Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EL ESPACIO UNIVERSAL DE URYSOHN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Aracely Guadalupe Sánchez Guzmán

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Natalia Jonard Pérez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

HOJA DE DATOS

1. Datos del alumno
Sánchez
Guzmán
Aracely Guadalupe
5534752191
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
412049529

2. Datos del tutor
Dra.
Natalia
Jonard
Pérez

3. Datos del sinodal 1
M. en C.
José
Antonio
Gómez
Ortega

4. Datos del sinodal 2
Dr.
David
Meza
Alcantara

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Natalia
Jonard
Pérez

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Fernando
Javier
Nuñez
Rosales

7. Datos del sinodal 5
Mat.
Saúl
Arce
Rocha

8. Datos del trabajo escrito
El espacio universal de Urysohn
57 p
2018

Dedicada a Fer, el mejor manito del mundo!
Por todas las noches de desvelo estudiando juntos

Agradecimientos

Es muy lindo tener una familia llena de armonía, me siento muy afortunada de ser parte de ustedes; fue difícil venir a vivir sola a estudiar lejos de casa y tener que esperar hasta que fuera día festivo o vacaciones para poder ir a visitarlos. Gracias papá y mamá porque siempre he podido sentir todo el amor con el que me recibieron y sé que sin escatimar esfuerzo alguno, han sacrificado gran parte de su vida para formarme, cuidarme y educarme. Gracias por darme la oportunidad de realizar uno de mis anhelos más grandes e importantes hasta ahora, fruto de toda la confianza que en mi han depositado y con los cuales he logrado terminar mis estudios profesionales siendo para mí, la mejor de las herencias. Gracias por darme la oportunidad de existir, siempre estarán en mi corazón, los quiero demasiado.

Fer, te dedico mi tesis, quiero que sepas que gran parte de mi esfuerzo ha sido inspirado en ti y que eres uno de mis más grandes ideales, gracias por enseñarme a amar las matemáticas y por estar siempre que te necesito, te quiero muchísimo, hasta el infinito y de regreso.

José Luis Miranda, niño de los ojos bonitos, muchas gracias por decirme que no me rindiera y que era posible terminar este trabajo, sin duda eres el mejor novio del mundo, te quiero, te amo y te admiro demasiado, gracias por estar a mi lado, por explicarme de una manera bien fácil todo lo que no entiendo y animarme todos los días.

Gracias a todos mis amigos de clase, en especial a Andy, por hacerme reir y ser tan sincera conmigo; a Edmundo por explicarme algunas cosas de espacios métricos cuando empezaba esta tesis; a Dani por decirme ¡si se puede Aracely! cuando llevaba diez materias; a Araceli, por darme muchos ánimos siempre; y a Fer Añorve por acompañarme en muchas aventuras y travesuras.

Muchas gracias a mis profesores, en especial al Arquitecto René, por enseñarme muy buenas bases de matemáticas en el nivel secundaria, por ser tan exigente y darme clases extras para poder participar en algunos concursos de la escuela. Siempre lo recordaré con mucha admiración y cariño; a la maestra Sara por enseñarme algunos temas de la carrera antes de entrar, por darme clases de olimpiada y decirme que soy una curiosa que seguro lograria muchas cosas.

Gracias a mis sinodales por todas sus observaciones para mejorar esta tesis.

Y ya para terminar, agradezco infinitamente a la Dra. Natalia Jonard Pérez, por toda su paciencia para realizar este trabajo. Desde que la conocí en cálculo I pensé en que podría ser mi tutora de tesis, lamentablemente, ya no fue mi profesora en los siguientes cálculos pero un día, después de casi cuatro años la encontré en el pasillo, ella ya había regresado de Murcia y me aceptó como tesista, desde entonces me dedico mucho tiempo y paciencia.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104816 *Acciones de grupos en variedades de dimensión infinita.* Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo consiste en mostrar paso a paso una construcción detallada del espacio métrico separable universal de Urysohn y revisar algunas de sus propiedades más importantes; a fin de que aquellos estudiantes que han tomado el curso básico de Análisis Matemático a nivel licenciatura puedan acceder a este tema, ya que en esta tesis se detallan los teoremas y construcciones necesarias desde el primer capítulo.

Dada $\mathcal{C}$ una clase formada por espacios topológicos, diremos que un espacio topológico X es universal para la clase $\mathcal{C}$ si $X \in \mathcal{C}$ y contiene copias (en algún sentido) de todo elemento de $\mathcal{C}$. Por ejemplo, $C[0,1]$ el espacio de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ equipado con la norma supremo es universal para los espacios de Banach separables, y en particular para los espacios métricos. También podemos mencionar al cubo de Hilbert Q que es un espacio universal para la clase de los espacios métricos separables ya que contiene copias de cualquier espacio metrizable y separable.

El espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$, es un espacio métrico que satisface las siguientes propiedades:

1. Cualquier espacio métrico separable es isométrico a un subespacio de $\mathbb{U}$.

2. $\mathbb{U}$ es ω-homogéneo; es decir, dados dos subconjuntos isométricos $A, B \subset \mathbb{U}$ y una isometría $\phi : A \to B$, existe una isometría $\psi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ que extiende a ϕ.

Además este espacio es único salvo isometrías. Cabe mencionar que $C[0,1]$ satisface la primera propiedad pero no es ω-homogéneo, [4, Corolario 5.9] (pág 240).

El espacio universal de Urysohn fue uno de los últimos resultados de Urysohn publicado por primera vez en el año de 1927 y retomado principalmente por G.E Huhunaisvili en 1955, M. Katětov de 1986−1988, V.V. Uspenskij en 1990 y más tarde en 2005 por Julien Melleray en diversos artículos. En particular, el artículo [1] sirvió de base para el desarrollo de esta tésis.

En el capítulo 1, "Preliminares", recordaremos algunos resultados y conceptos básicos de espacios métricos y grupos de isometrías.

En el capítulo 2, definimos un tipo particular de funciones continuas, las funciones de Katětov, las cuales son la base para la construcción del espacio universal de Urysohn. Mostramos también algunas propiedades de estas funciones en espacios métricos completos y estudiamos el espacio de todas las funciones de Katětov.

En este segundo capítulo, estudiaremos los espacios ω-homogéneos y su relación con los espacios finitamente inyectivos.

En el tercer capítulo utilizaremos todos los resultados anteriores para dar la construcción del espacio universal de Urysohn y estudiar algunas de sus propiedades representativas. Y en el último capítulo estudiaremos el grupo de isometrías del espacio universal de Urysohn, el cual resulta ser un grupo universal para la clase de todos los grupos topológicos segundo numerables.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo haremos un repaso de algunas nociones y resultados sobre espacios métricos que serán de gran utilidad más adelante.

1.1. Espacios Métricos

Recordemos que una métrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que cumple con las siguientes propiedades:

i) Para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

iii) Para cualesquiera $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Teorema 1.1.1. *Sean X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Consideremos el siguiente conjunto*

$$\overline{C}(X, Y) = \{f \mid f : X \to Y \text{ es continua y acotada}\}.$$

Definamos $d_\infty : C(X, Y) \times C(X, Y) \to [0, \infty)$ de la siguiente manera:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}.$$

Entonces $(C(X, Y), d_\infty)$ es un espacio métrico.

Demostración. Como d es una métrica, entonces $d(f(x), g(x)) \geqslant 0$ para todo $x \in X$, por lo que, si $f, g \in C(X, Y)$, entonces $d_\infty(f, g) \geq 0$. Además, si $f \neq g$, existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, y por lo tanto

$$d_\infty(f, g) \geq d(f(x_0), g(x_0)) > 0.$$

Sabemos que $d(f(x), g(x)) = d(g(x), f(x))$ para todo x en X, por lo que

$$d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$$

Si $f, g, h \in C(X, Y)$, para cada $x_0 \in X$ se tiene que

$$d(f(x_0), g(x_0)) \leq d(f(x_0), h(x_0)) + d(h(x_0), g(x_0)),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} d(f(x_0), g(x_0)) &\leq \sup_{x \in X}\{d(f(x), h(x))\} + \sup_{x \in X}\{d(h(x), g(x))\} \\ &= d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \end{aligned}$$

Como $x_0 \in X$ es arbitrario, concluimos que $d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$. Entonces el espacio de funciones $C(X, Y)$ continuas, equipado con la métrica del supremo es un espacio métrico.

□

La topología generada por la métrica d_∞ recibe el nombre de topología de la convergencia uniforme, ya que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f respecto a d_∞ si y sólo si converge uniformemente.

Recordemos que un espacio métrico (X, d) es completo si cada sucesión de Cauchy en X es convergente.

Teorema 1.1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $H \subseteq X$ es cerrado, entonces H es completo.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $H \subset X$ cerrado. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en H. Evidentemente, también es sucesión de Cauchy en X y por lo tanto converge a un punto $x \in X$. Como H es cerrado tenemos que $x \in H$, lo cual implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en H. Esto prueba que H es completo. □

Teorema 1.1.3. *Si X es un espacio topológico y (Y,d) un espacio métrico completo, entonces $(C(X,Y),d_\infty)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C(X,Y)$. Para cada $x\in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y, y como por hipótesis Y es completo, dicha sucesión converge. Definimos entonces la función $F:X\to Y$ como:

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Demostraremos dos cosas:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a F uniformemente; es decir, para todo $\varepsilon>0$ existe N tal que si $n\geq N$, $d(f_n(x),F(x))<\varepsilon$ para todo x en X.
2. $F\in C(X,Y)$; es decir, F es continua en X.

Dada $\varepsilon>0$, escogemos $N>0$ tal que para cualesquiera $n,m\geq N$, se cumple que $d_\infty(f_n,f_m)<\varepsilon$. Así, para toda $x\in X$,

$$d(f_n(x),f_m(x))\leq d_\infty(f_n,f_m)<\varepsilon.$$

Entonces,

$$d(f_n(x),F(x))=d(f_n(x),\lim_{m\to\infty} f_m(x))=\lim_{m\to\infty} d(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon$$

para todo $n\geqslant N$ y para todo $x\in X$, por lo que podemos concluir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a F.

Para demostrar que $F\in C(X,Y)$, consideremos un $x_0\in X$ y $\varepsilon>0$. Por lo anterior, existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que $d(F(x),f_m(x))<\varepsilon/3$ para toda $x\in X$ y para toda $m\geq N_0$.

Como f_{N_0} es una función continua, existe una vecindad U de x_0 tal que si $z\in U$, entonces $d(f_{N_0}(x_0),f_{N_0}(z))<\varepsilon/3$. Por lo tanto, si $z\in U$ entonces

$$\begin{aligned} d(F(x_0),F(z)) &\leq d(F(x_0),f_{N_0}(x_0))+d(f_{N_0}(x_0),f_{N_0}(z))+d(f_{N_0}(z),F(z)) \\ &< \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que F es continua y por lo tanto $C(X,Y)$ es completo.

□

En topología, un espacio topológico es un espacio separable si incluye un subconjunto denso y numerable. Los espacios métricos completos y separables jugarán un papel muy importante en este trabajo. Por esta razón es importante la siguiente definición.

Definición 1.1.4. *Un espacio topológico es polaco si es separable y completamente metrizable.*

Sea D un subconjunto de un espacio métrico (X, d). Denotaremos la cerradura del conjunto D por $\overline{D}$, y diremos que D es denso en X si $\overline{D} = X$.

Teorema 1.1.5. *Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de espacios métricos separables tal que $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq ...$ y de manera tal que $d_n \mid_{X_k\times X_k} = d_k$ si $n \geq k$. Sea $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y definimos d como $d(x, y) = d_n(x, y)$ donde n es tal que $x, y \in X_n$. Entonces (X, d) es un espacio métrico separable.*

Demostración. Es trivial ver que d es métrica en X. Demostremos que X es separable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea D_n tal que $D_n \subseteq X_n$ y $\overline{D_n} = X_n$, con D_n numebrable. Si $x \in X$, entonces existe al menos un X_n tal que $x \in X_n$. Luego, dada $\varepsilon > 0$, existe $x_n \in D_n$ tal que $d(x, x_n) = d_n(x, x_n) < \varepsilon$. Como $x_n \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ y $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ es numerbale (pues es una unión numerable de conjuntos numerables), concluimos que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ es un conjunto denso y numerable. Por lo tanto X es separable. $\square$

Teorema 1.1.6. *Sea (X, d') un espacio métrico finito con $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$. Consideremos un punto z que no esté en X, y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una métrica d en $X \cup \{z\}$ que cumple las siguientes propiedades:*

i) $d(z, x_i) \in \mathbb{Q}$ *para todo* $1 \leq i \leq n$

ii) $d'(x_i, x_j) = d(x_i, x_j)$, *para todo* $i, j \in \{0, 1, \cdots, n\}$,

iii) $d(x_0, z) < \varepsilon$.

Demostración. Supongamos sin perder la generalidad que

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_{n-1}) \leq \cdots \leq d(x_0, x_1).$$

Sea $\varepsilon' = \text{mín}\{d'(x_i, x_0) - d'(x_{i+1}, x_0) \mid d'(x_{i+1}, x_0) - d'(x_i, x_0) \neq 0\}$, escojamos $\delta < \text{mín}\{\varepsilon', \varepsilon\}$. Primero elegimos un valor $r \in (\delta/2, \delta)$ y definamos

$$d(x_0, z) = d(z, x_0) := r.$$

Por otro lado, si $i, j \in \{0, 1, \cdots, n\}$ definamos

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) := d'(x_j, x_i).$$

Para decir quienes serán las distancias $d(x_i, z)$, construiremos una sucesión de racionales $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$ y una sucesión de números positivos $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_{n-1} < \delta/2$ de la siguiente manera: Para $i = 1$ escogemos $r_1 \in (d(x_0, x_1), d(x_0, x_1) + \delta/2)) \cap \mathbb{Q}$ y definimos $\delta_1 := r_1 - d(x_0, x_1)$. Evidentemente $\delta_1 < \delta/2$. Si $d(x_0, x_1) = d(x_0, x_2)$, entonces hacemos $r_2 := r_1$ y $\delta_2 := \delta_1$; en otro caso escojemos $r_2 \in (d(x_0, x_2) + \delta_1, d(x_0, x_2) + \delta/2)) \cap \mathbb{Q}$, y definimos $\delta_2 := r_2 - d(x_0, x_2)$. Continuando con este proceso, encontramos números racionales $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n > 0$ y números positivos $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_{n-1} < \delta/2$, tales que:

a) Si $d(x_0, x_i) = d(x_0, x_{i+1})$, entonces $r_{i+1} := r_i$ y $\delta_{i+1} = \delta_i$.

b) Si $d(x_0, x_i) \neq d(x_0, x_{i+1})$, entonces $r_{i+1} \in (d(x_0, x_{i+1}) + \delta_i, d(x_0, x_{i+1}) + \delta/2)) \cap \mathbb{Q}$ y $\delta_{i+1} := r_{i+1} - d(x_0, x_{i+1})$.

Definimos entonces $d(z, x_i) = d(x_i, z) := r_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Para mostrar que d es métrica solo falta verificar la desigualdad del triángulo y como $d \mid_{X \times X} = d'$ es métrica, bastará que verificar las siguientes cuatro desigualdades:

1. $d(x_i, x_j) + d(x_j, z) \geq d(x_i, z)$
2. $d(z, x_0) + d(x_0, x_i) \geq d(z, x_i)$
3. $d(x_0, z) + d(z, x_i) \geq d(x_0, x_i)$
4. $d(x_i, z) + d(z, x_j) \geq d(x_i, x_j)$

Para demostrar que se cumple la primera desigualdad, notemos que si $d(x_0, x_i) \leq d(x_0, x_j)$ entonces $j \leq i$, y por lo tanto

$$d(z, x_i) \leq d(z, x_j) \leq d(z, x_j) + d(x_j, x_i).$$

En caso de que $d(x_0, x_i) > d(x_0, x_j)$, entonces

$$r_i = d(z, x_i) > d(z, x_j) = r_j$$

y esto implica que $i < j$ y por lo tanto $\delta_i < \delta_j$, lo cual garantiza que

$$\begin{aligned} d(x_i, z) - d(x_j, z) &= r_i - r_j \\ &= d(x_i, x_0) + \delta_i - d(x_0, x_j) - \delta_j \\ &\leq d(x_i, x_0) - d(x_j, x_0) \\ &\leq d(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Despejando obtenemos la primera desigualdad: $d(x_i, z) \leq d(x_i, x_j) + d(x_j, z)$.

Por otro lado, como $d(z, x_i) \in (d(x_0, x_i), d(x_0, x_i) + \delta/2)$ entonces

$$\begin{aligned} d(x_0, x_i) &< d(z, x_i) \\ &< d(x_0, x_i) + \delta/2 \\ &\leq d(x_0, x_i) + d(x_0, z) \\ &= d(z, x_0) + d(x_0, x_i), \end{aligned}$$

lo cual implica que se cumple la segunda desigualdad.

Además, como $d(z, x_i) \geq d(x_0, x_i)$ entonces

$$d(z, x_i) \geq d(x_0, x_i) > d(x_0, x_i) - d(x_0, z),$$

por lo que $d(z, x_i) > d(x_0, x_i) - d(x_0, z)$. Despejando obtenemos que

$$d(x_0, z) + d(z, x_i) > d(x_0, x_i),$$

y por lo tanto la tercera desigualdad se cumple.

Para demostrar la última desigualdad, recordemos que d' si es métrica y por lo tanto tenemos que $d'(x_i, x_j) \leq d'(x_i, x_0) + d'(x_j, x_0)$. Esto implica que

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &= d'(x_i, x_j) \\ &\leq d'(x_i, x_0) + d'(x_j, x_0) \\ &= d(x_i, x_0) + d(x_0, x_j) \\ &< d(x_i, z) + d(z, x_j), \end{aligned}$$

Esto garantiza que la cuarta desigualdad se cumple, y por lo tanto d es la métrica que buscabamos.

□

1.2. Isometrías

Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) espacios métricos. Un encaje isométrico φ entre E_1 y E_2 es una función $\varphi : E_1 \to E_2$ tal que para todo (x, y) en $E_1 \times E_1$ se cumple que

$$d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Si φ es una función suprayectiva diremos que φ es una isometría y que E_1 y E_2 son isométricos.

Observemos que si $\varphi : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es un encaje isométrico, entonces φ es una función continua. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon$, como φ es un encaje isométrico $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, por lo que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon = \delta$; es decir, φ es continua.

También podemos observar que todo encaje isométrico es una función inyectiva. Supongamos que $x, y \in X$ son tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Entonces $d(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$, y como $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$, concluimos que $d(x, y) = 0$ o, equivalentemenente, $x = y$.

Sin embargo, los encajes isométricos no son necesariamente funciones suprayectivas, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos el conjunto $\ell_\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in N} |x_n| < \infty\}$. Equipado con la métrica d definida por

$$d((x_n), (y_n)) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|x_k - y_k|\}.$$

Sea $\varphi : \ell_\infty \to \ell_\infty$ la función definida por $\varphi(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Entonces φ es un encaje isométrico y no es función suprayectiva.

En efecto, sean $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ dos sucesiónes en ℓ_∞. Entonces

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \sup_{k\geq 1}\{|x_k - y_k|\} = d(x, y),$$

lo cual implica que φ es un encaje isométrico. Por otro lado, es facil notar que no es función suprayectiva, ya que $(k, x_1, x_2, \dots)$ con $k \neq 0$ no pertenece a la imagen de φ.

Una completación de un espacio métrico X es un espacio métrico $\hat{X}$ completo con un encaje isométrico $\phi : X \to \hat{X}$ tal que $\phi(X)$ es denso en $\hat{X}$.

Teorema 1.2.1. *Todo espacio métrico posee una completación $\hat{X}$, la cual es única salvo isometrías.*

La demostración del teorema anterior es muy conocida y puede ser consultada en cualquier libro de análisis, por ejemplo [2, Capítulo 2].

El siguiente lema será de gran ayuda más adelante.

Lema 1.2.2. *Sean (X, d) y (P, ρ) espacios métricos. Si P es completo y $D \subseteq X$ es denso, entonces cualquier encaje isométrico $\varphi' : D \to P$ se extiende de manera única a un encaje isométrico $\varphi : X \to P$. Además, si X es completo entonces $\varphi(X)$ es cerrado en P.*

Demostración. Para todo $x \in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ que converge a x. Esta sucesión es de Cauchy, y como $d(x_n, x_m) = \rho(\varphi'(x_n), \varphi'(x_m))$, concluimos que $(\varphi'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. Como P es completo, existe $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi'(x_n)$. Sea $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ otra sucesión que converge a x. Tomemos la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ dada por

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ x'_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ converge a x, así las sucesiónes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ y $(\varphi'(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P$ son de Cauchy. Al ser, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos subsucesiónes de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi'(z_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(x'_n).$$

Definamos $y_x = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi'(x_n)$ para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ que converge a x. Por lo explicado anteriormente y_x no depende de la sucesión que tomemos.

Definamos $\varphi : X \to P$ por $\varphi(x) = y_x$. Ahora veamos que φ es encaje isométrico. Sean $x, y \in X$, $(x_n), (y_n) \subseteq D$ sucesiónes tales que x_n converge a x y y_n converge a y. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \rho(\varphi'(x_n), \varphi'(y_n)) \\ &= \rho(\varphi(x), \varphi(y)). \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que φ es encaje isométrico. Para demostrar la unicidad supongamos que existe $\psi : X \to P$ otro encaje isométrico que extiende a φ'. Para cada $x \in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tal que x_n converge a x. Al ser φ y ψ funciones continuas, tenemos que

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(x_n) = \psi(x),$$

y por lo tanto, $\varphi = \psi$.

Si X es completo como φ es encaje isométrico entonces $\varphi(X)$ es completo y por lo tanto cerrado en P. □

Si $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$ es una isometría entre dos espacios métricos, entonces φ es una biyección y por lo tanto φ tiene una función inversa φ^{-1}. Observemos que para cualesquiera $x, y \in Y$,

$$d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = \rho(\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(y))) = \rho(x,y).$$

Esto prueba que φ^{-1} también es isometría y por lo tanto es continua.

Claramente para cualquier espacio métrico (X,d), la función identidad $1_X : X \to X$ es una isometría, ya que

$$d(1_X(x), 1_X(y)) = d(x,y).$$

Además si $\varphi : (X,d) \to (Y,\rho)$ y $\phi : (Y,\rho) \to (Z,p)$ son isometrías, entonces

$$d(x,y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)) = p(\phi(\varphi(x)), \phi(\varphi(y)))$$

por lo que $\phi \circ \varphi : X \to Z$ también es una isometría.

Dado un espacio métrico (X,d) denotamos por $ISO(X)$ al siguiente conjunto:

$$ISO(X) = \{\varphi : X \to X \mid \varphi \textit{ es una isometría suprayectiva}\}.$$

El razonamiento anterior nos permite concluir el siguiente teorema:

Teorema 1.2.3. *Para cualquier espacio métrico* (X,d), $(ISO(X), \circ, 1_X)$ *es un grupo.*

Ejemplo 1.2.2. Sea d la métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(x) = u + \sigma(x)$ donde $u \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in O(n)$,[1] entonces $\varphi \in ISO(\mathbb{R}^n)$. Recíprocamente, supongamos que $\varphi \in ISO(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos encontrar $u \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in O(n)$, únicas, tales que $\varphi(x) = u+\sigma(x)$. El grupo $ISO(\mathbb{R}^n)$ se llama grupo euclidiano y lo denotaremos simplemente por $ISO(n)$.

Demostración. Primero veamos que $O(n) \subset ISO(n)$. Sea $\varphi \in O(n)$. Recordando que las tranformaciones ortogonales preservan producto interior, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\varphi(x),\varphi(y))^2 &= \varphi(x)\cdot\varphi(x) + \varphi(y)\cdot\varphi(y) - 2\varphi(x)\cdot\varphi(y) \\ &= x\cdot x + y\cdot y - 2x\cdot y \\ &= d(x,y)^2. \end{aligned}$$

Como las distancias son no negativas, $d(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y)$, y por lo tanto $O(n) \subset ISO(n)$.

Ahora, consideremos $\varphi(x) = u+\sigma(x)$ con $u \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in O(n)$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, como la distancia es la inducida por la norma euclidiana, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\varphi(x),\varphi(y)) &= ||u + \sigma(x) - u - \sigma(y)|| \\ &= ||\sigma(x) - \sigma(y)|| \\ &= ||x - y|| = d(x,y) \end{aligned}$$

ya que $\sigma \in O(n)$. Así, $\varphi \in ISO(n)$.

Observemos que si $\varphi \in ISO(n)$ es tal que $\varphi(0) = 0$, entonces $\varphi \in O(n)$. En efecto, despejando $x \cdot y$ de la siguiente ecuación

$$d(x,y)^2 = x\cdot x + y\cdot y - 2x\cdot y,$$

[1] $O(n) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; T \text{ es lineal y } <Tx,Ty>=<x,y> \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n\}$

llegamos a

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \frac{1}{2}(x \cdot x + y \cdot y - d(x,y)^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(x,0)^2 + d(y,0)^2 - d(x,y)^2). \end{aligned}$$

De esta manera, si $\varphi \in ISO(n)$ es tal que $\varphi(0) = 0$, entonces, por lo anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \varphi(y) &= \frac{1}{2}(d(\varphi(x),0)^2 + d(\varphi(y),0)^2 - d(\varphi(x),\varphi(y))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(\varphi(x),\varphi(0))^2 + d(\varphi(y),\varphi(0))^2 - d(\varphi(x),\varphi(y))^2) \\ &= \frac{1}{2}(d(x,0)^2 + d(y,0)^2 - d(x,y)^2) \\ &= x \cdot y, \end{aligned}$$

por lo que $\varphi \in O(n)$.

Por último, dada $\varphi \in ISO(n)$ tal que $\varphi(0) \neq 0$, llamemos $u := \varphi(0)$, y sea $\sigma(x) := \varphi(x) - u$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Notemos que σ es isometría por ser composición de isometrías, y que $\sigma(0) = 0$. Por lo demostrado anteriormente $\sigma \in O(n)$. Así, $\varphi(x) = u + \sigma(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, donde $u \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in O(n)$. Esto completa el ejemplo.

$\square$

Definición 1.2.4. *Un* ***grupo topológico*** *es una terna* $(G, \Gamma, \circ)$ *tal que:*

- (G, Γ) *es un espacio topológico, donde* Γ *es topología de* G.
- $(G, \circ)$ *es un grupo.*
- *La función* $G \times G \to G$ *dada por* $(x, y) \to x \circ y$ *es continua.*
- *La función* $G \to G$ *dada por* $x \to x^{-1}$ *es continua.*

Por ejemplo $(\mathbb{R}^n, +)$, $(O(n), \circ)$ son grupos topológicos si los damos con la topología euclidiana.

Queremos dar al grupo de isometrías de un espacio métrico X una topología que lo haga grupo topológico. Aparte veamos algo más general, si X y Y son dos espacios topológicos, para cada punto $x \in X$ y para cada abierto $U \subset Y$ denotaremos por $M(x, U)$ al siguiente subconjunto de $C(X, Y)$.

$$M(x, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(x) \in U\}.$$

Llamemos Γ a la coleccion:

$$\Gamma = \{M(x, U) \mid x \in X, U \text{ es abierto en } Y\}.$$

Como Γ cubre al espacio $C(X, Y)$ (de hecho $C(X, Y) \in \Gamma$ ya que $C(X, Y) = M(x, Y)$ para cualquier $x \in X$), existe una única topología en $C(X, Y)$ para la cual Γ es sub-base. Esta topología recibe el nombre de **topología punto-abierta o topología de la convergencia puntual.**

Lema 1.2.5. *Dado X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico, para cualesquiera $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y $f \in C(X, Y)$, consideremos el siguiente conjunto*

$$O(x, f, \varepsilon) := \{g \mid d(g(x), f(x)) < \varepsilon\}.$$

Entonces la familia $\mathscr{O} = \{O(x, f, \varepsilon) \mid x \in X, f \in C(X, Y), \varepsilon > 0\}$ es una sub-base para la topología punto-abierta en $C(X, Y)$.

Demostración. Notemos que $O(x, f, \varepsilon) = M(x, B(f(x), \varepsilon))$ y por lo tanto $O(x, f, \varepsilon)$ es abierto en la topología punto abierta Γ.

Si $M(x, U) \in \tau$ y $f \in M(x, U)$, entonces $f(x) \in U$ y como U es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Afirmamos que $O(x, f, \varepsilon) \subseteq M(x, U)$. En efecto, sea $g \in O(x, f, \varepsilon)$, entonces $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ por lo que $g(x) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$. Así, concluimos que $g \in M(x, U)$, y por lo tanto $\mathscr{O}$ es sub-base para la topología punto-abierta. $\square$

Teorema 1.2.6. *Para cualquier espacio métrico (X, d), el grupo $ISO(X)$ equipado con la topología punto abierta es un grupo topológico.*

Demostración. Primero demostremos que la función $\varsigma : ISO(X) \to ISO(X)$, dada por $\varsigma(\varphi) = \varphi^{-1}$ es continua. Sea $x \in X$, $\varphi \in ISO(X)$ y $\varepsilon > 0$, demostremos que $\varsigma^{-1}(O(x, \varphi^{-1}, \varepsilon)) = O(\varphi^{-1}(x), \varphi, \varepsilon)$. Si $g \in O(x, \varphi^{-1}, \varepsilon)$, entonces $d(g(x), \varphi^{-1}(x)) < \varepsilon$ y aplicando g^{-1} por la izquierda obtenemos

$$\begin{aligned} d(g(x), \varphi^{-1}(x)) &= d(g^{-1}g(x), g^{-1}\varphi^{-1}(x)) \\ &= d(x, g^{-1}(\varphi^{-1}(x))) \\ &= d(\varphi(\varphi^{-1}(x)), g^{-1}(\varphi^{-1}(x))) \end{aligned}$$

por lo que $g^{-1} \in O(\varphi^{-1}(x), \varphi, \varepsilon)$. Análogamente si $h \in O(\varphi^{-1}(x), \varphi, \varepsilon)$, entonces $h^{-1} \in O(x, \varphi^{-1}, \varepsilon)$. Así concluimos que $\varsigma^{-1}(O(x, \varphi^{-1}, \varepsilon)) = O(\varphi^{-1}(x), \varphi, \varepsilon)$, y por lo tanto ς es continua.

Veamos ahora que la composición $\circ : ISO(X) \times ISO(X) \to ISO(X)$ dada por $\circ(f, g) = g \circ f$ es continua. Sea $O(x, f, \varepsilon)$ un abierto sub-básico, y sean $\psi, \phi \in ISO(X)$ tales que $\psi \circ \phi \in O(x, f, \varepsilon)$, es decir, $d(\psi(\phi(x)), f(x)) < \varepsilon$. Sea $\delta = \varepsilon - d(\psi(\phi(x)), f(x)) > 0$. Tomemos los sub-básicos $O(x, \phi, \frac{\delta}{2})$ y $O(\phi(x), \psi, \frac{\delta}{2})$, los cuales contienen a ϕ y ψ, respectivamente. Si $h, k \in ISO(X)$ cumplen que $h \in O(x, \phi, \frac{\delta}{2})$ y $k \in O(\phi(x), \psi, \frac{\delta}{2})$, entonces

$$\begin{aligned} d(k(h(x)), f(x)) &\leq d(k(h(x)), \psi(\phi(x))) + d(\psi(\phi(x)), f(x)) \\ &\leq d(k(h(x)), k(\phi(x))) + d(k(\phi(x)), \psi(\phi(x))) + d(\psi(\phi(x)), f(x)) \\ &\leq d(h(x), \phi(x)) + d(k(\phi(x)), \psi(\phi(x))) + d(\psi(\phi(x)), f(x)) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + d(\psi(\phi(x)), f(x)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

De esta manera $k \circ h \in O(x, f, \varepsilon)$, y así $\circ(O(x, \phi, \frac{\delta}{2}) \times O(\phi(x), \psi, \frac{\delta}{2})) \subseteq O(x, f, \varepsilon)$, lo cual prueba que $\circ$ es continua. $\square$

Lema 1.2.7. *Si X es separable, entonces el grupo topológico $ISO(X)$ es primero numerable.*

Demostración. Como X es separable, entonces existe $D = \{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq X$ denso y numerable. Sea $\varphi \in ISO(X)$, demostraremos que el conjunto $\left\{O(x_i, \varphi, \frac{1}{n}) \mid i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}$ es una sub-base local numerable de φ. Como consecuencia del Lema 1.2.5, $\{O(x, f, \varepsilon) \mid x \in X, f \in ISO(X), \varepsilon > 0\}$ es sub-base de $ISO(X)$. Así, dado U una vecindad de φ, existen sub-basicos $O(y_1, f_1, \varepsilon_1), O(y_2, f_2, \varepsilon_2), \cdots, O(y_k, f_k, \varepsilon_k)$ con $y_j \in X,\ f_j \in ISO(X),\ \varepsilon_j \in \mathbb{R}^+$, que satisfacen

$$\varphi \in \bigcap_{j=1}^{k} O(y_j, f_j, \varepsilon_j) \subseteq U.$$

Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, como $\varphi \in O(y_j, f_j, \varepsilon_j)$, tenemos la siguiente desigualdad $d(\varphi(y_j), f_j(y_j)) < \varepsilon_j$ y por lo tanto existe $n_j \in \mathbb{N}$ que cumple

$$\frac{1}{n_j} < \frac{\varepsilon_j - d(\varphi_j(y_j), f_j(y_j))}{3}.$$

Como D es denso, existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{m_j}, y_j) < \frac{1}{n_j}$. Afirmamos que

$$\varphi \in O(x_{m_j}, \varphi, \frac{1}{n_j}) \subseteq O(y_j, f_j, \varepsilon_j).$$

En efecto, si $g \in O(x_{n_j}, \varphi, \frac{1}{n_j})$, utilizando la desigualdad del triángulo y que φ, g son isometrías, obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} d(g(y_j), f_j(y_j)) \leq & d(g(y_j), g(x_{m_j})) + d(g(x_{m_j}), \varphi(x_{m_j})) \\ & + d(\varphi(x_{m_j}), \varphi(y_j)) + d(\varphi(y_j), f_j(y_j)) \\ = & d(y_j, x_{m_j}) + d(g(x_{m_j}), \varphi(x_{m_j})) \\ & + d(x_{m_j}, y_j) + d(\varphi(y_j), f_j(y_j)) \\ < & \frac{3}{n_j} + d(\varphi(y_j), f_j(y_j)) < \varepsilon_j. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\varphi \in \bigcap_{j=1}^{k} O\left(x_{m_j}, \varphi, \frac{1}{n_j}\right) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} O(y_j, f_j, \varepsilon_j) \subseteq U,$$

por lo que, el conjunto $\left\{O(x_i, \varphi, \frac{1}{n}) \mid i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}$ es una sub-base local numerable de φ, y por lo tanto φ tiene una base local numerable. □

Teorema 1.2.8. *Sea (X, d) un espacio métrico separable, entonces $ISO(X)$ es segundo numerable.*

Demostración. El espacio X es separable, entonces existe $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ denso y numerable. Demostraremos que cada elemento de la sub-base de la topología punto abierta de $ISO(X)$, Γ, es la unión de elementos de $\Omega = \{M(x_n, B_{\frac{1}{m}}(x_n)) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}^+\} \subseteq \Gamma$.

Sean $x \in X$ y U abierto en X. Dada $F \in M(x, U)$, existe $m \in \mathbb{N}^+$ que satisface $B_{\frac{1}{m}}(F(x)) \subseteq U$, ya que U es abierto. El conjunto D es denso en X, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $d(F(x), x_n) < \frac{1}{3m}$. Obsérvese que $F \in M(F^{-1}(x_n), B_{\frac{1}{3m}}(x_n)) \in \Omega$. Por otro lado, para cada $g \in M(F^{-1}(x_n), B_{\frac{1}{3m}}(x_n))$ se satisface:

$$\begin{aligned} d(g(x), F(x)) &\leq d(g(x), g(F^{-1}(x_n))) + d(g(F^{-1}(x_n)), x_n) + d(x_n, F(x)) \\ &= d(x, F^{-1}(x_n)) + d(g(F^{-1}(x_n)), x_n) + d(x_n, F(x)) \\ &= d(F(x), x_n) + d(g(F^{-1}(x_n)), x_n) + d(x_n, F(x)) \\ &< \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} = \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

ya que g y F son isometrías. De esta manera hemos probado que $g \in M(x, B_{\frac{1}{m}}(F(x)))$, y como $B_{\frac{1}{m}}(F(x)) \subseteq U$ tenemos que

$$F \in M(F^{-1}(x_n), B_{\frac{1}{3m}}(x_n)) \subseteq M(x, B_{\frac{1}{m}}(F(x))) \subseteq M(x, U),$$

con lo cual concluimos que todo elemento de Γ es unión de elementos de Ω. Es decir, Ω es una sub-base numerable de $ISO(X)$ y por lo tanto $ISO(X)$ es segundo numerable. $\square$

1.3. Redes

En esta sección recordaremos el concepto y algunas propiedades básicas de redes, ya que las ocuparemos más adelante. El concepto de red generaliza la noción de sucesión y la convergencia de redes servirá para caracterizar la topología de espacios topológicos arbitrarios. Comenzaremos recordando algunas definiciones.

Definición 1.3.1. *Sea M un conjunto y $\leq$ una relación en M. Si la pareja $(M, \leq)$ satisface los siguientes axiomas:*

a) Reflexiva: $a \leq a$;

b) Transitiva: $a \leq b,\ b \leq c$ implica $a \leq c$;

c) Antisimétrica: $a \leq b,\ b \leq a$ implica $a = b$;

d) Tricotómica: Para toda $a, b \in M$ se cumple $a < b,\ b < a$ o $a = b$.

entonces, decimos que la relación $\leq$ es un orden total en M y que M es un conjunto totalmente ordenado. Recordemos que si $a \leq b$ y $a \neq b$, entonces escribimos, $a < b$.

Definición 1.3.2. *Sea M un conjunto, diremos que M es un conjunto parcialmente ordenado si tiene una relación de orden $\leq$ que satisface para cualesquiera elementos $a,\ b,\ c\ \in M$ los tres primeros axiomas de la Definicion 1.3.1. En este caso diremos que $\leq$ es un orden parcial.*

Definición 1.3.3. *Un conjunto M provisto de una relación $\leq$ es dirigido si tiene una relación de preorden la cual satisface los primeros dos axiomas de la Definicion 1.3.1 y también satisface que para todo par de elementos $a,\ b\ \in M$ existe $c \in M$, tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.*

Recordemos que en un conjunto X, una sucesión se define formalmente como una función $\alpha : \mathbb{N} \to X$. Esta noción se generaliza al concepto de red de la siguiente manera:

Definición 1.3.4. *Sea X un conjunto y sea M un conjunto dirigido. Una $M-$red o, simplemente, una red en X es una función de M a X. Para cada $a \in M$ denotamos por $x_a \in X$ a la imagen de a en X y a la red la representamos por $(x_a)_{a\in M}$ o, simplemente, por (x_a).*

Evidentemente toda sucesión es una red. Pero existen redes que no son sucesiónes.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el intervalo $[a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Sea $\mathscr{R}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$. Entonces, $\mathscr{R}$ ordenado con la contención (es decir, $P \leq Q$ si y sólo si $P \subseteq Q$ para cualesquiera $P, Q \in \mathscr{R}$) es un conjunto dirigido. Para cada $P \in \mathscr{R}$ sea $U(f, P)$ la suma superior de la función f respecto a la partición P. Entonces, $(U(f, P))_{p\in\mathscr{R}}$ es una red en $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.5. *Sean $(x_a)_{a\in M}$ una red en X y $A \subseteq X$. Se dice que la red $(x_a)_{a\in M}$ yace finalmente en A si existe $a \in M$, tal que para toda $b \in M$ que satisface $a \leq b$, $x_b \in A$.*

En el caso en que X es un espacio topológico, decimos que una red $(x_a)_{a\in M}$ converge a un punto $x \in X$ (y usamos la notación $(x_a)_{a\in M} \to x$ o $x_a \to x$) si *para toda vecindad V de x, la red yace finalmente en V. En este caso decimos que x es un punto límite de la red ($x \in \lim x_a$).*

Dado que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con su relación de orden estándar es un conjunto dirigido, toda sucesión (x_n) es una red. Claramente (x_n) converge a x como sucesión si y sólo si converge a x como red.

En el Ejemplo 1.3.1, la red $(U(f,P))_{p\in\mathscr{R}}$ converge a la integral superior de f. Si además f es integrable, entonces $(U(f,P))_{p\in\mathscr{R}}$ converge a la integral de f sobre $[a,b]$.

Proposición 1.3.6. *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continua en un punto x_0 si y sólo si para toda red (x_a) que converja a x_0, la red imagen $(f(x_\alpha))$ converge a $f(x_0)$.*

Demostración. Supongamos primero que f es continua y $x_a \to x_0$. Sea V una vecindad abierta de $f(x_0)$ en Y. Como f es continua, existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $f(U) \subseteq V$. Por la convergencia de la red, (x_a) yace finalmente en U, así, su imagen $(f(x_a))$ yace finalmente en $f(U) \subseteq V$ y por lo tanto, $f(x_a) \to f(x_0)$.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que f no es continua en x_0, entonces existe una vecindad $V \in \mathcal{N}^Y_{f(x_0)}$, tal que para toda vecindad U de x_0, $f(U) \nsubseteq V$ (es decir, $f(U) \cap (Y \backslash V) \neq \emptyset$). Es fácil ver que el conjunto de todas las vecindades de x_0, M, es un conjunto dirigido si lo ordenamos con la contención (es decir, $H \leq K \iff H \subseteq K$). Así podemos definir una M-red en X, $(x_U)_{U\in M}$ de modo que para cada $U \in M$ $f(x_U) \notin V$. Por construcción, $x_U \to x_0$, pero $f(x_U)$ no converge a $f(x_0)$, ya que esta red no yace finalmente en V. Esta contradicción completa la demostración de la proposición. $\square$

Teorema 1.3.7. *Sea X un espacio métrico y $(\varphi_\lambda) \subseteq ISO(X)$ una red. Entonces φ_λ converge a φ en $ISO(X)$ si y sólo si para toda $x \in X$ $\varphi_\lambda(x)$ converge a $\varphi(x)$ en X*

Demostración. Empecemos suponiendo que (φ_λ) converge a φ. Sean $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto tal que $\varphi(x) \in U$, es decir, $\varphi \in M(x,U)$. Dado que (φ_λ) converge a φ, existe λ_0 tal que para toda $\lambda \geq \lambda_0$ la función $\varphi_\lambda \in M(x,U)$, es decir, $\varphi_\lambda(x) \in U$. De esta manera, $(\varphi_\lambda(x))$ converge a $\varphi(x)$.

Supongamos ahora que $(\varphi_\lambda(x))$ converge a $\varphi(x)$ para toda $x \in X$. Tomemos un elemento en la base de la topología punto-abierta de $ISO(X)$ que contenga a φ,

$$\varphi \in \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, U_i).$$

Dado que la red de imágenes de x_i converge a $\varphi(x_i)$, tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ existe λ_i tal que si $\lambda \geq \lambda_i$, entonces $\varphi_\lambda(x_i) \in U_i$. Existe λ_0 que cumple $\lambda_0 \geq \lambda_i$ para cada i entre 1 y n, para toda $\lambda \geq \lambda_0$ tenemos que $\varphi_\lambda(x_i) \in U_i$. Por lo tanto, $\varphi_\lambda \in \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, U_i)$ para toda $\lambda \geq \lambda_0$ y la red (φ_λ) converge a φ. $\square$

Capítulo 2

CONSTRUCCIONES PRELIMINARES

2.1. Funciones de Katětov

Comencemos este capítulo con la siguiente

Definición 2.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico, diremos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es de* ***Katětov*** *si para cualesquiera elementos x, y de X se cumple la siguiente desigualdad*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y).$$

Ejemplo 2.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $a \in X$, la función $d_a : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_a(x) = d(a, x)$ es una función de Katětov.

En efecto, por la desigualdad triangular tenemos que

$$|d_a(x)-d_a(y)| = |d(a, x)-d(a, y)| \leq d(x, y) \leq d(a, x)+d(a, y) = d_a(x)+d_a(y).$$

La función d_a del ejemplo anterior recibe el nombre de función de ***Kuratowski.***

Más adelante veremos que toda función de Katětov se parece mucho a una función de Kuratowski.

El espacio de funciones de Katětov sobre un espacio métrico sera denotado por $E(X)$.

Notemos que toda función de Katětov es continua y por lo tanto $E(X)$ está contenido en $C(X,\mathbb{R})$. Así $E(X)$ equipado con la métrica d_∞ es un espacio métrico. Ahora veamos que $E(X)$ es completo.

Teorema 2.1.2. *$E(X)$ es un subconjunto cerrado de $C(X,\mathbb{R})$ y por lo tanto $E(X)$ es completo.*

Demostración. El espacio de funciones continuas $C(X,\mathbb{R})$ es un espacio métrico, y por tanto primero numerable. Así, podemos caracterizar a los subconjuntos cerrados de $C(X,\mathbb{R})$ mediante convergencia de sucesiónes.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E(X)$ una sucesión de funciones de Katětov convergente a una función $f \in C(X,\mathbb{R})$. Dada $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_\varepsilon$ se tiene $d_\infty(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, para cualesquiera $x, y \in X$ se satisface

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(y)| + |f_{N_\varepsilon}(y) - f(y)| \\
&< \varepsilon/2 + d(x,y) + \varepsilon/2 \\
&= d(x,y) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por otro lado como $f_{N_\varepsilon}(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, inferimos que $f_{N_\varepsilon}(x) < \frac{\varepsilon}{2} + f(x)$. Análogamente $f_{N_\varepsilon}(y) < \varepsilon/2 + f(y)$. Además como f_{N_ε} es Katětov, tenemos que $d(x,y) \leq f_{N_\varepsilon}(x) + f_{N_\varepsilon}(y)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
d(x,y) \leq f_{N_\varepsilon}(x) + f_{N_\varepsilon}(y) &< \frac{\varepsilon}{2} + f(x) + \frac{\varepsilon}{2} + f(y) \\
&= f(x) + f(y) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

De esta forma concluimos que $|f(x) - f(y)| - \varepsilon \leq d(x,y) \leq f(x) + f(y) + \varepsilon$, y como ε es arbitrario, inferimos que la función f es una función de Katětov.

$\square$

Teorema 2.1.3. *Si X es un espacio métrico, entonces la funcion $\Phi : X \to E(X)$ dada por $\Phi(x) = d_x$, donde d_x es la función de Kuratowski definida en el Ejemplo 2,1,1 es un encaje isométrico.*

Demostración. Por el Ejemplo 2,1,1 sabemos que $d_x \in E(X)$ para todo $x \in X$. Demostremos que Φ es una isometría. Para ello necesitamos verificar que

$$d(x, y) = d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) = d_\infty(d_x, d_y).$$

En efecto, como $d_\infty(d_x, d_y) = \sup_{z\in X}\{|d_x(z) - d_y(z)|\} = \sup_{z\in X}\{|d(x, z) - d(y, z)|\}$, si aplicamos la desigualdad triangular concluimos que

$$\sup_{z\in X}\{|d(x, z) - d(y, z)|\} = d_\infty(d_x, d_y) \leq d(x, y).$$

Por otro lado veamos que

$$d_\infty(d_x, d_y) = \sup_{z\in X}\{|d(x, z) - d(y, z)|\} \geq |d(x, y) - d(y, y)| = d(x, y).$$

De esta manera podemos concluir que $d_\infty(d_x, d_y) = d(x, y)$, lo cual completa la prueba. $\square$

Como X se encaja isométricamente en $E(X)$, podemos identificar a cada punto x en X con su imagen d_x. Así, X se ve como un subespacio de $E(X)$.

Observación 2.1.4. *Por el Teorema 2.1.3 para cualesquiera $x, a \in X$, tenemos que*

$$d_\infty(d_a, d_x) = d(a, x) = d_a(x) = d_x(a).$$

Por lo tanto, si f es una función de Kuratowski, entonces la distancia entre f y un punto $x \in X$ en $E(X)$ es igual a $f(x)$.

Acontinuación veremos que la observación anterior es cierta en un contexto más general.

Lema 2.1.5. *Si $f \in E(X)$ es una función de Katětov, para cualquier $x \in X$ se tiene que $d_\infty(f, d_x) = f(x)$.*

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} d_\infty(f, d_x) &= \sup_{z\in X}\{\mid f(z) - d_x(z) \mid\} \\ &= \sup_{z\in X}\{\mid f(z) - d(x,z) \mid\} \\ &\geq f(x) - d(x,x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por otro lado la desigualdad $f(x) + f(z) \geq d(x,z)$ implica que $f(x) \geq d(x,z) - f(z)$, para todo $z \in Z$. Además de $f(z) - f(x) \leq d(x,z)$ inferimos que $f(x) \geq f(z) - d(x,z)$. Las desigualdades anteriores implican que $f(x) \geq\mid d(x,z) - f(z) \mid$ para todo z en X y por lo tanto

$$f(x) \geq \sup_{z\in X}\{\mid f(z) - d_x(z) \mid\} = d_\infty(f, d_x) \geq f(x).$$

Así concluimos que $d_\infty(f, d_x) = f(x)$. □

El lema anterior nos dice que si vemos a X como subespacio métrico de $E(X)$, entonces toda función de Katětov se comporta como una función de Kuratowski.

De ahora en adelante y sin riesgo de confusión la métrica d_∞ en $E(X)$ será denotada simplemente por d. De igual manera, identificaremos a X con su imagen $\Phi(X) \subseteq E(X)$, y por lo tanto la expresión $d_\infty(d_x, f)$ será simplificada a $d(x, f)$. Así, por el Lema 2,1,5 $d(x, f) = f(x)$.

Definición 2.1.6. *Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$ un subconjunto arbitrario. Dado $f \in E(Y)$, la extensión de Katětov de f es la función $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ definida para cada x en X como*

$$\widehat{f}(x) = \text{ínf}\{f(y) + d(x,y) \ : y \in Y\}$$

En la definicion anterior diremos que Y es **soporte** para $\widehat{f}$. De manera más general, si una función $g \in E(X)$ coincide con la extensión de Katětov $\widehat{f}$ para alguna funcion $f \in E(Y)$ con $Y \subseteq X$, diremos que Y es un **soporte** de g. Observemos que X siempre es soporte de f para cualquier $f \in E(X)$.

Ejemplo 2.1.2. Si (X, d) es un espacio métrico, para toda a en X, el conjunto $\{a\}$ es soporte para la función d_a dada por $d_a(x) = d(x, a)$.

En efecto, sea $Y = \{a\}$ y denotemos a $d_a|_Y$ por f. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \inf_{y\in Y}\{f(y) + d(y, x)\}\\ &= f(a) + d(x, a)\\ &= d(a, a) + d(a, x)\\ &= d_a(x).\end{aligned}$$

Esto prueba que $\{a\}$ es soporte para d_a.

Teorema 2.1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. $Y \subseteq X$ y $f : Y \to \mathbb{R}$ una función de Katětov, entonces la función $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f} = \inf_{y\in Y}\{f(y) + d(x, y)\}$$

también es de Katětov.

Demostración. Necesitamos probar que $|\widehat{f}(x)-\widehat{f}(z)| \leq d(x, z) \leq \widehat{f}(x)+\widehat{f}(z)$, para todo $x, z \in X$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existen y_1, y_2 en Y tal que:

$$\widehat{f}(x) \geq f(y_1) + d(x, y_1) - \varepsilon/2, \text{ y y } \widehat{f}(z) \geq f(y_2) + d(z, y_2) - \varepsilon/2.$$

Sumando las expresiones anteriores llegamos a

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) + \widehat{f}(z) &\geq f(y_1) + d(x, y_1) - \varepsilon/2 + f(y_2) + d(z, y_2) - \varepsilon/2\\ &\geq d(y_1, y_2) + d(x, y_1) + d(z, y_2) - \varepsilon\\ &\geq d(x, z) - \varepsilon\end{aligned}$$

Como ε es arbitrario podemos concluir que $\widehat{f}(x) + \widehat{f}(z) \geq d(x, z)$.

Por otro lado, $-\widehat{f}(x) \leq \varepsilon/2 - f(y_1) - d(x, y_1)$. Como $\widehat{f}(z) \leq f(y_1) + d(z, y_1)$, concluimos que

$$\widehat{f}(z) - \widehat{f}(x) \leq f(y_1) + d(z, y_1) + \varepsilon/2 - f(y_1) - d(x, y_1) \leq d(x, z) + \varepsilon/2.$$

Análogamente podemos demostrar que $\widehat{f}(x)-\widehat{f}(z) \leq d(x,z)+\varepsilon/2$, de donde concluimos que $|\widehat{f}(x)-\widehat{f}(z)| \leq d(x,z)+\varepsilon/2$. Como esta desigualdad es cierta para todo $\varepsilon > 0$, inferimos que $|\widehat{f}(x)-\widehat{f}(z)| \leq d(x,z)$ y por lo tanto $\widehat{f}$ es una funcion de Katětov. □

Teorema 2.1.8. *Sean (X,d) un espacio métrico, $Y \subseteq Z \subseteq X$ subconjuntos de X y $f \in E(X)$. Si Y es soporte para f, entonces Z también es soporte para f.*

Demostración. Sea $f_1(x) = \text{ínf}\{f(z)+d(z,x) \mid z \in Z\}$. Por hipotesis $f(x) = \text{ínf}\{f(y)+d(x,y) \mid y \in Y\}$ para todo x en X, ya que Y es soporte de f. Vamos a demostrar que $f_1(x)$=$f(x)$ para todo $x \in X$.

Como $Y \subseteq Z$ es claro que $f(x) \geq f_1(x)$, para todo $x \in X$. Por otro lado, como Y es soporte para f, también lo es para $f|_Z$. Entonces, para $z \in Z$ $f(z) = \inf_{y\in Y}\{f(y)+d(z,y)\}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \inf_{z\in Z}\Big\{\inf_{y\in Y}\{f(y)+d(z,y)\}+d(z,x)\Big\} \\ &= \inf_{z\in Z}\Big\{\inf_{y\in Y}\{f(y)+d(z,y)+d(z,x)\}\Big\} \\ &\geq \inf_{z\in Z}\Big\{\inf_{y\in Y}\{f(y)+d(y,x)\}\Big\} \\ &= \inf_{y\in Y}\{f(y)+d(y,x)\} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Así $f_1(x) \geq f(x)$ para toda $x \in X$, lo cual implica que $f_1(x) = f(x)$ como se quería demostrar. □

Lema 2.1.9. *Sean $f,g \in E(X)$ y consideremos un conjunto $S \subseteq X$ tal que S es soporte común de f y g. Entonces*

$$\sup_{x\in X}\{|f(x)-g(x)|\} = \sup_{s\in S}\{|f(s)-g(s)|\}.$$

Es decir $d(f,g) = d(f|_S, g|_S)$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, entonces existe $s \in S$ tal que

$$g(x) \leq g(s)+d(x,s) < g(x)+\varepsilon.$$

Despejando del tercer miembro de la desigualdad obtenemos que $-g(x) < -g(s) - d(x,s) + \varepsilon$. Así, sumando $f(x)$ de ambos lados, y recordando que $f(x) \leq f(s) + d(x,s)$ (ya que S es soporte de f) llegamos a

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &< f(x) - g(s) - d(x,s) + \varepsilon \\ &\leq f(s) + d(x,s) - g(s) - d(x,s) + \varepsilon \\ &= f(s) - g(s) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{t\in S}\{|f(t) - g(t)|\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como esto sucede para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que

$$f(x) - g(x) \leq \sup_{s\in S}\{|f(s) - g(s)|\}.$$

Análogamente se demuestra que $g(x) - f(x) \leq \sup_{s\in S}|f(s) - g(s)|$, y por lo tanto $\sup_{x\in X}\{|f(x) - g(x)|\} \leq \sup_{s\in S}\{|f(s) - g(s)|\}$. Por otro lado, notemos que $S \subseteq X$ implica que

$$\sup_{x\in X}\{|f(x) - g(x)|\} \geq \sup_{s\in S}\{|f(s) - g(s)|\}.$$

y por lo tanto podemos concluir la igualdad requerida

$$\sup_{x\in X}\{|f(x) - g(x)|\} = \sup_{s\in S}\{|f(s) - g(s)|\}.$$

□

2.2. Isometrías del espacio E(X)

Teorema 2.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, cualquier isometría de X se extiende de manera única a una isometría de $E(X)$.*

Demostración. Comencemos tomando φ en $ISO(X)$ y supongamos que φ se extiende a una isometría $\tilde{\varphi}$ de $E(X)$. Para cualesquiera $f \in E(X)\backslash X$, y $x \in X$, se debe cumplir que

$$\tilde{\varphi}(f)(\varphi(x)) = d(\tilde{\varphi}(f), \varphi(x)) = d(f,x) = f(x),$$

lo cual nos dice que $\tilde{\varphi}(f)(\varphi(x)) = f(x)$. En consecuencia, para todo x en X tenemos que $\tilde{\varphi}(f)(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$. Lo anterior muestra que la única extensión posible de φ a $E(X)$ está definida por

$$\tilde{\varphi}(f)(x) := f \circ \varphi^{-1}(x)$$

y por tanto es única. Ahora necesitamos ver que $\tilde{\varphi}$ así definida, es una isometría en $E(X)$. Tomemos f y g funciones de Katětov, entonces:

$$\begin{aligned} d(\tilde{\varphi}(f), \tilde{\varphi}(g)) &= \sup_{x \in X} |f \circ \varphi^{-1}(x) - g \circ \varphi^{-1}(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= d(f, g), \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\tilde{\varphi}$ es una isometría. $\square$

Dado un espacio métrico (X, d), definimos $\Phi : ISO(X) \to ISO(E(X))$ de la siguiente manera: para cada $\varphi \in ISO(X)$

$$\Phi(\varphi) := \tilde{\varphi}, \tag{2.1}$$

donde $\tilde{\varphi}$ es la función del Teorema 2.2.1. Es decir, $\tilde{\varphi}(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x))$, para toda $f \in E(X)$ y todo $x \in X$.

Denotaremos por $E(X, \omega)$ al conjunto de todas las funciones de Katětov con soporte finito. Por el Teorema 2.1.3 y el Ejemplo 2.1.2 podemos considerar a X como subespacio de $E(X, \omega)$. Observemos que si $f \in E(X, \omega)$, entonces $\tilde{\varphi}(f) \in E(X, \omega)$. Esto se sigue del siguiente lema.

Lema 2.2.2. *Si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es soporte de f, entonces $\{\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)\}$ es soporte de $\tilde{\varphi}(f)$.*

Demostración. Para cada $x \in X$, $\tilde{\varphi}(f)(x)$ está dado por

$$\tilde{\varphi}(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x)) = \text{ínf}\{f(x_i) + d(x_i, \varphi^{-1}(x)) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

por ser $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es soporte de f. Así,

$$\tilde{\varphi}(f)(x) = \text{ínf}\{\tilde{\varphi}(f)(\varphi(x_i)) + d(\varphi(x_i), x) \mid 1 \leq i \leq n\},$$

es decir, $\{\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)$ es soporte de $\tilde{\varphi}(f)\}$. $\square$

Teorema 2.2.3. *La función Φ definida en 2.1, es un morfismo continuo de grupos topológicos, si se restringe a $E(X,\omega)$.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in ISO(X)$, entonces para cada $f \in E(X,\omega)$ y cada $x \in X$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi \circ \psi)(f)(x) &= f((\varphi \circ \psi)^{-1}(x))\\ &= f(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(x))\\ &= f(\psi^{-1}(\varphi^{-1}(x))\\ &= \tilde{\psi}(f)(\varphi^{-1}(x))\\ &= \tilde{\varphi}(\tilde{\psi}(f))(x)\\ &= (\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(f)(x)\\ &= \Phi(\varphi) \circ \Phi(\psi)(f)(x),\end{aligned}$$

lo cual prueba que Φ es morfismo de grupos.

Ahora veamos la continuidad de Φ. Sean $\varphi \in ISO(X)$, $\varepsilon > 0$, $f \in E(X,\omega)$ y consideramos la vecindad sub-básica de $\Phi(\varphi)$ dada por

$$O(f, \tilde{\varphi}, \varepsilon) = \{\psi \in ISO(E(X,\omega)) \mid d(\psi(f) - \tilde{\varphi}(f)) < \varepsilon\}.$$

Como $f \in E(X,\omega)$, existen $x_1, x_2, x_3, ..., x_m \in X$ tal que para toda x en X

$$f(x) = \text{ínf}\{f(x_i) + d(x, x_i) \mid i = 1, 2, 3, ..., m\}.$$

Llamemos

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} O(x_i, \varphi, \varepsilon/2) \subseteq ISO(X),$$

la cual es una vecindad abierta de φ en $ISO(X)$. Observemos que $\varphi' \in U$ si y solo si $\varphi'(x_i) \in B(\varphi(x_i), \varepsilon/2)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Nos falta demostrar que para todo $\psi \in U$, $d(\tilde{\psi}(f), \tilde{\varphi}(f)) < \varepsilon$, lo cual implicaría que $\tilde{\psi}$ está en la vecindad sub-básica $O(f, \tilde{\varphi}, \varepsilon)$. Usando el hecho de que f es Katětov, así como el Teorema 2.1.8 y los Lemas 2.1.9, 2.2.2 concluimos que

$$\begin{aligned} d(\tilde{\psi}(f), \tilde{\varphi}(f)) &= \sup \Big\{ \mid \tilde{\psi}(f)(x) - \tilde{\varphi}(f)(x) \mid \Big| \, x \in X \Big\} \\ &= \sup \Big\{ \mid f(\psi^{-1}(x)) - f(\varphi^{-1}(x)) \mid \Big| \, x \in X \Big\} \\ &= \sup \Big\{ \mid f(\psi^{-1}(x)) - f(\varphi^{-1}(x)) \mid \Big| \, x \in X' \Big\} \end{aligned}$$

con $X' = \{\varphi(x_1), ..., \varphi(x_m)\} \cup \{\psi(x_1), ..., \psi(x_n)\}$.

Observemos que para toda $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$, se cumplen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \mid f(\psi^{-1}(\psi(x_i)) - f(\varphi^{-1}(\psi(x_i)) \mid &= \mid f(x_i) - f(\varphi^{-1}(\psi(x_i)) \mid \\ &\leq d(x_i, \varphi^{-1}(\psi(x_i))) \\ &= d(\varphi(x_i), \psi(x_i)) \\ &< \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Análogamente $\mid f(\psi^{-1}(\varphi(x_i)) - f(\varphi^{-1}(\varphi(x_i)) \mid < \varepsilon/2$ y por lo tanto

$$d(\tilde{\psi}(f), \tilde{\varphi}(f)) < \varepsilon.$$

De aquí inferimos que $\Phi : ISO(X) \to ISO(E(X, \omega))$ es continua.

□

2.3. Propiedad de extensión y espacios ω-homogéneos

Definición 2.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico, diremos que X tiene la* ***propiedad de extensión aproximada*** *si para todo conjunto finito $A \subseteq X$, para todo $f \in E(A)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $z \in X$ tal que*

$$|d(z, a) - f(a)| \leq \varepsilon, \text{ para toda } a \in A.$$

Si podemos hacer $\varepsilon = 0$, entonces diremos que X tiene la ***propiedad de extensión****.*

Es decir, X tiene la propiedad de extensión si para toda $f \in E(A)$ existe $z \in X$ tal que $f = d_z|_A$.

Diremos que un espacio métrico X es **finitamente inyectivo**, si dados dos espacios métricos finitos A y A' con $A \subseteq A'$ y una isometría $\varphi : A \to X$, existe una isometría $\varphi' : A' \to X$ que extiende a φ.

Lema 2.3.2. *Un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad de extensión si y sólo si dados un espacio métrico finito $A' = A \cup \{z\}$ y $\varphi : A \to X$ una isometría, existe una extensión isométrica $\varphi' : A' \to X$ de φ.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de extensión. Sean $A' = A \cup \{z\}$ un espacio métrico finito y $\varphi : A \to X$ una isometría. Definamos la función $f \in E(\varphi(A))$ como $f(\varphi(a)) = d_{A'}(a, z)$ para toda $a \in A$ (donde $d_{A'}$ es la distancia en A'). Dado que X tiene la propiedad de extensión, existe $x \in X$ tal que $d(x, \varphi(a)) = f(\varphi(a))$ para toda $a \in A$ es decir, $d(x, \varphi(a)) = d_{A'}(z, a)$. Por lo que, $\varphi' : A' \to X$ definida como $\varphi'|_A = \varphi$ y $\varphi'(z) = x$ es una extensión isométrica de φ.

Supongamos ahora que X cumple que para todo espacio métrico finito $A' = A \cup \{z\}$ y $\varphi : A \to X$ una isometría, existe una extensión isométrica $\varphi' : A' \to X$ de φ. Sean $B \subseteq X$ un conjunto finito y $f \in E(B)$. Recordemos que B se encaja isométricamente en $E(B, \omega)$, por lo que podemos identificar a cada $b \in B$ con $d_b \in E(B, \omega)$. Sea $\varphi : \{d_b \mid b \in B\} \to X$ la isometría dada por $\varphi(d_b) = b$ para toda $b \in B$. Entonces, existe una extensión isométrica $\varphi' : \{d_b \mid b \in B\} \cup \{f\} \to X$ de φ. Sea $z = \varphi'(f)$ y observemos que $d(z, a) = f(a)$. $\square$

Teorema 2.3.3. *Un espacio métrico X es finitamente inyectivo si y sólo si tiene la propiedad de extensión.*

Demostración. Si X tiene la propiedad de extensión, entonces por el Lema 2.3.2 para cualesquiera A' espacio métrico finito, $A = A' \setminus \{z\}$ con $z \in A'$ y $\varphi : A \to X$ una isometría, existe una extensión isométrica $\varphi' : A' \to X$ de φ. Así, dados B' un espacio métrico finito, $B \subseteq B'$ y $\Phi : B \to X$, podemos probar usando un argumento recursivo sobre el cardinal de $B' \setminus B$ que existe una extensión isométrica $\Phi' : B' \to X$. Por lo que, X es finitamente inyectivo.

Si X es finitamente inyectivo, entonces dados dos subconjuntos métricos finitos $A, A' \subseteq X$ tales que $A \subseteq A'$ y $\varphi : A \to X$ una isometría, existe una extensión isométrica $\varphi' : A' \to X$ de φ. En particular, esto se cumple si $A' = A \cup \{z\}$. De esta manera, X tiene la propiedad de extensión por el Lema 2.3.2. $\square$

Teorema 2.3.4. *Si X tiene la propiedad de extensión y X es denso en $\{Y\}$, entonces Y tiene la propiedad de extensión aproximada.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subseteq Y$ un conjunto finito y $f \in E(B)$. Dado que X es denso en Y, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ existe $a_i \in X$ tal que $d(a_i, b_i) < \varepsilon/2$. Sean

$$\widehat{f} : \{b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1, a_2, \cdots, a_n\} \to \mathbb{R}, \quad g : \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \to \mathbb{R},$$

dadas por $\widehat{f}(z) := \text{ínf}\{d(b, z) + f(b) \mid b \in B\}$ y $g = \widehat{f}\ |_{\{a_1, a_2 \cdots, a_n\}}$. Como X tiene la propiedad de extensión, existe $x \in X$ tal que $g(a_i) = d(x, a_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Así:

$$\begin{aligned}
d(x, b_i) - f(b_i) &\leq d(a_i, b_i) + d(a_i, x) - f(b_i) \\
&\leq \varepsilon/2 + \text{ínf}\{d(b, a_i) + f(b) \mid b \in B\} - f(b_i) \\
&\leq \varepsilon/2 + d(b_i, a_i) + f(b_i) - f(b_i) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sabemos que $d(x, b_i) \geq |d(x, a_i) - d(a_i, b_i)|$,

$$\begin{aligned}
f(b_i) - d(x, b_i) &\leq f(b_i) + d(a_i, b_i) - d(x, a_i) \\
&= -f(a_i) + f(b_i) + d(a_i, b_i) \\
&\leq d(a_i, b_i) + d(a_i, b_i) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.3.5. *Si X es completo y tiene la propiedad de extensión aproximada, entonces X tiene la propiedad de extensión.*

Demostración. Sea (X, d) completo con la propiedad de extensión aproximada. Seleccionemos $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ y $f \in E(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$. Vamos a construir por inducción una sucesión (z_p) tal que para toda $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se cumpla lo siguiente:

1. $\mid d(z_p, x_i) - f(x_i) \mid \leq 1/2^p$
2. $d(z_p, z_{p+1}) \leq 1/2^{p-1}$.

Como X tiene la propiedad de extensión aproximada, existe z_0 tal que

$$\mid d(z_0, x_i) - f(x_i) \mid \leq 1/2^0 = 1.$$

Supongamos definidos $z_0, z_1, z_2, ..., z_p$ (a partir de z_0), y construyamos z_{p+1}.

Sea $f_p \in E(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$ definida por $f_p(x_i) = d(z_p, x_i)$. La propiedad 1 en z_p, garantiza que $d(f_p, f) \leq 1/2^p$ (donde la distancia $d(f_p, f)$ es calculada en $E(\{x_1, x_2, ..., x_n\})$.

Ahora definamos $g_p : \{x_1, \cdots, x_n\} \cup \{z_p\} \to \mathbb{R}$ por

$$g_p(x) = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x = x_i, \\ d(f, f_p) & \text{si } x = z_p. \end{cases}$$

Observemos que la función $g_p|_{x_1, \cdots, x_n}$ es una función de Katětov:

$$|g_p(x_i) - g_p(z_p)| \leq d(x_i, z_p) \leq g_p(x_i) + g_p(z_p).$$

Por lo tanto, como X tiene la propiedad de extensión aproximada, existe $z_{p+1} \in X$ tal que $\mid d(z_{p+1}, x_i) - g_p(x_i) \mid \leq 1/2^{p+1}$ y $\mid d(z_{p+1}, z_p) - d(f_p, f) \mid \leq 1/2^p$. De esta manera construimos la sucesión (z_p) de manera recursiva, que cumplen las condiciones anteriormente mencionadas.

Por la propiedad 2, (z_p) es una sucesión de Cauchy, y como X es completo existe z_0 tal que $z_0 = \lim\limits_{p \to \infty} z_p$. Dado $\varepsilon > 0$, existe p tal que $1/2^p < \varepsilon/2$ y $d(z_p, z_0) \leq \varepsilon/2$, por lo que

$$\begin{aligned} d(z_0, x_i) - f(x_i) &\leq d(z_0, z_p) + d(z_p, x_i) - f(x_i) \\ &< \varepsilon/2 + 1/2^p \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x_i) - d(z_0, x_i) &\leq f(x_i) + d(z_0, z_p) - d(z_p, x_i) \\ &< \varepsilon/2 + 1/2^p \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo anterior podemos concluir que $\mid f(x_i) - d(z_0, x_i) \mid < \varepsilon$ para todo ε y por lo tanto $f(x_i) = d(z_0, x_i)$. $\square$

Definición 2.3.6. *Sea X un espacio métrico separable, diremos que X es **universal** (para la clase de los espacios métricos separables) si para todo Y espacio métrico separable existe una isometría $\varphi : Y \to X$.*

Ejemplo 2.3.1. El espacio $\ell_\infty = \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es acotada}\}$ definido en el Ejemplo 1.2.1 contiene copias isométricas de todos los espacios métricos separables pero ℓ_∞ no es separable.

En efecto, sea (Z, ρ) un espacio métrico separable, es decir, existe $D = \{d_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Z$ denso. Dado $d_0 \in Z$, definamos $\psi : Z \to \ell_\infty$, como la función que satisface

$$\psi(z)(n) = \rho(z, d_n) - \rho(d_n, d_o) \text{ para toda } z \in Z \text{ y para cada } n \geq 1.$$

Observemos que para toda $z \in Z$ y para toda $n \geq 1$ se cumple

$$\begin{aligned} |\psi(z)(n)| &= |\rho(z, d_n) - \rho(d_n, d_0)| \\ &\leq \rho(z, d_0), \end{aligned}$$

por lo que $\psi(z) \in \ell_\infty$. Demostraremos que ψ es una isometría, dados dos elementos $z_1, z_2 \in Z$, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(\psi(z_1), \psi(z_2)) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|\rho(z_1, d_n) - \rho(d_n, d_0) - \rho(z_2, d_n) + \rho(d_n, d_0)|\} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|\rho(z_1, d_n) - \rho(z_2, d_n)|\} \\ &\leq \rho(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(z_2, d_{n_k}) < \frac{1}{2k}$. Así,

$$\begin{aligned}\rho(z_1, d_{n_k}) &\geq \rho(z_1, z_2) - \rho(z_2, d_{n_k}) \\ &> \rho(z_1, z_2) - \frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Combinando estas desigualdades obtenemos

$$\rho(z_1, d_{n_k}) - \rho(z_2, d_{n_k}) \geq \rho(z_1, z_2) - \frac{1}{k}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\rho(z_1, z_2) &\geq \rho(\psi(z_1), \psi(z_2)) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\rho(z_1, d_n) - \rho(z_2, d_n)|\} \\ &\geq \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\rho(z_1, z_2) - \frac{1}{k}\right\} \\ &= \rho(z_1, z_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho(\psi(z_1), \psi(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$, es decir, ψ es una isometría. Sin embargo, ℓ_∞ no es separable.

Definición 2.3.7. *Diremos que un espacio P es **ω-homogéneo** si dado un subconjunto finito $A \subseteq P$ y $\varphi : A \to B \subseteq P$ una isometría, existe $\varphi' : P \to P$ una extensión isométrica de φ.*

Teorema 2.3.8. *Sea P un espacio métrico polaco. Entonces P es finitamente inyectivo si y sólo si es ω-homogéneo y universal.*

Demostración. Supongamos que P es finitamente inyectivo. Primero vamos a demostrar que P es universal. Sea X un espacio métrico separable, entonces existe $D = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ denso y numerable.

Por inducción construiremos isometrías $\varphi_i : \{x_0, x_1, ..., x_i\} \to P$, tal que φ_{i+1} extiende a φ_i.

Sea $y_0 \in P$ un punto arbitrario y definamos $\varphi_0 : \{x_0\} \to P$ por $\varphi_0(x_0) = y_0$. Como P es finitamente inyectivo, existe $\varphi_1 : \{x_0, x_1\} \to P$ que extiende a φ_0 y

$$\varphi_1(x_0) = y_0,\ \varphi_1(x_1) = y_1.$$

Supongamos que ya construimos una isometría $\varphi_i : \{x_0, x_1, ..., x_i\} \to P$ que extiende a $\varphi_{i-1} : \{x_0, x_1, ..., x_{i-1}\} \to P$, . Como P es finitamente inyectivo, entonces existe φ_{i+1} que extiende a φ_i tal que $\varphi_{i+1} \mid_{\{x_0,x_1,...,x_i\}} = \varphi_i$ y $\varphi_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$, para algún $y_{i+1} \in P$.

Definimos $\varphi' : D \to P$ como $\varphi'(x_i) = \varphi_i(x_i)$. Claramente φ' es isometría en D, ya que para $x_i, x_j \in D$ y $k = max\{i, j\}$

$$\rho(\varphi'(x_i), \varphi'(x_j)) = \rho(\varphi_i(x_i), \varphi_j(x_j)) = \rho(\varphi_k(x_i), \varphi_k(x_j)) = d(x_i, x_j)$$

Entonces por el Lema 1.2.2 φ' se extiende a una isometría $\varphi : X \to P$, lo cual nos permite concluir que P es universal.

Ahora demostremos que es ω-homogéneo. Sea $\varphi : A \to A'$ una isometría entre dos subconjuntos finitos de P. Para extender a φ consideremos $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso en P.

Construiremos por inducción una sucesión de conjuntos $\{A_i\}$ e isometrías $\varphi_i : A_i \to P$ de la siguiente manera:
Sean $A_1 = A$, $\varphi_1 = \varphi$ y $A_2 = A \cup \{p_{i_1}\} = A_1 \cup \{p_{i_1}\}$, donde p_{i_1} es el primer elemento de $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que p_{i_1} no está en A. Por la propiedad de extensión, existe $y_1 \in P$ tal que $d(p_{i_1}, a) = d(y_1, \varphi(a))$ para toda $a \in A_1$. Definimos: $\varphi_2 : A_2 \to P$ de la siguiente manera:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \in A_1, \\ y_1 & \text{si } x = p_{i_1}. \end{cases}$$

Análogamente, existe $z_1 \in P$ tal que $d(z_1, a) = d(p_{j_1}, \varphi_2(a))$ para toda $a \in A_2$, donde p_{j_1} es el primer elemento que no está en $\varphi_2(A_2)$. Sea $A_3 = A_2 \cup \{z_1\}$, definimos $\varphi_3 : A_3 \to P$ como

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) & \text{si } x \in A_2, \\ p_{j_1} & \text{si } x = z_1. \end{cases}$$

Supongamos que ya construimos $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ y $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{k-1}$ de manera que $\{p_1, p_2, \cdots, p_{i_m}\} \subseteq A_{2m}$ y $\{p_1, p_2, \cdots, p_{j_m}\} \subseteq \varphi_{2m+1}(A_{2m+1})$ para todo $2m, 2m + 1 \leqslant k - 1$. Para construir φ_k debemos considerar dos casos. Si $k = 2m$; existe $y_m \in P$ tal que $d(a, p_{i_m}) = d(\varphi_{2i-1}(a), y_i)$, donde p_{i_m} es el primer elemento que no está en A_{k-1} y definimos: $A_k = A_{k-1} \cup \{P_{i_m}\}$ y $\varphi_k : A_k \to P$ por

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi_{k-1}(x) & \text{si } x \in A_{k-1}, \\ y_i & \text{si } x = p_{i_m}. \end{cases},$$

Ahora, si $k = 2m+1$; existe $z_m \in P$ tal que $d(a, z_m) = d(\varphi_{2m}(a), p_{j_m})$, donde p_{j_m} es el primer elemento del conjunto denso que no está en $\varphi_{k-1}(A_{k-1})$. En este caso sea $A_{2m+1} = A_{2m} \cup \{z_m\}$ y definamos $\varphi_{2m+1} : A_{2m+1} \to P$ dada por

$$\varphi_{2m+1}(x) = \begin{cases} \varphi_{2m}(x) & \text{si} \quad x \in A_{2m} \\ p_{j_m} & \text{si} \quad x = z_m \end{cases}$$

Notemos que $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\{p_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i(A_i)$. Sea $\varphi_\infty : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i(A_i)$, dada por $\varphi_\infty(a) = \varphi_k(a)$ si $a \in A_k$. Como $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ es denso en P, existe una extensión isométrica $\varphi' : P \to P$ de φ_∞, por lo que P es ω-homogéneo.

Ahora supongamos que P es universal y $\omega - homogeneo$, demostraremos que es finitamente inyectivo . Sea $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ un subconjunto finito de P y $f \in E(A)$, como P es universal, existe una copia isométrica de $A \cup \{f\}$ contenida en P.

Sea $\tilde{d}(f, a) = \tilde{d}(a, f) = f(a)$ es necesario demostrar que $\tilde{d}$ es métrica.

1. Es inmediato que cumple la propiedad de simetría.
2. Observemos que f no está en A y eso implica que $\tilde{d}(a, f) > 0$.
3. Para verificar la desigualdad del triángulo necesitamos demostrar dos cosas:
   a) $\tilde{d}(a, f) + \tilde{d}(f, b) \geq \tilde{d}(a, b)$
   b) $\tilde{d}(a, b) + \tilde{d}(b, f) \geq \tilde{d}(a, f)$

   a) Tomando en cuenta que f es una función de Katětov se cumple que $f(a) + f(b) \geq d(a, b) = \tilde{d}(a, b)$ por lo que se cumple la desigualdad anterior.

b) Notemos que $\tilde{d}(a,b)+\tilde{d}(b,f)\geq \tilde{d}(a,f)$ se cumple si y sólo si $f(b)-f(a)\geq -d(a,b)$ que es equivalente a $d(a,b)\geq f(a)-f(b)$, como f es una función de Katětov, se cumple que

$$d(a,b)\geq \mid f(a)-f(b)\mid \geq f(a)-f(b)=\tilde{d}(f,a)-\tilde{d}(f,b).$$

Por lo que $d(a,b)=f(a)-f(b)$.

Sea $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ un subconjunto de P y $z\in P$. Consideremos una isometría

$$\varphi : A\cup\{f\}\subset P\to B\cup\{z\}\subset P$$

donde $\varphi(a_i)=b_i$. La distancia

$$d(z,b_i)=\tilde{d}(a_i,f)=f(a_i).$$

Sea $y\in P$ tal que $\varphi'(y)=z$, $y=\varphi'^{-1}(z)$, la

$$d(y,a_i)=d(\varphi(y),\varphi(a_i))=d(z,b_i)=f(a_i).$$

Por lo tanto tiene la propiedad de extensión y por el Teorema 2.3.3 resulta ser finitamente inyectivo.

□

Capítulo 3

EL ESPACIO UNIVERSAL DE URYSOHN

Como se explicó en la introducción, el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$ se caracteriza por ser el único espacio métrico separable universal con la propiedad de ser ω-homogéneo. En este capítulo desarrollaremos su construcción utilizando los teoremas vistos anteriormente.

Teorema 3.0.1. *Sean (P_1, d_1) y (P_2, d_2) dos espacios metricos completos y separables finitamente inyectivos, entonces son isométricos.*

Demostración. Como P_1 y P_2 son polacos, entonces cada uno contiene un subconjunto que es denso y numerable. Sean $P \subseteq P_1$ y $Q \subseteq P_2$ densos y numerables: $P = \{p_i\}_{i=0}^n$, y $Q = \{q_i\}_{i=0}^n$.

Construiremos por inducción una sucesión de isometrias parciales entre ellos. Sea $A_1 = \{p_0\}$; definimos $\varphi_1 : \{p_0\} \to \{q_0\}$ de la única manera posible.

Sea $A_2 := A_1 \cup \{p_1\}$, por la propiedad de extensión existe $y_1 \in P_2$ tal que $d_1(p_0, p_1) = d_2(q_0, y_1)$, definimos $\varphi_2 : A_2 \to \{q_0, y_1\}$ de la siguiente manera:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & si \quad x \in A_1, \\ y_1 & si \quad x = p_1, \end{cases}$$

Análogamente existe $z_1 \in P_1$ tal que $d_1(z_1, a) = d_2(\varphi_2(a), q_1)$ para toda a en A_2. Consideremos $A_3 := A_2 \cup \{z_1\}$ y definamos $\varphi_3 : A_3 \to \{q_0, y_1, q_1\}$ por

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) & si \quad x \in A_2 \\ q_1 & si \quad x = z_1 \end{cases}$$

Supongamos que ya construimos $A_1, A_2, \cdots, A_k$ y $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{k-1}$ de manera que $\{p_0, p_1, \cdots, p_j\} \subseteq A_{2j}$ y $\{q_0, q_1, \cdots, q_j\} \subseteq \varphi_{2j+1}(A_{2j+1})$ Para construir φ_k debemos considerar dos casos. Si $k = 2i$; existe $y_i \in P_2$ tal que $d_1(a, p_i) = d_2(\varphi_{2i-1}(a), y_i)$. Definamos $A_{2i} = A_{2i-1} \cup \{p_i\}$, $\varphi_{2i} : A_{2i} \to P$ dada por

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} \varphi_{2i-1}(x) & si \quad x \in A_{2i-1} \\ y_i & si \quad x = p_i \end{cases}$$

Si k es de la forma $2i+1$; existe $z_i \in P_1$ tal que $d_1(a_i, z_i) = d_2(\varphi_{2i}(a), q_i)$. En este caso sea $A_{2i+1} = A_{2i} \cup \{z_i\}$ y definamos $\varphi_{2i+1} : A_{2i+1} \to P$ dada por

$$\varphi_{2i+1}(x) = \begin{cases} \varphi_{2i}(x) & si \quad x \in A_{2i} \\ q_i & si \quad x = z_i \end{cases}$$

Lo anterior completa la construcción.

Observemos que $\cup_{k=1}^{\infty} A_i \supseteq P$ y $\cup_{k=1}^{\infty} \varphi_k(A_k) \supseteq Q$. Sea

$$\varphi_\infty : \cup_{k=1}^{\infty} A_k \to \cup_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k),$$

definida como en los casos anteriores. Tomemos $y \in P_2$ y $(b_n) \subseteq \varphi_i(A_i)$ una sucesión que converge a y, entonces $\varphi^{-1}(b_n) \subseteq \cup A_i$, como (b_n) es de Cauchy $\varphi^{-1}(b_n)$ también es de Cauchy y como los espacios son completos $\varphi^{-1}(b_n)$ converge a un $x \in P_1$. Tomamos $y = \varphi(x)$. Por lo tanto P_1 y P_2 son isométricos. □

Teorema 3.0.2. *Si X es un espacio métrico separable, entonces $E(X, \omega)$ es un espacio métrico separable.*

Demostración. Si el espacio X es separable, entonces existe un subconjunto $D \subseteq X$, denso y numerable. Consideremos los conjuntos $\Im = \{F \subseteq D \mid F \textit{ es finito}\}$ y $\wp$ es el conjunto de todas las funciones de Katětov con soporte en $\Im$ que toman valores racionales. Ambas familias son numerables. Demostraremos que $\wp$ es denso en $E(X, \omega)$, lo cual probará que $E(X, \omega)$ es separable.

Sea $f \in E(X,\omega)$, entonces f tiene soporte finito, digamos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Dada $\varepsilon > 0$, existen $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \in D$ tales que $d_X(x_i, x'_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, donde d_X es la métrica en X. El espacio X se encaja isométricamente en el espacio $E(X,\omega)$, para cada $x \in X$ sea $d_x \in E(X,\omega)$ su imagen bajo el encaje Φ, tal como se describe en el Teorema 2.1.3 y en el Ejemplo 2.1.1. Sea $Y = \{f, d_{x'_1}, d_{x'_2}, \cdots, d_{x'_n}\} \subset E(X,\omega)$, con la métrica $d|_Y$ heredada de $E(X,\omega)$, el conjunto Y es un espacio métrico finito. Si tomamos z cualquier punto que no esté en Y, por el Teorema 1.1.6 existe una métrica d' en $Y \cup \{z\}$ que satisface las siguientes condiciones

$$d'(d_{x'_i}, d_{x'_j}) = d(d_{x'_i}, d_{x'_j}) \text{ para cualesquiera } i, j \in \{1, \cdots, n\};$$

$$d'(d_{x'_i}, f) = d(d_{x'_i}, f) \text{ para cualquier } i \in \{1, \cdots, n\};$$

$$d'(f, z) < \frac{\varepsilon}{3};\ \text{y}$$

$$d(z, d_{x'_i}) \in \mathbb{Q} \text{ para cualquier } i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Sea $g \in \wp$ la extensión de la función con soporte en $F = \{x'_1, \cdots, x'_n\}$ descrita mediante la regla $x'_i \mapsto d'(d_{x'_i}, z)$ ($g|_Y$ es una función de Katětov, ya que esta definida como la distancia a un punto fijo en un espacio que contiene una copia isométrica de F). Para cada $x \in X$ se tiene que

$$f(x) = \text{ínf}\{f(x_i) + d_X(x_i, x) \mid i \in \{1, \cdots, n\}\} \text{ y}$$

$$g(x) = \text{ínf}\{d'(d_{x'_i}, z)) + d_X(x'_i, x) \mid i \in \{1, \cdots, n\}\}.$$

Así, para cada $x \in X$ existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $f(x) = f(x_i) + d_X(x_i, x)$, por lo que, utilizando desigualdad del triángulo y el hecho de que algunas distancias son menores a $\frac{\varepsilon}{3}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
g(x) - f(x) \leq & d'(d_{x'_i}, z)) + d_X(x'_i, x) - f(x_i) - d_X(x_i, x) \\
= & d'(d_{x'_i}, z)) - d'(z, f) - d(f, d_{x_i}) + d_X(x'_i, x) - d_X(x_i, x) + d(z, f) \\
< & d'(d_{x'_i}, f) - d(f, d_{x_i}) - d_X(x'_i, x_i) + \frac{\varepsilon}{3} \\
< & d(d_{x'_i}, d_{x_i}) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

De manera análoga, podemos demostrar que $f(x) - g(x) < \varepsilon$ para toda $x \in X$. De esta forma,

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\wp$ es denso en $E(X,\omega)$ y por lo tanto este último es un espacio separable.

□

3.1. Construcción del espacio universal de Urysohn

La construcción del espacio métrico de Urysohn se puede comenzar con cualquier espacio métrico separable X, de la siguiente manera:

Sea $X_0 = \{X\}$ y consideremos a X_1 como las funciónes de Katětov sobre X_0 que tienen soporte finito, $X_1 := E(X_0, \omega)$. De la misma forma, $X_2 := E(X_1, \omega)$, y en general $X_{n+1} = E(X_n, \omega)$.

Teorema 3.1.1. *Sea* $X_\omega = \bigcup_{i=1}^{n} E(X_n, \omega)$, *entonces* X_ω *es un espacio métrico separable.*

Demostración. Notemos que en general $E(X_{i-1}, \omega) \subseteq E(X_i, \omega)$. Como $E(X_n, \omega)$ es un espacio métrico separable por el Teorema 3.0.2 y combinando esto con el Teorema 1.1.5, concluimos que el espacio definido en el Teorema 3.1.1 es separable. □

Teorema 3.1.2. X_ω *es finitamente inyectivo.*

Demostración. En efecto, dado un subconjunto finito $F = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ de X_ω, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que F está contenido en X_m para alguna m suficientemente grande. Entonces la extensión de Katětov a X_m de cualquier $y \in \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ aparece como un elemento de X_{m+1}. Así, debe existir y en X_ω tal que si hacemos $\widehat{f} = y$, la $d(\widehat{f}, y_i) = f(y_i)$ para todo y_i en nuestro subconjunto finito, entonces inferimos que X_ω tiene la propiedad de extensión y por lo tanto es finitamente inyectivo. □

Observamos que la completación de X_ω es un espacio polaco.

Definición 3.1.3. *El espacio universal de Urysohn se define como la completación de X_ω, y lo denotamos por $\mathbb{U}$.*

Ahora podemos hacer las siguientes observaciónes:

1. Como X_ω es finitamente inyectivo y separable, su completacion tambien es separable y tiene la propiedad de extensión aproximada. Así, podemos concluir que $\mathbb{U}$ es un espacio polaco y finitamente inyectivo.

2. Por el inciso anterior en combinación con el Teorema 2.3.8, inferimos que $\mathbb{U}$ es un espacio universal y ω-homogéneo.

3. El espacio que construimos no depende de la elección del espacio X_0 que tomamos, ya que por el Teorema 3.0.1 $\mathbb{U}$ es isométrico a cualquier otro espacio con estas condiciones.

3.2. El grupo de isometrías del espacio métrico universal de Urysohn

Para un espacio métrico X, consideremos $ISO(X)$ el grupo topológico de isometrías de X sobre si mismo equipado con la topología punto abierta. En la sección 1.2 se demostró que $ISO(X)$ es segundo numerable siempre que X sea separable. En particular $ISO(\mathbb{U})$ es segundo numerable.

En esta sección desmostraremos que $ISO(\mathbb{U})$ es un grupo topológico universal para los grupos topológicos con base numerable, es decir; cada grupo topológico con una base numerable es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $ISO(\mathbb{U})$.

Sean G_1 y G_2 dos grupos topológicos. En las siguientes páginas llamaremos **encaje de grupos** a una función $\Gamma : G_1 \to G_2$ que sea monomorfismo de grupos y encaje topológico.

Proposición 3.2.1. *Sea Y un espacio métrico y $X \subseteq Y$. Si para cada $\varphi \in ISO(X)$ existe $\tilde{\varphi} \in ISO(Y)$ una extensión de φ, tal que la función $\Upsilon : ISO(X) \to ISO(Y)$ definida por $\Upsilon(\varphi) := \tilde{\varphi}$ es un morfismo continuo, entonces Υ también es un encaje de grupos.*

Demostración. Como Υ es morfismo, para verificar que Υ es inyectiva basta con verificar que su núcleo es trivial. Supongamos $\Upsilon(\varphi) = 1_Y$ entonces $\tilde{\varphi}(y) = y$ para todo $y \in Y$ y en particular para $y \in X$. Luego $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = x$ para todo $x \in X$ y por lo tanto $\varphi = 1_X$, lo cual nos premite concluir que el núcleo de Υ es trivial.

Ahora consideremos $H = \{\tilde{\varphi} : \varphi \in ISO(X)\}$ y $\Upsilon^{-1} : H \to ISO(X)$. Falta demostrar que Υ^{-1} es continua. Sea $(\tilde{\varphi}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq H$ una red que converge a $\tilde{\varphi}$ en H. Como $H \subseteq ISO(Y)$ podemos afirmar que para todo $y \in Y$ se cumple que $(\tilde{\varphi}_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\tilde{\varphi}(y)$ en Y y como $X \subseteq Y$, para todo $x \in X$ se cumple que $(\tilde{\varphi}_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\tilde{\varphi}(x)$. Como $\tilde{\varphi}$ es extensión de φ entonces $(\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $\varphi(x)$ es decir, $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a φ en $ISO(X)$. Por la Proposición 1.3.6, lo anterior prueba que Υ^{-1} es continua. $\square$

Recordando el Teorema 2.2.3 visto en el capítulo 2 podemos identificar a todo espacio métrico X con un subespacio de $E(X,\omega)$, donde cada $\varphi \in ISO(X)$ tiene una extensión $\tilde{\varphi} \in ISO(E(X,\omega))$ tal que $F : ISO(X) \to ISO(E(X,\omega))$, dada por $F(\varphi) = \tilde{\varphi}$ es un encaje. Definimos $X_0 = X, \cdots, X_n = E(X_{n-1},\omega)$ y consideremos $\varphi \in ISO(X)$. Sean $\varphi^0 = \varphi, \cdots, \varphi^n = \widetilde{\varphi^{n-1}} \in ISO(X_n)$.

Observación 3.2.2. *Dada la siguiente construcción:*

$\Gamma_1 : ISO(X) \to ISO(X_1)$ *definida como* $\Gamma_1(\varphi) := \varphi^1 = \widetilde{\varphi}$,

$\Gamma_2 : ISO(X) \to ISO(X_2)$ *definida como* $\Gamma_2(\varphi) := \varphi^2 = \widetilde{\varphi^1}$,

$\vdots$

$\Gamma_n : ISO(X) \to ISO(X_n)$ *definida como* $\Gamma_n(\varphi) := \varphi^n = \widetilde{\varphi^{n-1}}$.

Obtenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ la función Γ_n es continua, ya que la función Υ definida en la Proposición 3.2.1 es continua por el Teorema 2.2.3 y cada Γ_n se obtiene de composiciones sucesivas de F.

Ahora recordemos lo visto en la sección anterior. Dada una isometría $\varphi : X \to X$ si consideramos $X_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Podemos definir $\varphi^\omega : X_\omega \to X_\omega$ de la siguiente forma $\varphi^\omega(x) := \varphi^n(x)$ si $x \in X_n$. Claramente φ^ω es una isometría.

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio métrico. Entonces $\Upsilon : ISO(X) \to ISO(X_\omega)$ definida por $\Upsilon(\varphi) := \varphi^\omega$ es un encaje de grupos.*

Demostración. Sea $x \in X_\omega$, entonces $x \in X_n$ para algún n y por lo tanto

$$\varphi^\omega(\psi^\omega(x)) = \varphi^\omega(\psi^n(x)) = \varphi^n(\psi^n(x)) = (\varphi \circ \psi)^n(x) = (\varphi \circ \psi)^\omega(x),$$

por lo que Υ es homomorfismo de grupos.

Para ver que Υ es continua tomemos una red $(\varphi_\lambda) \subseteq ISO(X)$ tal que φ_λ converja a φ, lo que tenemos que demostrar es que φ_λ^ω converge a φ^ω en $ISO(X)$, o equivalentemente, que, $\varphi_\lambda^\omega(x)$ converge a $\varphi^\omega(x)$ para toda $x \in X_\omega$. Dado que para toda $x \in X_\omega$ existe n tal que $x \in X_n$. Entonces $\varphi_\lambda^\omega(x) = \varphi_\lambda^n(x)$ y $\varphi^\omega(x) = \varphi^n(x)$ y por lo tanto necesitamos demostrar que $\varphi_\alpha^n(x)$ converge a $\varphi^n(x)$, lo cual sucede por la Observación 3.2.2.

De esta manera, por la Proposición 3.2.1, Υ es un encaje de grupos. $\square$

Proposición 3.2.4. *Sea X un espacio métrico, si Y es completación de X entonces existe un encaje de grupos $\Gamma : ISO(X) \to ISO(Y)$.*

Demostración. Si $\varphi \in ISO(X)$, para cada $y \in Y$ existe una sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que x_n converge a y. Definamos $\varphi^*(y) := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$. En el teorema 1.2.2 se demostró que φ^* es una isometría. Veamos que la función $\Gamma : ISO(X) \to ISO(X)$ dada por $\Gamma(\varphi) := \varphi^*$ es un encaje de grupos.

$$\begin{aligned}\varphi^* \circ \psi^*(y) =& \varphi^*(\psi^*(y)) = \varphi^*(\lim_{n\to\infty} \psi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(\psi(x_n))) = \lim_{n\to\infty} (\varphi \circ \psi)(x_n) \\ =& (\varphi \circ \psi)^*(y),\end{aligned}$$

donde (x_n) es una sucesión que converge a y. Así Γ es un homomorfismo.

Para ver que Γ es continua, sea $(\varphi_\lambda) \subseteq ISO(X)$ una red que converge a $\varphi \in ISO(X)$. Lo que tenemos que demostrar es que (φ_λ^*) converge a φ^* en $ISO(Y)$. Es decir, dado $y \in Y$, necesitamos probar que $(\varphi_\lambda^*(y))$ converge a $\varphi^*(y)$ en Y. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ tal que $d(x, y) < \varepsilon/3$ como φ_λ converge a φ puntualmente en X, existe λ_0 en los naturales, tal que si $\lambda \geqslant \lambda_0$ entonces $d(\varphi_\lambda(x), \varphi(x)) < \varepsilon/3$. Así,

$$d(\varphi_\lambda^*(y), \varphi^*(y)) \leqslant d(\varphi_\lambda^*(y), \varphi_\lambda(x)) + d(\varphi_\lambda(x), \varphi(x)) + d(\varphi(x), \varphi^*(y))$$

pero como φ^* es una extensión de φ tenemos que

$$d(\varphi_\lambda^*(y), \varphi^*(y)) \leqslant d(\varphi_\lambda^*(y), \varphi_\lambda^*(x)) + d(\varphi_\lambda(x), \varphi(x)) + d(\varphi^*(x), \varphi^*(y))$$

y como φ^* y φ_λ^* son isometrías, se cumple finalmente que:

$$d(\varphi_\lambda^*(y), \varphi^*(y)) \leq d(y, x) + d(\varphi_\lambda(x), \varphi(x)) + d(x, y) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Esto prueba que $(\varphi_\lambda^*(y))$ converge a $(\varphi^*(y))$ y por lo tanto Γ es continua y por el Teorema 3.2.1 es un encaje de grupos.

Para la demostración del teorema principal de este capítulo, haremos uso del siguiente teorema, cuya demostración puede ser consultada en [3, Teorema 3.3.12].

Teorema 3.2.5. ***[G. Birkhoff, S.Kakutani.]*** *Un grupo topológico G es metrizable si y sólo si es primero-numerable. En este caso G admite una métrica d la cual es invariante por la izquierda, es decir $d(gx, gy) = d(x, y)$ para todo $x, y, g \in G$.*

Recordemos que en la construcción del espacio universal de Urysohn podemos empezar con cualquier espacio métrico separable. De esta manera, si G es un grupo segundo-numerable entonces G es separable y metrizable y por lo tanto si hacemos $X_0 = G, X_n = E(X_{n-1}, \omega)$ y $X_\omega = \bigcup X_n$ entonces $\mathbb{U}$ es isométrico a la completación de X_ω.

Lema 3.2.6. *Sean G un grupo segundo metrizable, y d una métrica en G invariante por la izquierda. Entonces $\Upsilon : G \to ISO(G)$ definida por $\Upsilon(g) = Lg$ donde*

$$Lg(x) := gx \text{ para cada } x \in G,$$

es un encaje de grupos.

Demostración. Primero veamos que $L_g \in ISO(G)$, ya que por la elección de d, $d(gx, gy) = d(x, y)$ para todo $x, y \in G$. Por otro lado, si $g, h \in G$, entonces $L_g \circ L_h(x) = L_g(hx) = g(hx) = (gh)x = L_{gh}(x)$, por lo que $\Upsilon : G \to ISO(G)$ definida por $\Upsilon(g) = Lg$ es homomorfismo de grupos.

Ahora demostraremos que Υ es inyectiva. Supongamos $L_g = Id_G$, entonces $L_g(h) = gh = h$ para toda $h \in G$. En particular, si h es el neutro e de G, entonces $g = ge = e$ y por lo tanto Υ es inyectiva.

Consideremos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ tal que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g, demostremos que L_{g_n} converge a L_g en $ISO(G)$; es decir, que para todo elemento $x \in G$, $L_{g_n}(x)$ converge a $L_g(x)$ en G. Pero esto es trivial ya que $L_{g_n}(x)$ converge a $L_g(x)$ si y sólo si $g_n x$ converge a gx, lo cual sucede porque g_n converge a g y la multiplicación es continua en G.

Por último veamos que $\Upsilon^{-1} : \Upsilon(G) \to G$ es continua. Sea $(L_{g_\lambda}) \subseteq \Upsilon(G)$ una red que converge a L_g. Si L_{g_λ} converge a L_g entonces converge puntualmente y $L_{g_\lambda}(e)$ converge a $L_g(e)$ por lo que la red $(g_\lambda e) = (g_\lambda)$ converge a g y entonces resulta que Υ^{-1} es continua. $\square$

Finalmente estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección y último resultado de este trabajo.

Teorema 3.2.7. *$ISO(\mathbb{U})$ es un grupo universal para la clase de los grupos segundo numerables. Es decir, si G es un grupo segundo-numerable, entonces existe un encaje de grupos $G \hookrightarrow ISO(G)$.*

Demostración. Utilizando la proposición 3.2.3 podemos considerar a $X = G$, Por el Lema 3.2.6 existe un encaje de grupos de G en $ISO(G)$, y por la proposición 3.2.3, $ISO(G)$ se encaja en $ISO(G_\omega)$. Ahora, por la proposición 3.2.4 resulta que existe un encaje de grupos de $ISO(G_\omega)$ en $ISO(\overline{G_\omega})$, donde $\overline{G_\omega}$ es la completación de G_ω. Como G es segundo-numerable, entonces es separable y por lo visto en el capítulo anterior tenemos que $\overline{G_\omega}$ es isométrico a $\mathbb{U}$ y por lo tanto $ISO(\overline{G_\omega})$ es topológicamente isomorfo a $ISO(\mathbb{U})$.

Considerando las composiciones de los encajes anteriores podemos concluir que existe un encaje de grupos $G \hookrightarrow ISO(\mathbb{U})$.

Como $\mathbb{U}$ es separable, por el Teorema 1.2.7 $ISO(\mathbb{U})$ es segundo numerable y por lo tanto $ISO(\mathbb{U})$ es universal. $\square$

Bibliografía

[1] J. Melleray, Some geometric and dynamical properties of the Urysohn space, Topology and its Applications, 155 (2008), no. 14,1531-1560.

[2] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, third edition, (International Series in Pure y Applied Mathematics) McGraw Hill, New York, 1976.

[3] A. Arhangel'skii, M. Tkachenko. Topological Groups and Related Structures. Atlantis press, 2008.

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, Banach Space Tehory. Springer, 2010.

[5] V. V. Uspenskij, A universal topological group with a countable base, Funktsionalnyj analiz i ego prilozhenija (Functional analysis and its applications) 20 (1986), 86-87.

[6] M. Katětov, On universal metric spaces, Proc. Sixth Prague Topological Symp. 1986, Frolik Z. (ed.), Berlin: Heldermann Verlag, 1988, pp. 323-330.

[7] P. Urysohn, Sur un espace mitrique universel, Bull. Sci. Math. 51 (1927), 43-64.

[8] C. Prieto, Topológia básica 1. Fondo de Cultura Económica, 2002.