



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMA DE PROCESAMIENTO
DE DATOS EN TOMOGRAFÍA
ÓPTICA DE TIEMPO REAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA

GUSTAVO PACHECO GUEVARA

DIRECTOR DEL TRABAJO:

DR. YEVGENIY KOLOKOLTSEV



Ciudad Universitaria, CD.MX. mayo 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi tutor, el Dr. Yevgeniy Kolokoltsev, por guiarme a lo largo de esta investigación y por todos los conocimientos compartidos durante este periodo de trabajo.

A los miembros del jurado: Dr. Víctor Manuel Velázquez, Dr. Pablo Luis Rendón, Dr. Miguel Moctezuma y Dr. Francisco Javier García; por el interés en mi trabajo, el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis, y sus comentarios al respecto.

A mis padres, por el apoyo incondicional y por haberme brindado las herramientas que me han permitido llegar a este punto.

Esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM TA101216 "Sistema de Procesamiento de datos en Tomografía Óptica de Tiempo Real". Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida.

Contenido

1. Introducción	2
2. Fundamentos teóricos	5
2.1. Preliminares	5
2.1.1. Interferencia y coherencia	5
2.1.2. Teorema de Wiener-Khinchin	9
2.2. Arreglo de SSOCT	11
2.3. DDL-SSOCT	16
3. Métodos	23
4. La transformada fraccional de Fourier	30
4.1. Fundamentos matemáticos	31
4.2. Cálculo de la FrFT	38
5. Resultados	41
5.1. Separación y estimación de parámetros de chirps	41
5.2. Determinación de retrasos temporales en superposiciones discretas	45
5.3. Deconvolución	50
6. Conclusiones	56
Referencias	58

1 Introducción

La tomografía de coherencia óptica (OCT, por sus siglas en inglés), es una técnica de formación de imágenes volumétricas basada en interferometría [1], la cual fue introducida a finales de los años 80s. Se aplica en muestras semi-transparentes (como tejidos biológicos) y, en particular, es un método atractivo para estudios no invasivos en medicina. La observación de la microestructura de tejidos in situ actualmente se utiliza en biopsia óptica, oftalmología, etc. Como tal, ésta técnica se aplica en situaciones clínicas donde la extracción del tejido es imposible o peligrosa [2, 3]. Se calcula que actualmente cada año, a nivel mundial, se realizan entre 30 y 40 millones de procedimientos de tomografía de coherencia óptica [4].

Cuando los fotones provenientes de la fuente inciden sobre la muestra a analizar, éstos serán reflejados (régimen de reflexión) o dispersados (régimen de transmisión) de forma diferente, dependiendo de heterogeneidad de las propiedades ópticas en el volumen de la muestra. Los tiempos de retraso de los fotones reflejados o dispersados en diferentes profundidades de la muestra son extremadamente cortos. Por ejemplo, medir una estructura con resolución de escala de $10\mu\text{m}$ requiere un tiempo de resolución de aproximadamente 30fs [2, 4, 5]. Es imposible medir directamente tiempos tan cortos. Es por esto que todas las técnicas de OCT requieren mediciones basadas en interferometría. [2, 4].

Las técnicas de OCT se dividen en dos grupos: TDOCT (OCT en dominio temporal) y FDOCT (OCT en dominio de frecuencias). En TDOCT se usa una fuente de luz de banda ancha (por ejemplo un diodo superluminiscente o un láser de pulsos ultracortos) y se cambia mecánicamente el camino óptico del brazo de referencia de un interferómetro. Así, se mueve

el patrón de interferencia. El movimiento mecánico tiene ciertas limitaciones, lo cual afecta la velocidad de formación de la imagen [6, 7]. FDOCT se basa en la adquisición del patrón de interferencia como una función del número de onda k (en la región espectral). Aquí, se hacen interferir fotones de la misma frecuencia y el brazo de referencia se mantiene fijo. Cuando se utiliza una fuente con longitud de onda variable y ancho de banda instantáneo fino (Swept Source OCT, o SSOCT por sus siglas), el límite de la velocidad de adquisición está relacionado con rapidez del escaneo. Actualmente, ambas técnicas en dominio de frecuencias tienen velocidades comparables y permiten la formación de imágenes 3D en tiempo real (24 fps) [7, 8]

En este trabajo, nos enfocamos en la construcción de las imágenes que pueden ser obtenidas mediante la técnica SSOCT. Entre los problemas principales de SSOCT se encuentra una profundidad de escaneo reducida debido a la longitud de coherencia de la fuente (2 - 6 mm), la cual no puede ser grande debido a la variación continua de la longitud de onda del láser. Si la diferencia en camino óptico entre el haz reflejado por la muestra y el de referencia es mayor que la longitud de coherencia de la fuente, los efectos de interferencia no se presentarán. El problema de la disminución en el alcance en profundidad debido a las características de coherencia de la fuente permanece relativamente abierto hasta la fecha.

En 2016, se publicó un artículo producto de la investigación del grupo de fotónica de microondas del CCADET [9], en el cual se introduce una modificación al arreglo de SSOCT. Dicho arreglo, que a continuación se describirá detalladamente, permite superar el límite en alcance de profundidad de la técnica. Sin embargo, se altera la forma de la señal de interferencia, por lo cual es necesario desarrollar un nuevo algoritmo de procesamiento de los datos. En el trabajo [9] se resuelve el problema del procesamiento mediante la introducción de un espejo controlado por un piezoactuador, lo cual reduce la velocidad de adquisición a la mitad.

En este trabajo se propone un método de procesamiento de la señal de SSOCT producto del arreglo descrito en [9], el cual está basado en la transformada fraccional de Fourier. Dicho método es aplicable en tiempo real y elimina la necesidad del espejo adicional. El

procedimiento se puede descomponer en aplicaciones del algoritmo FFT, para el cual existen implementaciones en dispositivos con arquitectura paralela (como una tarjeta de vídeo o una matriz de puertas programables - FPGA). Las pruebas realizadas en el presente trabajo han mostrado resultados favorables al separar y extraer información de la señal analógica descrita en [9], por lo cual se puede esperar en el futuro su aplicación exitosa en la instalación experimental que se tiene en CCADET.

2 Fundamentos teóricos

2.1. Preliminares

En esta sección se abordarán los conceptos básicos de la interferometría, los cuales son necesarios para realizar la descripción del principio de funcionamiento del sistema SSOCT.

2.1.1. Interferencia y coherencia

Como se ha mencionado anteriormente, en la tomografía de coherencia óptica se utiliza el efecto de interferencia. Esta sección está dedicada a la descripción de las leyes de interferencia y el concepto de coherencia temporal mutua. Este tratamiento se basa en el desarrollo presentado en los textos de Mandel, Wolf y Born. [10, 11]

Considérese la señal compleja $E(t)$, la cual representa la dependencia temporal del campo eléctrico de un haz de luz. Considérese también que dicho haz es cuasi-monocromático; en otras palabras, su ancho de banda es pequeño comparado con la frecuencia media¹:

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1 \quad (2-1)$$

En la Figura **2-1** se muestra un esquema que describe el experimento de interferencia de Young, el cual consiste de una fuente \mathcal{F} , una pantalla \mathcal{A} con dos agujeros separados por una distancia a y una segunda pantalla a una distancia d de la primera.

¹Esta consideración es válida, ya que el ancho de banda instantáneo de la fuente de barrido es pequeño

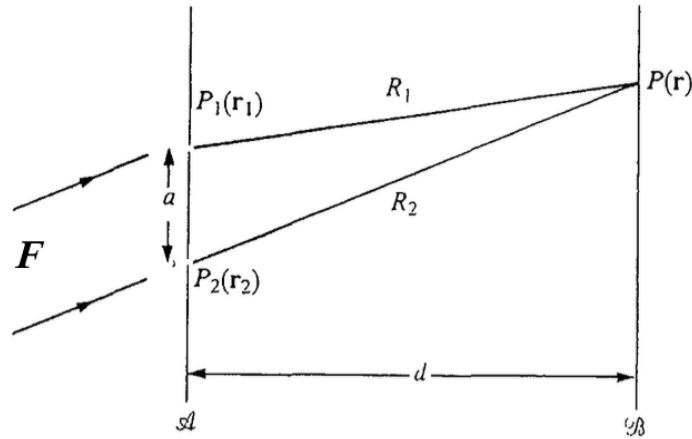


Figura 2-1: Esquema del experimento de interferencia de Young

En el experimento se observa la intensidad de la superposición de los dos haces. La amplitud total en un tiempo t será [10, 11, 12]

$$E(t) = E_1(t - t_1) + E_2(t - t_2) \quad (2-2)$$

donde $t_1 = R_1/c$ y $t_2 = R_2/c$; esto es, el tiempo que le toma a la luz llegar de P_1 y P_2 al punto P donde se detecta la suma de magnitudes. La intensidad instantánea de la superposición está dada por:

$$I(t) = E^*(t)E(t) = |E|^2 \quad (2-3)$$

Al igual que el ojo humano, los fotodetectores que miden la intensidad tienen tiempos de respuesta largos comparados con el periodo promedio de oscilaciones de $I(t)$; éstos actúan como integradores. Por esto, la señal saliente de un fotodetector corresponde a la intensidad promedio $\langle I \rangle$, donde $\langle \rangle$ representa el promedio temporal en un tiempo T mucho mayor que el periodo de oscilación:

$$\langle I \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \quad (2-4)$$

Considerando $E(t)$ como un proceso estacionario, los promedios temporales serán independientes de la elección de tiempo de origen. Asimismo, se redefine el tiempo de origen como $t = t - t_1$ y de esta forma, se expresa el campo total como

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t + \tau) \quad (2-5)$$

donde τ es el retraso temporal relativo entre los haces generados en el punto 1 y el punto 2, producto de la diferencia en camino óptico $\Delta z = R_1 - R_2$. La intensidad promedio detectada será

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \langle (E_1^*(t) + E_2^*(t + \tau)) (E_1(t) + E_2(t + \tau)) \rangle \\ &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 2\text{Re}\{\langle E_1^*(t)E_2(t + \tau) \rangle\} \\ &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 2\text{Re}\{\Gamma_{12}(\tau)\} \end{aligned}$$

Donde $\Gamma_{12}(\tau)$ es la función de correlación o función de coherencia entre los dos campos E_1 y E_2 , la cual depende de la diferencia en camino óptico:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1^*(t)E_2(t + \tau) \rangle \quad (2-6)$$

La función de correlación $\Gamma_{ij}(\tau)$ es la función de autocorrelación cuando $i = j$. La función de autocorrelación tiene un máximo global cuando $\tau = 0$; en este caso $\Gamma_{ii}(0) = \langle E_i^*(t)E_i(t) \rangle = \bar{I}$. Además, esto implica que

$$|\Gamma_{12}(\tau)|^2 \leq \Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0) \quad (2-7)$$

Usando lo anterior, se define el grado de coherencia (normalizado) de la siguiente forma:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2-8)$$

Cuando $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$, las señales $E_1(t)$ y $E_2(t + \tau)$ cambian aleatoriamente en el tiempo de forma independiente. En este caso, se dice que son mutuamente incoherentes, y no se observa ningún patrón de interferencia producto de su superposición.

Cuando $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$ se dice que las señales son completamente coherentes; i.e. existe una correlación absoluta entre $E_1(t)$ y $E_2(t + \tau)$.

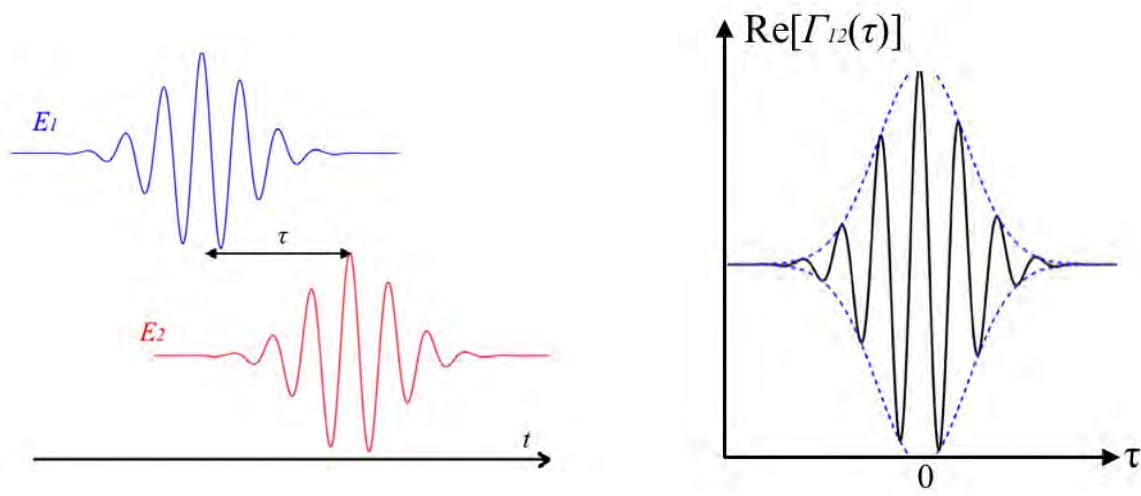


Figura 2-2: Izquierda: E_1 y E_2 con un retraso temporal τ . Derecha: parte real de la función de correlación de E_1 y E_2 . Conforme incrementa el tiempo de retraso, el grado de correlación disminuye.

La intensidad promedio de la superposición se expresa como

$$\bar{I} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \quad (2-9)$$

De esta forma se observa que la magnitud del grado de coherencia determinará la intensidad de los efectos de interferencia producidos por la superposición de dos haces.

De forma explícita, la dependencia temporal de una fuente cuasi-monocromática se puede expresar analíticamente como

$$E(t) = |E_0| \exp [j(\phi(t) - 2\pi\nu_0 t)] \quad (2-10)$$

Donde $\phi(t)$ es una fase aleatoria y ν_0 la frecuencia central de la fuente.

Para una fuente de este tipo, la interferencia producida por la superposición de los dos haces divididos será [10, 13]:

$$\bar{I} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[2\pi\nu_0 \tau - \alpha] \quad (2-11)$$

donde α es una fase constante. A continuación, mediante el teorema de Wiener-Khinchin, se explora la relación entre la forma del grado de coherencia y las características espectrales de la fuente.

2.1.2. Teorema de Wiener-Khinchin

El teorema de Wiener-Khinchin establece que, para un proceso estacionario x , existe una descomposición espectral de su función de autocorrelación Γ_{xx} . Esto implica que, aunque la transformada de Fourier de x no exista, existe una función de distribución espectral para el proceso.

En el caso particular en el que el proceso tiene una densidad espectral $S(\nu)$ bien definida e integrable:

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{-j2\pi\nu\tau} d\nu$$

Si además Γ_{xx} es integrable, estas dos cantidades forman un par de Fourier [10, 13]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= FT[S(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{-j2\pi\nu\tau} d\nu \\ S(\nu) &= IFT[\Gamma_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(\tau) e^{j2\pi\nu\tau} d\tau \end{aligned}$$

En el caso de dos procesos estacionarios x, y -bajo las suposiciones anteriores- existe una generalización de este teorema. La función de correlación entre estos procesos $\Gamma_{xy}(\tau)$ y su densidad espectral cruzada, $S_{xy}(\nu) = (FT[x(t)], FT[y(t)])$ son un par de Fourier

La densidad espectral de la fuente utilizada en la instalación experimental puede ser aproximada por una función Gaussiana (Figura 2-6) -la cual es absolutamente integrable- parametrizada por una frecuencia central ν_0 y un ancho de banda FWHM $\Delta\nu$:

$$S_r(\nu) = \frac{2 \sqrt{2 \ln 2 / \pi}}{\Delta\nu} \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} \right)^2 \right] \quad (2-12)$$

Al tomar la FT de (2-12), se obtiene la función de autocorrelación de la fuente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}(\tau) &= \exp\left[-\left(\frac{\pi\Delta\nu\tau}{2\sqrt{\ln 2}}\right)^2\right] \exp[-j2\pi\nu_0\tau] \\ &= \exp\left[-\frac{2\tau^2}{\tau_c^2}\right] \exp[-j2\pi\nu_0\tau]\end{aligned}\quad (2-13)$$

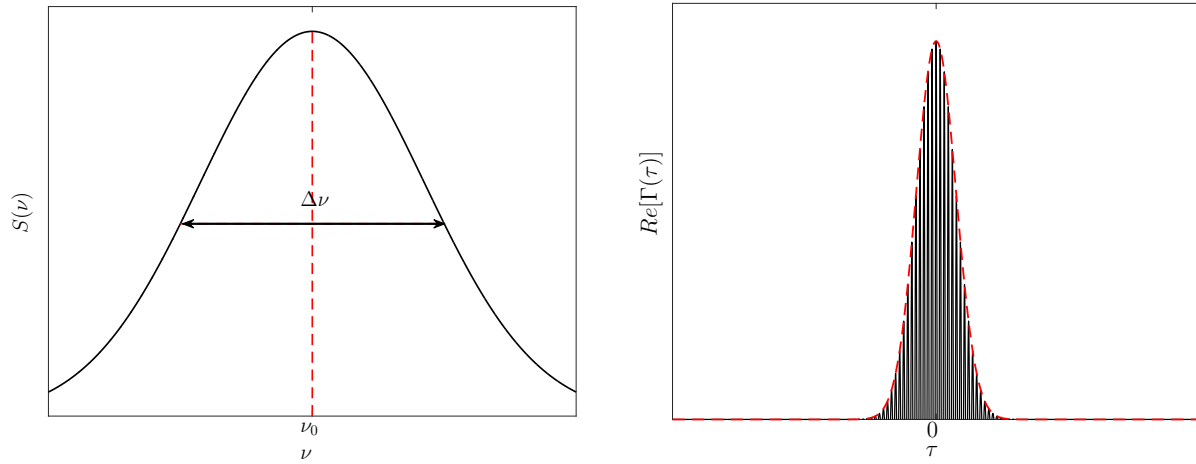


Figura 2-3: Densidad espectral Gaussiana y parte real de la función de autocorrelación de la fuente.

Donde $\tau_c = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\pi\Delta\nu}$ es el ancho a la mitad del máximo de la función Gaussiana que está modulando a $\Gamma_{rr}(\tau)$. Para valores del tiempo de retraso fuera de $[-\tau_c/2, \tau_c/2]$, la magnitud de la función de autocorrelación se reduce a la mitad y la interferencia no se observa. Por lo tanto, se usa τ_c como definición del tiempo de coherencia de una fuente Gaussiana.

De igual forma, se puede expresar la magnitud del grado de coherencia en función del número de onda k y la diferencia en camino óptico Δz :

$$\gamma_{rr}(\Delta z/c) = \exp\left[-\left(\frac{\Delta k\Delta z}{4\sqrt{\ln 2}}\right)^2\right] = \exp\left[-2\left(\frac{\Delta z}{l_c}\right)^2\right]\quad (2-14)$$

Donde $l_c = c\tau_c$ es la longitud de coherencia de la fuente:

$$l_c = \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\Delta k} = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}\quad (2-15)$$

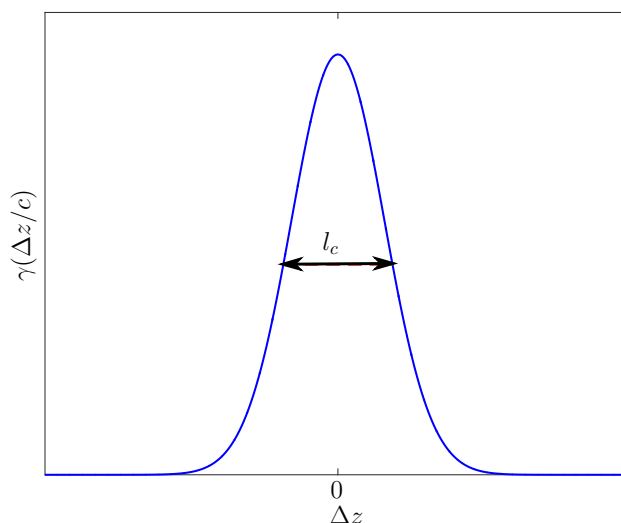


Figura 2-4: *Grado de coherencia correspondiente a una fuente con espectro Gaussiano. La longitud de coherencia determina el FWHM de éste.*

Como se ha visto anteriormente, el término de interferencia se encuentra modulado por el grado de coherencia. Cuando dos haces que salen de la fuente con espectro (2-12) interfieren, si su diferencia en camino óptico Δz es mayor que l_c , el patrón de interferencia -prácticamente- dejará de ser observado.

La ecuación (2-15) muestra que la longitud de coherencia depende inversamente del ancho de banda (tanto en λ como en k) de la fuente. La técnica SS-OCT está basada en la interferencia de fotones con diferentes longitudes de onda. Un aumento en resolución axial requiere usar fuentes con una $\Delta\lambda$ grande. Al mismo tiempo, este mismo parámetro de la fuente reduce la longitud de coherencia, lo cual baja el nivel de la interferencia (el nivel de la señal útil).

2.2. Arreglo de SSOCT

En la figura 2-5 se muestra el arreglo base de SSOCT, el cual -entre otras componentes- incluye una fuente de barrido (SS), un interferómetro, un aparato de escaneo, un fotodetector (PD) y una línea ADC.

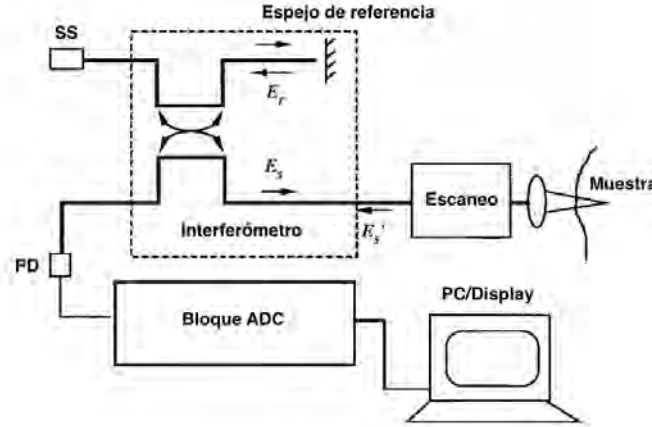


Figura 2-5: Arreglo base de SSOCT.

En el caso de SSOCT, la fuente es un láser ajustable que realiza un barrido en longitud de onda. El interferómetro del arreglo divide el haz que proviene de la fuente en dos: un haz de referencia (campo E_r) y un haz dirigido hacia la muestra (campo E_s).

Por el desarrollo mostrado en la sección anterior, a la salida del interferómetro se detectará una intensidad

$$I_d = I_r + I'_s + 2\text{Re}[\Gamma_{rs'}(\tau)] \quad (2-16)$$

Donde $\tau = \Delta z/c$ es el retraso temporal resultado de la diferencia en caminos ópticos entre el haz de referencia y el haz de muestra reflejado, la cual depende de la posición de retrodispersión de E'_s .

Los primeros términos de (2-16) son la intensidad media del haz reflejado y del haz de muestra y se manifiestan como un offset en la señal detectada. La información sobre la posición y reflectividad del elemento dispersor dentro de la muestra está contenida en el término de interferencia $2\text{Re}[\Gamma_{rs'}(\tau)]$.

En la figura 2-6 se muestra el espectro de una fuente de barrido típica con longitud de onda central de 1300nm y ancho de banda de 100nm (datos tomados de [14]). Así mismo, se muestra una aproximación analítica Gaussiana de dicho espectro.

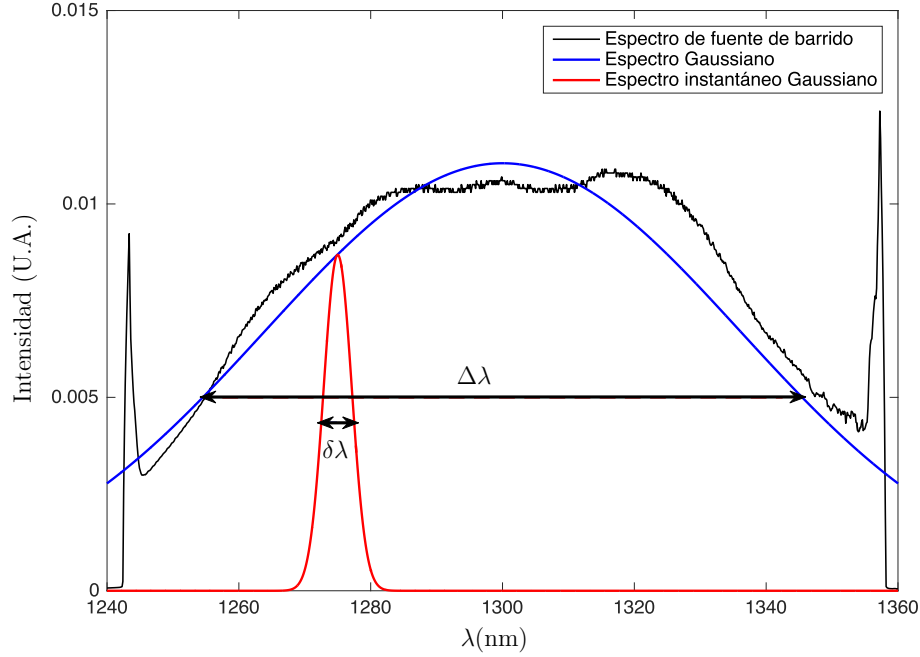


Figura 2-6: Espectro de potencia de una fuente de barrido. El espectro completo está caracterizado por el ancho de banda $\Delta\lambda$ y el espectro instantáneo, por el ancho de línea instantáneo $\delta\lambda$.

Al hacer el barrido, la fuente no emite una línea espectral, sino una onda cuasi-monocromática. Si se asume que emisión instantánea tiene un espectro Gaussiano con ancho de línea instantáneo $\delta\nu$, se aproxima la siguiente expresión analítica:

$$S_i(\nu) = \frac{2\sqrt{\ln 2/\pi}}{\delta\nu} \exp \left[-4 \ln 2 \left(\frac{\nu}{\delta\nu} \right)^2 \right] \quad (2-17)$$

Asumiendo que la muestra no altera en gran medida las características espectrales de la fuente, la intensidad detectada dependiente del número de onda k correspondiente a un solo elemento en la muestra es [13, 15]:

$$I_d(k) = S(k)(R_r + R_s + 2\sqrt{R_r R_s} \cos[k\Delta z]) \quad (2-18)$$

donde R_r y R_s son las reflectividades de potencia en los brazos de referencia y muestra, respectivamente. La información sobre la localización del elemento en la muestra se encuentra codificada en la fase del término senoidal.

Debido a la forma del espectro instantáneo de la fuente de barrido, se tiene que la intensidad es

$$\begin{aligned} I_d(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(k)(R_r + R_s + 2\sqrt{R_r R_s} \cos[k\Delta z])S_i(k - k_i)dk_i \\ &= S(k)(R_r + R_s + 2\sqrt{R_r R_s} \cos[k\Delta z]) * S_i(k) \end{aligned}$$

donde $*$ denota una convolución. Al tomar la FT de $I_d(k)$ y aplicando el teorema de convolución, se obtiene el escaneo axial $I_d(z)$:

$$\begin{aligned} I_d(z) &\propto \{\gamma(z)(R_r + R_s) + 2\sqrt{R_r R_s}\gamma(z) * [\delta(z - z_s) + \delta(z + z_s)]\}\gamma_r(\Delta z) \\ &= \{\gamma(z)(R_r + R_s) + 2\sqrt{R_r R_s}[\gamma(z - z_s) + \gamma(z + z_s)]\}\gamma_r(\Delta z) \end{aligned} \quad (2-19)$$

donde el primer término $\gamma(z)(R_r + R_s)$ es la componente DC y

$$\gamma(z) = \exp\left[-2\left(\frac{z}{\Delta z_a}\right)^2\right] \quad (2-20)$$

$$\gamma_r(\Delta z) = \exp\left[-2\left(\frac{\Delta z}{l_c}\right)^2\right] \quad (2-21)$$

Como se observa en la figura **2-7**, el escaneo axial (para dos elementos reflectores localizados en z_{s1} y z_{s2}), se conforma por dos funciones Gaussianas centradas en z_{si} y $-z_{si}$ por cada elemento, las cuales a su vez están moduladas por el grado de coherencia de la fuente (2-21).

La longitud de coherencia de la fuente se aproxima por

$$l_c = \frac{4 \ln 2}{\delta k} = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{\lambda_0^2}{\delta \lambda} \quad (2-22)$$

donde $\delta \lambda$ es el ancho de banda instantáneo de la fuente y λ_0 es la longitud de onda central del barrido. Se observa que cuando $\Delta z = l_c$, la intensidad de la señal se ve disminuida en 95%. Por lo tanto, la longitud de coherencia de la fuente impone un límite físico sobre el

alcance en profundidad de la técnica.

Las funciones Gaussianas centradas en la posición del elemento dispersor tienen un FWHM:

$$\Delta z_a = \frac{4 \ln 2}{\Delta k} = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda} \quad (2-23)$$

Donde $\Delta \lambda$ es el ancho de banda de la fuente. La longitud Δz_a determina la resolución axial de la técnica, ya que si dos elementos se encuentran a una distancia menor, los máximos independientes no podrán ser distinguidos. Para una fuente de barrido típica con $\lambda_0 = 1325\text{nm}$ y $\Delta \lambda \approx 100\text{nm}$, la resolución axial es del rango de 8 - 12 μm .

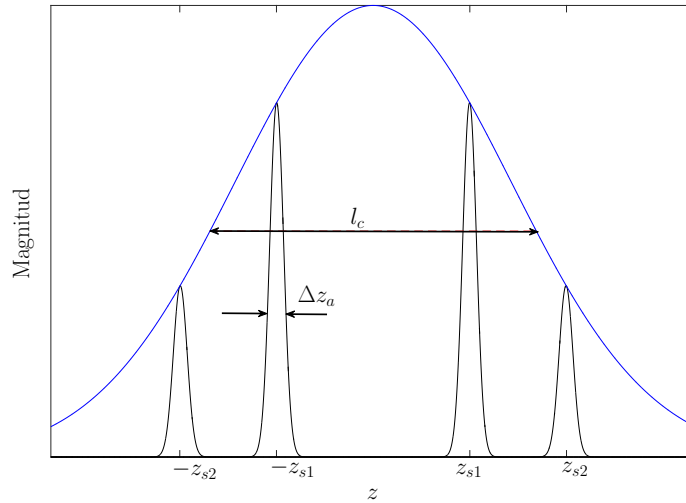


Figura 2-7: Escaneo axial (sin elemento DC) de SSOCT correspondiente a dos elementos en el brazo de muestra

Por otro lado, las longitudes de coherencia de fuentes de barrido se encuentran entre los 4 - 7 mm. Éste es el límite físico del alcance de profundidad de la técnica. El límite en profundidad real, sin embargo, está dado por el muestreo espectral $\delta^s k$ o $\delta^s \lambda$. Una vez eliminados los artefactos espejo, éste es [7, 9]:

$$z_{max} = \frac{\pi}{\delta^s k} = \frac{\lambda_0^2}{2\delta^s \lambda} \quad (2-24)$$

donde $\delta^s k$ y $\delta^s \lambda$ son el número de onda y la longitud de onda muestreados, respectivamente.

Usando que $\delta^s \lambda = \Delta \lambda / N$ con N el número de muestras, se tiene

$$z_{max} = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda/N} \quad (2-25)$$

2.3. DDL-SSOCT

En la sección anterior se ha discutido el origen de los dos principales problemas de la configuración base de SSOCT: la aparición de una imagen espejo y alcance en profundidad reducido debido a las características de coherencia de las fuentes de barrido.

Para superar la primera limitación existen técnicas bien documentadas, las cuales se describen en [16]. El problema del límite en profundidad de la imagen permanece sin ser completamente solucionado. Es bajo este contexto que se desarrolla la investigación presentada en [9], en donde se propone una modificación al arreglo típico de SSOCT con el cual es posible incrementar el alcance en profundidad de $\approx 5\text{mm}$ a 1.6cm .

El arreglo de DDL-SSOCT mostrado en la figura **2-8**. Dicho arreglo está conformado por una fuente de barrido Thorlabs SL1325 con longitud de onda central y ancho de banda nominal de 1325nm y 125nm respectivamente [17], un interferómetro de Mach-Zehnder (divisor 50:50), el brazo de muestra y un brazo de referencia modificado.

Dadas las características de la fuente, por (2-22) y (2-25), se tiene que la resolución axial del sistema es de $12\mu\text{m}$ y la profundidad máxima de imagen es de 5.6mm .

En lugar de tener un espejo en el brazo de referencia, se introduce una línea de retraso dependiente de la longitud de onda (DDL), la cual está compuesta por las rejillas de difracción G1 y G2 antes del espejo de referencia (RM). La componente de interferencia (producto de un solo elemento dispersor j) de la señal detectada será [9, 13]

$$W(t) = 2(\eta q/h\nu)|\gamma(\Delta z_j/c)|\sqrt{I_r I_s} \cos[k(t)\Delta z_j] \quad (2-26)$$

donde η es la eficiencia cuántica del detector, q es la carga de un electrón y $h\nu$ es la energía

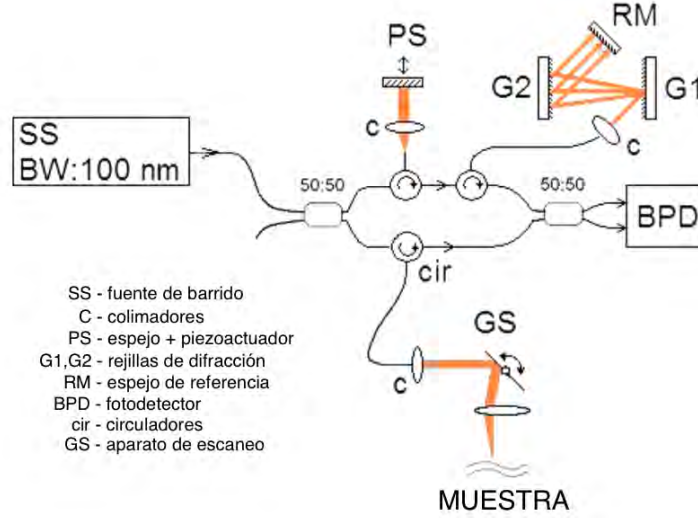


Figura 2-8: Esquema del arreglo de DDL-SSOCT. Figura tomada de [9]

del fotón detectado. La presencia de la línea de retraso introduce una dependencia temporal a la diferencia de camino óptico:

$$\Delta z_j(t) = 2L(1 + \cos[\beta - \theta(t)]) \cos^{-1}[\theta(t)] - z_j \quad (2-27)$$

con z_j la posición del elemento dispersor, L la distancia entre las rejillas, $\theta(t)$ el ángulo de difracción y β el ángulo de incidencia. La relación entre estos dos ángulos está dada por $2\pi/k(t) = \sin[\theta(t)] + \sin(\beta)$

El barrido del láser no tiene una relación lineal con el tiempo, por lo cual las muestras de la señal no serán equidistantes en k . Debido a esto, es necesario linealizar $k(t)$. Esto se hace mediante la aplicación del método descrito en [18]. El resultado es un k con forma

$$k(t) = k_{min} + \left(\frac{\Delta k}{T}\right)t$$

donde k_{min} y Δk son el número de onda inicial y el rango de barrido, respectivamente. T es la duración del barrido en k . Con $k(t)$ lineal, se puede aproximar $\Delta z_j(t)$ por:

$$\Delta z_j(t) = \delta_j + \left(\frac{\Delta R}{T}\right)t$$

donde $\delta_j = z_{min}^R - z_j$ es la mínima diferencia en camino óptico y $\Delta^R = 2L \sin[\theta_{max} - \theta_{min}]$ es el rango de ajuste del camino óptico en el brazo de referencia con DDL.

Así, el argumento del coseno en (2-26) será la siguiente función cuadrática

$$\phi(t) = \Delta z_j(t)k(t) = \mu t^2 + \Omega_j t + k_{min}\delta_j \quad (2-28)$$

con $\Omega_j = (k_{min}\Delta^R + \Delta k\delta_j)/T$; $\mu = \Delta k\Delta^R/T^2$. Se observa que el coeficiente cuadrático μ sólo depende de las características del arreglo, por lo cual será igual sin importar z_j .

De esta forma, la señal detectada $W(t)$ es un coseno con fase polinomial cuadrática, modulado por el grado de coherencia, el cual a su vez tiene forma Gaussiana. Esto es, la señal experimental tiene forma de chirp.

Un **chirp** es, en términos generales, una señal que realiza un barrido en frecuencias. Esto es, una señal de la forma $\sin[\phi(t)]$. La frecuencia instantánea de la señal es la derivada temporal de su fase:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

En el caso en el que la fase es cuadrática, la frecuencia instantánea será lineal. A este tipo de señales se les conoce como chirps lineales.

$$\phi(t) = 2\pi(kt^2 + lt + m)$$

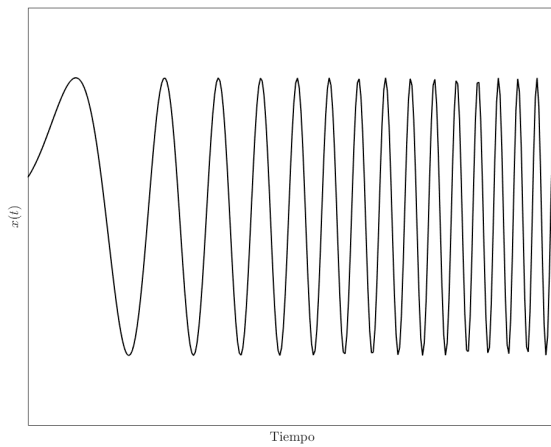
$$f_i(t) = 2kt + l$$

Se identifica a l como la frecuencia inicial del barrido, y a $c_r = 2k$ como la tasa de barrido de frecuencias, o *chirp rate*. El ancho de frecuencia barrido por la señal es $(f(T) - f(0)) = 2kT = c_r T$, donde T es la duración de la señal.

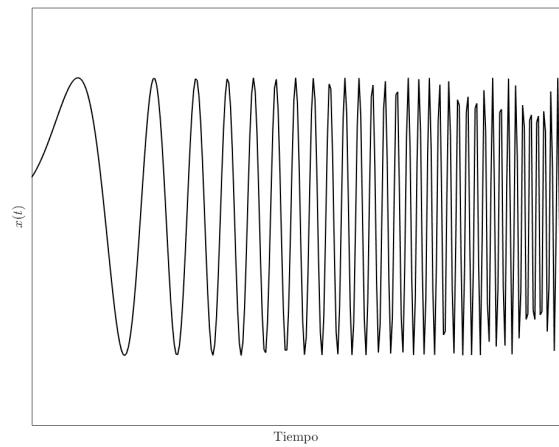
Cuando la fase es un polinomio de tercer grado, la frecuencia instantánea será cuadrática. Estas señales son llamadas chirps cuadráticos

$$\phi(t) = 2\pi(at^3 + kt^2 + lt + m)$$

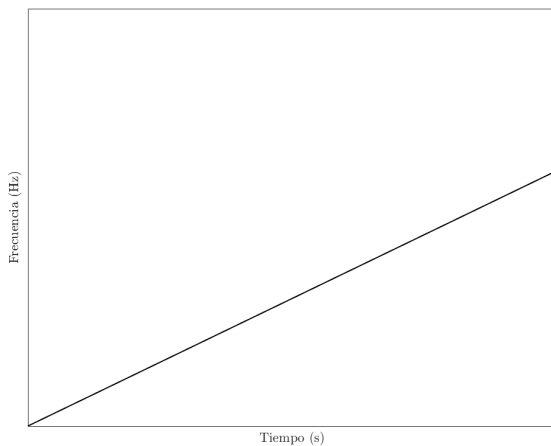
$$f_i(t) = 3at^2 + 2kt + l$$



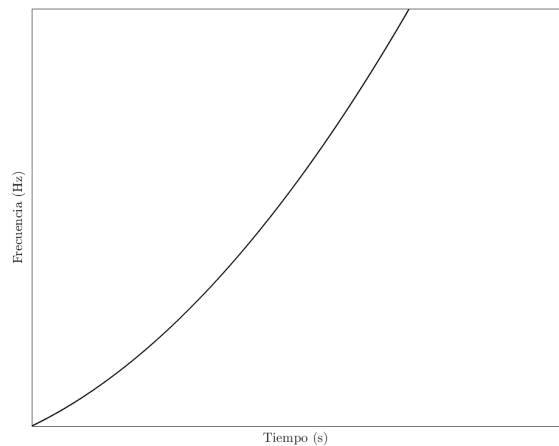
(a) *Chirp lineal*



(b) *Chirp cuadrático*



(c) *Frecuencia instantánea de un chirp lineal*



(d) *Frecuencia instantánea de un chirp cuadrático*

Figura 2-9

De esta forma, se identifica a (2-26) como un chirp lineal simétrico respecto a $\tau = z_j/c$, donde z_j es la posición del elemento reflector.

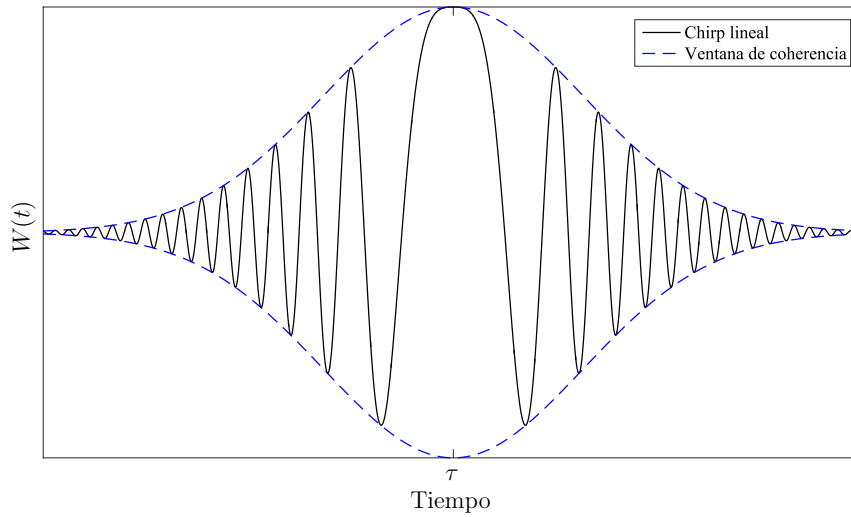


Figura 2-10: Señal obtenida por un solo elemento reflector en el arreglo DDL-SSOCT. La señal es simétrica respecto a $\tau = z_j/c$

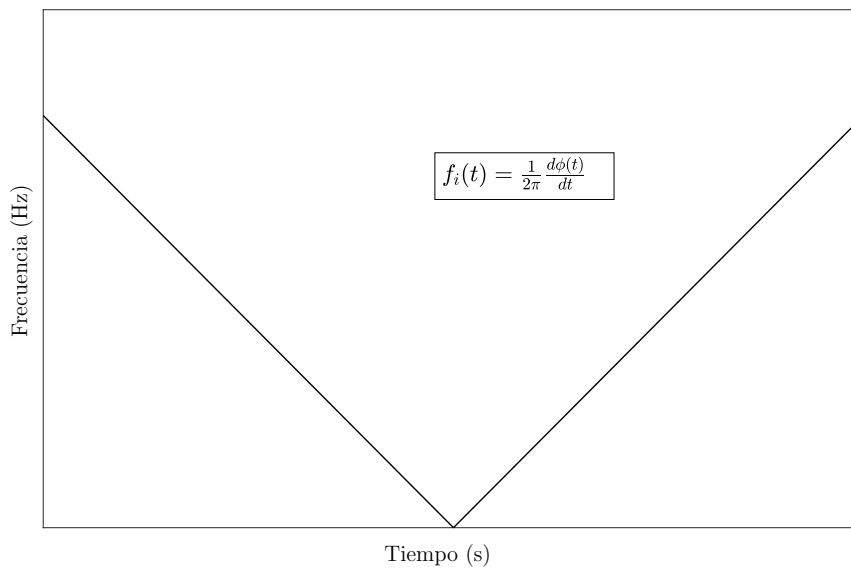


Figura 2-11: Dependencia temporal de la frecuencia instantánea de un chirp lineal simétrico

Para extraer la información de la posición axial de los elementos dispersores en la muestra, $W(z)$, se usa en [9] el método de compresión AC, para el cual es necesario calcular -al momento de calibrar el equipo- una señal analítica de referencia $R(t) = \cos[\Omega_0 t + \mu t^2 + \phi]$ con $\Omega_0 = (k_{min}\Delta^R + \Delta k\delta_0)/T$, $\delta_0 = z_{min}^R - z_0$ y z_0 es un parámetro de retraso de referencia.

Debido a que $W(t)$ tiene componentes tipo chirp, es necesario demodular esta señal, lo cual se hace con el método de demodulación por cuadraturas [9, 19], el cual consiste en la superposición de la señal original y una con diferencia de fase de $\pi/2$.

De esta forma, el perfil de profundidad de la muestra va a estar dado por $\mathcal{F}[\bar{\omega}(t)]$, donde

$$\bar{\omega}(t) = R(t)W(t) + HT[R(t)]W(t + \pi/2) \quad (2-29)$$

donde HT denota una transformada de Hilbert y la señal $W(t + \pi/2)$ se genera usando un espejo controlado por un piezoactuador (PS). Se adquieren en secuencia las dos señales con diferencia en fase de 90° . Este procedimiento reduce la tasa de barrido de 16kHz a 8kHz, efectivamente reduciendo a la mitad la velocidad de adquisición.

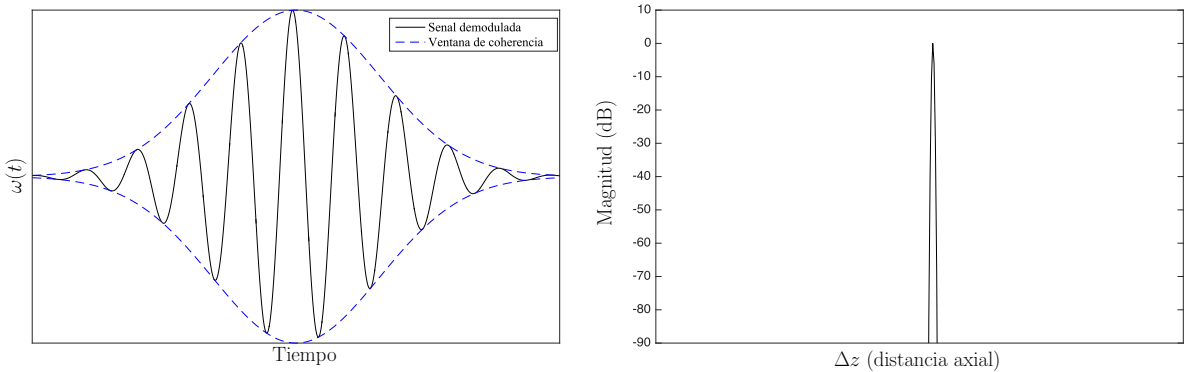


Figura 2-12: Izquierda: $\bar{\omega}(t)$ Derecha: $\mathcal{F}[\bar{\omega}(t)] = W(z)$. El perfil de profundidad de la muestra se obtiene a partir de la transformada de Fourier de la señal (2-29).

Es bajo esta inconveniencia que surge el deseo de encontrar métodos alternativos para la demodulación de superposiciones de chirps lineales. Esto es, el problema a tratar se reduce a la obtención de los parámetros del modelo de chirp lineal multicomponente:

$$c(t) = \sum_i s_i(t) \quad (2-30)$$

$$s_i(t) = A_i \exp[j(l_i t^2 + m_i t + \phi_i)] \quad (2-31)$$

En la siguiente sección se presenta una revisión general de diferentes métodos para la demodulación y extracción de los parámetros de chirps lineales multicomponente.

3 Métodos

Las señales conformadas por superposiciones de términos senoidales con modulación de frecuencia - como los chirps lineales multicomponente- aparecen en diferentes contextos como radar, sonar, interferometría, bio-ingeniería, comunicaciones y análisis de voz, entre otros.

En particular, el problema que será tratado en el trabajo presente es la estimación de los retrasos temporales de superposiciones de chirps lineales. Dichos chirps contienen la información del escaneo axial de la muestra en el arreglo DDL-SSOCT.

El problema de la separación y demodulación de los chirps ha recibido considerable atención y se han desarrollado múltiples métodos para resolverlo. A continuación consideraremos algunos métodos basados en optimización por mínimos cuadrados, filtros adaptativos, operadores diferenciales, análisis de matrices y transformaciones integrales.

Uno de los métodos basados en ajustes por mínimos cuadrados de los ceros de la señal, se discute en el trabajo [20]. Este método se basa en una medición continua de la señal y, al identificar los intervalos de tiempo entre amplitudes cero consecutivas, se puede obtener un estimado de la frecuencia instantánea. Basándose en los estimados de frecuencias instantáneas, es posible hacer un ajuste por mínimos cuadrados para obtener la función de frecuencia de la señal. La desventaja principal de los métodos basados en ajustes de mínimos cuadrados es la complejidad computacional de éstos. Una desventaja adicional es este método sólo permite la identificación de señales monocomponente.

Existen también métodos basados en filtros adaptativos, uno de los cuales se discute en [21]. En el artículo citado, se propone un método para estimar el dominio de frecuencias para señales con espectro que varía rápidamente en el tiempo. Los coeficientes del filtro se calculan continuamente en términos de los coeficientes anteriores y del valor de la señal en el tiempo actual y en el anterior. A partir de éstos, se construye un *estimado del espectro*. El cálculo de coeficientes del filtro tiene baja complejidad, ya que se basa en operaciones de suma y multiplicación, lo cual facilitaría su aplicación en tiempo real. El método mostró resultados favorables al estimar la frecuencia instantánea de señales senoidales FM bajo ruido. Sin embargo, éste tiene problemas al estimar las frecuencias instantáneas en una superposición de señales senoidales tan pequeña como de 3 componentes. El número de componentes dentro de nuestra señal experimental será grande, y a su vez existe una alta probabilidad de que los contenidos de frecuencia de cada elemento estén mutuamente cercanos. Debido a esto, no se realizó una investigación posterior sobre métodos basados en filtros adaptativos.

Otro grupo de métodos son los basados en operadores diferenciales, como el operador de energía de Kaiser-Teager (K-T), descrito en [22]. Éste es un operador diferencial de segundo orden análogo al operador de energía de un oscilador lineal amortiguado. La energía de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud y frecuencia de oscilación. Cuando dicho operador se aplica a una señal oscilatoria, la salida de dicho operador es la energía de la fuente que produce la oscilación. Usando la relación entre energía y frecuencia, se puede obtener ésta última cantidad a partir de aplicar el operador K-T a una señal.

El método descrito en [23] tiene como objetivo la estimación de los parámetros de amplitud y frecuencia de una señal monocomponente mediante la aplicación de dicho operador sobre la señal y su derivada. Sin embargo, el operador K-T es de segundo orden en la derivada, lo cual implicaría el cálculo de una derivada de tercer orden para la estimación de los parámetros. La primera desventaja de este método aparece en la necesidad de calcular derivadas de señales con ruido; esta operación es indeseable, ya que el ruido se ve amplificado.

En [24] se ha extendido el uso de este operador en superposiciones de señales, sin embargo esto requiere la aplicación previa de un algoritmo de separación algebraica de la señal [24, 25], el cual se reduce a la solución de un problema aumentado de mínimos cuadrados. En nuestro caso, la superposición tendrá gran cantidad de componentes, por lo cual el sistema de separación se volverá grande y su aplicación en tiempo real es cuestionable.

Otro método basado en operadores se presenta en [26]. Los autores proponen el uso de un operador diferencial de segundo orden, el cual también tiene la forma de un oscilador lineal amortiguado. Una señal senoidal con frecuencia modulada es una solución de la ecuación homogénea asociada al operador. Usando este hecho, se puede obtener la frecuencia de la señal a partir de los parámetros del operador. Para obtener los parámetros adaptativamente, se resuelve un problema de optimización. Para una señal con M componentes, se requerirán M iteraciones del procedimiento. Puesto que el procedimiento iterativo se realiza sobre una sola línea, la gran cantidad de componentes puede comprometer la aplicación de este método en tiempo real.

Otra clase de métodos se basa en el análisis de matrices construidas a partir de muestras de la señal. En [27], se presenta un método basado en la descomposición en valores singulares de la matriz de muestras de la señal. Sin embargo, para que el método pueda explotar las propiedades de esta matriz, se requiere que las frecuencias de las señales componentes varíen lentamente. Esto representa la primera desventaja. Adicionalmente, en nuestro caso, se tendrá una superposición de gran cantidad de componentes, por lo cual la matriz será grande y requerirá un gran número de muestras para formarse. Finalmente, los autores evaluaron que el método tiene problemas cuando los espectros de los componentes se superponen (esto es, uno o más componentes tiene la misma frecuencia instantánea en algún tiempo).

En [28], se propone un método basado en el análisis de la matriz de covarianza de la señal. La matriz de covarianza permite la de-correlación o separación de conjunto de datos. En este contexto, la matriz de covarianza permite separar la señal en un sub-espacio de ruido y uno

que contiene la información. Esta descomposición matricial separa los parámetros de ancho de banda y frecuencia central. Una vez que se obtiene la matriz de covarianza a partir de las muestras de la señal, ésta se introduce en la entrada de un algoritmo de estimación de frecuencias -los cuales se basan en el cálculo de valores propios de la matriz-. A partir de las frecuencias estimadas, es posible estimar los parámetros de la señal. El método descrito está optimizado para superposiciones con número de elementos conocido, lo cual es imposible de conocer en nuestro caso. Adicionalmente, su aplicación involucra cálculos de valores propios en matrices generalmente grandes.

Otra clase de métodos investigados se basa en la aplicación de transformaciones a la señal. Entre dichas transformaciones se encuentra la transformada discreta de fase polinomial (DPT) [29]. El método detallado en [29] se basa en la siguiente propiedad de la DPT: cuando ésta se aplica a una señal de fase polinomial, el resultado es una sola línea espectral. A partir de la localización de ésta línea, es posible conocer el valor de los parámetros de la fase. La fase de los chirps lineales es un polinomio de grado dos. En este caso, la aplicación de una DPT de orden 2 permite la estimación del coeficiente cuadrático de la fase (chirp rate); mientras que una DPT de orden 1 permite la estimación del coeficiente lineal (frecuencia portadora). El método descrito es eficiente, pero sólo se aplica en señales monocomponente. Existen métodos multicomponentes como el propuesto en [30].

[30] presenta una extensión del método basado en DPT, con la cual es posible separar y estimar la frecuencia instantánea de una superposición de señales senoidales con amplitud constante y modulación en frecuencia. La desventaja más evidente de éste método viene la la condición sobre las amplitudes: es necesario que uno de los componentes tenga más del doble de amplitud que el otro. Esto es imposible de asegurar en nuestra instalación experimental. Dicho método está diseñado para señales con dos componentes, y no se encontraron trabajos posteriores que lo extiendan a cantidades arbitrarias. Por esto, se limita nuestro interés a los métodos basados en DPT.

Existe también una técnica llamada “descomposición empírica en modo” (EMD), detallada en [31]. En [32], se propone un método basado en esta técnica, con el cual se genera adaptativamente una representación de la señal multicomponente como una suma de componentes con frecuencia modulada. Dichos componentes, llamados funciones de modo intrínseco (IMF), admiten una transformada de Hilbert con lo cual se pueden definir las frecuencias instantáneas. Se observa que EMD no es capaz de separar las señales cuando la amplitud de un componente con frecuencia más baja es menor a la de uno con frecuencia más alta. Esta restricción sobre las amplitudes limita la aplicación de este método en nuestro caso, ya que no se tiene control sobre la amplitud de cada término.

Posteriormente, se introdujeron métodos de análisis basados en representaciones de tiempo-frecuencia, como la distribución de Wigner-Ville. Ésta produce máximos a lo largo del plano tiempo-frecuencia para señales con modulación de frecuencia lineal [33, 34]. Sin embargo, cuando se trata de una señal multicomponente, los términos cruzados y coincidencias en frecuencias de los componentes dificultan su aplicación en este contexto.

La transformada fraccional de Fourier (FrFT) es una familia de transformaciones integrales introducida por Namias [36] para resolver problemas de mecánica cuántica. En el artículo de Namias, se demostró la utilidad de la FrFT para resolver ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) que surgen de Hamiltonianos cuadráticos. Entre los problemas resueltos se encuentra la descripción de la dinámica de los electrones en un campo magnético que varía en el tiempo. Recientemente, se ha popularizado su uso como una herramienta para la estimación de parámetros de chirps lineales. Dicha aplicación es natural debido al hecho de que el núcleo de la FrFT se define en términos de exponenciales con fase cuadrática (chirps lineales complejos).

Entre los primeros antecedentes del uso de la transformada fraccional de Fourier para el análisis de señales tipo chirp, se encuentra en [37]. En este artículo los autores definen la “transformada discreta chirp-Fourier” (DCFT), la cual es muy similar en definición a la

transformada Fraccional de Fourier. Al igual que con la FrFT, se observa que la DCFT presenta un máximo en el plano de los parámetros del chirp lineal, lo cual permite la identificación de éstos.

La FrFT está caracterizada por un parámetro a , el cual es llamado *orden* de la transformación. Una propiedad útil de la FrFT es que, cuando se aplica la transformada de orden adecuado a un chirp lineal, se produce una respuesta tipo delta en el eje de la variable FrFT. Este hecho ha sido explotado por [38, 39, 40, 41] para estimar los parámetros de chirps lineales. El método descrito en los artículos citados se basa en la aplicación de FrFT de diferentes órdenes sobre la señal. De la posición de los máximos en la superficie, es posible calcular los parámetros de los chirps. Una ventaja importante del método es que, como se muestra en [42], el cálculo de la FrFT se puede realizar mediante el algoritmo FFT. Esto resulta en una técnica eficiente con posibilidades de aplicación en tiempo real.

Otra transformación relacionada con la búsqueda de parámetros de chirps es la *Boutie Chirplet Transform* (BCT). En [35], se presenta un método que usa dicha transformación -en conjunción con la transformada fraccional de Fourier- para estimar los parámetros de chirps. En el artículo citado, se simplifica la definición de la BCT. Bajo esta simplificación, el cálculo de la BCT se reduce a un cálculo de correlación cruzada entre la señal de entrada y un chirp cuadrático multiplicado por una ventana a elegir. Se evalúa la BCT simplificada tomando como parámetro el chirp rate, lo cual resulta en una superficie, en la cual se identifican los máximos y se asocian con los parámetros del chirp. La sencillez de la definición de la BCT, hace que este método muestre potencial como una herramienta para la estimación de los parámetros de superposiciones de chirps en nuestro caso. El cálculo de ésta se reduce a una correlación cruzada, lo cual se puede realizar usando el algoritmo FFT. El problema se centra entonces en la identificación de máximos en la superficie de la BCT de la señal, similar al método propuesto en este trabajo. Queda pendiente la evaluación de la eficiencia de la BCT frente a la FrFT.

Debido a las ventajas mencionadas anteriormente, la FrFT es un buen candidato para el procesamiento de las señales experimentales tipo chirp. La siguiente sección se dedica a la definición matemática de la transformada, así como a enunciar algunas de sus propiedades y mostrar un algoritmo para su cálculo.

4 La transformada fraccional de Fourier

La transformada fraccional de Fourier (FrFT) se introduce como una generalización de la transformada de Fourier ordinaria (FT) [42, 43].

La FrFT es una representación de la señal en un dominio de tiempo-frecuencia, a diferencia de la FT, la cual es una representación en el dominio de frecuencia. Al aplicar una FT a la señal $x(t)$, se obtiene $X(f)$ -una representación en frecuencia-. Se puede ver a la FT como un operador \mathcal{F} que *rota* la representación de la señal por $\pi/2$ en el plano tiempo-frecuencia (figura 1) [43, 45].

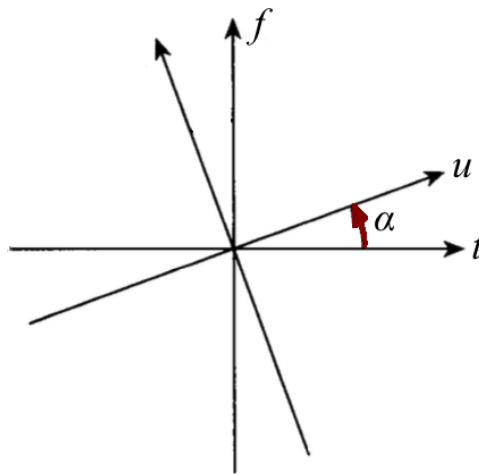


Figura 4-1: Plano tiempo-frecuencia. Se puede entender a la FrFT como una rotación por un ángulo α en el plano, mientras que la FT es una rotación de $\pi/2$.

Una segunda aplicación del operador \mathcal{F} resulta en $\mathcal{F}^2[x(t)] = x(-t)$; esto es, una inversión en el eje del tiempo, lo cual corresponde a una rotación de π en el plano tiempo-frecuencia.

Finalmente, 4 aplicaciones sucesivas de \mathcal{F} equivalen a $\mathcal{F}^4[x(t)] = x(t)$, lo cual corresponde a una rotación de 2π en el plano (t, f) . Las potencias enteras del operador \mathcal{F} corresponden a rotaciones de $n\pi/2$ en el plano (t, f) .

En este contexto se introduce la idea de potencias fraccionales del operador \mathcal{F} ; esto es, se habla de un operador \mathcal{F}^a , el cual corresponde a una rotación de $\alpha = a\pi/2$ en el plano (t, f) , donde a es un número no entero [43].

Este operador debe satisfacer [42, 43, 45]:

1. $\mathcal{F}^0 = Id$ Rotación de 0
2. $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$ Consistencia con FT
3. $\mathcal{F}^2 = \mathcal{P}$ Operador de paridad
4. $\mathcal{F}^4 = Id$ Rotación de 2π
5. $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^{a+b}$ Aditividad de rotaciones

4.1. Fundamentos matemáticos

La transformada fraccional de Fourier de orden a de una función $g(t)$, denotada mediante $\mathcal{F}^a[g(t)](u)$, se define como [42, 43, 45, 46]:

$$F^a[g(t)](u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) K_a(t, u) dt \quad (4-1)$$

El núcleo de la transformación, $K_a(t, u)$, está dado por

$$K_a(t, u) = \begin{cases} C_\alpha \exp\left\{ \left[-2\pi j \left(\csc(\alpha)tu - \frac{(t^2+u^2)}{2} \cot(\alpha) \right) \right] \right\} & \text{si } a \text{ es no entero} \\ \delta(u - t) & \text{si } a = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ \delta(u + t) & \text{si } a = 4k + 2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donde

$$\alpha = \frac{a\pi}{2}$$

$$C_\alpha = \sqrt{1 - j \cot(\alpha)}$$

El núcleo $K_a(t, u)$ tiene las siguientes propiedades:

$$K_a(t, u) = K_a(u, t) \quad (4-2)$$

$$K_{-a}(t, u) = K_a^*(t, u) \quad (4-3)$$

$$K_a(-t, u) = K_a(t, -u) \quad (4-4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_b(u, z) du = K_{a+b}(t, z) \quad (4-5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_a^*(t, u') dt = \delta(u - u') \quad (4-6)$$

Las primeras tres propiedades se siguen inmediatamente de la definición de $K_a(t, u)$. A continuación se demuestran 4 y 5.

Demostración de (4-5) para a y b no enteros:

$$K_a(t, u) = C_\alpha \exp \left\{ \left[-2\pi j \left(\csc(\alpha)tu - \frac{(t^2 + u^2)}{2} \cot(\alpha) \right) \right] \right\}$$

$$K_b(u, z) = C_\beta \exp \left\{ \left[-2\pi j \left(\csc(\beta)uz - \frac{(u^2 + z^2)}{2} \cot(\beta) \right) \right] \right\}$$

con $\alpha = a\pi/2$ y $\beta = b\pi/2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_b(u, z) du$$

$$= C_\alpha C_\beta (\dots) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \left[2\pi j \left(\frac{\cot(\alpha)}{2} + \frac{\cot(\beta)}{2} \right) u^2 - 2\pi j (\csc(\alpha)t + \csc(\beta)z)u \right] \right\} du$$

$$= C_\alpha C_\beta (\dots) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ [-Au^2 + Bu] \} du$$

donde $(\dots) = \exp \left\{ \left[-2\pi j \left(-\frac{t^2}{2} \cot(\alpha) - \frac{z^2}{2} \cot(\beta) \right) \right] \right\}$, $A = -2\pi j \left(\frac{\cot(\alpha)}{2} + \frac{\cot(\beta)}{2} \right)$ y $B =$

$-2\pi j(t \csc(\alpha) + z \csc(\beta))$. Resolviendo la integral gaussiana se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_b(u, z) du &= C_\alpha C_\beta(\dots) \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} \exp\left\{\left[\frac{B^2}{4A}\right]\right\} \\ &= C_\alpha C_\beta(\dots) \left(\frac{1}{-j(\cot \alpha + \cot \beta)}\right)^{1/2} \exp\left\{\left[-2\pi j \left(\frac{(\csc \alpha + \csc \beta)^2}{2(\cot \alpha + \cot \beta)}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

Observación:

$$C_\alpha C_\beta \left(\frac{1}{-j(\cot \alpha + \cot \beta)}\right)^{1/2} = \left(\frac{(1 - j \cot \alpha)(1 - j \cot \beta)}{-j(\cot \alpha + \cot \beta)}\right)^{1/2} = \sqrt{1 - j \cot(\alpha + \beta)} = C_{\alpha+\beta}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \cot(\alpha) + \cot(\beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} \\ t \csc(\alpha) + z \csc(\beta) &= \csc(\alpha) \csc(\beta) (z \sin(\alpha) + t \sin(\beta)) \\ \Rightarrow \frac{(t \csc(\alpha) + z \csc(\beta))^2}{2(\cot \alpha + \cot \beta)} &= \frac{t^2 \csc(\alpha)}{2 \csc(\beta) \sin(\alpha + \beta)} + \frac{tz}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{z^2 \csc(\beta)}{2 \csc(\alpha) \sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_b(u, z) du &= \\ C_{\alpha+\beta} \exp \left[-2\pi j \left(\frac{t^2}{2} \left(\frac{\csc(\alpha)}{\csc(\beta) \sin(\alpha + \beta)} - \cot(\alpha) \right) + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\csc(\beta)}{\csc(\alpha) \sin(\alpha + \beta)} - \cot(\beta) \right) + \frac{zt}{\sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \end{aligned}$$

Usando que $\frac{\csc(\alpha)}{\csc(\beta) \sin(\alpha + \beta)} - \cot(\alpha) = \frac{\csc(\beta)}{\csc(\alpha) \sin(\alpha + \beta)} - \cot(\beta) = -\cot(\alpha + \beta)$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_b(u, z) du = C_{\alpha+\beta} \exp \left[-2\pi j \left(\csc(\alpha + \beta) zt - \frac{t^2 + z^2}{2} \cot(\alpha + \beta) \right) \right] = K_{a+b}(t, z)$$

Para el caso en el que a o b son enteros, (4-5) se verifica inmediatamente por las propiedades de $\delta(t)$.

Finalmente, (4-6) se verifica usando (4-2), (4-3) y (4-5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_a^*(t, u') dt = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u) K_{-a}(t, u') dt = K_{a-a}(u, u') = K_0(u, u') = \delta(u - u')$$

La propiedad (4-6) indica que el conjunto de las funciones del núcleo $K_a(t, u)$, vistas como funciones de u con parámetro t , es ortonormal.

De la definición de la FrFT (4-1), se observan las siguientes propiedades:

- *Identidad:* \mathcal{F}^0 corresponde al operador identidad. Puesto que $\mathcal{F}^{4k+a} = \mathcal{F}^{4k'+a}$, $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^4 = Id$.
- *Reducción a FT:* Para \mathcal{F}^1 , se reemplaza $\alpha = \pi/2$ y puesto que $\csc(\pi/2) = 1$ y $\cot(\pi/2) = 0$, K_1 se reduce al núcleo de la transformada de Fourier $K(u) = \exp[-2\pi jut]$
- *Aplicaciones sucesivas:* Debido a la propiedad (4-5), $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^{a+b}$.

Las propiedades anteriores aseguran que la definición de la FrFT en términos de la familia de núcleos $K_a(t, u)$ es consistente con las propiedades necesarias para que ésta se pueda considerar como una rotación en el plano tiempo-frecuencia.

Debido a que las funciones K_a tienen magnitud constante, el producto con una función en L_1 o L_2 también se encontrará dentro de esos espacios. Por lo tanto, la FrFT de una función existe bajo las mismas condiciones que su FT. [43, 45]

Adicionalmente, se identifica el inverso del operador de la siguiente forma. \mathcal{F}^{-a} es el inverso de \mathcal{F}^a , puesto que $\mathcal{F}^a \mathcal{F}^{-a} = \mathcal{F}^{-a} \mathcal{F}^a = \mathcal{F}^0 = Id$. A partir de esto, se puede definir el par de transformación para una función $g(t)$:

$$G_a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) K_a(t, u) dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_a(u) K_{-a}(t, u) du$$

Debido a la unitariedad de las funciones del núcleo (4-3), se puede interpretar a la FrFT como una transformación de una representación a otra, y además los productos internos son invariantes bajo dicha transformación [42]. En otras palabras, se satisface el teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(u)Y_a^*(u)du \quad (4-7)$$

De (4-7) se deduce la propiedad de conservación de la energía:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(u)|^2 du \quad (4-8)$$

Debido a que la FrFT se basa en la descomposición de la función en el conjunto ortonormal de funciones K_a -funciones tipo *chirp* (2-31)-, se puede interpretar la magnitud cuadrada la FrFT de una señal $g(t)$, $|G_a(u)|^2$, como la distribución de la energía de la señal entre las diferentes funciones tipo chirp de la base $K_a(t, u)$ [45].

Esto es consistente con la interpretación de la magnitud cuadrada del espectro (transformada ordinaria de Fourier), $|X(f)|^2$, como la distribución de la energía de la señal entre el conjunto de funciones senoidales $e^{-j2\pi ft}$ con frecuencias f [43].

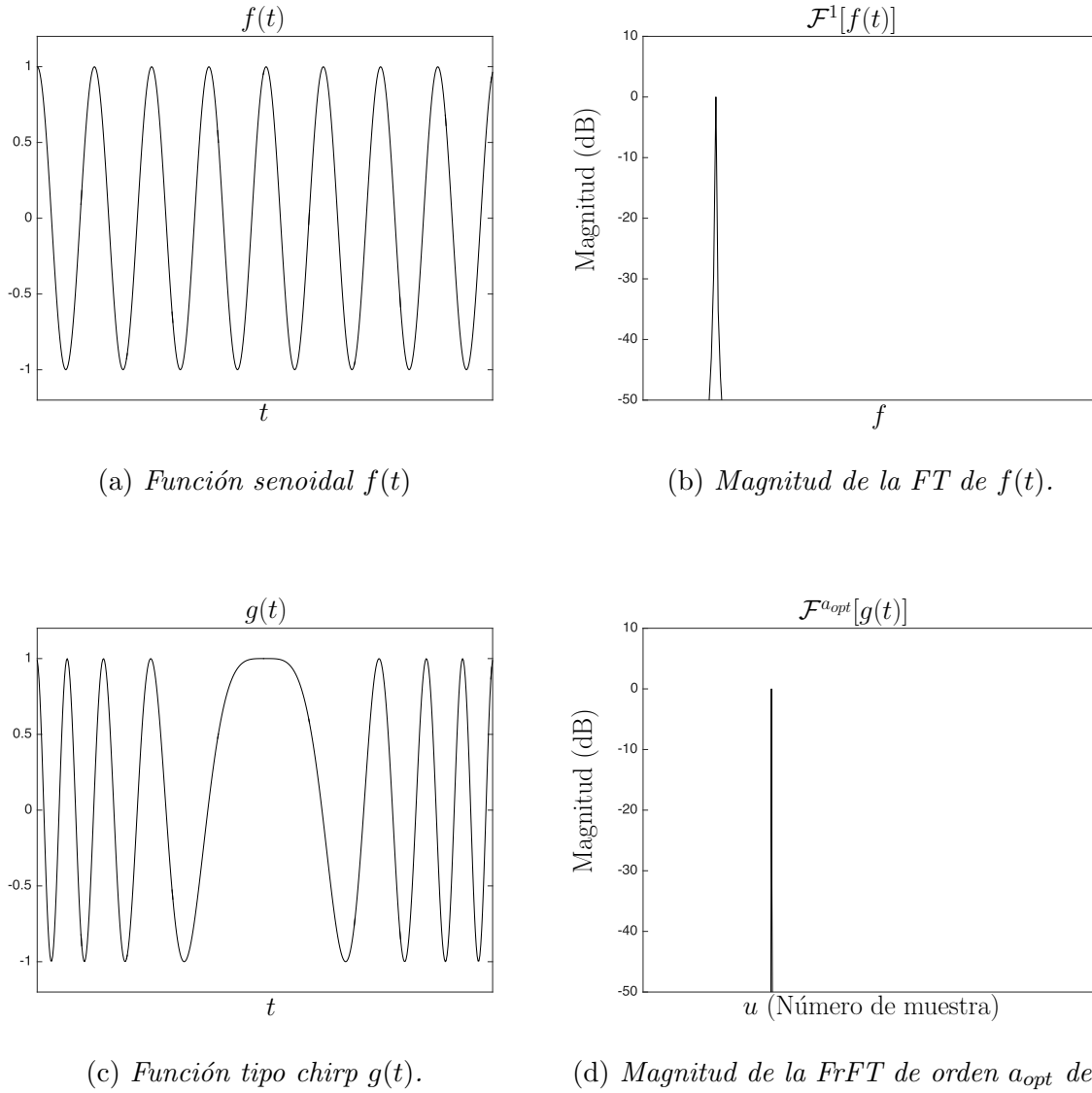
En la siguiente figura se muestra una comparación entre la FT de una señal senoidal (sin modulación de frecuencia) y la FT de un chirp lineal (ambos multiplicados por una ventana rectangular).

Cuando se toma la magnitud de la FT de una función senoidal con frecuencia f_0 , se observan respuestas tipo $\delta(f - f_0)$ (en el caso de la figura **4-2b**, no es una δ estricta debido a que la ventana rectangular corta la señal a un tiempo finito). Análogamente, cuando se toma la magnitud de la FrFT de orden a_{opt} de una función tipo chirp, se observa una respuesta tipo $\delta(u - u_0)$ (figura **4-2d**).

A continuación se derivarán expresiones para los parámetros de un chirp lineal en términos de a_{opt} y u_0 .

De la propiedad de ortonormalidad de las funciones del núcleo K_a (4-6), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_a(t, u)K_a^*(t, u')dt = \delta(u - u')$$

**Figura 4-2**

Esto se puede ver como la FrFT de orden a de una función $c(t) = K_a^*(t, u')$.

Si al tomar la FrFT de orden a de una función tipo chirp $c(t) = A \exp[2\pi j(kt^2 + lt + m)] = A \exp[2\pi j\phi_c(t)]$ se obtiene una respuesta $\delta(u - u_0)$ en la variable u , entonces

$$c(t) = K_a^*(t, u_0)$$

$$\Rightarrow A \exp[2\pi j\phi_c(t)] = C_a^* \exp[2\pi j\phi_k(t, u_0)]$$

donde $\phi_k(t, u_0) = \csc(\alpha)tu_0 - \frac{t^2+u_0^2}{2} \cot(\alpha)$. Lo anterior implica que

$$\begin{aligned}\phi_c(t) &= \phi_k(t, u_0) \\ \Rightarrow kt^2 + lt + m &= \csc(\alpha)tu_0 - \frac{t^2}{2} \cot(\alpha) - \frac{u_0^2}{2} \cot(\alpha)\end{aligned}$$

Así, se encuentra que los parámetros k y l del chirp $c(t)$ están dados en términos de la posición del máximo en la variable u (u_0) y el ángulo de la transformada $\alpha = a\pi/2$:

$$k = -\frac{\cot(\alpha)}{2} \quad (4-9)$$

$$l = \csc(\alpha)u_0 \quad (4-10)$$

El desarrollo anterior lleva a considerar los máximos de $|\mathcal{F}^a(u)|^2$ como una fuente para obtener los parámetros (chirp rate k y frecuencia portadora l) de una señal tipo chirp, o una superposición de éstas. Naturalmente, para chirps con ambos parámetros desconocidos, se debe realizar una búsqueda de los máximos en a y en u a lo largo de la superficie $|\mathcal{F}^a(u)|^2$ [47, 48, 49].

Como se mencionó en la sección ?? los chirps detectados a la salida de nuestra instalación experimental tienen la forma

$$c_i(t) = \cos[\Omega_j t + \mu t^2 + k_{min} \delta_j] \quad (4-11)$$

y son simétricos alrededor de $\tau_i = z_i/c$. Además, $\mu = \Delta k \Delta^R / T^2$. Como estos son parámetros de la instalación experimental, es posible conocer el coeficiente cuadrático del chirp a priori. Así, se puede modelar analíticamente los chirps de la siguiente forma:

$$c_i(t) = \cos[(t - \tau_i)^2] \quad (4-12)$$

La señal a la salida del arreglo será una superposición de (4-12), cada uno con diferentes tiempos de retraso τ_i . A su vez, esta superposición estará modulada por el grado de coherencia de la fuente, el cual se aproxima mediante una función Gaussiana.

En este trabajo se evaluó la efectividad de la FrFT para resolver los siguientes problemas directamente relacionados con el procesamiento de la señal experimental:

- Determinación de los parámetros en superposiciones de señales tipo chirp
- Determinación de los retrasos temporales τ_i en superposiciones discretas de chirps de la forma $c(t) = \sum_i A_i \cos[(t - \tau_i)^2]$
- Recuperación de señales contaminadas con chirps mediante una deconvolución.

Antes de presentar los resultados de estas pruebas, se discutirá el algoritmo empleado para la evaluación de la FrFT, expuesto en [44, 46].

4.2. Cálculo de la FrFT

A continuación se presentarán algunas relaciones trigonométricas, las cuales serán útiles para re expresar el núcleo de la FrFT:

$$u^2 \cot(\alpha) + t^2 \cot(\alpha) - 2ut \csc(\alpha) = u^2(\cot(\alpha) - \csc(\alpha)) + (u - t)^2 \csc(\alpha) + t^2(\cot(\alpha) - \csc(\alpha))$$

$$\cot(\alpha) - \csc(\alpha) = -\tan(\alpha/2)$$

Usando las relaciones anteriores, se puede expresar el núcleo de la transformación de la siguiente forma

$$K_a(t, u) = C_\alpha \exp \left[j\pi \left(-u^2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (u - t)^2 \csc(\alpha) - t^2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] \quad (4-13)$$

Por lo tanto, la FrFT de orde a de una función $x(t)$ se puede escribir como

$$X_a(u) = C_\alpha \exp[-j\pi \tan(\alpha/2)u^2] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\pi((u - t)^2 \csc(\alpha) - t^2 \tan(\alpha/2))] x(t) dt$$

$$= C_\alpha \exp[-j\pi \tan(\alpha/2)u^2] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\pi((u - t)^2 \csc(\alpha))] (x(t) \exp[-j\pi t^2 \tan(\alpha/2)]) dt$$

Si se definen

$$g(t) = \exp[j\pi t^2 \csc(\alpha)] \quad (4-14)$$

$$h(t) = x(t) \exp[-j\pi t^2 \tan(\alpha/2)] \quad (4-15)$$

Entonces, se puede expresar a la FrFT de $x(t)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X_a(u) &= C_\alpha \exp[-j\pi \tan(\alpha/2)u^2] \int_{-\infty}^{\infty} g(u-t)h(t)dt \\ &= C_\alpha \exp[-j\pi \tan(\alpha/2)u^2] [g(t) * h(t)] \end{aligned} \quad (4-16)$$

La ecuación (4-16) indica que la FrFT continua se puede ver como la convolución de las señales $h(t)$ y $g(t)$, multiplicada por una exponencial compleja $\exp[-j\pi \tan(\alpha/2)u^2]$ y una constante C_α .

Como se hizo notar en [42, 43, 44, 46] y se ha demostrado anteriormente, el cálculo de la FrFT se puede realizar en cuatro pasos

1. Construcción de $h(t)$, como se define en (4-15).
2. Convolución de $h(t)$ con la señal $g(t)$ definida en (4-14).
3. Multiplicación por un chirp $\exp[-j\pi \tan(\alpha/2)u^2]$.
4. Multiplicación por la constante compleja C_α

El algoritmo definido por los pasos anteriores es llamado *Transformada fraccional de Fourier rápida aproximada*, o FAFrFT por sus siglas en inglés. En este caso, se aproxima una transformada fraccional de Fourier continua mediante el mapeo de muestras de la señal a muestras de la transformada continua [46].

Puesto que -como se muestra en (4-16)- la FrFT continua se puede descomponer en productos de chirps y convolución, se puede aplicar el algoritmo de FFT con complejidad $O(N \log N)$ lo cual resulta en un cálculo rápido.

La rutina expuesta en [46] para el cálculo de la FAFrFT de una señal f se basa en la aproximación:

$$F^a[f] \approx \frac{C_\alpha}{2\sqrt{N}} E_c \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}[E_d] \times \mathcal{F}[E_c f] \} \quad (4-17)$$

donde N es la longitud de la señal y

$$E_c = \exp[-j\pi \tan(\alpha/2)x_k^2]$$

$$E_d = \exp[-j\pi \csc(\alpha)x_k^2]$$

$$x_k = k/2\sqrt{N}$$

Puesto que tanto después de una multiplicación por chirp tanto como después de una convolución el ancho de banda de la señal se duplica [44, 46], se debe reemplazar la señal original con longitud N por una señal interpolada de longitud $2N$, para después tomar una submuestra del resultado y obtener la FAFrFT con longitud N . La interpolación es realizada usando la fórmula de interpolación de Shannon-Whittaker, también llamada interpolación sinc:

$$y(x) = \sum_k f(x_k) \text{sinc}(2\sqrt{N}(x - x_k)) \quad (4-18)$$

En la siguiente sección se presentan los resultados de las pruebas realizadas. En dichas pruebas, se utilizó el algoritmo descrito anteriormente para el cálculo digital de la FrFT.

5 Resultados

Para todas las pruebas realizadas, se generaron señales en un intervalo $t_d = [0, 2]$ s con frecuencia de muestreo $F_s = 1000$ Hz, lo cual resulta en señales con longitud de $N = 2001$ muestras.

5.1. Separación y estimación de parámetros de chirps

En primer lugar, como una prueba del algoritmo descrito, se trató el problema de la determinación de los parámetros de una superposición de chirps. Esto es, para una señal compleja

$$c(t) = \sum_i \exp[-j2\pi(k_i t^2 + l_i t + m_i)] \quad (5-1)$$

se desea separar la señal y encontrar el conjunto de $\{k_i, l_i\}$. Como se ha mencionado anteriormente, se debe realizar una búsqueda de máximos en la superficie $|F^a(u)|^2$. Esto se realiza en tres pasos:

1. Cálculo de $\mathcal{F}^a[c(t)]$ para diferentes órdenes a
2. Identificación de las posiciones de los máximos de la superficie $|F^a(u)|^2$, $\{\tilde{a}_i, \tilde{u}_i\}$.
3. A partir de (4-9) y (4-10) se encuentran $\{k_i, l_i\}$

Se introdujo la siguiente superposición de chirps complejos

$$c(t) = \exp[2\pi j(128t^2 - 50t)] + \exp[2\pi j(100t^2 - 100t)] + \exp[2\pi j(150t^2 - 155t)] \quad (5-2)$$

La señal introducida está multiplicada por una ventana cuadrada con duración $t_d = 2$ s.

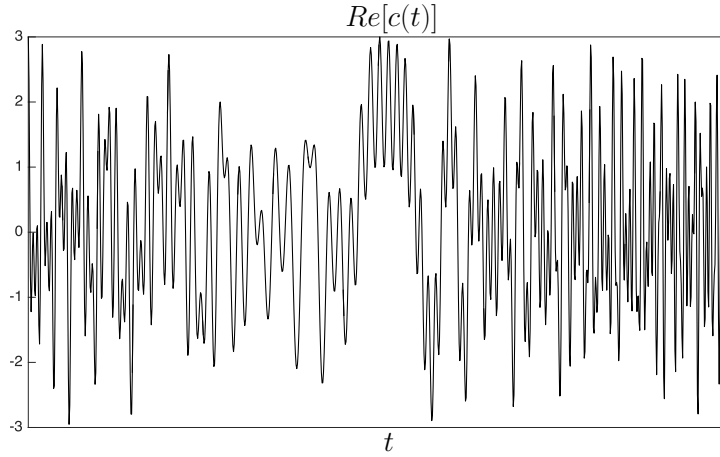


Figura 5-1: Parte real de $c(t)$ (5-2)

Al aplicar la FrFT a la señal, se realizó una re-escala de los ejes de acuerdo con lo presentado en [49, 50]. Esto es, se introducen las variables adimensionales

$$x = t/s \quad v = fs \quad (5-3)$$

donde $s = (t_d/F_s)^{1/2}$ es un parámetro de escala. Como se menciona en [50], las posiciones de los picos en la superficie $|F^a(u)|^2$ dependen del parámetro de normalización elegido. La renormalización descrita anteriormente mejora la separación entre los picos debidos a señales multicomponentes.

Bajo esta normalización de las variables, se tiene que los parámetros de los chirps estarán dados por [50]:

$$k_i = -\frac{F_s \cot(\hat{\alpha}_i)}{t_d} \quad (5-4)$$

$$l_i = \sqrt{\frac{F_s}{t_d}} \hat{u}_i \csc(\hat{\alpha}_i) \quad (5-5)$$

donde $\hat{\alpha}_i = a_{opt_i} \pi/2$, con a_{opt_i} los órdenes óptimos de la FrFT para cada chirp, y \hat{u}_i los máximos en el eje de la variable FrFT para cada chirp.

Se calculó la FrFT de orden $a \in [-1, 0]$ en pasos de 0.001. Graficando la superficie $|\mathcal{F}^a(u)|^2$ se observan tres máximos claros tipo δ

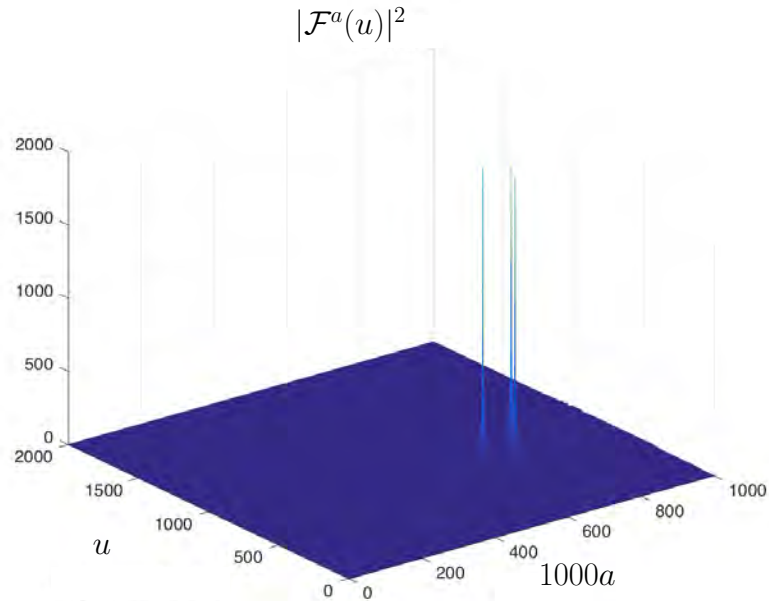
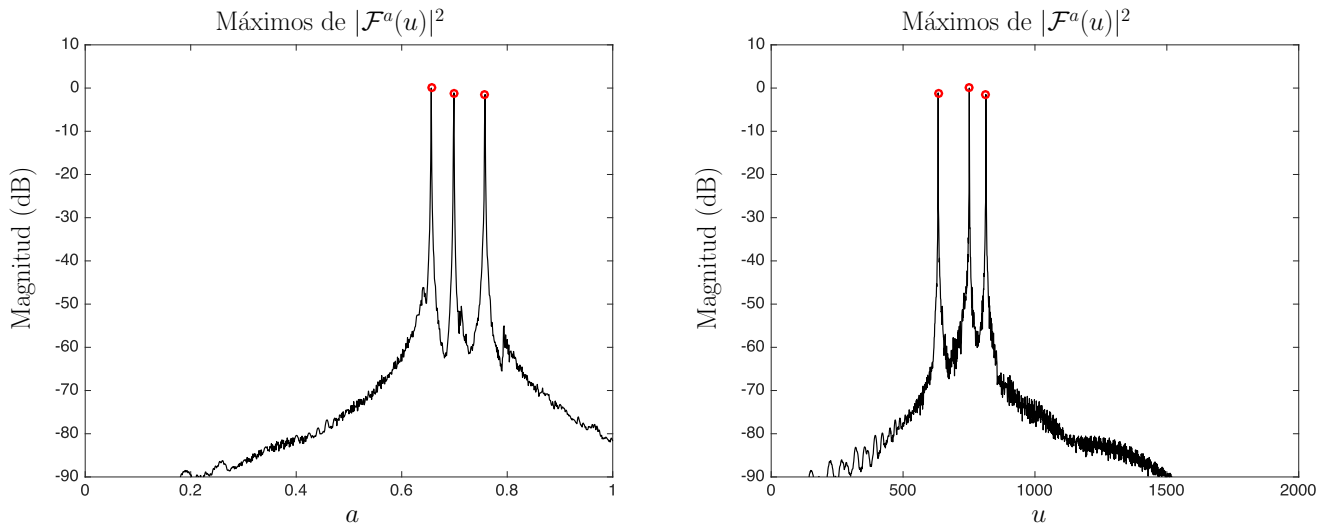


Figura 5-2: Magnitud cuadrada del la FrFT de $c(t)$ de órdenes $a \in [-1, 0]$



(a) Máximos en a

(b) Máximos en u

Figura 5-3

Como se observa en 5-3a y 5-3b, los máximos correspondientes a cada componente de la señal son fácilmente identificables, ya que el ruido se encuentra por debajo de los -50dB. Asociando cada posición de los máximos $\{\hat{a}_i, \hat{u}_i\}$ con los parámetros $\{k_i, l_i\}$ basándose en las relaciones (5-4) y (5-5), se obtienen los siguientes parámetros.

	k_i	$k_i(\text{teórico})$	l_i	$l_i(\text{teórico})$
1	127.18	128	49.57	50
2	99.89	100	100.14	100
3	149.97	150	154.51	155

Tabla 5-1: *Parámetros estimados.*

De los resultados anteriores se puede concluir que tanto el comportamiento de la implementación de la transformada como los valores estimados a partir de los máximos están de acuerdo con lo esperado teóricamente.

La adimensionalización descrita en [49, 50] y dada por (5-4) permite modificar la separación entre los picos correspondientes a las señales mediante el cambio en el parámetro s , así como localizar simultáneamente $\{k_i\}$ y $\{l_i\}$.

En nuestro caso, el chirp rate k de la señal es el mismo para todos los componentes y está dado por el arreglo experimental. Entonces, existirá una relación lineal entre los máximos en u y los parámetros de interés. Debido a esto, en las siguientes pruebas no se usó la renormalización descrita.

5.2. Determinación de retrasos temporales en superposiciones discretas

Como se discutió en la sección 2.3, la señal detectada en el arreglo experimental está conformada por una superposición de chirps lineales simétricos centrados en τ_i .

$$c(t) = \sum_i A_i \cos[\Omega_i t + \mu t^2 + k_{min} \delta_i] \quad (5-6)$$

donde el término cuadrático, o chirp rate μ , es igual para todos los términos de la superposición y depende del arreglo experimental. Por lo tanto, μ es un parámetro conocido y se puede considerar $\mu = 1$ para el siguiente análisis. De esta forma, la señal detectada se puede representar analíticamente como

$$c(t) = \sum_i A_i \cos[(t - \tau_i)^2] \quad (5-7)$$

Al comparar los elementos de la superposición (5-7) con un chirp real de la forma general $\cos[2\pi(kt^2 + lt + m)]$, se relacionan los parámetros de la siguiente forma:

$$k = 1/2\pi$$

$$l = -\tau/\pi$$

Al encontrar los máximos $\{\hat{a}_i, \hat{u}_i\}$ en la superficie $|\mathcal{F}^a(u)|^2$, se pueden calcular los retrasos temporales individuales mediante

$$\tau_i = -\pi \hat{u}_i \csc(\alpha_i) \quad (5-8)$$

En este caso, puesto que los chirp rates de todos los componentes son iguales, $\csc(\alpha_i) = m = \text{constante}$. De esta forma, la relación entre los máximos en el dominio u y los retrasos temporales de los chirps es lineal. Además de esto, sólo es necesario encontrar un orden óptimo de la transformación a_{opt} , lo cual se puede realizar en la fase de calibración del equipo.

Como primer ejemplo de la estimación de $\{\tau_i\}$ usando la FrFT, se introdujo la siguiente superposición de 7 chirps:

$$c(t) = \sum_{i=1}^7 \cos[(t - \tau_i)^2] \quad (5-9)$$

$$\tau_i = \{2, 10, 30, 40, 61, 75, 150\}$$

donde cada elemento está modulado por una ventana Gaussiana. Después de calcular la FrFT de orden $a \in [0, 1]$ en pasos de $da = 0,01$, se obtiene la superficie $|\mathcal{F}^a(u)|^2$, en la cual se observan siete máximos tipo δ .

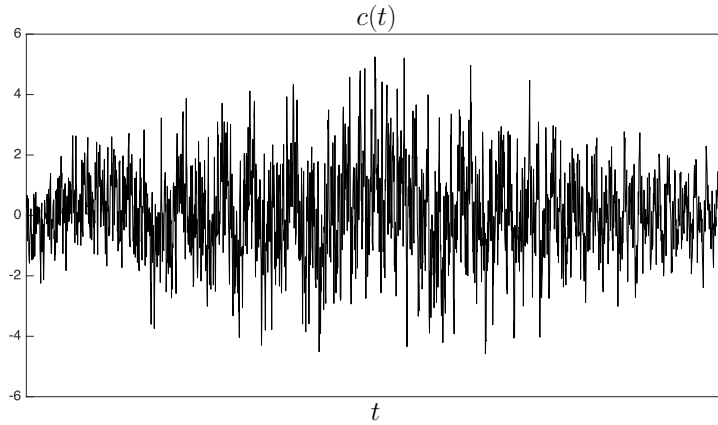


Figura 5-4: Superposición de 7 chirps con retrasos temporales τ_i (5-9)

Graficando los máximos en cada eje (a y u) se obtienen las figuras 5-6a y 5-6b. Se observa que, según lo esperado, sólo se presenta un máximo tipo δ a lo largo del parámetro a .

Se observa que todos los máximos se encuentran por arriba de los -20dB. El máximo en el eje a se da para $a = 0,96$. Usando esto, se encuentra que $2\pi k = 0,998$. Esto difiere en 0,2% del valor teórico, $2\pi k = 1$.

Usando la relación (5-8), se obtienen los retrasos temporales de la superposición (figura 5-7).

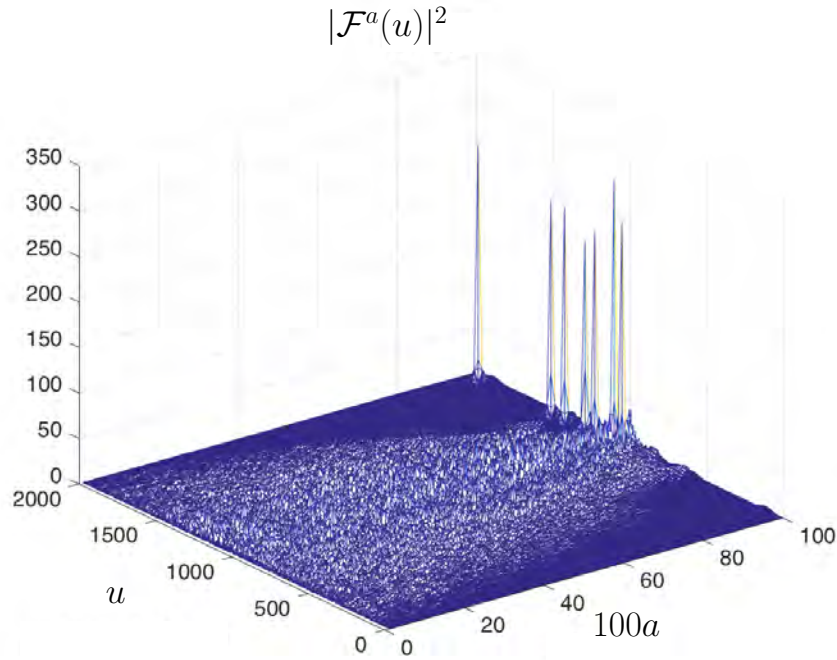
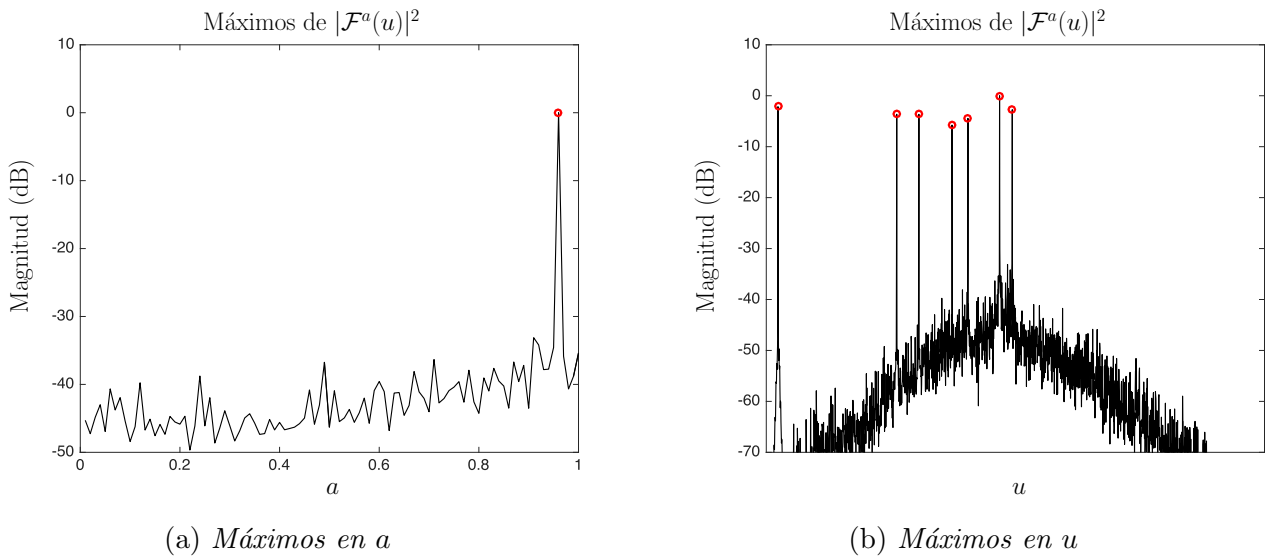


Figura 5-5: Magnitud cuadrada de la FrFT de $c(t)$ de órdenes $a \in [0, 1]$



(a) Máximos en a

(b) Máximos en u

Figura 5-6

En todos los casos, los retrasos temporales obtenidos a partir de la FrFT, $\{\tau_{ir}\}$ no difieren en más de 1.2% respecto a $\{\tau_i\}$. Se observa también que la cercanía de los parámetros en la superposición afecta la la magnitud del fondo en la variable u .

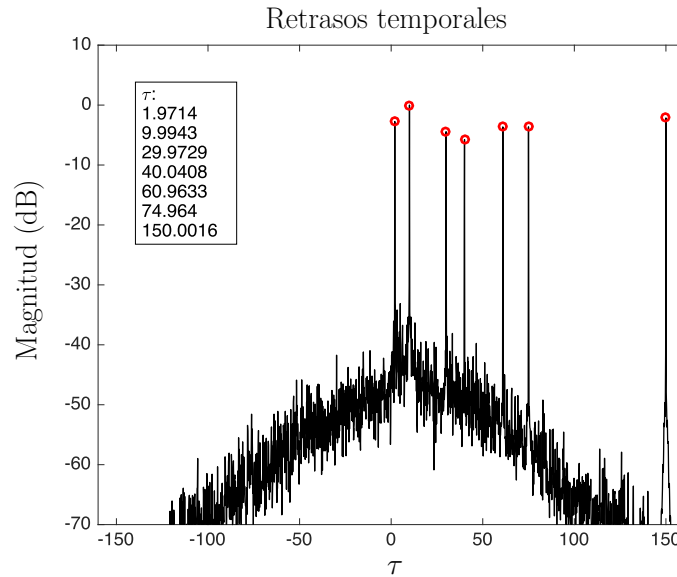


Figura 5-7: Retrasos temporales estimados de la superposición (5-9)

La siguiente prueba se realizó con una superposición de 20 chirps reales:

$$c(t) = \sum_{i=1}^{20} \cos[(t - \tau_i)^2] \quad (5-10)$$

$$\tau_i = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 75, 80, 85, 95, 100, 110, 125, 130, 135, 140, 150, 160\}$$

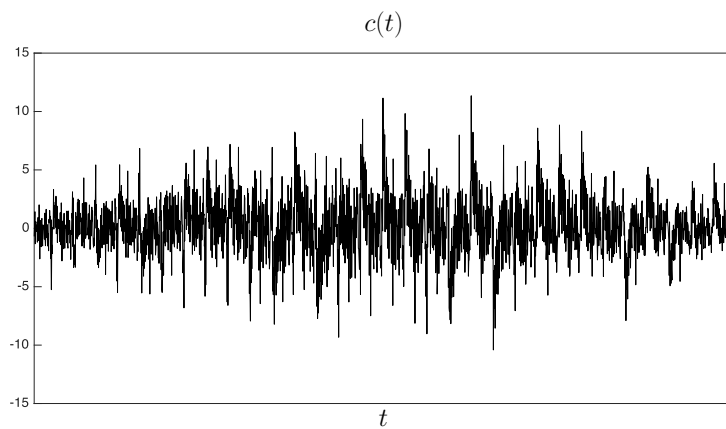


Figura 5-8: Superposición de 20 chirps con retrasos temporales τ_i (5-10)

Al igual que en el caso anterior, todos los máximos se encuentran a lo largo de $a = 0,96$. En

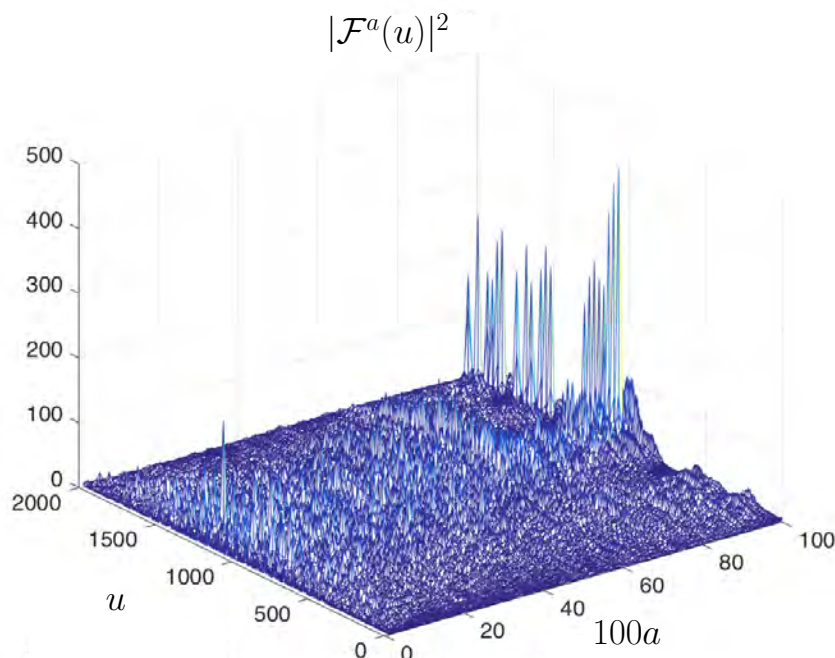


Figura 5-9: Magnitud cuadrada de la FrFT de $c(t)$ de órdenes $a \in [0, 1]$

la figura 5-10 se muestran los retrasos temporales estimados. Se observa que la magnitud del fondo se vio aumentada respecto al primer ejemplo, pero los máximos se mantienen sobre los -20dB.

Con los dos ejemplos anteriores se ha demostrado que la FrFT permite la identificación de retrasos temporales en superposiciones de chirps lineales. Debido a las características de la señal experimental (chirp rate fijo para todos los componentes), la búsqueda se reduce a un solo parámetro que mantiene una relación lineal con los máximos de la transformada. El orden óptimo a se puede determinar al inicio de la operación del equipo.

Finalmente se observa que, en el caso discreto, existe una variación en la magnitud de los máximos. Dicha variación se hace más notoria conforme se aumenta la cantidad de chirps en la superposición. Sin embargo, en el caso real, la señal se puede ver como una superposición continua (integral) de chirps. El caso discreto es útil para, a partir de la señal de referencia,

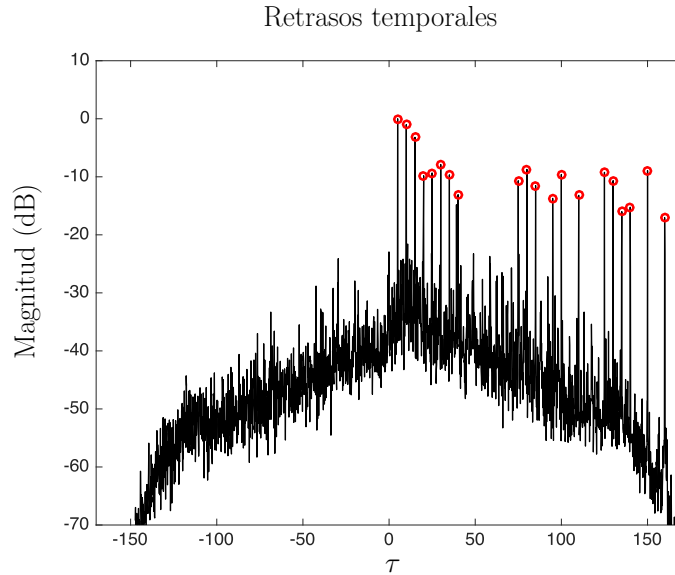


Figura 5-10: Retrasos temporales estimados de la superposición (5-10)

calcular automáticamente los parámetros (orden óptimo de la FrFT) en la fase de calibración.

5.3. Deconvolución

Para explorar la utilidad de la FrFT en la recuperación de amplitudes producto de una convolución con chirps, se tomaron señales del tipo:

$$y(t) = f(t) * g(t) \quad (5-11)$$

donde $f(t)$ es una función tipo chirp y $g(t)$ es una función continua cualquiera a recuperar. En este caso, se desea utilizar la FrFT para obtener los parámetros de $f(t)$ y así reconstruir una $f_r(t)$, para finalmente realizar una convolución inversa y recuperar $g(t)$:

$$g_r(t) = y(t) * 1/f_r(t)$$

Como primer ejemplo, se tomó:

$$f(t) = \cos[3t^2 + 7t]$$

$$g(t) = 2t^2$$

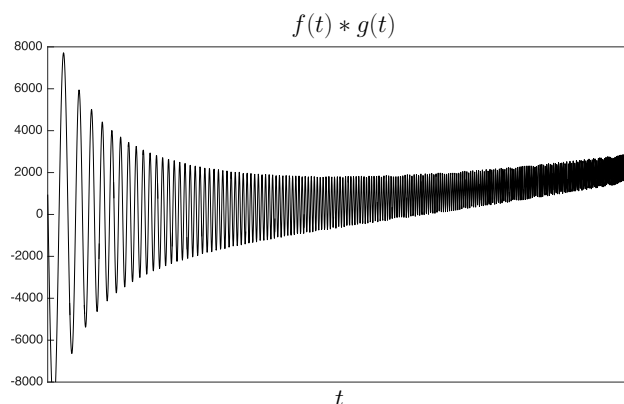


Figura 5-11: Señal contaminada con chirp lineal (5-11)

Al calcular la FrFT de órdenes $a \in [0, 1]$ en pasos de $da = 0,01$, se obtiene la superficie $|\mathcal{F}^a(u)|^2$, en la cual se observa un máximo.

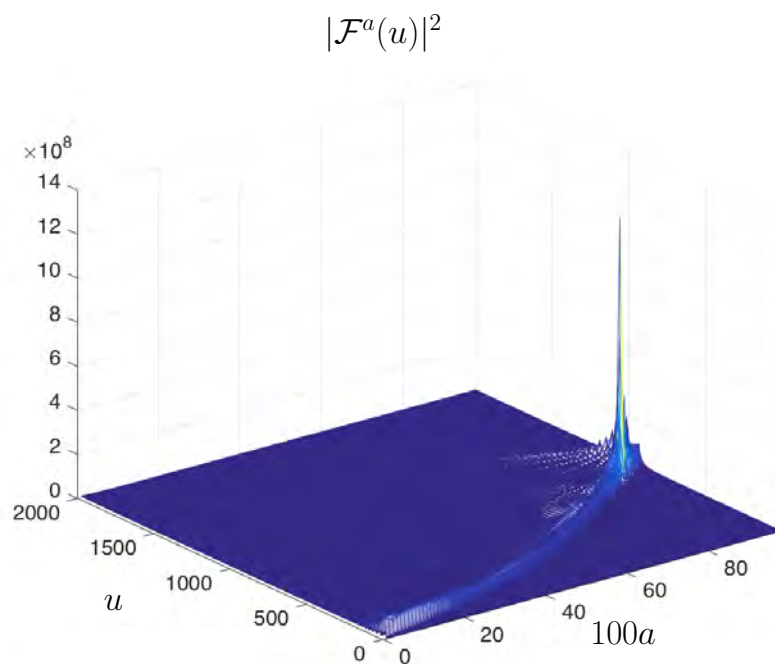


Figura 5-12: Magnitud cuadrada de la FrFT de $y(t)$ (5-11) de órdenes $a \in [0, 1]$

De la posición del máximo en a y u , se obtienen los parámetros estimados de $f(t)$, con los cuales se construye $f_r(t)$. Al aplicar la convolución inversa de la señal original con $f_r(t)$, se obtiene $g_r(t)$ (figura 5-14)

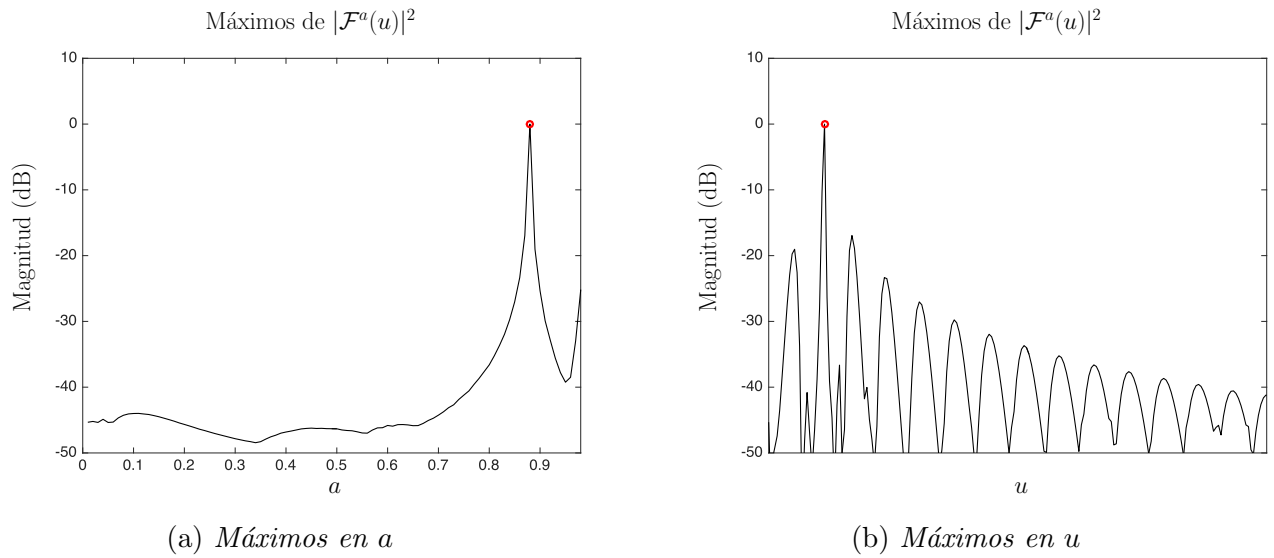


Figura 5-13

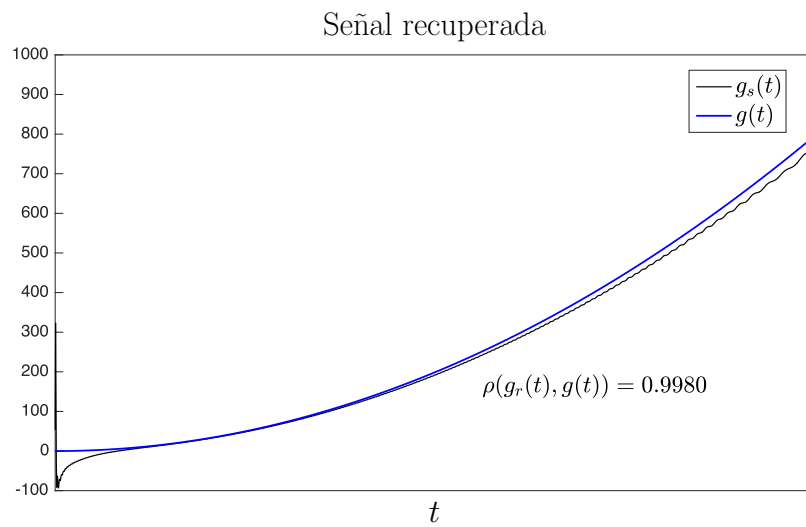


Figura 5-14: Señal teórica (azul) $g(t)$ y señal recuperada (negro) $g_r(t)$

El coeficiente de correlación entre la señal teórica y la recuperada es de 0.998. Se observa que la mayor dispersión entre éstas se presenta alrededor de los extremos del dominio de la señal.

Como siguiente prueba, se tomó un pulso rectangular. La recuperación de la señal se muestra en la figura 5-15. Aunque la recuperación es buena (el coeficiente de correlación entre la señal teórica y la recuperada es de 0.9290), en este caso se hace evidente la debilidad principal de la deconvolución - el método tiene problemas cerca de las discontinuidades de la señal.

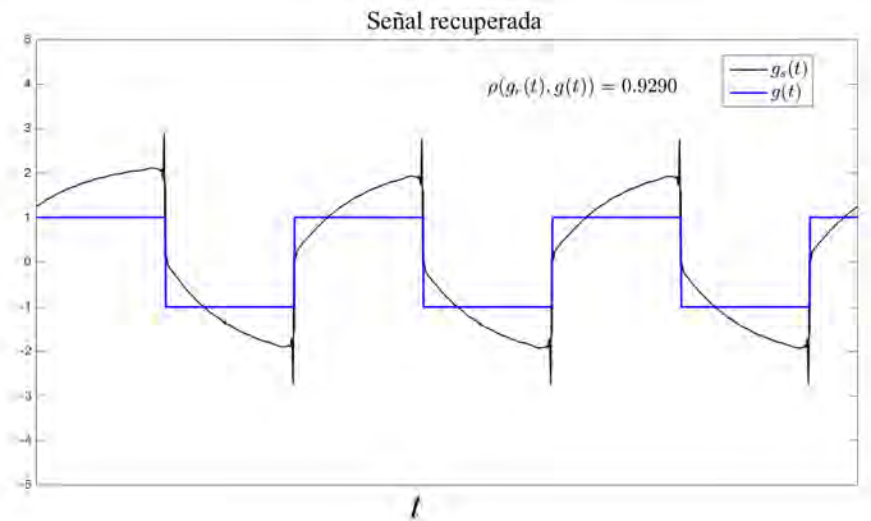


Figura 5-15: Señal teórica (azul) $g(t)$ y señal recuperada (negro) $g_r(t)$

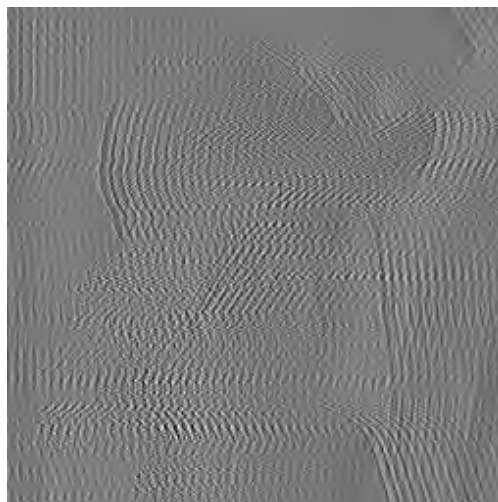
Finalmente, para evaluar la recuperación de amplitudes de señales más generales y discontinuas, se muestra la recuperación de una imagen contaminada con chirps. En este caso, cada línea de la imagen contaminada $c_i[n]$ está dada por:

$$c_i[n] = l_i[n] * s_i[n] \quad (5-12)$$

donde $l_i[n]$ representa la línea i de la imagen original y $s_i[u]$ un chirp multicomponente. Al igual que en el caso anterior, al aplicar la FrFT, se pueden obtener los parámetros de los chirps dentro de la convolución. Al realizar una convolución inversa, se pueden recuperar las líneas de la imagen original:

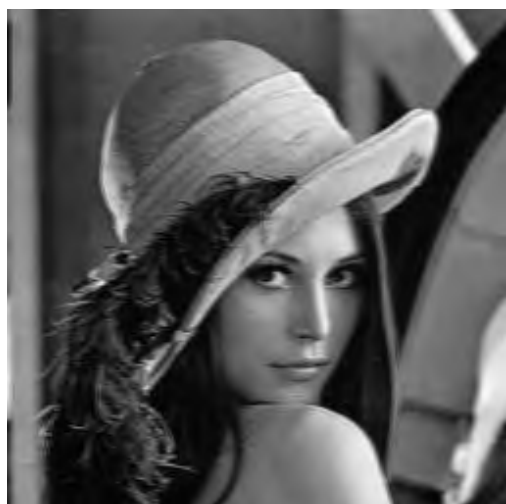


(a) *Imagen original*



(b) *Imagen contaminada con chirps*

Figura 5-16



(a) *Imagen recuperada*



(b) *Resta de imágenes 5-16a y 5-17a*

Figura 5-17

Al igual que en la prueba anterior, se observa que la mayor dispersión entre los valores originales y los recuperados se encuentra cerca de los bordes o discontinuidades de cada línea de la imagen.

Con base en los resultados de las pruebas anteriores, se puede concluir que el método de deconvolución basado en la FAFrFT tiene resultados favorables, aunque presenta problemas

cerca de bordes o discontinuidades. Debido a que la FFT y operación de convolución tienen algoritmos de tiempo real en arquitecturas FPGA, existe la posibilidad de implementar este método en la línea de procesamiento.

Es posible que una búsqueda de máximos más refinada, como la propuesta en [39] pueda mejorar los resultados en la deconvolución. Sin embargo, es desconocido si estas búsquedas refinadas se pueden implementar rápidamente en la arquitectura.

6 Conclusiones

En este trabajo se ha explorado la adecuación de la transformada de Fourier de orden fraccional (FrFT) al procesamiento de la señal del arreglo DDL-SSOCT descrito en [9]. En particular, se propone un método basado en el algoritmo FAFrFT (transformada fraccional de Fourier rápida aproximada) para la extracción de la información contenida dentro de los chirps lineales producto de dicha instalación experimental.

El cálculo de la FAFrFT se puede realizar mediante aplicaciones del algoritmo FFT, lo cual abre la posibilidad de aplicar el método descrito en tiempo real. Los resultados muestran la habilidad de la FArFT para extraer los parámetros de superposiciones discretas de múltiples chirps lineales. Los picos detectados al aplicar la FrFT - a partir de los cuales se calculan los parámetros - se encontraron sobre -20dB en los casos analizados.

Una de las desventajas observadas al momento de separar superposiciones de chirps es la variación en la altura de los picos, aún cuando la magnitud de las señales componentes es la misma. No obstante, al momento de la calibración del equipo nos interesa conocer sólo los parámetros de la señal, siendo la magnitud de ésta irrelevante. Por ello, se espera que el algoritmo FAFrFT presentado sea aplicable en el proceso de calibración.

Además, debido a que no existe un análogo al teorema de convolución para la FrFT, se desconoce el efecto que pueden tener distintas ventanas al momento de calcular la transformada, y si será posible mejorar los resultados obtenidos mediante la aplicación de alguna.

Se ha mostrado también que la implementación de la FAFrFT permite la recuperación de señales contaminadas con chirps. Se encontró que la deconvolución presenta problemas cuando las señales contienen discontinuidades pronunciadas, sin embargo los resultados generales son favorables. Es posible que una búsqueda de máximos más refinada mejore la deconvolución. Por lo tanto, el método descrito podrá ser aplicado en conjunción con métodos más lentos (mínimos cuadrados) para el post-procesamiento de la señal y reconstrucción de la imagen.

Como posibles trabajos futuros, se encuentra la aplicación del método en la instalación experimental, así como la implementación de la versión discreta de esta transformada (DFrFT). Actualmente no existe un algoritmo análogo al de FFT para calcular rápidamente la transformada fraccional discreta; los algoritmos actuales requieren la diagonalización de la matriz DFrFT, lo cual tiene un alto costo computacional. Si bien se han desarrollado métodos para agilizar el cálculo de la DFrFT [51], está pendiente probar si su implementación será suficientemente rápida.

Asimismo, se puede comparar la eficiencia de métodos basados en la FrFT con la del método basado en la BCT (Bowtie Chirplet Transform) propuesto en [35]. Es también de interés explorar la aplicación de la Discrete Chirp - Fourier Transform (DCFT) descrita en [37] como una alternativa al cálculo de la FrFT mostrado en este trabajo.

En general, el algoritmo FAFrFT ha producido resultados favorables y será útil al momento de obtener los parámetros de calibración del equipo. Debido a que la FFT y la operación de convolución pueden realizarse en tiempo real dentro de FPGAs, la implementación del algoritmo dentro de la línea de adquisición y pre-procesamiento de la instalación experimental es viable.

Referencias

- [1] Nolte, D. D. *Optical Interferometry for Biology and Medicine*. Springer, 2012.
- [2] Drexler, Wolfgang, and James G. Fujimoto. *Optical Coherence Tomography Technology and Applications*. Springer, 2015.
- [3] J.G. Fujimoto, M.E. Brezinski, et al. *Biomedical imaging and optical biopsy using optical coherence tomography*. Nat. Med. 1, 970-972 (1995)
- [4] Bouma, Brett E., and Guillermo J. Tearney. *Handbook of Optical Coherence Tomography*. Informa, 2009.
- [5] Brezinski, Mark E. *Optical Coherence Tomography: Principles and Applications*. Elsevier, 2013.
- [6] Schmitt, J.m. *Optical Coherence Tomography (OCT): a Review*. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 5, no. 4, 1999, pp. 1205-1215.,
- [7] Izatt, J. A., and M. A. Choma. *Theory of Optical Coherence Tomography*. Optical Coherence Tomography Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering, 2008, pp. 47-72.,
- [8] Wang Z., Reisman C., Liu J., Chan K. *Introduction to Swept Source OCT*. en: Michalewska Z., Nawrocki J. (eds) *Atlas of Swept Source Optical Coherence Tomography*. Springer, 2017
- [9] Kolokoltsev, Oleg, Ivan Gomez-Arista, Carlos G. Trevino-Palacios, Naser Qureshi, and Elsi Violeta Mejia-Uriarte. *Swept Source OCT Beyond the Coherence Length Limit*. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics 22.3 (2016)

-
- [10] Mandel, Leonard & Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995
- [11] Born, Max, et al. *Principles of Optics Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* Cambridge Univ. Press, 2016.
- [12] Fowles, Grant R. *Introduction to Modern Optics*. Dover Publ., 1989.
- [13] A.F Fercher, W. Drexler, C.K. Hitzenberger, T. Lasser. *Optical coherence tomography - principles and applications*. Rep. Prog. Phys. vol. 66, pp. 239-303, 2003.
- [14] 1300 nm MEMS VCSEL Swept Laser Source, www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=7109
- [15] Choma, Michael, et al. *Sensitivity Advantage of Swept Source and Fourier Domain Optical Coherence Tomography*. Optics Express, vol. 11, no. 18, (2003) p. 2183.
- [16] Drexler, Wolfgang, and James G. Fujimoto. *Optical Coherence Tomography Technology and Applications*. Springer, 2015.
- [17] <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=SL1325-P16>
- [18] Meleppat, R. K., et al. *An Efficient Phase Analysis-Based Wavenumber Linearization Scheme for Swept Source Optical Coherence Tomography Systems*. Laser Physics Letters, vol. 12, no. 5, (2015).
- [19] B.R. Mahafza *Radar Systems Analysis and Design using MATLAB*. Boca Raton, FL. CRC Press, 2002
- [20] Wechsler, Mark. *Characterization of Time Varying Frequency Behaviour Using Continuous Measurement Technology*. Hewlett-Packard Journal, vol. 11, no. 1 (1989), p.6.
- [21] Griffiths, L. *Rapid Measurement of Digital Instantaneous Frequency*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 23, no. 2 (1975), pp. 207-222.
- [22] Maragos, P., et al. *On Amplitude and Frequency Demodulation Using Energy Operators*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 4 (1993), pp. 1532-1550.

-
- [23] Bovik, A.C., et al. *AM-FM Energy Detection and Separation in Noise Using Multiband Energy Operators*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 12 (1993), pp. 3245-3265.
- [24] Santhanam, B., P. Maragos. *Demodulation of Discrete Multicomponent AM-FM Signals Using Periodic Algebraic Separation and Energy Demodulation*. Proc. 1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (1997) pp. 2409-2412.
- [25] Mou-yan Zou, Chai Zhenming, R. Unbehauen, *Separation of periodic signals by using an algebraic method*. Proc. 1991 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (1991), pp. 2427 - 2430.
- [26] Hu, Xiyuan, et al. *Multicomponent AM-FM Signal Separation and Demodulation with Null Space Pursuit*- Signal, Image and Video Processing, vol. 7, no. 6 (2012), pp. 1093-1102.
- [27] Dimonte, C.I., K.S. Arun. *Tracking the Frequencies of Superimposed Time-Varying Harmonics*. Proc. 1990 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (1990) pp. 2539-2542.
- [28] Volcker, B., B. Ottersten. *Chirp Parameter Estimation from a Sample Covariance Matrix*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 3 (2001) pp. 603-612.
- [29] Peleg, S., B. Friedlander. *The Discrete Polynomial-Phase Transform*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 43, no. 8 (1995) pp. 1901-1914
- [30] Polad, M., B. Friedlander. *Separation of Co-Channel FM/PM Signals Using the Discrete Polynomial-Phase Transform*. Proc. IEEE 6th Digital Signal Processing Workshop (1995).
- [31] Huang, N. E., et al. *The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis*. Proc. Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 454, no. 1971 (1998) pp. 903-995.

- [32] Gupta, Rinki, et al. *Estimation of Instantaneous Frequencies Using Iterative Empirical Mode Decomposition*. Signal, Image and Video Processing, vol. 8, no. 5 (2012) pp. 799-812.
- [33] Boashash, Boualem, Branko Ristic. *Polynomial Time-Frequency Distributions and Time-Varying Higher Order Spectra: Application to the Analysis of Multicomponent FM Signals and to the Treatment of Multiplicative Noise*. Signal Processing, vol. 67, no. 1 (1998) pp. 1-23.
- [34] Barkat, B., and B. Boashash. *Design of Higher Order Polynomial Wigner-Ville Distributions*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 9 (1999) pp. 2608-2611.
- [35] Mostayed, Ahmed, et al. *Novel Parameter Estimation Method for Chirp Signals Using Boutie Chirplet and Discrete Fractional Fourier Transform*. Proc. Second International Conference on Future Generation Communication and Networking Symposia (2008).
- [36] Namias, Victor. *The Fractional Order Fourier Transform and Its Application to Quantum Mechanics*. IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 25, no. 3 (1980) pp. 241-265.
- [37] Xia, Xiang-Gen. *Discrete Chirp-Fourier Transform and Its Application to Chirp Rate Estimation*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 48, no. 11 (2000) pp. 3122-3133.
- [38] Chen, Rong, and Yiming Wang. *Universal FRFT-Based Algorithm for Parameter Estimation of Chirp Signals*. Journal of Systems Engineering and Electronics, vol. 23, no. 4 (2012) pp. 495-501.
- [39] Zhang, Hong-Xin, et al. *Parameter Estimation of Chirp Signals Based on Fractional Fourier Transform*. The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications, vol. 20 (2013) pp. 95-100.
- [40] Chen, Xin, et al. *Detection and Parameter Estimation for Chirp Signal Based on Fractional Fourier Transform*. Applied Mechanics and Materials, vol. 599-601 (2014) pp. 1474-1477.

-
- [41] Sahay, Shishir B, et al. *Parameter Estimation of Linear and Quadratic Chirps by Employing the Fractional Fourier Transform and a Generalized Time Frequency Transform*. *Sadhana*, vol. 40, no. 4 (2015) pp. 1049-1075.
- [42] Ozaktas, Haldun M., M. Alper Kutay, and David Mendlovic. *Introduction to the Fractional Fourier Transform and Its Applications*. *Advances in Imaging and Electron Physics* (1999): 239-91.
- [43] Almeida, L.B. *The Fractional Fourier Transform and Time-frequency Representations*. *IEEE Transactions on Signal Processing* 42.11 (1994): 3084-091.
- [44] Ozaktas, H.m., O. Arikan, M.a. Kutay, and G. Bozdogt. *Digital Computation of the Fractional Fourier Transform*. *IEEE Transactions on Signal Processing* 44.9 (1996): 2141-150.
- [45] Narayanan, V. Ashok, and K.M.M. Prabhu. *The Fractional Fourier Transform: Theory, Implementation and Error Analysis*. *Microprocessors and Microsystems* 27.10 (2003): 511-21.
- [46] Bultheel, Adhemar, and Héctor E. Martínez Sulbaran. *Computation of the Fractional Fourier Transform*. *Applied and Computational Harmonic Analysis* 16.3 (2004): 182-202.
- [47] Sahay, Shishir B., et al. *Parameter Estimation of Linear and Quadratic Chirps by Employing the Fractional Fourier Transform and a Generalized Time Frequency Transform*. *Sadhana* 40.4 (2015): 1049-075.
- [48] Zhang, Hong-Xin, et al. *Parameter Estimation of Chirp Signals Based on Fractional Fourier Transform*. *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications* 20 (2013): 95-100.
- [49] Chen Rong, and Yiming Wang. *Universal FRFT-based Algorithm for Parameter Estimation of Chirp Signals*. *Journal of Systems Engineering and Electronics* 23.4 (2012): 495-501.

-
- [50] Xu Huifa, and Feng Liu. *Selection of Dimensional Normalization Parameter in Digital Computation of the Fractional Fourier Transform* The 2010 IEEE International Conference on Information and Automation (2010)
- [51] Majorkowska-Mech, Dorota and Cariow, Aleksandr. *A Low-Complexity Approach to Computation of the Discrete Fractional Fourier Transform*. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 36, no. 10 (2017) pp. 4118-4144.