*** *sabemos que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k) &= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left((k+1)^p-k^p\right)f(k)= \\ (n+1)\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k) &- \sum_{k=1}^{n}\left(k(k+1)^p-k^{p+1}\right)f(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{2}k^pg(k) &= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k^pg(k) \\ &= (n+1)\sum_{k=1}^{n}k^pg(k)-\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}g(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Así, por las igualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k)+\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\;k^pg(k)= \\ &(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k)-\sum_{k=1}^{n}k^pg(k)\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\left(k(k+1)^p-k^{p+1}\right)f(k)+k^{p+1}g(k)\right)\end{aligned}$$

pero, por la hipótesis de inducción sabemos que,

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k)=(n+1)^pf(n) \;-\; \sum_{k=1}^{n}k^pg(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k) \;+\; \sum_{k=1}^{n}k^pg(k)=(n+1)^pf(n) \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k)+\sum_{k=1}^{n}{}_{2}k^pg(k)= \\ &(n+1)^{p+1}f(n)-\sum_{k=1}^{n}\left(k(k+1)^p-k^{p+1}\right)f(k)-\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}g(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{2}\left((k+1)^p-k^p\right)f(k) \;+\sum_{k=1}^{n}{}_{2}k^pg(k)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^pf(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Entonces, comparando las igualdades anteriores se sigue que

$$(n+1)^{p+1}f(n)-\sum_{k=1}^{n}\left(k(k+1)^p-k^{p+1}\right)f(k)-\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}g(k)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^p f(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

y manipulando esta igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^{p+1}f(n)-\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}g(k) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^p f(k)+\sum_{k=1}^{n}\left(k(k+1)^p-k^{p+1}\right)f(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^p+\left(k(k+1)^p-k^{p+1}\right)\right)f(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)(k+1)^p-k^{p+1}\right)f(k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)f(k) \quad \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(n+1)^{p+1}f(n)-\sum_{k=1}^{n}k^{p+1}g(k)=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)f(k) \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

■

1.2. Conceptos duales

En esta sección se presentará el concepto de iterada dual o de orden negativo de una función aritmética respecto del operador Suma. Para cada función aritmética f, diremos que la función iterada dual de grado m respecto al operador Suma, es una función h tal que

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} h(k_m) \, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} f(k),$$

además, se probará la propiedad lineal de dicha iteración. Cabe advertir que la definición anterior es equivalente a la que se expone de forma clásica en el análisis combinatorio[5], cuando se toma como referencia el operador Diferencia discreta Δ. Sin embargo, como ya se había mencionado, la notación que emplearemos es completamente diferente a la usual y es una extensión de la **Definición 1.1.4**. Además, concluiremos enunciando el teorema de recursividad lineal del operador Suma sobre las funciones iteradas de una función aritmética y mostraremos algunas aplicaciones.

1.2.1. Definición dual de función iterada respecto al operador Suma

Recordemos que los conceptos empleados en la **Sección 1.1** se pueden expresar en términos del operador antidiferencia, denotado como ∇. Análogamente los resultados de esta sección pueden escribirse en términos del operador diferencia Δ, además de que se puede utilizar la relación que existe entre dichos operadores inversos y sus análogos continuos, el de derivada y antiderivada. Sin embargo, hemos optamos por usar una notación y un método alternativo para presentar conceptos equivalentes, intentando mostrar la preeminencia natural que hay en el caso discreto sobre el caso continuo cuando se describen iteraciones discretas sobre funciones aritméticas.

Nuestro primer paso es introducir el concepto de iterada de grado negativo de una función aritmética, para mostrar resultados duales a los de sección anterior.

Definición 1.2.1 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m respecto al operador Suma de la función f, es una función aritmética h tal que*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} h(k_m) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} f(k).$$

[5]Esto puede verse en [1],[4] y [6] por mencionar algunos.

Ahora que ya contamos con la definición de iterada dual (negativa), el siguiente paso es extender la **Definición 1.1.7** en términos de la **Definición 1.2.1**. Recordemos que por la **Definición 1.1.7**, tenemos que

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_m \left[\frac{1}{k}\right] \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

y por la **Observación 1.1.8** sabemos que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k}\right].$$

Entonces nuestro propósito es aplicar la **Definición 1.2.1** a la función

$$f(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$$

para hallar sus funciones iteradas de grado negativo.
Esto es, debemos encontrar el valor de

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} \left[\frac{1}{k}\right] \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Primero vamos a deducir una función aritmética h tal que

$$\sum_{k=1}^{n} h(k) = \left[\frac{1}{n}\right] \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

entonces de la igualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} h(1) &= \left[\frac{1}{1}\right] = [1] = 1 \\ h(1) + h(2) &= \left[\frac{1}{2}\right] = 0 \\ h(1) + h(2) + h(3) &= \left[\frac{1}{3}\right] = 0 \\ h(1) + h(2) + h(3) + h(4) &= \left[\frac{1}{4}\right] = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

así, resolviendo el sistema anterior se concluye que

$$h(1) = 1 \quad , \quad h(2) = -1 \quad y \quad h(n+2) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1} \binom{1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Análogamente, encontremos una función aritmética g tal que

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = h(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para esto, notemos que;

$$\begin{aligned}
&g(1) = h(1) = 1\\
&g(1) + g(2) = h(2) = -1\\
&g(1) + g(2) + g(3) = h(3) = 0\\
&g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = h(4) = 0
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

entonces resolviendo el sistema, se tiene que

$$g(1) = 1,\ g(2) = -2,\ g(3) = 1 \qquad y \quad g(n+3) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-2}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{2}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, de lo anterior podemos conjeturar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

entonces, el siguiente paso es demostrar lo anterior.

Problema 1.2.2 *Demostrar que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Solución. *Se demostrará usando inducción sobre m.*

Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cierta hasta alguna $m \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m-1}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m+1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Primero, veamos que

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} \quad + \quad \binom{m}{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^6$$

entonces

$$\begin{aligned}(-1)^n \binom{m+1}{n} &= (-1)^n \binom{m}{n} \quad + \quad (-1)^n \binom{m}{n-1} \\ &= (-1)^n \binom{m}{n} \quad - \quad (-1)^{n-1} \binom{m}{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando el operador Suma a la igualdad anterior tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{m+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \quad - \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} = \quad 1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{m+1}{k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces, utilizando (1.13) en la igualdad anterior tenemos que,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k-1} = \quad 1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \quad - \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} \quad (1.14)$$

Ahora, por la hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m} \left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1} \binom{m}{n-1}$$

entonces, aplicando el operador Suma se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{k}{}_{-m} \left[\frac{1}{r}\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1}$$

*y la **Definición 1.2.1** implican que*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{k}{}_{-m} \left[\frac{1}{r}\right] = \sum_{k=1}^{n}{}_{1-m} \left[\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n}{}_{-(m-1)} \left[\frac{1}{k}\right]$$

---

[6] Esto es claro,

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} &= \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n-1)!(m+1-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\left(1 + \frac{n}{m+1-n}\right) = \frac{m!}{n!(m-n)!}\,\frac{(m+1-n+n)}{(m+1-n)} \\ &= \frac{m!(m+1)}{n!(m-n)!(m+1-n)} = \frac{(m+1)!}{n!(m+1-n)!}\end{aligned}$$

y como la hipótesis de inducción es cierta hasta ***m****, en particular también es cierta para* ***m-1*** *por lo tanto, se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-(m-1)}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1}$$

entonces, comparando las igualdades anteriores tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.15}$$

Ahora, notemos que (1.15) es cierta para cualquier número natural, entonces es válida para ***n+1****, esto es*

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = (-1)^{n}\binom{m-1}{n}$$

y por otra parte

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{m}{k}.$$

Así, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{m}{k}. \tag{1.16}$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.15) y (1.16) en (1.14) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k-1} &= (-1)^{n}\binom{m-1}{n} - (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n-1} \\ &= (-1)^{n}\binom{m}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k-1} = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.17}$$

y por la hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces, aplicando el operador $\sum_{-1}$ *a esta igualdad tenemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m-1}\left[\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Por último, usando (1.17) y la **Definición 1.2.1** se sigue que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1}(-1)^{k-1}\binom{m}{k-1} = (-1)^{n-1}\binom{m+1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-m-1}\left[\frac{1}{k}\right] = (-1)^{n-1}\binom{m+1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Con lo que se concluye la demostración. ■

Una vez demostrado lo anterior, terminaremos este apartado con una generalización de la **Definición 1.1.7**

Definición 1.2.3 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\theta_m(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m}\left[\frac{1}{k}\right]$$

Esta función, como pudo observarse en la **Sección 1.1** desempeña un papel importante en texto, no solo porque hace posible el cálculo de las iteradas de cualquier función aritmética, sino porque sus propiedades nos servirán como referencia para poder definir funciones análogas que van a hacer posible demostrar la linealidad en la iteración sobre las funciones aritméticas, dependiendo de la generalización sobre la que se esté trabajando.

Para finalizar, veamos los valores que toma dicha función.

Observación 1.2.4 *Del **Problema 1.2.2** y la **Observación 1.1.8** se concluye que $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$\theta_m(n) = \begin{cases} \binom{m+k-2}{k-1}, & m > 0, \\ \left[\frac{1}{n}\right], & m = 0, \\ (-1)^{n-1}\binom{-m}{n-1}, & m < 0. \end{cases}$$

1.2.2. Teorema de linealidad sobre las iteraciones del operador Suma respecto las funciones aritméticas

Como se había mencionado antes, uno de los objetivos de esta sección es generalizar el **Teorema 1.1.9**, en resumen, el teorema afirmaba que era posible expresar el valor de la suma de

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

en términos de la función f para cualquier función aritmética, entonces el siguiente paso es hallar el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ y \ \ m \in \mathbb{Z}$$

en términos de la función f, para cualquier función aritmética dada.

Teorema 1.2.5 *(Segunda versión). Para cualquier función aritmética f se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Ya se demostró que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \hat{\mathbb{N}}.$$

Sólo falta probar la igualdad para las m negativas.

Como $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m = -p$ para alguna $p \in \mathbb{N}$, entonces aplicaremos inducción sobre p.

(i) Probar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por la **Definición 1.2.3** se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(k) = \left[\frac{1}{n}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y suponiendo que

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N})$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(n+1-k) \left[\frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*aplicando el **Teorema 1.1.9** a las igualdades anteriores y por el **Teorema 1.1.2** se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(n+1-k)\left[\frac{1}{k}\right] = g_f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$g_f(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.18}$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo cual implica que

$$g_f(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad . \tag{1.19}$$

*por la **Definición 1.2.1**.*

Por lo tanto, comparando las igualdades (1.18) y (1.19) se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-1}(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

(ii) Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_m(n+1-k) f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

es cierta hasta alguna $p \in \mathbb{N}$ y $\forall f \in A(\mathbb{N})$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-p-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

*Por el **Problema 1.2.2** y **Definición 1.2.1** sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_m(k) = \theta_{m+1}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si suponemos que

$$\sum_{k=1}^{n} g_f(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(n+1-k) f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p}(n+1-k) g_f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

*por el **Teorema 1.1.2***

Por otra parte, la hipótesis de inducción implica que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-p} g(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p}(n+1-k) g_f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por la ***Definición 1.2.1***

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-p-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-p} g(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, comparando las últimas igualdades se concluye que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-p-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{-p-1}(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall f \in A(\mathbb{N}).$$

■

Hasta este punto, con la demostración del teorema anterior, hemos logrado presentar de forma satisfactoria la propiedad lineal de las iteraciones del operador Suma sobre las funciones aritméticas, pero aún no hemos advertido un hecho que demostraremos a continuación, la equivalencia que existe entre **Teorema 1.1.2** y el **Teorema 1.2.5** pues, a simple vista, el **Teorema 1.1.2** parece más general, puesto que en la demostración del **Teorema 1.2.5** se ha hecho uso de éste.

Teorema 1.2.6 *Son equivalentes los siguientes enunciados:*

(i)Sean f , g , h y p funciones aritméticas tales que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n) \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{n} h(k) = p(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k) p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k) g(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Para cualquier función aritmética f se tiene que;

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{p} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_p(n+1-k) f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Demostración.

Sólo vamos a demostrar que (ii) implica (i) ya que de la demostración del ***Teorema 1.2.5*** *se sigue que (i) implica (ii). Primero, supongamos que f , g , h y p son funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n) \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{n} h(k) = p(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

*Por (ii) para el caso particular p= -1 y de la **Definición 1.2.1** se tiene que*

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1}\, g(k) = g(n) - g(n-1) \quad \forall n \geq 2 \quad , \; f(1) = g(1)$$

y

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1}\, p(k) = p(n) - p(n-1) \quad \forall n \geq 2 \quad , \; h(1) = p(1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= p(n+1-k)f(1)p(n) + f(2)p(n-1) + \cdots + f(n-1)p(2) + f(n)p(1) \\
&= g(1)p(n) + (g(2) - g(1))\, p(n-1) + \cdots + (g(n) - g(n-1))\, p(1) \\
&= g(1)\,(p(n) - p(n-1)) + g(2)\,(p(n-1) - p(n-2)) + \cdots + g(n)p(1) \\
&= g(1)h(n) + g(2)h(n-1) + \cdots + g(n-1)p(2) + g(n)p(1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(k)h(n+1-k)
\end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

1.2.3. Extensiones complejas

Concluiremos esta sección haciendo algunas generalizaciones a los números complejos, las cuáles serán herramientas fundamentales en la siguiente sección, aparte de que las usaremos para exponer algunas identidades finitas, generalizaciones de la SG.

Definición 1.2.7 *Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ definimos la función $\theta_z(n)$ como;*

$$\theta_z(n) = \begin{cases} \dfrac{(z)^{\overline{n-1}}}{(n-1)!}, & \forall z \neq 0 \ , \\ \left[\frac{1}{n}\right], & z = 0. \end{cases}$$

A diferencia de las secciones pasadas, para este caso es más conveniente apoyarnos en la notación habitual de las generalizaciones de los factoriales[7], pues la propiedades de la función que acabamos de definir resultaran más naturales.

Definición 1.2.8 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$. Diremos que la función iterada de grado z de la función f, es una función aritmética g tal que*

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(n+1-k) f(k)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(k).$$

Observación 1.2.9 *Usando las definiciones anteriores se sigue que*

$$\theta_z(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \left[\frac{1}{k}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

No esta demás decir que la **Definición 1.2.8**, para el caso entero, describe la iteración del operador Σ sobre las funciones aritméticas, coincidiendo con las definiciones que se estudiaron anteriormente.

[7]Las generalizaciones de los factoriales son muy comunes en la literatura, por ejemplo se pueden ver en [1] y [6], por mencionar algunas referencias, y están dadas como

$$(z)^{\overline{n-1}} = z(z+1)...(z+n-1)$$
$$(z)^{\underline{n-1}} = z(z-1)...(z-n+1)$$

1.2.4. Aplicaciones

Los ejemplos de esta sección están más enfocados en mostrar las generalizaciones de la SG que se mencionaron anteriormente, hemos optado por restringir en la selección de ejercicios, no por falta de ejemplos, como ya se comentó el estudio de las diferencias finitas, es muy usual en la literatura y los conceptos de esta sección son análogos, solo cambia la notación.

Problema 1.2.10 *Sean f, g, h y p funciones aritméticas tales que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, f(k) = g(n) \text{ y } \sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, h(k) = p(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k) \ \ \forall \in \mathbb{N} \ , \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Solución. *Primero definimos las siguientes funciones*

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) \ \text{ y } \ Y(n) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces aplicaremos inducción sobre n.

i) Demostrar que $X(n) = Y(n)$ para $n = 1$. Veamos que

$$X(1) = \sum_{k=1}^{1} f(2-k)p(k) = f(1)p(1) = f(1)\theta_z(1)h(1)$$

$$Y(1) = \sum_{k=1}^{1} h(2-k)g(k) = h(1)g(1) = h(1)\theta_z(1)f(1) = f(1)\theta_z(1)h(1)$$

entonces se tiene que $X(1) = Y(1)$.

ii) Ahora, supongamos que $X(n) = Y(n)$ es cierta hasta alguna $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $X(n+1) = Y(n+1)$. Como

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)\theta_z(k)$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)\theta_z(k)$$

entonces

$$\begin{aligned}
g(1)h(n+1) &= f(1)\theta_z(1)h(n+1) \\
g(2)h(n) &= f(1)\theta_z(2)h(n) + f(2)\theta_z(1)h(n) \\
&\vdots \\
g(n)h(2) &= f(1)\theta_z(n)h(2) + f(2)\theta_z(n-1)h(2) + \cdots + f(n)\theta_z(1)h(2) \\
g(n+1)h(1) &= f(1)\theta_z(n+1)h(1) + f(2)\theta_z(n)h(1) + \cdots + f(n)\theta_z(2)h(1) + f(n+1)\theta_z(1)h(1)
\end{aligned}$$

entonces sumando las igualdades anteriores se tiene que;

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} X(k) &= \sum_{k=1}^{n+1} g(k)h(n+2-k)\\ &= (\theta_z(1)h(n+1)+\theta_z(2)h(n)+\cdots+\theta_z(n)h(2)+\theta_z(n+1)h(1))f(1)+\\ &\quad (\theta_z(1)h(n)+\theta_z(2)h(n-1)+\cdots+\theta_z(n)h(1))f(2)+\cdots+\\ &\quad (\theta_z(1)h(2)+\theta_z(2)h(1))f(n)+(\theta_z(1)h(1))f(n+1)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} p(n+2-k)f(k) = \sum_{k=1}^{n+1} Y(k)\end{aligned}$$

así que,

$$\sum_{k=1}^{n+1} X(k) = \sum_{k=1}^{n+1} Y(k)$$

y por la hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} X(k) = \sum_{k=1}^{n} Y(k)$$

por lo tanto se tiene que $X(n+1) = Y(n+1)$ *.* ■

Problema 1.2.11 *Sean* $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *. Demostrar que* $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *se tiene lo siguiente:*

i)

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{w} \sum_{k=1}^{n}{}_{r+z} x^k + \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \sum_{r=1}^{m}{}_{k+w} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r = \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{z} x^k\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right) .$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_r(k)x^{k-1}(1-x)^r + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_n(r)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{r-1} x^k = \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m).$$

iii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1} \sum_{r=1}^{m}{}_{w} \theta_r(k)B(a+k, b+r+1) + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1} \sum_{k=1}^{n}{}_{z} \theta_k(r)B(a+k+1, b+r) =$$

$$\theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)B(a,b) \qquad a, b \in \mathbb{C}. \quad \textit{donde } \Re(a), \Re(b) > 0.$$

Solución.

*i) Por el **Problema 1.1.10** sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\; x^k \;+\; \sum_{r=1}^{m}{}_{n}\; \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\; y\; \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\},$$

*entonces de forma análoga a la solución del **Problema 1.1.12** definimos las siguientes funciones*

$$f(m,n)=\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, x^k \quad y \quad g(n,m)=\sum_{r=1}^{m}{}_{n}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r \quad \forall m,n\in\mathbb{N}\;\; \forall x\neq 0,1.$$

Entonces

$$f(m,n)\;+\;g(n,m)=\;x^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\; y\; \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$$

y aplicando los operadores $\forall n,m\in\mathbb{N}\;\;,\;\;\forall z,w\in\mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\,[\;\;]$$

y

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{w}\,[\;\;]$$

$\forall n,m\in\mathbb{N}\;\;,\;\;\forall z,w\in\mathbb{C}$ *a la igualdad anterior, se tiene que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, f(r,k)\;+\;\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, g(r,k)=\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, x^k\left(\frac{x}{x-1}\right)^r$$
$$\forall n,m\in\mathbb{N}\;\;,\;\;\forall z,w\in\mathbb{C}\;\;,\;\; x\neq 0,1.$$

Ahora, observemos lo siguiente

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, f(r,k)=\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\sum_{s=1}^{k}{}_{r}\, x^s=\sum_{k=1}^{n}{}_{z+r}\, x^k$$
$$\forall n,r\in\mathbb{N}\;\;,\;\;\forall z\in\mathbb{C}\;\;,\;\; x\neq 0,1.$$

Análogamente,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{w}\, g(r,k)=\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\sum_{t=1}^{r}{}_{r}\left(\frac{x}{x-1}\right)^t=\sum_{r=1}^{m}{}_{w+k}\left(\frac{x}{x-1}\right)^t$$
$$\forall m,t\in\mathbb{N}\;\;,\;\;\forall w\in\mathbb{C}\;\;,\;\; x\neq 0,1.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\sum_{k=1}^{n}{}_{r+z}\; x^k+\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\sum_{r=1}^{m}{}_{k+w}\;\left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\; x^k\right)\left(\sum_{r=1}^{m}{}_{w}\left(\frac{x}{x-1}\right)^r\right) \qquad .$$

*ii) Por el **Problema 1.1.11** sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_m(k)v^{k-1}(1-v)^m \quad + \quad \sum_{r=1}^{m}\theta_n(r)(1-v)^{r-1}v^n \ = 1$$

Entonces, aplicando

$$\sum_{k=1}^{n}{}_z[\ \ ]\ y \sum_{k=1}^{n}{}_w[\ \ ]\forall n,m\in\mathbb{N}\ \ ,\ \ \forall z,w\in\mathbb{C}$$

a la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1}\sum_{r=1}^{m}{}_w\,\theta_r(k)x^{k-1}(1-x)^r \ + \ \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1}\sum_{k=1}^{n}{}_z\,\theta_k(r)(1-x)^{r-1}x^k \ &= \sum_{k=1}^{n}{}_z\sum_{r=1}^{m}{}_w 1\\ &= \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)\end{aligned}$$

iii) Por el inciso anterior se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1}\sum_{r=1}^{m}{}_w\,\theta_r(k)x^{k-1}(1-x)^r \ + \ \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1}\sum_{k=1}^{n}{}_z\,\theta_k(r)(1-x)^{r-1}x^k = \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)$$

entonces, multiplicando por $x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}$ $\Re(a),\Im(b)>0$ la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1}\sum_{r=1}^{m}{}_w\,\theta_r(k)x^{a+k-2}(1-x)^{b+r-1} + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1}\sum_{k=1}^{n}{}_z\,\theta_k(r)(1-x)^{b+r-2}x^{a+k-1}\\ &\qquad = \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el operador $\int_0^1[\ \ ]$ a la igualdad anterior , se deduce que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}{}_{z+1}\sum_{r=1}^{m}{}_w\,\theta_r(k)B(a+k,b+r+1) + \sum_{r=1}^{m}{}_{w+1}\sum_{k=1}^{n}{}_z\,\theta_k(r)B(a+k+1,b+r)\\ &= \theta_{z+1}(n)\theta_{w+1}(m)B(a,b) \qquad\qquad \forall a,b\in\mathbb{C}\ \Re(a),\Re(b)>0\end{aligned}$$

■

Problema 1.2.12 *Sean $n,m\in\mathbb{N}$ y $f\in A(\mathbb{N})$ tal que $f(n)\neq 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$. Entonces diremos que la función iterada dual de grado m de la función f respecto del operador*

$$\prod_{k=1}^{n}[\ \ ],$$

es una función aritmética h tal que

$$f(n)=\prod_{k_1=1}^{n}\prod_{k_2=1}^{k_1}\cdots\prod_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}}\prod_{k_m=1}^{k_{m-1}}h(k_m)\,\forall n\in\mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\prod_{k=1}^{n}{}_{m} f(k)$$

Además, diremos que f es su función iterada de grado 0 respecto del operador $\prod_{k=1}^{n}[\ \ ]$ y denotaremos esto como

$$\prod_{k=1}^{n}{}_{0} f(k) = f(n)\,\forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n}{}_{p} f(k) = \prod_{k=1}^{n} (f(n+1-k))^{\theta_p(k)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ , \ \ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Solución. *Aplicando logaritmos y la exponencial es inmediato, pues se sigue de las propiedades de la suma.* ■

Problema 1.2.13 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f, g \in A(\mathbb{N})$. Demostrar lo siguiente:*

(i)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = g(n) \ \ \Leftrightarrow \ \ \sum_{k=1}^{n}{}_{-m} g(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \in \mathbb{Z}.$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+p} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{p+m} f(k) \forall m, p \in \mathbb{Z}$$

(iii) Si

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m+p} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = g(n) \quad \forall m, p \in \mathbb{Z}$$

(iv) Definimos en el conjunto $A(\mathbb{N})$ la relación $\sim$ dada por $f \sim g$ sí, y solo sí, $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = g(n).$$

Probar que

a) $f \sim f \quad \forall f \in A(\mathbb{N})$

b)) Si $f \sim g$ *,entonces* $g \sim f \quad \forall f, g \in A(\mathbb{N})$

c) Si $f \sim g$ *y* $g \sim h$ *,entonces* $f \sim h \quad \forall f, g, h \in A(\mathbb{N})$

Solución.

(i) Se sigue de la definición de iterada dual.

(ii) Se sigue de la asociatividad de la composición de funciones.

(iii) Supongamos que $f \sim g$ *y* $g \sim h$ *, entonces* $\exists m, p \in \mathbb{Z}$ *tales que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = g(n) \ y \ \sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k) = h(n).$$

Entonces aplicando el operador

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{p}[\quad]$$

a la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k) = g(n)$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{p+m} f(k) = \sum_{k=1}^{n}{}_{p} g(k) = h(n).$$

(iv) Se sigue de los anteriores que es una relación de equivalencia.

■

Capítulo 2

Generalizaciones

2.1. Iteraciones respecto a una función aritmética

Los resultados de esta sección son generalizaciones de lo dado en el **Capítulo 1**, lo primero que haremos será introducir el concepto de función iterada respecto de una función aritmética sobre el operador Suma. Para cada $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$, diremos que la función iterada de grado m de f respecto de la función aritmética g es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} g(n+1-k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} g(k_1+1-k_2) \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} g(k_{m-2}+1-k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} g(k_{m-1}+1-k_m) f(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Análogamente al Capítulo 1, expondremos conceptos duales y analizaremos la propiedad lineal en dichas iteraciones. Para finalizar, estudiaremos un caso particular que está estrechamente relacionado con la función dada en la **Definición 1.2.7** y en la **Definición 1.2.8**; esto es, investigaremos las iteradas del operador Suma sobre las funciones aritméticas cuando la suma se realiza sobre un conjunto de particiones positivas de los números naturales. En términos de los conceptos de esta sección, probaremos la propiedad lineal de estas iteraciones y concluiremos mostrando en las aplicaciones, la importancia que tiene usar el concepto de iteración del operador suma sobre el conjunto de particiones positivas.

2.1.1. Planteamiento

Primero, veamos a denotar al conjunto de funciones aritméticas que no se anulan en su primer valor como, $A_0(\mathbb{N}) = \{f \in A(\mathbb{N}) : f(1) \neq 0\}$.

Por otra parte, vamos a usar la siguiente notación para minimizar un poco la escritura en lo que resta del texto.

Notación 2.1.1 *Sea g función aritmética, entonces tenemos que*

$$\hat{g}(k) = g(n+1-k)\,\forall n \in \mathbb{N}.$$

Empezaremos por analizar de forma breve el comportamiento de las funciones iteradas respecto de una función en particular, como referencia tomaremos la función definida al término de la sección anterior y gracias a todo el trabajo realizado en las secciones previas los conceptos de esta sección surgirán de forma natural.

Iteradas sobre la función $\theta_z(n)$

Recordemos que, según la **Definición 1.2.8** , la función iterada de grado z de una función aritmética f está dada por la siguiente igualdad,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(n+1-k) f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{C}$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(k) \hat{f}(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$$

utilizando la **Notación 2.1.1**.
Por otra parte, aplicaremos un razonamiento iterativo, similar al utilizado en la **Sección 1.1** en el desarrollo del **Teorema 1.1.9** para ver lo siguiente. Si

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{z} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \forall z \in \mathbb{C}$$

entonces iterando la función aritmética **g** sobre $\theta_z(n)$ y aplicando la **Definición 1.2.8** se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_z(k) \hat{g}(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_z(n+1-k) \sum_{s=1}^{k} \theta_z(s) \hat{f}_k(s) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y de forma recurrente

$$\sum_{k_1=1}^{n} \theta_z(n+1-k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} \theta_z(k_1+1-k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \theta_z(k_{m-2}+1-k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \theta_z(k_{m-1}+1-k_m) f(k_m).$$

Así, la cuestión es hallar una relación para la expresión anterior en términos de la función *f*.

Y de forma análoga a la **Sección 1.2**, se define una función h tal que

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \theta_z(n+1-k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} \theta_z(k_1+1-k_2) \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \theta_z(k_{m-2}+1-k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \theta_z(k_{m-1}+1-k_m) h(k_m)$$

Por lo tanto, el problema estriba en el estudio de la propiedad lineal de las iteraciones anteriores. Hay que notar que este es un problema particular, pero de gran importancia cuando la suma se realiza sobre las particiones positivas de un número natural. Por lo tanto, una vez fija la idea de la iteración respecto a una función aritmética, vamos a exponer los conceptos necesarios que ayuden a describir dichas iteraciones para el caso general.

2.1.2. Definición de funciones iteradas respecto a una función aritmética sobre el operador Suma

Definición 2.1.2 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f respecto de la función aritmética g es una función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \hat{g}(k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} \hat{g}(k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \hat{g}(k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \hat{g}(k_m) f(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k).$$

Definición 2.1.3 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 respecto de g y denotaremos esto como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[0,g(n)]} f(k) = f(n).$$

Observación 2.1.4 *Análogamente a la **Observación 1.1.6**, la **Definición 2.1.2** no es aplicable si se tiene una suma del tipo*

$$h(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n,k).$$

*Pues como se mencionó en su momento, la naturaleza de esta suma es distinta a la de la **Definición 2.1.2**, pues de pende tanto del límite superior e inferior.*

Definición 2.1.5 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$, $g \in A_0(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m f respecto de la función g es una función aritmética h tal que*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \hat{g}(k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} \hat{g}(k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \hat{g}(k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} \hat{g}(k_m) h(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]} f(k).$$

Observación 2.1.6 *Antes de continuar, vale la pena explicar por qué en esta definición que acabamos de dar, se incluye la restricción $g \in A_0(\mathbb{N})$ o equivalentemente que $g(1) \neq 0$ y la respuesta es simple, si g(1)=0 y $f(1) \neq 0$, entonces no es posible hallar una función h tal que f(1)=g(1) h(1). Con esto podemos ver que la existencia de*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,g(n)]} f(k)$$

*depende de la naturaleza de la función **g** y es independiente de la función aritmética **f** sobre la cual se trabaje.*

Definición 2.1.7 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $g \in A_0(\mathbb{N})$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\theta_{[m,g(n)]}(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} \left[\frac{1}{k}\right].$$

Ahora ya contamos con las herramientas necesarias, daremos los análogos a los teoremas de la primera sección, para el caso general, cuando la suma se realiza respecto a una función aritmética.

Teorema 2.1.8 *Sean q, g, f, h y $p \in A(\mathbb{N})$ tales que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[1,q(n)]} f(k) = g(n)$$

y

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[1,q(n)]} h(k) = p(n)$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{f}_n(k) p(k) = \sum_{k=1}^{n} \hat{h}_n(k) g(k) \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración. La demostración es análoga a la solución del **Problema 1.2.10**. Definamos lo siguiente,*

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k) p(k)$$

$$Y(n) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k) g(k)$$

entonces aplicaremos inducción sobre n.

(i) Demostrar que $X(n) = Y(n)$ para $n = 1$. Sabemos que,

$$X(1) = \sum_{k=1}^{1} f(2-k)p(k) = f(1)p(1) = f(1)q(1)h(1)$$
$$Y(1) = \sum_{k=1}^{1} h(2-k)g(k) = h(1)g(1) = h(1)q(1)f(1) = f(1)q(1)h(1)$$

entonces se tiene que $X(1) = Y(1)$.

(ii) Ahora, supongamos que $X(n) = Y(n)$ es cierta hasta alguna $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $X(n+1) = Y(n+1)$. Como

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)\hat{q}_n(k)$$
$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} h(k)\hat{q}_n(k)$$

entonces

$$\begin{aligned}
g(1)h(n+1) &= f(1)q(1)h(n+1) \\
g(2)h(n) &= f(1)q(2)h(n) + f(2)q(1)h(n) \\
&\vdots \\
g(n)h(2) &= f(1)q(n)h(2) + f(2)q(n-1)h(2) + \cdots + f(n)q(1)h(2) \\
g(n+1)h(1) &= f(1)q(n+1)h(1) + f(2)q(n)h(1) + \cdots + f(n)q(2)h(1) + f(n+1)q(1)h(1)
\end{aligned}$$

entonces sumando las igualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} X(k) &= \sum_{k=1}^{n+1} g(k)h(n+2-k) \\
&= \left(q(1)h(n+1) + q(2)h(n) + \cdots + q(n)h(2) + q(n+1)h(1)\right) f(1) \\
&+ \left(q(1)h(n) + q(2)h(n-1) + \cdots + q(n)h(1)\right) f(2) \\
&+ \cdots + \left(q(1)h(2) + q(2)h(1)\right) f(n) + \left(q(1)h(1)\right) f(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p(n+2-k)f(k) = \sum_{k=1}^{n+1} Y(k)
\end{aligned}$$

así que,

$$\sum_{k=1}^{n+1} X(k) = \sum_{k=1}^{n+1} Y(k)$$

y por la hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} X(k) = \sum_{k=1}^{n} Y(k)$$

por lo tanto, se tiene que $X(n+1) = Y(n+1)$.

■

Este resultado, es una generalización del Teorema 1.1.2 y al igual que su análogo de la primera sección, es fundamental en la demostración de la linealidad que existe en la iteración de operador Suma respecto a una función aritmética.

Por lo tato en esta generalización, la linealidad en la iteración respecto una función aritmética sobre el operador Suma queda descrita en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.9 *(Tercera versión) Sean $q \in A_0(\mathbb{N})$ y $f \in A(\mathbb{N})$, entonces tenemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,g(n)]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[m,q(n)]}(k)\,\hat{f}(k) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Y la demostración de este hecho es inmediata y análoga a la de las versiones anteriores, solo basta con aplicar un razonamiento inductivo, utilizando la función dada en la Definición 2.1.7, la Definición 2.1.2 (o la Definición 2.1.5, según se el caso) y el Teorema 2.1.8.

Definición de Convolución de Cauchy

Es momento de hacer un paréntesis en esta sección, primero introduzcamos la definición usual de convolución discreta o producto de Cauchy en el conjunto de funciones aritméticas.

Definición 2.1.10 *Para cualesquiera funciones $f, g \in A(\mathbb{N})$ se define el producto de Cauchy $f * g$ como*

$$f * g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)g(k) \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, según la definición anterior podemos notar que $f * g$ es una función aritmética; es más, podemos comprobar la siguiente observación.

Observación 2.1.11 *La terna $(A(\mathbb{N}), +, *)$ forma un anillo conmutativo con unitario.*

Como se podrá notar, lo más difícil de probar es la asociatividad respecto al producto, pero la demostración de este hecho fue exhibida en el **Teorema 2.1.8** Así, en términos de la definición anterior se tiene que $\forall q, g, f, h\ p \in\ A(\mathbb{N})$ tales que $q * f = g$, $q * h = p$, entonces $g * h = f * p$ esto es,

$$(f * q) * h = f * (q * h).$$

Es claro que la mayoría de los conceptos expuestos hasta este punto, pudieron haber sido escritos en términos de convoluciones. Es más, conceptos como el de iterada respecto a una función aritmética, pueden parecer innecesarios, pues en este caso lo único que se está haciendo es una convolución de funciones aritméticas con las potencias de una función invertible respecto a la convolución. Sin embargo, es conveniente advertir que el estudio de la propiedad lineal del operador suma sobre las funciones aritméticas descrito en las secciones previas es de una naturaleza distinta al de concepto de convolución pese a que se pueden usar para describirse mutuamente.

Independiente de lo comentado anteriormente, hemos elegido introducir el concepto de convolución de Cauchy porque será una herramienta indispensable en la siguiente sección, el cual combinado con el concepto de iterada respecto a una función aritmética, harán posible definir las iteradas de una función aritmética cuando la suma se realiza sobre el conjunto de particiones positivas de un número natural y establecer la propiedad lineal en dicha iteración.

2.1.3. Iteraciones sobre multi-índices

Primero veamos lo siguiente.

Observación 2.1.12 *Sean $f_1, \cdots, f_m$ funciones aritméticas tales les que*

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \hat{f}_1(k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} \hat{f}_2(k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \hat{f}_{m-1}(k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f_m(k_m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Entonces se tiene que

$$f(n) = \sum_{\substack{k_1+\cdots k_m=n+m-1 \\ 1\leq k_{r_k}\leq n \\ r_i\neq r_j \ 1\leq i,j,k\leq m}} f_1(k_{r_1}) \cdots f_m(k_{r_m}) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Esto es claro, ya que $f(n) = f_1(n) * \cdots * f_m(n)$ es un producto conmutativo y asociativo.

Notación 2.1.13 *Sea f función m-aritmética, esto es, $f \in \Lambda_m(\mathbb{N}) = \{g \mid g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{C}\}$*

Entonces denotaremos la suma extendida al conjunto de multi-índices $k_1, ..., k_m$ tales que

$$k_1 + \cdots + k_m = n + m - 1 \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

como

$$\sum_{\mu_m^{r_1,\ldots,r_s}(n)} f(k_{r_1}, ..., k_{r_s});$$

es decir,

$$\sum_{\mu_m^{r_1,\ldots,r_s}(n)} f(k_{r_1}, ..., k_{r_s}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=n+m-1 \\ 1\leq s\leq m}} f(k_{r_1}, ..., k_{r_s}) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Hay que observar que los r_j únicamente denotan la posición del sumando de la partición, sobre el cual se hace correr la suma.

Observación 2.1.14 *Para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y para toda $f \in A(\mathbb{N})$ se tiene que*

$$\sum_{\mu_m^r(n)} f(k_r) = \sum_{k=1}^{n}{}_{m-1} f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces utilizando la ***Definición 2.1.2*** *esto es equivalente a*

$$\sum_{\mu_m^r(n)} f(k_r) = \sum_{k=1}^{n}{}_{[1,\theta_{m-1}(n)]} f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.1.15 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado p sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

de f, es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{\mu_m^{r_1}(n)} \sum_{\mu_m^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\mu_m^{r_{p-1}}(k_{p-2})} \sum_{\mu_m^{r_p}(k_{r_{p-1}})} f(k_p) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\mu_m^r(n)}{}_p f(k_r).$$

Observación 2.1.16 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

y denotaremos esto como

$$f(n) = \sum_{\mu_m^r(n)}{}_0 f(k_r) \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.1.17 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado p sobre el operador*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$$

de f, es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{\mu_m^{r_1}(n)} \sum_{\mu_m^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\mu_m^{r_{p-1}}(k_{p-2})} \sum_{\mu_m^{r_p}(k_{r_{p-1}})} h(k_{r_p}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\mu_m^r(n)}{}_{-p} f(k_r).$$

Definición 2.1.18 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\bar{\Theta}_m(n) = \sum_{\mu_m^r(n)}{}_m \left[\frac{1}{k_r}\right]$$

Definición 2.1.19 *Para cualesquiera funciones $f, g \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$ se define el producto $*_{\mu_m}$ como*

$$f *_{\mu_m} g(n) = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n+m-1} f(k_i)g(k_j) \ \ i \neq j \quad 1 \leq i,j \leq m \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces resulta inmediato lo siguiente

Observación 2.1.20 *Sean $f_1, ..., f_v$, $g_1, ..., g_w$, f y g en $A(\mathbb{N})$ tales que*

$$\sum_{\mu_m^{r_1,\ldots,r_v}(n)} f_1(k_{r_1}) \cdots f_v(k_{r_v}) = f(n)$$

y

$$\sum_{\mu_m^{r_1,\ldots,r_w}(n)} g_1(k_{r_1}) \cdots g_v(k_{r_w}) = g(n) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad 1 < m \ , \ 1 \leq v < m \ , \ 1 \leq w \leq m-v$$

entonces

$$\sum_{\mu_m^{r_1,\ldots,r_v,s}(n)} f_1(k_{r_1}) \cdots f_v(k_{r_v}) f(k_s) = \sum_{\mu_m^{r_1,\ldots,r_w,s}(n)} g_1(k_{r_1}) \cdots g_v(k_{r_w}) g(k_s) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Teorema 2.1.21 *(Versión para particiones) Para cualquier función aritmética f se tiene que*

$$\sum_{\mu_m^r(n)}{}_m f(k_r) = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n+m-1} \bar{\Theta}_m(k_s) f(k_r) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Con todo el trabajo previo, resultaron inmediatos los conceptos anteriores, en las aplicaciones mostraremos algunas de sus propiedades. Además, cabe mencionar que para el caso particular $m = 2$, lo expuesto en este apartado coinciden con lo visto en la **Sección 1.1**, por tanto, no está de más resaltar la importancia que tiene el definir iteraciones sobre particiones positivas de números naturales.

2.1.4. Aplicaciones

Los ejemplos de esta sección se han elegido de forma minuciosa, de todas las secciones de ejemplos, resulta la más extensa y su importancia no radica en la cantidad de ejercicios que revolveremos sino en que se presentaran las funciones que hacen posible la linealidad en la iteración del operador Suma cuando se realiza sobre el conjunto de particiones positivas de un número natural. Además, presentaremos unas generalizaciones de la **SG** utilizando la idea de iterada respecto a una función aritmética y el producto de Cauchy.

Problema 2.1.22 *Utilizar la* ***Definición 2.1.2*** *y la* ***Definición 2.1.7*** *para demostrar lo siguiente;*

i) Probar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_z(n)]}\left[\frac{1}{k}\right]=\theta_{mz}(n)\quad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \ \forall m\in\mathbb{Z}\ \ y\ \ \forall z\in\mathbb{C}$$

ii) Sean $f\in A(\mathbb{N})$ y $\forall z\in\mathbb{C}$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_z(n)]}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\theta_{mz}(k)f(n+1-k)\qquad \forall n\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{Z}$$

Solución.

i) Para $m=0$ es claro, entonces solo debemos verificar los siguientes casos

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_z(n)]}\left[\frac{1}{k}\right] &= \sum_{k_m=1}^{n}\theta_z(n+1-k_m)\cdots\sum_{k_1=1}^{k_2}\theta_z(k_2+1-k_1)\left[\frac{1}{k_1}\right]\\ &= \theta_z(n)*\cdots*\theta_z(n)=\theta_{mz}(n)\qquad\qquad \forall n,m\in\mathbb{N},\forall z\in\mathbb{C}\end{aligned}$$

(b) Para $m<0$ se sigue de la ***Definición 2.1.5*** *y del inciso anterior.*

ii) Es inmediata de la ***Definición 1.2.9*** *y del* ***Teorema 2.1.8****, usando los incisos anteriores.*

■

Problema 2.1.23 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces veamos lo siguiente*

Definición 3a. Para cualquier $w \in \mathbb{C}$ diremos que la función $\theta_{[w,\theta_z(n)]}(n)$ está dada como

$\theta_{[w,\theta_z(n)]}(n) = \theta_{wz}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Definición 3b. Diremos que la función iterada de grado w de f respecto de $\theta_z(n)$, es una función aritmética g tal que

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[w\theta_z(n)]}(n+1-k) f(k)\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[w,\theta_z(n)]} f(k).$$

Esto es

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{[w\theta_z(n)]}(n+1-k) f(k)$$

Utilizar lo anterior para demostrar que para cualquiera f, g, h y p funciones aritméticas tales que $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall w \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[w,\theta_z(n)]} f(k) = g(n)$$

y

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[w,\theta_z(n)]} h(k) = p(n)$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)p(k) = \sum_{k=1}^{n} h(n+1-k)g(k) \quad \forall \in \mathbb{N} \quad y \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Solución. *Se sigue del* ***Problema 1.2.10***

■

Problema 2.1.24 *Utilizar el* ***Problema 2.1.22*** *, la* ***Observación 2.1.16*** *y la* ***Definición 2.1.18*** *para probar que*

$$\bar{\Theta}_m(n) = \theta_{(m-1)(p-1)+1}(n) \quad \forall p, n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

esto es

$$\sum_{\mu_p^r(n)}{}_m \left[\frac{1}{k_r}\right] = \theta_{(m-1)(p-1)+1} \qquad .$$

Solución. *Primero, sabemos que*

$$\sum_{\mu_p^r(n)} \bar{\Theta}_0(k_r) = 1,$$

entonces utilizando la ***Observación 2.1.16****, esto es equivalente a*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[1,\theta_{p-1}(n)]} \Theta_0(k) = 1$$

Por lo tanto $\bar{\Theta}_0(n) = \theta_{2-p}(n)$.

Por otra parte, aplicando lo visto en el ***Problema 2.1.22*** *y la* ***Definición 2.1.18*** *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}_m(n) &= \sum_{\mu_p^r(n)}{}_m \bar{\Theta}_0(k_r) \\
&= \sum_{k=1}^{n}{}_{[m,\theta_{p-1}(n)]} \bar{\Theta}_0(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \theta_{m(p-1)}(k)\bar{\Theta}_0(n+1-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \theta_{m(p-1)}(k)\theta_{2-p}(n+1-k) \\
&= \theta_{(m-1)(p-1)+1}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

Problema 2.1.25 *Para cualquier $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{N}$ definimos lo siguiente:*

Definición 3c Para toda $z \in \mathbb{C}$ diremos que la función $\bar{\Theta}_z(n)$ está dada como

$\bar{\Theta}_z(n) = \theta_{(z-1)(p-1)+1}(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 3d Diremos que la función iterada de grado z sobre el operador $\sum_{\mu_p^r(n)}[\ ]$ de la función f , está dada por

$$\sum_{\mu_p^r(n)}{}_z f(k_r) = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_z(k_s) f(k_r) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando lo anterior, probar lo siguiente:

i)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_p}(k_p) = \bar{\Theta}_{x_1+\cdots+x_p+2-p}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C}$$

ii)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_p}(k_p) = \theta_{x_1+\cdots+x_p}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C}$$

iii)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) = f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

sí, y solo sí,

$x_1 + \cdots + x_{p-1} = 0 \quad y \quad x_1, ..., x_{p-1} \in \mathbb{C}$.

iv)

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) = f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

sí, y solo sí,

$$x_1 + \cdots + x_{p-1} = p - 2 \quad y \quad x_1, ..., x_{p-1} \in \mathbb{C}$$

Solución.

i) Sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \bar{\Theta}_{x_1}(k_1)\cdots\bar{\Theta}_{x_p}(k_p) &= \bar{\Theta}_{x_1}(n) * \cdots * \bar{\Theta}_{x_p}(n) \\ &= \theta_{(x_1-1)(p-1)}(n) * \cdots * \theta_{(x_1-1)(p-1)}(n) \\ &= \bar{\Theta}_{x_1+\cdots+x_p+2-p}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ii) Análogamente al inciso anterior

$$\begin{aligned} \sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_p}(k_p) &= \theta_{x_1} * \cdots * \theta_{x_p}(n) \\ &= \theta_{x_1+\cdots+x_p}(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

iii) Primero veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{k_1+\ldots+k_p=n+p-1} \theta_{x_1}(k_1)\cdots\theta_{x_{p-1}}(k_{p-1})f(k_p) &= \theta_{x_1}(n) * \cdots * \theta_{x_{p-1}}(n) * f(n) \\ &= \theta_{x_1+\cdots+x_p}(n) * f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

y como $\theta_w(n) * f(n) = f(n) \iff w = 0$ *, entonces se tiene lo pedido.*

■

Problema 2.1.26 *Sean $n, p \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ Demostrar que*

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=n+p} x^{k_r} \;+\; \sum_{s_1+\cdots+s_{n+1}=n+p} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{s_r} \;=\; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^p$$

Solución. *Sabemos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}\; x^k \;+\; \sum_{r=1}^{m}{}_{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^r \;=\; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \qquad \forall n, m \in \mathbb{N} \; y \; \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

*entonces por la **Observación 2.1.16** se tiene que*

$$\sum_{k_1+\cdots+k_{p+1}=n+p} x^{k_r} \;+\; \sum_{s_1+\cdots+s_{n+1}=n+p} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{s_r} \;=\; x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^p.$$

■

Problema 2.1.27 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$,entonces definamos las siguientes funciones:*

a) $x^{<m>}(n) = x^m \theta_m(n)$

b) $\rho_x^{<p>}(n) = \underbrace{\rho_x(n) * \cdots * \rho_x(n)}_{p-veces}$

donde,

$$\rho_x(n) = \sum_{k=1}^{n}{}_{-1} \frac{1}{(1-x)^k} = \frac{x^{1-\left[\frac{1}{n}\right]}}{(1-x)^n}$$

c) $\kappa_x^{<p>}(n) = \underbrace{\kappa_x(n) * \cdots * \kappa_x(n)}_{p-veces}$

donde,

$$\kappa_x(n) = x^{<1>}(n) * (-\rho_x(n)) = \frac{-x}{(1-x)^n}$$

Demostrar lo siguiente:

i) $x^{<m>}(n) * x^{<p>}(n) = x^{<m+p>}(n) \quad \forall m, p \in \mathbb{Z}$

ii)

$$\sum_{r=1}^{m} x^{<r>}(n) = \rho_x(n) * (x^{<1>}(n) - x^{<m+1>}(n)) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

iii)

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p} x^{<r>}(n) \;+\; \sum_{s=1}^{p}{}_{m} \kappa_x^{<s>}(n) = x^{<m>}(n) * \kappa_x^{<p>}(n)$$

iv)

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p} \theta_r(n) x^r \;+\; \sum_{s=1}^{p}{}_{m} \frac{\theta_s(n)}{x^{n-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^s = x^m \left(\frac{x}{x-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n}{}_{m} \frac{\theta_p(k)}{x^{k-1}}$$

v)

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,\theta_{r+z}(n)x^r \;+ \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\;\frac{\theta_s(k)}{x^{k-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^s = x^m\left(\frac{x}{x-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}{}_{m+z}\;\frac{\theta_p(k)}{x^{k-1}}$$

vi)

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\,\theta_{r+m}(n)x^{r+m} \;+ \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\sum_{r=1}^{m}{}_{s}\;\theta_r(n)x^r \;=$$

$$x^{2m}\left(\frac{x}{x-1}\right)^p\sum_{k=1}^{n}{}_{2m}\;\frac{\theta_p(k)}{x^{k-1}} \;-\; \sum_{s=1}^{p}{}_{2m}\;\frac{\theta_s(n)}{x^{n-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^s$$

Solución.

i) Es inmediato

$$\begin{aligned} x^{<m>}(n) * x^{<p>}(n) &= x^m\theta_m(n) * x^p\theta_p(n)\\ &= x^{m+p}\theta_{m+p}(n)\\ &= x^{<m+p>}(n) \quad \forall m,p\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

ii) Sea

$$S(n,m) = \sum_{r=1}^{m} x^{<r>}(n) \quad \Rightarrow \quad S(n,m)*(x^{<0>}(n)-x^{<1>}(n)) = x^{<1>}(n)-x^{<m+1>}(n)$$

Ahora, solo hace falta ver que $\rho(n) * (x^{<0>}(n) - x^{<1>}(n)) = \left[\frac{1}{n}\right]$.

Por el inciso b) sabemos que $\rho(n) = \theta_{-1}(n) * \frac{1}{(1-x)^n}$*, entonces se tiene que*

$$\begin{aligned} \rho(n) * (x^{<0>}(n) - x^{<1>}(n)) &= \theta_{-1}(n) * \frac{1}{(1-x)^n} * (x^{<0>}(n) - x^{<1>}(n))\\ &= \theta_{-1}(n) * \frac{1}{(1-x)^n} * (\theta_0(n) - x\theta_1(n))\\ &= \theta_{-1}(n) * \frac{1}{(1-x)^n} - \frac{x}{(1-x)^n}\\ &= \frac{x^{1-\left[\frac{1}{n}\right]}}{(1-x)^n} - \frac{x}{(1-x)^n} = \left[\frac{1}{n}\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\sum_{r=1}^{m} x^{<r>}(n) = \rho_x(n) * (x^{<1>}(n) - x^{<m+1>}(n))$$

iii) Aplicaremos inducción sobre p.
El caso $p = 1$ *es claro. Entonces, supongamos que la igualdad*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{<r>}(n) + \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\,\kappa_x^{<s>}(n) \;= \kappa_x^{<p>}(n) * x^{<m>}(n)$$

es cierta hasta alguna $p \in \mathbb{N}$.

Entonces aplicando el operador

$$\sum_{r=1}^{m}[\ \ ]$$

a ambos lados de la igualdad anterior y usando la ***Definición 1.1.4*** *obtenemos que*

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{<r>}(n)+\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{<s>}(n)=\kappa_x^{<p>}(n)*\sum_{r=1}^{m}x^{<r>}(n) \qquad (2.1)$$

y como

$$\sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{<s>}(n)=\sum_{s=1}^{p}\binom{(p+1-s)+r-2}{r-1}\kappa_x^{<s>}(n)$$

entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{<s>}(n) &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}\binom{(p+1-s)+r-2}{r-1}\kappa_x^{<s>}(n)\\ &= \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{m}\binom{(p+1-s)+r-2}{r-1}\kappa_x^{<s>}(n) \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}{}_{r}\, \kappa_x^{<s>}(n) &= \sum_{s=1}^{p}\binom{(p+1-s)+m-1}{m-1}\kappa_x^{<s>}(n)\\ &= \sum_{s=1}^{p}\binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s}\kappa_x^{<s>}(n) \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}\ y\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}.\end{aligned}$$

Así, sustituyendo lo anterior en (2.1) y utilizando la siguiente igualdad

$$\sum_{r=1}^{m}x^{<r>}(n)=\rho_x(n)*(x^{<1>}(n)-x^{<m+1>}(n))$$

obtenemos que,

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{<r>}(n)+\sum_{s=1}^{p}\binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s}\kappa_x^{<s>}(n)=\kappa_x^{<p>}(n)*(x^{<1>}(n)-x^{<m+1>}(n))$$

y como

$$\kappa_x^{<p>}(n)*\rho_x(n)*(x^{<1>}(n)-x^{<m+1>}(n))=\kappa_x^{<p+1>}(n)*x^{<m>}(n)-\kappa_x^{<p+1>}(n)$$

entonces se sigue que,

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{<r>}(n)+\sum_{s=1}^{p}\binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s}\kappa_x^{<s>}(n)=\kappa_x^{<p+1>}(n)*x^{<m>}(n)-\kappa_x^{<p+1>}(n).$$

Así que,

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p+1}\, x^{<r>}(n) \;+\; \sum_{s=1}^{p} \binom{(p+1)+m-s-1}{(p+1)-s} \kappa_x^{<s>}(n) + \kappa_x^{<p+1>}(n) = \kappa_x^{<p+1>}(n) * x^{<m>}(n)$$

y por lo tanto

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{<r>}(n) \;+\; \sum_{s=1}^{p+1}{}_{m}\, \kappa_x^{<s>}(n) = \kappa_x^{<p+1>}(n) * x^{<m>}(n) \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

iv) Por el inciso c) se tiene que

$$\kappa_x(n) = x^{<1>}(n) * (-\rho_x(n)) = \frac{-x}{(1-x)^n},$$

entonces

$$\kappa_x^{<p>}(n) = \frac{-x}{(1-x)^n} * \cdots * \frac{-x}{(1-x)^n} = \frac{(-x)^p \theta_p(n)}{(1-x)^{n+p-1}}.$$

Por otra parte, usando el inciso iii) sabemos que

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{<r>}(n) \;+\; \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \kappa_x^{<s>}(n) = \kappa_x^{<p>}(n) * x^{<m>}(n)$$

por lo tanto, sustituyendo el valor de $\kappa_x^{<p>}(n)$ en la igualdad anterior se tiene que

$$\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{<r>}(n) \;+\; \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \frac{(-x)^s \theta_s(n)}{(1-x)^{n+s-1}} = \frac{(-x)^p \theta_p(n)}{(1-x)^{n+p-1}} * x^{<m>}(n).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m}{}_{p}\, x^{<r>}(n) \;+\; \sum_{s=1}^{p}{}_{m}\, \frac{(-x)^s \theta_s(n)}{(1-x)^{n+s-1}} &= \frac{(-x)^p \theta_p(n)}{(1-x)^{n+p-1}} * x^{<m>}(n) \\
&= \left(\frac{x}{x-1}\right)^p \frac{\theta_p(n)}{(1-x)^{n-1}} * x^m \theta_m(n) \\
&= x^m \left(\frac{x}{x-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n}{}_{m}\, \frac{\theta_p(k)}{(1-x)^{k-1}}
\end{aligned}$$

con lo que concluimos la demostración.

v) Es inmediato aplicando el operador

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{z}\, [\ ]$$

a la igualdad del inciso iv).

vi) Basta con aplicar $z = m$ en el inciso anterior y la igualdad del inciso iv). ∎

2.2. Iteraciones respecto a una matriz triangular

Los resultados de esta sección son un caso muy particular de iteración del operador Suma sobre las funciones aritméticas, pues las iteraciones se realizarán respecto a una matriz y no sobre una función. El estudio de esto no es nada nuevo en el análisis combinatorio[1], pues la ventaja de asociar una matriz al operador Suma radica en que se heredan propiedades algebraicas, útiles en la demostración de los resultados de linealidad. Por lo tanto, nuestro principal objetivo es introducir de la forma más detallada posible, la notación y la definición de iterada de una función aritmética respecto a una matriz sobre el operador Suma y exponer la propiedad lineal en dichas iteraciones, mostrando así un enfoque alternativo a la manera usual. Para esto, centraremos el análisis sobre las matrices triangulares inferiores.

2.2.1. Conceptos algebraicos

Comencemos estudiando el caso que fue excluido en la **Observación 1.1.6**, esto es, cuando se tienen sumas de la forma

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(n,k).$$

La cuestión es, cómo relacionar este tipo de sumas a los resultados anteriores, pues si recordamos, todas las funciones que habíamos considerado eran elementos de $A(\mathbb{N})$ y f no sólo no pertenece al conjunto de funciones aritméticas, sino que al aplicarle el operador

$$\sum_{k=1}^{n}[\ ]$$

nuestras definiciones anteriores carecen de sentido, pues no son del todo aplicables. Entonces, con este propósito estudiaremos la relación natural que existe entre $A_2(\mathbb{N})$, $M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ y los conjuntos $M_{nxm}(\mathbb{C})\quad \forall n,m\in\mathbb{N}$.

Observación 2.2.1 *Veamos lo siguiente,*

i) La función

$$\begin{array}{rcl}\Phi:\ A_2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})\\ f(n,m) & \mapsto & [M_f]\end{array}$$

donde

$$[M_f]_n^m = f(n,m)\ \forall n,m\in\mathbb{N}$$

es una biyección de conjuntos.

[1]Una muy buena referencia al respecto es [1], no obstante, a que es muy frecuente encontrar esto en la literatura mediante el estudio de coeficientes universales, por ejemplo los números de Stirling, por mencionar algunos, la mayoría de los textos tratan el tema de invertibilidad respecto a ellos de una manera particular.

ii) Sea $TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \{M \in M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \mid M_n^m = 0 \ \ \forall n < m\}$ *el conjunto de matrices triangulares inferiores infinitas con entradas complejas. Entonces se tiene que la siguiente función biyectiva*

$$\begin{aligned} \Psi : M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) &\longrightarrow TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto T_M \end{aligned}$$

donde

$$[T_M]_n^m = \begin{cases} M_{n+1-m}^m & si\ n \geq m \\ 0 & si\ n < m \end{cases}$$

iii) Sea $\mathcal{T} = \{(T_n)_{n=1}^{\infty} : T_n \in TI_{nxn}(\mathbb{C})\ , [T_n]_k^r = [T_{n+1}]_k^r \quad 1 \leq r, k \leq n\}$ *y definamos la función*

$$\begin{aligned} \Xi : \quad \mathcal{T} &\longrightarrow TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) \\ S = (T_n)_{n=1}^{\infty} &\mapsto T \end{aligned}$$

definiendo

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n,$$

es una biyección.

iv) Para cualquier número natural w definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} \Pi_w : TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) &\longrightarrow TI_{wxw}(\mathbb{C}) \\ T &\mapsto T_w \end{aligned}$$

donde

$$[T_w]_p^q = [T]_p^q \quad 1 \leq p, q \leq w$$

Definición 2.2.2 *Sean* $T, S \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$*, entonces diremos que el producto de* T, S *es una matriz* U *definida como* $U = \lim_{w\to\infty} \Pi_w(T)\Pi_w(S)$ *y la denotaremos como* $U = T \circ S$.

Definición 2.2.3 *Sea* $T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$*, entonces diremos que* T *es invertirle sí , y sólo sí,* $\Pi_w(T)$ *es invertirle* $\forall w \in \mathbb{N}$. *Así,* $T^{-1} = \lim_{w\to\infty} \Pi_w^{-1}(T)$.

Por otro lado, definimos

$$ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \{T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C}) : T\, es\, invertible\}$$

Definición 2.2.4 *Sea* $T \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$*, entonces definimos a la matriz inducida por* T *como*

$$T^{\tau} = \Psi(\Psi^{-1}(T)^t)$$

Los conceptos anteriores son las bases para desarrollar de forma general las iteraciones sobre matrices, es muy común en la literatura que se den por inmediatos, pues surgen de forma natural de las propiedades de las matrices infinitas.

2.2.2. Definición de función iterada respecto a elementos de $ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ sobre el operador Suma

Análogamente, a lo hecho en la **Sección 1.2** veamos lo siguiente:

Definición 2.2.5 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de f respecto de la matriz triangular $T \in T_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ es una función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} T(n,k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} T(k_1,k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} T(k_{m-2},k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} T(k_{m-1},k_m) f(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[m,T)]} f(k).$$

Observación 2.2.6 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 respecto de $T \in ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ y denotaremos esto como*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[0,T)]} f(k) = f(n).$$

Definición 2.2.7 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m de f respecto de matriz triangular $T \in ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$*
$T(n,n) \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{k_1=1}^{n} T(n,k_1) \sum_{k_2=1}^{k_1} T(k_1,k_2) \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} T(k_{m-2},k_{m-1}) \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} T(k_{m-1},k_m) h(k_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,T)]} f(k).$$

Como se puede ver en esta definición se ha supuesto que *T(n,n)*≠0 y la respuesta es simple, ya que al asociar la matriz triangular T por la **Definición 2.2.3** tenemos que T es invertible sí, y sólo sí, sus entradas diagonales son distintas de cero, para este caso concreto, $T(n,n) \neq 0$ para cualquier número natural n. Así, la existencia de

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[-m,T)]} f(k)$$

depende de la matriz $T \in ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$.

Definición 2.2.8 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ y una matriz $T \in ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ tal que $T(n,n) \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos la siguiente función*

$$\vartheta^{T}_{p,n}(s,t) = [\Pi^{p}_{n}(T)]^{t}_{s}.$$

Teorema 2.2.9 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $p \in \mathbb{Z}$ y una matriz T tal que $T(n,n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{[p,T)]} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_{p,n}^{T}(n,k) f(k) \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Con este último resultado queda evidenciada la importancia de usar conceptos matriciales cuando se habla de iteraciones del operador suma sobre las funciones aritméticas, ya que cuando se está calculando el valor de una iterada de una función, en realidad, lo que se hace es resolver un sistema de ecuaciones lineales. Por lo tanto, salvo la Subsección 2.1.3, no debe sorprendernos que todo los estudiado anteriormente se puede adecuar y analizar en términos de los conceptos de esta sección.

Para finalizar, recordemos una generalización usual del producto de Cauchy en términos de esta sección.

Definición 2.2.10 *Para cualesquiera funciones $f, g \in A(\mathbb{N})$ definimos el producto (o convolución) respecto de la función $T \in ST_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$, como*

$$f(n) *^{T} g(n) = \sum_{k=1}^{n} T(n,k) f(k) g(n+1-k).$$

Las propiedades de este producto son diferentes a las propiedades del producto usual de Cauchy, ya que la asociatividad, la existencia de elemento neutro y la conmutatividad en $A(\mathbb{N})$ no se cumple en general, pues están determinadas por el elemento de $\Lambda_2(\mathbb{N})$ respecto al cual, se realiza la suma.

2.3. Iteraciones sobre conjuntos y su relación con matrices infinitas

Esta sección es un punto y aparte ya que estudiaremos un tipo de iteración distinta a la de secciones previas, seguiremos trabajando sobre el conjunto $A(\mathbb{N})$, pero la diferencia radicará en que modificaremos un poco el operador $\sum$. Como pudimos apreciar en la **2.1.3** es posible cambiar el conjunto sobre el que se realiza la suma, hasta el momento todo giraban en torno al comportamiento de los elementos de $A(\mathbb{N})$ cuando se les aplicaba el operador $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$. Ahora analizaremos el comportamiento de $A(\mathbb{N})$ sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$, esto es, cuando la suma se realiza sobre el conjunto de factores del número natural n. La idea es encontrar un punto de comparación entre ambos casos y sobre esta comparación mostrar el comportamiento general de este tipo de iteraciones. Concluiremos con el resultado de linealidad en términos de esta sección y mostraremos algunos ejemplos.

2.3.1. Conceptos de conjuntos ordenados y el operador Suma

Antes que nada, comenzaremos con unas observaciones necesarias para poder iniciar nuestro análisis.

Observación 2.3.1 *Sea* $P_F(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : 0 < |A| \ , \ |A| \in \mathbb{N}\}$ *el conjunto de subconjuntos finitos no vacíos del conjunto* $\mathbb{N}$.

(i)Entonces podemos notar que $\forall B \in P_F(\mathbb{N})$ *existe un conjunto* $C_B \in P_F(\mathbb{N})$ *tal que* $C_B = \{1, 2, ..., n_B\}$ *donde* $n_B = |B|$, *además como es usual sea* $S_{n_B} = S(C_B) = \{\varepsilon : C_B \to B \mid \varepsilon \quad es \quad biyectiva\}$.

(ii) Por otro lado, sí $A(P_F(\mathbb{N})) = \{k \mid k : P_F(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}\}$ *y*
$\Lambda_F(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \quad : \mathbb{N} \to P_F(\mathbb{N})\}$, *entonces* $f = \alpha \circ k \in A(\mathbb{N})$
para cada $\alpha \in \Lambda_F(\mathbb{N})$ *y* $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$.

Observación 2.3.2 *Para cualquier* $\gamma \in \Lambda(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})\}$ *se puede asociar una matriz infinita* $E_\gamma \in M_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ *definida como*
$E_\gamma = [\beta(n, m)]_{n \in \mathbb{N}}^{m \in \mathbb{N}}$ *tal que*

$$E_\gamma = \begin{cases} 1, & m \in A_n = \gamma(n) \ , \\ 0, & m \notin A_n = \gamma(n). \end{cases}$$

Definición 2.3.3 *Sean* $f \in A(\mathbb{N}), B \in P_F(\mathbb{N})$ *y* $\varepsilon \in S(C_B)$, *entonces diremos que la suma de la función f sobre el operador* $\sum_{p \in B} [\quad]$ *está dada por la igualdad*

$$\sum_{p \in B} f(p) = \sum_{k=1}^{n_B} f(\varepsilon(k)).$$

Ahora que ya contamos con las herramientas suficientes, empezaremos por comparar la relación que existe entre $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ y $\sum_{d|n} f(d)$. Recordemos que la función iterada de grado m de la función f, es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}} \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} f(k_m) \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotamos como

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m} f(k).$$

Ahora, el primer obstáculo que se nos presenta es modificar esta definición de tal forma que indique sobre que tipo de operador se realiza la suma, pero este problema ya se nos había presentado, cuando la suma se realizaba sobre el operador $\sum_{\mu_p^r(n)} [\ ]$. Por lo tanto, usando simple analogía se tiene lo siguiente.

Definición 2.3.4 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de la función f sobre el operador $\sum_{d|n}[\ ]$, es una función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|d_1} \cdots \sum_{d_{m-1}|d_{m-2}} \sum_{d_m|d_{m-1}} f(d_m) \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{d|n}{}_m f(d).$$

Definición 2.3.5 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m de la función f sobre el operador*

$$\sum_{d|n}[\ ],$$

es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|d_1} \cdots \sum_{d_{m-1}|d_{m-2}} \sum_{d_m|d_{m-1}} h(d_m) \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{d|n}{}_{-m} f(d).$$

Por tanto, nosotros podemos manipular todos los conceptos dados en secciones previas, para obtener varios resultados en estos nuevos términos, pero nuestro objetivo fundamental, es desarrollar una teoría general, estudiando la diferencia implícita que existe entre los operadores $\sum_{d|n}[\ ]$ y$\sum_{k=1}^{n}[\ ]$.

Primero, veamos que estos operadores tienen la misma naturaleza, ambos representan una suma cuando se aplican a los elementos del conjunto $A(\mathbb{N})$ para cada número natural n, con la diferencia que el conjunto finito de números naturales sobre el que se realiza la suma en cada caso es distinto, veamos esto a detalle.

Observación 2.3.6

(i)Cuando ocupamos el operador

$$\sum_{k=1}^{n}[\ ]\forall n \in \mathbb{N}$$

estamos asociando al operador $\sum$ una función

$$\beta \in \Lambda_F(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \to P_F(\mathbb{N})\},$$

es decir, le asociamos una sucesión de subconjuntos de números naturales tales que

$$\beta(n) = B_n = \{m \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq m \leq n\} \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n}[\ ]$$

como

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ].$$

Además, según la ***Observación 2.3.1*** *a cada $B_n = \beta(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n(p) = p$, ya que en este caso se tiene que $C_{B_n} = B_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si denotamos como $\leq$ al orden usual de los números Naturales, entonces $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo $\forall n \in \mathbb{N}$, esto último indica el orden en el que se tomarán a los elementos de $B_n = \beta(n)$ cuando se realice la suma.*

(ii)Análogamente al inciso anterior, cuando se utiliza el operador

$$\sum_{d|n} [\ ]\, \forall n \in \mathbb{N}$$

estamos asociando al operador $\sum$ a una función

$$\alpha \in \Lambda_F(\mathbb{N}) = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \to P_F(\mathbb{N})\}.$$

Esto es, le asociamos una sucesión de subconjuntos de números naturales tales que

$$\alpha(n) = A_n = \{d \in \mathbb{N} : d|n\}\, \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto, podemos escribir $\sum_{d|n}[\ ]\, \forall n \in \mathbb{N}$ como

$$\sum_{p \in A_n = \alpha(n)} [\ ]\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y según ***Observación 2.3.1*** *a cada $A_n = \alpha(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(A_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{A_n}, \leq) \to (A_n, \leq)$ es un isomorfismo $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Entonces, podemos asegurar que la diferencia fundamental que existe entre los operadores $\sum_{d|n}[\ ]$ y $\sum_{k=1}^{n}[\ ]$ surge porque en cada caso se asocia una función $\gamma \in \Lambda_F(\mathbb{N})$ diferente al operador $\sum$ además de una sucesión de isomorfismo $\varepsilon_n : (C_{D_n}, \leq) \to (D_n, \leq)$ (con el orden usual de $\mathbb{N}$) tales que $D_n = \gamma(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, sí aplicamos la **Definición 2.3.3** a cualquiera de los casos anteriores conservando la notación utilizada en ellos tenemos que, $\forall f \in A(\mathbb{N})$, para cada $B_n = \beta(n)$ y $\varepsilon_n \in S(B_n)$ la suma de la función f sobre el operador

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]\, \forall n \in \mathbb{N}$$

está dada por la igualdad

$$\sum_{p \in \beta(n)} f(p) = \sum_{k=1}^{m_{\beta(n)}} f(\varepsilon_n(k))$$

y con ayuda de ésta podemos definir una función $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ tal que

$$k(B_n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p).$$

Y por otra parte como la suma describe una función aritmética, entonces existe una función $g \in A(\mathbb{N})$ tal que

$$g(n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p).$$

Pero esto nos genera un problema, ya que cuando aplicábamos el operador

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

sobre el conjunto $A(\mathbb{N})$ obteníamos una única función $g \in A(\mathbb{N})$ y ahora también debemos de asociar una función $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ que tiene una naturaleza distinta a las funciones aritméticas. Sin embargo, esto no debería sorprendernos y menos causarnos algún conflicto puesto que la función $g \in A(\mathbb{N})$ y la función $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ denotan la misma suma

$$\sum_{p \in \beta(n)} f(p) = \sum_{k=1}^{m_{\beta(n)}} f(\varepsilon_n(k)) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto es claro, por la **Observación 2.3.1** se tiene que que $g = \beta \circ k \in A(\mathbb{N})$ donde $\beta \in \Lambda_F(\mathbb{N})$ y $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$.

Por lo tanto, reescribiendo lo anterior tenemos que para toda $f \in A(\mathbb{N})$ para cada $B_n = \beta(n)$ y $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tales que

$$\varepsilon_n : (C_{B_n}\ , \leq) \to (B_n\ , \leq)$$

es un isomorfismo, entonces la suma de la función f sobre el operador

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

define una función aritmética g dada por la igualdad

$$g(n) = \beta \circ k(n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)$$

donde $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ está dada como

$$k(B_n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.3.2. Definiciones

El análisis del apartado anterior nos permite visualizar el tipo de generalizaciones que haremos a continuación, éstas consistirán en asociar elementos del conjunto $\Lambda(P_F(\mathbb{N}))$ con el operador $\sum$ y sobre dichas asociaciones estableceremos nuevas definiciones. Nos vamos a restringir al conjunto

$$\Omega(P_F(\mathbb{N})) = \{\alpha \in \Lambda(P_F(\mathbb{N})) \;:\; \{1, n\} \subseteq \alpha(n) \subseteq \{1, ..., n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

ya que, según la **Observación 2.3.2** a cada $\alpha \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$ le podemos asociar una matriz triangular inferior infinita con entradas complejas y con ello podemos utilizar los resultados de la sección anterior. Primero, establezcamos la siguiente definición,

Definición 2.3.7 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo $\forall n \in \mathbb{N}$ con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces diremos que la suma de la función f sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ \ ]\, \forall n \in \mathbb{N}$$

es una función aritmética g definida por la igualdad

$$g(n) = \beta \circ k(n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)$$

donde $k \in A(P_F(\mathbb{N}))$ está dada por

$$k(B_n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Recordando que por la **Definición 2.3.3**, la igualdad

$$g(n) = \beta \circ k(n) = \sum_{p \in \beta(n)} f(p)$$

está definida como

$$\sum_{p \in \beta(n)} f(p) = \sum_{k=1}^{r} f(\varepsilon_n(k))$$

donde $r = |\beta(n)|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, vemos lo siguiente,

Definición 2.3.8 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ es un isomorfismo con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces definimos la función $\hat{f}$ como*

$$\hat{f}(p) = f(\varepsilon_n(r + 1 - k)) \quad \forall p \in B_n\,,\, p = f(\varepsilon_n(k))$$

donde $r = |\beta(n)| \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Así, utilizando lo anterior se tiene que:

Definición 2.3.9 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ se asocia una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \rightarrow (B_n, \leq)$ es un isomorfismo con el orden usual de $\mathbb{N}$. Entonces $\forall m \in \mathbb{N}$ diremos que la función iterada de grado m de la función f sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{p_1 \in \beta(n)} \sum_{p_2 \in \beta(p_1)} \cdots \sum_{p_{m-1} \in \beta(p_{m-2})} \sum_{p_m \in \beta(p_{m-1})} f(p_m)\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{p \in \beta(n)}{}_m f(p).$$

Observación 2.3.10 *Sea $f \in A(\mathbb{N})$, entonces diremos que f es su función iterada de grado 0 sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

y denotaremos esto como

$$f(n) = \sum_{p \in \beta(n)}{}_0 f(p).$$

Análogamente,

Definición 2.3.11 *Sean $f \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ le asociamos una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \rightarrow (B_n, \leq)$ es un isomorfismo con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces $\forall m \in \mathbb{N}$ diremos que la función iterada dual de grado m de la función f sobre el operador*

$$\sum_{p \in B_n = \beta(n)} [\ ]$$

es una función aritmética h tal que

$$f(n) = \sum_{p_1 \in \beta(n)} \sum_{p_2 \in \beta(p_1)} \cdots \sum_{p_{m-1} \in \beta(p_{m-2})} \sum_{p_m \in \beta(p_{m-1})} h(p_m)\, \forall n \in \mathbb{N}$$

y la denotaremos como

$$\sum_{p \in \beta(n)}{}_{-m} f(p).$$

Ahora daremos la definición el producto de Cauchy en términos de esta sección.

Definición 2.3.12 *Sean $f, g \in A(\mathbb{N})$ y $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. Además, a cada $B_n = \beta(n)$ se asocia una función $\varepsilon_n \in S(B_n)$ tal que $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \rightarrow (B_n, \leq)$ es un isomorfismo con el orden usual de $\mathbb{N}$, entonces definimos el producto o convolución de Cauchy de las funciones aritméticas f y g como*

$$f * g(n) = \sum_{p \in \beta(n)} \hat{f}_n(p) g(p) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cabe mencionar que este producto es conmutativo por su definición.

Definición 2.3.13 *Sean* $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ *y* $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. *Además, a cada* $B_n = \beta(n)$ *le asocia una función* $\varepsilon_n \in S(B_n)$ *tal que* $\varepsilon_n : (C_{B_n}, \leq) \to (B_n, \leq)$ *es un isomorfismo* $\forall n \in \mathbb{N}$ *con el orden usual de* $\mathbb{N}$, *y consideremos la matriz* $T_\beta = [\theta(n,m)]_{n\in\mathbb{N}}^{m\in\mathbb{N}}$

$$\theta(n,m) = \begin{cases} 1, & m \in B_n = \beta(n)\ , \\ 0, & m \notin B_n = \beta(n). \end{cases}$$

Entonces definimos la siguiente función;

$$\varrho_p^{T_\beta}(s,t) = [\Pi_n^p(T_\beta)]_s^t \qquad \forall s,t \in \mathbb{N}.$$

Para finalizar la sección no queda más que dar el resultado de linealidad respecto a la iteración sobre las funciones aritméticas, como se puede ver este es un caso particular del **Teorema 2.2.9** en cuanto a la forma de obtener la función que hace posible la linealidad pues su representación matricial coincide con la vista en la sección anterior, es claro que la diferencia estriba en la elección del orden del que se provee al conjunto sobre el que se realiza la suma, de ahí que los productos de Cauchy definidos en ambos casos sean tan distintos en cuanto a sus propiedades.

Teorema 2.3.14 *Sean* $f \in A(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ *y* $\beta \in \Omega(P_F(\mathbb{N}))$. *Entonces se tiene que*

$$\sum_{p\in\beta(n)}{}_q f(k) = \sum_{k=1}^{n} \varrho_q^{T_\beta}(n,k) f(k).$$

Demostración. Se sigue del Teorema 2.2.9. ■

Con este resultado terminamos el estudio la propiedad lineal en la iteración del operador Suma sobre las funciones aritméticas, como se pudo observar elegimos hacer un estudio de la propiedad de una forma detallada y elemental pero sistematizada, sobra decir que su aplicación es diversa, sin embargo, nos limitamos a exponer algunos ejemplos debido a que el objetivo principal fue mostrar sus bases teórica, no obstante, su importancia se hace presente, ya que sólo basta una identidad finita que involucre sumas de funciones aritméticas y un poco de imaginación en las iteraciones.

2.3.3. Ejemplos

Los ejemplos de esta sección simplemente son puestos como referencia, es rutina reescribirlos en términos de las secciones anteriores.

Ejemplo 2.3.15 *Sea $T_w(n,k) = \binom{n}{k}$ la matriz triangular usual del binomio, demostrar lo siguiente;*

(i)

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{[m,T_w)]}\, g(k) = \sum_{k=0}^{n} \beta_m(n,k) g(n-k) \qquad \forall g \in A(\mathbb{N})$$

donde

$$\beta_m(n,k) = \begin{cases} \binom{n}{k} m^k, & m \neq 0 \ , \\ \left[\frac{1}{k+1}\right], & m = 0. \end{cases}$$

(ii) Sean f , g , h y p funciones tales que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) = h(n) \quad y \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k) = p(n)$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)p(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k)h(n-k) \quad \forall n \geq 0.$$

Concluir que $(f *^{T_w} g) *^{T_w} h = f *^{T_w} (g *^{T_w} h) \quad \forall f, g, h$

*(iii)Primero extendemos la función dada en el inciso **(i)** de la siguiente forma*

$$\beta_z(n,k) = \begin{cases} \binom{n}{k} z^k, & \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ , \\ \left[\frac{1}{k+1}\right], & z = 0. \end{cases}$$

Ahora definimos lo siguiente

Definición 4a . *Sea $z \in \mathbb{C}$, diremos que la función iterada de grado z de g respecto de la función $f(n,k) = \binom{n}{k}$, es una función aritmética h tal que*

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z(k) g(n-k)$$

donde

$$z(k) = \begin{cases} z^k, & \forall z \neq 0 \ , \\ \left[\frac{1}{k+1}\right], & z = 0. \end{cases}$$

y la denotaremos como

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n}{}_{[z,T_w]} g(k)$$

Utilizar lo anterior para comprobar que.

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{[x,T_w)]}\, y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n \qquad \forall x, y \in \mathbb{C} \ , \ \forall n \geq 0$$

Ejemplo 2.3.16 *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ es su descomposición prima.*
(i) Como es usual, sea $\delta_z(n) = \theta_z(m_1) \cdots \theta_z(m_r)$ la generalización usual de la función de los divisores de un número natural. Demostrar que

$$\sum_{d|n}{}_m f(n) = \sum_{d|n} \delta_m(d) f(n/d) \quad \forall f \in A(\mathbb{N}) \quad m \in \mathbb{Z} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Ahora, utilizaremos la extensión compleja de la función divisor para establecer lo siguiente
Definición 4b. *Sea $f \in A(\mathbb{N})$ y $z \in \mathbb{C}$. Diremos que la función iterada de grado o z de la función f sobre el operador*

$$\sum_{d|n}[\ ]$$

es una función aritmética h tal que

$$h(n) = \sum_{d|n} \delta_z(d) f(n/d)$$

y la denotaremos como

$$h(n) = \sum_{d|n}{}_z f(d).$$

Demostrar que

$$\sum_{d|n}{}_z \Lambda(d) = \frac{-\delta_z(n)}{z} \log(n) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 2.3.17 *Demostrar que son equivalentes lo siguientes enunciados*
(i)

$$f *^{T_h} g(n) = g *^{T_h} f(n) \quad \forall f, g \in A(\mathbb{N}) \quad .$$

(ii)

$$T_h(n,k) = T_h(n, n-k) \quad 1 \le k \le n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad T_h \in TI_{\mathbb{N}x\mathbb{N}}.$$

Ejemplo 2.3.18
(i)Sean $g, f_1, \cdots, f_m \in A(\mathbb{N} \cup \{0\})$ tales que

$$g(n) = \sum_{k_1=0}^{n} \binom{n}{n-k_1} f_1(k_1) \sum_{k_2=0}^{k_1} \binom{k_1}{k_1-k_2} f_2(k_2) \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_{m-1}=0}^{k_{m-2}} \binom{k_{m-2}}{k_{m-2}-k_{m-1}} f_{m-1}(k_{m-1}) \sum_{k_m=0}^{k_{m-1}} \binom{k_{m-1}}{k_{m-1}-k_m} f_m(k_m)$$

Entonces se tiene que

$$g(n) = \sum_{k_1+\cdots k_m=n} \binom{n}{k_1, \cdots, k_m} f_1(k_{r_1}) \cdots f_m(k_{r_m})$$
$$\forall m \in \mathbb{N}\, n \ge 0 \quad 0 \le r_k \le n \ \ r_i \ne r_j \ \ 1 \le i, j, k \le m.$$

(ii)Sea $H \in \Lambda_m(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \{g \mid g : (\mathbb{N} \cup \{0\})^m \to \mathbb{C}\}$
y de notaremos a la suma

$$\sum_{k_1+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \cdots, k_m} h(k_{r_1}, ..., k_{r_s})$$

como

$$\sum_{\gamma_m^{r_1,\ldots,r_s}(n)} h(k_{r_1}, ..., k_{r_s})$$

esto es ,

$$\sum_{\gamma_m^{r_1,\ldots,r_s}(n)} h(k_{r_1}, ..., k_{r_s}) = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \cdots, k_m} h(k_{r_1}, ..., k_{r_s}) \quad \forall m \in \mathbb{N} \;\; n \geq 0. \;\; 1 \leq s \leq m$$

y utilizando ésta notación tenemos las siguientes definiciones
Definición 4c.*Sean $h \in A(\mathbb{N} \cup \{0\})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado p sobre el operador*

$$\sum_{\gamma_p^r(n)} [\ ]$$

de h, es una función aritmética g tal que

$$g(n) = \sum_{\gamma_m^{r_1}(n)} \sum_{\gamma_m^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\gamma_m^{r_{p-1}}(k_{p-2})} \sum_{\gamma_m^{r_p}(k_{r_{p-1}})} h(k_p) \, \forall n \geq 0$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\gamma_m^r(n)} {}_p \;\; h(k_r).$$

Como es usual, diremos que h es su función iterada de grado 0 sobre el operador

$$\sum_{\gamma_p^r(n)} [\ ]$$

y denotaremos esto como

$$h(n) = \sum_{\gamma_m^r(n)} {}_0 \;\; h(k_r) \, \forall n \geq 0.$$

Definición 4d. *Sean $h \in A(\mathbb{N} \cup \{0\})$ y $p \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado -p sobre el operador*

$$\sum_{\gamma_p^r(n)} [\ ]$$

de h, es una función aritmética g tal que

$$h(n) = \sum_{\gamma_m^{r_1}(n)} \sum_{\gamma_m^{r_2}(k_{r_1})} \cdots \sum_{\gamma_m^{r_{p-1}}(k_{p-2})} \sum_{\gamma_m^{r_p}(k_{r_{p-1}})} g(k_{r_p}) \, \forall n \geq 0$$

y la denotaremos como

$$\sum_{\gamma_m^r(n)} {}_{-p} \;\; h(k_r).$$

Para finalizar, daremos las siguientes definiciones;

Definición 4e. *Sean* $n \geq 0 \;\; m \in \mathbb{N} \;\;,\;\; p \in \mathbb{Z}$. *Entonces definimos la siguiente función*

$$\bar{B}_p(n) = \sum_{\gamma_m^r(n)} {}_p \left[\frac{1}{k+1} \right]$$

a) Utilizar lo anterior para demostrar lo siguiente; $\forall h \in \Lambda(\mathbb{N} \cup \{0\})$ *se tiene que*

$$\sum_{\gamma_m^r(n)} {}_p \; h(k_r) = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \cdots, k_m} \bar{B}_p(k_s) h(k_r) \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}, n \geq 0$$

b) Demostrar el teorema del multinomial:

$$\sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \binom{n}{k_1, \cdots, k_p} x_1(k_1) \cdots x_p(k_p) = x_1 + \cdots + x_p(n) \qquad \forall n \geq 0 \;,\; \forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{C}$$

donde

$$x_r(k_r) = \begin{cases} x_r^{k_r}, & \forall x_r \neq 0 \;, \\ \left[\frac{1}{1+k_r} \right], & x_r = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.19 *Supongamos que*

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+m-1}{k-1} g(k) = \binom{n+m}{n} f(n) \; - \; \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} h(m,r) k^{r-1} f(k) \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

donde $h(m,r) = \frac{(-1)^{m+r} \underline{s}(m,r)}{(m-1)!}$ *y* $\underline{s}(m,r)$ *son los Números de Stirling de primera especie.*

Usando lo anterior se deduce que

(i)

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} h(m,r) k^r = m \binom{n+m}{n-1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^{m+r} \underline{s}(m,r) = m! \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2.3.20 *Demostrar que*

i)

$$\sum_{r=1}^{m} h(m,r)n^r = m\theta_{m+1}(n) \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

ii)

$$\sum_{r=1}^{m}(-1)^{m+r}\underline{s}(m,r)n^r = m!\binom{n+m-1}{n-1} \qquad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

iii)

$$\sum_{r=1}^{p} g(p,r)\theta_r(n) = n^p - (n-1)^p \quad \forall p,n,m \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2.3.21 *Supongamos que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-n}\ f(k) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar $\forall 1 \leq m < n$ *que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m-n}\ g(k) = p(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\theta_m(n+1-k)f(k) = p(n).$$

Ejemplo 2.3.22 *Suponer que*

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-n}\ x^k = (x-1)^n - (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{C}b.$$

Demostrar que

i)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{1-n}\ x^k = x(x-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in \mathbb{C}$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{-n}\ 1 = \theta_{1-n}(n) = (-1)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2.3.23 *Demostrar que*

i)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m}(-1)^k\theta_{m+z-k}(k) = (-1)^n\theta_{z-n}(n) \ \forall n,m \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n}{}_{m-n}\ x^k + \sum_{r=1}^{m}\theta_{m+1-n-r}(n)\left(\frac{x}{x-1}\right)^r = ((x-1)^n - (-1)^n)\left(\frac{x}{x-1}\right)^m \forall n,m \in \mathbb{N}, \forall x \neq 0,1.$$

Ejemplo 2.3.24 *Demostrar lo siguiente:*

i)

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k+p-2}{k+p-1}=\binom{m+n+p-1}{n+p-1}-\binom{m+p-1}{p-1}$$

ii)

$$\prod_{r=0}^{m}\sum_{k_r=1}^{n_r}\binom{k_0+\cdots+k_m-2}{k_0-1}=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\sum_{j=1}^{\binom{m}{r}}\binom{m+n-1+n_1+\cdots+n_m-SC_m(r,j)}{m+n-1}$$

donde $n_0=n$ y $SC_m(r,j)$ es la suma de una combinación de las $n_1,...,n_m$ en grupos de r elementos.

iii)

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{r=1}^{m}\sum_{k_r=1}^{n_r}\theta_p(n+1-k)\binom{k+k_1\cdots+k_m-2}{k-1}=$$

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\sum_{j=1}^{\binom{m}{r}}\binom{p+m+n-1+n_1+\cdots+n_m-S_m(r,j)}{m+n-1}-$$

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\sum_{j=1}^{\binom{m}{r}}\sum_{k=1}^{p}\binom{n+p-k-1}{n-1}\binom{m+k-1+n_1+\cdots+n_m-S_m(r,j)}{m-1}$$

(iv)

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{r=1}^{m}\sum_{k_r=1}^{n_r}\binom{n+k_1+\cdots+k_m-k-1}{n-k}f(k)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\sum_{j=1}^{\binom{m}{r}}\binom{n_1+\cdots+n_m-S_m(r,j)+m+n-k-1}{n-k}f(k)$$

Ejemplo 2.3.25 *Sean $\mathbb{S} \neq \varnothing$ un conjunto finito. Y consideremos el conjunto de funciones con valores complejas definidas en $\mathbb{S}$ tal que $f \in A(\mathbb{S}) = \{f | f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}\}$. Como es usual, definamos las iteradas respecto a sus subconjuntos:*

Definición 4c *Sea $f \in A(\mathbb{S})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada de grado m de la función f sobre el operador*

$$\sum_{B \subset \mathbb{S}} [\ ],$$

es una función h tal que

$$h(\mathbb{S}) = \sum_{B_1 \subset \mathbb{S}} \sum_{B_2 \subset B_1} \cdots \sum_{B_{m-1} \subset B_{m-2}} \sum_{B_m \subset B_{m-1}} f(B_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{B \subset \mathbb{S}}{}_{m} f(B).$$

Definición 4d *Sea $f \in A(\mathbb{S})$ y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que la función iterada dual de grado m de la función f sobre el operador*

$$\sum_{B \subset \mathbb{S}} [\ ],$$

es una función h tal que

$$f(\mathbb{S}) = \sum_{B_1 \subset \mathbb{S}} \sum_{B_2 \subset B_1} \cdots \sum_{B_{m-1} \subset B_{m-2}} \sum_{B_m \subset B_{m-1}} h(B_m)$$

y la denotaremos como

$$\sum_{B \subset \mathbb{S}}{}_{-m} f(B).$$

Demostrar que

$$\sum_{B \subset \mathbb{S}}{}_{m} f(B) = \sum_{B \subset \mathbb{S}} \iota_m(B) f(\mathbb{S} \setminus B)$$

donde

$$\iota_m(B) = \begin{cases} m^{|B|}, & m \neq 0\ , \\ \left[\frac{1}{|B|+1}\right], & m = 0. \end{cases}$$

Capítulo 3

Conclusiones finales

La propiedad lineal en la iteración del operador suma sobre las funciones aritméticas es una herramienta tan útil en el análisis combinatorio que nos pareció necesario el desarrollarla de forma sistematizada, es claro que la manera de abordar dicha propiedad hizo presente la originalidad y la importancia de este trabajo pues como se puede concluir, al adoptar el concepto de iterada e iterada dual de una función aritmética sobre el operador suma con la notación presentada, logramos mostrar identidades finitas que no habían sido estudiadas antes y que resultan ser identidades inmediatas de la propiedad lineal en la iteración. Es sorprendente que pese al gran desarrollo que tuvo el análisis combinatorio a finales del siglo pasado, aún no hay una universalidad en las notaciones que se emplean para describir diversos conceptos del análisis combinatorio, un buen ejemplo de esto es la generalización compleja de los factoriales, ya que existen diversos símbolos que denotan lo mismo, lo cual pareciera que no tiene mayor relevancia matemática, sin embargo el convenir notaciones adecuadas siempre facilitan el desarrollo de los conceptos matemáticos y aunque no fuera el objetivo principal de esta tesis, abordamos este hecho de una forma implícita cuando se desarrolló la notación que empleamos para denotar a las funciones iteradas. Por lo tanto, el mérito de este trabajo no solo es el estudio de la propiedad en cuestión, sino que de igual forma es una invitación a la reflexión de la forma de hacer matemática.

Bibliografía

[1] Martin Aigner. *A course in enumeration*, volume 238. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Kenneth P Bogart. *Introductory combinatorics.* Saunders College Publishing, 1989.

[3] Louis Comtet. *Analyse combinatoire: Vol.: 1.* Presses Universitaires de France, 1970.

[4] K Ribnikov. Análisis combinatorio. 1988.

[5] Konstantin Ríbnikov. *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios.* 1989.

[6] Kenneth H Rosen. Handbook of discrete and combinatorial mathematics. 2000.

[7] Gian-Carlo Rota and P Doubilet. *Finite operator calculus.* Academic Press, 1975.