Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Solvencia II - Requerimiento de Capital de Solvencia de una Institución de Seguros: Estudio de la modelación de la Variable de pérdida de los Instrumentos Financieros por Riesgo de Tasa de Interés.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

Martha Reyna Vega Servin

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Fernando Baltazar Larios

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor de tesis, el Dr. Fernando Baltazar Larios, por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad, conocimiento, apoyo y dedicación. Así mismo, agradezco a cada uno de mis sinodales, Dr. Yuri Salazar Flores, M. en E. Oliver Macías Pérez, Act. Sandra Cristina Ramos García y a la Act. Gabriela Stephania Revueltas Hernández. Gracias por su paciencia y tiempo que me brindaron para guiarme durante el desarrollo de esta tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme abierto sus puertas para crecer de manera personal y profesional.

A toda mi familia, quienes me han apoyado y alentado para cumplir cada una de mis metas.

A mis padres Francisca Servin y Javier Vega y hermanos, Francisco Vega y Antonio Vega, por sus consejos y gran amor que siempre he recibido de ustedes. Les agradezco no solo por estar presentes en mi vida, aportando cosas buenas, sino por los grandes momentos de felicidad y su compañía en este proceso.

A mis primos, Alejandro Murcio, Ricardo Murcio y principalmente a Diana Murcio, quienes han sido mis cómplices todos estos años, en cada uno de mis mejores momentos que he vivido a su lado. Ahora, sumándose uno más: el constante y arduo esfuerzo que le he dedicado a esta tesis.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a Carlos Romero, la ayuda que me has brindado ha sido sumamente importante, has estado a mi lado incluso en los momentos y situaciones más difíciles. Me has brindado tu cariño, comprensión y apoyo incondicional desde hace 6 años, gracias por todo.

Índice general

Objetivo

El objetivo de esta tesis, es el estudio de técnicas cuantitativas para la predicción de tipos de interés a corto plazo, incluyendo su implementación en un ejemplo práctico. El marco teórico que se desarrolla en este trabajo es aplicado a la modelización y predicción de la tasa de interés CETES a 91 días, bajo la regulación mexicana actual: Solvencia II, siendo los CETES uno de los índices de referencia en el mercado financiero mexicano.

Este trabajo se lleva a cabo a través de los modelos estocásticos de predicción de tasas de interés de Vasicek y Cox-Ingersoll-Ross, cuya resolución requieren de conocimiento y aplicación de la Fórmula de Itô, entre otras herramientas, descritas en el Capítulo 1. Así mismo, otros objetivos son:

- Exponer, de manera general y dentro del contexto de Solvencia II, los aspectos importantes en la metodología empleada para el cálculo del Requerimiento de Capital de Solvencia por Riesgos Técnicos y Financieros, así como el modelo y las bases técnicas para la determinación de la variable de pérdida de los Instrumentos Financieros.
- Estudiar el modelo estocástico Ornstein-Uhlenbeck (véase 1.3.1), el modelo estocástico de Vasicek (véase 1.3) y el modelo estocástico C.I.R. (véase 1.35) para la predicción de tasas de interés “short-term".
- Estudiar y aplicar las herramientas estocásticas necesarias para los modelos de Vasicek y C.I.R.
- Modelizar a partir de una muestra de datos reales, la tasa de interés CETES a 91 días.
- Validar la modelización realizada sobre la tasa de interés CETES a 91 días a través de dos enfoques diferentes, es decir, con la implementación del modelo Vasicek y del modelo C.I.R.
- Estudiar y aplicar técnicas estadísticas, como lo son, medidas de bondad de ajuste y realización de simulaciones.
- Evaluar los resultados de los modelos aplicados comparando cada una de las predicciones resultantes con el correspondiente dato observado del tipo de interés.

Introducción

Actualmente, las compañías de seguros se enfrentan a una iniciativa integral que impacta directamente en su capacidad de solvencia. Si bien, el sector asegurador mexicano se caracteriza por ser muy solvente, dada su regulación conservadora y sus buenos márgenes de capitalización, Solvencia II tiene como objetivo esencial fortalecer el capital de solvencia de las aseguradoras.

La implementación de Solvencia II surge de un importante objetivo, la protección del asegurado. Así, el principal cambio que enfrentan las instituciones es el establecimiento de requisitos de capital para lograr hacer frente a sus obligaciones, lo que significa que el capital debe ser determinado en función del volumen de negocio y de los riesgos que suscriben las compañías de seguros, considerando la operación que cada una de ellas maneje.

En una institución de seguros existen diferentes tipos de riesgos: de mercado, de suscripción, de liquidez, estratégico; y todos estos se encuentran dentro de la estructura que tiene Solvencia II, pero no todos están tratados en la estructura de los tres pilares.

Los tres pilares de Solvencia II hacen referencia a una estructura normativa, pero también a una gestión de riesgo integral, enfocada en tres aspectos importantes: requerimientos financieros cuantitativos, requerimientos cualitativos del proceso de revisión y supervisión (Gobierno Corporativo), y requerimientos de revelación (transparencia en la información).

La selección de riesgos permite analizar, cuantificar y vigilar los riesgos a los que se encuentra expuesta una cartera de suscripción de una institución de seguros. La suscripción de riesgos, es una actividad dinámica que, con el objetivo de gestionar una adecuada valuación del riesgo, debe aplicar políticas internas, tener competitividad en el sector asegurador y, como principal objetivo, conseguir una siniestralidad lo más cercana o equivalente a la siniestralidad esperada.

Así, conforme al artículo 232 de la Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas (LISF), las instituciones deberán mantener un nivel adecuado de los Fondos Propios Admisibles para respaldar el Requerimiento de Capital de Solvencia (RCS), el cual tiene como finalidad:

I. Contar con recursos patrimoniales suficientes en relación con los riesgos y responsabilidades asumidas, en función de las operaciones y riesgos a los que estén expuestas;

II. Desarrollar políticas adecuadas para la selección y suscripción de riesgos, así como de una adecuada dispersión mediante contratos de reaseguro;

III. El contar con un nivel apropiado de recursos patrimoniales, en relación con los riesgos financieros asumidos al invertir los recursos, y

IV. La determinación de los supuestos y de los recursos patrimoniales que deberán mantener, las instituciones, para hacer frente a situaciones de carácter excepcional, en función de los riesgos y responsabilidades a los que se encuentren expuestas, que pongan en riesgo su solvencia.

El RCS debe considerar todos los riesgos a los que se encuentra expuesta una institución de seguros. Los riesgos están relacionados tanto con los pasivos como con los activos y éstos se agregan para considerar los beneficios por la diversificación y su adecuado calce. Los riesgos son:

- Riesgo de suscripción;
- Riesgo de mercado;
- Riesgo de crédito;
- Otros riesgos de contraparte;
- Riesgo de descalce,
- Riesgo de Liquidez
- Riesgo de concentración, y
- Riesgo operativo.

La función de pérdida del cambio de capital a un año se calcula a partir de 100,000 escenarios posibles del balance económico en $t = 1$ y el RCS se calcula con el VaR al 99,5 % de confianza de esta función de pérdida. Es decir, para calcular el RCS necesitamos conocer la distribución de probabilidad del cambio de capital en un horizonte de tiempo de un año, definiendo una variable aleatoria "L" que represente dicho cambio.

El balance económico está definido por la ecuación, $A = P+C$ (Activos = Pasivos + Capital), es decir, el capital está representado como la diferencia de los activos menos los pasivos,

$$C = A - P$$

Donde,

- C = Capital;
- A = Activos, y
- P = Pasivos.

Se denota al capital a la fecha de valuación como C_0 y su proyección a un año como C_1, entonces

$$\begin{aligned} C_0 &= A_0 - P_0 \\ C_1 &= A_1 - P_1 \end{aligned}$$

Descrito lo anterior, cuando C_1 es mayor a C_0, se tiene una ganancia

$$C_1 > C_0 \qquad \text{ganancia}$$

Por otro lado, cuando C_1 es menor a C_0, se tiene una pérdida

$$C_1 < C_0 \qquad \text{pérdida}$$

Sustituimos C_0 y C_1 para calcular la pérdida, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} C_1 &< C_0 \\ A_1 - P_1 &< A_0 - P_0 \\ (-A_1 + A_0) + (P_1 - P_0) &> 0 \\ L = (-A_1 + A_0) + (P_1 - P_0) &> 0 \end{aligned}$$

Definimos a L como la variable de pérdida de capital (Fondos Propios) a un año. La función de pérdida se construye con la fórmula anterior y para cada uno de los escenarios proyectados de activos y pasivos.

Para cada escenario, cuando $L > 0$, la institución de seguros, tendrá una pérdida y cuando $L < 0$, tendrá una ganancia.

Cabe mencionar que la LISF establece que las Instituciones deberán valuar su balance con referencias de mercado, es decir, los activos a valor de mercado y los pasivos a un valor económico.

En este trabajo, nos enfocaremos a la modelación de Riesgo por tasa de interés, que forma parte de la función de pérdida de los Instrumentos Financieros.

Con la finalidad de entrar en materia del tema propuesto, en el Capitulo 1, comenzaremos a describir las bases matemáticas y conceptuales para el desarrollo de este proyecto.

Formato de Tesis

En el Capítulo 1, se dan los conceptos preliminares de probabilidad, procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas, algunos teoremas, como el Teorema de Valuación Neutral al Riesgo, el Teorema de existencia y unicidad, la Fórmula de Itô.

En el Capítulo 2, se presenta la Modelación y Bases Técnicas, conforme a la fórmula general del Requerimiento de Capital de Solvencia, de acuerdo a la regulación actual mexicana de la variable de pérdida de los activos financieros. Luego, se presentan las dinámicas del modelo empleado, así como la solución a éstas.

En el Capítulo 3, se describen los diferentes tipos de Bonos Financieros existentes en el mercado financiero mexicano, expresados tanto en su moneda origen como en moneda domestica. Así mismo, se presenta el correspondiente proceso del precio de cada uno de ellos, es decir, los resultados utilizados para calcular la función de pérdida de los Instrumentos Financieros.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados para la estimación y calibración de los parámetros del modelo, usando dos técnicas estadísticas distintas. Además, se expone la implementación del modelo de Vasicek y el modelo Cox-Ingersoll-Ross, a partir de una muestra de datos reales, CETES a 91 días y así concluir con un estudio comparativo entre ambos modelos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capitulo se describen los fundamentos de probabilidad, procesos estocásticos y de ecuaciones diferenciales estocásticas necesarios para este trabajo.

1.1. Probabilidad

El modelo matemático básico en la teoría de la probabilidad es el conocido como **espacio de probabilidad**, se representa matemáticamente por la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que consiste de un espacio muestral Ω, una σ-álgebra $\mathcal{F}$ y una medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

Definición 1.1. *Un **espacio muestral** Ω es un conjunto arbitrario no vacío que convenientemente es interpretado como el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.*

Definición 1.2. *Una **σ - álgebra** $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedadades:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $F \in \mathcal{F}$ *entonces* $F^c \in \mathcal{F}$, *donde* $F^c = \Omega - F$.
3. *Si* $F_1 , F_2 , \ldots \in \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$.

*A los elementos de $\mathcal{F}$, se les llama **eventos o conjuntos** $\mathcal{F}$- medibles y a la pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ se le llama **espacio medible**.*

Dada una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, existe $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ la σ- álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$ dada por,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \bigcap \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra de } \Omega, \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}.$$

*A $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, se le llama la **$\sigma$- álgebra generada por** $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, a los elementos de esta σ-álgebra se les llama **Borelianos** y el respectivo espacio medible es $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Definición 1.3. *Una **medida de probabilidad** $\mathbb{P}$ definida en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1.$

2. Si F_1 *,* F_2 *, ...* $\in \mathcal{F}$ *y son disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i).$$

Se puede interpretar a $\mathbb{P}(A)$ como la medida de la frecuencia con la que se observa el evento A en la realización del experimento aleatorio.

Definición 1.4. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, una* ***variable aleatoria*** *es una función* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *que satisface,*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

En este caso, se dice que X *es una función* $\mathcal{F}$ *-medible.*

Cada variable aleatoria X *induce a una medida de probabilidad* F_X *sobre el espacio medible* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, definida por*

$$F_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)).$$

A F_X *se le llama función de distribución de* X*.*

Definición 1.5. *Una v.a.* X *se dice* $\mathbb{P}-$ ***integrable****, si la* $\int X d\mathbb{P} < \infty$*. En probabilidad, la integral es también llamada la* ***esperanza de*** X*, denotada por* $\mathbb{E}(X)$*:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

Y la varianza de X *se define como:*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Una de las variables aleatorias más importantes es la normal o gausiana. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución **normal** o **gaussiana** con parámetros (μ, σ^2) si su función de distribución es,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in \mathbb{R}^2$. En tal caso escribimos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Cabe mencionar que cualquier proyección de un vector aleatorio gaussiano es de nuevo gaussiano.

La ley gaussiana $n-$ dimensional asume un papel sustancial en el estudio de las probabilidades en $\mathbb{R}^n$. El análogo en dimensión infinita a los vectores aleatorios gaussianos son los procesos estocásticos gaussianos. Decimos que $\{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ es gaussiano si sus leyes en dimensión finita son gaussianas. Lo que nos lleva a definir a los procesos estocásticos.

1.2. Procesos Estocásticos

Podemos representar la evolución de procesos que varian en el tiempo y de manera aleatoria por medio de variables aleatorias que representen el estado del sistema en cada instante de tiempo. De esta manera, llegamos al concepto de proceso estocástico.

Definición 1.6. *Un* ***proceso estocástico*** *es una colección de variables aleatorias $X = \{X_t\}_{t \in T}$, parametrizada por un conjunto T, definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.*

Al conjunto T, se le interpreta como el conjunto de tiempos y es llamado espacio parametral. En este trabajo, consideraremos procesos donde las variables aleatorias toman valores reales y $T = [0, \infty)$. De este modo, podemos ver a un proceso estocástico como una función de dos variables,

$$X : T \times \Omega \to \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \in T$, la función $\omega \to X_t(\omega)$ es una variable aleatoria y para cada $\omega \in \Omega$, la función $t \to X_t(\omega)$ es una **realización** o **trayectoria** del proceso.

Definición 1.7. *Una familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es una* ***filtración*** *si para $0 \leq s \leq t$, se cumple $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.*

Cuando X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$, se dice que el proceso es ***adaptado*** *a la filtración.*

Definición 1.8. *Sea $X = \{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico, su* ***filtración natural*** *está definida por,*

$$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} = \sigma\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\}.$$

Claramente, todo proceso es adaptado a su filtración natural. Se puede interpretar a la filtración natural de un proceso estocástico como la historia del proceso hasta el tiempo t, pues en ella se encuentran todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido hasta ese momento

Definición 1.9. *Sea una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, al espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ se le llama* ***espacio de probabilidad filtrado.***

1.2.1. Martingalas

Un ejemplo de un proceso estocástico de interés es aquel conocido con el nombre de **martingala**.

Definición 1.10. *Sea X_s un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{F}_s$. Entonces, X_s es una* ***martingala*** *con respecto a $\mathcal{F}_s$ si para cualquier $0 \leq s \leq t$, con probabilidad uno se cumple*

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s. \tag{1.1}$$

Las martingalas son procesos que están relacionados con los juegos justos. Si X_t representa la fortuna de un jugador que apuesta continuamente entonces la igualdad anterior se interpreta del siguiente modo. En promedio, la fortuna del jugador al tiempo t dada toda la historia del juego hasta el tiempo $s \leq t$ es la fortuna del jugador al tiempo s, es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana.

Cuando en lugar de la ecuación 1.1 se cumple la desigualdad $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) < X_s$ se dice que el proceso es una *supermartingala* (juego desfavorable al jugador, pues en promedio, su fortuna disminuye). En caso de la desigualdad contraria el proceso es una *submartingala* (juego favorable al jugador).

1.2.2. Procesos de Markov

Otro ejemplo de un proceso estocástico son las cadenas de Markov. Las cadenas de Markov fueron introducidas por el matemático ruso Andrey Markov alrededor de 1905. Su intención era crear un modelo probabilístico para analizar la frecuencia con la que aparecen las vocales en poemas y textos literarios. El éxito del modelo propuesto por Markov radica en que es lo suficientemente complejo como para describir ciertas características no triviales de algunos sistemas, pero al mismo tiempo es lo suficientemente sencillo para ser analizado matemáticamente. Las cadenas de Markov pueden aplicarse a una amplia gama de fenómenos científicos y sociales, y se cuenta con una teoría matemática extensa al respecto. En esta sección presentaremos una introducción a algunos aspectos básicos de este modelo.

Estos tipos de procesos son importantes y son modelos en donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama ***propiedad de Markov*** y se puede expresar de la siguiente forma.

Para cualesquiera estados $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple la igualdad:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n).$$

De esta forma, la probabilidad del evento futuro $(X_{n+1} = x_{n+1})$ sólo depende el evento inicial $(X_n = x_n)$, mientras que la información correspondiente al evento pasado $(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1})$ es irrelevante. Los procesos de Markov han sido estudiados extensamente y existe un gran número de sistemas que surgen en muy diversas disciplinas del conocimiento para los cuales el modelo de proceso estocástico y la propiedad de Markov son razonables. En particular, los sistemas dinámicos deterministas dados por una ecuación diferencial pueden considerarse procesos de Markov pues su evolución futura queda determinada por la posición inicial del sistema y una ley de movimiento especificada.

Definición 1.11. *Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, ...\}$, con espacio de estados discreto, y que satisface la* ***propiedad de Markov****, esto es, para cualquier entero $n \geq 0$, y para cualesquiera estados $x_0, ..., x_{n+1}$, se cumple*

$$p(x_{n+1}|x_0, ..., x_n) = p(x_{n+1}|x_n). \tag{1.2}$$

Si el tiempo $n + 1$ se considera como un tiempo futuro, el tiempo n como el presente y los tiempos $0, 1, ..., n - 1$ como el pasado, entonces la condición 1.2 establece que la distribución de probabilidad del estado del proceso al tiempo futuro $n + 1$ depende únicamente del estado del proceso al tiempo n, y no depende de los estados en los tiempos pasados $0, 1, ..., n - 1$.

1.2.3. Procesos de Wiener

Movimiento Browniano

El primer registro del movimiento Browniano, data de 1828, el cual se trata de un fenónemo natural, cuando el botánico Robert Brown observó que los granos de polen suspendidos en una cierta substancia presentan movimientos irregulares(véase [13]). Con la contribución del trabajo presentado por Albert Einstein en 1905 (véase [14]), se explicó que este movimiento es producto de las múltiples colisiones aleatorias de las moléculas de la substancia con los granos de polen. Se puede decir que un movimiento de este tipo tiene las siguientes características:

1. Es un movimiento continuo.
2. Tiene desplazamientos independientes en intervalos de tiempo disjuntos.
3. Los desplazamientos pueden modelarse por variables aleatorias gausianas (teorema central del límite, véase [15], p.p. 244, 357).

En 1923 el matemático Norbert Wiener demostró que existe un proceso estocástico con estas propiedades.

Definición 1.12. *Un proceso de Wiener o Movimiento Browniano estándar unidimensional es un proceso estocástico $W = \{W_t\}_{t\geq 0}$ tal que,*

1. *$W_0 = 0$ casi seguramente.*
2. *W Tiene trayectorias continuas.*
3. *Tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ las variables aleatorias $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.*
4. *La variable aleatoria $W_t - W_s$ tiene distribución $N(0, t-s)$ para $0 \leq s \leq t$.*

Una propiedad del proceso de Wiener es que no es diferenciable en ningún punto y que la derivada (en el sentido generalizado) del proceso de Wiener es el ruido blanco $\xi(t)$, es decir $\xi(t) = W_t$; para saber más acerca de las propiedad del Movimiento Browniano ver Shreve [[18], p.p. 94-98]

Movimiento browniano geométrico con tendencia

El movimiento browniano no es un buen modelo, en el contexto global, para el precio de un activo, ya que éste tiene media cero, mientras que el precio de un activo normalmente crece a alguna tasa. Entonces, a nuestro proceso de Wiener podemos añadirle una tendencia de manera artificial, es decir,

$$S_t = W_t + \mu t, \qquad t \geq 0 \tag{1.3}$$

para alguna constante $\mu \in \mathbb{R}$ (deriva) que refleja el crecimiento nominal, a la ecuación 1.3 se le llama ***movimiento browniano con tendencia.*** En el caso de que parezca muy ruidoso, o no lo suficientemente ruidoso, podemos remontar nuestro proceso con otro factor, es decir,

$$S_t = \sigma W_t + \mu t$$

para alguna constante $\sigma > 0$ (volatilidad). Podríamos estimar los valores más adecuados para μ y σ y obtener algo similar a lo visto en los mercados con un crecimiento tendencial a largo plazo. Pero, el problema que persiste es que el proceso puede volverse negativo al principio con probabilidad positiva, algo que no queremos que suceda para el valor de un precio. Por lo que nuestra siguiente modificación será tomar la exponencial de este proceso,

$$S_t = exp(\sigma W_t + \mu t)$$

Una vez más, encontrando la mejor estimación para μ y σ vemos que realmente el comportamiento del proceso es muy parecido al comportamiento observado en los precios de los activos en el mercado. Este proceso es usualmente llamado ***movimiento browniano exponencial con tendencia*** o algunas veces ***movimiento browniano geométrico con tendencia***, el cual se trata de un proceso estocástico que resuelve el modelo de precios de activos financieros propuesto por Black, Scholes y Merton. Veamos la ecuación que satisface este proceso.

Consideremos la ecuación estocástica,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \qquad t > 0, \tag{1.4}$$

con condición inicial $X_0 = x_0 > 0$, en donde μ y σ >0 son constantes.

La ecuación (1.4) puede interpretarse de la siguiente forma; en ausencia del término estocástico, la ecuación se reduce a,

$$dX_t = \mu X_t dt,$$

cuya solución es,

$$X_t = x_0 e^{\mu t}.$$

Esta función, representa el comportamiento en el tiempo de un capital inicial positivo x_0 que crece de manera continua y determinista a una **tasa efectiva** del $100 \cdot \mu\%$, suponiendo $\mu > 0$. Por otro lado, la parte estocástica corresponde a la volatilidad de una inversión con riesgo sujeta a las fluctuaciones de los mercados financieros. El modelo asume que dicha variabilidad es proporcional al valor de la inversión. Notese, que los coeficientes de la ecuación (1.4) satisfacen las condiciones para la existencia y unicidad (véase Teorema 1.1) de la solución. Es posible resolver esta ecuación usando el método de igualación de coeficientes. Para esto, necesitamos encontrar una función $f(t, x)$ tal que al aplicar la fórmula de Itô (véase Teorema 1.2) al proceso $Y_t = f(t, X_t)$, se obtenga la ecuación (1.4).

Sea la Ecuación Diferencial de Black-Scholes-Merton, dada por:

$$\begin{aligned} dY_t &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \qquad (1.5) \\ &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)(g_t)^2 \end{aligned}$$

Entonces, comparando los coeficientes de la fórmula general con los de 1.4, se obtienen las igualdades,

$$\mu f(t,x) = f_t(t,x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,x)dt, \quad (1.6)$$
$$\sigma f(t,x) = f_x(t,x). \quad (1.7)$$

De la ecuación (1.7), se obtiene:

$$f(t,x) = exp\left[\sigma x + g(t)\right], \qquad \textit{para alguna función} \quad g(t).$$

Sustituyendo en la ecuación (1.6), se obtiene:

$$g\prime(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

cuya solución es,

$$g(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (1.4) es,

$$X_t = x_0 exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]. \quad (1.8)$$

A continuación, se presentarán ejemplos, de manera gráfica, para la generación de movimientos brownianos. Cabe aclarar que este tipo de proceso se utiliza para la modelación de Riesgo de Mercado para el Tipo de Cambio, acciones o productos derivados financieros.

Generación de los movimientos brownianos.

En esta apartado se presenta la metodología para generar los distintos procesos gaussianos.

A continuación, se tienen tres tipos de procesos gaussianos. Para $j = 1, ..., N_A$ y l un mercado financiero. Donde N_A representa el total de instrumentos base a considerarse.

$$\begin{aligned}
W^j(t) &= \{W_t^j\}_{t\geq 0}, \textit{un Movimiento Browniano} \\
X_{l,j}(t) &= \int_0^t e^{-\alpha_l(t-u)} dW^j(u) \\
J_{l,j}(t) &= \int_0^t \left(1 - e^{-\alpha_l(t-u)}\right) dW^j(u) \\
&= W^j(t) - X_{l,j}(t).
\end{aligned}$$

Donde $\alpha_l > 0$ representa la volatilidad del mercado l. Por lo tanto, para generar la aleatoriedad de los instrumentos, se generan los procesos W^j y $X_{l,j}$. Lo anterior se realiza mediante el siguiente algoritmo:

1. Generar $W^1(t), ..., W^{N_A}(t)$;

Figura 1.1: Fuente: Elaboración propia. Software: R

2. Utilizando que el vector $\left(W^j(t), X_{l,j}(t)\right)$ se distribuye normal bivariado, se genera $X_{l,j}(t)$, para cada j, como

$$\begin{aligned} X_{l,j}(t) \quad &| \quad W^j(t) \sim \\ N \quad &\left(\left(\frac{1-e^{-\alpha_l t}}{\alpha_l t}\right) W^j(t), \frac{1-e^{-2\alpha_l t}}{2\alpha_l} - \frac{(1-e^{-\alpha_l t})^2}{\alpha_l^2 t}\right); \end{aligned}$$

3. Para cada j se genera $Y_{l,j}(t)$ como

$$J_{l,j}(t) = W^j(t) - X_{l,j}(t). \tag{1.9}$$

Estos procesos se utilizan para modelar las distintas curvas, utilizando el siguiente algoritmo de corrección.

4. Sea k un mercado distinto a l. Como $X_{k,j}(t) \mid X_{l,j}(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$ con

$$\mu = \left(\frac{2\alpha_l}{\alpha_k + \alpha_l}\right)\left(\frac{1-e^{-(\alpha_k+\alpha_l)t}}{1-e^{-2\alpha_l t}}\right) X_{l,j}(t)$$

y,

$$\begin{aligned} \sigma^2 \quad &= \quad \frac{1-e^{-2\alpha_k t}}{2\alpha_k} - \frac{2\alpha_l\left(1-e^{-(\alpha_k+\alpha_l)t}\right)^2}{(\alpha_k+\alpha_l)(1-e^{-2\alpha_l t})} \\ &\approx \quad 0 \end{aligned}$$

donde, la aproximación se da cuando $\alpha_k \approx \alpha_l$.

Entonces $X_{k,j}(t)$ se genera a partir de $X_{l,j}(t)$ como

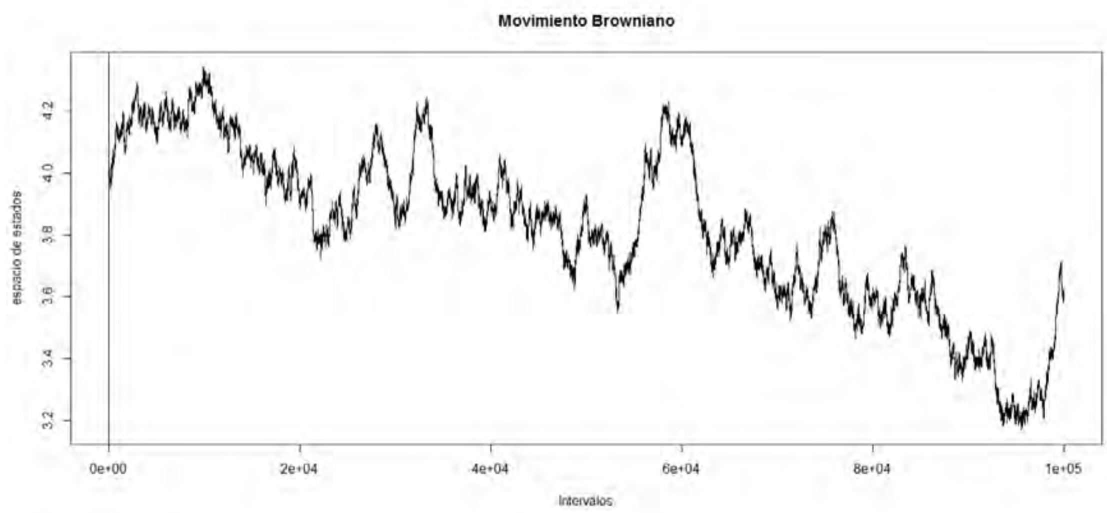

Figura 1.2: Fuente: Elaboración propia. Software: R

$$X_{k,j}(t) \mid X_{l,j}(t) = \left(\frac{2\alpha_l}{\alpha_k + \alpha_l}\right)\left(\frac{1 - e^{-(\alpha_k+\alpha_l)t}}{1 - e^{-2\alpha_l t}}\right) X_{l,j}(t).$$

A continuación, daremos lugar a definir las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, así como a la Integral de Itô y al Proceso de Difusión, para que con estas bases desarrollemos dos modelos de tasas de un factor: el modelo de Vasicek y el modelo C.I.R.

1.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Es común modelar la evolución en el tiempo de un sistema por ecuaciones diferenciales, las cuales usualmente describen la razón de cambio del sistema. Si denotamos por X_t el estado del sistema al tiempo t para $t \geq 0$, podemos caracterizar la evolución del sistema en el tiempo por la siguiente ecuación,

$$\frac{d(X_t)}{dt} = a(t)X_t, \tag{1.10}$$

donde, $X_0 = x_0$ es el estado inicial del sistema y $a(t)$ representa la función de cambio al tiempo t. Este modelo es adecuado cuando la función de cambio es completamente conocida. En muchos casos, esta función no es completamente conocida, pero es razonable asumir que está sujeta a algún tipo de efecto aleatorio, entonces tenemos que,

$$a(t) = b(t) + \text{ ruido },\tag{1.11}$$

donde, el comportamiento del término ruido no es totalmente conocido, pero sabemos que está regido por una distribución de probabilidad. Entonces, una forma (heurística) más general de escribir a la ecuación (1.11) es,

$$\frac{d(X_t)}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \times \text{ ruido }, \tag{1.12}$$

donde, b, σ son funciones reales conocidas. Para modelar el término de ruido se utilizan los incrementos de un proceso de Wiener. Si la evolución del sistema es observado en el intervalo de tiempo $[0, T]$ y consideramos una partición de este intervalo, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, podemos escribir a la ecuación (1.12) en forma de incrementos como sigue,

$$X_{i+1} - X_i = b(t_i, X_i)\Delta t_i + \sigma(t_i, X_i)\Delta W_i, \tag{1.13}$$

donde, $X_i = X_{t_i}$, $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ y $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. De esta forma, utilizando la ecuación 1.11 podemos describir la evolución del proceso $X = \{X_t\}_{t=0}^{T}$ por,

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{n-1} b(t_i, X_i)(\Delta t_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(t_i, X_i) \times (\Delta W_i). \tag{1.14}$$

Dado que esta ecuación depende de la partición del intervalo, el modelo resulta ser más adecuado en el límite $\Delta t_i \to 0$. ésto nos lleva a la siguiente ecuación,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s_i, X_{s_i})ds + \int_0^t \sigma(s_i, X_{s_i})dW_s, \tag{1.15}$$

donde, el último término es conocido como integral estocástica. Podemos escribir a la ecuación (1.15) en forma diferencial,

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{1.16}$$

para toda $t \geqslant 0$ y $X_0 = x_0$.

Definición 1.13. *A la ecuación 1.16 se le conoce como* ***Ecuación Diferencial Estocática (Itô), en adelante EDE****. La v.a. X_0 es llamada* ***valor inicial*** *en el instante t_0. La ecuación 1.16 junto con el valor inicial, representan de manera simbólica la ecuación integral estocástica 1.15. Un proceso estocástico X_t es llamado* ***solución*** *de 1.15 o 1.16 en el intervalo $[0, T]$ si:*

a) *X_t es adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t$.*

b) *Las funciones $b(t, X_t)$ y $\sigma(t, X_t)$ son adaptadas a la filtración $\mathcal{F}_t$, y se tiene con probabilidad 1 que,*

$$\begin{aligned} &\int_0^T |b(s, X_s)|ds < \infty, \quad y \\ &\int_0^T |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty. \end{aligned} \tag{1.17}$$

c) *La ecuación (1.15) se cumple para toda $t \in [0, T]$ con probabilidad 1.*

Nótese, que la ecuación 1.15 involucra dos tipos de integrales:

$$\int_0^t f(s_i, X_{s_i})ds,$$

la cual, es una ***integral de Riemann*** y

$$\int_0^t f(s_i, X_{s_i})dW_s,$$

llamada ***integral de Itô*** o integral estocástica respecto al proceso de Wiener.

Comúnmente, una integral de Riemann no se calcula a partir de su definición; en estos casos, existen fórmulas bien conocidas que agilizan y facilitan los cálculos. En la mayoría de las integrales estocásticas, se hace presente esta misma situación; son pocos los casos en los que éstas se calculan a través de su definición, como lo es la fórmula de Itô, la cual es una herramienta fundamental para este tipo de integrales y se define a continuación.

Definición 1.14. ***Integral de Itô.*** *Sea $f(t,x)$ una función continua en t y x, tal que,*

$$\int_0^T \mathbb{E}(f^2(t, X_t))dt < \infty,$$

entonces, la integral de Itô de $f(t, X_t)$ con respecto a W_t está definida como,

$$I(X_i) = \int_0^T f(t_i, X_{t_i})dW_t = lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, X_{t_i})\Delta W_{t_i}, \tag{1.18}$$

donde, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, entendiendo el límite en el sentido que la distancia máxima entre dos puntos de la partición tiende a cero.

A continuación, se enuncian algunas propiedades de esta variable aleatoria:

a) $I(X)$ Es integrable. Es decir, para $\mathbb{E}|I(X)| < \infty$ y para toda $t \in [0, T]$, tenemos:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T I(X)dW_t\right) = 0. \tag{1.19}$$

b) La integral es, además, cuadrado integrable e incluso se cumple la siguiente igualdad fundamental llamada ***Isometría de Itô***:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T I(X)dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T I^2(X)du\right]. \tag{1.20}$$

Para que la definición (1.14) tenga sentido se necesita que el proceso X sea adaptado a la filtración natural del proceso de Wiener.

Definición 1.15. *Un **proceso de difusión** $X = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ es la solución a una ecuación de la forma (1.15) o (1.16), donde los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ son funciones reales de t y x, y se les conoce como coeficiente de deriva y difusión respectivamente.*

En la definición anterior, $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ pueden ser interpretados como la media y varianza infinitesimal de los incrementos del proceso X. Al proceso de difusión se le interpreta como el estado del sistema que evoluciona de manera determinista, gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación pero perturbado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica.

Para que una ecuación de la forma 1.16 tenga alguna solución se deben imponer condiciones a sus coeficientes. Existen resultados de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas que establecen condiciones de regularidad para sus coeficientes. El siguiente resultado es básico para dichas condiciones.

Teorema 1.1. ***(Existencia y Unicidad)*** *Sea una EDE del tipo de ecuación (1.16), si los coeficientes $b(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ satisfacen la condición de Lipschitz para toda $t_0 \leq t \leq T$ y $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\mid b(t,x) - b(t,y) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \mid^2 \leqslant K \mid x - y \mid^2,$$

y la condición de crecimiento para toda $t_0 \leq t \leq T$ y $x, \in \mathbb{R}$

$$\mid b(t,x) \mid^2 + \mid \sigma(t,x) \mid^2 \leqslant K(1 + \mid x \mid^2),$$

con, $K > 0$ una constante, entonces existe un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \geqslant 0}$ solución única de 1.16 que es adaptado, continuo, uniformemente acotado en $L^2(P)$, es decir, $sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, y es además único en el sentido de indistinguibilidad [1].

Al teorema 1.1, se le conoce como solución fuerte. Otro resultado importante en teoría de procesos de difusión es la ***fórmula de Itô***, que ayuda a encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema 1.2. ***(Fórmula de Itô)*** *Si $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de difusión dado por la ecuación 1.16 y $f(t,x)$ una función de clase C^1 como función de t y de clase C^2 como función de x, entonces el proceso $Y_t = f(t, X_t)$ es también un proceso de difusión y es solución a la ecuación,*

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{x,x}(t, X_t)(dX_t)^2. \tag{1.21}$$

En la ecuación 1.21, los subíndices denotan las derivadas, los detalles de las demostraciones se pueden ver en [12] (p.p. 43 - 48).

Existen resultados que demuestran la existencia y la unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas en los cuales el término de difusión o deriva no cumplen con la condición de Lipschitz, por ejemplo $f(x) = \sqrt{x}$.

Teorema 1.3. *Supongamos que tenemos una EDE de la forma:*

$$\begin{aligned} dY_t &= (2\nu Y_t + \delta_t)dt + g(Y_t)dW_t, \qquad t \in [0,T] \\ Y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

donde ν es una constante negativa, $\delta : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es un proceso estocástico adaptado a la fitración $\mathcal{F}_t$ tal que $\int_0^t \delta(u)du < \infty$ para toda $t \geq 0$. Por otro lado, g es una función continua que desaparece en cero la cual satisface la ***Condición de Hölder:***

[1] $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ son indistinguibles si $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ para cada $t \geqslant 0$

$$|\sqrt{g(y)} - \sqrt{g(x)}| \leq b\sqrt{|y-x|}, \qquad b > 0.$$

Entonces la EDE 1.22 tiene una única solución positiva Y_t , continua c.s., que satisface la condición inicial $Y(0) = y_0$

La demostración de existencia y unicidad de la solución Y_t es omitida porque se realiza por construcción.

A continuación se presenta un ejemplo de un proceso de difusión (definición 1.15).

Ejemplo 1.3.1. ***(Proceso Ornstein-Uhlenbeck)****. Un importante proceso de difusión, $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$, que será de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo es el definido por la EDE:*

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \tag{1.23}$$

donde, $\alpha, \sigma > 0$ son constantes y $X_0 = x_0$.

Solución.

Sea,

$$Y_t = f(t, X_t) = X_t e^{\alpha t}.$$

Utilizando la fórmula de Itô, el proceso Y_t satisface:

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha X_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} dX_t \\ &= \alpha X_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t}\left[-\alpha X_t dt + \sigma dW_t\right] \\ &= \alpha X_t e^{\alpha t} dt - \alpha X_t e^{\alpha t} dt + \sigma e^{\alpha t} dW_t. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, tenemos:

$$X_t e^{\alpha t} = x + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$$

Por lo tanto, se llega a la siguiente solución explicita de la ecuación 1.23:

$$X_t = e^{-\alpha t}(x + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s). \tag{1.24}$$

Proposición 1.1. *La esperanza y varianza del Proceso Ornstein-Uhlenbeck, se definen como:*

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0 e^{-\alpha t}, \tag{1.25}$$

y

$$Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}). \tag{1.26}$$

Demostración.

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0 \mathbb{E}(e^{-\alpha t}) + \sigma \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right].$$

Notemos que por propiedad de un proceso martingala,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f(w,s)dW_s\right] = 0,$$

para toda $f \in C^2$ y $0 \leq t \leq T$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(X_t) = X_0 e^{-\alpha t} = \mu_t.$$

Ahora calculemos la varianza. Por ser la integral estocástica una martingala, se tiene que,

$$\mathbb{E}(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}.$$

Y se puede calcular también la varianza de X_t como una aplicación de la Isometría de Itô, entonces:

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= Var(X_0 e^{-\alpha t}) + \sigma^2 Var\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right] \\
&= \sigma^2 Var\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right] \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right]^2 \\
&= \sigma^2 \left(\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds\right) \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t}\left[\frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha s}\right] |_0^t \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right).
\end{aligned}$$

□

Similar al proceso de Vasicek, que a continuación se presentará, en un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, la variación de la tasa de interés (X_t) a lo largo del tiempo indica que ésta oscila en torno a la media de largo plazo μ_t, es decir, si $X_t > \mu_t$, entonces la tasa de interés es forzada a disminuir y si $X_t < \mu_t$, la tasa de interés tiende a aumentar; la velocidad de regresión a la media está dada por α.

Proceso de Vasicek

Para modelar la incertidumbre de las tasas de interés en el modelo de Vasicek, supondremos que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con una filtración estándar $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Sea $X_t = x_t$, bajo la medida neutral al riego $\mathbb{P}$, la dinámica de la tasa de corto plazo está dada por,

$$dx_t = \alpha(\beta - x_t)dt + \sigma dW_t, \tag{1.27}$$

con condición inicial $x(0) = x_0$ y donde, α, β, σ son constantes y dW_t representa un término estocástico con distribución normal estándar. Este modelo involucra reversión a la media, es decir, la tasa de corto plazo es llevada en el largo plazo a un nivel de reversión a la media β con una velocidad de reversión α, éste último caracteriza la velocidad en la cual las trayectorias de x_t se agruparan alrededor de β y al término σ se le llama volatilidad del proceso.

Ya que la EDE 1.27 cumple con las condiciones del teorema 1.1 para la existencia y unicidad de la solución, entonces, tenemos que la solución del proceso Vasicek esta dada por:

$$x_t = \beta + (x_s - \beta)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma e^{-\alpha t}\int_s^t e^{\alpha u} dW_u, \qquad s \leq t. \tag{1.28}$$

Demostración. Aplicando la fórmula de Itô al proceso $e^{\alpha u}x_u$, obtenemos:

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha u}x_u) &= \alpha e^{\alpha u}x_u du + e^{\alpha u}dx_u \\ &= \alpha e^{\alpha u}x_u du + e^{\alpha u}(\alpha(\beta - x_u)du) + e^{\alpha u}\sigma dW_u \\ &= \alpha\beta e^{\alpha u}du + \sigma e^{\alpha u}dW_u, \end{aligned}$$

integrando de s a t en la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}x_t &= x_t e^{\alpha s} + \alpha\beta\int_s^t e^{\alpha t} - e^{\alpha s} + \sigma\int_s^t e^{\alpha u}dW_u \\ &= x_s e^{\alpha s} + \beta\left(e^{\alpha t} - e^{\alpha s} + \sigma\int_s^t e^{\alpha u}dW_u\right). \end{aligned}$$

Es decir,

$$x_t = \beta + (x_s - \beta)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma e^{-\alpha t}\int_s^t e^{\alpha u} dW_u, \qquad s \leq t.$$

En particular para $t \geq 0$, tenemos que

$$x_t = \beta + (x_0 - \beta)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha u} dW_u.$$

□

Ahora, calcularemos la esperanza y varianza del proceso de Vasicek. Sea x_s un proceso de Markov continuo, entonces,

$$\mathbb{E}(x_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(x_t \mid x_s), \qquad s \leq t.$$

A partir de la demostración de la solución a la ecuación (1.28), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(x_t \mid x_s\right) &= \beta + \left(x_s - \beta\right)e^{-\alpha(t-s)}, \qquad s \leq t. & (1.29) \\ Var\left(x_t \mid x_s\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\left[x_t - \mathbb{E}\left(x_t \mid x_s\right)\right]^2\right) \mid x_s\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right), \qquad s \leq t. & (1.30) \end{aligned}$$

Demostración. Estos resultados pueden ser obtenidos directamente de la expresión para x_s. Aplicando esperanza, en ambos lados de la ecuación (1.28) y por el teorema de Itô (Teorema 1.2) se tiene que:

$$\mathbb{E}(x_t \mid x_s) = \beta + (x_s - \beta)e^{-\alpha(t-s)}, \qquad s \leq t.$$

Ahora, usando de nuevo el teorema de Itô (Teorema 1.2), la varianza de x_t es:

$$\begin{aligned} Var\,(x_t \mid x_s) &= \mathbb{E}\left(\left[x_t - \mathbb{E}\,(x_t \mid x_s)\right]^2 \mid x_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u\right]^2 \\ &= \sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u\right]^2 \\ &= \sigma^2 \int_s^t e^{-2\alpha(t-u)} du \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right), \qquad s \leq t. \end{aligned}$$

□

En particular, para $t \geq 0$, se tiene:

$$\mathbb{E}(x_t \mid x_0) = \beta + (x_0 - \beta)e^{-\alpha t} = \mu_t. \tag{1.31}$$

$$Var(x_t \mid x_0) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) = \sigma_t^2. \tag{1.32}$$

Por lo tanto, x_t tiene distribución normal con media μ_t y varianza σ_t^2. Usando la fórmula de valuación neutral al riesgo (ver Teorema 3.1), el precio de un bono cupón cero (ver subSección 3.1) con vencimiento T al tiempo t se escribe como,

$$P(t,T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_t^T x_u du\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Bajo esta derivación, se considera que, x_u es un proceso de Markov, es decir, para determinar cómo evoluciona x_u desde t, sólo se necesita saber el valor de x_t para $u \geq t$. Así,

$$P(t,T,x_t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_t^T x_u(x_t) du\right) \mid x_t\right],$$

y

$$x_u(x_t) = e^{-\alpha(u-t)}\left[x_t + \beta\left(e^{\alpha(u-t)} - 1\right) + \sigma \int_t^u e^{\alpha(\nu-t)} dW_\nu\right].$$

con, x_t como un parámetro. Entonces, la derivada parcial con respecto a x_t es de la forma,

$$\frac{\partial x_u(x_t)}{\partial x_t} = e^{-\alpha(u-t)}.$$

Así que,

$$\int_t^T \frac{\partial x_u(x_t)}{\partial x_t} du = \int_t^T e^{-\alpha(u-t)} du = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right).$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t,T,x_t)}{\partial x_t} &= \mathbb{E}\left[-\left(\int_t^T e^{-\alpha(u-t)}du\right) exp\left(-\int_t^T x_u(x_t)du\right)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)\mathbb{E}\left[exp\left(-\int_t^T -x_u(x_t)du\right)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)P(t,T,x_t).
\end{aligned}$$

Definimos, $B(t,T) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)$. Vasicek muestra que la ecuación 1.16 puede usarse para obtener la siguiente expresión para el precio al tiempo t de un bono cupón cero que paga \$1 al tiempo T:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)x_t}, \tag{1.33}$$

para alguna función $A(t,T)$ independiente de x_t.

Ahora consideramos la siguiente expresión,

$$\exp\left(-\int_0^t x_u(x_t)du\right)P(t,T,x_t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T x_u du\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

El proceso definido por la ecuación anterior es una martingala. Ahora, por teorema de Itô,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_0^t x_u(x_t)du\right)P(t,T,x_t) &= P(0,T,x_0) + \int_0^t -x_u \exp\left(-\int_0^u x_\nu d\nu\right)P(u,T,x_u)du \\
&+ \int_0^t \exp\left(-\int_0^u x_\nu d\nu\right)\frac{\partial P(u,T,x_u)}{du}du \\
&+ \int_0^t \exp\left(-\int_0^u x_\nu d\nu\right)\frac{\partial P(u,T,x_u)}{dx_u}\left[\alpha(\beta - x_u)du + \sigma dW_u\right] \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \exp\left(-\int_0^u x_\nu d\nu\right)\frac{\partial^2 P(u,T,x_u)}{\partial x_u^2}\sigma^2 du.
\end{aligned}$$

Dado que el proceso anterior es una martingala, se tiene que todos los términos que contienen a du deben sumar cero, así

$$-x_t P(t,T,x_t) + \frac{\partial P(t,T,x_t)}{\partial t} + \frac{\partial P(t,T,x_t)}{\partial x_t}\left[\alpha(\beta - x_t)\right] + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P(t,T,x_t)}{\partial x_t^2} = 0. \tag{1.34}$$

Donde la ecuación (1.34), es la ecuación diferencial parcial para el precio de un bono.

Ahora, calculando las parciales de la ecuación (1.33),

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P(t,T,x_t)}{\partial t} &= \frac{\partial A(t,T)}{\partial t}\exp(-B(t,T)x_t) - A(t,T)\frac{\partial B(t,T)}{\partial t}x_t\exp(-B(t,T)x_t),\\
\frac{\partial P(t,T,x_t)}{\partial x_t} &= -A(t,T)B(t,T)\exp(-B(t,T)x_t),\\
\frac{\partial^2 P(t,T,x_t)}{\partial x_t^2} &= A(t,T)B^2(t,T)\exp(-B(t,T)x_t).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (1.34) obtenemos,

$$
\begin{aligned}
-x_tA(t,T)\exp(-B(t,T)x_t) + \frac{\partial A(t,T)}{\partial t}\exp(-B(t,T)x_t) - A(t,T)\frac{\partial B(t,T)}{\partial t}x_t\exp(-B(t,T)x_t)\\
-A(t,T)B(t,T)\exp(-B(t,T)x_t)\left[\alpha(\beta-x_t)\right] + \frac{\sigma^2}{2}A(t,T)B^2(t,T)\exp(-B(t,T)x_t) = 0.
\end{aligned}
$$

Podemos eliminar el término $exp(-B(t,T)x_t)$ en la expresión anterior, por lo que tendremos,

$$
-x_tA(t,T)+\frac{\partial A(t,T)}{\partial t}-A(t,T)\frac{\partial B(t,T)}{\partial t}x_t-A(t,T)B(t,T)\left[\alpha(\beta-x_t)\right]+\frac{\sigma^2}{2}A(t,T)B^2(t,T)=0.
$$

Se cumple que, $A(t,T) = P(t,T,0)$, entonces,

$$
\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \alpha\beta A(t,T)B(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}A(t,T)B^2(t,T) = 0.
$$

Resolviendo la EDE con condición final, $A(T,T) = 1$, tenemos,

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \exp\left[-\frac{\alpha\beta}{\alpha}\int_t^T\left(1-e^{-\alpha(T-u)}\right)du + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\int_t^T\left(1-e^{-\alpha(T-u)}\right)^2du\right]\\
&= \exp\Big[-\beta(T-t) + \frac{\beta}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(T-t)\\
&+ \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}\left(1-e^{-2\alpha(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)\Big].
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
B(t,T) = \frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right),
$$

y

$$
A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T)-T+t)(\alpha^2\beta-\sigma^2/2)}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2B(t,T)^2}{4\alpha}\right],
$$

son las soluciones. En el caso en el que $\alpha = 0$, entonces $B(t,T) = T-t$ y $A(t,T) = \exp\left[\sigma^2(T-t)^{3/6}\right]$.

La metodología estocástica para la simulación de tasas de interés, Vasicek, queda representada con una EDE de Itô [ecuación 1.16]

Así, los parámetros del modelo a estimar son:

- $\alpha =$ velocidad de regresión a la media.
- $\sigma =$ la volatilidad.
- $\beta =$ valor al que la tasa de interés tiende a largo plazo.

Ahora, se demostrará que la tasa corta x_t puede ser negativa.

Proposición 1.2. $\mathbb{P}(x_t \in (-\infty, \epsilon)) > 0 \quad si \quad \epsilon > \sqrt{x_0^2 + (\sigma^2/2\alpha)}$

Demostración. Sea $\{x_t \in (-\infty, \epsilon)\} = \{x_t < \epsilon\}$, entonces su complemento es $\{x_t \geq \epsilon\}$. Por lo que sí mostramos que $\mathbb{P}(x_t \geq \epsilon) < 1$ para algún $\epsilon > 0$, entonces la proposición 1.2 quedará demostrada. Aplicando la desigualdad de Chebyshev (ver [1] , pp. 348), tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x_t \geq \epsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}\left(x_t^2\right)}{\epsilon^2} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) + \left(\beta + (x_0 - \beta)\, e^{-\alpha t}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Como $1 > e^{-\alpha t}$ para todo $t > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(x_t \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{\sigma^2}{2\alpha} + x_0^2\right].$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(x_t \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{\sigma^2}{2\alpha} + x_0^2\right] < 1 \quad si \quad \epsilon > \sqrt{x_0^2 + (\sigma^2/2\alpha)}.$$

Es decir,

$$\mathbb{P}(x_t \in (-\infty, \epsilon)) > 0 \quad si \quad \epsilon > \sqrt{x_0^2 + (\sigma^2/2\alpha)}.$$

□

Ahora, demostraremos la estabilidad del modelo de Vasicek. (ver [19])

Proposición 1.3. *La solución del modelo de Vasicek dada en 1.28 es exponencialmente 2-estable.*

Demostración. Sean x_t y x_t^* dos soluciones de 1.27, y además se satisface que $x(0) = x_0$ y $x^*(0) = x_0^*$, respectivamente (no necesariamente constantes). Entonces, usando la ecuación 1.28 para x_t^*, tenemos,

$$x_t - x_t^* = (x_0 - x_0^*)e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0.$$

Tomando esperanza en ambos lados, obtenemos,

$$\mathbb{E}|x_t - x_t^*|^2 = \mathbb{E}|x_0 - x_0^*|^2 e^{-2\alpha t}, \qquad t \geq 0.$$

$\square$

Proceso de Cox-Ingersoll-Ross

Como mencionamos antes, en el modelo de Vasicek, la tasa de interés de corto plazo puede tomar valores negativos. Para afrontar este problema Cox, Ingersoll y Ross propusieron un modelo donde las tasas de interés siempre son no-negativas. El proceso neutral al riesgo para x está dado por

$$dx_t = \alpha(\beta - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t, \qquad t > 0 \tag{1.35}$$

Este modelo también involucra reversión a la media pero la desviación estándar es proporcional a $\sqrt{x_t}$.

Nótese que el término de difusión de la EDE (1.35), no cumple con la condición de Lipschitz del Teorema 1.1. Entonces, por el Teorema 1.3 tenemos que existe una única solución positiva para x_t para el modelo de Cox-Ingersoll-Ross.

Demostración. Obsérvese que la ecuación (1.35) es un proceso particular de la ecuación (1.22), haciendo:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4x}{\sigma^2}, \\ \nu &= \frac{-\alpha}{2}, \\ \delta &= \frac{4\alpha\beta}{\sigma^2}, \quad y \\ g(y) &= 2\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Entonces, se garantiza la existencia de una única solución positiva x_t para la ecuación (1.35) si logramos demostrar que $g(y)$ cumple con la condición de Hölder (Teorema 1.3). Supongamos lo contrario, es decir,

$$|2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}| > 2\sqrt{|x-y|}.$$

Luego para $x > y$ se tiene que,

$$\sqrt{x} > 2\sqrt{x-y} + \sqrt{y},$$

entonces,

$$x > x - y + y + 2\sqrt{x-y}\sqrt{y},$$

así,

$$0 > 2\sigma^2\sqrt{x-y}\sqrt{y},$$

lo que es una contradicción. $\square$

A diferencia del modelo de Vasicek, el modelo C.I.R. no tiene una solución en forma cerrada, pero tiene una tasa de interés no-negativa.

Ahora calculemos la esperanza y la varianza del proceso de C.I.R.

Demostración. Primero calculemos la esperanza.

Aplicando la fórmula de Itô al proceso $e^{\alpha u}r_u$, obtenemos:

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha u}x_u) &= \alpha e^{\alpha u}x_u du + e^{\alpha u}(\alpha(\beta - x_u))du + e^{\alpha u}\sigma\sqrt{x_u}dW_u \\ &= \alpha\beta e^{\alpha u}du + \sigma e^{\alpha u}\sqrt{x_u}dW_u, \end{aligned} \tag{1.36}$$

e integrando de 0 a t en la ecuación (1.36), obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}x_t &= x_0 + \alpha\beta\int_0^t e^{\alpha u}du + \sigma\int_0^t e^{\alpha u}\sqrt{x_u}dW_u \\ &= x_0 + \beta(e^{\alpha t} - 1) + \sigma\int_0^t e^{\alpha u}\sqrt{x_u}dW_u. \end{aligned}$$

Así,

$$x_t = \beta + (x_0 - \beta)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha u}\sqrt{x_u}dW_u.$$

Por la ecuación 1.19, obtenemos:

$$\mathbb{E}(x_t) = x_0e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}), \tag{1.37}$$

ésta es la misma función esperanza que el proceso de Vasicek, (ver demostración de la ecuación (1.29))

Ahora calculemos la varianza de x_t.

Sea $r_t = e^{\alpha t}x_t$. De nuevo aplicamos la fórmula de Itô (Teorema 1.2)

$$\begin{aligned} dr_t &= \alpha\beta e^{\alpha t}dt + \sigma e^{\alpha t}\sqrt{x_t}dW_t \\ &= \alpha\beta e^{\alpha t}dt + \sigma e^{\alpha t/2}\sqrt{r_t}dW_t, \end{aligned} \tag{1.38}$$

y por la ecuación 1.37, tenemos que:

$$\mathbb{E}(r_t) = x_0 + \beta(e^{\alpha t} - 1). \tag{1.39}$$

De acuerdo al teorema 1.2, tomando $f(t, X_t) = r^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} dr_t^2 &= 2r_t dr_t + dr_t dr_t \\ &= 2\alpha\beta e^{\alpha t} r_t dt + 2\sigma e^{\alpha t/2} r_t^{3/2} dW_t + \sigma^2 e^{\alpha t} r_t dt. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Integrando ambos lados de la ecuación 1.40, obtenemos:

$$r_t^2 = r_0^2 + (2\alpha\beta + \sigma^2) \int_0^t e^{\alpha\tau} r_\tau d\tau + 2\sigma \int_0^t e^{\alpha u/2} r^{3/2}(\tau) dW(\tau). \tag{1.41}$$

Aplicamos esperanza en ambos lados de la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_t^2) &= r_0^2 + (2\alpha\beta + \sigma^2) \int_0^t e^{\alpha\tau} \mathbb{E}(r_\tau) d\tau \\ &= x_0^2 + (2\alpha\beta + \sigma^2) \int_0^t e^{\alpha\tau} (x_0 + \beta(e^{\alpha\tau} - 1)) d\tau \\ &= x_0^2 + \frac{2\alpha\beta + \sigma^2}{\alpha} (x_0 - \beta)(e^{\alpha t} - 1) \\ &\quad + \left(\frac{2\alpha\beta + \sigma^2}{2\alpha} \right) (\beta) \left(e^{2\alpha t} - 1 \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_t^2) &= e^{-2\alpha t} \mathbb{E}(r_t^2) \\ &= e^{-2\alpha t} x_0^2 + \frac{2\alpha\beta + \sigma^2}{\alpha} (x_0 - \beta) \left(1 - e^{-\alpha t} \right) e^{-\alpha t} \\ &\quad + \frac{\alpha\beta(2\alpha\beta + \sigma^2)}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-2\alpha t} \right). \end{aligned} \tag{1.42}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Var(x_t) &= \mathbb{E}(x_t^2) - (\mathbb{E}(x_t))^2 \\ &= e^{-2\alpha t} x_0^2 + \frac{2\alpha\beta + \sigma^2}{\alpha} (x_0 - \beta) \left(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha\beta(2\alpha\beta + \sigma^2)}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-2\alpha t} \right) - e^{-2\alpha t} x_0^2 \\ &\quad - 2\beta x_0 \left(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t} \right) - \beta^2 \left(1 - e^{-\alpha t} \right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha} x_0 \left(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t} \right) + \frac{\beta\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\alpha} x_0 \left(e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t} \right) + \frac{\beta\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t} \right)^2. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Particularmente,

$$\lim_{t \to \infty} Var(x_t) = \frac{\beta\sigma^2}{2\alpha}. \tag{1.44}$$

$\square$

El precio de un bono libre de riesgo como función del tiempo t y vencimiento T es $P = P(t, T, x_t)$. Utilizando el teorema de Itô, se tiene,

$$\frac{dP}{P} = \left[\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_t}\alpha(\beta - x_t) + \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial x_t^2}(\sigma\sqrt{x_t})^2\right] dt + \left[\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_t}(\sigma\sqrt{x_t})\right] dW_t.$$

Utilizando condiciones de no-arbitraje se tiene,

$$\frac{\partial P}{\partial x_t}\alpha(\beta - x_t) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x_t^2}(\sigma\sqrt{x_t})^2 = x_t P + \lambda^*(t, x_t)\frac{\partial P}{\partial x_t}\sigma\sqrt{x_t},$$

donde, $\lambda^*(t, x_t) = \dfrac{\lambda\sqrt{x_t}}{\sigma}$ y λ es una constante. Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_t}\alpha\beta - \frac{\partial P}{\partial x_t}\alpha x_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x_t^2}\sigma^2 x_t &= x_t P + \frac{\lambda\sqrt{x_t}}{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x_t}\sigma\sqrt{x_t} \\ &= x_t P + \lambda x_t\frac{\partial P}{\partial x_t}.\end{aligned}$$

La ecuación diferencial parcial para el modelo C.I.R. es,

$$x_t P + \frac{\partial P}{\partial x_t}(\lambda + \alpha)x_t = \frac{\partial P}{\partial x_t}\alpha\beta + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x_t^2}\sigma^2 x_t,$$

con condición final $P(T, T, x_t) = 1$ para todo t.

En este caso, el precio de un bono tiene la misma forma que en el modelo de Vasicek,

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t,T)x_t},$$

pero las funciones $A(t, T)$ y $B(t, T)$ son distintas:

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

y,

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\alpha+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + \alpha)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right]^{2\alpha\beta/\sigma^2}$$

donde, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$.

Capítulo 2

Modelo de valuación para los Instrumentos Financieros.

En este Capítulo se presentan, de modo general, las características que deben considerarse para el cálculo del Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros (RC_{TyFS}). Una vez mostrado lo anterior, se describen los elementos que conforman el cálculo del requerimiento de capital de solvencia por Riesgos Financieros para que por último, nos enfoquemos en un caso particular de Instrumentos Financieros, con el objeto de analizar dos modelos importantes, ya definidos en el Capitulo 1, es decir el Modelo de Vasicek y el Modelo de Cox-Ingersoll-Ross, y así estudiar la sensibilidad de ambos modelos.

A continuación, se mencionarán los elementos que conforman la fórmula general para el cálculo del Requerimiento de Capital de Solvencia, en adelante RCS, conforme a lo establecido en la Circular Única de Seguros y Fianzas (CUSF) en su capitulo 6.2 y en la Ley de Instituciones de Seguros y de Fianzas (LISF) para el cálculo del RCS, artículo 236.

$$RCS = max\{RC_{TyFS} + RC_{PML}, 0{,}9RC_{TyFS}\} + RC_{TyFP} + RC_{TyFF} + RC_{OC} + RC_{OP} \quad (2.1)$$

Donde:

RC_{TyFS} = Requerimiento de capital de solvencia técnico y financiero de seguros;

RC_{PML} = Requerimiento de capital de solvencia de riesgos basados en la pérdida máxima probable;

RC_{TyFP} = Requerimiento de capital de solvencia técnico y financiero de pensiones;

RC_{TyFF} = Requerimiento de capital de solvencia técnico y financiero de fianzas;

RC_{OC} = Requerimiento de capital de solvencia de otros riesgos de contraparte, y

RC_{OP} = Requerimiento de capital de solvencia de riesgo operativo.

2.1. Aspectos importantes en la metodología empleada para el cálculo del Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros (RC_{TyFS}).

El cálculo del RC_{TyFS}, se lleva a cabo empleando modelos que toman en cuenta los siguientes aspectos:

I. Se desarrollan bajo metodologías basadas en la generación de escenarios estocásticos que reflejan la variabilidad de los riesgos ante situaciones extremas;

II. El RC_{TyFS} refleja la variación del valor neto de los fondos propios ajustados de la Institución, en un horizonte de tiempo de un año, a partir de la fecha en que se realice el cálculo del RCS;

III. El valor neto de los fondos propios ajustados (VNA) a una fecha determinada se calcula como:

$$VNA(t) = VNF(t) + REA_{PML}(t), \qquad para\ t = 0, 1.$$

Donde,

- t es la variable de tiempo, tal que $t = 0$ corresponde a la fecha de cálculo del RCS y $t = 1$ corresponde a la fecha de proyección, un año después de la fecha de cálculo del RCS;
- $VNA(t)$ es el valor presente de los fondos propios ajustados al tiempo t ;
- $VNF(t)$ es el valor presente de los fondos propios al tiempo t;
- $REA_{PML}(t)$ es el valor total al tiempo t de los montos de las coberturas de los contratos de reaseguro proporcional y de los montos de las coberturas de los contratos de reaseguro de exceso de pérdida, únicamente para los contratos que sirven para cubrir los seguros cuyo requerimiento de capital está basado en la Pérdida Máxima Probable (PML);

IV. El valor neto de los fondos propios, el cual se determina como el monto de los activos sujetos a riesgo menos los pasivos sujetos a riesgo a una fecha determinada, es decir:

$$VNF(t) = A(t) - P(t), \qquad para\ t = 0, 1.$$

Donde,

- $A(t)$ es el valor presente del valor de mercado de los activos expresados en pesos sujetos a riesgo al tiempo t;
- $P(t)$ es el valor presente del valor de mercado de los pasivos expresados en pesos sujetos a riesgo al tiempo t , sin incluir el margen de riesgo;

V. La variable de pérdida del valor de los fondos ajustados, la cual se denota como:

$$L = -\triangle VNA;$$

donde,

El cambio o variación del valor de los fondos propios ajustados ($\triangle VNA$).

se calcula como:

$$\triangle VNA = VNA(1) - VNA(0).$$

VI. El RC_{TyFS}, se calcula como el máximo entre cero y el valor en riesgo a un nivel de confianza del 99,5 % ($VaR_{99,5\,\%}$) de la variable de pérdida en el valor de los fondos propios ajustados, L, es decir:

$$RC_{TyFS} = max\{0, VaR_{99,5\,\%}(L)\};$$

donde, L es la variable aleatoria que representa la pérdida prospectiva de los Fondos Propios (capital) y que se puede escribir como:

$$L = L_A + L_P + L_{PML}$$

con:

- $L_A = -A(1) + A(0)$ la variable aleatoria de la pérdida prospectiva en el valor de los activos de la compañía en un año;
- $L_P = P(1) - P(0)$ la variable aleatoria de la pérdida prospectiva en el valor de los pasivos de la compañía en un año, y
- $L_{PML} = -S_{PML}(1) + S_{PML}(0)$ la variable aleatoria de la pérdida prospectiva por los incumplimientos de entidades reaseguradoras (contrapartes) de los contratos de reaseguro, tanto proporcionales como de cobertura exceso de pérdida, que respaldan la PLM en un año.

VII. La variable L_A, está formada por las pérdidas en el valor de los activos sujetos al riesgo de mercado, así como por las pérdidas en el valor de los activos sujetos al riesgo de concentración y de crédito. L_A, está dada por:

$$L_A = \sum_{j \in CA} L_{A,j'} \tag{2.2}$$

donde, CA es el conjunto de activos formado por la Lista de Instrumentos Financieros (véase listado 2.2.1), incluyendo los Importes Recuperables de Reaseguro.

Las pérdidas $L_{A,j'}$, deberán de valuarse contemplando el efecto generado por el uso de Instrumentos Financieros Derivados, cuando sea el caso.

VIII. La variable L_P, está formada por las pérdidas generadas por el incremento en el valor de los pasivos.

$$L_P = \sum_{j \in CP} L_{P,j'} \tag{2.3}$$

donde, CP es el conjunto de pasivos formado por:

1. Seguros de vida:
   - 1.1. Seguros de vida de corto plazo:
     - 1.1.1. Vida individual, y
     - 1.1.2. Vida grupo, y
   - 1.2. Seguros de vida de largo plazo:
     - 1.2.1. Vida individual, y
     - 1.2.2. Vida grupo;
2. Seguros de daños:
   - 2.1. Seguros de responsabilidad civil y riesgos profesionales;
   - 2.2. Seguros de marítimo y transporte,
   - 2.3. Seguros de incendio,
   - 2.4. Seguros de automóviles,
   - 2.5. Seguros de crédito,
   - 2.6. Seguros de caución, y
   - 2.7. Seguros de diversos, y
3. Seguros de accidentes y enfermedades:
   - 3.1. Seguros de accidentes personales,
   - 3.2. Seguros de gastos médicos, y
   - 3.3. Seguros de salud;

IX. La variable L_{PML}, está formada por las pérdidas ocasionadas por los incumplimientos de entidades reaseguradoras (contrapartes) de los contratos de Reaseguro, tanto proporcionales, como de cobertura de exceso de pérdida, los cuales respaldan el RC_{PML}. Esta variable considera los riesgos de contraparte y concentración por Reaseguro cedido.

La variable L_{PML}, está dada por:

$$L_{PML} = \sum_{j \in CPML} L_{PML,j'}$$

donde, $CPML$ es el conjunto de ramos o tipos de seguros:

1. Seguros agrícolas y de animales;
2. Seguros de terremoto;
3. Seguros de huracán y riesgos hidrometeorológicos, y

4. Seguros de crédito a la vivienda.

X. Los parámetros de los modelos que explican el comportamiento de la variable de pérdida L, se revisan a partir del flujo de información con la que se calibren.

Resumiendo, el RCS_{TyFS} busca cuantificar las posibles pérdidas en el capital de una compañía en un año y está definido de tal forma que con una confianza del 99,5 %, la compañía tenga los recursos suficientes para que durante su operación a lo largo del año (dado el estado actual) sea solvente.

Hasta este punto, ya entramos en contexto de lo que comprende el cálculo del Requerimiento de Capital de Solvencia (RCS) de una institución de Seguros. Empero, como lo hemos mencionado, el objetivo de este trabajo es el de analizar y estudiar la modelización del Riesgo de tasa de interés, que forma parte del cálculo del RCS_{TyFS}, particularmente de la variable de pérdida de los instrumentos financieros, mediante un estudio comparativo entre el Modelo de Vasicek y el Modelo C.I.R.

Dicho lo anterior, a continuación, se describen el modelo y bases técnicas para el cálculo de la variable de pérdida de los Instrumentos Financieros.

2.2. Modelo y bases técnicas para la determinación de la variable de pérdida de los Instrumentos Financieros, para efectos del cálculo del RCS conforme a la fórmula general.

Los modelos de riesgos que explican la variable de pérdida de los activos, ecuación (2.2), en el valor de los Fondos Propios, que sirven para determinar el RC_{TyFS} de Seguros, se pueden separar de la siguiente manera:

I. Riesgos Técnicos de Suscripción por Seguro Directo y Reaseguro Tomado, en las diferentes operaciones que lleva a cabo una Institución de Seguros, y

II. Riesgos Financieros.

A su vez, los Riesgos Financieros se clasifican en:

a) Riesgo de Mercado, y

b) Riesgo de Crédito o Contraparte:

1. Por incumplimiento en instrumentos financieros,
2. Por incumplimiento de los contratos de reaseguro cedido.

El artículo 235 de la LISF establece que el RCS de las Instituciones de Seguros cubrirá, además de los riesgos ya mencionados, los siguientes riesgos:

a) Riesgo de descalce entre activos y pasivos.

b) Riesgo de liquidez.

c) Riesgo de concentración.

A continuación, describiremos los riesgos sujetos a Riesgo de Mercado, ya que se trata del principal riesgo financiero a partir del cual se calcula la variable de pérdida de los activos (ver ecuación (2.2)).

2.2.1. Riesgos sujetos a Riesgo de Mercado, para efectos del cálculo de L_A

Según la naturaleza de cada instrumento financiero, los riesgos de mercado se dividen dependiendo de las características de éstos:

- Puede tratarse de un instrumento de deuda o de capitales;
- Puede estar denominado en pesos o en moneda extranjera;
- Puede ser gubernamental o privado,
- Otros.

Dependiendo de estas características, el RCS se calcula con diferentes modelos que buscan explicar el comportamiento de dichos instrumentos. Así mismo, cada modelo tiene diferentes supuestos de distribución con sus respectivos parámetros.

Algunos de los modelos de riesgos financieros utilizan parámetros de diferente naturaleza, con el fin de explicar de manera específica cada uno de los componentes que describen el comportamiento del riesgo en cuestión. Por ejemplo, la naturaleza de algunos parámetros es explicar el nivel o condición inicial, la de otros es explicar la deriva o tendencia del comportamiento a largo plazo, mientras que otros parámetros buscan capturar la volatilidad o dispersión.

Por ejemplo:

- Para un instrumento de deuda calificado, se calcula el riesgo de tasa de interés, spread y contraparte con el modelo de Vasicek multifactor y el modelo de spread afín. Con la combinación de estos modelos se generan escenarios de tasas calificadas a partir de los cuales se calculan los escenarios del activo al tiempo $t = 1$. A su vez, si el instrumento está en moneda extranjera, se agrega el riesgo de tipo de cambio en $t = 1$.
- Para una acción, se calcula el riesgo del valor del activo en un año con el modelo de Black & Scholes. Este modelo genera escenarios de precios en $t = 1$ y con base en éstos se calculan los escenarios del activo al tiempo $t = 1$.
- Para un CETE, que es un instrumento de deuda gubernamental, únicamente se calcula el riesgo de tasa de interés con el modelo de Vasicek multifactor. Este modelo genera escenarios de curvas de tasas libres de riesgo y con base en éstos se calculan los escenarios del activo al tiempo $t = 1$. En este trabajo, desarrollaremos este ejemplo.

Los principales riesgos financieros son:

- Riesgo de tasa de interés;
- Riesgo accionario;
- Riesgo de spread;
- Riesgo de tipo de cambio;
- Riesgo de crédito, y
- Riesgo de inmuebles.

Así, los modelos empleados en la fórmula general del RCS cuantifican el riesgo financiero de los siguientes activos:

Lista de Instrumentos Financieros.

1. Instrumentos de deuda:
    1.1. Emitidos o avalados por el Gobierno Federal o emitidos por el Banco de México;
    1.2. Instrumentos que sean objetos de oferta pública emitidos en el mercado mexicano o en mercados extranjeros.
2. Instrumentos de renta variable:
    2.1. Acciones cotizadas en mercados nacionales y acciones cotizadas en mercados extranjeros inscritos en el Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC);
    2.2. Fondos de inversión;
    2.3. Certificados bursátiles fiduciarios indizados o vehículos que confieren derechos sobre instrumentos de deuda, de renta variable o de mercancías denominadas en moneda nacional o en moneda extranjera;
    2.4. Fondos de inversión de capitales, fondos de inversión de objeto limitado, fondos de capital privado o fideicomisos que tengan como propósito capitalizar empresas del país, e
    2.5. Instrumentos estructurados.
3. Títulos estructurados:
    3.1. De capital protegido y;
    3.2. De capital no protegido.
4. Operaciones de préstamos de valores.
5. Instrumentos no bursátiles.
6. Operaciones financieras derivadas:
    6.1. Para cubrir instrumentos de deuda;
    6.2. Para cubrir instrumentos de renta variable.

7. Inmuebles urbanos de productos regulares.

La metodología de valuación se basa en la teoría de arbitraje en tiempo continuo estándar (valuación neutral al riesgo, véase Capitulo 3, Teorema 3.1). El modelo utiliza movimientos brownianos para generar los diversos escenarios de variables financieras.

La dependencia entre los instrumentos financieros se captura mediante la matriz de correlaciones instantánea entre los movimientos brownianos asociados a las tasas de interés, tipo de cambio e índices de renta variable. Partiendo de que la matriz de correlaciones es definida positiva, se descompone bajo la factorización de Cholesky.

De acuerdo con lo que se desarrollará en este trabajo, y dado que solo trabajaremos con un tipo de instrumento financiero, ya que el objetivo es analizar el Riesgo de tasa de interés para instrumentos de deuda gubernamentales, no será necesario presentar la valuación y calibración de la matriz de correlación entre los movimientos brownianos.

A continuación, se enlistan todas las curvas de precios asociadas a los distintos activos existentes en el mercado financiero mexicano, ya que forman parte de la información necesaria para la valuación y modelación de la variable de pérdida de los instrumentos financieros.

INSTRUMENTOS DE REFERENCIA O INSTRUMENTOS BASE.

Se dividen en tres grupos: tasas de interés, tipos de cambio e índices financieros.

1. **Curvas de Tasas de Interés.**
   - 1.1. Bonos - M;
   - 1.2. UMS;
   - 1.3. UDIBONOS;
   - 1.4. T - Bills;
   - 1.5. TIIE, y
   - 1.6. LIBOR.
2. **Tipos de Cambio.**
   - 2.1. Dólar, y
   - 2.2. UDI.
3. **Índices Financieros.**
   - 3.1. Mercado de Capitales Nacional:
     - 3.1.1. BMV - Consumo RT;
     - 3.1.2. BMV - Materiales RT;
     - 3.1.3. BMV - Industrial RT;
     - 3.1.4. BMV - Financiero RT;
     - 3.1.5. BMV - Telecom RT;

3.1.6. BMV - índice de Precios y Cotizaciones;
3.1.7. FIBRA Uno;
3.1.8. índice BMV Sociedades de Inversión Deuda;
3.1.9. índice BMV Sociedades de Inversión Renta Variable, y
3.1.10. índice de Vivienda de Sociedad Hipotecaria Federal, y

3.2. Mercado de Capitales Extranjero:

3.2.1. S&P Global 1200 Consumer Staples;
3.2.2. S&P Global 1200 Energy;
3.2.3. S&P Global 1200 Materials;
3.2.4. S&P Global 1200 Industrials;
3.2.5. S&P Global 1200 Healthcare;
3.2.6. S&P Global 1200 Consumer Discretionary;
3.2.7. S&P Global 1200 Financial;
3.2.8. S&P Global 1200 Informtaion Technology;
3.2.9. S&P Global 1200 Telecommunication Services;
3.2.10. S&P Global 1200 Utilities;
3.2.11. S&P Global 1200;
3.2.12. Credit Suisse Yield Enhanced Global Corporate Index, y
3.2.13. Credit Suisse Yield Enhanced Sovereign Corporate Index.

Para fines de notación, se utilizan los siguientes subíndices:

Cuadro 1: Subíndices de los instrumentos financieros.

Descripción	**índice**	**Total**
Instrumentos por cía.	ic ó jc	M_{IF}
Instrumentos base	ib ó jb	N
Curva de interés	l ó k	N_{crv}
Moneda	m	N_{mon}
Instrumentos de Renta Variable	v	N_{rv}
Calificación	d	$1, ..., K$

Riesgo de Tasa de Interés

El modelo de riesgo de tasa de interés está relacionado con el comportamiento aleatorio que pueden presentar las curvas de tasas de interés. Este riesgo se divide en dos:

- Para las tasas de interés con riesgo, y
- Para las tasas de interés libres de riesgo.

Las tasas de interés con riesgo corresponden a los instrumentos de deuda privados y las tasas de interés libres de riesgo son para los instrumentos de deuda gubernamentales.

Cabe mencionar que para modelar ambos tipos de instrumentos de deuda se utiliza como punto de partida el modelo de tasas de interés libres de riesgo. La diferencia entre ambos modelos reside en que para los instrumentos de deuda privados las curvas de tasas de interés con riesgo se generan a partir de la curva de tasas de interés libres de riesgo más un spread, en función del riesgo crediticio implícito en el instrumento.

Para el riesgo de tasa de interés y para cada una de las curvas que se consideran en el modelo de capital (Bonos-M, UMS, UDIBonos y T-Bills), se utiliza un modelo Vasicek Multifactor. La dinámica del proceso de tasa corta o spot está dada por este modelo (ver Proceso de Vasicek [1.3]).

El modelo de Vasicek es, desde un punto de vista didáctico, uno de los modelos más simples en cuanto a su tratamiento analítico. Sin embargo, como ya lo hemos mencionado, tiene algunos impedimentos importantes:

1) Con probabilidad positiva, el modelo produce tasas negativas y

2) El modelo es incapaz de reproducir comportamientos reales del mercado, en especial aquellos esperados en periodos de crisis.

Por lo que el modelo de Vasicek puede conducir a escenarios probabilísticamente realizables bajo el modelo, pero no en la práctica.

Riesgo de Spread

Para los instrumentos de deuda calificados se calcula un riesgo de spread con base en el modelo de tasas de interés libres de riesgo. Es decir, al modelo de Vasicek se incorpora un modelo de spread afín (riesgo de crédito y de spread) que permite generar curvas de interés para bonos con posibilidad de incumplimiento, basado en las calificaciones crediticias de cada instrumento. El modelo de spread afín captura el riesgo de que un instrumento migre de calificación crediticia, con base en una matriz de transición, y también el riesgo de que el emisor caiga en default. Cuando esto último sucede, se pierde todo el valor del activo, es decir, no hay recuperación en caso de deterioro.

El spread de las curvas corporativas se describe como combinación lineal de los factores (componentes) no observables del modelo Vasicek Multifactor, cuyos coeficientes están en función de la calificación crediticia del emisor (modelo afín simple).

Riesgo accionario y de tipo de cambio

El riesgo accionario (renta variable) y de tipo de cambio es estimado a través del modelo de Black & Scholes multivariado, dónde los índices accionarios sectoriales y los tipos de cambio siguen movimientos brownianos geométricos.

2.3. Cálculo de las Variables de Pérdida de los Activos Financieros.

Como se ha dicho, el RCS de los riesgos financieros se calcula a partir de la distribución de pérdida de los activos. Para construir la variable de pérdida de los activos es necesario proyectar los cambios que pueden ocurrir en estos valores en un año.

Las áreas financieras, de las Instituciones de Seguros, buscan en todo momento las mejores estrategias para que el valor de sus activos aumente en el tiempo, es decir, siempre se busca que se cumpla la siguiente ecuación:

$$A(1) > A(0)$$

Donde:

- $A(0)$ es el activo al tiempo cero: el valor de mercado de los activos de la institución a la fecha de valuación. Es un valor observado, y
- $A(1)$ es el activo al tiempo uno: el valor de los activos de la institución en un año. Es un valor proyectado.

Cuando $A(1)$ es mayor que $A(0)$, se tiene una ganancia, es decir, las estrategias de inversión fueron adecuadas para generar ganancias en el valor de los activos.

Por otro lado, cuando $A(1)$ es menor que $A(0)$, la institución tiene una pérdida, es decir, hubo una disminución en el valor de los activos en un año, esto es:

$$A(1) < A(0)$$

Despejando la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} A(1) &< A(0) \\ -A(1) + A(0) &> 0 \\ L_A = -A(1) + A(0) &> 0 \end{aligned}$$

Y definimos a L_A como la variable de pérdida de los activos en un año. La función de pérdida se construye con la fórmula anterior y para cada uno de los escenarios proyectados de $A(1)$.

Por lo tanto, cuando $L_A > 0$, la institución tiene una pérdida en los activos en ese escenario y cuando $L_A < 0$, la institución tiene una ganancia.

2.3.1. Variable de pérdida sujeta a la inversión en instrumentos de deuda.

Las variables de pérdida $L_{A,j}$ correspondientes a la inversión en instrumentos de deuda y títulos estructurados a que se refiere en los numerales 1.1., 1.2., 3.1., 4 y 6.1 de la Lista de Instrumentos Financieros (ver listado 2.2.1), se determinan como:

$$L_{A,j} = \sum_{i=1}^{n_j} L_{A,j,i}$$

donde,

- j se refiere al tipo de instrumento, ya sea de deuda o título estructurado, correspondiente al conjunto de activos CA, descritos en la Lista de Instrumentos Financieros (ver listado 2.2.1) ;
- n_j se refiere al número total de instrumentos para el tipo de instrumento j, y;
- $L_{A,j,i}$ es la variable de pérdida del instrumento i correspondiente a inversiones en instrumentos del tipo j.

$L_{A,j,i}$, se calcula de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$L_{A,j,i} = -S_{j,i}(1) - C_{j,i}(0,1) + S_{j,i}(0),$$

donde,

- $S_{j,i}(1)$ es el valor de mercado al tiempo de proyección $t = 1$, del i-ésimo instrumento traído a valor presente para el tipo de instrumento j;
- $C_{j,i}(0,1)$ es el valor presente del valor de mercado del pago de los cupones en el intervalo de tiempo $(0,1)$ correspondiente al i-ésimo instrumento para el tipo de instrumento j , y
- $S_{j,i}(0)$ es el valor de mercado del i-ésimo instrumento al tiempo de cálculo del RCS, $t = 0$, para el tipo de instrumento j.

El valor de los instrumentos de deuda y de los títulos estructurados se determina conforme a los resultados del Capitulo 3.

2.3.2. Variable de pérdida sujeta a la inversión en instrumentos de renta variable.

Las variables de pérdida $L_{A,j}$ correspondientes a la inversión en instrumentos de renta variable a los se refiere los numerales 2., 3.2. y 6.2 de la Lista de Instrumentos Financieros (ver listado 2.2.1), se determinan como:

$$L_{A,j} = \sum_{i=1}^{n_j} L_{A,j,i}$$

donde,

- j se refiere al tipo de instrumento de renta variable correspondiente al conjunto de activos CA descritos en la Lista de Instrumentos Financieros (ver listado 2.2.1).
- n_j se refiere al número total de instrumentos para el tipo de instrumento j, y;
- $L_{A,j,i}$ es la variable de pérdida del instrumento i correspondiente a inversiones en instrumentos del tipo j.

$L_{A,j,i}$ se calcula de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$L_{A,j,i} = -S_{j,i}(1) + S_{j,i}(0),$$

donde,

- $S_{j,i}(1)$ es el valor de mercado al tiempo de proyección $t = 1$, del i-ésimo instrumento traído a valor presente para el tipo de instrumento j, y
- $S_{j,i}(0)$ es el valor de mercado del i-ésimo instrumento al tiempo de cálculo del RCS, $t = 0$, para el tipo de instrumento j.

2.3.3. Variable de pérdida sujeta a la inversión en instrumentos no bursátiles.

Las variables de pérdida $L_{A,j}$ correspondientes a la inversión en instrumentos no bursátiles y en inmuebles a los se refieren los numerales 5 y 8 de la Lista de Instrumentos Financieros (ver listado 2.2.1), se determinan como:

$$L_{A,j} = \sum_{i=1}^{n_j} L_{A,j,i}$$

donde,

- j se refiere al tipo de instrumento no bursátil o inmueble correspondiente al conjunto de activos CA descritos en la Lista de Instrumentos Financieros (ver listado 2.2.1).
- n_j se refiere al número total de instrumentos para el tipo de instrumento j, y;
- $L_{A,j,i}$ es la variable de pérdida del instrumento i correspondiente a inversiones en instrumentos del tipo j.

$L_{A,j,i}$ se calcula de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$L_{A,j,i} = -S_{j,i}(1) + S_{j,i}(0),$$

donde,

- $S_{j,i}(1)$ es el valor de mercado al tiempo de proyección $t = 1$, del i-ésimo instrumento traído a valor presente para el tipo de instrumento j, y
- $S_{j,i}(0)$ es el valor de mercado del i-ésimo instrumento al tiempo de cálculo del RCS, $t = 0$, para el tipo de instrumento j.

2.4. Modelos bajo la medida de probabilidad observada de los instrumentos base.

En adelante, consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones usuales, donde todos los procesos son definidos. Y consideremos también, a $W^1, ..., W^N$ movimientos brownianos independientes para enunciar las dinámicas de los instrumentos base, los cuales servirán como herramientas elementales para la construcción de los precios de instrumentos más generales.

Observación 2.1. *A lo largo de este trabajo se asumirá que dichos instrumentos cumplen las dinámicas que se especifican en la siguiente subsección.*

2.4.1. Dinámica de los modelos.

A continuación se presenta la dinámica propuesta para los instrumentos base. Por simplicidad de notación, se utilizará el índice, ib, con $ib = 1, ..., N_A$ (ver Cuadro 2.2.1), para todos los instrumentos, aunque cada instrumento tiene su propio índice según la Lista de Instrumentos Base (ver listado 2.2.1).

Bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ se presentan las siguientes dinámicas.

1. **Tasas spot.** La tasa corta o spot de la curva l, denotada por r_l, sigue un modelo de Vasicek multifactorial

$$r_l(t) = \sum_{i=1}^{Nf_l} x_{l,i}(t) \tag{2.4}$$

$$r_l(0) = \sum_{i=1}^{Nf_l} x_{l,i_0} \tag{2.5}$$

donde, el vector x_l sigue la dinámica aleatoria especificada por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dx_{l,i}(t) = \alpha_{l,i}(\beta_{l,i} - x_{l,i}(t))dt + \sigma_{l,i} \sum_{j=1}^{N} a_{l_i,j} dW^j(t) \tag{2.6}$$

$$x_{l,i}(0) = x_{l,i_0} \tag{2.7}$$

donde $a_{ib_m,j} \in A$, y se define como la matriz de dependencia entre los diferentes instrumentos base y la curva l.

2. **Cuentas de banco.** La cuenta de banco para cada curva, tiene la siguiente dinámica

$$dB_l(t) = r_l(t)B_l(t)dt, \tag{2.8}$$

$$B_l(0) = 1. \tag{2.9}$$

3. **Tipos de cambio.** El tipo de cambio se modela con movimientos brownianos geométricos para las distintas monedas. El tipo de cambio de la moneda m, denotado por Z_m, tiene la siguiente dinámica

$$dZ_m(t) = Z_m(t)\left[\mu_{Z_m} dt + \sigma_{Z_m} \sum_{j=1}^{N} a_{ib_m,j} dW^j(t)\right], \tag{2.10}$$

$$Z_m(0) = Z_{m_0}. \tag{2.11}$$

donde $a_{ib_m,j} \in A$, y se define como la matriz de dependencia entre los diferentes instrumentos base.

2.4.2. Solución de las dinámicas.

Las soluciones de cada una de las dinámicas propuestas en la subsección anterior se presentan en el siguiente resultado (véase [16], [18],).

Proposición 2.1. *Para las dinámicas propuestas en la subSección 2.4.1 se cumple lo siguiente.*

1. ***Tasas spot.*** *La tasa corta para la curva l, tiene la siguiente solución bajo el modelo de Vasicek (ecuaciones 2.4 y 2.6). Para $0 \leq s < t$ se cumple,*

$$\begin{aligned} r_l(t) = \sum_{i=1}^{Nf_l} \{ x_{l,i}(s) e^{-\alpha_{l,i}(t-s)} \quad &+ \quad \beta_{l,i} \left(1 - e^{-\alpha_{l,i}(t-s)} \right) \\ &+ \quad \sigma_{l,i} \sum_{j=1}^{N} a_{l_i,j} \int_s^t e^{-\alpha_{l,i}(t-u)} dW^j(u) \} \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $a_{l_i,j} \in A$, y se define como la matriz de dependencia entre los diferentes instrumentos base y la curva l.

2. ***Cuentas de banco.*** *La cuenta de banco, ecuación 2.8, satisface*

$$B_l(t) = exp\left\{ \int_0^t r_l(u) du \right\},$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_0^t r_l(u) du \quad &= \quad \sum_{i=1}^{Nf_l} \{ \frac{(x_{l,i_0} - \beta_{l,i})}{\alpha_{l,i}} \left(1 - e^{-\alpha_{l,i} t} \right) + \beta_{l,i} t \\ &+ \quad \frac{\sigma_{l,i}}{\alpha_{l,i}} \sum_{j=1}^{N} a_{l_i,j} \int_0^t \left(1 - e^{-\alpha_{l,i}(t-u)} dW^j(u) \right) \}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $a_{l_i,j} \in A$, y se define como la matriz de dependencia entre los diferentes instrumentos base y la curva l.

3. ***Tipos de cambio.*** *Finalmente, de manera análoga para el tipo de cambio (ecuación 2.10), el tipo de cambio de la moneda m a la moneda doméstica (pesos) se calcula de la siguiente manera,*

$$Z_m(t) = Z_m(s) exp\left\{ \left(\mu_{Z_m} - \frac{\sigma_{Z_m}^2}{2} \right)(t-s) + \sigma_{Z_m} \sum_{j=1}^{N} a_{ib_m,j} \left(W^j(t) - W^j(s) \right) \right\}. \tag{2.14}$$

donde,

- $Z_m(s)$ *representa el tipo de cambio de la moneda* m *a la moneda doméstica al tiempo de valuación (tiempo* $t = s$*);*
- μ_{Z_m} *representa la deriva instantánea del tipo de cambio, y*
- σ_{Z_m} *representa la volatilidad del tipo de cambio.*
- $a_{ib_m,j} \in A,$ *y se define como la matriz de dependencia entre los diferentes instrumentos base.*

Capítulo 3

Bonos Financieros

Generalmente, las instituciones necesitan de un gran capital para financiar sus proyectos, de tal modo que sería prácticamente imposible obtenerlo de un sólo inversionista. Por este motivo, se busca la participación de inversionistas mediante la emisión de bonos; estos inversionistas, se convierten en prestamistas del organismo emisor. Normalmente, al conseguir un préstamo bajo este contexto, la institución emisora se obliga a pagar a dichos prestamistas, una cantidad de dinero por concepto de intereses, mediante cupones adjuntos a los bonos. Así mismo, la institución emisora se compromete a reintegrarles el valor del título de crédito a la fecha de vencimiento de éste.

Los bonos, brindan dos tipos de beneficios para el inversionista que los adquiere: los intereses y las ganancias. La tasa de interés, es el precio por tomar prestado el dinero. Las ganancias, son las utilidades que obtiene el inversionista por haber prestado su dinero a la institución emisora, y corresponde a la diferencia entre el capital que invierte y el monto que recibe después de la compra.

La evolución del precio de un bono puede ser descrito por diferentes modelos analíticos. En este caso, la metodología empleada para la valuación de los distintos tipos de bonos se basa en la teoría de Arbitraje en tiempo continuo (véase [16] ó [18]).

Uno de los principales resultados de dicha teoría es el Teorema de Valuación Neutral al Riesgo. A continuación, se enuncia una versión de dicho teorema:

Teorema 3.1. ***(Fórmula de Valuación Neutral al Riesgo.).*** *Sea un mercado formado por $S_0, S_1, ..., S_N$ activos base que no pagan dividendos y sea S_0 un numeraire. Entonces, el precio de una **T - reclamación contingente** X está dado por:*

$$\Pi(t, X) = S_0(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right],$$

donde $\mathbb{Q}$ representa una medida martingala equivalente para el mercado $S_0, S_1, ..., S_N$.

El mercado teórico sobre el que se trabaja tiene las siguientes hipótesis:

Hipótesis 3.1. *1. Se considera como numeraire la cuenta de banco B_{l_d}, donde l_d representa la curva doméstica. Cuando no genere confusión, se suprime el subíndice l_d para simplificar la notación.*

2. Localmente, cada mercado l utiliza como numeraire la cuenta de banco B_l. Sea $\mathbb{Q}_l$ la medida martingala equivalente para dicho mercado.

3. El mercado global sobre el que se trabaja está formado por los precios en moneda doméstica de cada uno de los instrumentos que participan en cada mercado l (véase [16], [17] ó [18]).

4. La medida martingala equivalente del mercado global se denota por $\mathbb{Q}$.

5. Sea $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración generada por los movimientos Brownianos $W^1, ..., W^N$.

3.1. Instrumentos de deuda emitidos o respaldados por el Gobierno Federal.

En este apartado, describiremos los resultados utilizados para calcular la distribución de pérdidas de los instrumentos a los que se refiere el numeral 1.1 y los instrumentos de deuda a los que se refiere la Lista de Instrumentos Financieros (listado 2.2.1), valuados en su moneda origen y en moneda domestica.

Consideremos una curva l expresada en moneda m_l. Sea r_l la tasa spot que sigue un modelo de Vasicek dado por (2.4). El Teorema de Valuación Neutral al Riesgo (véase Teorema 3.1) nos dice que el precio de un instrumento que paga una unidad de moneda m_l al tiempo T, denotado por $P_l(t,T)$, está dado por

$$P_l(t,T) = B_l(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_l}\left[\frac{1}{B_l(T)} \mid \mathcal{G}_t\right].$$

A continuación, se presentan los resultados utilizados para la valuación de los distintos intrumentos financieros, descritos en la Lista de Instrumentos Financieros (listado 2.2.1).

3.1.1. Bonos cupón cero expresados en su moneda de origen.

Proposición 3.1. *Sea r_l la tasa spot cuya dinámica está dada por la ecuación (2.4), es decir, sigue un modelo de Vasicek. Entonces, el precio de un bono cupón cero, referente a la curva l expresado en su moneda m_l al tiempo t con fecha de vencimiento T, satisface la siguiente ecuación:*

$$P_l(t,T) = exp\left\{U_l(T-t) + V_l(T-t)^T x_l(t)\right\}, \tag{3.1}$$

donde $U_l(y)$ y $V_l(y)$ son las funciones de la representación afín del modelo Vasicek, dadas por,

$$\begin{aligned} U_l(y) &= -\sum_{i=1}^{Nf_l}\left(\beta_{l,i} - \frac{\sigma_{l,i}}{\alpha_{l,i}}\lambda_{l,i}\right)(y + \upsilon(y,\alpha_{l,i})) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{Nf_l}\frac{\sigma_{l,i}^2}{\alpha_{l,i}^2}(y + 2\upsilon(y,\alpha_{l,i}) - \upsilon(y,2\alpha_{l,i})) \quad (3.2) \\ V_l(y) &= vect[\upsilon(y,\alpha_{l,i})]_{i=1}^{Nf_l}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

con,

$$v(y,\alpha) = -\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha y}), \tag{3.4}$$

y $\lambda_{l:i}$ *representa el precio de mercado del riesgo para la curva* l *del* i*-ésimo instrumento.*

Además, $x_l(t)$ es el proceso vectorial del modelo de Vasicek multifactor dado por,

$$x_{l,i}(t) = x_{l,i}(0)e^{-\alpha_{l,i}t} + \beta_{l,i}(1 - e^{-\alpha_{l,i}t}) + \sigma_{l,i}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\int_0^t e^{-\alpha_{l,i}(t-u)}dW^j(u),$$

con,

- $\alpha_{l,i}$ la velocidad de regresión a la media para la i - ésima coordenada;
- $\beta_{l,i}$ la media de largo plazo para la i - ésima coordenada;
- $\sigma_{l,i}$ la volatilidad para la i - ésima coordenada, y
- $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,\ldots,N}$ la matriz de dependencia entre los diferentes instrumentos base.
- $W^1, ..., W^N$ son movimientos Brownianos independientes.

3.1.2. Bonos cupón cero expresados en moneda doméstica.

El siguiente resultado se basa en el método de cambio de numeraire (véase [16]). De nuevo se considera la curva l cuya moneda es m_l. Se tiene un instrumento que al tiempo T paga una unidad de la moneda m_l expresada en moneda doméstica. Al precio de dicho instrumento al tiempo t se le denota por $P_l^{Z_{m_l}}(t,T)$. El Teorema de Valuación Neutral al Riesgo (véase Teorema 3.1) establece que,

$$P_l^{Z_{m_l}}(t,T) = B_{l_d}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_{m_l}(T)}{B_{l_d}(T)} \mid \mathcal{G}_t\right]. \tag{3.5}$$

Por lo que tenemos el siguiente resultado,

Proposición 3.2. *Sea* $P_l^{Z_{m_l}}(\cdot,T)$ *el proceso del precio de un bono cupón cero referente a la curva* l *expresado en moneda doméstica, al tiempo* t *y que paga una unidad de la moneda* m_l *al tiempo* T*. Entonces, para* $0 \leq t \leq T$*, se cumple lo siguiente:*

$$P_l^{Z_{m_l}}(t,T) = Z_{m_l}(t)P_l(t,T), \tag{3.6}$$

donde,

- $P_l(t,T)$ *satisface la ecuación (3.1), y*
- $Z_{m_l}(t)$ *representa el tipo de cambio de la moneda* m_l *a la moneda doméstica, dada por la ecuación (2.14).*

Observación 3.1. *La proposición 3.2 se basa en considerar como nuevo numeraire al instrumento* $Z_{m_l}(\cdot)P_l(\cdot,T)$*. En este caso, el proceso de la derivada de Radon - Nykodym está dado por:*

$$dL(t) = d\left(\frac{Z_{m_l}(t)P_l(t,T)}{B_{l_d}(t)}\right), \quad t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

3.1.3. Bonos cupón cero con tasa variable expresados en moneda doméstica.

En esta subsección, se calcula el precio de los cupones que paga un bono referenciados a una tasa variable.

Para ello, consideremos un instrumento que en el mercado l, con moneda m_l, al tiempo T, paga el rendimiento anualizado del periodo x de un bono del mercado k, todo expresado en moneda doméstica. Sea $P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(\cdot,T)$ el proceso del precio de dicho instrumento, por el Teorema de Valuación Neutral al Riesgo (véase Teorema 3.1) para $0 \leq t \leq T$ se cumple:

$$P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(t,T) = B_{l_d}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_{m_l}(T)Y_{k,x}(T)}{B_{l_d}(T)} \mid \mathcal{G}_t\right] \tag{3.8}$$

donde, $Y_{k,x}$ está definida a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Y_{k,x}(T) &= -\frac{1}{x}log(P_k(T,T+x)) \\ &= -\frac{1}{x}(V_k(x)^T x_k(T) + U_k(x)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

con $U_k(x)$ y $V_k(x)$ determinadas por las ecuaciones (3.2) y (3.3), respectivamente.

El siguiente resultado es una consecuencia de valuar bajo la medida forward $\mathbb{Q}_{l,T}$ definida al considerar al proceso $P_l^{Z_{m_l}}(\cdot,T)$ como numeraire.

Proposición 3.3. *Sea $P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(\cdot,T)$ el proceso del precio al tiempo t de un bono cupón cero del mercado l con moneda m_l que al tiempo T paga el rendimiento anualizado del periodo x de un bono del mercado k (cupón con tasa variable), todo en moneda doméstica. Entonces, para $0 \leq t \leq T$, se cumple que*

$$\begin{aligned} P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(t,T) = \frac{P_l^{Z_{m_l}}(t,T)}{x}\Bigg(& - \sum_{h=1}^{Nf_k} \upsilon(x,\alpha_{k,h})\Bigg[e^{-\alpha_{k,h}(T-t)}x_{k,h}(t) \\ & - \alpha_{k,h}\gamma^0_{k_h,l,m_l}\upsilon(T-t,\alpha_{k,h}) \\ & - \sum_{i=1}^{Nf_l}\gamma^1_{k_h,l_i}\alpha_{k,h}\upsilon(T-t,\alpha_{l,i}+\alpha_{k,h})\Bigg] - U_k(x)\Bigg), \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde,

- $P_l^{Z_{m_l}}(t,T)$ *está dado por la ecuación (3.6);*
- $Y_{k,x}(T)$ *representa el rendimiento anualizado del periodo $(T, T+x)$ de la curva k, definida por la ecuación (3.9), y*
- $\gamma^0_{k_h,l,m_l}$ *y* $\gamma^1_{k_h,l_i}$ *están definidas como,*

$$
\begin{aligned}
\gamma^0_{k_h,l,m_l} &= \beta_{k,h} - \frac{\sigma_{k,h}}{\alpha_{k,h}}\lambda_{k,h} + \frac{\sigma_{k,h}\sigma_{Z_{m_l}}}{\alpha_{k,h}}\rho_{k_h,Z_{m_l}} - \frac{\sigma_{k,h}}{\alpha_{k,h}}\sum_{h=1}^{Nf_l}\frac{\sigma_{l,i}}{\alpha_{l,i}}\rho_{k_h,l_i} \\
y & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.11) \\
\gamma^1_{k_h,l_i} &= \frac{\sigma_{k,h}\sigma_{l,i}}{\alpha_{k,h}\alpha_{l,i}}\rho_{k_h,l_i}. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

- ρ_{k_h,l_i} *denota la correlación entre el factor* h *de la curva* k *y el factor* i *de la curva* l.
- $\rho_{k_h,Z_{m_l}}$ *denota la correlación entre el factor* h *de la curva* k *y la curva del tipo de cambio de la moneda* m_l.

Observación 3.2. *Nuevamente, la proposición 3.3 se basa en considerar como nuevo numeraire al instrumento* $Z_{m_l}(\cdot)P_l(\cdot,T)$. *El proceso de la derivada de Radon - Nykodym está dado por*

$$dL(t) = d\left(\frac{Z_{m_l}(t)P_l(t,T)}{B_{l_d}(t)}\right), t \in [0,T]. \tag{3.13}$$

La dinámica de la tasa x_k *bajo* $\mathbb{Q}_{l,T}$ *está dada por,*

$$
\begin{aligned}
d_{x_{k,h}}(t) &= \alpha_{k,h}\Bigg(\Bigg[\beta_{k,h} - \frac{\sigma_{k,h}}{\alpha_{k,h}}\lambda_{k,h} + \frac{\sigma_{k,h}}{\alpha_{k,h}}\sum_{i=1}^{Nf_l}\upsilon(T-t,\alpha_{l,i})\sigma_{l,i}\rho_{k_h,l_i} \\
&+ \frac{\sigma_{k,h}\sigma_{Z_{m_l}}}{\alpha_{k,h}}\rho_{k_h,Z_{m_l}}\Bigg] - x_{k,h}(t)\Bigg)dt \\
&+ \sigma_{k,h}\sum_{j=1}^{N} a_{k_h,j}dW^{j,\mathbb{Q}_{T,l}}(t), \qquad (3.14) \\
x_{k,h}(0) &= x_{k,h_0}. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Este proceso corresponde a la dinámica propuesta por Hull & White (véase [16]).

3.1.4. Bonos con cupones.

Los siguientes resultados se construyen a partir de las distintas modalidades de bonos cupón cero, presentadas anteriormente.

Cupones con tasa fija.

Consideremos un bono que paga cupones a tasa fija a lo largo de su vigencia con las siguientes características:

- l es la curva de referencia;
- m_l es la moneda origen y se encuentra expresado en moneda doméstica;
- T es la fecha de vencimiento;

- c representa la tasa anualizada de los cupones fijos;
- δ representa el periodo entre el pago de cupones, y
- M representa el nominal o principal.

Entonces, el precio de dicho bono al tiempo t está dado por,

$$P_l^{Z_{m_l},c,\delta}(t,T) = M\left\{\delta c \sum_{j=1}^{n} P_l^{Z_{m_l}}(t,T_j) + P_l^{Z_{m_l}}(t,T)\right\}, \tag{3.16}$$

donde,

- $P_l^{Z_{m_l}}$ está dado por la ecuación (3.6);
- n representa el número total de pagos que se dan en el periodo $(t,T]$, y
- $\{T_j\}_{j=1}^n$ denotan los tiempos de pago y se calculan como $T_n = T,\ T_{n-1} = T-\delta,\ T_{n-2} = T-2\delta$ y así sucesivamente.

Cupones con tasa variable.

Ahora, consideremos un bono que paga cupones con tasa variable a lo largo de su vigencia con las siguientes características:

- l es la curva de referencia;
- m_l es la moneda origen y se encuentra expresado en moneda doméstica;
- T es la fecha de vencimiento;
- k representa la curva de origen de la tasa de los cupones;
- x representa el periodo de rendimiento prometido de los cupones;
- δ representa el periodo entre el pago de cupones, y
- M representa el nominal o principal.

El precio de dicho bono al tiempo t está dado por,

$$P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x},\delta}(t,T) = M\left\{\delta \sum_{j=1}^{n} P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(t,T_j) + P_l^{Z_{m_l}}(t,T)\right\}, \tag{3.17}$$

donde,

- $P_l^{Z_{m_l},Y_{k,x}}$ está dado por la ecuación (3.10);
- n representa el número total de pagos que se dan en el periodo $(t,T]$, y
- $\{T_j\}_{j=1}^n$ denotan los tiempos de pago y se calculan como $T_n = T,\ T_{n-1} = T-\delta,\ T_{n-2} = T-2\delta$ y así sucesivamente.

Cupones con amortización del principal.

Sea un bono que amortiza el principal a lo largo de su vigencia con las siguientes características:

- l es la curva de referencia;
- m_l es la moneda origen y se encuentra expresado en moneda doméstica;
- T es la fecha de vencimiento;
- δ representa el periodo entre el pago de las amortizaciones del principal, y
- M representa el nominal o principal no amortizado a la fecha de valuación.

El precio de dicho bono al tiempo t está dado por,

$$P_l^{Z_{m_l},c,\delta}(t,T) = \left\{ \frac{M}{n} \sum_{j=1}^{n} P_l^{Z_{m_l}}(t,T_j) \right\}, \tag{3.18}$$

donde,

- $P_l^{Z_{m_l}}$ está dado por la ecuación (3.6);
- n representa el número total de pagos que se dan en el periodo $(t,T]$ y se calcula como $n = \left\lceil \frac{T-t}{\delta} \right\rceil - 1$, y
- $\{T_j\}_{j=1}^{n}$ denotan los tiempos de pago y se calculan como $T_n = T,\ T_{n-1} = T - \delta,\ T_{n-2} = T - 2\delta$ y así sucesivamente.

Cuando la amortización del principal es facultad del emisor, se considera que el valor no amortizado del principal a la fecha de valuación, será pagado a la fecha de vencimiento.

3.2. Instrumentos de deuda de empresas privadas.

La teoría para la valuación de bonos corporativos o calificados toma como base la teoría de Arbitraje en tiempo continuo y la extiende para contemplar la posibilidad de incumplimiento del contrato por parte de la compañía emisora .

Supongamos como ciertas las Hipótesis 3.1 y las siguientes hipótesis.

Hipótesis 3.2. *(Calificaciones de los bonos corporativos).*

1. *Las emisiones de bonos son clasificadas por una compañía calificadora, la cual les otorga una calificación dentro del conjunto* $1, 2, ..., K$*, siendo* 1 *la mejor calificación y prosiguiendo de manera decreciente hasta llegar a la calificación que indica el default, dada por* K.

2. *Para la calificación d se considera que el spread de la curva l tiene una representación afín dada por*

$$S_{d,l}(t) = \kappa_{d,l}^T x_l(t) + \nu_{d,l}$$

donde,

- $S_{d,l}(t)$ *representa el spread,*
- $\kappa_{d,l} = \{\kappa_{d,l,i}\}_{i=1}^{Nf_l}$ *es un vector constante (pendiente del spread), y*
- $\nu_{d,l}$ *constante (localización del spread).*

En la siguiente subsección, describiremos los resultados utilizados para calcular la distribución de los instrumentos a los que se refieren los numerales 1.2, 3.1 y los instrumentos de deuda a los que se refiere la Lista de Instrumentos Financieros (listado 2.2.1).

3.2.1. Bonos corporativos cupón cero expresados en moneda doméstica.

Sea una curva l expresada en moneda m_l. Conforme a las Hipótesis 3.2, a continuación se define el precio al tiempo t, denotado por $D_{l,d}(t,T)$, de un instrumento que paga una unidad de moneda m_l al tiempo T expresado en moneda doméstica, dado que al tiempo t tiene una calificación d:

$$D_{l,d}(t,T) = B_{l_d}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_{m_l}(T)}{B_{l_d}(T)} exp\left\{-\int_t^T (\kappa_{d,l}^T x_l(u) + \nu_{d,l})du\right\} \mid \mathcal{G}_t\right], \tag{3.19}$$

donde, $\kappa_{d,l}^T$ y $\nu_{d,l}$ están determinados por las Hipótesis 3.2.

Proposición 3.4. *Sea $D_{l,d}^{Z_{m_l}}(\cdot,T)$ el proceso del precio, al tiempo t, de un bono corporativo cupón cero en el mercado l, que al tiempo T paga una unidad de moneda m_l expresado en moneda doméstica, dado que al tiempo t tiene calificación d. Entonces, para $0 \leq t \leq T$, se cumple que*

$$\begin{aligned}
D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T) &= B_{l_d}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_{m_l}(T)}{B_{l_d}(T)} exp\left\{-\int_t^T (\kappa_{d,l}^T x_l(u) + \nu_{d,l})du\right\} \mid \mathcal{G}_t\right] \\
&= P_l^{Z_{m_l}}(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{l,T}}\left[exp\left\{-\int_t^T (\kappa_{d,l}^T x_l(u) + \nu_{d,l})du\right\} \mid \mathcal{G}_t\right] \\
&= P_l^{Z_{m_l}}(t,T) exp\{-\nu_{d,l}(T-t) + \sum_{i=1}^{Nf_l} \upsilon(T-t,\alpha_{l,i})\kappa_{d,l,i}x_{l,i}(t) \\
&- \sum_{i=1}^{Nf_l} \kappa_{d,l,i}\gamma_{l_i}^0(T-t+\upsilon(T-t,\alpha_{l,i})) - \sum_{i=1}^{Nf_l} \kappa_{d,l,i}\frac{\sigma_{l,i}^2}{2\alpha_{l,i}}\upsilon^2(T-t,\alpha_{l,i}) \\
&+ \sum_{i=1}^{Nf_l} \frac{\kappa_{d,l,i}\sigma_{l,i}^2}{2\alpha_{l,i}^2}\Big[(T-t) + 2\upsilon(T-t,\alpha_{l,i}) - \upsilon(T-t,2\alpha_{l,i})\Big]\},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde,

- $\gamma^0_{l_i}$ *está definida por*

$$\gamma^0_{l_i} = \beta_{l,i} - \frac{\sigma_{l,i}}{\alpha_{l,i}}\lambda_{l,i} + \frac{\sigma_{l,i}\sigma_{Z_{m_l}}}{\alpha_{l,i}}\rho_{l_i,Z_{m_l}} - \frac{\sigma^2_{l,i}}{\alpha^2_{l,i}}; \tag{3.21}$$

- ρ_{k_h,l_i} *denota la correlación entre el factor h de la curva k y el factor i de la curva l;*
- $\upsilon(y,a)$ *se define como en la ecuación (3.4), y*
- $\kappa^T_{d,l}$ *y* $\nu_{d,l}$ *están determinados por las Hipótesis 3.2.*

Observación 3.3. *La proposición 3.4 se basa en considerar como nuevo numeraire al instrumento* $Z_{m_l}(\cdot)P_l(\cdot,T)$*.*

3.2.2. Bonos corporativos cupón cero con tasa variable expresados en moneda doméstica.

En esta subsección, presentaremos los resultados utilizados para calcular el precio de los cupones que paga un bono corporativo referenciados a una tasa variable.

Consideremos un instrumento en el mercado l, con moneda m_l y con calificación d al tiempo t, el cual paga el rendimiento anualizado del periodo x de un bono referente a la curva k al tiempo T, todo expresado en moneda doméstica. Sea $D^{Z_{m_l},Y_{k,x}}_{l,d}(\cdot,T)$ el proceso del precio de dicho instrumento entonces, para $0 \leq t \leq T$ se define:

$$D^{Z_{m_l},Y_{k,x}}_{l,d}(t,T) = B_{l_d}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_{m_l}(T)Y_{k,x}(T)}{B_{l_d}(T)} exp\left\{-\int_t^T (\kappa^T_{d,l}x_l(u) + \upsilon_{d,l})du\right\} \mid \mathcal{G}_t\right] \tag{3.22}$$

donde, $Y_{k,x}$ se define como en la ecuación (3.9).

De manera análoga a la subsección anterior, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.5. *Sea* $D^{Z_{m_l},Y_{k,x}}_{l,d}(\cdot,T)$ *el proceso del precio de un instrumento en el mercado l que al tiempo T paga el rendimiento anualizado del periodo x de un bono referente a la curva k expresado en moneda doméstica, dado que a tiempo t tiene calificación d. Entonces, para*

$0 \leq t \leq T$, se cumple que:

$$
\begin{aligned}
D_{l,d}^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(t,T) &= B_{l_d}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Z_{m_l}(T)Y_{k,x}(T)}{B_{l_d}(T)}exp\left\{-\int_t^T(\kappa_{d,l}^T x_l(u)+\nu_{d,l})du\right\} \mid \mathcal{G}_t\right] \\
= & -\frac{1}{x}\Bigg(\sum_{h=1}^{Nf_k} V_{k,h}(x)P_l^{Z_{m_l}}(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_{l,T}}\left[x_k(T)exp\left\{-\int_t^T(\kappa_{d,l}^T x_l(u)+\nu_{d,l}du\right\} \mid \mathcal{G}_t\right] \\
& +U_k(x)D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T)\Bigg) \\
= & \frac{D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T)}{x}\Bigg(-\sum_{h=1}^{Nf_k}\upsilon(x,\alpha_{k,h})\{\sum_{i=1}^{Nf_l}\frac{\sigma_{k,h}\sigma_{l,i}\kappa_{d,l,i}}{\alpha_{l,i}}\rho_{k_h,l_i}\Big[\upsilon(T-t,\alpha_{k,h}) \\
& -\upsilon(T-t,\alpha_{k,h}+\alpha_{l,i})\Big] + e^{-\alpha_{k,h}(T-t)}x_{k,h}(t) - \alpha_{k,h}\gamma^0_{k_h,l,m_l}\upsilon(T-t,\alpha_{k,h}) \\
& -\sum_{i=1}^{Nf_l}\gamma^1_{k_h,l_i}\alpha_{k,h}\upsilon(T-t,\alpha_{l,i}+\alpha_{k,h})\} - U_k(x)\Bigg) \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

donde,

- ρ_{k_h,l_i} *denota la correlación entre el factor h de la curva k y el factor i de la curva l;*
- $D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T)$ *está dado por la ecuación (3.20);*
- U_k *y* V_k *están definidas por las ecuaciones (3.2), (3.3), respectivamente;*
- $\upsilon(y,\alpha)$ *está definida por la ecuación (3.4);*
- $\gamma^0_{k_h,l,m_l}$ *y* $\gamma^1_{k_h,l_i}$ *definidas por las ecuaciones (3.11), (3.12), respectivamente y;*
- $\kappa^T_{d,l}$ *y* $\nu_{d,l}$ *están determinados por las Hipótesis 3.2.*

Observación 3.4. *Nuevamente, la proposición 3.5 se basa en considerar como nuevo numeraire al instrumento $Z_{m_l}(\cdot)P_l(\cdot,T)$.*

3.2.3. Bonos corporativos con cupones.

Los siguientes resultados se construyen a partir de las distintas modalidades de bonos corporativos cupón cero, presentados anteriormente.

Cupones con tasa fija.

Consideremos un bono corporativo que paga cupones a tasa fija a lo largo de su vigencia con las siguientes características:

- l es la curva de referencia;
- m_l es la moneda origen y se encuentra expresado en moneda doméstica;
- T es la fecha de vencimiento;

- d_0 es la calificación al tiempo 0;
- c representa la tasa anualizada de los cupones fijos;
- δ representa el periodo entre el pago de cupones, y
- M representa el nominal o principal.

El precio de dicho bono al tiempo t está dado por,

$$D_{l,d_0,0}^{Z_{m_l},c,\delta}(t,T) = M \sum_{d=1}^{K-1} \nVdash_{\{\xi(t)=d\}} \left\{ \delta c \sum_{j=1}^{n} D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T_j) + D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T) \right\}, \tag{3.24}$$

donde,

- $D_{l,d}^{Z_{m_l}}$ está dado por la ecuación (3.20);
- $\xi = \{\xi(t)\}$ es el proceso que denota la calificación del bono al tiempo t;
- n representa el número total de pagos que se dan en el periodo (t, T], y
- $\{T_j\}_{j=1}^{n}$ denotan los tiempos de pago y se calculan como $T_n = T$, $T_{n-1} = T - \delta$, $T_{n-2} = T - 2\delta$ y así sucesivamente.

Cupones con tasa variable.

Sea un bono corporativo que paga cupones con tasa variable a lo largo de su vigencia con las siguientes características:

- l es la curva de referencia;
- m_l es la moneda origen y se encuentra expresado en moneda doméstica;
- T es la fecha de vencimiento;
- d_0 es la calificación al tiempo 0;
- k representa la curva de origen de la tasa de los cupones;
- x representa el periodo de rendimiento prometido de los cupones;
- δ representa el periodo entre el pago de cupones, y
- M representa el nominal o principal.

El precio de dicho bono al tiempo t está dado por,

$$D_{l,d_0,0}^{Z_{m_l},Y_{k,x},\delta}(t,T) = M \sum_{d=1}^{K-1} \nVdash_{\{\xi(t)=d\}} \left\{ \delta \sum_{j=1}^{n} D_{l,d}^{Z_{m_l},Y_{k,x}}(t,T_j) + D_{l,d}^{Z_{m_l}}(t,T) \right\}, \tag{3.25}$$

donde,

- $D_{l,d}^{Z_{m_l},Y_{k,x}}$ está dado por la ecuación (3.22);
- $\xi = \{\xi(t)\}$ es el proceso que denota la calificación del bono al tiempo t;
- n representa el número total de pagos que se dan en el periodo $(t, T]$, y
- $\{T_j\}_{j=1}^{n}$ denotan los tiempos de pago y se calculan como $T_n = T$, $T_{n-1} = T - \delta$, $T_{n-2} = T - 2\delta$ y así sucesivamente.

Capítulo 4

Implementación de los modelos Vasicek y C.I.R.

Los movimientos en la tasa de interés son relevantes para la decisión de inversión y gestión del riesgo en los mercados financieros. Los modelos de un solo factor, como el modelo de Vasicek y el modelo C.I.R, son un tipo de modelos de tasa de interés que se utiliza para estos fines.

Algunos parámetros, de los modelos mencionados, representan un papel importante en el precio de los instrumentos financieros o en la simulación de un proceso, mientras que algunos de ellos no los afectan tanto. Por lo que, dependiendo de lo que queremos proyectar, es importante que primero comprobemos la sensibilidad de los modelos con respecto a sus diferentes parámetros.

A continuación, analizaremos la sensibilidad de los parámetros de los modelos Vasicek y C.I.R. para que posteriormente, empleemos estas metodologías para la calibración de los parámetros, referentes a los bonos gubernamentales expresados en su moneda origen, así como las técnicas empleadas para su utilización.

4.1. Sensibilidad de los modelos con respecto a sus parámetros.

A continuación, se muestran algunas simulaciones de los modelos estudiados, para ilustrar y analizar la variación que presentan sus parámetros, dependiendo del valor que éstos tomen. El método empleado es fijar dos parámetros y variar el tercero para estudiar el impacto de la variación de los parámetros en los modelos.

Analizando el modelo de Vasicek, ecuación 1.27, como se muestra en la Figura 4.1, para valores pequeños de σ, el efecto que tiene α sobre el modelo es menor ($Vasicek\_Escenario7, 8, 9$), contrario al escenario para valores grandes de σ ($Vasicek\_Escenario1, 2, 3$). Cuando aumentamos los valores de α, crece el valor de la tasa de interés, lo que significa que disminuirían los precios de los bonos ($Vasicek\_Escenario7, 8, 9$). Cuando aumentamos los valores de σ, entonces α juega un papel más importante en el precio de los bonos. Es decir, para valores pequeños de

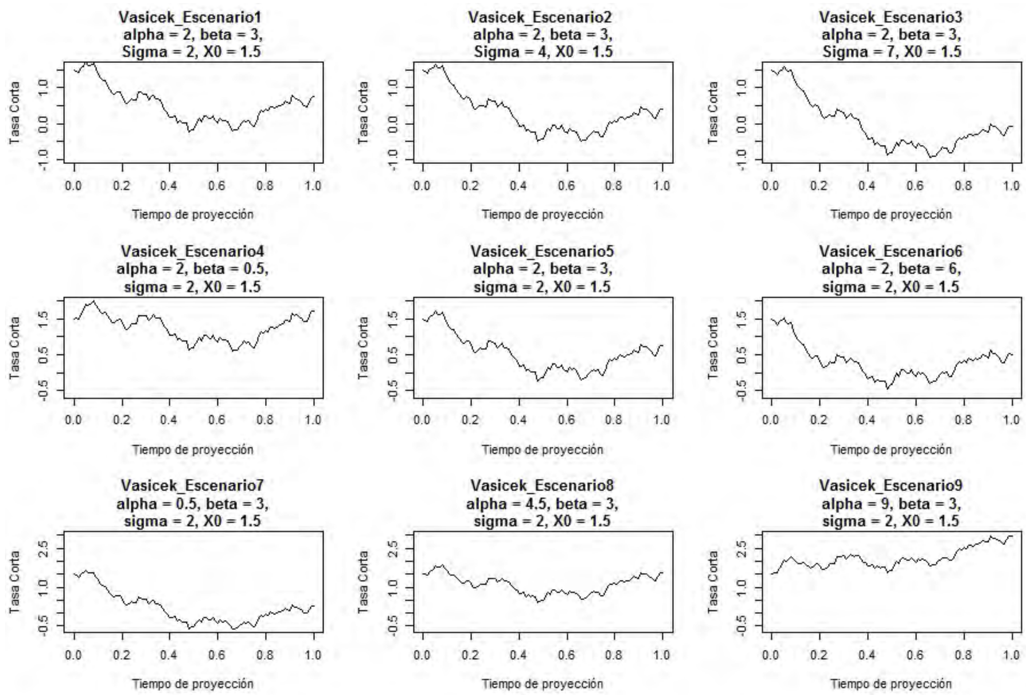

Figura 4.1: Fuente: Elaboración propia. Software: R. Ver: Apéndice B.2.

α y altos de σ es posible obtener tasas de interés negativas, lo que significaría que los bonos “estarían por arriba” de su precio nominal ($Vasicek\_Escenario3$). Con valores de α pequeños, la probabilidad de obtener valores negativos de tasa corta es mayor ($Vasicek\_Escenario7$). Por otro lado, para valores grandes de α hace que esta probabilidad sea insignificante y obtenemos valores de tasa corta más grandes que su valor inicial ($Vasicek\_Escenario9$).

Analizando el modelo C.I.R., ecuación 1.35, obtenemos resultados muy similares al modelo de Vasicek, solo difieren en que en el modelo C.I.R únicamente tendremos valores de tasas positivas. Además, como se muestra en la Figura 4.2, cuando aumentamos los valores de σ, podemos observar una mayor variación que en el caso del modelo Vasicek, es decir, α tiene un mayor impacto es este modelo al hacer variar los valores de σ ($Vasicek\_Escenario1, 2, 3 \;\; VS \;\; CIR\_Escenario1, 2, 3$).

El efecto de β en ambos modelos es más notorio, en comparación con los otros parámetros. En ambos modelos, una disminución en los valores de β afecta directamente a las tasas de interés y obtenemos valores de la tasa corta más grandes ($Vasicek\_Escenario4 \;\; VS \;\; CIR\_Escenario4$). La única diferencia se nota cuando tenemos valores grandes de β. Con un valor grande de β, podemos obtener tasas de interés negativas en el modelo de Vasicek, mientras que esto no es posible en el modelo C.I.R ($Vasicek\_Escenario5, 6 \;\; VS \;\; CIR\_Escenario5, 6$).

Ahora, para diferentes niveles de σ. La variación que tenemos utilizando los mismos valores de σ en ambos modelos, presentan una mayor desviación en el modelo C.I.R., ya que en éste,

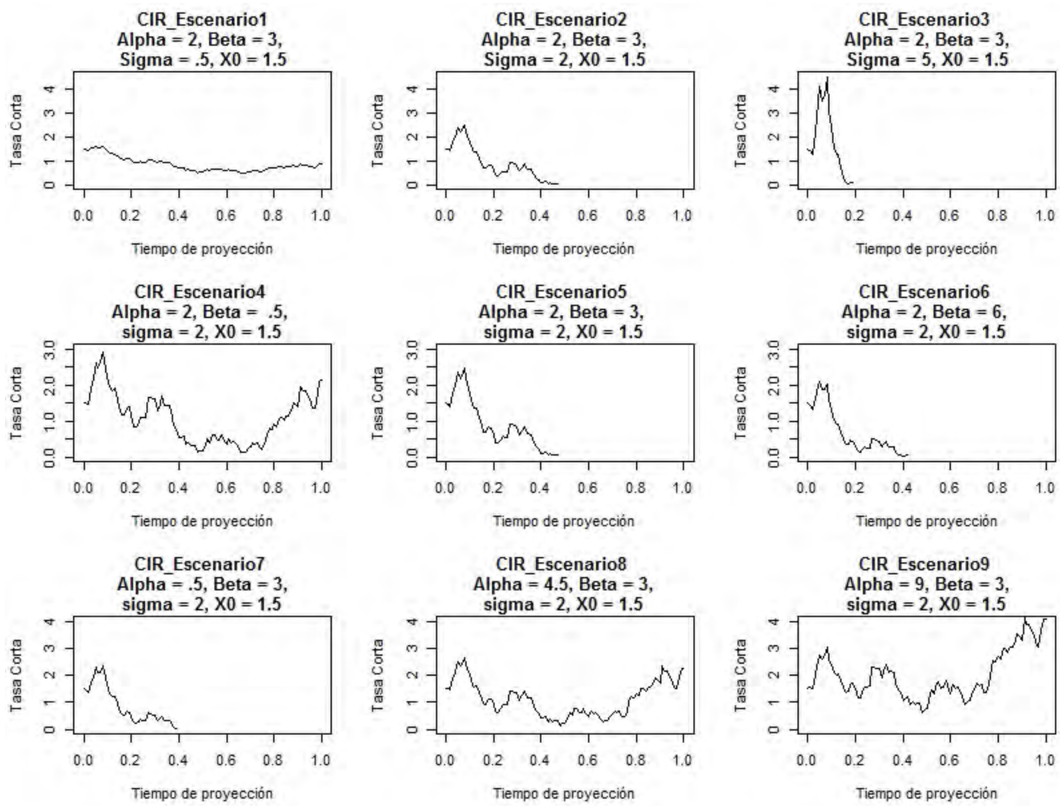

Figura 4.2: Fuente: Elaboración propia. Software: R. Ver: Apéndice B.3.

σ va acompañado del término $\sqrt{r_t}$. Para compensar esta diferencia, hemos utilizado valores más pequeños de σ para las simulaciones del modelo C.I.R, que los utilizados en el modelo de Vasicek ($Vasicek\_Escenario1, 2, 3 \ \ VS \ \ CIR\_Escenario1, 2, 3$). Aún así, en ambos modelos, niveles pequeños de σ dan valores de tasas de interés muy cerca a su valor inicial y, por otro lado, niveles grandes de σ dan valores de tasas de interés mucho más pequeñas que su valor inicial.

Resumiendo, para el caso del modelo de Vasicek, mientras σ tome valores más grandes representará una mayor volatilidad dentro del tiempo de proyección ($Vasicek\_Escenario1, 2, 3 \ \ VS \ \ CIR\_Escenario1, 2, 3$); por otro lado, para los valores que toma β, el coeficiente que acompaña a x_t, observamos que mientras tome valores pequeños, éste obligará a x_t a que conserve una tendencia alrededor de x_0 ($Vasicek\_Escenario4, 5, 6 \ \ VS \ \ CIR\_Escenario4, 5, 6$); además, la tasa de interés x_t, aunque oscile, a largo plazo tiende a regresar a un valor medio β. Finalmente, respecto a los valores que toma α, notamos que para valores grandes, éste representará una mayor velocidad de convergencia al valor de tasa inicial (x_0) ($Vasicek\_Escenario7, 8, 9 \ \ VS \ \ CIR\_Escenario7, 8, 9$).

El modelo de Cox-Ingersoll-Ross, similar al modelo de Vasicek, se caracteriza porque la tasa de interés muestra un proceso de reversión a la media; además, sus valores son siempre positivos, y la varianza es proporcional a las fluctuaciones de la tasa de interés.

La razón por la que este proceso no puede tomar valores negativos, se debe a que si el valor del proceso fuera cero, entonces el componente tendencial sería negativo y la volatilidad igual a cero.

4.2. Calibración y estimación de los parámetros.

La calibración de parámetros en un modelo estocástico permite conocer características adicionales que la estructura por sí misma no es capaz de mostrar. La importancia implícita de calibrar los parámetros está en el hecho de que, en la mayoría de las aplicaciones reales, los parámetros no pueden ser establecidos a priori, teniendo que ser inferidos mediante un comportamiento histórico de las series temporales observadas.

En este apartado se emplearan dos métodos para la calibración de los parámetros, bajo la condición de que sólo se conoce una realización del proceso particular observado. Las dos metodologías presentadas son: Máxima Verosimilitud (para los parámetros α, β y σ) y Mínimos Cuadrados (para el parámetro λ).

Para la implementación y validación del modelo Vasicek y del modelo C.I.R., así como para el análisis comparativo entre ellos, la tasa observada elegida es CETES a 91 días. La formulación de los modelos a implementar, en sus hipótesis, es necesario que el tipo de interés sea de corto plazo. En la gráfica (4.3) se muestra el comportamiento de la tasa observada CETES a 91 días, en el periodo de tiempo del 02 de enero de 2012 al 30 de diciembre de 2016. Para dicho instrumento se obtienen observaciones diarias. Los tiempos de observación se denotan como $t_0 < t_1 < ... < t_n$.

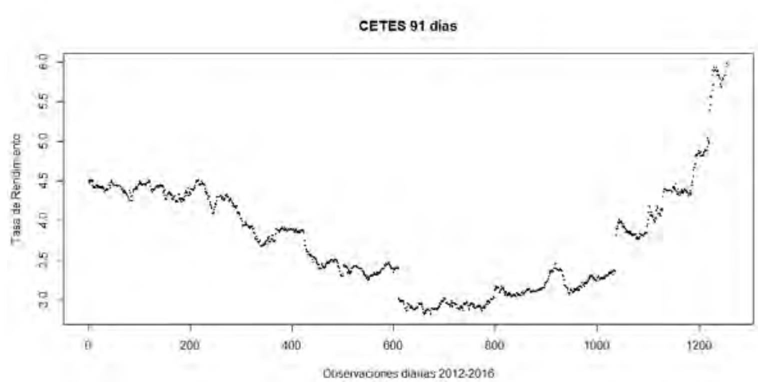

Figura 4.3: Fuente: Elaboración propia. Software: R

4.2.1. Calibración de tasas de interés.

A continuación, se presenta la calibración de los parámetros α, β, σ y λ correspondientes al precio de un bono cupón cero. Para ello, primero se plantea el método para estimar los parámetros α, β y σ correspondientes a la tasa de interés r a partir de la serie histórica observada y después se estima el parámetro del precio de mercado del riesgo, λ, a través de la curva temporal de tasas observada a una fecha determinada.

Cabe mencionar que para que el modelo del RCS de riesgos de mercado sea congruente con la valuación de reservas, las condiciones iniciales o los niveles del modelo de tasas de interés libres de riesgo del modelo de capital, para cada moneda o unidad monetaria, deben ajustarse a las curvas de interés libres de riesgo proporcionadas por el proveedor de precios, mismas que son utilizadas para el cálculo del mejor estimador de las reservas.

- **Calibración de los parámetros** α, β **y** σ.

  Para las primeras cuatro curvas descritas en el inciso 1 de la lista de los instrumentos de referencia, descrita en el apartado 2.2.1, se obtiene la serie histórica diaria correspondiente al rendimiento anualizado de los vencimientos de 3 meses, 6 meses, 1 a 10 años, 15 años, 20 años y 30 años. Para efectos prácticos, como ya se ha mencionado, se utilizará información histórica de la tasa de interés CETES a 91 días. La calibración se realiza utilizando un algoritmo de optimización que minimiza las distancias entre las variaciones porcentuales anuales de las curvas teóricas y las curvas observadas.

  Para las últimas dos curvas descritas en el inciso 1 de la lista de los instrumentos de referencia, descrita en el apartado 2.2.1, se utiliza como información muestral la serie histórica diaria correspondiente al rendimiento anualizado de 91 días. La calibración se realiza por máxima verosimilitud. Estas curvas se trabajan con un modelo de un sólo factor.

Parámetros	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{\sigma}$
CETES	0,4896159	2,9786537	0,4041669

Cuadro 4.1: Estimación de los parámetros - CETES 91 días. Ver: Apéndice B.4.

- **Calibración del parámetro** λ_l**.** Para la estimación del parámetro λ_l, se obtienen los valores de los rendimientos de la curva a una fecha fija (denotada por $t = 0$), para los nodos $T_1 < T_2 < ... < T_n$. Sean $\widehat{Y}_{l,T_j}$ los valores observados de dichos rendimientos.

  El parámetro λ_l se calibra de tal forma que se minimice la distancia entre los rendimientos teóricos, Y_l, y los rendimientos observados, $\widehat{Y}_l$ utilizando mínimos cuadrados no - lineales.

$$\widehat{\lambda}_l = argmin \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{Y}_{l,T_j} - Y_{l,T_j}(0) \right)^2 \right\},$$

  donde, $Y_{l,x}$ está dado por la ecuación (3.9).

Los resultados para ambos modelos son débiles, debido a que su implementación en este trabajo es unifactorial. Sin embargo, esto no es particularmente un gran problema, porque, como vimos en la sección anterior, en la sensibilidad de las tasas de interés, α es un parámetro crítico solo cuando el valor es “muy alto” o “muy pequeño". Solo en estos escenarios las tasas de interés son altamente sensibles a α. Si comparamos los resultados de calibración para α y σ podemos observar que cuando α es “pequeña", entonces el correspondiente σ también es pequeño, y esto elimina el efecto de α.

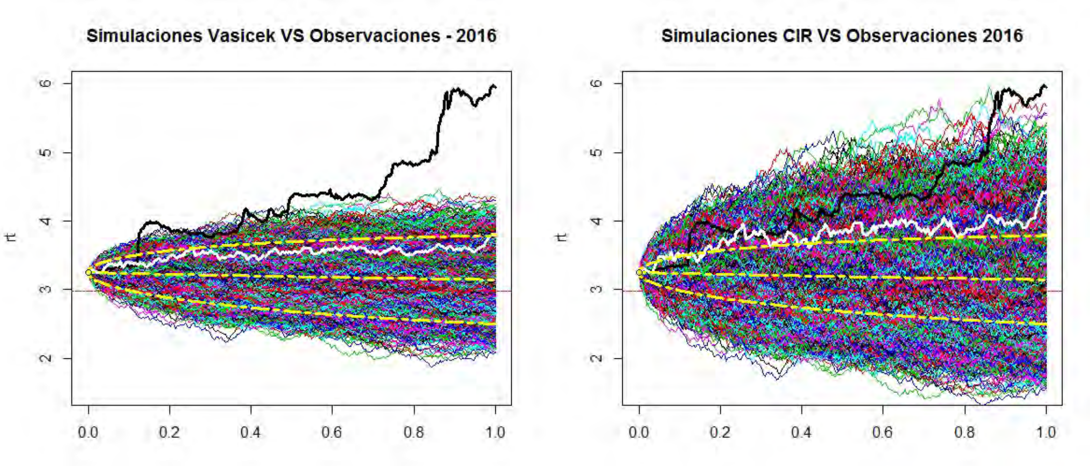

Figura 4.4: Fuente: Elaboración propia. Software: R. Ver: Apéndice B.4.

De la Figura (4.4) es evidente que los resultados en ambos modelos están relacionados de manera lineal. Se realizaron 10,000 simulaciones para cada modelo, a partir de la estimación de los parámetros para la tasa observada CETES a 91 días, en el periodo de tiempo del 02 de enero de 2012 al 31 de diciembre de 2015. En color negro, se muestra el proceso correspondiente a los datos observados en el periodo de tiempo del 04 de enero al 30 de diciembre de 2016 de la tasa CETES a 91 días; en color blanco, se muestran las curvas elegidas para cada modelo, a partir de la calibración de λ; en amarillo, se muestran las curvas de nuestro intervalo de confianza. En cuanto a los resultados de calibración de los modelos para σ, la calibración del modelo C.I.R., como se observa en el Cuadro 4.2, obtenemos un valor más alto de σ que el esperado. El modelo de Vasicek proporciona estimaciones de σ más estables en comparación con el modelo C.I.R., por lo que este modelo puede preferirse para inferir en la estructura de volatilidad de las tasas de interés.

Parámetros	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$	$\widehat{\sigma}$
Vasicek	1,6498415	3,9279082	0,4199531
C.I.R.	2,8371619	4,3746521	0,8359512

Cuadro 4.2: Calibración de los parámetros - CETES 91 días. Ver: Apéndice B.4.

Conclusiones.

El desarrollo de esta tesis, ha requerido de una aplicación de diversos conocimientos adquiridos durante la Licenciatura en Actuaría, relacionados con varias de las materias impartidas, como lo son, Probabilidad, Estadística, Teoría del Riesgo, Procesos Estocásticos, Programación, Operaciones Derivadas Financieras, entre otras.

El principal objetivo del presente estudio, se ha centrado en mostrar la importancia de la modelación de la variable de pérdida de instrumentos financieros por riego de tasa de interés, particularmente en el sector de seguros. Como ya se mencionó en la Introducción, con el nuevo marco regulatorio sobre los requisitos de capital (Solvencia II), las tasas de interés se convierten en uno de los desafíos más importantes, para las instituciones de seguros.

En el primer capítulo (1), se dan los conceptos preliminares de probabilidad, proceso estocásticos, ecuaciones diferenciales, etc., para el estudio de los modelos de tasa de interés estocástica, como lo son, el modelo de Vasicek (1.3) y el modelo C.I.R. (1.3).

En la sección (1.3), se estudia el proceso de Vasicek y se deriva una solución para este modelo, ver (1.28). En (1.29) y (1.30), se demuestran la esperanza y varianza de la solución, respectivamente; y en la proposición (1.2), se garantiza que la tasa de interés del proceso de Vasicek puede ser negativa. Después, en la proposición (1.3), se presenta un resultado que demuestra que el modelo de Vasicek es exponencialmente 2-estable.

En la sección (1.3), se estudia el modelo C.I.R y se garantiza la existencia y unicidad de su solución positiva como consecuencia del Teorema (1.1). Después, se dan algunas propiedades de la solución de este proceso, como la esperanza y la varianza (1.42, 1.43).

En el segundo capítulo (2), se describieron los principales componentes que integran la fórmula general para el cálculo del RCS; posteriormente, nos enfocamos en los aspectos relevantes de la metodología para el cálculo del Requerimiento de Capital de Solvencia por Riesgos Técnicos y Financieros; y finalmente, aterrizamos en la modelización y bases técnicas para el cálculo de la variable de pérdida de los instrumentos financieros, explicando a grandes rasgos los riesgos que intervienen, puntualizado que el objeto de estudio es el riesgo de tasa de interés, el cual está relacionado con el comportamiento aleatorio que pueden presentar las curvas de tasas de interés.

En el tercer capítulo (3), se muestra la ecuación de estructura de plazo del precio de cada uno de los bonos financieros. En el Teorema (3.1) se verifica que el precio de cualquier bono $P_t(t,T)$ medido en unidades del valor del portafolio $\mathbb{Q}_{l,T}$ sigue una martingala.

En el cuarto y último capítulo (4), estudiamos las características básicas del modelo de Vasicek y del modelo C.I.R., e hicimos un estudio comparativo para ver cómo los diversos parámetros afectan la dinámica y la tasa de rendimiento de CETES a 91 días.

Para la construcción de los modelos se estimaron los parámetros a través del método de máxima verosimilitud y mínimos cuadrados no-lineales, utilizando, como información histórica, las tasas de rendimiento CETES a 91 días, y a partir de dichas estimaciones se han validado los modelos de estudio. Respecto a la validación de los modelos, se realizaron proyecciones de la tasa de rendimiento de CETES a 91 días en el horizonte de tiempo de un año, mediante el modelo teórico.

El análisis mostró que los dos modelos son bastante similares en la forma en la que reaccionan a los cambios en sus parámetros. Sin embargo, el valor de σ en el modelo C.I.R. fue relativamente alto, lo que puede ser engañoso a veces y puede describirse como un modelo muy volátil. Por otro lado, una σ "alta" en el modelo de Vasicek podría resultar en tasas de interés negativas, característica que no se observa en la realidad. Entonces, el modelo de Vasicek resulta ser mejor desde el punto de vista en el que su parámetro de volatilidad es más estable.

Por otro lado, el modelo C.I.R., en nuestro análisis y para la información elegida, estima la curva de rendimiento relativamente mejor en comparación al modelo de Vasicek. Así mismo, es claro que los modelos muestran un ajuste bastante "ad-hoc"; por lo que, la decisión entre elegir un modelo u otro depende mucho de los términos que queremos fijar, o en otras palabras, depende del comportamiento que esperamos tenga nuestra curva de tasas de interés.

En general, si las tasas de interés están lejos de cero, el modelo de Vasicek puede obtener una ventaja sobre el modelo de C.I.R., dada la capacidad de tratamiento del modelo y la particularidad de sus soluciones de forma cerrada, incluso para Instrumentos Financieros con tasa de interés financiera más complejos, como por ejemplo, derivados financieros. Sin embargo, si las tasas de interés son más cercanas a cero, entonces trabajar con el modelo de Vasicek puede volverse "un arma de dos filos" debido a que existe la posibilidad de que resulten tasas de interés negativas, lo que generaría precios de instrumentos ilógicos. Comprender modelos complejos de tasas de interés, como el modelo Vasicek o C.I.R., requiere mucha práctica y trabajo, especialmente para los modelos de múltiples factores.

El lenguaje empleado para la implementación metodológica fue R. El detalle de los códigos se puede ver en el Anexo B.

Cabe destacar que como cualquier modelo matemático, la aplicación se limita a las hipótesis teóricas que lo soportan. En el caso del modelo de Vasicek, puede ser considerado como "poco sofisticado" en el conjunto de modelos basados en ecuaciones estocásticas tipo Itô que asumen en su formulación un tipo de interés del tipo "*short term*", con varianza constante y con comportamiento asintótico de reversión a la media, condiciones que se apropian indirectamente en la implementación del modelo. Por otro lado, el modelo C.I.R., se considera un poco "más sofisticado" ya que generaliza el modelo de Vasicek y asume varianza dependiente del tiempo.

Como se ha mencionado, la principal razón que ha motivado realizar este documento de tesis es el actual marco regulatorio bajo Solvencia II al que se enfrentan las instituciones de seguros; sin embargo, también se busca expresar, a través de éste, lo llamativo que, hoy en día, tienen los modelos estocásticos de predicción de tipos de interés, independientemente de que los mismos se encuentren en un proceso de continua mejora y perfeccionamiento.

Así pues, para futuros estudios o incluso para extender y/o afinar el presente trabajo de tesis, sería interesante estudiar estos modelos (inclusive otros, como lo son, exponencial Vasicek, Merton, Brennan-Shwartz, Black – Scholes, C.I.R. V.R. – Modelo de activos de Tasa variable, etc) implementándolos sobre otro tipo de Instrumentos Financieros, como: bonos corporativos, instrumentos de renta variable, operaciones financieras derivadas, tipos de cambio, etc; implementando, a su modelación, la matriz de dependencia entre ellos, y analizar otros tipos de riesgo: riesgo accionario, riesgo de spread, riesgo de default, riesgo de tipo de cambio, etc.

Apéndice A

Conceptos Financieros

A continuación, daremos lugar a algunos conceptos del sector financiero, relevantes en este trabajo.

1. **Activo.** Es un bien económico tangible (una casa, un coche, etc.) o intangible (ahorros en el banco, es decir, los que no se tienen de manera física al instante) que una persona, física o moral, posee.

2. **Activo Financiero.** Son activos que otorgan, comúmente, derecho a una persona, física o moral, de recibir efectivo o bien otros activos financieros, aunque a veces se liquidan compensando pasivos financieros. Por ejemplo, una acción da derecho, entre otras cosas, a recibir dividendos, acciones liberadas en ampliaciones de capital y la parte proporcional del haber líquido, en caso de liquidación de la entidad emisora. Una cuenta a cobrar de un cliente da derecho a recibir efectivo o a ser compensada, si existe tal acuerdo, con cuentas a pagar que supongan deudas con el mismo cliente.

3. **Amortización.** Proceso financiero mediante el cual se extingue, gradualmente, una deuda por medio de pagos periódicos, que pueden ser iguales o diferentes. En las amortizaciones de una deuda, cada pago o cuota que se entrega sirve para pagar los intereses y reducir el importe de la deuda.

4. **Amortización negativa.** Situación que se presenta cuando el saldo pendiente por pagar de un préstamo aumenta con el paso del tiempo. Esto ocurre debido a que los pagos periódicos son menores a lo que el prestamista cobra por concepto de intereses y otros términos del crédito tales como comisiones y gastos.

5. **Bono (s).** Es un instrumento emitido por un prestatario que lo obliga a realizar pagos específicos al tenedor a lo largo de un periodo específico de tiempo. Los bonos pueden tener diversas características y el emisor puede ser desde un gobierno soberano hasta un corporativo. Los bonos más comunes son aquellos que obligan al emisor a realizar pagos, llamados cupones, durante el periodo de vigencia del bono y a repagar su valor nominal al vencimiento.

6. **Bonos corporativos.** Bono que ha sido emitido por una corporación o empresa, con el objetivo de hacer crecer su negocio a través de la recaudación que se produce al comercializarlos y ponerlos a la venta. Estos bonos corporativos llevan asociado un nivel de riesgo

mayor al de, por ejemplo, los bonos del estado, que son respaldados por gobiernos de países y no por empresas privadas. Las empresas aportan como garantía su funcionamiento a través de las ventas futuras e incluso su patrimonio. En compensación, la rentabilidad procedente de los corporativos suelen ser mayores a los de los públicos. Estos bonos, tienen carácter de largo plazo, con fechas de vencimiento situadas al menos al año de su emisión. Dependiendo de la configuración y condiciones con las que cuente un bono corporativo podemos diferenciar entre bonos corporativos cuya deuda puede saldarse con antelación a su vencimiento o bonos corporativos convertibles por medio de una transformación del mismo en acciones de la empresa.

7. **Bonos corporativos cupón cero con tasa variable.** Bonos corporativos que no pagan intereses en ninguna ocasión. Este tipo de documentos se vende en un valor menor al nominal, es decir, con descuento a una tasa que se ajuste periódicamente (tasa variable), de acuerdo con las condiciones del mercado, vinculada a una tasa de referencia (CETES o TIIE).

8. **Bonos Ajustables del Gobierno Federal (AJUSTABONOS).** Son títulos de crédito de largo plazo (3 y 5 años) emitidos por el Gobierno Federal y denominados en moneda nacional, en los cuales se consigna la obligación directa e incondicional del Gobierno Federal de pagar una tasa de interés en forma trimestral más el capital ajustado por los aumentos registrados en el índice nacional de precios al consumidor, al vencimiento de los títulos, por lo que en términos reales su valor se mantiene constante.

9. **Bonos cupón cero.** Títulos de crédito emitidos por el Departamento del Tesoro Norteamericano (1988), a plazo de 20 años, con una tasa de descuento capitalizable que al vencimiento hace que su valor sea equivalente al pago de la deuda pública reestructurada del Gobierno Mexicano por este concepto. Estos títulos se conocen también como "bonos garantizados", siendo un mecanismo de "extinción" de deuda externa. Por este medio, se ofrece un activo que se mantiene en una cuenta de fideicomiso, como colateral al monto del principal. El valor y el plazo de vencimiento del instrumento colateral o "bono cupón cero" están determinados de manera que sean iguales a los de la deuda sujeta a transformación. De esta manera, los rendimientos del instrumento colateral en su fecha de vencimiento pueden ser utilizados para amortizar el principal en un sólo pago. La tasa de interés se fija al momento de su compra y no varía durante la tenencia del título, gozando de confiabilidad para el inversionista.

10. **Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (BONDES).** Títulos de crédito nominativo y negociable, emitidos por el Gobierno Federal y colocados a descuento por el Banco de México a un plazo no menor de un año.

11. **Bonos de descuento.** Documentos emitidos por bancos que son negociados en el mercado secundario por debajo de su valor nominal. Son también, bonos negociados de la deuda en los que se reduce un porcentaje del principal de la deuda original.

12. **Bonos de Indemnización Bancaria (BIB).** Son títulos que documentan la deuda contraída por el Gobierno Federal con motivo de la nacionalización de la banca en 1982. Sirven como medio de pago de la indemnización por la expropiación de las acciones emitidas por instituciones de crédito privadas.

13. **Bonos de la Tesorería (TESOBONOS).** Son títulos de crédito denominados en moneda extranjera (dólares estadounidenses) a seis meses o menos, en los cuales el Gobierno Federal se obliga a pagar una suma en moneda nacional equivalente al valor de dicha moneda extranjera, en una fecha determinada. Estos títulos de crédito se pueden colocar a descuento, o bajo la par, y son indizados al tipo de cambio libre de venta valor 48 hrs. que da a conocer la Bolsa Mexicana de Valores en su publicación denominada "Movimiento Diario del Mercado de Valores".

14. **Bonos de Regulación Monetaria (BREM's).** Bonos emitidos por el Banco de México con el propósito de regular la liquidez en el mercado de dinero (BREM'S). Un aumento en los depósitos de regulación monetaria significa que el banco central extrae liquidez del mercado de dinero, una disminución corresponde a la operación inversa, es decir, una inyección de liquidez.

15. **Bonos financieros.** Son los títulos de crédito, que emiten las sociedades financieras. Estos bonos deberán tener garantía específica; asimismo, tendrán preferencia sobre todo el activo de las sociedades emisoras en caso de saldo insoluto después de realizada la garantía específica. Además de los intereses podrá pactarse para los tenedores una participación en las utilidades de la emisora.

16. **Bonos gubernamentales** Títulos de crédito emitidos por el Gobierno Federal en el mercado de dinero con la doble finalidad de allegarse recursos y regular la oferta de circulante. Son títulos de crédito que se colocan en una oferta primaria al público ahorrador. Se caracterizan por su liquidez en el mercado secundario. Los hay de descuento y los que se colocan a la par, sobre o bajo par. Son títulos al portador por los cuales el Gobierno Federal se obliga a pagar una suma fija de dinero en fecha determinada. Son emitidos por conducto de la SHCP y el Banco de México, que es el agente financiero encargado de su colocación y redención. Los valores gubernamentales, pueden considerarse como un instrumento de política monetaria para el control de la liquidez del mercado financiero a través de su compraventa (operaciones de mercado abierto). Los diferentes tipos de valor que se originan en el proceso de compra-venta son: valor nominal, valor de colocación y valor de mercado.

17. **Coeficiente de correlación o covarianza (ρ)**: Indicador que mide el grado de relación lineal que existe entre los rendimientos de dos activos en un periodo de tiempo.

18. **Contratos adelantados o a futuro de tipo de cambio.** Se trata de contratos en los cuales los participantes contraen al momento de suscribirlo, el compromiso de intercambiar a un plazo futuro acordado un activo a un precio estipulado de antemano a un tipo de cambio determinado (Dólar/UDI).

19. **Contratos de Reaseguro.** Contratos donde se cede parte del riesgo y de la prima a otra Compañía Aseguradora (Reaseguradora), como apoyo para hacer frente al riesgo.

20. **CPO's. Certificado de Participación Ordinaria.** Títulos representativos del derecho provisional sobre los rendimientos y otros beneficios de títulos o bienes integrados en un fideicomiso irrevocable.

21. **Cupón (es) fijo (s).** Bono con tasa de interés nominal que no presenta variación a pesar de los movimientos y condiciones del mercado.

22. **Curva de origen de la tasa de los cupones.** La curva o estructura de tipos de interés puede expresarse de tres formas distintas: curva de tipos de interés al contado (spot), curva de tipos de interés a plazo (forward) y función de descuento. Se trata de tres alternativas para expresar la estructura de tipos de interés. No obstante, el modelo a aplicar para obtener las curvas de interés depende, entre otros factores, del uso o finalidad que se le quiera dar a la curva estimada.

23. **Curva de referencia.** Representación gráfica de la relación que existe entre los rendimientos al vencimiento de bonos con un calificativo crediticio similar y sus respectivos periodos al vencimiento.

24. **Curva de rendimiento.** Es la representación gráfica del nivel de tasas de interés que existe en un momento dado para distintos bonos con diferente plazo a vencimiento pero misma calidad crediticia. Gráficamente se representan de menor a mayor plazo.

25. **Curva (s) de tasas de Interés.** También conocida como estructura temporal de los tipos de interés o curva de rendimientos, proviene de la representación gráfica que relaciona los tipos de interés (precio del dinero) o rendimiento a los diferentes plazos que se negocian en el mercado, y los plazos de los activos financieros.

26. **Descuento Financiero.** Operación financiera realizada por las entidades de crédito, consistente en abonar al prestatario el importe, con rebaja por intereses, de una letra de cambio u otro efecto mercantil antes de su fecha de vencimiento.

27. **Estructura temporal de tasas.** Es una medida del valor que los agentes económicos le asignan hoy a pagos nominales, que serán realizados en el futuro para diferentes plazos que, en el caso de que el emisor sea un gobierno, son en principio libres de riesgo crediticio. Específicamente, la estructura temporal de tasas de interés es la representación gráfica de los horizontes de vencimiento y de las tasas de interés correspondientes, expresadas como si se tratase en todos los plazos de bonos gubernamentales cupón cero, en una fecha determinada.

28. **Factor de descuento.** Componente utilizado para conocer el valor presente de cualquier flujo futuro $\left(\dfrac{1}{1+r}\right)$

29. **Factorización de Cholesky.** Método para resolver sistemas de ecuaciones matriciales. Supongamos que tenemos la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones, llamada A. Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A pueda ser descompuesta mediante la factorización de Cholesky es que sea simétrica y definida positiva.

30. **Fecha de maduración.** Se refiere a la fecha en la que el capital o principal será pagado. La maduración de los bonos, por ejemplo, maneja un rango entre un día y treinta años.

31. **Fondos propios.** Corresponden a la diferencia entre el Valor de Mercado de los Activos y el Valor de Mercado de los Pasivos, esto dará como resultado los Fondos Propios (Capital).

32. **Fondos propios admisibles.** Son los fondos propios, determinados como el excedente de los activos respecto de los pasivos de las instituciones, que sean susceptibles de cubrir su Requerimiento de Capital de Solvencia.

33. **Fondos propios ajustados.** Se define como la diferencia del valor presente de los fondos propios admisibles, el valor presente de los montos de las coberturas de los contratos de Reaseguro proporcional y de los montos de las coberturas de los contratos de Reaseguro de exceso de pérdida, únicamente para los contratos que sirven para cubrir los seguros cuyo requerimiento de capital está basado en la Pérdida Máxima Probable.

34. **Forwards.** Es un contrato derivado en el que se establece un acuerdo de voluntades por virtud del cual una persona llamada vendedor (posición corta) se obliga a transmitir un cierto bien a otra llamada comprador (posición larga), en una fecha futura y a un precio determinado en el presente. A diferencia de los futuros, los cuales tienen características similares a los forwards, éstos se pactan directamente entre las partes y no a través de una bolsa. Este tipo de contratos, no tienen que ajustarse a los estándares de un determinado mercado.

35. **Futuro.** Contrato donde se estipula un acuerdo para comprar o vender un activo en una fecha futura a un precio determinado, el contrato está estandarizado, en cuanto a cantidad y características de activo subyacente, fechas de entrega, etcétera. En los contratos de futuros de activos financieros, la mercancía es un valor, como son las tasas de interés, índices bursátiles, bonos, acciones, entre otros. El propósito es reducir la exposición al riesgo protegiéndose de cambios inesperados en los precios.

36. **Índices Financieros.** Medidas que buscan analizar el estado de la institución desde un punto de vista particular, comparativamente con la competencia o con el líder del mercado. La mayoría de las relaciones se pueden calcular a partir de la información suministrada por los estados financieros.

37. **Instrumentos bursátiles.** Son títulos de crédito que representan la participación individual de sus tenedores en un crédito colectivo a cargo de personas morales o de un patrimonio afecto en fideicomiso (Certificado Bursátil Fiduciario). Esta clase de instrumento incorporó las bondades de las Obligaciones, ya que otorga mayor seguridad jurídica al inversionista al poder incluir obligaciones de hacer y de no hacer, prepagos de capital y vencimientos anticipados, entre otras, y las ventajas de los Pagarés ya que su emisión es fácil de llevar a cabo. Dada la naturaleza de este instrumento, permite la bursatilización de activos de forma más eficiente que los CPO's. De esta forma, se emiten los certificados bursátiles, se reciben los recursos con los que adquieren los activos bursatilizados, eliminando la necesidad de contratación de créditos puente.

38. **Instrumentos de renta variable.** Fondos de Inversión en instrumentos de deuda y fondos de inversión de renta variable, certificados bursátiles fiduciarios indizados o vehículos que confieren derechos sobre instrumentos de deuda, de renta variable. Certificados bursátiles fiduciarios indizados o vehículos que confieren derechos sobre instrumentos de deuda, de renta variable o mercancías. Fondos de inversión de capitales, fondos de inversión de objeto limitado, fondos de capital privado o fideicomisos que tengan como propósito capitalizar empresas del país. Instrumentos estructurados.

39. **Instrumento (s) Derivado (s).** Son contratos que permiten asegurar el precio de algún activo en específico, como las divisas y tasas de interés. Los contratos más comunes en los mercados de instrumentos financieros derivados son: Futuros, Forwards, Opciones y Swaps.

40. **Instrumento (s) Financiero (s).** Es cualquier compromiso virtualmente ineludible, originado por una obligación contractual para entregar efectivo u otro activo financiero a un tercero o intercambiar activos financieros o pasivos financieros con un tercero bajo condiciones que son potencialmente desfavorables para la entidad.

41. **Instrumento (s) Financiero (s) de deuda.** Es el que se genera por contratos en los cuales una entidad se obliga a entregar efectivo u otros activos financieros de acuerdo con las condiciones establecidas para liquidarlos en el contrato respectivo. En algunos casos pueden liquidarse a través de la emisión de instrumentos financieros de capital de la propia entidad.

42. **Instrumentos Primarios.** Se representan por los instrumentos financieros de deuda e instrumentos financieros de capital

43. **Inversión.** Empleo de una suma de dinero para la obtención de rendimiento mediante instrumentos financieros o bancarios (en compras de bienes duraderos o títulos).

    * **Inversión bruta fija.** Consiste en la inversión neta más la inversión de reposición. También se conoce como formación bruta de capital.

    * **Inversión privada.** Están compuestas por las compras de bienes finales que adquieren las empresas para realizar la producción (bienes de capital) y las variaciones en las existencias de mercaderías.

44. **Margen de Riesgo.** Se refiere al monto que, aunado a la mejor estimación, garantice que el monto de las reservas técnicas sea equivalente al que las Instituciones de Seguros requerirían para asumir y hacer frente a sus obligaciones.

45. **Matriz de correlaciones rho (p)** una matriz de correlación es válida si y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

    - Debe ser simétrica.
    - Los elementos de la matriz deben estar entre -1 y 1.
    - Los elementos de la diagonal principal deben ser 1.
    - La matriz debe ser semidefinida positiva o internamente consistente.

    Los riesgos de renta variable nacional y extranjeros, se adicionan considerando su relacón obtenida con un año de experiencia, mediante la matriz de correlación:

    $$[\textit{Riesgo}\ \text{IPC}\ \textit{Riesgo}\ \text{MSCI}]\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \textit{Riesgo}\ \text{IPC} \\ \textit{Riesgo}\ \text{MSCI} \end{bmatrix}$$

    Donde ρ es el coeficiente de correlación.

46. **Medida \ tasa forward.** Una tasa forward es aquella tasa de interés que se encuentra entre dos tasas Spot (Cupón cero) de diferentes períodos, esto es, que se encuentra implícita entre ellas. Es decir, un inversionista no debería de tener preferencia entre la opción por invertir cierto capital a una tasa, por ejemplo de 28 días y después reinvertirlo a una tasa de 63 días, ó invertir ese mismo capital a una tasa de 91 días.

47. **Mercado.** Cualquier lugar que tenga como objeto poner en contacto a compradores y vendedores, para realizar transacciones y establecer precios de intercambio.

- * **Mercado financiero.** Es aquél en que se lleva a cabo la compra-venta de valores (inversiones financieras). Normalmente se integra por varios mercados subsidiarios: un mercado de capitales (para inversión a largo plazo); un mercado de dinero (para inversiones a corto plazo); un mercado primario (para la nueva emisión de valores); y un mercado secundario (para la compra-venta de valores ya emitidos)
- * **Mercado a futuros.** Mercado organizado para realizar transacciones que se traducen en una compra-venta futura. Las operaciones a futuro se realizan por las expectativas que existen en el mercado de ciertos bienes, sobre todo materias primas y productos agropecuarios. Su función básica es la cobertura de riesgos.
- * **Mercado bursátil.** Aquél en que se llevan a cabo las transacciones de títulos realizados por los intermediarios bursátiles, quienes captan los recursos provenientes de ahorradores e inversionistas, nacionales y extranjeros; aplicándolos a una amplia gama de valores que responden a las necesidades de financiamiento de empresas emisoras, instituciones de crédito y organismos gubernamentales.
- * **Mercado cambiario.** Lugar donde se realizan operaciones de cambio, compra y venta de títulos de crédito en moneda nacional y divisas.
- * **Mercado de capital.** Conjunto de instituciones financieras que canalizan la oferta y la demanda de préstamos financieros a largo plazo. Muchas de las instituciones son intermediarias entre los mercados de corto plazo.
- * **Mercado de dinero.** Es aquél en que concurren toda clase de oferentes y demandantes de las diversas operaciones de crédito e inversiones a corto plazo, tales como: descuentos de documentos comerciales, pagarés a corto plazo, descuentos de certificados de depósitos negociables, reportes, depósitos a la vista, pagarés y aceptaciones bancarias. Los instrumentos del mercado de dinero se caracterizan por su nivel elevado de seguridad en cuanto a la recuperación del principal, por ser altamente negociables y tener un bajo nivel de riesgo.
- * **Mercado de divisas.** Magnitud y lugar en que concurren oferentes y demandantes de monedas de curso extranjero. El volumen de transacciones con monedas extranjeras determina los precios diarios de unas monedas en función de otras, o el tipo de cambio con respecto a la moneda nacional.
- * **Mercado interbancario.** Es el mercado que considera únicamente las transacciones realizadas entre bancos y casas de bolsa tales como préstamos de fondos e intercambio de valores.
- * **Mercado primario.** Es aquél en que los valores se colocan por primera vez proporcionando un flujo de recursos de los inversionistas hacia el emisor. El emisor entrega los valores y recibe recursos frescos para sus proyectos.
- * **Mercado secundario.** Conjunto de negociaciones de compradores y vendedores que tienen por objeto adquirir títulos o valores que ya están en circulación, proporcionando liquidez a sus tenedores. El inversionista que ya adquirió un título o valor decide venderlo a otro inversionista, el intercambio de flujo monetario y valores se da entre dos entes distintos al emisor.

48. **Strike.** Precio pactado en el Contrato de Opción al que el comprador de una Opción puede comprar (caso de haber adquirido una Opción CALL) o vender (si hubiera adquirido una Opción PUT) el Activo Subyacente. El vendedor de la Opción se obliga, respectivamente, a vender o comprar, en caso de que el comprador ejerza el derecho.

49. **Nominal.** Es el valor que paga un activo en la fecha de vencimiento. Usualmente no coindice con el valor de mercado/Principal. Parte en una operación que actúa por cuenta propia. Al actuar como principal, una empresa está comprando o vendiendo (o prestando o tomando en préstamo) por cuenta propia para obtener una posición y un riesgo, esperando realizar una ganancia.

50. **Numeraire.** Variable que puede expresarse en términos numéricos y respecto de la cual se miden todas las restantes variables del Modelo. Es decir, el numeraire es una variable medible cuantitativamente, lo que permite medir todas las otras variables en unidades del numeraire. La elección de un numeraire presenta ventajas operativas y conceptuales en el análisis económico.

51. **Opciones.** Existen básicamente dos tipos de opciones, una opción de **compra (call)** da a su titular el derecho a comprar un activo a un precio determinado en una fecha establecida. Una opción de **venta (put)** proporciona el derecho a vender un activo a un precio conocido en una fecha determinada. El precio contractual se llama precio de ejercicio y la fecha de finalización del contrato, fecha de vencimiento. Una opción Europea sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento, mientras que una Opción Americana, puede ser ejercida en cualquier momento hasta su fecha de vencimiento inclusive.

52. **Operaciones de préstamos de valores.** Operaciones de transferencia de poder adquisitivo entre unidades económicas (naciones o gobiernos, empresas o individuos), para proporcionar asistencia financiera al prestatario a cambio de un interés y a veces, otras ventajas para el prestamista.

53. **Operaciones Financieras Derivadas.** Son instrumentos financieros que generan pagos u obligaciones las cuales dependen del valor de algún otro activo como materias primas, divisas, bonos y precios de acciones o índices de mercado. Los futuros y las opciones son ejemplos de instrumentos derivados.

54. **Pasivo.** Deuda o compromiso que adquiere una persona o compañía.

55. **Pasivo financiero.** Se trata de cualquier compromiso virtualmente ineludible, originado por una obligación contractual para entregar efectivo u otro activo financiero a un tercero o intercambiar activos financieros o pasivos financieros con un tercero bajo condiciones que son potencialmente desfavorables para la entidad.

56. **Precio.**

    * Cantidad de dinero dada a cambio de una mercancía o servicio, es decir, el valor de una mercancía o servicio en términos monetarios. En la compra de bienes y algunos servicios se denomina “precio"; en el alquiler de los servicios del trabajo “salarios", sueldo, etc.; en el préstamo de dinero o capital “interés"; en el alquiler de la tierra o un edificio “renta".
    * **Precio productor.** Cantidad de dinero recibida por el productor, de parte del comprador, por cada unidad de un bien o servicio generado como producción, sin incluir el impuesto al valor agregado (IVA) u otro tipo de impuestos facturados al comprador. Además, dicha cotización excluye cualquier cargo de transporte que no estuviera incluido en el precio y tuviera que facturarse por separado.

* **Precios constantes.** Son aquéllos cuya cuantificación se hace con relación a los precios que prevalecieron en un año determinado y que se están tomando como base para la comparación.
* **Precios corrientes.** Indicador del valor de las mercancías o servicios acumulados al momento de la operación; se emplea para referirse a los valores de las mercancías, expresados a precios de cada año.
* **Precios de garantía.** Valor mínimo de adquisición para productos agropecuarios que el gobierno garantiza a los productores.
* **Precios implícitos.** Son los índices de valor que están "implícitos" en los cálculos del producto interno bruto, se obtienen relacionando anualmente los datos del producto a precios de cada año (corrientes), con los del producto a precios constantes. Estos índices registran año tras año, las variaciones promedio que se presentan en los precios de cada sector de actividad y también en el total de la economía.

57. **Rendimiento.**

* **Rendimiento/producto bruto:** Ingresos generados por las inversiones (títulos, bienes raíces, propiedades, etc.) antes de cualquier tipo de deducción.
* **Rendimiento corriente:** Medida de los beneficios anuales generados por un título que se expresa en porcentaje anual y equivale al cupón dividido por el precio neto de dicho título. Ni el vencimiento ni el número de pagos de los intereses se tienen en cuenta en su cálculo.
* **Rendimiento de las inversiones:** Beneficio neto, después de impuestos, dividido por la inversión.
* **Rendimiento de los activos:** Beneficio neto, después de impuestos, dividido por los activos totales de la empresa. Esta razón sirve para examinar la eficacia con la que se utilizan los activos disponibles, es decir, la capacidad de generar beneficios a partir de los activos existentes.
* **Rendimiento del capital:** Beneficio neto, después de impuestos, dividido por capital social ordinario de la empresa. Los inversores, usan al rendimiento del capital para evaluar la eficacia con la que la empresa maneja el dinero que han colocado (RoE).
* **Rendimiento equivalente al de los bonos:** Rendimiento anual de un título a corto plazo que no genera intereses, calculado para que sea comparable al rendimiento de los valores con cupones.
* **Yield:**
  i. **Rendimiento:** Rentabilidad de una sociedad en función del dividendo. Se obtiene como la razón entre el dividendo y la capitalización. Término utilizado para referirse al ingreso anual, producto de una inversión y expresado en porcentaje. En el caso de las acciones se calcula a partir de los dividendos distribuidos, para los bonos u otros valores de renta fija, corresponde a la tasa de interés efectiva pagada.
  ii. **Rendimiento directo:** Rendimiento basado en la duración total de vida de un activo con interés simple.
  iii. **Rendimiento efectivo:** Rendimiento con intereses compuestos calculados por año, semestre o trimestre durante el período real de inversión.

iv. **Rendimiento al vencimiento:** Porcentaje de la tasa de ingresos pagada por un bono, pagaré u otro título con retribución fija comprado y conservado hasta la fecha de vencimiento. Se calcula sobre la base del tipo del cupón, la cantidad de tiempo hasta el vencimiento y el precio de mercado del bono. Se supone que el monto producto del tipo de interés del cupón y pagado durante la vida del título será reinvertido al mismo tipo de interés.

* **Rendimiento anualizado.** Rendimiento que corresponde a la Inversión en un periodo diferente del año, pero que se expresa de tal forma que represente el rendimiento en caso de que se hubiese mantenido durante un año completo.

58. **Renta variable.** Rendimiento que obtiene el propietario de acciones, mismo que varía según las utilidades generadas por la empresa emisora y los dividendos decretados por la asamblea de accionistas.

59. **Riesgo (s).** Un riesgo es la posibilidad de que una contingencia o evento se convierta en una situación que ocasione una pérdida económica o de daño en la imagen de una compañía.

60. **Riesgo de concentración.** Muestra el incremento de las pérdidas potenciales asociado a una inadecuada diversificación de activos y pasivos, que se deriva de las exposiciones causadas por riesgos de crédito, de mercado, de suscripción, de liquidez, o por la combinación o interacción de varios de ellos, por contraparte, por tipo de activo, área de actividad económica o área geográfica.

61. **Riesgo de descalce entre activos y pasivos.** Representa la pérdida potencial derivada de la falta de correspondencia estructural entre los activos y los pasivos, por el hecho de que una posición no pueda ser cubierta mediante el establecimiento de una posición contraria equivalente, y considerará, cuando menos, la duración, moneda, tasa de interés, tipos de cambio, índices de precios, entre otros;

62. **Riesgo de crédito o contraparte.** Representa la pérdida potencial originada por la falta de pago, o pérdida de la solvencia de los deudores; es decir, la posibilidad de que llegado el vencimiento del derecho de cobro éste no sea atendido. Esto, resultará en una pérdida para el acreedor. Adicionalmente, el riesgo de crédito considera la pérdida potencial que se derive del incumplimiento de los contratos destinados a reducir el riesgo, tales como: los contratos de reaseguro, de reafianzamiento, de bursatilización y de Operaciones Financieras Derivadas, así como las cuentas por cobrar de intermediarios y otros riesgos de crédito que no puedan estimarse respecto del nivel de la tasa de interés libre de riesgo.

63. **Riesgo de Liquidez.** Representa la pérdida potencial por la venta anticipada o forzosa de activos a descuentos inusuales para hacer frente a obligaciones, o bien, por el hecho de que una posición no pueda ser oportunamente enajenada o adquirida;

64. **Riesgo de mercado/ Riesgo por pérdidas en el valor de los activos.** Refleja la pérdida potencial derivada del riesgo de que un activo o pasivo disminuya de valor, debido a movimientos adversos en los factores que determinan su precio, también conocidos como factores de riesgo o condiciones del mercado. Como, por ejemplo, variaciones en tasas de interés, tipo de cambio, índices de precios, etc.

65. **Riesgo de reinversión.** Riesgo derivado de la incertidumbre sobre el tipo de interés al que se reinvertirán los cupones, ya que si el tipo de interés vigente en ese momento es inferior/superior al existente en la fecha de realización de la operación, la rentabilidad será menor/mayor que la esperada.

66. **Riesgo de spread.** Este riesgo, refleja cambios en el valor de los instrumentos originados por movimientos de la curva del diferencial de crédito o contraparte relativa a la curva de tasas libres de riesgo.

67. **Riesgo de tasa de interés/Riesgo accionario.** Implica que el valor razonable o que los flujos de efectivo futuros de un instrumento financiero fluctúen debido a cambios en la tasa de interés de mercado/tipo de cambio.)

68. **Solvencia II.** Marco regulatorio para la gestión de riesgos, que además de centrarse en la definición del requerimiento de capital, establece procesos y procedimientos para identificar, medir y gestionar los riesgos asumidos por las Compañías de Seguros y Reaseguro.

69. **Spot.** Compra/venta al contado de una divisa por otra, donde la liquidación se efectúa a los dos días hábiles de la fecha de contratación.

70. **Spread.** Es la diferencia entre los rendimientos de un bono que sirve de referencia y el bono a analizar.

71. **Spread de la tasa.** Diferencia entre la tasa pasiva (tasa que pagan las instituciones por depósitos a los inversionistas) y la tasa activa (tasa que cobran las instituciones por créditos o préstamos otorgados); constituyéndose en una de las principales fuentes de utilidad de las instituciones.

72. **Swap.** Es un contrato entre dos partes para el intercambio de flujos de caja en un período determinado. El contrato define las fechas en las cuales se deben pagar los flujos de efectivo, incluye los valores Futuros de una o más variables de mercado. Los Swaps más utilizados son de tipo de interés (plain vanilla) y de divisas (fixed-for-fixed). El primer contrato de swap fue negociado a principios de la década de los ochenta. Desde entonces el mercado ha crecido enormemente.

73. **T – reclamación contingente.** Reclamación pendiente de integración al tiempo T. Este tipo de reclamaciones, no computan para el cálculo del Requerimiento de Capital de Solvencia, con excepción de las reclamaciones correspondientes a contingencias en litigio en contratos de obra pública.

74. **Tasa de interés.** Precio que cobra un acreedor por prestar, y paga un deudor por recibir, una cierta cantidad monetaria durante un determinado periodo de tiempo. Generalmente, se expresa en porcentaje y hace referencia a un periodo de tiempo.

75. **Tasa fija.** Tasa de interés que no varía durante la tenencia del título, gozando de confiabilidad para el inversionista.

76. **Tasa flotante.** La tasa de interés flotante, también conocida como tasa variable o tasa de interés ajustable, se refiere a cualquier tipo de instrumente de deuda, tales como un préstamo, bonos, hipoteca, o un crédito, que no tiene un tasa fija de interés durante la vida útil del instrumento, es decir, cuando la tasa de cambio o interés no está definida a priori sino que depende del mercado.

77. **Tasa libre de riesgo.** De ésta depende la tasa de descuento (Tasa de descuento = tasa libre de riesgo + prima de riesgo) que se aplicará a los flujos futuros. Normalmente, se usa la tasa que pagan los bonos del Estado o la proporcionada por el proveedor de precios de la compañía.

78. **Tasa observada.** Tasa de interés observada, expresada en porciento anual, relativa al costo de captación de los pasivos a plazo en moneda nacional (depósitos bancarios a plazo, pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento, aceptaciones bancarias a cargo de los propios bancos y créditos del Banco de México mediante subastas), a cargo de las instituciones de banca de desarrollo. Dicha tasa, se determina con base en la información proporcionada por las citadas instituciones al Banco de México.

79. **Tasa spot.** Las tasas spot a cierto plazo corresponde a la tasa de interés pagada por un bono cupón-cero a dicho plazo.

80. **Teoría de Arbitraje de tiempo continuo.** Modelo de Black, Scholes y Merton. Asignación de precios por arbitraje. Completitud y cobertura.

81. **Tipo (s) de cambio.** Precio al cual una moneda se intercambia por otra, por oro o por derechos especiales de giro. Estas transacciones se llevan a cabo al contado o a futuro (mercado spot y mercado a futuro) en los mercados de divisas. Se expresa habitualmente en términos del número de unidades de la moneda nacional que hay que entregar a cambio de una unidad de moneda extranjera.

82. **Tipo de cambio fijo.** Es aquél que se establece por las autoridades financieras como una **proporción fija** entre el valor de la moneda nacional y el de una mercancía (por ejemplo, el oro o la plata) o de una moneda extranjera. Tal mercancía o moneda se dice entonces que sirve de patrón.

83. **Tipo de cambio libre.** Es aquél cuya determinación corresponde exclusivamente a la oferta y demanda de divisas. Es decir, el precio resultante del libre juego del mercado de divisas.

84. **Títulos estructurados.** Pueden ser de capital protegido y de capital no protegido. Son consideradas un producto híbrido que se construye a través de dos o más instrumentos financieros simples, entre los que destacan:

    i. Un activo de renta fija, que es lo que proporcionará la protección y devolución del capital, en el caso de productos con capital protegido a vencimiento.

    ii. Un instrumento derivado, normalmente opciones, que nos permitirá ligar la rentabilidad del producto a un activo

85. **Valor futuro.** Es la cantidad de dinero que se tendría en una fecha futura si se invirtiese hoy una cantidad y se capitalice a una tasa de interés.

86. **Valor de mercado.** Es el valor de los títulos o valores prevaleciente en el mercado en un momento determinado, dependiendo de su plazo y los días transcurridos desde su emisión. Para su cálculo se considera la tasa de rendimiento de cada emisión por el tiempo transcurrido desde su emisión hasta el momento que se quiera calcular, en otras palabras, es el valor de colocación ajustado por los intereses que se van generando diariamente de cada una de las emisiones en circulación.

87. **Valor en Riesgo (VaR).** Actualmente, la medida más aceptada de riesgo es la que se conoce como el "Valor en Riesgo". El VaR, intenta dar una idea sobre la pérdida en que se puede incurrir en un cierto periodo de tiempo pero al ser inciertas las pérdidas y ganancias, es necesario asociar probabilidades a las diferentes pérdidas potenciales. Un poco más formalmente, el VaR es un nivel de pérdidas (del o los activos de que se trate) tal, que la probabilidad "α" de que la pérdida exceda esta cantidad en un periodo de tiempo dado, corresponde a un cierto nivel de confianza escogido por el analista. Así, el analista fija de antemano el nivel de confianza con el que quiere trabajar y el periodo de tiempo en el que puede ocurrir la pérdida de los activos financieros a los que se le quiera medir su riesgo. A partir de estos dos parámetros, el VaR corresponde al cuantil asociado al nivel de confianza fijado, de la distribución de probabilidades de pérdidas y ganancias que puede tener el conjunto de activos, en un horizonte de tiempo dado, dadas las condiciones de incertidumbre que prevalecen en ese momento en el mercado. Al igual que en riesgo de mercado, el valor en riesgo de una cartera de crédito es el cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias asociada a la cartera de crédito, para el periodo de tiempo y el nivel de confianza escogidos. Normalmente se descompone en lo que se conoce como la pérdida esperada y la no-esperada.

88. **Valores gubernamentales.** Títulos de crédito emitidos por el Gobierno Federal en el mercado de dinero con la doble finalidad de allegarse recursos y regular la oferta de circulante. Son títulos de crédito que se colocan en una oferta primaria al público ahorrador. Se caracterizan por su liquidez en el mercado secundario. Los hay de descuento y los que se colocan a la par, sobre o bajo par. Son títulos al portador por los cuales el Gobierno Federal se obliga a pagar una suma fija de dinero en fecha determinada. Son emitidos por conducto de la SHCP y el Banco de México que es el agente financiero encargado de su colocación y redención. Los valores gubernamentales pueden considerarse como un instrumento de política monetaria para el control de la liquidez del mercado financiero a través de su compra-venta (operaciones de mercado abierto). Los diferentes tipos de valor que se originan en el proceso de compra-venta son: valor nominal, valor de colocación y valor de mercado.

89. **Valor neto.** Valor que adquiere una variable al descontarle una cantidad determinada. Como por ejemplo, el ingreso neto, las ganancias netas, valor neto depreciable, etc.

90. **Valor nocional.** Un monto nocional o de referencia es el número de unidades especificadas en el contrato, tales como el número de títulos o de monedas, unidades de peso o de volumen, etc. La interacción entre el monto nocional y el subyacente es la que determina la liquidación del instrumento financiero derivado. Sin embargo, en ocasiones, en lugar de referirse a un monto nocional, algunos instrumentos financieros derivados contienen una o más condiciones de pago, las cuales son especificaciones contractuales que obligan a una o a ambas partes a efectuar liquidaciones fijas o determinables en caso de que el subyacente salga de los límites preestablecidos o pactados.

91. **Valor presente.** Es el valor actual de un flujo futuro, obtenido mediante la aplicación de una tasa de su descuento. Es decir, es la cantidad de dinero que se necesitaría invertir hoy para obtener dicho flujo futuro.

92. **Valor Presente Neto (VPN).** Es la diferencia entre el costo de capital de una inversión y el valor presente del flujo de efectivo futuro a que dará origen la inversión.

93. **Variabilidad.** Nombre que se da a las diferencias en el comportamiento de todo fenómeno observable que se repite bajo iguales condiciones, debidas a cambios en factores no controlables, que influyen sobre él. Estas diferencias, pueden ser casi imperceptibles, como en el caso de experimentos de laboratorio, donde hay un alto grado de control sobre los factores que influyen sobre el fenómeno; pueden ser pequeñas, como en el caso de en procesos industriales, y pueden ser grandes, como en el caso de fenómenos en que está involucrado el comportamiento humano, como los fenómenos psicológicos, sociológicos y económicos. La variabilidad existente en los fenómenos se puede reducir, se puede explicar parcialmente, pero no se puede eliminar.

94. **Variable de pérdida (L_A).** Variable aleatoria en función del VaR. Los parámetros de los modelos que explican el comportamiento de la variable de pérdida, se revisarán a partir del flujo de información con la que se calibran. Dichos parámetros se revisarán y, en su caso, ajustarán de acuerdo a los criterios, políticas y procedimientos establecidos en el (Capitulo/Sección “”)

95. **Variación.** Cambio de valor de los activos/pasivos en un horizonte de tiempo determinado.

96. **Vectores propios principales.** Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden 3, se dice que el número λ_0 es un valor propio de $\mathbf{A}$ si existe un vector columna tridimensional $\mathbf{c}$ no nulo, tal que,

$$\mathbf{Ac} = \lambda_0 \mathbf{c}$$

El vector $\mathbf{c}$ se llama *vector propio* de $\mathbf{A}$ asociado al valor propio λ_0.

97. **Velocidad de regresión a la media.** Estadísticamente, demuestra cómo tras obtener un resultado excepcionalmente bueno o malo, los siguientes acostumbran a acercarse a un valor medio más habitual. Es lo que ocurre en el mundo financiero con los fondos de inversión que tras un año excepcional sufren resultados decepcionantes en el siguiente, o en aquel producto que tras un éxito fulgurante en su lanzamiento, cae en desgracia a continuación.

98. **Vencimiento.** Es la fecha de pago de una obligación financiera. Por ejemplo, en una compra en cuotas: cada cuota tiene su fecha de vencimiento, antes de la cual debe estar realizado el pago correspondiente. El hecho de no pago antes o en la fecha de vencimiento puede traer aparejado una multa por mora (generalmente, un interés sobre el saldo) o acciones legales

99. **Volatilidad.** Variaciones significativas a menudo impredecibles, en un cierto período.

Apéndice B

Códigos R

B.1. Código Generación de los Movimientos Brownianos

```
##############################################
# x = valor inicial del proceso al tiempo t0
# t0 = valor inicial
# T = tiempo final
# m = No. de Mov Brownianos,
# N = No. de intervalos
##############################################

require(sde)
require(stats)

alpha_1 <- 10
x_1 <- 4
t0 <- 0
T <- 1
N_1 <- 100000
t <- seq(t0+(T/N_1),T,T/N_1)

alpha_2 <- 10
x_2 <- 4
N_2 <- 100000

W_1 <- BM(x_1, t0, T, N_1-1)

X_1 <- numeric(length(W_1))

for(i in 1:length(X_1))
```

```
{
        X_1[i]=rnorm(1,W_1[i]*((1-exp(-alpha_1*t[i]))/(alpha_1*t[i])),
        ((1-exp(-2*alpha_1*t[i]))/2*alpha_1)-
        (((1-exp(-alpha_1*t[i]))^2)/((alpha_1)^2)*t[i]))
}

# GRAFICA FIGURA 1.1
matplot(W_1, type="l",main='Movimiento Browniano',
ylab='espacio de estados',xlab='Intervalos')
abline(v=c(0,1),h=0)

J_1 <- W_1 - X_1
W_2 <- BM(x_2, t0, T, N_2-1)

# GRAFICA FIGURA 1.2
matplot(W_2, type="l",main='Movimiento Browniano',
ylab='espacio de estados',xlab='Intervalos')
abline(v=c(1,1),h=0)
```

B.2. Código Análisis de sensibilidad del Proceso Vasicek respecto a sus parámetros

```
require(sde)
require(stats)

#1. Hacemos variar sigma (volatilidad)

#Vasicek Process_1
# dXt = 1(2-3*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_1 <- expression(2-3*x)
s_1 <- expression(2)
X_1 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_1, sigma.x=s_1)

#Vasicek Process_2
# dXt = 1(2-3*Xt)*dt + 4dWt
set.seed(31)
d_2 <- expression(2-3*x)
s_2 <- expression(4)
X_2 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_2, sigma.x=s_2)


#Vasicek Process_3
# dXt = 1(2-3*Xt)*dt + 7dWt
set.seed(31)
```

```
d_3 <- expression(2-3*x)
s_3 <- expression(7)
X_3 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_3, sigma.x=s_3)

#2. Hacemos variar beta (la media)

#Vasicek Process_4
# dXt = (2-.5*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_4 <- expression(2-.5*x)
s_4 <- expression(2)
X_4 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_4, sigma.x=s_4)

#Vasicek Process_5
# dXt = (2-3*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_5 <- expression(2-3*x)
s_5 <- expression(2)
X_5 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_5, sigma.x=s_5)

#Vasicek Process_6
# dXt = (2-6*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_6 <- expression(2-6*x)
s_6 <- expression(2)
X_6 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_6, sigma.x=s_6)

#3. Hacemos variar alpha

#Vasicek Process_7
# dXt = (.5-3*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_7 <- expression(.5-3*x)
s_7 <- expression(2)
X_7 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_7, sigma.x=s_7)

#Vasicek Process_8
# dXt = (4.5-3*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_8 <- expression(4.5-3*x)
s_8 <- expression(2)
X_8 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_8, sigma.x=s_8)

#Vasicek Process_9
# dXt = (9-3*Xt)*dt + 2dWt
set.seed(31)
d_9 <- expression(9-3*x)
```

```
s_9 <- expression(2)
X_9 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_9, sigma.x=s_9)

#GRAFICA FIGURA 4.1

par(mfrow=c(3,3))

plot(X_1,main="Vasicek_Escenario1
alpha = 2, beta = 3,
Sigma = 2, X0 = 1.5", ylim = c(-1.0,1.6),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_2,main="Vasicek_Escenario2
alpha = 2, beta = 3,
Sigma = 4, X0 = 1.5", ylim=c(-1.0,1.6),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_3,main="Vasicek_Escenario3
alpha = 2, beta = 3,
Sigma = 7, X0 = 1.5", ylim=c(-1.0,1.6),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_4,main="Vasicek_Escenario4
alpha = 2, beta = 0.5,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(-.6,2),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_5,main="Vasicek_Escenario5
alpha = 2, beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(-.6,2),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_6,main="Vasicek_Escenario6
alpha = 2, beta = 6,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(-.6,2),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_7,main="Vasicek_Escenario7
alpha = 0.5, beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(-.6,3),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")

plot(X_8,main="Vasicek_Escenario8
alpha = 4.5, beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(-.6,3),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")
```

```
plot(X_9,main="Vasicek_Escenario9
alpha = 9, beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(-.6,3),
xlab="Tiempo de proyeccion",ylab="Tasa Corta")
```

B.3. Código Análisis de sensibilidad del Proceso Cox-Ingersoll-Ross respecto a sus parámetros

```
require(sde)
require(stats)

#1. Hacemos variar sigma

# Cox-Ingersoll-Ross Process_1
# dXt = (2-3*Xt)*dt + .5*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_1 <- expression(2-3*x)
s_1 <- expression(.5*sqrt(x))
X_1 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_1, sigma=s_1)

# Cox-Ingersoll-Ross Process_2
# dXt = (2-3*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_2 <- expression(2-3*x)
s_2 <- expression(2*sqrt(x))
X_2 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_2, sigma=s_2)

# Cox-Ingersoll-Ross Process_3
# dXt = (2-3*Xt)*dt + 5*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_3 <- expression(2-3*x)
s_3 <- expression(5*sqrt(x))
X_3 <-sde.sim(X0=1.5,drift=d_3, sigma=s_3)

#2. Hacemos variar Beta

# Cox-Ingersoll-Ross Process_4
# dXt = (2-.5*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_4 <- expression(2-.5*x )
s_4 <- expression(2*sqrt(x))
X_4 <- sde.sim(X0=1.5,drift=d_4, sigma=s_4)

# Cox-Ingersoll-Ross Process_5
# dXt = (2-3*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
```

```
d_5 <- expression(2-3*x)
s_5 <- expression(2*sqrt(x))
X_5 <- sde.sim(X0=1.5, drift=d_5, sigma=s_5)

# Cox-Ingersoll-Ross process_6
# dXt = (2-6*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_6 <- expression(2-6*x)
s_6 <- expression(2*sqrt(x))
X_6 <- sde.sim(X0=1.5, drift=d_6, sigma=s_6)

#3.Hacemos variar alpha

# Cox-Ingersoll-Ross Process_7
# dXt = (.5-3*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_7 <- expression(.5-3*x)
s_7 <- expression(2*sqrt(x))
X_7 <- sde.sim(X0=1.5, drift=d_7, sigma=s_7)

# Cox-Ingersoll-Ross Process_8
# dXt = (4.5-3*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_8 <- expression(4.5-3*x)
s_8 <- expression(2*sqrt(x))
X_8 <- sde.sim(X0=1.5, drift=d_8, sigma=s_8)

# Cox-Ingersoll-Ross Process_9
# dXt = (9-3*Xt)*dt + 2*sqrt(Xt)*dWt
set.seed(31)
d_9 <- expression(9-3*x)
s_9 <- expression(2*sqrt(x))
X_9 <- sde.sim(X0=1.5, drift=d_9, sigma=s_9)




#GRAFICA FIGURA 4.2
par(mfrow=c(3,3))
plot(X_1,main="CIR_Escenario1
Alpha = 2, Beta = 3,
Sigma = .5, X0 = 1.5", ylim=c(0,4.5),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_2,main="CIR_Escenario2
```

```
Alpha = 2, Beta = 3,
Sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,4.5),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_3,main="CIR_Escenario3
Alpha = 2, Beta = 3,
Sigma = 5, X0 = 1.5", ylim=c(0,4.5),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_4,main="CIR_Escenario4
Alpha = 2, Beta =  .5,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,3),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_5,main="CIR_Escenario5
Alpha = 2, Beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,3),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_6,main="CIR_Escenario6
Alpha = 2, Beta = 6,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,3),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_7,main="CIR_Escenario7
Alpha = .5, Beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,4),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_8,main="CIR_Escenario8
Alpha = 4.5, Beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,4),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")

plot(X_9,main="CIR_Escenario9
Alpha = 9, Beta = 3,
sigma = 2, X0 = 1.5", ylim=c(0,4),
xlab="Tiempo de proyeccion", ylab="Tasa Corta")
```

B.4. Código Estudio Comparativo Vasicek VS C.I.R.

```
require(sde)
require(stats)

CETES<- read.csv("TasaRendimiento_CETES-91DIAS_2012-2015.csv",
header=F)
```

```
names(CETES) <- c("Fecha", "Rendimiento")

#GRAFICA FIGURA 4.3
par(mfrow=c(1,1))
plot(CETES$TasaRendimiento, type = "p",
xlab = "Observaciones diarias 2012-2016",
ylab = "Tasa de Rendimiento", main = "CETES 91 dias",
pch = 20, cex = 0.5)

######################## Parametros ########################
Parametros_MLE<-function(data,dt){
#devuelve un vector con las estimaciones de los parametros alfa,
beta y sigma

#data ... vector de datos
# dt ... intervalo de tiempo entre los puntos de datos dados

N <- length(data)
rate <- data[2:N]
lagrate<- data[1:(N-1)]
a<-(N*sum(rate*lagrate) - sum(rate)*sum(lagrate))/
(N*sum(lagrate^2)- sum(lagrate)^2)
alpha_gorro = -log(a)/dt
beta_gorro = sum(rate-a*lagrate ) / (N*(1-a))
v2_gorro<-sum((rate-lagrate*a-beta_gorro*(1-a))^2)/N
sigma_gorro<-sqrt(2*alpha_gorro*v2_gorro/(1-a^2))
c(beta_gorro,alpha_gorro,sigma_gorro)
}

#Cuadro 4.1
Parametros_MLE(data,dt)
alpha <- 0.4896159
beta <- 2.9786536650
sigma <- 0.4041669

t <- seq(0, 1, 1/(d-1))

############################################################
########## Codigo Simulacion del Modelo Vasicek ##########
############################################################

data <- CETES$Rendimiento
para <- c(beta,alpha,sigma)
r0 <- CETES$Rendimiento[1005]
n <- 10000
dt <- 1/252
d <- 252
```

```
T <- 1

Vasicek_simul<- function(para,r0,n,dt,d,exact=T){
# simulacion de n trayectorias del proceso de tasa corta
# La ruta de tasa corta se imprime como una matriz

# para ... parametros del modelo Vasicek
# r0 ... valor inicial del proceso
# n ... numero de trayectorias a generar
# dt ... intervalo de tiempo entre los puntos de datos dados
# d ... cantidad de pasos a generar

alpha <- alpha
beta <- beta
sigma <- sigma
r=matrix(nrow=d,ncol=n)
r[1,]=r0
for(i in 1:(d-1))
r[i+1,]= r[i,] + alpha*(beta-r[i,])*dt+ sigma*sqrt(dt)*rnorm(n)
r
}

# Realizamos las simulaciones
set.seed(920531)
SimulVasicek <- Vasicek_simul(para,r0,n,dt,d,exact=T)

################################################################################
#################### Codigo Simulacion del modelo CIR ####################
################################################################################

alpha <- 0.4896159
beta <- 2.9786536650
sigma <- 0.4041669

para <- c(beta,alpha,sigma)
r0 <- CETES$Rendimiento[1005]
n <- 10000
dt <- 1/252
d <- 252

CIR_simul<- function(para,r0,n,dt,d){
# simulacion de n trayectorias del proceso de tasa corta
# para ... parametros del modelo CIR
# r0 ... valor inicial del proceso de tasa de interes
# n ... numero de trayectorias a generar
# dt ... intervalo de tiempo entre los puntos de datos dados
# d ... cantidad de pasos a generar
```

```
alpha <- alpha
beta <- beta
sigma <- sigma
r=matrix(nrow=d,ncol=n)
r[1,]=r0
for(i in 1:(d-1))
r[i+1,]=r[i,]+alpha*(beta-r[i,])*dt+sigma*sqrt(r[i,]*dt)*rnorm(n)
r
}

# Realizamos las simulaciones
set.seed(920531)
CIRsimul <- CIR_simul(para,r0,n,dt,d)

#################### COMPARACION VASICEK VS CIR ####################

# GRAFICA FIGURA 4.4

par(mfrow=c(1,2))

(rT.expected <- beta + (r0-beta)*exp(-alpha*t))
(rT.stdev <- sqrt( sigma^2/(2*alpha)*(1-exp(-2*alpha*t))))

CETES_Rendimiento2016 <- read.csv("TasaRendimiento_CETES-91DIAS_2016.csv",
header=F)
names(CETES_Rendimiento2016) <- c("Fecha", "Rendimiento")
matplot(t,SimulVasicek[,1:n],type="l", lty=1,
main="Simulaciones Vasicek VS Observaciones - 2016", xlab = "",ylab="rt",
ylim=c(1.5,6))
lines(t,CETES_Rendimiento2016$Rendimiento,col="black",lwd = 3)
lines(t,SimulVasicek[,2036],col="white",lwd = 3)
abline(h=beta, col="red", lty=30)
lines(t, rT.expected, lty=30, col="yellow",lwd = 3)
lines(t, rT.expected + 2*rT.stdev, lty=30, col="yellow",lwd = 3)
lines(t, rT.expected - 2*rT.stdev, lty=30, col="yellow",lwd = 3)
points(0,r0)

CETES_Rendimiento2016 <- read.csv("TasaRendimiento_CETES-91DIAS_2016.csv",
header=F)
names(CETES_Rendimiento2016) <- c("Fecha", "Rendimiento")
matplot(t,CIRsimul[,1:n],type="l", lty=1,
main="Simulaciones CIR VS Observaciones 2016", xlab = "",ylab="rt",
ylim=c(1.5,6))
lines(t,CETES_Rendimiento2016$Rendimiento,col="black",lwd = 3)
lines(t,CIRsimul[,2036],col="white",lwd = 3)
abline(h=beta, col="red", lty=30)
lines(t, rT.expected, lty=30, col="yellow",lwd = 3)
```

```
lines(t, rT.expected + 2*rT.stdev, lty=30, col="yellow",lwd = 3)
lines(t, rT.expected - 2*rT.stdev, lty=30, col="yellow",lwd = 3)
points(0,r0)

################################################################################
############ CODIGO MINIMOS CUADRADOS PARA CALIBRAR "LAMBDA" #############
################################################################################

n <- 10000
m <- length(CETES_Rendimiento2016$Rendimiento)

# VASICEK CALIBRACION
#matriz de simulaciones
A<-matrix(SimulVasicek,n,m)

#matriz de observaciones
B<-matrix(CETES_Rendimiento2016$Rendimiento,n,byrow = T,ncol=m)

#matriz de minimos cuadrados
MC<-rowSums(B-A)^2
(MC==min(MC))

# CIR CALIBRACION
#matriz de simulaciones
C<-matrix(CIRsimul,n,m)

#matriz de observaciones
D<-matrix(CETES_Rendimiento2016$Rendimiento,n,byrow = T,ncol=m)

#matriz de minimos cuadrados
MC2<-rowSums(D-C)^2
(MC2==min(MC2)



#######################################################################
############## PARAMETROS VASICEK Y CIR CALIBRADOS ###############
#######################################################################

#Cuadro 4.2

data <- SimulVasicek[,9497]
Parametros_MLE(data,dt)

data <- CIRsimul[,9497]
Parametros_MLE(data,dt)
```

Bibliografía

[1] Rincón, L., "Curso Intermedio de Probabilidad". Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (2007), pp. $1-5, 348$.

[2] Rincón, L., "Introducción a los Procesos Estocásticos". Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (2012), pp. $27-31, 199-204$.

[3] Rincón, L., "Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas". Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México (2012), pp $2-32$.

[4] M. Iacus, S., "Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations". Springer. (2008), pp. $14-155, 217-264$.

[5] CNSF, "Circular única de Seguros y Fianzas". México D.F. (2015), Título 6: "De los Requerimientos de Capital".

[6] CNSF, "Circular única de Seguros y Fianzas". México D.F. (2015), Anexo 6.3.2: "Criterios, políticas y procedimientos para la revisión de los parámetros de los modelos que explican el comportamiento de la variable de pérdida L".

[7] CNSF, "Circular única de Seguros y Fianzas". México D.F. (2015), Anexo 6.3.3: "Modelo y bases técnicas para la determinación de la variable de pérdidas de los activos sujetos a riesgo de mercado L_A, para efectos del cálculo del RCS conforme a la fórmula general".

[8] Uribe Bravo, G., "Procesos Estocásticos I. Capacitación Técnica especializada en el nuevo marco de Solvencia". Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.

[9] Uribe Bravo, G., "Procesos Estocásticos II. Capacitación Técnica especializada en el nuevo marco de Solvencia". Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.

[10] Durrent, R., "Essentials of Stochastic Processes". Springer, (2011).

[11] B. L. S. Prakasa Rao., "Statistical Inference for Stochastic Processes". CR Rao AIMSCS (2013).

[12] ∅ksendal, B., "Stochastic Differential Equations". Springer, New York (1998).

[13] Brown R., "A brief account of Microscopical Observations made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies". Philosophical Magazine Series 2, 4:21, p.p.161-173, (1828).

[14] Einstein A., "Investigations on the theory of the Brownian movement". Dover, (1956).

[15] Feller, W., "An Introduction to Probability Theory and Its Applications Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics". Vol. 1, 3er. Ed, (1968).

[16] [Bjö98] T. Björk. "Arbitraje Theory in Continuous Time". Oxford scholarship online. Oxford University Press, (1998).

[17] [MR05] M. Musiela and M. Rutkowski. "Martingale methods in financial modelling. Stochastic modelling and applied probability". Springer Berlin Heidelberg, (2005).

[18] [Shr04] S.E. Shreve. "Stochastic Calculus for Finance II: Continuous - Time Models". Number v. 11 in Springer Finance. Springer, (2004).

[19] T.E. Govindan, R.S. Acosta Abreu, Stability behavior of some well-known stochastic financial models, Int. J. Comtemp. Math. Sciences, 3 (28), 1367-1378, 2008.