



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Métodos de solución de ecuaciones diferenciales
estocásticas y aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Javier Velázquez Cerda

TUTOR

Manuel Domínguez de la Iglesia



Ciudad Universitaria, CDMX.

Mayo 2018.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mi padre, por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer al Doctor Manuel Domínguez de la Iglesia por apoyarme a realizar esta tesis. Sin su paciencia y confianza no hubiera sido posible realizarla.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA102617. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Introducción

Los dos conceptos más importantes para desarrollar la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas son el de movimiento Browniano y el de integración estocástica. Por un lado, el movimiento Browniano aparece por primera vez en 1828, cuando el biólogo Robert Brown (1773-1858) publica su artículo [7], en el cual describe el estudio del movimiento errático de pequeñas partículas suspendidas en el agua, ya sean granos de polen, de madera o de polvo. Le llamó la atención que era imposible que se quedaran inmóviles y buscaba una explicación de ese movimiento incomprensible, pues no estaban sujetas a vibración, calor, corrientes eléctricas o magnéticas. Posteriormente Louis Bachelier (1870-1946) en su tesis [3] discute el uso del movimiento Browniano para evaluar las opciones financieras. De hecho, es el primer escrito en el que se utilizan las matemáticas para el estudio de la economía. Por último Albert Einstein (1879-1955) en su trabajo [10], proporcionó una descripción física de este fenómeno molecular que podía ser verificada experimentalmente.

Por otro lado, la teoría de integración estocástica fue introducida por Kiyoshi Itô en su obra [13], originalmente publicada en japonés pero traducida en 1944 al inglés. En dicho trabajo da un paso importante, pues desarrolla la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas a partir del movimiento Browniano, creando así el cálculo estocástico de Itô. Desde entonces la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas es una rama con numerosas aplicaciones, pues da pie al estudio de muchos fenómenos naturales creados a partir de un ruido externo (ruido blanco) o un error aleatorio. Las principales aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas son en finanzas, biología, ingeniería, astronomía, robótica, química y física.

El principal objetivo de esta tesis es definir los conceptos fundamentales para desarrollar naturalmente la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, así como analizar las soluciones usando métodos analíticos y numéricos.

Asimismo se describirán las principales aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas a otras disciplinas como finanzas, biología, química, física e ingeniería. Nos centraremos en el caso unidimensional, aunque también se mencionarán ejemplos multidimensionales. En la mayoría de los textos el desarrollo de esta teoría es muy técnica. En cambio en este trabajo nos centraremos en la parte práctica, sin olvidar la formalidad matemática necesaria para describir las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. Nos apoyaremos en el programa R para generar gráficas que ayudarán a ilustrar los ejemplos. Las principales referencias serán: [11], [14], [16], [17], [18], [19], [22] y [23], donde se pueden leer de manera más extensa las demostraciones referidas para la fundamentación teórica.

El primer capítulo consta de definiciones preliminares de teoría de probabilidad y procesos estocásticos, pues estas sustentan las construcciones del movimiento Browniano, integración estocástica y fórmula de Itô. La fuente principal será [23].

En el segundo capítulo se describen tres enfoques diferentes de plantear ecuaciones diferenciales estocásticas. El primero de ellos parte de una ecuación diferencial ordinaria para la cual algunos de los parámetros libres se interpretan como variables aleatorias. Damos un ejemplo aplicado a la Ley de Darcy. En el segundo enfoque las ecuaciones diferenciales estocásticas surgen a partir de añadir un ruido aleatorio a cierta ecuación diferencial ordinaria. En la tercera se definen formalmente las ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma:

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t,$$

donde B_t es el movimiento Browniano y corresponde a un ruido blanco o error.

El tercer capítulo es donde se exponen varios métodos de resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Aquí exponemos varias formas para dar solución analítica a una ecuación diferencial estocástica. El método más conocido es el de "Identificación de coeficientes". Cuando estos métodos fallan nos auxiliamos de métodos numéricos a través de diferencias finitas, como el método de Euler y posteriormente el de Milstein. Para ello usamos el programa R para hacer simulaciones de las soluciones. Al final comparamos la eficiencia de ambos métodos para tener una idea de cuál se aproxima mejor a la solución.

El último capítulo incluye algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales estocásticas, en particular a 5 situaciones. En la primera aplicamos las ecuaciones diferenciales estocásticas a matemáticas financieras, donde estudiamos el modelo de Black-Scholes para calcular el precio de opciones. El objetivo es conocer cuánto debemos pagar hoy por una opción de compra de un activo financiero, cuyo precio es aleatorio. En segundo lugar en la biología, donde examinaremos las redes neuronales estocásticas. En donde se busca modelar redes artificiales, por medio de perturbaciones estocásticas que las afectan. En tercer lugar en la ingeniería, por medio del filtro de Kalman-Bucy. Este modelo es útil para predecir la posición de un robot, un satélite o una nave espacial, dada la historia y observaciones con un error aleatorio. En cuarto lugar nos fijamos en la dinámica poblacional, pues si se modifica un parámetro de la ecuación diferencial ordinaria añadiendo un efecto aleatorio, se cambia por completo el comportamiento del fenómeno. Por último estudiaremos un ejemplo aplicado a la cinética de proteínas, donde éstas también se obtienen aleatorizando los coeficientes de la misma. Aquí observaremos la cinética de la proporción x de una de las dos posibles formas de alguna proteína.

En conclusión, esta tesis de licenciatura pretende dar un estudio teórico-práctico de las ecuaciones diferenciales estocásticas, brindando técnicas para dar solución a fenómenos estocásticos que surgen de manera clara en eventos naturales o fenómenos creados por el hombre.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Probabilidad y procesos estocásticos	1
1.2. Integración estocástica	8
1.2.1. Extensión por aproximación	11
1.2.2. Extensión por localización	12
1.2.3. Propiedades de la integral	13
2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	15
2.1. EDE como función de una variable aleatoria	15
2.1.1. Ley de Darcy	16
2.1.2. Ecuación de continuidad y ley de Darcy	19
2.2. EDE a través de un ruido aleatorio	26
2.3. Teoría general de ecuaciones diferenciales estocásticas	31
2.3.1. Existencia y unicidad	32
3. Métodos de solución de EDE	35
3.1. Identificación de coeficientes	35
3.2. Método de diferencias finitas	45
3.2.1. Método de Euler	46
3.2.2. Método de Milstein	52
4. Aplicaciones de EDE	57
4.1. Matemáticas financieras: Modelo de Black-Scholes	57
4.2. Redes neuronales estocásticas	68
4.3. Filtro de Kalman-Bucy	71
4.4. Dinámica poblacional	74
4.5. Cinética de proteínas	78

x

ÍNDICE GENERAL

Bibliografía

81

Capítulo 1

Preliminares

A continuación se reunirán una serie de definiciones necesarias para el desarrollo de la teoría. La principal referencia será [23].

1.1. Probabilidad y procesos estocásticos

Un espacio de probabilidad es aquel que consta de una terna ordenada (Ω, \mathcal{F}, P) , donde Ω es un conjunto arbitrario no vacío, conocido como espacio muestral. Un elemento de dicho conjunto se le denota como ω . \mathcal{F} es una colección no vacía de subconjuntos de Ω , al cual se le conoce como σ -álgebra, que es cerrada bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables. Los elementos de \mathcal{F} son subconjuntos de Ω y se denominan eventos o conjuntos medibles.

Por último, P es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, conocida como medida de probabilidad, cuyas propiedades son: $P(\Omega) = 1$, $P(A) \geq 0$ para cualquier evento $A \in \mathcal{F}$ y P es σ -aditiva, esto quiere decir que si A_1, A_2, \dots es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

La función P asigna un número real a la ocurrencia del evento A y $P(A)$ es la frecuencia con la que se observa el evento A . A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le conoce como espacio medible. Si denotemos a $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ como la σ -álgebra

más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} , obtenemos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$. A los elementos de la σ -álgebra $\mathbf{B}(\mathbb{R})$ se les llama Borelianos o conjuntos de Borel medibles.

Una variable aleatoria (v.a) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la cual asigna a un elemento ω de Ω un número real. Esta cumple que para cualquier conjunto Boreliano B , $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathcal{F} . Entonces diremos que X es una función \mathcal{F} -medible: $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$. Las operaciones básicas de suma, diferencia, producto y cociente (cuando exista) de v.a.s son también v.a.s. Procesos límite de v.a (cuando existen) resultan también v.a.s.

El espacio medible $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$ puede ser transformado en un espacio de probabilidad con la ayuda de una variable aleatoria X . Para el conjunto Boreliano B se define la función $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$, que resulta ser una medida de probabilidad sobre $\mathbf{B}(\mathbb{R})$. A esto se le conoce como la distribución de X . Es equivalente estudiar la función de distribución de X definida por $F(x) = P(X \leq x)$, para cualquier número real x .

Por ejemplo, la variable X tiene una distribución normal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 \in (0, \infty)$ si su función de distribución es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u-\mu)^2/2\sigma^2} du.$$

Por lo tanto se dice que X tiene una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

Si g es una función real de variable real, tal que la composición $g(X)$ es una variable aleatoria, entonces se define la esperanza de $g(X)$ como:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x),$$

en donde $F(x)$ es la función de distribución de X y la integral indicada es de Riemann-Stieltjes, sobre la cual se asume su existencia. En particular, cuando $g(x) = x$, se obtiene la esperanza de X y se denota por $\mathbb{E}(X)$. Si una variable aleatoria X tiene esperanza finita, se dice que es integrable. Cuando $g(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2$, se obtiene la varianza de X denotada por $Var(X)$. Para la distribución normal $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$.

Sea \mathcal{G} otra σ -álgebra sobre el conjunto Ω , diremos que \mathcal{G} es una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} si y sólo si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. La esperanza condicional de una variable aleatoria X , dada una sub- σ -álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, también es una variable aleatoria.

Se denota como $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, la cual cumple con las propiedades de ser \mathcal{G} -medible, tener esperanza finita y para cualquier evento G en \mathcal{G} , se preserva la igualdad:

$$\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP.$$

Cuando la integral anterior se realiza sobre todo Ω , se obtiene que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , que se puede interpretar como un conjunto temporal, que es discreto o continuo. Este conjunto T es conocido como espacio parametral. En este trabajo las variables aleatorias toman valores en los números reales \mathbb{R} y su espacio parametral será el intervalo $[0, \infty)$. Por lo tanto un proceso estocástico es una función de dos variables $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $t \geq 0$, la función $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, mientras que para cada $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow X_t(\omega)$, es una trayectoria del proceso. Dichas trayectorias dependiendo el caso serán continuas o discretas; una hipótesis común es suponerlas continuas por la derecha con límite por la izquierda.

Una familia de σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es una filtración si para $0 \leq s \leq t$, se cumple $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. El espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ es conocido como espacio de probabilidad filtrado. Cuando X_t es \mathcal{F}_t -medible para cada $t \geq 0$ entonces se dice que el proceso es adaptado a la filtración. Todo proceso estocástico X_t determina una filtración natural, dada por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ con lo cual todo proceso es adaptado a su filtración natural. La σ -álgebra \mathcal{F}_t se interpreta como la historia del proceso al tiempo t , porque en ella se encuentran todos los posibles sucesos que haya tenido el proceso hasta ese instante. Una filtración es continua por la derecha cuando $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ coincide con \mathcal{F}_t .

Se dice que X_t y Y_t son equivalentes si para cada $t \geq 0$ se cumple que $P(X_t = Y_t) = 1$. Si esto sucede, se dice que la variable aleatoria X_t es igual a Y_t casi seguramente ($X_t = Y_t$ c.s). Dos procesos son indistinguibles si $P(X_t = Y_t \text{ para cada } t > 0) = 1$.

Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes si para cualesquiera tiempos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables incremento $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

Esto quiere decir que los desplazamientos que tiene el proceso en estos intervalos disjuntos de tiempo son independientes unos de otros.

Un proceso X_t es una martingala si es adaptado, integrable y si para $0 \leq s \leq t$, con probabilidad uno se cumple que $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$.

Una definición importante es la de un proceso de Markov. Estos tipos de procesos son modelos donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov y puede ser expresada de la siguiente forma:

Para cualesquiera estados x_0, x_1, \dots, x_{n-1} (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple la igualdad:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Definición 1.1.1. (*Primera definición*)

Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t, t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} que cumple las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0$ c.s.
2. Las trayectorias $t \mapsto B_t$ son continuas.
3. El proceso tiene incrementos independientes.
4. Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$, la variable incremento $B_t - B_s$ tiene distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2(t - s)$.

Las propiedades de esta definición son consecuencia de las observaciones del fenómeno físico, pero eso no garantiza su existencia. En 1923 el matemático Norbert Wiener mostró la existencia y unicidad de un proceso con tales condiciones. Es por esto que también se le conoce como proceso de Wiener y se le denota también por $\{W_t, t \geq 0\}$. En sentido estricto, el movimiento Browniano es el fenómeno físico, mientras que su modelo matemático es el proceso de Wiener, aunque es común llamar a ambas cosas por el mismo nombre: movimiento Browniano.

Definición 1.1.2. (*Segunda definición*) Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t, t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} que cumple las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0$ c.s.
2. Las trayectorias $t \mapsto B_t$ son continuas.
3. Para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n$ y para cualesquiera conjuntos de Borel A_1, \dots, A_n de \mathbb{R} , se cumple que la probabilidad:

$$P(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n)$$

es igual a

$$\int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_n \dots dx_1,$$

en donde

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(y-x)^2/2\sigma^2 t}.$$

La tercera propiedad de la última definición establece que la función de densidad del vector $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ evaluada en el punto (x_1, \dots, x_n) es:

$$p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n).$$

En particular, la variable B_t tiene distribución normal, con media cero y varianza $\sigma^2 t$.

El movimiento Browniano es un proceso de Markov pues el estado futuro no depende de la historia del mismo. Es una martingala debido a que es adaptado a su filtración natural y cada variable aleatoria del proceso es integrable. Por otro lado, para cualesquiera tiempos s y t , tales que $0 \leq s < t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) + \mathbb{E}(B_s) \\ &= B_s. \end{aligned}$$

Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$, y defina $\Delta t = \max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, \dots, n-1\}$. La variación de una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es el número:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

Cuando este número es finito se dice que la función tiene variación finita en dicho intervalo. Análogamente, la variación cuadrática es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|^2.$$

Proposición 1.1.1. *La variación cuadrática de una trayectoria del movimiento Browniano sobre el intervalo $[a, b]$ es su longitud, es decir:*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 = b - a,$$

en el sentido de la norma $L^2(P)$ (vease (1.2) más adelante para su definición).

Demostración: Sea $\{\mathcal{P}_n : n \geq 1\}$ una sucesión de particiones finitas del intervalo $[a, b]$, sea Δt_i el incremento $t_{i+1} - t_i$, y sea ΔB_i la diferencia $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. Entonces:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|(\Delta B_i)^2 - (b - a)|^2 \\ &= \mathbb{E} \sum_{i,j} (\Delta B_i)^2 (\Delta B_j)^2 - 2(b - a) \mathbb{E} \sum_i (\Delta B_i)^2 + (b - a)^2 \\ &= \sum_i \mathbb{E} (\Delta B_i)^4 + \sum_{i \neq j} \mathbb{E} (\Delta B_i)^2 \mathbb{E} (\Delta B_j)^2 - 2(b - a) \sum_i (\Delta t_i) + (b - a)^2 \\ &= \sum_i 3(\Delta t_i)^2 + \sum_{i \neq j} \Delta t_i \Delta t_j - (b - a)^2 \\ &= \sum_i 2(\Delta t_i)^2 + \sum_i (\Delta t_i)^2 - (b - a)^2 \\ &= \sum_i 2(\Delta t_i)^2 \\ &\leq (b - a) \max_{0 \leq i < n} \Delta t_i \rightarrow 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 1.1.2. *La variación de una trayectoria del movimiento Browniano sobre el intervalo $[a, b]$ es infinita, casi seguramente, es decir:*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty, \quad c.s.$$

Demostración: Para cada n natural sea \mathcal{P}_n la partición uniforme del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, es decir el incremento $t_{i+1} - t_i$ tiene longitud $(b - a)/n$.

Entonces se tiene la estimación:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i|^2 \leq (\max_{0 \leq i < n} |\Delta B_i|) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i|. \quad (1.1)$$

Sea $\{\mathcal{P}_n : k \geq 1\}$ una subsucesión de particiones uniformes tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta B_i|^2 = b - a, \quad c.s.$$

Ahora, como las trayectorias del movimiento Browniano son continuas casi seguramente, se tiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\max_{0 \leq i < n_k} |\Delta B_i|) = 0, \quad c.s.$$

Despejando de (1.1)

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i|^2}{\max_{0 \leq i < n} |\Delta B_i|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta B_i|,$$

respecto de la subsucesión de particiones se obtiene que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta B_i| = \infty, \quad c.s. \quad \blacksquare$$

Proposición 1.1.3. Sea t_0 fijo. Con probabilidad uno, el movimiento Browniano $\{B_t : t \geq 0\}$ no es diferenciable en t_0 .

Demostración: Como $\{B_{t_0+t} - B_{t_0} : t \geq 0\}$ es también un movimiento Browniano, es suficiente demostrar que no es diferenciable para $t = 0$. Demostraremos que con probabilidad uno, para cada número natural n existe t en el intervalo $[0, 1/n^2]$ tal que $|\frac{1}{t}B_t| > n$. Esta propiedad implica que B_t no es diferenciable en $t = 0$. Para cada número natural n defina el evento:

$$A_n = \{|\frac{1}{t}B_t| > n, \text{ para algún } t \in [0, 1/n^2]\},$$

como $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ Entonces:

$$\begin{aligned} P(A_n) &\geq P\left(\left|\frac{1}{1/n^4}B_{1/n^4}\right| > n\right) \\ &= P\left(|B_{1/n^4}| > \frac{1}{n^3}\right) \\ &= P\left(|n^2B_{(1/n^4)(1)}| > \frac{1}{n}\right) \\ &= P\left(|B_1| > \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Se uso el hecho de que $\frac{1}{c}B_{c^2t}$ es también un movimiento Browniano para cualquier $c > 0$ constante. Por lo tanto $P(A_1) \geq P(A_2) \geq \dots \geq 1$. Es decir, $P(A_n) = 1$ para cualquier $n \geq 1$.

Así para cada $t_0 \geq 0$, el conjunto de trayectorias $t \mapsto B_t$ que no son diferenciables en t_0 tiene probabilidad uno. También se puede demostrar que el movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto. Esta propiedad es fundamental para la construcción del cálculo estocástico.

Definición 1.1.3. *Un movimiento Browniano d -dimensional es un proceso $\mathbf{B}_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ tal que cada coordenada B_t^j , es un movimiento Browniano unidimensional, independiente de las demás.*

Las construcciones para mostrar la existencia del movimiento Browniano y sus propiedades fueron extraídas y pueden ser consultadas en [23].

1.2. Integración estocástica

En esta sección expondremos brevemente qué es la integral estocástica de Itô:

$$\int_0^T X_t dB_t,$$

en donde se integrará un proceso estocástico $\{X_t\}$ respecto al movimiento Browniano unidimensional $\{B_s\}$. Para casi todo $\omega \in \Omega$, la trayectoria continua del movimiento Browniano es no diferenciable, es por ello que la integral antes mencionada, no puede ser definida de la manera usual. Sin embargo, podemos definir la integral para una clase muy grande de procesos estocásticos usando

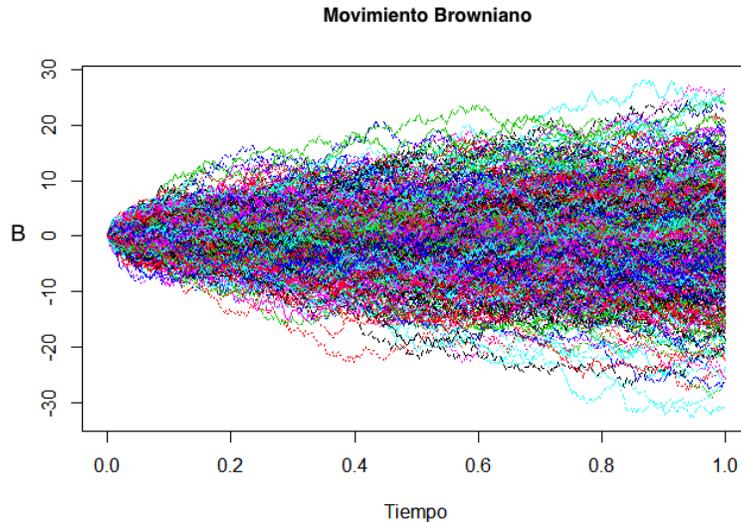


Figura 1.1: Conjunto de trayectorias del movimiento Browniano.

la naturaleza aleatoria del movimiento Browniano. En 1949 esta integral fue definida por el matemático K. Itô y es ahora conocida como la “Integral estocástica de Itô”. Por lo tanto definiremos de manera formal la integral de Itô para el movimiento Browniano unidimensional y en \mathbb{R}^1 . La principal referencia bibliográfica será [23].

Para conseguir lo anterior, se hará una construcción primero para procesos simples y luego, por aproximación, para procesos más generales. Dichos resultados sólo se mencionarán sin brindar mayores detalles técnicos ni demostraciones.

Consideremos al espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y el movimiento Browniano unidimensional B_t , junto con su filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$. Asumiremos que el proceso X_t con $0 \leq t \leq T$, visto como una función $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, es $\mathcal{F}_T \otimes \mathbf{B}[0, T]$ -medible. El término $\mathcal{F}_T \otimes \mathbf{B}[0, T]$ corresponde a la mínima σ -álgebra generada por el espacio producto $\mathcal{F}_T \times \mathbf{B}[0, T]$. Supondremos también que el proceso es adaptado, es decir, que la variable aleatoria X_t es \mathcal{F}_t -medible.

Sea $L^2(P)$ el espacio vectorial de variables aleatorias X que son cuadrado

integrables, es decir; que cumplen con la condición:

$$\|X\|_{L^2(P)} = \left(\mathbb{E}|X|^2\right)^{1/2} < \infty. \quad (1.2)$$

La función $\|\cdot\|_{L^2(P)}$ define una norma en $L^2(P)$. Recordemos que una norma es una función real, definida sobre un espacio vectorial lineal con las condiciones siguientes: $\|X\| \geq 0$, $\|X\| = 0 \iff X = 0$ c.s., $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ y $\|aX\| = |a|\|X\|$. El espacio $L^2(P)$ es completo respecto a esta norma, es decir que toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene límite en él. La convergencia con respecto a esta norma se le conoce como convergencia en $L^2(P)$.

Sea $L^2(P \times dt)$ el espacio lineal de todos los procesos $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$, que cumplen con la condición:

$$\|X\|_{L^2(P \times dt)} = \left(\mathbb{E} \int_0^T |X_t|^2 dt\right)^{1/2} < \infty,$$

donde la función $\|\cdot\|_{L^2(P \times dt)}$ define una norma y el espacio $L^2(P \times dt)$ es completo respecto a ella.

Definición 1.2.1. Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ una partición finita del intervalo $[0, T]$. Un proceso estocástico simple es un proceso de la forma:

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad (1.3)$$

en donde $\mathbf{1}_{[a,b)}$, es la función indicadora del intervalo $[a, b)$, $X^{(0)}, \dots, X^{(n-1)}$ es una colección de variables aleatorias adaptadas a la filtración $\{\mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$ y que son cuadrado integrables. Denotaremos por \mathcal{H}_0^2 al espacio vectorial de todos los procesos simples.

Definición 1.2.2. La integral estocástica de Itô de un proceso simple X , respecto del movimiento Browniano, denotada por $I(X)$, se define como la variable aleatoria:

$$I(X) = \int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}). \quad (1.4)$$

Esta variable aleatoria es integrable, ya que su esperanza es cero. La integral estocástica de Itô es además cuadrado integrable y cumple con la siguiente igualdad llamada isometría de Itô:

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}. \quad (1.5)$$

Lo que hace que el mapeo $I : \mathcal{H}_0^2 \mapsto L^2(P)$ sea continuo.

1.2.1. Extensión por aproximación

Para extender la integral estocástica a procesos más generales, tomemos el espacio \mathcal{H}^2 de todos los procesos $\{X_t\}$ medibles y adaptados tales que:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) < \infty.$$

Debemos notar que el espacio \mathcal{H}^2 es un subespacio lineal cerrado de $L^2(P \times dt)$. En particular todo proceso simple pertenece a \mathcal{H}^2 . Por lo tanto, $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2 \subset L^2(P \times dt)$. Se puede mostrar que \mathcal{H}_0^2 es denso en \mathcal{H}^2 con respecto a la norma en $L^2(P \times dt)$, lo cual significa que para cualquier proceso X en \mathcal{H}^2 existe una sucesión de procesos $X^{(k)}$ en \mathcal{H}_0^2 tales que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X - X^{(k)}\|_{L^2(P \times dt)} = 0. \quad (1.6)$$

Para poder observar de forma detallada este proceso de aproximación se recomienda consultar [17]. Usando la isometría de Itô se puede comprobar que la sucesión $I(X^{(k)})$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $L^2(P)$, es decir, para índices k, l suficientemente grandes se tiene que:

$$\|I(X^{(k)}) - I(X^{(l)})\|_{L^2(P)} \rightarrow 0.$$

A la sucesión $X^{(k)}$ se le denomina aproximante de X .

Definición 1.2.3. Sea X un proceso de \mathcal{H}^2 y sea $X^{(k)}$ una sucesión de procesos en \mathcal{H}_0^2 aproximante a X . Se define la integral estocástica de X como:

$$I(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(X^{(k)}),$$

en donde el límite debe entenderse dentro del espacio $L^2(P)$. La variable aleatoria $I(X)$ es un elemento de $L^2(P)$ y es tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|I(X) - I(X^{(k)})\|_{L^2(P)} = 0.$$

Cabe señalar que se mantiene la isometría de Itô dada en (1.5) para procesos $X \in \mathcal{H}^2$.

Por último para cada t en $[0, T]$ y para cualquier X en \mathcal{H}^2 se puede definir:

$$I_t(X) = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s = \int_0^t X_s dB_s.$$

Observando detalladamente, al indizar la variable aleatoria $I(X)$ con el sufijo t , estamos transformándola en un proceso. Dicho proceso no es necesariamente continuo, sin embargo, se puede demostrar que tiene una versión continua y que esta versión es una martingala respecto a la filtración natural del movimiento Browniano. Denotaremos por el mismo símbolo a tal martingala continua.

1.2.2. Extensión por localización

Primero recordemos que una variable aleatoria τ con valores en $\{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ es un tiempo de paro respecto de una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ si para cada $n \geq 1$ se cumple que $(\tau \leq n) \in \mathcal{F}_n$.

El proceso de localización permite extender la definición de integral de Itô a procesos medibles y adaptados que cumplen la condición:

$$P\left(\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Denotaremos por \mathcal{L}_{loc}^2 al espacio de estos procesos. Este espacio contiene a \mathcal{H}^2 y es tal que para cada proceso X en \mathcal{L}_{loc}^2 existe una sucesión creciente de tiempos de paro $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ tales que $\tau_n \nearrow T$ cuando $n \rightarrow \infty$, y para cuando $n \geq 1$ el proceso $X_t \cdot \mathbf{1}_{(\tau_n \geq t)}$ pertenece al espacio \mathcal{H}^2 .

Se define entonces la integral estocástica como el siguiente límite en el espacio $L^2(P)$.

$$\int_0^t X_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X_s \cdot \mathbf{1}_{(\tau_n \geq t)}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s.$$

Es posible demostrar que tal límite existe, que existe una versión continua de él y que es independiente de la sucesión de tiempos de paro localizante. En este caso, dicha integral ya no es una martingala, si no, una martingala local. Lo que quiere decir que el proceso detenido $I_{t \wedge \tau_n}(X)$ es una martingala para cada natural n . En general, la Isometría de Itô ya no se cumple cuando la integral estocástica tiene como dominio de definición el espacio \mathcal{L}_{loc}^2 . Véase más detalles en [22].

1.2.3. Propiedades de la integral

La integral estocástica de Itô tiene algunas propiedades importantes.

- a) La integral $I_t : \mathcal{L}_{loc}^2 \rightarrow L^2(P)$ es lineal, lo que quiere decir que para c constante y para cualesquiera procesos X_s, Y_s en \mathcal{L}_{loc}^2 se cumple:

$$\int_0^t c(X_s + Y_s)dB_s = c \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_s dB_s.$$

- b) Tiene esperanza cero, esto quiere decir que para cualquier proceso X_s en \mathcal{L}_{loc}^2 :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s dB_s\right) = 0. \text{ c.s.}$$

- c) Cuando la integral se restringe al espacio \mathcal{H}^2 , se cumple la isometría de Itô, esto es:

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t X_s dB_s \right|^2 = \mathbb{E} \int_0^t |X_s|^2 ds.$$

- d) Si una vez más se restringe al espacio \mathcal{H}^2 , la integral es una martingala, es decir, es integrable, adaptada y para $0 \leq s \leq t$, se cumple:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_u dB_u \mid \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s X_u dB_u.$$

Proposición 1.2.1. *Fórmula de Itô (I).*

Sea $f(x)$ una función de clase C^2 , es decir, que sea dos veces diferenciable y con segunda derivada continua. Entonces:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds.$$

Demostración:

Para explicar brevemente este resultado, usaremos el teorema de Taylor sin dar mayores detalles rigurosos. Para una función $f(x)$ suficientemente suave, se tiene que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x).$$

Tomando al residuo $R(x)$ de la siguiente forma:

$$R(x) = \int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt,$$

y haciendo el cambio de variable $t = x_0 + \theta(x - x_0)$:

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_{x_0}^x f''(t)(x-t)dt \\ &= \int_0^1 f''(x_0 + \theta(x - x_0))[x - (x_0 + \theta(x - x_0))](x - x_0)d\theta \\ &= \int_0^1 f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)(1 - \theta)(x - x_0)d\theta \\ &= \int_0^1 (1 - \theta)f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ es una partición de $[0, t]$, denotando por ΔB_k a la diferencia $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ y usando el teorema de Taylor:

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \sum_{k=1}^n [f(B_{t_k}) - f(B_{t_{k-1}})] \\ &= \sum_{k=1}^n f(B_{t_{k-1}})\Delta B_k \\ &\quad + \int_0^1 (1 - \theta) \sum_{k=1}^n f''(B_{t_{k-1}} + \theta\Delta B_k)(\Delta B_k)^2d\theta. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ las sumas convergen casi seguramente y entonces se obtiene la igualdad:

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \int_0^1 f'(B_s)dB_s + \int_0^1 (1 - \theta) \int_0^1 f''(B_s)dsd\theta \\ &= \int_0^1 f'(B_s)dB_s + \left(\theta - \frac{\theta^2}{2}\right)\Big|_0^1 \int_0^1 f''(B_s)ds \\ &= \int_0^1 f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(B_s)ds. \end{aligned}$$

Como último comentario al respecto, esta fórmula es una versión estocástica de la regla de la cadena del cálculo diferencial usual y es común escribirla en su forma diferencial:

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que contiene una función de una variable independiente y sus derivadas, i.e $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$, esta describe la evolución de un sistema determinista.

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) puede surgir de varias formas, en este trabajo se van a estudiar 3 maneras de abordar una EDE. La primera como función de una v.a, es decir, cuando tenemos una ecuación diferencial de una función $y(x)$ en la cual la variable x es una variable aleatoria X_t . La segunda como consecuencia de introducir un ruido aleatorio en una ecuación diferencial ordinaria y la tercera será de manera general y teórica, estudiando la forma:

$$dX_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

Ahora abordaremos un ejemplo de una función de una variable aleatoria. Las principales referencias bibliográficas para este capítulo son [6], [15], [16], [17], [23] y [26].

2.1. EDE como función de una variable aleatoria

Supongamos que algún fenómeno de la naturaleza está regido por una ecuación diferencial ordinaria $y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$, en la cual la solución

tiene parámetros libres que se interpretan como variables aleatorias. Al obtener la solución explícita de la ecuación diferencial, dicha función solución será evaluada en puntos diferentes. Lo que es de interés es observar la naturaleza de dicha solución. Es importante señalar que la mayor parte de los fenómenos estocásticos se manifiestan en una línea temporal, pero en muchos casos, la estocasticidad se presenta en más dimensiones, es decir, en tiempo y posición. Un ejemplo es la Ley de Darcy, en donde nos interesa saber como se filtra el agua en distintas posiciones del espacio para poder conocer la recarga general en un acuífero.

2.1.1. Ley de Darcy

En 1856 el ingeniero hidráulico francés Henry Darcy (1803-1858) se interesó en la descripción del flujo del agua a través de filtros de arena construidos para purificar el agua [26]. Quería obtener una descripción cuantitativa del proceso, lo que hasta ese momento no se sabía. Debido a esto diseñó un experimento para medir la tasa del flujo (volumen de agua que pasa por una superficie dada en un tiempo determinado) en dependencia de otros parámetros y variables físicas. Como resultado del experimento encontró que existía una relación lineal entre las diferencias de la presión y la tasa del flujo, hoy conocida como la Ley de Darcy [9]. Esta ley ha sido fundamental en disciplinas que conciernen a flujo en medios porosos y se sigue usando hoy en día.

El experimento consistía de un cilindro vertical de $2.5m$ de alto y $0.5m$ de diámetro lleno de arena, cerrado en cada uno de sus extremos por una placa atornillada, salvo un pequeño orificio que permitía el paso del agua. En la parte superior tenía un suministro de agua y un instrumento para medir la presión del agua, llamado manómetro; y en el fondo una malla que mantenía la arena en su lugar, un tubo para que el agua pudiera salir y otro manómetro (ver Figura 2.1). Darcy midió la cantidad de agua que salía del fondo de la columna por unidad de tiempo, Q (en litros por minuto) y la diferencia entre la presión del agua en el extremo superior (p_1) y la presión en el fondo de la columna (p_2). Nótese que si la presión en el fondo es más alta que en el extremo superior no habrá flujo de agua a través del fondo del cilindro. Por lo tanto, es razonable medir la carga del agua, es decir, medir la presión en la parte superior relativa a la presión atmosférica (h_1), y medir la presión en el fondo relativa a la presión inducida por la gravedad en una columna de $2.5m$, (h_2).

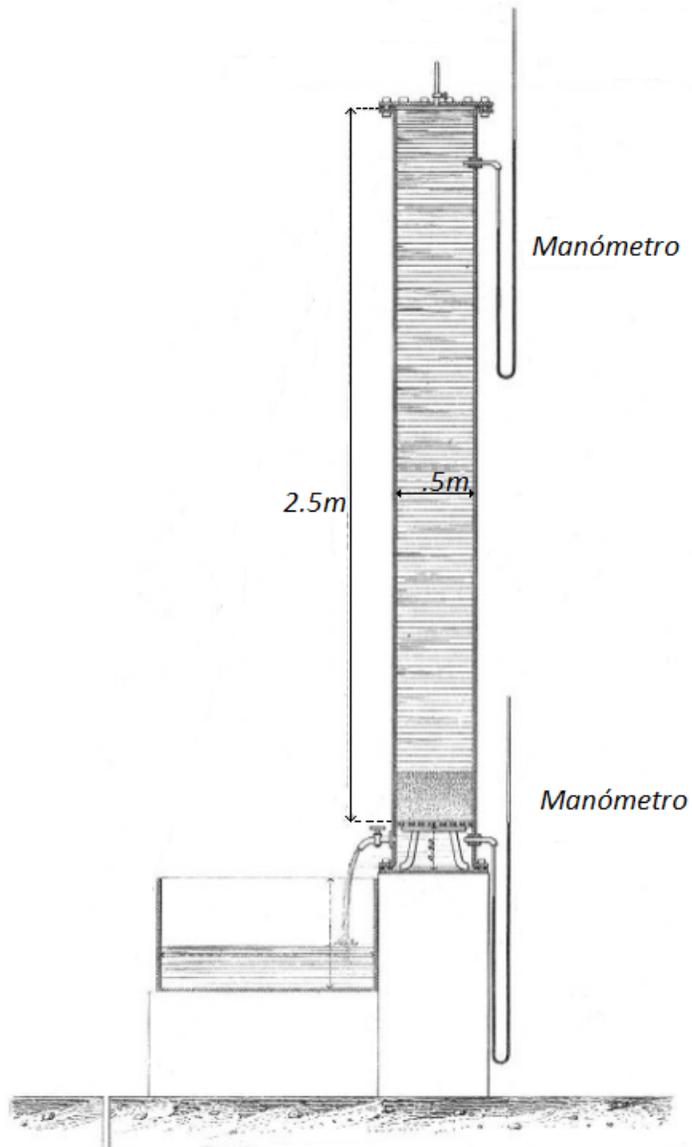


Figura 2.1: Esquema del experimento de Darcy (extraído de [27]).

Después de muchos experimentos con distintas presiones, Darcy calculó la proporción y observó que ésta es constante:

$$\frac{Q}{h_1 - h_2} = c. \quad (2.1)$$

Analizando la ecuación (2.1) podemos ver que como en una columna de dos veces el ancho, la tasa de flujo se duplica, la constante también se duplicará. Además, una columna de dos veces la altura necesita una diferencia del doble de presión para producir la misma tasa de flujo. Si llamamos A al área de la sección transversal de la columna y L a su altura, entonces, dividiendo entre L y reagrupando los términos en la ec. (2.1) obtenemos un número $K > 0$, que sólo depende del tipo de arena, por lo cual:

$$\frac{Q}{A} = -K \frac{h_2 - h_1}{L}. \quad (2.2)$$

En la ecuación (2.2) hemos escrito una expresión que iguala dos ecuaciones en diferencias, algo semejante a una derivada, midiendo la diferencia de cantidades sobre pequeños rangos y promediando. Por una parte, tenemos el flujo de agua (volumen/tiempo) que cruza una superficie arbitraria, dividida por el área de la superficie. Dicho flujo de agua es denotado por q . Esta cantidad puede ser asignada para cada punto x , así $q(x)$ describe el flujo de agua en el punto x .

En segunda instancia observamos la diferencia de presiones dividida entre la distancia de los puntos en los cuales se midió. En un punto x (escribiendo $p(x)$ como la presión en el punto x) y para pequeñas distancias alrededor de él, esto corresponde a la derivada de la presión respecto a una variable espacial. Asumiendo por el momento, que estas cantidades son unidimensionales, y denotando la variable vertical como x_3 , el lado derecho de (2.2) corresponde con: $-K \frac{\partial p}{\partial x}$.

Ahora dando un último paso vayamos a un espacio tridimensional. El flujo $q(x)$ debe ser considerado como un vector el cual tenga como magnitud el flujo de agua y la dirección de la misma.

El lado derecho de la ecuación (2.2) es el gradiente de p , denotado por ∇p . Considerando la presión como una cantidad distribuida en el espacio, $\nabla p(x)$ es el vector que apunta en dirección de mayor variación de presión en x , su

magnitud es la variación de presión por distancia en esa dirección.

Podemos esperar que la dirección de los dos vectores coincida, el flujo de agua en dirección de la mayor variación de presión, este es el caso del experimento de Darcy.

El gradiente de presión apunta hacia arriba, en la dirección de x_3 . El flujo es exactamente hacia abajo. Escribiendo la ley en forma diferencial, obtenemos la forma moderna de la ley de Darcy, en donde $p(x)$ se sustituye por $h(x)$, la cual representa la altura al punto x :

$$q(x) = -K \frac{\partial h(x)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Esta ecuación puede ser reescrita explícitamente en términos de su coeficiente de proporcionalidad (conductividad hidráulica K):

$$K = \frac{k\rho g}{\mu}, \quad (2.4)$$

donde k es la permeabilidad, ρ la densidad, g la gravedad y μ la viscosidad.

Denotando al gradiente $J(= \frac{h_1-h_2}{L})$ y definiendo la descarga específica, q , como el volumen de agua que fluye por unidad de tiempo, a través de la sección de área transversal, en dirección del flujo, obtenemos:

$$q = KJ. \quad (2.5)$$

Donde $q = \frac{Q}{A}$ y $J = \frac{h_1-h_2}{L}$, otra expresión de la ley de Darcy.

2.1.2. Ecuación de continuidad y ley de Darcy

En un estado estacionario, un fluido satisface la siguiente ecuación de continuidad y ley de Darcy:

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} = g(x). \quad (2.6)$$

$$q(x) = -K \frac{\partial h(x)}{\partial x}. \quad (2.7)$$

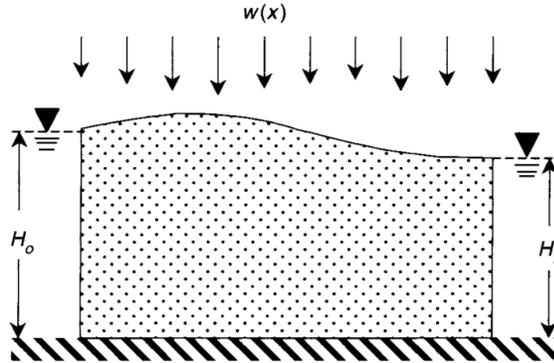


Figura 2.2: Ecuación de flujo unidimensional con recarga

Donde $q(x)$ es la función de descarga específica o flujo respecto de x , y $h(x)$ es la altura del agua. K es la conductividad hidráulica, $g(x)$ es el término de recarga/bombeo/inyección .

Ahora consideremos el caso de flujo subterráneo sujeto a recarga, como se muestra en la Figura 2.2. Asumiendo que la conductividad hidráulica K es uniforme y conocida, las ecuaciones que gobiernan el flujo en un dominio unidimensional (2.6) y (2.7) pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} = -w(x),$$

con condiciones de frontera:

$$h(0) = H_0, h(L) = L,$$

donde $w(x) = -g(x)/K$ es un término de fuerza de acuerdo a la recarga, bombeo o inyección.

Para hallar una solución de $h(x)$ basta con resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} = -w(x).$$

Lo cual nos arroja que:

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dx} &= \int_0^x w(\chi') d\chi' + c_0, \\ h(x) &= \int_0^x \int_0^\chi w(\chi') d\chi' d\chi + c_0 x + c_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo en las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} h(0) &= \int_0^x \int_0^x w(\chi') d\chi' d\chi + c_0x + c_1 = H_0, \\ h(L) &= \int_0^x \int_0^x w(\chi') d\chi' d\chi + c_0x + c_1 = H_L. \end{aligned}$$

por lo tanto la solución de $h(x)$ es:

$$h(x) = H_0 + \int_0^x \int_0^x w(\chi') d\chi' d\chi + \frac{x}{L} \left[H_L - H_0 - \int_L^x \int_0^x w(\chi') d\chi' d\chi \right].$$

Para ilustrar la naturaleza del fenómeno en el cual la recarga es estocástica en cada punto, consideremos un acuífero unidimensional a lo largo del eje x , de longitud unitaria $0 < x < 1$, en el que se tiene una carga hidráulica dada por $h(x)$. A lo largo del acuífero se presenta recarga o evaporación, representados por $w(x)$. Suponemos recarga aleatoria, en principio w depende de x por lo que podría ser diferente en cada punto del espacio. Aquí suponemos que es normal con esperanza cero, varianza 1 y constante (w es un campo completamente correlacionado) $E(w) = 0.1$ y $\sigma_w = 0.1$. Discretizando el intervalo $(0, 1)$ en 21 puntos sobre el mismo (incluyendo los extremos), calcularemos 100 realizaciones de $h(x)$ aplicando la solución que obtendremos sobre esos puntos y un valor específico de w obtenido como una realización normal con la media y desviación estándar especificadas anteriormente.

Al resolver la ecuación diferencial, suponiendo $w(x) = w$ constante con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1.0, \quad h(1) = 0.9, \\ \frac{d^2h(x)}{dx^2} &= -w, \quad \frac{dh(x)}{dx} = -wx + c_0, \\ h(x) &= \frac{-wx^2}{2} + c_0x + c_1. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h(0) &= c_1 = 1, \\ h(1) &= \frac{-w}{2} + c_0 + c_1 = 0.9, \\ \frac{-w}{2} + 1 + c_0 &= 0.9 \rightarrow c_0 = -0.1 + \frac{w}{2}. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{wx^2}{2} - 0.1x + \frac{w}{2}x + 1 = \frac{w}{2}(x - x^2) - 0.1x + 1. \\ &= \frac{w}{2}(x - x^2) - 0.1x + 1. \end{aligned}$$

Calculando la esperanza:

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &:= \mathbb{E}(h(x)) = \mathbb{E}\left(\frac{w}{2}(x - x^2) - 0.1x + 1\right) = \\ &\frac{0.1}{2}(x - x^2) - 0.1x + 1 = 0.05(x - x^2) - 0.1x + 1. \\ \bar{h}(x) &= -0.05x^2 - 0.05x + 1. \end{aligned}$$

Usando la definición:

$$\text{Var}(x) = \mathbb{E} \left[\left(h(x) - \bar{h}(x) \right)^2 \right].$$

Obtenemos la varianza:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= \mathbb{E} \left[\left(\left(\frac{w}{2}(-x^2 + x) - 0.1x + 1 \right) - \left(-0.05x^2 - 0.05x + 1 \right) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{-wx^2}{2} + \frac{wx}{2} - 0.1x + 1 + 0.05x^2 + 0.15x - 1 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(x^2 \left(\frac{-w}{2} + 0.05 \right) + x \left(0.15 + \frac{w}{2} - 0.1 \right) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(x^2 \left(\frac{-w}{2} + 0.05 \right) + x \left(-0.05 + \frac{w}{2} \right) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(-x^2 \left(\frac{w}{2} - 0.05 \right) + x \left(-0.05 + \frac{w}{2} \right) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left((x - x^2) \left(\frac{1}{2} \right) (w - 0.1) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(x - x^2)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 (w - 0.1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} (x - x^2)^2 \mathbb{E}[(w - 0.1)^2] \\ &= \frac{1}{4} (x - x^2)^2 (0.1) \\ &= \frac{1}{40} (x - x^2)^2. \end{aligned}$$

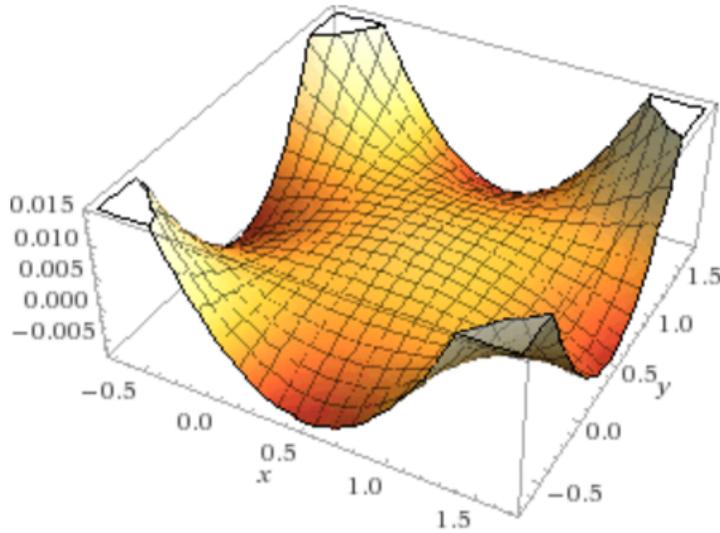
Usando que: $Cov(h(x), h(y)) = \mathbb{E}[(h(x) - \bar{h}(x))(h(y) - \bar{h}(y))]$,

$$\begin{aligned}
 Cov(h(x), h(y)) &= \mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{w}{2}(-x^2 + x) - 0.1x + 1\right) - (-0.05x^2 - 0.05x + 1)\right)\right. \\
 &\quad \times \left.\left(\left(\frac{w}{2}(-y^2 + y) - 0.1y + 1\right) - (-0.05y^2 - 0.05y + 1)\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(x - x^2)(w - 0.1)\frac{1}{2}(y - y^2)(w - 0.1)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{4}(x - x^2)(y - y^2)(w - 0.1)^2\right] \\
 &= \frac{1}{4}(x - x^2)(y - y^2)\mathbb{E}[(w - 0.1)^2] \\
 &= \frac{1}{40}(x - x^2)(y - y^2).
 \end{aligned}$$

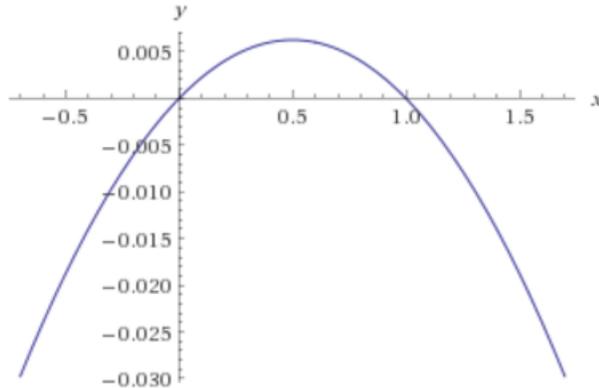
Por lo tanto:

$$cov(h(x), h(y)) = \frac{1}{40}(x - x^2)(y - y^2). \quad (2.8)$$

La gráfica de la Covarianza es:



La gráfica de la varianza es:



Usando lo anterior calculamos la correlación:

$$r = \frac{\text{cov}(h(x), h(y))}{\sqrt{\text{var}(h(x))\text{var}(h(y))}}.$$

Entonces:

$$r = \frac{\frac{1}{40}(x - x^2)(y - y^2)}{\sqrt{\frac{1}{40}(x - x^2)^2 \frac{1}{40}(y - y^2)^2}} = 1.$$

Esto implica que hay una relación lineal entre las variables aleatorias $h(x)$ y $h(y)$.

Como el intervalo $(0, 1)$ se dividió en 21 puntos, nos interesa calcular la media de la recarga en cada punto para simulaciones distintas, obtenemos el siguiente vector de medias:

(0.9506593, 0.9630021, 0.9697119, 0.9411922, 0.9642633, 0.964903, 0.9559168, 0.9561505, 0.9560023, 0.9532952, 0.9567278, 0.9523944, 0.9542413, 0.9612313, 0.9686730, 0.9597784, 0.9564466, 0.9531193, 0.9537348, 0.9807817, 0.9618103).

La media real es 0.1 y al restar obtenemos el siguiente vector:

(0.8506593, 0.8630021, 0.8697119, 0.8411922, 0.8642633, 0.8649030, 0.8559168, 0.8561505, 0.8560023, 0.8532952, 0.8567278, 0.8523944, 0.8542413, 0.8612313, 0.8686730, 0.8597784, 0.8564466, 0.8531193, 0.8537348, 0.8807817, 0.8618103).

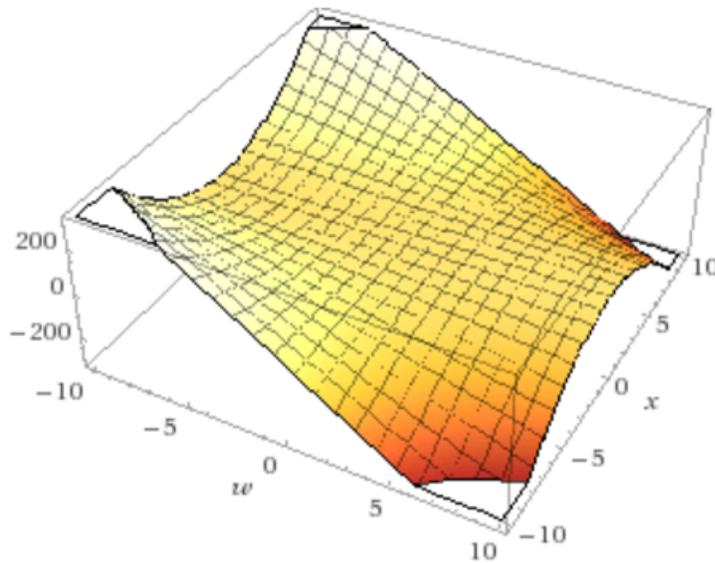
Sus respectivas media y varianza:

$$\begin{aligned} \text{Media} &= 0.8587636. \\ \text{Varianza} &= 6.798678 \times 10^{-05}. \end{aligned}$$

La varianza de las realizaciones en cada punto es:

$$\begin{aligned} \text{Varianza} &= 6.698806 \times 10^{-10}. \\ \text{Desviación estándar} &= 2.588205 \times 10^{-05}. \end{aligned}$$

Mientras w es constante logramos simularla y obtuvimos resultados sencillos de observar. En el caso donde $w(x)$ deje de ser constante, se tendrán que usar métodos distintos. La función $h(x, w) = \frac{w}{2}(x - x^2) - 0.1x + 1$ es la siguiente superficie:



En la cual vemos la forma de las familias de funciones de $h(x)$, haciendo cortes en distintos valores de w .

Este ejemplo ilustra cómo es posible relacionar una ecuación diferencial ordinaria, usando valores estocásticos de la función solución. Como se observó la función solución de recarga tiene valores distintos dependiendo de la posición x ; esto debido a que en la naturaleza la lluvia, que es la recarga natural de los mantos acuíferos, es aleatoria en cada punto de la tierra y es de interés conocer cómo se recargan los pozos.

2.2. EDE a través de un ruido aleatorio

Definición 2.2.1. *Un ruido blanco es un proceso $\xi(t)$, definido como la derivada del movimiento Browniano:*

$$\xi(t) = \frac{dB_t}{dt} = B'_t.$$

Este proceso no existe como una función de t , pues el movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto. Si $\sigma(x, t)$ es la intensidad del ruido en el punto x , a tiempo t ; entonces:

$$\int_0^T \sigma(X_t, t)\xi(t)dt = \int_0^T \sigma(X_t, t)B'_t dt = \int_0^T \sigma(X_t, t)dB_t,$$

que es una integral de Itô (ver capítulo 1, sección 1.2). Las ecuaciones diferenciales estocásticas aparecen, por ejemplo, cuando los coeficientes de una ecuación diferencial ordinaria son perturbados por un ruido blanco.

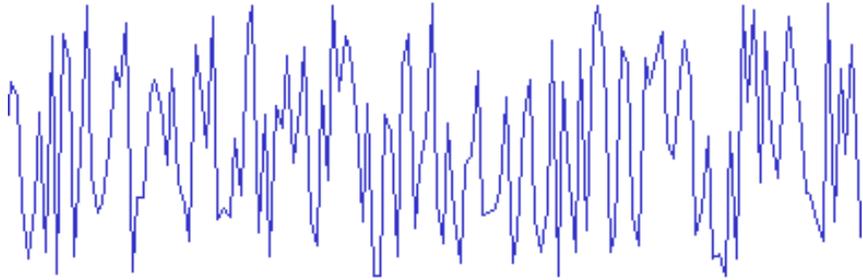


Figura 2.3: Ruido blanco.

Ahora se mostrarán algunos ejemplos que ilustran cómo surgen las ecuaciones diferenciales estocásticas a través de un ruido aleatorio. Aunque no es la única manera, nosotros seguiremos el método referido a los libros [15], [16] y [17]. La mayor parte de los ejemplos que se abordarán en los siguientes capítulos de aplicaciones surgen a través de un ruido aleatorio, por lo cual no se mencionarán en esta sección.

Ejemplo 2.2.1. *El ejemplo más simple que ilustra todo lo anterior es el modelo Black-Scholes-Merton de crecimiento con tasa de retorno desconocida. Si X_t es el valor de \$1 después de t unidades de tiempo, invertidas en una cuenta de ahorro, la tasa de retorno satisface la EDO:*

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt \quad \text{o} \quad \frac{dX_t}{dt} = \mu X_t,$$

donde μ es la tasa de interés. Si la tasa es perturbada por un ruido $\mu + \sigma\xi(t)$, donde σ representa la intensidad del ruido $\xi(t)$, obtenemos la (EDE):

$$\frac{dX_t}{dt} = (\mu + \sigma\xi(t))X_t.$$

Como $\xi(t)dt = dB_t$, obtenemos que:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Este ejemplo será estudiado más adelante pues se emplearán distintos métodos para hallar su solución.

Ejemplo 2.2.2. *La coordinación de los movimientos humanos, particularmente cuando se repite un movimiento periódicamente ha sido investigado extensivamente por psicólogos, esto con el objetivo de tener un buen entendimiento del mecanismo neurológico que controla esta actividad.*

El sistema neurológico sin duda es extremadamente complejo, pero a veces una característica dominante aparece y esta puede ser modelada para describir su dinámica. Un ejemplo es el siguiente experimento: un sujeto se sienta en una mesa con sus muñecas fijas verticalmente en la mesa, moviendo el dedo índice de cada mano periódicamente. Dependiendo si la frecuencia es elegida por el sujeto o si esta es determinada por un cronómetro, sólo dos estados son observados: un estado estable y simétrico, en donde los dedos se mueven hacia adentro o hacia afuera juntos. O un estado estable asimétrico, donde uno se mueve hacia adentro mientras el otro se mueve hacia afuera.

La característica dominante aquí es la fase de diferencia ϕ de los dos dedos, la cual es $\phi = 0$ en el caso simétrico y en el asimétrico es $\phi_0 = \pi$ (o $-\phi$, pues ϕ toma valores módulo 2π).

Se ha encontrado que el estado asimétrico repentinamente da lugar al estado simétrico, cuando la frecuencia de las oscilaciones exceden cierto valor crítico. Sin embargo, el radio de esta frecuencia crítica, cuando el sujeto escoge el

ritmo del movimiento es la misma para todos los sujetos.

El modelo propuesto es la ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{\phi} = -a\text{sen}\phi - 2b\text{sen}(2\phi),$$

donde a y b son parámetros positivos que son determinados por la información del experimento. Cuando hay fluctuaciones en los datos, un ruido $\sigma\xi(t)$ es añadido, resultando la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = -(a\text{sen}X_t + 2b\text{sen}(2X_t))dt + \sigma dB_t,$$

donde el proceso X_t se interpretará módulo 2π .

Ejemplo 2.2.3. Cuando se busca modelar el comportamiento de un satélite en la atmósfera hay que tomar en cuenta las rápidas fluctuaciones de la densidad atmosférica en la parte alta. Las cuales usualmente son incorporadas dentro del modelo determinístico basado en la mecánica newtoniana aleatorizando términos.

Un modelo que nace del problema de estabilizar un satélite en una órbita circular es el siguiente:

$$\dot{x} + b(1 + a\xi(t))\dot{x} + (1 + b\xi(t))\text{sen}x - c\text{sen}(2x) = 0,$$

donde x es la perturbación radial de la órbita dada, $\xi(t)$ es un ruido blanco, a , b y c son constantes $b, c > 0$.

Si hacemos que $X_t = (X_t^1, X_t^2) = (x, \dot{x})$, la ecuación anterior puede ser escrita como una ecuación diferencial estocástica de dimensión 2:

$$d \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t^2 \\ -bX_t^2 - \text{sen}X_t^1 - c\text{sen}(2X_t^1) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ -aX_t^2 - b\text{sen}X_t^1 \end{pmatrix} d\mathbf{B}_t.$$

Este último ejemplo muestra cómo añadir un ruido blanco a un fenómeno determinista puede derivar en EDE complejas, pero no será resuelto dado que excede los objetivos planteados para esta tesis.

Ejemplo 2.2.4. Ahora estudiaremos la influencia de un ruido blanco en el sistema de Lorenz, un sistema no lineal determinístico. Fue estudiado por primera vez en 1963 por el meteorólogo Edward N. Lorenz. Dicho sistema

es un modelo simplificado del comportamiento de la atmósfera terrestre. Las ecuaciones describen el flujo de un fluido en una caja la cual es calentada en el fondo. Lorenz obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de dimensión tres:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \theta(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ \frac{dz}{dt} &= x(t)y(t) - \beta z(t),\end{aligned}$$

donde $x(t)$ describe la intensidad del movimiento convectivo, $y(t)$ es la diferencia de temperatura entre el flujo ascendente y descendente, $z(t)$ es la desviación de la linealidad del perfil de temperatura vertical, θ el número de Prandtl, ρ el número de Rayleigh y β un factor de dominio geométrico. En la Figura 2.4 podemos observar cómo todas las trayectorias se acumulan sobre una forma parecida a la de una mariposa: un atractor extraño.

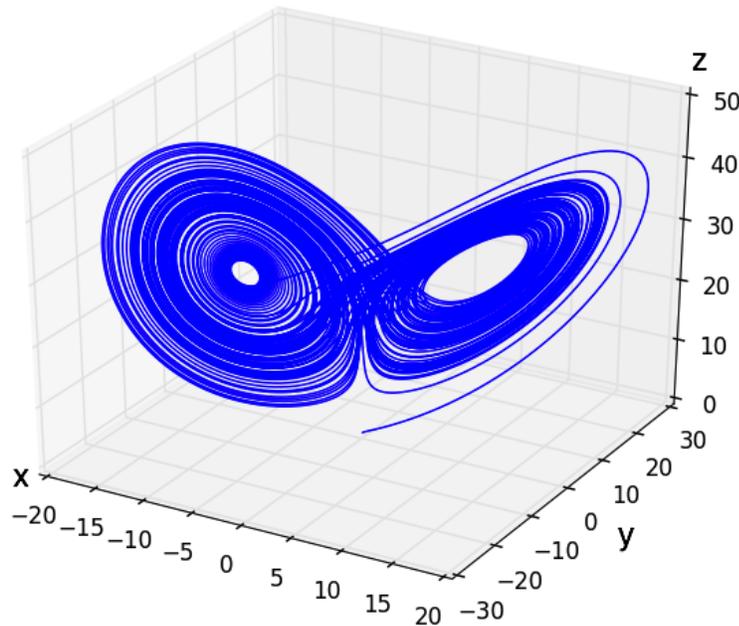


Figura 2.4: Ecuaciones de Lorenz deterministas

El modelo estocástico propuesto en [1] es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \theta(y(t) - x(t)) + \sigma_1 \xi_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) + \sigma_2 \xi_2(t), \\ \frac{dz}{dt} &= x(t)y(t) - \beta z(t) + \sigma_3 \xi_3(t),\end{aligned}$$

donde σ_i , $i = 1, 2, 3$ es la amplitud del ruido $\xi(t)$, $i = 1, 2, 3$. Este tipo de ruido aditivo aparece por ejemplo, en fallas de observación cuando los errores no dependen del sistema de estados. En la Figura 2.5 notamos cómo a pesar de la perturbación, las trayectorias se acumulan sobre la misma forma del sistema determinista.

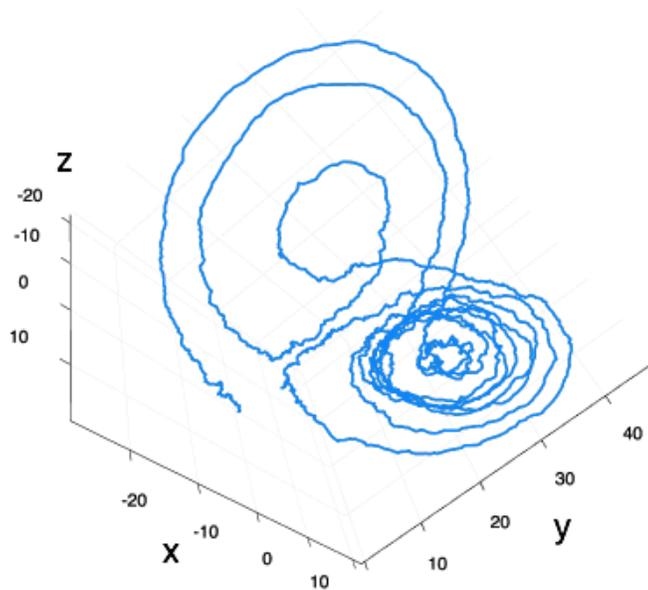


Figura 2.5: Ecuaciones de Lorenz con un ruido aleatorio

2.3. Teoría general de ecuaciones diferenciales estocásticas

En este capítulo expusimos cómo generar EDE introduciendo un ruido aleatorio a una EDO. Ahora definiremos de manera formal qué es una EDE y se darán condiciones para la existencia y unicidad de la solución. La principal referencia bibliográfica para esta sección será [23].

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\{B_t\}$ un movimiento Browniano unidimensional adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Definición 2.3.1. Sean $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ dos funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Una ecuación estocástica es una ecuación de la forma:

$$dX_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad (2.9)$$

definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se presupone \mathcal{F}_0 -medible e independiente del movimiento Browniano. La ecuación (2.9) se interpreta como la ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad (2.10)$$

en donde la primera es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso $\{X_t\}$ se le llama proceso de Itô.

Observando detalladamente la ecuación anterior, notamos que los términos X_0 , $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ son conocidos, mientras que la incógnita es el proceso estocástico $\{X_t\}$. Los términos $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ son conocidos como coeficiente de tendencia y coeficiente de difusión, respectivamente. El proceso solución puede interpretarse como el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista, gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación (la tendencia o deriva), pero alterado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica (la difusión).

De manera análoga al caso de ecuaciones diferenciales deterministas, existen teoremas de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas, buscando regularidad de los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$.

2.3.1. Existencia y unicidad

Teorema 2.3.1. *Teorema de existencia y unicidad*

Si los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ de la ecuación (2.9) satisfacen la condición de Lipschitz en la variable x :

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2,$$

y la condición de crecimiento en x :

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

para alguna constante $K > 0$, entonces existe un proceso estocástico $\{X_t\}$ solución de (2.9) que es adaptado a la filtración, tiene trayectorias continuas, es uniformemente acotado en $L^2(P)$, es decir, $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, y además es única en el sentido de indistinguibilidad.

En tal caso, a dicha solución se le conoce como solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica.

Proposición 2.3.1. *Fórmula de Itô (II).*

Si $\{X_t\}$ es un proceso de Itô dado por (2.9) y $f(t, x)$ es una función de clase C^1 , es decir, una función real diferenciable y con derivada continua en t , y de clase C^2 en x , entonces el proceso $\{Y_t = f(t, X_t)\}$ es también un proceso de Itô y satisface la ecuación estocástica:

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2. \quad (2.11)$$

Para darle un mayor sentido a esta fórmula introduciremos la tabla de multiplicar de McKean:

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Corolario 2.3.1. *Si $dX_t = h(X_t, t)dt + g(X_t, t)dB_t$, $f \in C^1$ en t y $f \in C^2$ en x entonces $Y_t = f(X_t, t)$ satisface la EDE:*

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + g \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

2.3. TEORÍA GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS 33

Ejemplo 2.3.1. Sea B_t un movimiento Browniano. Para calcular la integral estocástica:

$$\int_0^t B_s dB_s,$$

aplicaremos la fórmula de Itô para la función $f(x, t) = x^2$ y haremos que $X_t = B_t$.

Entonces:

$$f_t = 0, \quad f_x = 2x, \quad f_{xx} = 2.$$

Sustituyendo en la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} dY_t &= 2(B_t)dB_t + \frac{1}{2}(2)(dB_t)^2 \\ &= 2B_t dB_t + (dB_t)^2. \end{aligned}$$

$$d(B_t^2) = 2B_t dB_t + (dB_t)^2,$$

como $(dB_t)^2 = dt$ e integrando:

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + \int_0^t dt,$$

de lo que podemos concluir que:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}[B_t^2 - t].$$

Capítulo 3

Métodos de solución de EDE

Ya que sabemos qué es una EDE, cómo surgen y bajo qué condiciones tenemos existencia y unicidad de la solución; nos enfocaremos en desarrollar métodos para encontrar el proceso estocástico que cumple con la EDE. Las siguientes herramientas son sólo algunos de los muchos métodos para dar solución a una EDE, usaremos métodos analíticos y numéricos. Para este capítulo las principales referencias serán [5], [16], [17] y [20].

3.1. Identificación de coeficientes

Primero trabajemos una versión de la fórmula de Itô:

$$dY_t = \left(f_t(X_t, t) + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t, t) \right) dt + f_x(X_t, t) dB_t.$$

$$dX_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

La técnica de este método es observar la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t,$$

e identificar algún tipo de relación entre los coeficientes $b(X_t, t), \sigma(X_t, t)$ con los coeficientes $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x}$ respectivamente en la fórmula de Itô.

Por lo tanto, busquemos decidir si es posible resolver el sistema:

$$b(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

$$\sigma(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Este método no funciona siempre, como veremos en algunos ejemplos a continuación. En dichos casos tenemos que sugerir ciertas soluciones e identificar coeficientes de manera conveniente.

Ejemplo 3.1.1. *Modelo de Black-Scholes-Merton.*

Consideremos la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad \text{con } X_0 = x_0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 .$$

Si suponemos que $X_t = f(t, B_t)$ entonces:

$$dX_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

Observamos que de (3.1) y (3.2) se debe tener:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mu X_t = \mu f \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma X_t = \sigma f.$$

De la ecuación del lado derecho obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f \quad \text{entonces} \quad f = e^{\sigma x + g(t)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g'(t)f \quad \text{como} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 f.$$

Para el lado izquierdo:

$$g'(t)f + \frac{1}{2} \sigma^2 f = \mu f$$

$$g'(t) = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2.$$

Integrando:

$$g(t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + c.$$

Sustituyendo en la expresión de f , se tiene que:

$$f(t, x) = e^{\sigma x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + c}.$$

Tomando:

$$f(0, 0) = e^c = x_0,$$

obtenemos:

$$f(t, x) = x_0 e^{\sigma x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Entonces la solución viene dada por:

$$X_t = x_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3.1.2. Para el modelo simple de crecimiento poblacional, tomamos la siguiente EDE:

$$dN(t) = rN(t)dt + \alpha N(t)dB_t \quad \text{para} \quad N(0) = N_0 \text{ constante y } r \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

Si observamos con detenimiento la ecuación diferencial estocástica, nos daremos cuenta que es un caso particular de la ecuación del modelo Black-Scholes-Merton, donde $\sigma = \alpha$ y $r = \mu$. Por lo tanto la solución es de la forma:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha B_t + (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t}. \quad \blacksquare$$

Nota 3.1.1. Ya que tenemos de forma explícita la solución de $N(t)$, usaremos nuestro conocimiento del comportamiento de B_t para extraer información sobre esta solución. Sabemos que $N(t) = N_0 e^{\alpha B_t + (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t}$ entonces:

1. Si $r > \frac{1}{2}\alpha^2$ entonces $r - \frac{1}{2}\alpha^2 > 0$ y $N(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$ c.s.
2. Si $r < \frac{1}{2}\alpha^2$ entonces $r - \frac{1}{2}\alpha^2 < 0$ y $N(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ c.s.
3. Si $r = \frac{1}{2}\alpha^2$ entonces $r - \frac{1}{2}\alpha^2 = 0$ y $N(t)$ fluctuará entre valores arbitrarios pequeños y grandes conforme $t \rightarrow \infty$ c.s.

Los resultados anteriores están sustentados en la Ley del logaritmo iterado (véase pág. 121 de [25]):

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log(\log(t))}} = 1 \quad c.s.$$

Esta ley estipula que la oscilación de B_t puede medirse por $\sqrt{2t \log(\log(t))}$, en otras palabras, la divergencia o convergencia del límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_0 e^{\alpha B_t + (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t},$$

depende únicamente del coeficiente $(r - \frac{1}{2}\alpha^2)$.

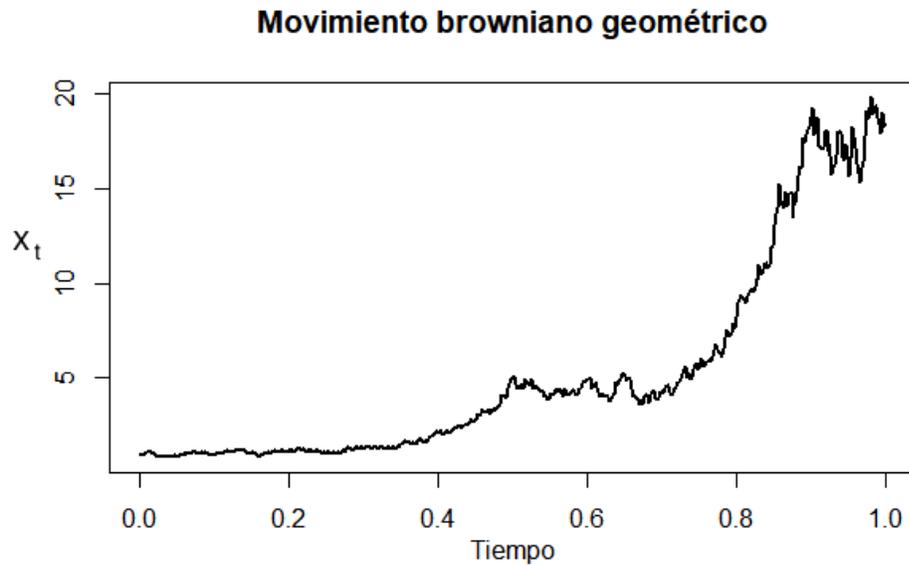


Figura 3.1: Simulación del movimiento Browniano geométrico.

Ejemplo 3.1.3. *Proceso de Ornstein-Uhlenbeck*

Sea la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \quad \text{con } X_0 = x_0, \sigma > 0 .$$

Usemos el método de identificación de coeficientes. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\alpha f \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma .$$

Del lado derecho obtenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma .$$

Integrando:

$$f = \sigma x + g(t) .$$

Sustituyendo en el lado izquierdo obtenemos la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\alpha(\sigma x + g(t)) .$$

Como no conocemos con facilidad la solución de la ecuación diferencial anterior, tomaremos la siguiente sugerencia:

$$X_t = a(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right) \quad \text{con } a(0) = 1 .$$

Esta sugerencia funciona pues derivándola:

$$dX_t = a'(t) \frac{X_t}{a(t)} + a(t)b(t)dB_t .$$

Obtenemos una EDE similar a la que buscamos resolver y siguiendo una lógica similar al método anterior, comparamos los coeficientes:

$$-\alpha X_t = a'(t) \frac{X_t}{a(t)} \quad y \quad \sigma = a(t)b(t) .$$

Para el lado izquierdo:

$$-\alpha = \frac{a'(t)}{a(t)} ,$$

$$-\alpha a(t) = a'(t),$$

$$a(t) = e^{-\alpha t}.$$

De aquí se puede concluir que si $\sigma = a(t)b(t)$, entonces:

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{\sigma}{a(t)} \\ &= \sigma e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$X_t = e^{-\alpha t} \left(X_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s \right) = e^{-\alpha t} X_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha(s-t)} dB_s. \quad \blacksquare$$

A continuación se muestra la gráfica de una simulación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

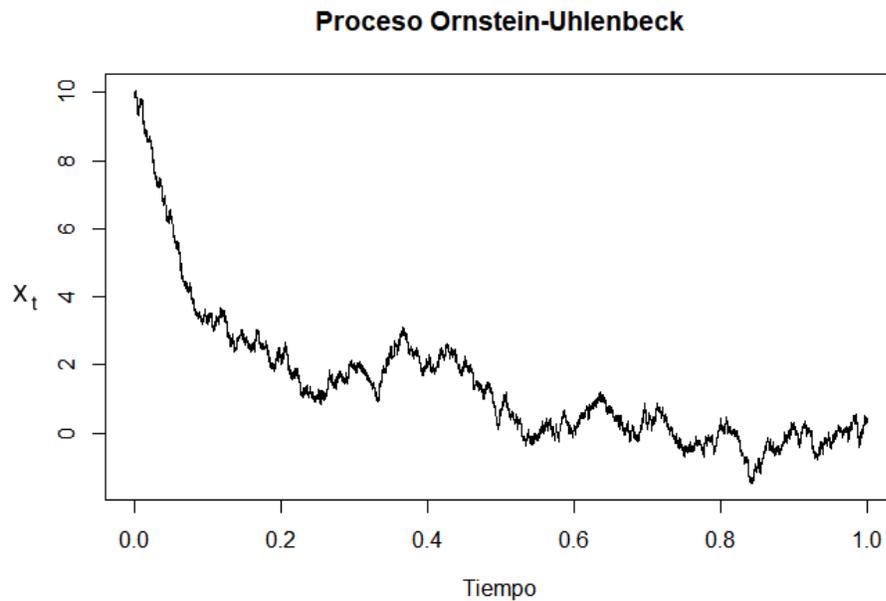


Figura 3.2: Simulación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Ejemplo 3.1.4. *Puente Browniano*

Considere la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \frac{-X_t}{1-t} dt + dB_t \text{ con } X_0 = 0, X_1 = 0 \text{ y } t \in [0, 1).$$

Si intentamos usar el método de identificación de coeficientes obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-X_t}{1-t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1.$$

Del lado derecho obtenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1,$$

integrando:

$$f = x + g(t) .$$

Sustituyendo en el lado izquierdo obtenemos la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-(x + g(t))}{1-t} .$$

Al no conocerse la solución, la proponemos con la forma siguiente:

$$X_t = a(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right) \quad \text{con } a(0) = 1.$$

Esta sugerencia tiene sentido pues al derivar:

$$dX_t = a'(t) \frac{X_t}{a(t)} + a(t)b(t)dB_t.$$

Comparando con la EDE a resolver notamos la similitud, por lo tanto hay que resolver el sistema siguiente:

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{-1}{1-t} \quad \text{y} \quad a(t)b(t) = 1.$$

Entonces es claro que:

$$a(t) = 1 - t \quad \text{así:} \quad b(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Por lo tanto:

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}. \quad \blacksquare$$

A continuación se muestra la gráfica de una simulación del puente browniano.

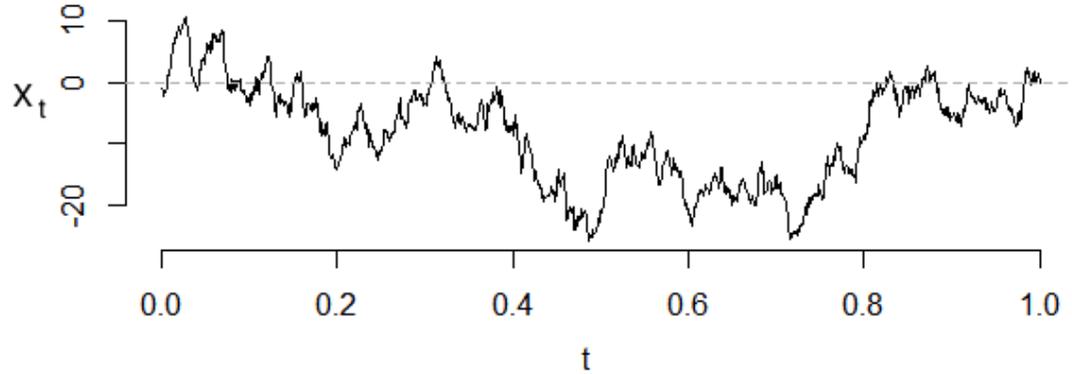


Figura 3.3: Simulación del puente browniano.

Ejemplo 3.1.5. Considere la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dB_t \text{ con } X_0 = 0.$$

Supongamos que $f(t, B_t) = X_t$, usando el método de identificación de coeficientes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{f}{1+t} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+t}.$$

Para el lado derecho

$$f = \frac{x}{1+t} + g(t).$$

Sustituyendo en el lado izquierdo:

$$-\frac{x}{(1+t)^2} + g'(t) = -\frac{f}{1+t},$$

$$-\frac{x}{(1+t)^2} + g'(t) = -\frac{\frac{x}{1+t} + g(t)}{1+t}.$$

Despejando el valor de $g'(t)$:

$$g'(t) = -\frac{g(t)}{1+t}.$$

Integrando:

$$g(t) = \frac{1}{(1+t)}.$$

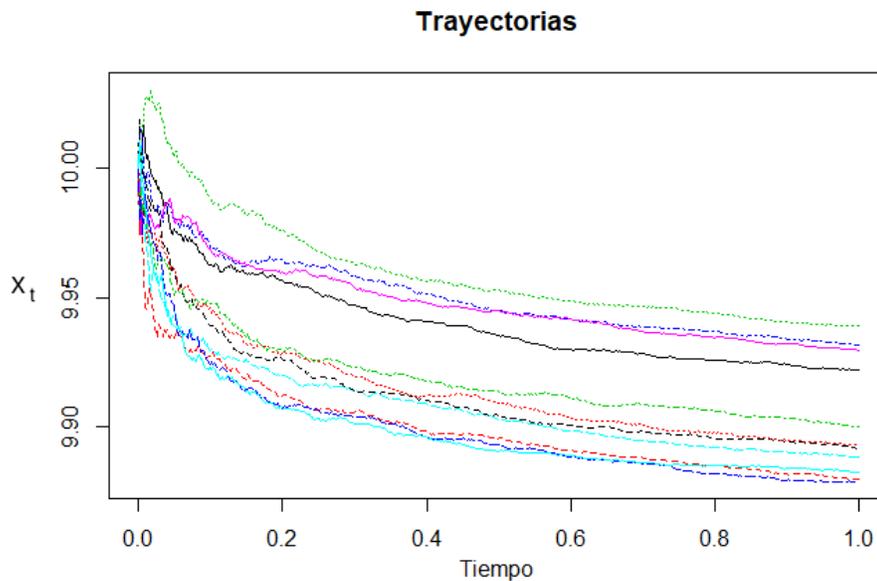
Por lo tanto f es:

$$f = \frac{x}{1+t} + \frac{1}{1+t} = \frac{1+x}{1+t}.$$

Y la solución final tiene la siguiente forma:

$$X_t = \frac{1+Bt}{1+t}. \quad \blacksquare$$

La gráfica siguiente muestra algunas trayectorias de soluciones iniciando $X_0 = 10$.



Ejemplo 3.1.6. Considere la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t; \text{ con } X_0 = x_0.$$

Supongamos que $f(t, B_t) = X_t$. Usando el método de identificación de coeficientes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -f \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-t}.$$

Para el lado derecho se tiene que:

$$f = xe^{-t} + g(t).$$

Sustituyendo en el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} -xe^{-t} + g'(t) &= -f \\ &= -xe^{-t} - g(t). \end{aligned}$$

Despejando $g'(t)$:

$$g'(t) = -g(t).$$

Integrando:

$$g(t) = e^{-t} c_1.$$

Por lo tanto f toma la forma de:

$$f = xe^{-t} + e^{-t} c_1 = e^{-t}(x + c_1).$$

Por la condición inicial:

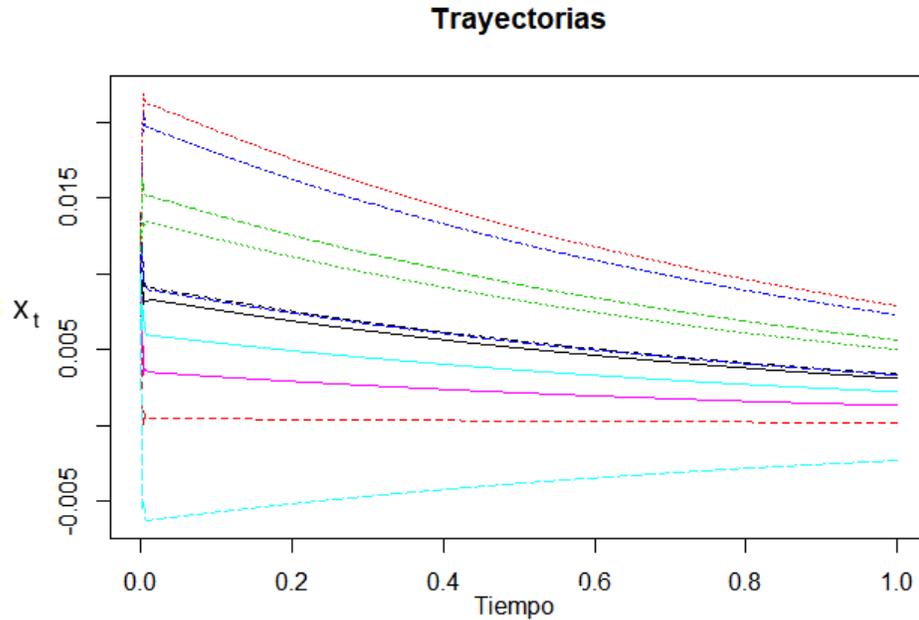
$$X_0 = f(0, B_0) = c_1 = x_0.$$

Entonces:

$$X_t = e^{-t}(B_t + x_0). \quad \blacksquare$$

La gráfica siguiente muestra algunas trayectorias de soluciones iniciando $X_0 = \frac{1}{100}$.

Dados los últimos ejemplos, la pregunta que surge es: ¿qué pasa si nuestro intento por resolver el sistema de ecuaciones (3.1), (3.2) fracasa? Es aquí donde tenemos que buscar métodos de aproximación de soluciones adecuados.



3.2. Método de diferencias finitas

Explicaremos primero cual es el método de diferencias finitas para EDO o también conocido como el método de Euler. En la industria y en la ciencia, las ecuaciones diferenciales ordinarias, muchas veces son resueltas de forma numérica; pues algunos problemas del mundo real son muy complicados de resolver de manera analítica. La idea básica del método es la siguiente: Suponga que queremos resolver el siguiente problema en el intervalo $0 \leq t \leq T$:

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u_0. \quad (3.3)$$

Más que buscar una solución continua definida en cada instante t , desarrollaremos una estrategia para discretizar el problema, así determinar una aproximación discreta en tiempos discretos del intervalo de interés. Por lo tanto reemplazaremos el modelo (3.3) con una aproximación discreta a la cual es posible calcular una solución.

Para esto dividiremos el intervalo $0 \leq t \leq T$ en N segmentos con magnitud constante h . Este salto es $h = T/N$. Esto define una sucesión de tiempos $0 = t_0, t_1, \dots, t_N = T$, donde $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$. Suponga que conocemos la solución $u(t_n)$ del problema inicial al tiempo t_n ; ¿cómo estimaremos la solución al tiempo t_{n+1} ? Integrando la ecuación (3.3) de t_n a t_{n+1} y usando el teorema fundamental del cálculo:

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u) dt. \quad (3.4)$$

La última integral puede ser aproximada usando la siguiente regla:

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) \approx hf(t_n, u(t_n)). \quad (3.5)$$

Si denotamos por u_n a la aproximación de la solución $u(t_n)$ en $t = t_n$, entonces la última fórmula sugiere la recursión siguiente:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hf(t_n, u_n) \quad \text{ó} \quad u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n). \quad (3.6)$$

Si $u(0) = u_0$ entonces la ecuación (3.6) es un algoritmo para calcular las aproximaciones u_1, u_2, \dots , etc. de manera recursiva en los tiempos t_1, t_2, \dots . La aproximación discreta que consiste de los valores u_0, u_1, u_2, \dots , es llamada la solución numérica para el problema de condición inicial.

Ahora aplicaremos el método de Euler de EDO a EDE, así como una modificación llamada Método de Milstein. Este último consta de añadir una refinación en la expansión de Taylor. Existe una teoría muy vasta en este tipo de técnicas, reunidas en la teoría de Runge-Kutta la cual se puede consultar en [24].

3.2.1. Método de Euler

Consideremos ahora un proceso de Itô $\{X_t; t_0 \leq t \leq T\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dB_t;$$

en $t_0 \leq t \leq T$, con la condición inicial $X_{t_0} = X_0$.

Sea $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ una distretización del intervalo $[t_0, T]$. Una

aproximación a la solución es un proceso estocástico continuo $Y_t = \{Y_t; t_0 \leq t \leq T\}$, que satisface la regla iterativa:

$$y_{n+1} = y_n + f(\tau_n, y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + g(\tau_n, y_n)(B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}). \quad (3.7)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ con la condición inicial $Y_0 = X_0$ y donde $y_n = Y(\tau_n)$.

Escribiremos como: $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$, al n -ésimo incremento de tiempo, y llamaremos: $\delta = \max_n \Delta_n$ al máximo salto. También tomaremos la mayor parte de las veces la discretización homogénea $\tau_n = t_0 + n\delta$, con $\delta = \Delta_n = \Delta = \frac{T-t_0}{N}$ para algún entero N tal que $\delta \in (0, 1)$. Si el término g de la EDE es cero, entonces la ecuación diferencial estocástica se vuelve una EDO.

La sucesión $\{y_n, n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ de valores de la aproximación de Euler (3.7) en la discretización $\{\tau_n, n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ puede ser calculada de manera similar al caso determinístico. La principal diferencia es que ahora necesitamos generar incrementos aleatorios:

$$\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n},$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ del movimiento Browniano $\{B_t, t \geq 0\}$. Sabemos que los incrementos son variables aleatorias normales e independientes, con esperanza $\mathbb{E}(\Delta B_t) = 0$ y varianza $\mathbb{E}((\Delta B_t)^2) = \Delta_n$. Usaremos una sucesión de números aleatorios normales, creados por un generador aleatorio.

Para simplificar la notación escribiremos como: $F = F(\tau_n, y_n)$ a cada función F definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Así la aproximación (3.7) tomará la forma:

$$y_{n+1} = y_n + f\Delta_n + g\Delta B_n \quad (3.8)$$

Ejemplo 3.2.1. *Para ilustrar dicho método usemos un ejemplo del cual ya tengamos la solución explícita para poder comparar.*

Considera la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

$$\text{con } X_0 = x_0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \quad t \in [0, T].$$

Esta EDE ya fue estudiada en el ejemplo 3.1.1 que corresponde al modelo Black-Scholes-Merton, cuya solución es:

$$X_t = x_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Ahora usaremos el método de Euler y veremos si las soluciones coinciden. Dada la fórmula recursiva:

$$y_{n+1} = y_n + f\Delta_n + g\Delta B_n.$$

Usando la discretización homogénea $0 = t_0 = \tau_0, t_1 = \tau_1, \dots, t_n = \tau_n = T$, donde $\Delta_n = \frac{T}{N} = \tau_n$ y $\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}$, $Y_0 = X_0$.

Para:

$$f = \mu X_t, \quad g = \sigma X_t.$$

De manera recursiva obtenemos que:

$$y_1 = y_0 + \mu y_0 \Delta_0 + \sigma y_0 \Delta B_0 = y_0(1 + \mu \Delta_0 + \sigma \Delta B_0)$$

$$y_2 = y_1(1 + \mu \Delta_0 + \sigma \Delta B_0)$$

Si $\Delta_i = \tau_n$; de forma general para cualquier n :

$$y_{n+1} = y_0 \prod_{i=0}^n (1 + \mu \tau_n + \sigma \Delta B_i).$$

Ahora mostraremos que la fórmula anterior converge a la solución dada en el ejemplo 3.1.1.

Demostración:

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= x_0 e^{\sigma \sum_{i=0}^n \Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \sum_{i=0}^n \Delta_i} \\ &= x_0 \prod_{i=0}^n e^{\sigma \Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta_i}. \end{aligned}$$

Usando la expresión en serie de potencias de la función exponencial:

$$\begin{aligned} x_0 \prod_{i=0}^n [e^{\sigma \Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta_i}] &= x_0 \prod_{i=0}^n \left[1 + \sigma \Delta B_i + \mu \Delta_i - \frac{\sigma^2}{2} \Delta_i \right. \\ &\quad + \left(\frac{\sigma \Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta_i}{2!} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sigma \Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \Delta_i}{3!} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Al ser los términos:

$$-\frac{\sigma^2}{2}\Delta_i + \left(\frac{\sigma\Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_i}{2!}\right)^2 + \left(\frac{\sigma\Delta B_i + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_i}{3!}\right)^3 + \dots$$

de orden muy pequeño y además $\Delta_i = \tau_n$:

$$x_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} = x_0 \prod_{i=0}^n [1 + \mu\tau_n + \sigma\Delta B_i].$$

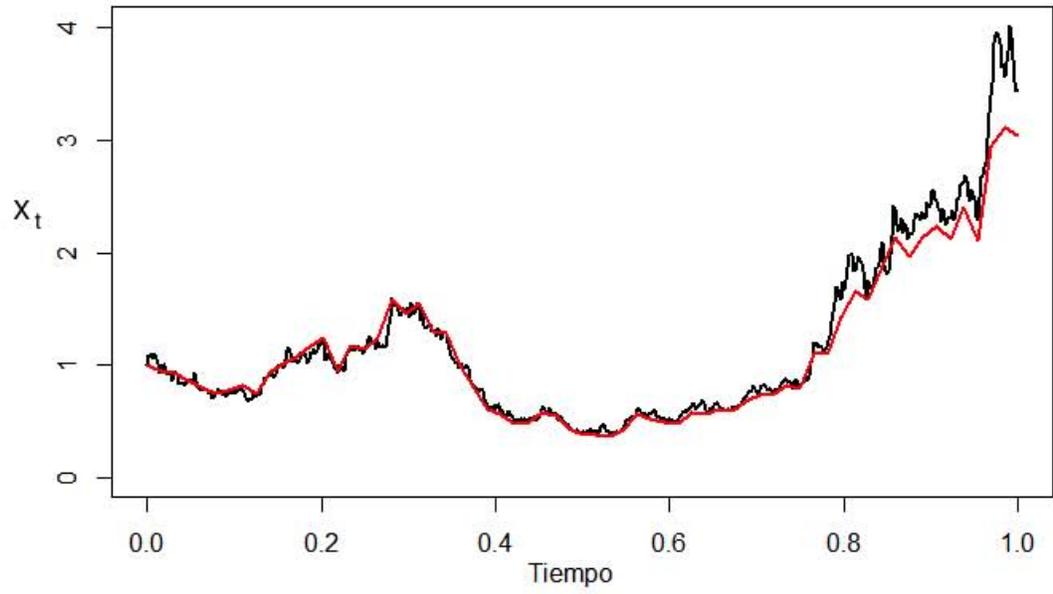
Lo que concluye la demostración. ■

Ahora generemos aproximaciones equidistantes en el intervalo de tiempo $[0, 1]$, de tamaño $dt = 2^{-9}$ para el proceso de Itô:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

donde $X_0 = 1$, $\mu = 1.5$, $\sigma = 1$. Grafiquemos la aproximación lineal y la solución exacta para alguna trayectoria del movimiento Browniano.

La gráfica siguiente muestra la solución real en color negro y en rojo la aproximación usando el método de Euler, auxiliados del programa R.

Solución real y aproximación

Programa¹ en R:

```

# Parámetros
mu = 1.5
sigma = 1
Xcero = 1
dt = 2^(-9)
T = 1
n = T/dt
t = seq(0, T, by = dt)
# Solución explícita: browniano geométrico
dB = sqrt(dt) * rnorm(n)
B = c(0, cumsum(dB))
Bgeom = Xcero * exp((mu - sigma^2/2) * t + sigma * B)
plot(Bgeom)
# Euler
R = 8
Dt = R * dt
tR = seq(0, 1, by = Dt)
k = T/Dt
EM = numeric(k + 1)
EM[1] = Xcero
for (i in 2:{
k + 1
}) {
dBEM = sum(dB[{
(i - 2) * R + 1
}]{
(i - 1) * R
}))
EM[i] = EM[i - 1] + mu * EM[i - 1] * Dt + sigma * EM[i - 1] * dBEM }
# Representación gráfica -----
maxy <- max(c(Bgeom, EM))
plot(t, Bgeom, t = "l", ylim = c(0, maxy), xlab = , ylab = ,
lwd = 2)
lines(tR, EM, col = "red", lwd = 2)

```

¹Este programa fue extraído de [5].

3.2.2. Método de Milstein

Ahora mostraremos el método propuesto por Milstein. Este consta de usar una modificación de la fórmula usada en el método de Euler. Dicha modificación es añadir un término más de la expansión de Taylor. Sea la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dB_t.$$

Entonces la fórmula recursiva del método de Milstein es:

$$y_{n+1} = y_n + f\Delta_n + g\Delta B_n + \frac{1}{2}gg'\{(\Delta B_n)^2 - \Delta_n\}. \quad (3.9)$$

Donde $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$ y $g' = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Una forma intuitiva de mostrar que este método es más exacto que el de Euler, es usando el movimiento Browniano geométrico. Si tenemos la EDE:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Usando el Lema de Itô para la función $f(X) = \log(X)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} d\log(X_t) &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)X_t^2\sigma^2 dt \\ &= \frac{1}{X_t}(dX_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \frac{1}{X_t}(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Integrando la igualdad anterior:

$$\log(X_t) - \log(X_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t.$$

Agrupando y aplicando la función exponencial:

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right).$$

Usando una aproximación cómo en el método de Euler, pero en un intervalo de tamaño $t + \Delta t$:

$$X_{t+\Delta t} = X_t e^{\int_t^{t+\Delta t} \sigma dB_s + \int_t^{t+\Delta t} (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt}.$$

Usando la fórmula de Taylor para la función exponencial:

$$\begin{aligned} X_{t+\Delta t} &\approx X_t \left(1 + \mu\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma\Delta B_t + \frac{1}{2}\sigma^2(\Delta B_t)^2 \right) \\ &= X_t + f(X_t)\Delta t - \frac{1}{2}X_t\sigma^2\Delta t + g(X_t)\Delta B_t + \frac{1}{2}X_t\sigma^2(\Delta B_t)^2 \\ &= X_t + f(X_t)\Delta t + g(X_t)\Delta B_t + \frac{1}{2}g(X_t)g'(X_t)((\Delta B_t)^2 - \Delta t). \end{aligned}$$

Lo que corresponde con la expresión recursiva del método de Milstein. El añadir el último término de la serie de Taylor genera una mejor aproximación en comparación con el método de Euler.

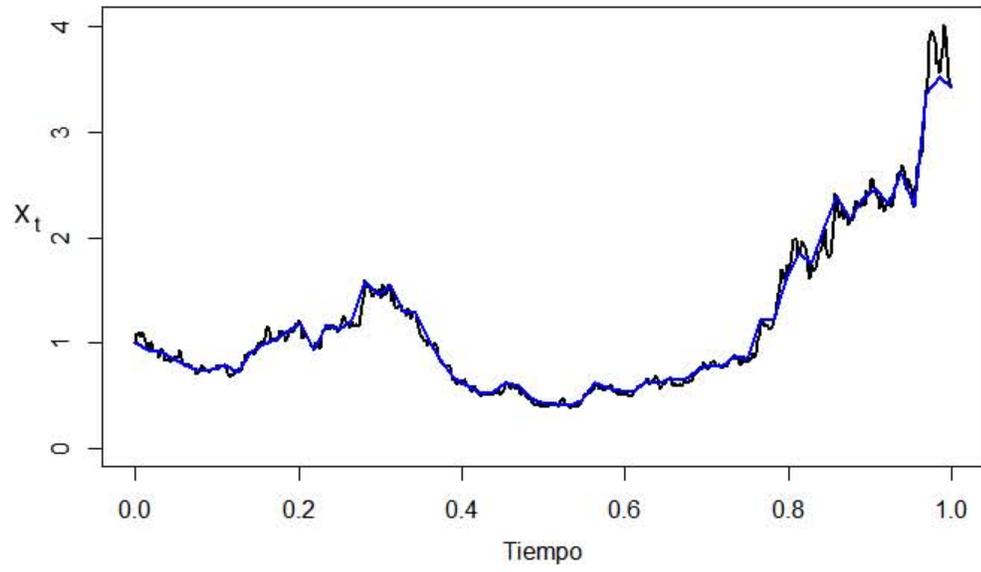
Ejemplo 3.2.2. *Generemos aproximaciones equidistantes en el intervalo de tiempo $[0, 1]$, de tamaño $dt = 2^{-9}$ para el proceso de Itô:*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

donde $X_0 = 1$, $\mu = 1.5$, $\sigma = 1$. Grafiquemos la aproximación lineal y la solución exacta para alguna trayectoria del movimiento Browniano.

Solución:

La gráfica siguiente muestra la solución real en color negro y en azul la aproximación usando el método de Milstein, auxiliados del programa R. Y para este ejemplo tomamos la función $gg' = \frac{1}{2}\sigma^2 X_t$.

Solución real y aproximación

Programa² en R:

```

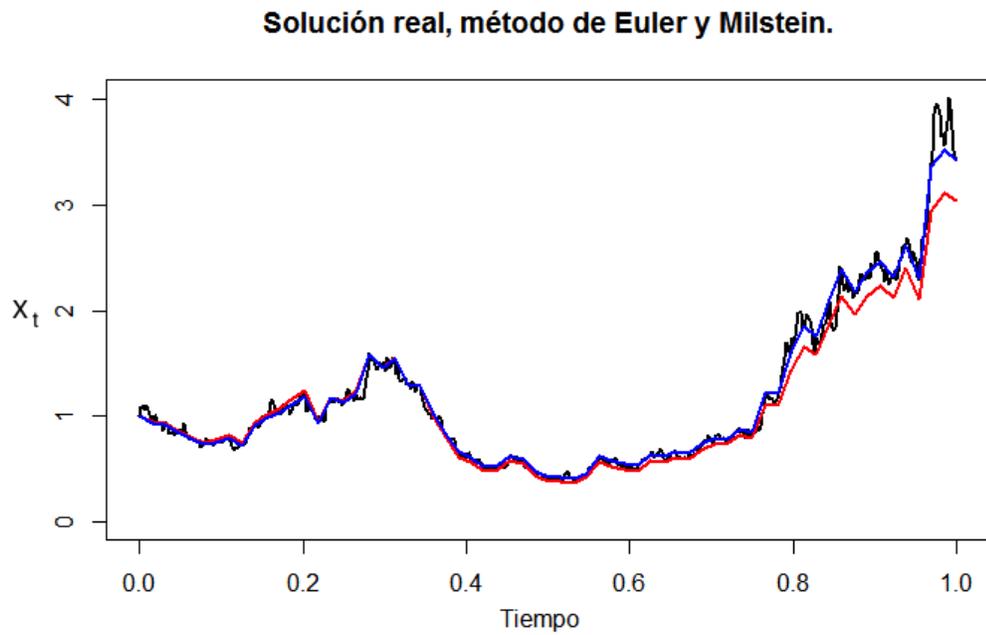
# Parámetros
mu = 1.5
sigma = 1
Xcero = 1
dt = 2^(-9)
T = 1
n = T/dt
t = seq(0, T, by = dt)
# Solución explícita: browniano geométrico
dB = sqrt(dt) * rnorm(n)
B = c(0, cumsum(dB))
Bgeom = Xcero * exp((mu - sigma^2/2) * t + sigma * B)
plot(Bgeom)

# Milstein
M = numeric(k + 1)
M[1] = Xcero
for (i in 2:{
k + 1
}) {
dBEM = sum(dB[{
(i - 2) * R + 1
}]{
(i - 1) * R
})
M[i] = M[i - 1] + mu * M[i - 1] * Dt + sigma * M[i - 1] * dBEM + 0.5 *
sigma^2 *
M[i - 1] * (dBEM^2 - Dt)}
# Representación gráfica de ambos métodos---
maxy <- max(c(Bgeom, EM, M))
plot(t, Bgeom, t = "l", ylim = c(0, maxy), xlab = , ylab = ,
lwd = 2, main="Solución real, método de Euler y Milstein.")
lines(tR, EM, col = "red", lwd = 2)
lines(tR, M, t = "l", col = "blue", lwd = 2)

```

²Este programa fue extraído de [5].

Por último, comparemos los métodos de Euler y Milstein. La gráfica siguiente muestra la solución real en color negro, en rojo la aproximación usando el método de Euler y en azul la aproximación usando el método de Milstein.



Se puede observar que la aproximación usando el método de Milstein está más cerca de la solución real, por lo tanto es una mejor aproximación.

Capítulo 4

Aplicaciones de EDE

Este capítulo comprenderá un conjunto de aplicaciones relacionadas a diversas ramas de la ciencia. Las principales referencias serán [11], [15], [16], [17] y [18].

4.1. Matemáticas financieras: Modelo de Black-Scholes

El uso de teoría de probabilidad para valuar instrumentos financieros basados en la aleatoriedad, es una de las principales aplicaciones del cálculo estocástico. Lo siguiente será desarrollar la teoría para poder encontrar el valor de una opción de compra o venta europea¹.

Una opción de compra (venta) es el derecho más no la obligación de comprar (vender) una unidad de activo subyacente a un determinado precio K a un tiempo pactado T , donde el costo del subyacente S_T es estocástico (ver figura 4.1). Por lo tanto el valor del derivado financiero X_T también es estocástico. La opción de compra (venta) también es llamada call (put). Ahora se darán algunas definiciones necesarias para la comprensión de la teoría.

Un portafolio es un par de procesos $\{\alpha_t\}$ y $\{b_t\}$ los cuales describen de manera respectiva, el número de unidades de activo con precio S_t y de bono

¹Existen dos tipos de opciones: europeas y americanas. Las europeas se ejercen en un tiempo pactado T , mientras que las americanas se pueden ejercer en cualquier momento del intervalo de tiempo $(0, T)$.

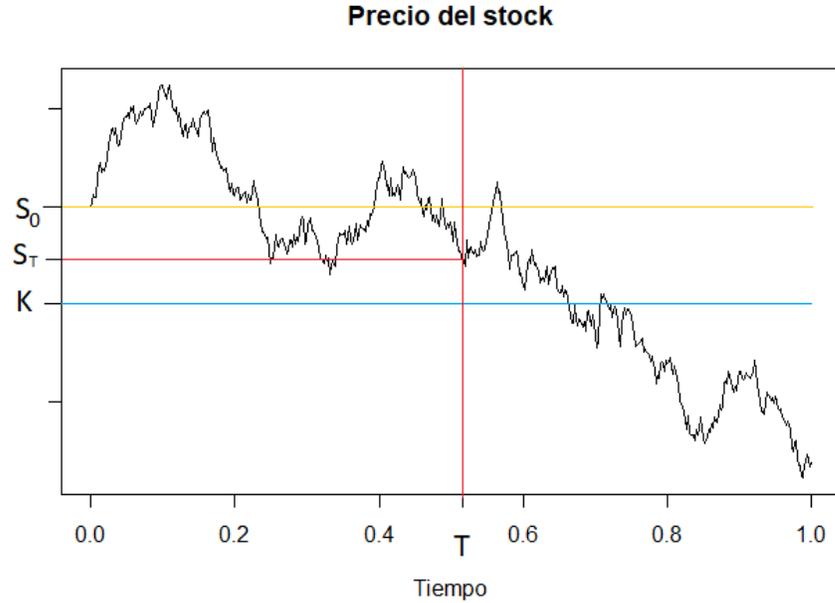


Figura 4.1: Gráfica de una opción.

con precio D_t , que debemos mantener al tiempo t ; ambos pueden tomar valores positivos y negativos. El componente α_t debe ser \mathcal{F}_t -previsible; es decir, que solo dependa de la información hasta el tiempo t , pero sin incluir t . El valor V_t de un portafolio (α_t, b_t) al tiempo t está dado por:

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t D_t.$$

Si (α_t, b_t) es un portafolio con precio del stock S_t y precio del bono D_t , entonces: (α_t, b_t) es auto-financiado $\iff dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dD_t$. Esta definición nos dice que el cambio del valor de portafolio a cualquier momento t , sólo se debe a cambios en el subyacente y no a la constitución del mismo.

Supongamos un mercado que consta de un bono sin riesgo D y un activo riesgoso S con volatilidad σ_t y un contingente dado por X (payoff) en eventos hasta el tiempo T . Una estrategia de replicado para X es un portafolio auto-financiado (α_t, b_t) tal que: $\int_0^T \sigma_t^2 \alpha_t^2 dt < \infty$ y $V_T = \alpha_T S_T + b_T D_T = X$.

4.1. MATEMÁTICAS FINANCIERAS: MODELO DE BLACK-SCHOLES 59

Es importante crear una estrategia de replicado pues al ser X el valor de un derivado, es necesario saber cuanto hay que pagar por él al tiempo T . Por lo tanto, queremos saber cuanto vale hoy, dado un modelo estocástico para los distintos valores de S y D .

Para el modelo de Black-Scholes propondremos la existencia de r, μ y σ determinísticas tales que el precio del bono y del stock son:

$$\begin{aligned}D_t &= \exp(rt), \\S_t &= S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t),\end{aligned}$$

donde r es la tasa de interés sin riesgo, σ es la volatilidad del stock, μ es la deriva del stock y S_0 es el precio del stock en el tiempo 0.

Llamemos D_T^{-1} al proceso de descuento del crecimiento del dinero en el bono, formemos un stock descontado $Z_t = D_t^{-1}S_t$ y un payoff descontado $D_t^{-1}X$, es decir:

$$Z_t = D_T^{-1}S_t = D_T^{-1}S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t) = S_0 \exp((\mu - r)t + \sigma B_t).$$

Por lo tanto:

$$Z_t = S_0 \exp((\mu - r)t + \sigma B_t).$$

Si hacemos que $Y_t = \log(Z_t/S_0)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}Y_t &= (\mu - r)t + \sigma B_t, \\dY_t &= (\mu - r)dt + \sigma dB_t.\end{aligned}$$

Para dar solución a esta ecuación usaremos un caso particular lema de Itô que dice:

Lema 4.1.1. *Si X es un proceso estocástico que satisface $dX_t = \mu_t dt + \sigma dB_t$ y f es una función C^2 entonces $Y_t = f(X_t)$ es un proceso estocástico que satisface:*

$$dY_t = (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 f''(X_t))dt + (\sigma_t f'(X_t))dB_t.$$

Tomando $Z_t = \exp(Y_t)$ la EDE que satisface Z_t es:

$$dZ_t = Z_t \left((\mu - t + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t \right).$$

Utilizaremos ahora el teorema de Cameron-Martin-Girsanov (cuya demostración se puede encontrar en [18]) que dice:

Teorema 4.1.1. *Si B_t es un P -movimiento Browniano y γ_t es un proceso \mathcal{F} -previsible que satisface:*

$$\mathbb{E}_P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty,$$

entonces existe una medida Q tal que:

1. Q es equivalente a P ; i.e.: $P > 0 \iff Q > 0$.
2. $\frac{dQ}{dP} = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right)$.
3. $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^T \gamma_s ds$ es un Q -movimiento Browniano.

En otras palabras, B_t es un Q -movimiento Browniano con deriva $-\gamma_t$ al tiempo t .

Por lo tanto existe una medida Q equivalente a la medida original P y un Q -movimiento Browniano \tilde{B}_t tal que:

$$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{B}_t.$$

Por lo tanto Z_t una martingala bajo Q . O en otras palabras, transformamos el proceso original en uno sin deriva bajo la nueva medida Q .

Ahora necesitamos un proceso que al tiempo T coincida con el payoff descontado y también que sea una Q -martingala. La forma de obtenerlo es la siguiente:

$$N_t = \mathbb{E}_Q(D_T^{-1} X | \mathcal{F}_t).$$

El teorema de la representación martingala nos será de gran utilidad (cuya demostración se encuentra en [18]):

Teorema 4.1.2. *Supongamos que M_t es una Q -martingala cuya volatilidad σ_t satisface la condición de ser diferente de cero (c.s). Entonces si N_t es cualquier otra Q -martingala, existe un proceso \mathcal{F} -previsible α tal que:*

$$\int_0^T \alpha_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty \text{ c.s.}$$

y N puede ser escrita como:

$$N_t = N_0 + \int_0^t \alpha_s dM_s.$$

Y además, α es único.

Este último brinda un proceso previsible α tal que:

$$dN_t = \alpha_t dZ_t.$$

Al tiempo T el valor de nuestro portafolio es:

$$\alpha_T S_T + b_T D_T = \alpha_T S_T + (N_T - \alpha_T Z_T) D_T,$$

pues aplicando el descuento D_t^{-1} , $N_t = b_t + \alpha_t Z_t$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_T S_T + (N_T - \alpha_T Z_T) D_T &= \alpha_T S_T + (D_t^{-1} X - \alpha_T B_t^{-1} S_T - \alpha_T Z_T) D_T \\ &= X. \end{aligned}$$

Por lo tanto la estrategia de replicado es mantener α_t unidades de stock al tiempo t y mantener $b_t = N_t - \alpha_t Z_t$ unidades en el bono.

Así el valor V_t del portafolio está dado por:

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t D_t = D_t N_t.$$

Proposición 4.1.1. *Regla del producto:*

Consideremos X_t y Y_t dos procesos estocásticos que satisfacen:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu_t dt + \sigma_t b B_t. \\ dY_t &= \gamma_t dt + \rho_t b B_t. \end{aligned}$$

Entonces:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t.$$

Ahora usando la regla del producto obtenemos que:

$$\begin{aligned} dV_t &= D_t dN_t + N_t dD_t \\ &= \alpha D_t dZ_t + (b_t + \alpha_t Z_t) dD_t \\ &= \alpha (D_t dZ_t + Z_t dD_t) + b_t dD_t \\ &= \alpha d(D_t Z_t) + b_t dD_t \\ &= \alpha dS_t + b_t dD_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto es auto-financiado. Después de lo anterior se puede concluir que todos los reclamos X , conocidos hasta el tiempo T , tienen estrategias de replicado y el precio del contingente X al tiempo $t < T$ está dado por:

$$V_t = D_t \mathbb{E}_Q(D_T^{-1} X | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(X | \mathcal{F}_t),$$

donde Q es la medida martingala para el stock con descuento $D_t^{-1} S_t$.

El payoff de una opción call está dado por:

$$\max \{S_T - K\} = (S_T - K)_+.$$

Ahora queremos encontrar V_0 , el valor de la estrategia de replicado, es decir, el precio de la opción al tiempo cero. Sabemos que este valor está dado por:

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_Q[(S_T - K)_+].$$

Dicho valor sólo depende del valor del Stock al tiempo T , entonces necesitamos encontrar la distribución marginal de S_T bajo Q . Dado que Q es la medida bajo la cual:

$$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{B}_t,$$

con \tilde{B}_t Q -movimiento Browniano, usando la regla del producto y la definición

4.1. MATEMÁTICAS FINANCIERAS: MODELO DE BLACK-SCHOLES63

de $D_t^{-1} = e^{-rt}$:

$$\begin{aligned}
 d(D_t^{-1}S_t) &= \sigma D_t^{-1}S_t d\tilde{B}_t \\
 &= dD_t^{-1}S_t + D_t^{-1}dS_t \\
 &= \sigma D_t^{-1}S_t d\tilde{B}_t \\
 &= de^{-rt}S_t + e^{-rt}dS_t \\
 &= \sigma e^{-rt}S_t d\tilde{B}_t \\
 &= (-r)e^{-rt}S_t + e^{-rt}S_t dt \\
 &= \sigma e^{-rt}S_t d\tilde{B}_t, \\
 &= dS_t - rS_t dt \\
 &= \sigma S_t d\tilde{B}_t.
 \end{aligned}$$

lo cual arroja la siguiente EDE:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t.$$

Esta EDE tiene solución:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\tilde{B}_t\right).$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$S_T = S_0 e^X \text{ donde } X \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right).$$

Para poder hallar las fórmulas de Black-Scholes para call y put europeas necesitaremos auxiliarnos en el siguiente lema cuya demostración se encuentra en [18]:

Lema 4.1.2. *Suponga que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces para a, b cualesquiera números reales:*

$$\mathbb{E}[e^{aX} | X \geq b] = e^{a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2\Phi(d)},$$

$$\text{donde } d = \frac{-b + \mu + a\sigma^2}{\sigma} \text{ y } \Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ahora usaremos el lema 4.1.2 para una call europea:

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q(X(S_T) | \mathcal{F}_0) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q((S_T - K)_+ | \mathcal{F}_0) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q((S_0 e^Y - K)_+ | \mathcal{F}_0); \end{aligned}$$

donde $Y \sim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$. Entonces:

$$V_0 = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^y - K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi T \sigma^2}} e^{-\frac{(y - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}} dy$$

como $S_0 e^y - K > 0 \iff y > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$

$$\begin{aligned} &= e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} (S_0 e^y - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi T \sigma^2}} e^{-\frac{(y - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}} dy \\ &= S_0 e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi T \sigma^2}} e^{-\frac{(y - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}} - \\ &K e^{-rT} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T \sigma^2}} e^{-\frac{(y - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2}{2\sigma^2 T}} dy. \end{aligned}$$

Usando el lema 4.1.2:

$$\begin{aligned} V_0 &= S_0 e^{-rT} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T} \Phi\left(\frac{-\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{-\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto si definimos a $c_t[S_t, T, K]$ como el precio de una opción call al tiempo t :

$$c_0[S_0, T, K] = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2),$$

en donde $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

4.1. MATEMÁTICAS FINANCIERAS: MODELO DE BLACK-SCHOLES65

Definamos a $p_t[S_t, T, K]$ como el precio de una opción put al tiempo t . Para hallar el precio de dicha opción usaremos la fórmula siguiente que es llamada paridad put-call:

$$p_0[S_0, T, K] := c_0[S_0, T, K] + Ke^{-rT} - S_0;$$

entonces:

$$\begin{aligned} p_0[S_0, T, K] &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) + Ke^{-rT} - S_0 \\ &= S_0(\Phi(d_1) - 1) + Ke^{-rT}(1 - \Phi(d_2)) \\ &= S_0\Phi(-d_1) - Ke^{-rT}\Phi(-d_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$p_0[S_0, T, K] = S_0\Phi(-d_1) - Ke^{-rT}\Phi(-d_2).$$

Una pregunta que surge al obtener las fórmulas put y call es cuánto stock será requerido en cualquier punto del tiempo para construir el derivado de manera artificial. Para esto observamos que si:

$$\Delta = \frac{\partial(\text{valor de la opción})}{\partial(\text{valor del stock})},$$

donde delta refleja el cambio del precio de la opción causado por el cambio del valor del stock y si suponemos que el derivado X es una función del valor terminal del precio del stock, entonces $X = f(S_T)$ para alguna función $f(s)$ y se tiene:

Teorema 4.1.3. *Si el derivado X es igual a $f(S_T)$, para alguna $f(s)$ entonces el valor del derivado al tiempo t es igual a $V_t = V(S_t, t)$ y está dada por la fórmula:*

$$V(s, t) = \exp(-r(T - t))\mathbb{E}_Q(f(S_T)|S_t = s),$$

y entonces la estrategia de cobertura está dada por: $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, t)$.

Demostración. Para mostrar que la estrategia de cobertura está dada por $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, t)$, debemos recordar que:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t. \quad (4.1)$$

Y además el valor del derivado está dado por:

$$V(s, t) = \exp(-r(T - t))\mathbb{E}_Q(f(S_T)|S_t = s). \quad (4.2)$$

Ahora, utilizando la generalización de la fórmula de Itô 2.3.1 obtenemos:

$$dV_t = d(V(S_t, t)) = \left(rS_t \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial s}\right)d\tilde{B}_t. \quad (4.3)$$

De la condición de auto-financiamiento:

$$dV_t = \alpha_t dS_t + b_t dD_t. \quad (4.4)$$

Sabemos que $dD_t = rD_t dt$, entonces:

$$\begin{aligned} dV_t &= \alpha_t(rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t) + b_t r D_t dt, \\ &= (\alpha_t r S_t \alpha_t + b_t r D_t)dt + \sigma \alpha_t S_t d\tilde{B}_t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Usando el método de identificación de coeficientes de las ecuaciones (4.3) y (4.5) notamos que $\alpha_t = \frac{\partial V}{\partial s}$ y en nuestra nueva notación:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial s};$$

lo que indica que el monto de stock en el portafolio de replicado en cualquier momento es la derivada del precio de la opción con respecto del precio del stock.

Ahora si usamos que $\alpha_t = \frac{\partial V}{\partial s}$, $V_t = \alpha_t S_t + b_t D_t$ e igualamos los términos de deriva de (4.3) y (4.5):

$$\begin{aligned} \alpha_t r S_t \alpha_t + b_t r D_t &= r S_t \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ r V_t &= r S_t \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}$$

Reordenando los términos obtenemos la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$rs \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0. \quad (4.6)$$

4.1. MATEMÁTICAS FINANCIERAS: MODELO DE BLACK-SCHOLES67

Ejemplo 4.1.1. *Calculemos el precio de una opción de compra cuyo precio de ejercicio es $K = \$60$, $S_0 = \$62$, vence en 40 días, $\sigma = 0.32$ y $r = 0.04$. Usando la fórmula de B-S obtenemos el siguiente cálculo:*

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{62}{60}\right) + (0.04 + (0.5)0.32^2)\frac{40}{365}}{(0.32)\sqrt{\frac{40}{365}}} = 0.4038791.$$

$$d_2 = d_1 - (0.32)\sqrt{\frac{40}{365}} = 0.2979455.$$

Por lo tanto:

$$\Phi(0.4038791) = 0.6554.$$

$$\Phi(0.2979455) = 0.6179.$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\begin{aligned} c_0[S_0, T, K] &= S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\ &= (62)(0.6554) - (60)e^{-(0.04)\frac{40}{365}}(0.6179) \\ &= \$3.72296. \end{aligned}$$

Así el precio de una opción de compra con los datos ya mencionados es de \$3.72296.

4.2. Redes neuronales estocásticas

El interés actual en las redes neuronales se basa en la riqueza teórica y la dinámica del modelo; pero la mayor parte recae en el deseo de usarlo como herramienta para el desarrollo de redes artificiales. En el desarrollo computacional existen muchas perturbaciones estocásticas que afectan las redes y es importante conocer cómo estas perturbaciones afectan la estabilidad de los sistemas.

La red neuronal propuesta por Hopfield puede ser descrita por la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$C_i \dot{u}_i(t) = -\frac{1}{R_i} u_i(t) + \sum_{j=1}^d T_{ij} g_j(u_j(t)), \quad 1 \leq i \leq d, t \geq 0, \quad (4.7)$$

donde la variable $u_i(t)$ representa el voltaje de la salida de la i -ésima neurona. Cada neurona está caracterizada por una entrada de capacitancia² C_i y una función de transferencia $g_i(u)$.

El elemento T_{ij} de la matriz toma el valor $+\frac{1}{R_{ij}}$ o $-\frac{1}{R_{ij}}$; dependiendo de la inversión de la salida de la j -ésima neurona que está conectada con la entrada de la i -ésima neurona a través de la resistencia R_{ij} .

La resistencia paralela en la entrada de la i -ésima neurona es:

$$R_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^d |T_{ij}|}.$$

La función de transferencia no lineal $g_i(u)$ es sigmoideal (véase Figura 4.2), acotada entre $+1$ y -1 , no decreciente, con pendiente máxima en $u = 0$, Lipschitz continua con las propiedades siguientes:

$$u g_i(u) \geq 0 \text{ y } |g_i(u)| \leq 1 \wedge \beta_i |u|, \text{ en } -\infty < u < \infty;$$

donde β_i es la pendiente de $g_i(u)$ en $u = 0$, también se supone positiva y finita.

²La capacitancia entre dos conductores que tienen cargas de igual magnitud y de signo contrario es la razón de la magnitud de la carga en uno u otro conductor con la diferencia de potencial resultante entre ambos conductores.

$$C = \frac{Q}{V},$$

C=Capacitancia, Q=Carga eléctrica y V=Diferencia de potencial.

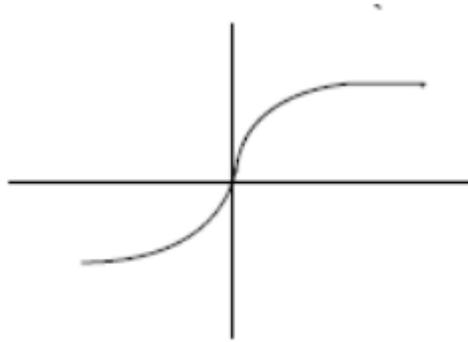


Figura 4.2: Forma de una función sigmoïdal.

Si definimos:

$$b_i = \frac{1}{C_i R_i} \text{ y } a_{ij} = \frac{T_{ij}}{C_i},$$

entonces la ecuación (4.7) puede ser reescrita como:

$$\dot{u}_i(t) = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^d a_{ij} g_j(u_j(t)), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.8)$$

o de forma equivalente:

$$\dot{u}(t) = -\bar{B}u(t) + Ag(u(t)), \quad (4.9)$$

donde:

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_d(t))^T, \quad \bar{B} = \text{diag}(b_1, \dots, b_d), \\ A = (a_{ij})_{d \times d}, \quad g(u) = (g_1(u_1), \dots, g_d(u_d))^T.$$

Es útil ver que:

$$b_i = \sum_{j=1}^d |a_{ij}|, \text{ para } 1 \leq i \leq d.$$

Supóngase que existe una perturbación estocástica en el sistema neuronal, esta es descrita por la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = [-\bar{B}X_t + Ag(X_t)]dt + \sigma(X_t)dB_t \quad t \geq 0. \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es una perturbación estocástica de la ecuación (4.9). En textos más especializados el interés recae en saber cómo la perturbación estocástica afecta la estabilidad de la ecuación (4.9). Es decir, si la ecuación (4.9) es estable, interesa saber si la ecuación (4.10) permanece estable o no. De forma recíproca, si la ecuación (4.9) es inestable, es de interés saber si la ecuación (4.10) es estable o inestable. Para un análisis más profundo se recomienda el libro [19], pues en este se abordan temas sobre la estabilidad o no-estabilidad exponencial, ejemplos especializados cuya teoría se desarrolla de manera completa pero de un nivel que no corresponde con el enfoque de este trabajo.

Ejemplo 4.2.1. *Supongamos un caso 2-dimensional donde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $g : (x, y) \rightarrow (x + y; x - y)$, $\sigma = \mathbb{I}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 = 2 \\ b_2 = 3 \end{pmatrix}$ entonces:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^1 + X_t^2 \\ X_t^1 - X_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 X_t^1 + 2X_t^2 + dB_t^1 \\ b_2 X_t^2 + X_t^1 - 3X_t^2 + dB_t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} dX_t^1 = 2X_t^1 + 2X_t^2 + dB_t^1 \\ dX_t^2 = X_t^1 + dB_t^2 \end{cases}$$

con condición inicial $(X_0^1, X_0^2) = (0, 0)$. Para este ejemplo se deberán usar técnicas que superan lo desarrollado en esta tesis, por lo tanto se omitirá la solución.

4.3. Filtro de Kalman-Bucy

Al proceso de estimar el estado de algún sistema con un ruido en las observaciones se le conoce como filtrado. El filtrado es un paso importante en el proceso de optimizar control estocástico, reconstruir señales de radio o el seguimiento de una nave, procesos químicos e ingeniería civil. Hay tres tipos de filtrado:

1. Predicción: El objetivo es obtener al tiempo k información acerca del vector de estado al tiempo $k + l$, para algún $l \geq 0$, usando mediciones hasta el tiempo k ; es claro que la predicción está relacionada con la estimación de la información.
2. Estimación: El objetivo es recavar información del vector de estado al tiempo k , usando mediciones hasta el tiempo k .
3. Suavizado: El objetivo es obtener información acerca del vector de estado al tiempo $k - l$ para algún $l > 0$, usando mediciones hasta el tiempo k ; el suavizado requiere algún retraso en la producción de la información acerca del vector de estado comparado con la estimación.

Suponga que el estado del proceso X_t es un proceso Gaussiano³ que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = AX_t dt + CdB_t, \quad (4.11)$$

donde A es una matriz de dimensión $(m \times m)$, C de dimensión $(m \times m)$, y B_t es un movimiento Browniano m -dimensional. Para asegurar que la solución de X_t es Gaussiana, el valor inicial X_0 debe ser una variable aleatoria normal. Suponga también que el proceso de observación Y_t es un proceso m -dimensional, que está relacionado con X_t a partir de la ecuación:

$$dY_t = HX_t dt + \Gamma dB_t^*, \quad (4.12)$$

con $Y_0 = 0$, donde H es una matriz $m \times m$ dimensional, Γ es una matriz de $m \times m$ y B_t^* es un movimiento Browniano m -dimensional. Para cada $t \geq 0$ sea \mathcal{A}_t la σ -álgebra generada por X_{t_0}, Y_s y B_s , para $0 \leq s \leq t$, y \mathcal{Y}_t la σ -álgebra generada por las observaciones Y_s , entonces $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{A}_t$.

Así el Filtro de Kalman-Bucy usa la esperanza condicional:

³Un proceso $\{X(t), t \in T\}$ es un proceso gaussiano o normal si para cualquier colección finita t_1, \dots, t_n en T , el vector $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ tiene una distribución normal.

$$\bar{X}_t = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{Y}_t).$$

Como estimación del estado X_t , es la mejor estimación de X_t con:

$$\mathbb{E}(|X_t - \bar{X}_t|^2) \leq \mathbb{E}(|X_t - \bar{Z}_t|^2),$$

para todo proceso Z_t m-dimensional \mathcal{Y}_t medible. Esta estimación \bar{X}_t es \mathcal{Y}_t medible, proceso Gaussiano y con la misma media y varianza que X_t .

De hecho la matriz de covarianza del error:

$$S(t) = \mathbb{E}((X_t - \bar{X}_t)(X_t - \bar{X}_t)^T),$$

satisface la ecuación matricial de Riccati:

$$\frac{dS}{dt} = AS + SA^T + BB^T - SH^T(\Gamma\Gamma^T)^{-1}HS,$$

con valor inicial $S(0) = \mathbb{E}(X_0X_0^T)$. Además la estimación \bar{X}_t satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$d\bar{X}_t = (A - SH^T(\Gamma\Gamma^T)^{-1}H)\bar{X}_tdt + SH^T(\Gamma\Gamma^T)^{-1}dY_t.$$

Los detalles de esta última construcción son técnicos y complejos, pero pueden ser consultados en [15] y [17].

Ejemplo 4.3.1. *Veamos que el filtro de Kalman-Bucy en el caso escalar con $X_t = X_0$ donde $\mathbb{E}(X_0) = 0$, $\mathbb{E}(X_0^2) = \sigma^2$ con:*

$$dX_t = 0 \quad dY_t = X_t dt + dB_t^*$$

y $Y_0 = 0$ arroja la estimación:

$$\bar{X}_t = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 t} Y_t.$$

Para ello, primero notamos que en este ejemplo, $A = B = 0$, $H, \Gamma = 1$. Entonces la ecuación matricial de Riccati toma la forma:

$$\frac{dS}{dt} = -S^2. \tag{4.13}$$

Al resolver esta ecuación diferencial obtenemos:

$$S(t) = \frac{1}{c_1 + t}.$$

Al sustituir la condición de frontera $S(0) = \sigma^2$ y simplificando:

$$S(0) = \frac{1}{c_1} = \sigma^2$$

$$c_1 = \frac{1}{\sigma^2},$$

entonces:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + t} \\ &= \frac{\sigma^2}{1 + t\sigma^2}. \end{aligned}$$

Como $S(t)$ satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$d\bar{X}_t = -S(t)\bar{X}_t dt + S(t)dY_t;$$

debemos hallar la solución.

Sea $I(t) = \exp\left(\int_0^t S(s)ds\right)$, entonces:

$$\begin{aligned} d(\bar{X}_t I(t)) &= -I(t)S(t)\bar{X}_t dt + I(t)S(t)dY_t + S(t)I(t)\bar{X}_t dt \\ &= I(t)S(t)dY_t. \end{aligned}$$

Ahora integrando por partes, tomando $u = (S(t)I(t))$ y $v = Y_t$:

$$\bar{X}_t I(t) = (I(t)S(t))Y_t - \int_0^t Y_t (I(t)S(t))' dt.$$

Usando que $(SI)' = S'I + SI' = S' + SSI = (S' + S^2)I = 0$, pues es la condición que arroja la ecuación matricial de Riccati (4.13), así obtenemos que:

$$\bar{X}_t = S(t)Y_t = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2 t} Y_t. \quad \blacksquare$$

4.4. Dinámica poblacional

El modelo más simple de crecimiento poblacional es la ecuación exponencial $\dot{x} = ax$, donde a es el coeficiente de crecimiento de Malthus, que usualmente es positivo. Las variaciones del ambiente pueden ser modeladas añadiéndole un ruido $a + \sigma\xi_t$, para un proceso de esperanza cero. Ya se ha discutido en varias ocasiones que al añadir este ruido blanco, obtendremos una ecuación diferencial estocástica. Para el caso determinístico y el estocástico en un ambiente natural con recursos limitados el crecimiento exponencial es insostenible.

Bajo estas circunstancias es necesario añadir una capacidad de carga, esto sustituyendo a por $a(K - x)$. Así obtenemos la ecuación lineal cuadrática de Verhulst:

$$\dot{x} = a(K - x)x, \quad (4.14)$$

que a veces es escrita en la siguiente forma:

$$\dot{x} = \lambda x - x^2. \quad (4.15)$$

Modificando el parámetro λ en (4.15) por $\lambda + \sigma\xi_t$, obtendremos la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2)dt + \sigma X_t dB_t, \quad (4.16)$$

Para resolver esta ecuación diferencial estocástica usaremos el siguiente método:

Sea la EDE con la forma:

$$dX_t = (aX_t^n + \lambda X_t)dt + cX_t dB_t;$$

entonces X_t tiene la forma general:

$$X_t = \Theta_t \left(X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds \right)^{\frac{1}{1-n}};$$

donde:

$$\Theta_t = \exp(\lambda t + cB_t).$$

Para comprobar que efectivamente verifica de EDE original calculamos:

$$\begin{aligned}
dX_t &= d[\Theta_t (X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds)^{\frac{1}{1-n}}] \\
&= d(\Theta_t) (X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds)^{\frac{1}{1-n}} + \Theta_t d(X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds)^{\frac{1}{1-n}} \\
&= (\lambda dt + c dB_t) \exp(\lambda t + c B_t) (X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds)^{\frac{1}{1-n}} \\
&+ \Theta_t \frac{1}{1-n} (a(1-n) \Theta_t^{n-1}) (X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds)^{\frac{n}{1-n}} dt \\
&= (\lambda dt + c dB_t) X_t + a X_t^n dt = (a X_t^n + \lambda X_t) dt + c X_t dB_t.
\end{aligned}$$

Para nuestro caso $n = 2, a = -1, \lambda$ y $c = \sigma$. Por lo tanto:

$$\Theta_t = \exp(\lambda t + \sigma B_t);$$

y

$$X_t = \Theta_t (X_0^{-1} + \int_0^t \Theta_s ds)^{-1}.$$

Sustituyendo el valor de Θ_t :

$$\begin{aligned}
X_t &= (\exp(\lambda t + \sigma B_t)) (X_0^{-1} + \int_0^t \exp(\lambda s + \sigma B_s) ds)^{-1} \\
&= \frac{\exp(\lambda t + \sigma B_t)}{(X_0^{-1} + \int_0^t \exp(\lambda s + \sigma B_s) ds)} \\
&= \frac{\exp(\lambda t + \sigma B_t)}{(\frac{1}{X_0} + \frac{X_0}{X_0} \int_0^t \exp(\lambda s + \sigma B_s) ds)} \\
&= \frac{\exp(\lambda t + \sigma B_t)}{\frac{1}{X_0} (1 + X_0 \int_0^t \exp(\lambda s + \sigma B_s) ds)} \\
&= \frac{X_0 \exp(\lambda t + \sigma B_t)}{1 + X_0 \int_0^t \exp((\lambda s + \sigma B_s) ds)}.
\end{aligned}$$

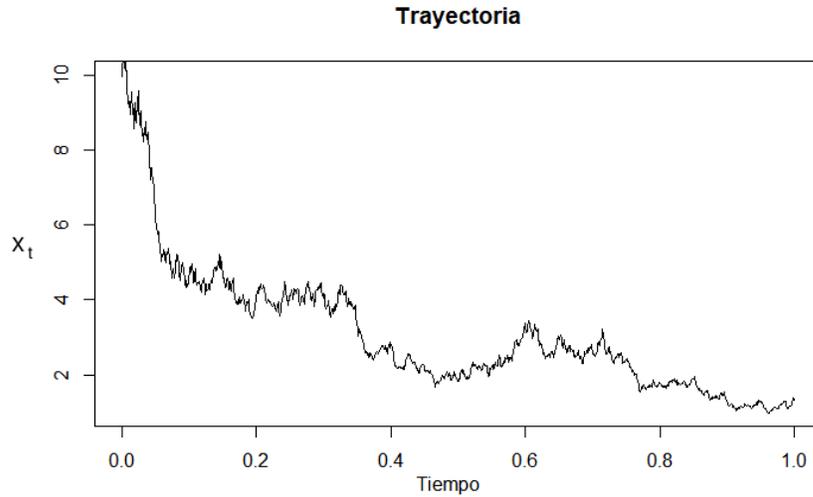


Figura 4.3: Gráfica de una solución.

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial estocástica (4.16) es:

$$X_t = \frac{X_0 \exp(\lambda t + \sigma B_t)}{1 + X_0 \int_0^t \exp(\lambda s + \sigma B_s) ds}. \quad (4.17)$$

La figura 4.3 es una simulación del proceso anterior con $\lambda = 3$, $X_0 = 10$ y $\sigma = 1$.

Para el caso determinístico:

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda t}}{1 + x_0 (e^{\lambda t} - 1)} \quad (4.18)$$

la gráfica se muestra en la Figura 4.4. En comparativa, podemos apreciar el comportamiento errático al rededor de la solución ordinaria en la figura 4.5.

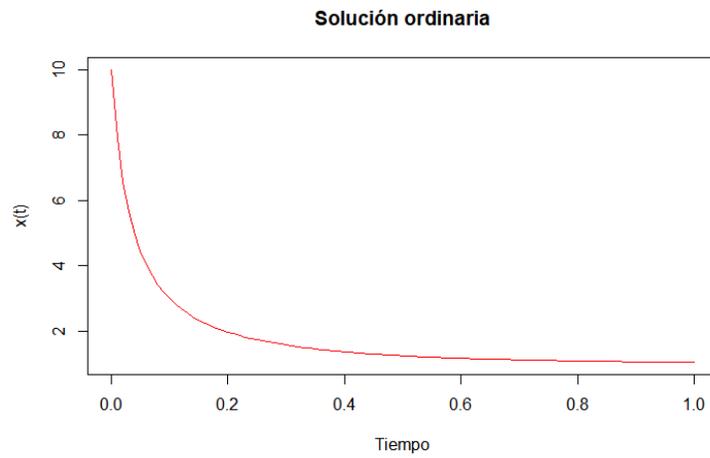


Figura 4.4: Gráfica de una solución determinística.

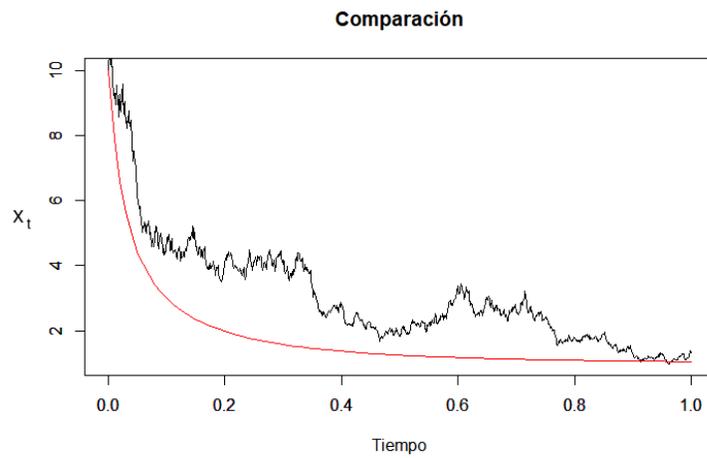


Figura 4.5: Gráfica de solución determinística y una trayectoria.

4.5. Cinética de proteínas

Hay ecuaciones estocásticas equivalentes a muchas ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan cinética en química, las cuales son derivadas aleatorizando los coeficientes de las mismas. Por ejemplo la cinética de la proporción x de una de las dos posibles formas de alguna proteína puede ser modelada a partir de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{x} = \alpha - x + \lambda x(1 - x), \quad (4.19)$$

donde $0 \leq x \leq 1$, y la otra porción es $y = 1 - x$. Podemos meter un ruido al término λ , descrito por $\lambda + \sigma \xi_t$, para un ruido blanco ξ_t .

Si:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - x + \lambda x(1 - x),$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha - x + x(\lambda + \sigma \xi_t)(1 - x) \\ &= \alpha - x + x\lambda(1 - x) + x\sigma \xi_t(1 - x). \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} dx &= [\alpha - x + x\lambda(1 - x) + x\sigma \xi_t(1 - x)]dt \\ &= [\alpha - x + x\lambda(1 - x)]dt + [x\sigma \xi_t(1 - x)]dt \\ &= [\alpha - x + x\lambda(1 - x)]dt + [x\sigma(1 - x)]dB_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la EDE a resolver en este caso es:

$$dX_t = [\alpha - X_t + \lambda X_t(1 - X_t)]dt + \sigma X_t(1 - X_t)dB_t. \quad (4.20)$$

La solución de la ecuación anterior no es conocida de forma explícita. La ecuación (4.20) también tiene aplicación en genética, donde X_t representa la proporción al tiempo t de uno de dos posibles alelos de algún gen (modelo de Wright-Fisher).

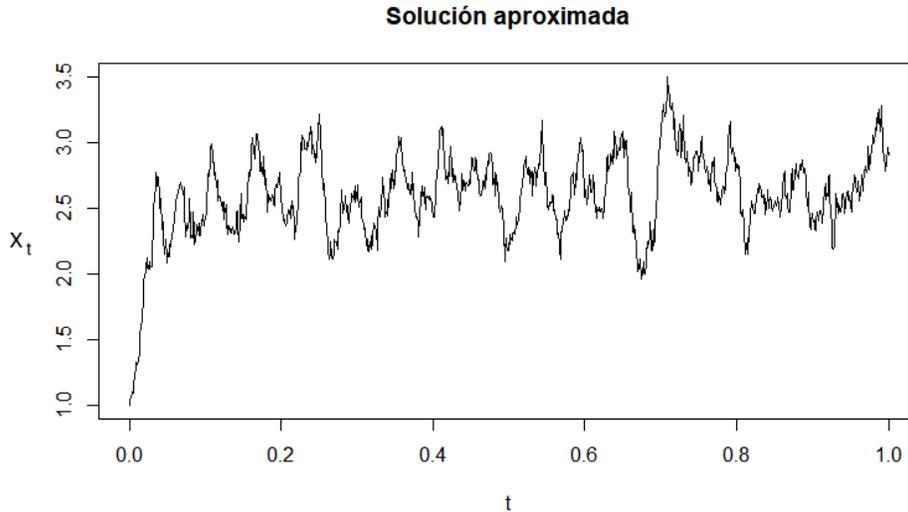


Figura 4.6: Gráfica de la proporción.

Ahora brindaremos una aproximación numérica de la solución de la EDE (4.20) usando el método de Euler y un programa en R :

Supongamos que $\alpha = 8$, $\lambda = 1.5$, $\sigma = 1$, $X_0 = 1$, $dt = \frac{1}{1000}$. Entonces para una trayectoria del movimiento Browniano en el intervalo $[0, 1]$, la solución aproximada se muestra en la figura 4.6.

A continuación se muestra la gráfica de la solución determinística:

$$dX_t = [\alpha - X_t + \lambda X_t(1 - X_t)]dt. \quad (4.21)$$

Y es comparada con la trayectoria de la solución aproximada de la EDE. En esta comparación es evidente el comportamiento errático alrededor de la solución determinística.

Se simuló la solución de la ecuación (4.20) utilizando el siguiente programa de R :

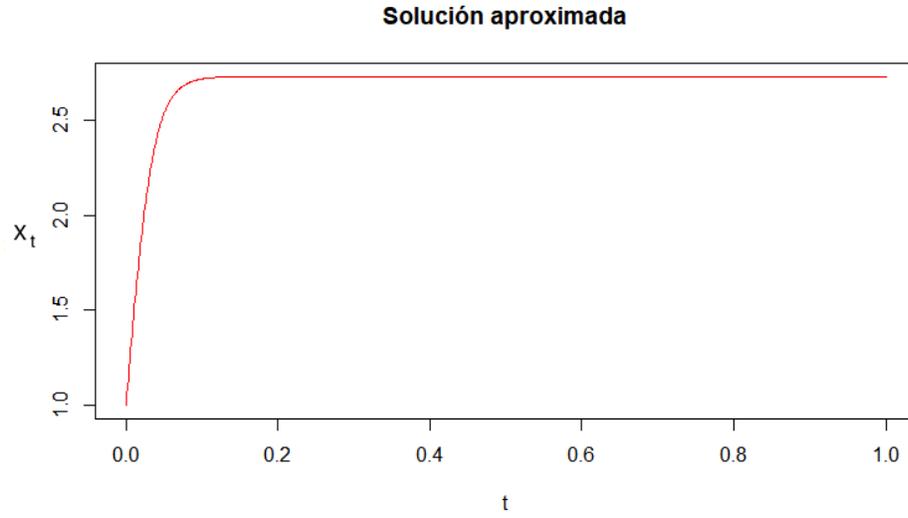


Figura 4.7: Solución determinística

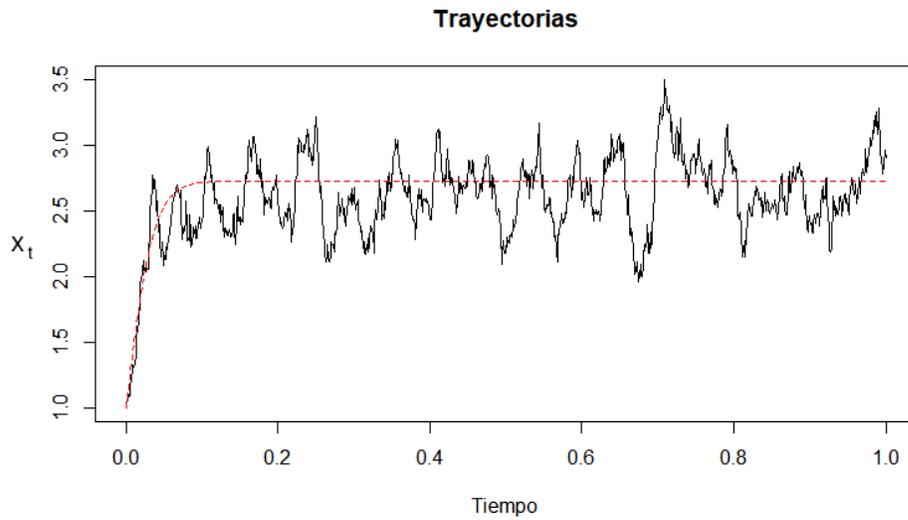


Figura 4.8: Comparación de las dos soluciones.

```
#Solución aproximada

T = 1
n = 1000
X0 = 1
alpha = 8
lambda = 1.5
sigma = 1

dt = T/n
t = seq(0,1,by=dt)

dW = rnorm(n, 0, sqrt(dt))

X = c(X0)
for (i in 2:(n+1)) {
  X[i] = X[i - 1] + alpha*dt - X[i - 1]*dt +
  lambda * X[i - 1]*(1-X[i - 1])*dt +
  sigma * X[i - 1]*( 1- X[i - 1]) * dW[i-1] }
plot(t,X, type = "l",main="Solución aproximada")
```


Bibliografía

- [1] Agarwal, S. Wettlaufer, J. (2015). Maximal stochastic transport in the Lorenz equations. *Physics Letters A*.
- [2] Allen, E. (2007). *Modeling with Itô stochastic differential equations*. Springer.
- [3] Bachelier, L. (1900). *Theorie de la speculation*. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup* 17, 21-86.
- [4] Baxter, M. Rennie, A. (1996). *Financial calculus. An introduction to derivate pricing*. Cambridge, United Kingdom.
- [5] Berrendero, J. *Integración estocástica*.
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/joser/docencia/intest/2013-intestPracticasR.html
- [6] Bear, J. (1972). *Dynamics of fluids in porous media*, Dover, Nueva York.
- [7] Brown, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Philosophical Magazine N. S.* 4, 161-173.
- [8] Casarrubias, S. F, Tamariz M. Á. (2012). *Elementos de Topología General*. Sociedad Matemática Mexicana.
- [9] Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitume*.

- [10] Einstein, A. (1956). Investigations on the theory of the Brownian movement. Dover.
- [11] Fima, C. Klebaner (2005). Introduction to stochastic calculus with applications. London: Imperial College Press.
- [12] Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.
- [13] Itô, K. (1974). Probabilistic methods in differential equations. Lectures Notes in Mathematics 451. Springer-Verlag.
- [14] Karatzas, I . Shreve, S. (1998). Brownian motion and stochastic calculus. New York: Springer.
- [15] Kallianpur, G. (1980). Stochastic filtering theory. Springer-Verlag New York.
- [16] Kloeden, P. E. y Platen E. (1999) Numerical solution of stochastic differential equations. Springer–Verlag.
- [17] Øksendal, B. (2000). Stochastic differential equations. An Introduction with Applications. New York: Springer-Verlag.
- [18] Steele, M. (2001). Stochastic calculus and financial applications. Springer
- [19] Mao, X. (2011). Stochastic Differential Equations and Applications. Philadelphia: Woodhead Publishing.
- [20] Kempthorne, P , Choongbum, L, Strela V, and Xia, J. 18.S096 Topics in Mathematics with Applications in Finance. Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>. License: Creative Commons BY-NC-SA.
- [21] Schilling, R. L., Parzsch, L. (2012). Brownian motion: An introduction to stochastic processes. Germany: De Gruyter Graduate.
- [22] Rincón, L. (2012). Introducción a los procesos estocásticos.
- [23] Rincón, L. Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas.
- [24] Rößler, A. (2003). Runge-Kutta methods for the numerical solution of stochastic differential equations. Shaker Verlag.

- [25] Mörters, P. Peres, Y. (2008). Brownian motion. lectures of the department of statistics - University of California.
- [26] Schweizer, B. (2015). Darcy's law and groundwater flow modelling. Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach No. 17.
- [27] Wang, H. F. Anderson, M. P. (1982). Introduction to groundwater modeling. New York.
- [28] Zahri, M. (2010). Numerical solution of a stochastic Lorenz attractor. Journal of numerical mathematics and stochastics. Vol 2.