



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

Método de cuantización de Dirac en la cosmología
polimérica y cosmología $f(R)$

T E S I S

*Que para optar por el grado de:
Maestría en Ciencias Físicas*

PRESENTA:

Héctor Antonio Fernández Meléndez

Supervisor:

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

Comite Tutor:

DR. JOSÉ ANTONIO RAFAEL GARCÍA ZENTENO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM
DR. JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

Ciudad de México – Abril 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Héctor Antonio Fernández Meléndez: *Cosmología Polimérica*,
Tesis presentada a la Universidad Nacional Autónoma de México
para obtener el grado de Maestría en Ciencias, Física, © Abril,
2018, Ciudad de México.

Método de cuantización de Dirac en la cosmología polimérica y cosmología $f(R)$

Héctor Antonio Fernández Meléndez

Resumen

En este trabajo de tesis se realiza una cuantización polimérica, mediante el formalismo de la integral de camino, de un modelo cosmológico de tipo Friedmann-Robertson-Walker. Partiendo desde el tratamiento clásico, se consideran las cantidades geométricas de longitud, área y volumen asociadas al factor de escala a , como diferentes variables dinámicas para describir la dinámica cosmológica, de manera que al pasar al régimen cuántico, estas cantidades hereden las propiedades de la geometría cuántica, propias de los fundamentos de la teoría de gravedad cuántica de lazos. Se buscan soluciones numéricas tipo instantón en la dinámica polimérica cosmológica, las cuales podrían sugerir de manera efectiva, propiedades cuánticas en el sistema, no encontrando soluciones que cumplieran con las condiciones necesarias para ser consideradas como instantones. También se hace un breve estudio clásico de modelos cosmológicos modificados a partir de teorías $f(R)$ cuadráticas, en el cual se busca encontrar una buena formulación hamiltoniana clásica, así como un buen tiempo para la descripción dinámica.

Abstract

In this thesis work a polymer quantization is applied to a Friedmann-Robertson-Walker cosmological model, via the path integral formalism. Starting from the classical treatment, the geometrical quantities of length, area and volume, associated with the scale factor a , are considered as different dynamical variables to describe the cosmological dynamics, such that, when passing to the quantum regime, these quantities inherit the quantum geometry properties, characteristic of the Loop Quantum Gravity. Instanton numerical solutions are searched in the cosmological polymer dynamics, which may suggest, effectively, the presence of quantum properties on the system, not finding solutions that fulfill the needed conditions to be considered as instantons. We also make a classical analysis of modified cosmological models by means of a quadratic $f(R)$ theory, where we look for a good classical Hamiltonian formulation, as well as for a good time parameter to describe the dynamics.

Agradecimientos

A mis padres por el apoyo y cariño brindado a lo largo de toda mi vida.

A mi tutor, el Dr. David Vergara, por haber tenido confianza en mí y permitirme haber estado en este proyecto con él; por el gran apoyo brindado a lo largo de este tiempo y por lo mucho que me ha enseñado con gran entusiasmo acerca de la física y la ciencia. A él debo mucho la realización de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado a través del programa de Becas Nacionales durante el periodo en mis estudios de posgrado.

A DGAPA-UNAM por la beca recibida para la realización de este trabajo gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM «IN103716» “No conmutatividad, cuantización polimérica y teoría de la información cuántica”.

Al programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado (PAEP), por el apoyo económico brindado en distintos momentos de mis estudios.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
Prefacio	1
1. Introducción	3
1.1. Necesidad de una teoría de gravedad cuántica	3
1.2. ¿Qué ideas se han tenido?	7
1.2.1. Teoría de cuerdas	7
1.2.2. Gravedad cuántica de lazos	8
1.3. ¿En dónde puede ser aplicado?	9
2. Cuantización de teorías de norma	11
2.1. Formalismo hamiltoniano para teorías de norma	12
2.1.1. Teorías singulares	12
2.1.2. Constricciones primarias	13
2.1.3. Ecuaciones de Hamilton	13
2.1.4. Paréntesis de Poisson	14
2.1.5. Condiciones de consistencia	15
2.1.6. Condiciones para las funciones u_m	16
2.1.7. Hamiltoniano total	17
2.1.8. Funciones de primera clase y de segunda clase	17
2.1.9. Constricciones de primera y segunda clase	18
2.1.10. Transformaciones de norma	19
2.1.11. Hamiltoniano extendido	20
2.1.12. Paréntesis de Dirac	20
2.1.13. Fijación de la norma	21
2.1.14. Ejemplo de un sistema hamiltoniano con constricciones	22
2.2. Cuantización de Dirac	24
2.3. Método del promedio sobre el grupo (<i>Group averaging</i>)	25
2.3.1. Ejemplo: La partícula libre no relativista	27
3. Mecánica cuántica polimérica	29
3.1. Teorema de Stone-von Neumann	29
3.1.1. Problemas para la representación de las relaciones de conmutación	30
3.1.2. Unicidad en las representaciones	30
3.2. Construcción de la representación polimérica	32
A. Caso $1/d \rightarrow 0$. Representación-A	35
B. Caso $d \rightarrow 0$. Representación-B	36
3.3. Cinemática de la mecánica cuántica polimérica	39

3.3.1. Polarización-p o de Momentos	40
3.3.2. Polarización-q o de Posiciones	41
3.4. Dinámica de la mecánica cuántica polimérica	42
4. Aplicaciones de la mecánica cuántica polimérica	45
4.1. La partícula libre	45
5. Cuantización polimérica de un modelo cosmológico	59
5.1. Introducción a la cosmología estándar	59
5.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	60
5.3. Formulación hamiltoniana de la cosmología clásica	60
5.4. Cuantización polimérica	65
5.5. Amplitud de transición en la cosmología polimérica	66
5.6. Desparametrización de la acción	72
5.7. Dinámica cosmológica	73
5.7.1. Dinámica cosmológica clásica	74
5.7.2. Dinámica cosmológica polimérica	75
6. Dinámica de la acción efectiva en el espacio euclídeo	79
6.1. Instantones	79
6.2. Rotación de Wick	80
6.3. Ejemplo: Instantones en el oscilador armónico polimérico	83
6.4. Dinámica euclídea para el factor de escala (a, p_a)	84
6.4.1. Acción en el espacio euclídeo, $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}[a, p_a]$	84
6.4.2. Ecuaciones de Hamilton y soluciones numéricas	85
6.5. Dinámica euclídea para variables de área del factor de escala (A, p_A)	86
6.5.1. Acción en el espacio euclídeo, $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}[A, p_A]$	88
6.5.2. Ecuaciones de Hamilton y soluciones numéricas	89
6.6. Dinámica euclídea para variables de volumen del factor de escala (V, p_V)	90
6.7. Acción en el espacio euclídeo, $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}[V, p_V]$	91
6.7.1. Ecuaciones de Hamilton y soluciones numéricas	92
7. Cosmología para teorías $f(R)$ cuadráticas	95
7.1. Introducción a la gravedad $f(R)$	95
7.2. Cosmología $f(R)$ cuadrática sin contribuciones de materia	96
7.3. Cosmología para una teoría con un campo de materia	99
8. Conclusiones	103
A. Integral de camino con constricción topológica	107
A.1. Partícula libre sobre un círculo	107
B. Códigos computacionales para las soluciones numéricas	113
Bibliografía	119

Prefacio

De manera general, este trabajo de tesis pretende realizar un pequeño aporte a un viejo problema de la física teórica: la gravedad cuántica. Diversos enfoques han sido utilizados para enfrentar a este problema, todavía ninguno con éxito. Nosotros centraremos nuestra atención únicamente en el enfoque conocido como teoría cuántica de lazos. Sin entrar en detalles acerca de la teoría completa, se plantea la posibilidad de encontrar, de manera indirecta, una solución a un problema particular que posee dicha teoría. El problema consiste en que esta teoría requiere una elección fija de la topología, mientras que cualquier teoría cuántica de la gravedad satisfactoria debe incluir cambios de topología como proceso dinámico [1]. Nosotros creemos que es posible que se puedan obtener estos cambios de topología en un contexto cosmológico estándar si consideramos los efectos cuánticos derivados de una cuantización polimérica, que es la cuantización que se obtiene de aplicar las características propias de la teoría cuántica de lazos. La cuantización polimérica no es equivalente a la cuantización estándar y se caracteriza por heredar el carácter no-perturbativo de la teoría cuántica de lazos, ya que contiene información acerca de las propiedades cuánticas de la geometría del espacio-tiempo, e.g. su carácter discreto. Por tanto, si podemos obtener “cambios de topología” en un contexto simplificado como este, indicaría que es posible obtener el mismo resultado en el contexto de la teoría completa.

La propuesta de trabajo e idea principal detrás de esta tesis, consiste en aplicar el método de cuantización de Dirac a diferentes modelos cosmológicos. Comenzamos por aplicar la cuantización polimérica a un modelo cosmológico de tipo Friedmann-Robertson-Walker mediante el método de la integral de camino. Lo anterior con el objetivo de que al aplicar esta cuantización, las cantidades geométricas que definen al espacio-tiempo, en este caso el factor de escala, hereden propiedades de la geometría cuántica de manera efectiva. Una vez que obtengamos la dinámica cosmológica efectiva, el objetivo es buscar soluciones de tipo instantón con las que es posible calcular la probabilidad de transición entre dos estados vacíos de la teoría. Esto significaría que existe cierta probabilidad de que el universo sea capaz de cambiar de estado de vacío y con ello puedan cambiar también las propiedades topológicas del mismo, obteniendo así la dinámica topológica que no ha podido ser establecida para la teoría completa de gravedad cuántica de lazos.

Como trabajo secundario, se buscan estudiar modelos cosmológicos generalizados mediante lo que se conoce como gravedad $f(R)$. En particular nosotros tomamos una teoría $f(R)$ cuadrática para la gravedad aplicada al contexto cosmológico y realizamos un análisis a nivel clásico de esta, ampliando así el espectro de modelos cosmológicos que pueden estar sujetos a estudio.

El trabajo de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se plantea el problema de la gravedad cuántica, que es la motivación de fondo sobre la que gira este trabajo. Se dan argumentos de por qué es importante encarar este problema y se hace una breve descripción de los dos enfoques más populares que abordan este tema. En el Capítulo 2 se presenta el punto de partida para una cuantización canónica de la gravedad: la formulación Hamiltoniana para las teorías de norma. Una vez establecido el aspecto clásico de las teorías de norma, se procede a presentar el programa de cuantización de Dirac, que sirve para cuantizar sistemas clásicos con constricciones; así como también se introduce el método del ‘promedio sobre el grupo’, que le brinda la definición de un producto interno a la cuantización de Dirac. La representación polimérica de la mecánica cuántica es construida en el Capítulo 3, exponiendo sus aspectos cinemáticos y dinámicos. Con

ayuda del teorema de Stone- von Neumann, el cual es presentado brevemente al inicio de este mismo capítulo, esta construcción permite comprobar que esta representación en efecto es no-equivalente a la representación estándar de Schrödinger. En el Capítulo 4 es ejemplificada una de las aplicaciones de la cuantización polimérica, mostrando las diferencias que presenta respecto a la cuantización estándar. Luego, en el Capítulo 5, presentamos el modelo clásico para una cosmología tipo FRW para posteriormente proceder a realizar la cuantización polimérica del modelo. En el Capítulo 6 presentamos la dinámica cosmológica efectiva que obtuvimos en el espacio euclídeo. En el Capítulo 7 se hace una breve introducción de las teorías $f(R)$ para posteriormente analizar de manera clásica la formulación canónica para un modelo cosmológico $f(R)$ cuadrático considerando dos casos: un universo sin materia y un universo con un campo escalar de materia. Finalmente, en el Capítulo 8 presentamos las conclusiones del trabajo realizado, así como las posibles extensiones del mismo.

De manera adicional, se agregan un par de apéndices que complementan el trabajo presentado. En el Apéndice A calculamos la amplitud de evolución temporal de una partícula libre con una constricción topológica. El resultado obtenido es aplicado en el trabajo ya que uno debe resolver matemáticamente el mismo problema al aplicar la cuantización polimérica usando la integral de camino. Mientras que en el Apéndice B mostramos los códigos computacionales que se utilizaron para resolver numéricamente las ecuaciones que aparecen en este trabajo. Aquí también se mencionan algunas consideraciones que se tomaron en cuenta para realizar estos cálculos numéricos.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Necesidad de una teoría de gravedad cuántica

Actualmente el modelo estándar de partículas de la física – descrito en términos de la teoría cuántica de campos – y la teoría de relatividad de Einstein proporcionan una descripción notablemente exitosa de nuestras observaciones, estableciéndolas como los dos pilares fundamentales de la física teórica [2]. En particular, la mecánica cuántica nos ha llevado a la física atómica, la física nuclear, la física de partículas, la física de la materia condensada, los semiconductores, los láseres, las computadoras, la óptica cuántica, etc. Mientras que la relatividad general nos llevó a la astrofísica relativista, la cosmología, la tecnología GPS y más recientemente nos está llevando a realizar astronomía por medio de ondas gravitacionales [3].

Por el momento se sabe que existen cuatro fuerzas fundamentales que describen adecuadamente a la naturaleza: la gravedad, el electromagnetismo, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil. Nuestro entendimiento de la gravedad se encuentra basado en la teoría de relatividad general de Albert Einstein, la cual se encuentra formulada dentro del marco de la física clásica. Por otro lado, las otras tres fuerzas fundamentales de la naturaleza se encuentran descritas en términos de la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos, formalismos completamente diferentes a la relatividad general para la descripción de los fenómenos físicos.

Un modelo del universo, de acuerdo a la relatividad general, consiste en una variedad espaciotemporal con una métrica cuya curvatura se encuentra determinada, mediante las ecuaciones de Einstein, por el tensor de estrés-energía-momento asociado a la distribución de materia. Todas las cantidades físicas – e.g. el valor de una de las componentes del campo eléctrico en un punto dado, el escalar de curvatura del espacio-tiempo en otro cierto punto, etc – siempre tienen un valor bien definido dado por números reales. Es decir, en este sentido se dice que son cantidades clásicas. En contraste, las teorías fundamentales que describen a la materia y a la energía, es decir, las teorías que describen la interacción de partículas mediante la fuerza electromagnética y las fuerzas nucleares fuerte y débil, son todas teorías cuánticas. En las teorías cuánticas, las cantidades físicas no tienen valores bien definidos en general, sino que se encuentran descritas mediante un estado cuántico que da una distribución de probabilidad para los posibles valores que puede tomar. Y mientras que si intentamos ganar especificidad acerca de una de las propiedades del sistema (con esto queremos decir que se desea estrechar la distribución de los posibles valores), inevitablemente en consecuencia, estaremos perdiendo especificidad acerca de su propiedad conjugada canónica. A esto se le conoce como principio de incertidumbre de Heisenberg.

Actualmente, uno de los más profundos problemas en la física teórica consiste en encontrar una teoría que integre a la relatividad general – que modela a la gravedad y es aplicada a la descripción de estructuras a gran escala como los planetas, las estrellas, las galaxias y el universo mismo – con la mecánica cuántica, que describe a las demás fuerzas fundamentales de la naturaleza (el electromagnetismo y las interacciones nucleares fuerte y débil) a escala atómica.

En primera instancia uno podría pensar que la incompatibilidad entre ambas teorías podría ser

resuelta si cuantizamos el campo gravitacional, de manera análoga a como se hace con el campo electromagnético en la electrodinámica cuántica. Sin embargo, la relatividad general no ha podido ser cuantizada y sigue siendo una teoría completamente clásica. Utilizando los mismos métodos de cuantización que fueron exitosos para otras interacciones fundamentales, uno no llega a ningún resultado exitoso. Este fue el camino a seguir por la comunidad de la física teórica, pero al hacerlo se encontraron con problemas técnicos extraordinarios, cercanamente relacionados con un conjunto de dificultades conceptuales.

Las dificultades conceptuales surgen esencialmente de la naturaleza misma de la interacción gravitacional. En particular surge de la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional, que permite representar a la gravedad como una propiedad del espacio-tiempo mismo, en lugar de ser representada como un campo propagándose en un espacio-tiempo de fondo. Por tanto, si queremos cuantizar la gravedad, por ejemplo, mediante una cuantización canónica, uno cuantiza cantidades estrictamente geométricas. Dado el principio de incertidumbre de Heisenberg, uno está sujeto a las fluctuaciones cuánticas, lo que implica que uno tiene una descripción que involucra fluctuaciones del espacio-tiempo mismo. Ordinariamente, la teoría cuántica supone un espacio-tiempo fijo de fondo respecto al cual mide las fluctuaciones, por tanto uno se encuentra no solo con el problema de cómo tomar estas fluctuaciones respecto a la estructura del espacio-tiempo, sino también con el problema de dar una explicación conceptual y física de la teoría que resulte [4].

Es decir, en gran parte, la dificultad de crear una teoría consistente a toda escala de energía a partir de las teorías de relatividad general y de la mecánica cuántica viene de las diferentes suposiciones que cada una de estas teorías hace acerca de cómo funciona el universo. La relatividad general propone un modelo en el que la gravedad corresponde a la curvatura del espacio-tiempo, la cual cambia ante la presencia de materia y energía. Mientras que la teoría cuántica de campos, considerada como una teoría que describe a las partículas fundamentales, depende de campos que se encuentran definidos sobre un espacio-tiempo fijo de fondo, que corresponde al espacio-tiempo plano de Minkowski de la relatividad especial. Esto no quiere decir que la gravedad no pueda ser cuantizada; en realidad, la gravedad sí puede ser realmente cuantizada, pero en la mayoría de los casos resulta en una teoría no renormalizable que en el mejor de los casos puede ser interpretada como una teoría efectiva, no como una teoría fundamental. Sin embargo, en años recientes se han obtenido resultados interesantes en estas líneas de investigación, por ejemplo [5, 6]. En este trabajo no consideraremos estas formulaciones.

A pesar de que se podría creer que ambas teorías son fundamentalmente incompatibles, uno puede demostrar que la estructura de la relatividad general esencialmente es una consecuencia de la mecánica cuántica de la interacción teórica de partículas de espín 2 sin masa.

El problema de querer cuantizar la gravedad, o construir una teoría de la gravedad cuántica, va más allá de una mera molestia estética o de una obstinación con la unificación de las teorías físicas por parte de los físicos teóricos, sino que nos indica una tensión matemática y una falta de comprensión de las actuales teorías. A pesar de ser teorías muy bien establecidas desde el punto de vista matemático, que cuentan con el soporte de numerosos experimentos, la relatividad general y la mecánica cuántica no están exentas de presentar problemas. La relatividad general cuenta con el problema de las singularidades en donde la descripción que nos brinda falla a altas energías, diciéndonos que cantidades como la densidad de energía y la curvatura del espacio divergen de manera arbitraria. Por otro lado, la mecánica cuántica cuenta con el problema de la medición y la transición al régimen clásico (en principio, nuestros aparatos de medición deberían ser descritos también por la mecánica cuántica, entonces ¿cuáles sistemas son cuánticos y cuáles son clásicos?). Por tanto estas teorías parecieran no ser la descripción definitiva de nuestro universo, sugiriendo así que necesitamos de teorías más avanzadas que nos brinden una descripción más acertada y precisa de nuestra realidad.

Existen sistemas en donde sabemos que necesitamos una mejor teoría que las actuales – posiblemente una teoría de gravedad cuántica – para su descripción [7]. Ejemplos de estos sistemas son los agujeros negros y el mismo comienzo del universo. De manera concreta se tienen tres motivos principales por los cuales la situación actual requiere ser solucionada:

i) Las partículas cuánticas pueden existir en estados superpuestos. Por ejemplo, un fotón en un interferómetro tiene un estado tal que puede encontrarse en una superposición de estar viajando al mismo tiempo por ambos caminos posibles en el interferómetro. En principio, este fotón en superposición porta energía y por tanto gravita, aún así desconocemos su campo gravitacional.

ii) La relatividad general predice la formación de singularidades, las cuales corresponden a regiones del espacio-tiempo en donde la densidad de energía, así como la curvatura, divergen de manera arbitraria. Los teoremas de singularidad de Penrose y Hawking [8] refuerzan la presencia de singularidades en la teoría, sin embargo estas no resultan ser físicamente aceptables e indican un límite en el que la relatividad general deja de ser válida. A escalas tan altas de energía, los efectos cuánticos deben ser tomados en cuenta pero hasta ahora no ha sido posible describirlos.

iii) La pérdida de información en los agujeros negros. Usando la teoría cuántica de campos en una geometría clásica correspondiente a un agujero negro, Hawking demostró que los agujeros negros emiten radiación térmica y por tanto pierden masa. Si la radiación permanece térmica hasta que el agujero negro se evapore, entonces cualquier distribución de materia con la misma masa que colapse en un agujero negro eventualmente terminará en el mismo estado térmico final. Por tanto, se pierde información detallada acerca del estado inicial del sistema, lo cual resulta ser incompatible con los principios de la mecánica cuántica.

Una de las grandes dificultades para formular una teoría de gravedad cuántica es que se espera que sus efectos físicos sean apreciables a escalas cercanas a la escala de Planck, la cual es una escala mucho más pequeña en distancia – y equivalentemente, mucho más grande en energía – si la comparamos con las escalas que son accesibles para nuestra tecnología actual basada en aceleradores de partículas de altas energías. Consideremos el siguiente camino para visualizar de manera sencilla la relevancia física que tiene la escala de Planck.

Dos constantes fundamentales aparecen en la relatividad general: la velocidad de la luz c y la constante gravitacional de Newton G . Esto es natural ya que esta teoría fue creada por Einstein para conciliar la teoría de la gravedad de Newton con su recién creada teoría de la relatividad especial. La velocidad de la luz también aparece en la teoría cuántica de campos pero esta vez acompañada de la constante de Planck \hbar . La razón es que la teoría cuántica de campos toma en consideración a la relatividad especial y a la mecánica cuántica, en donde \hbar determina la escala en donde el principio de incertidumbre resulta importante. Resulta natural suponer que en una teoría de la gravedad cuántica estas tres constantes fundamentales aparecerán [9]. Planck se dio cuenta de que existe una única manera de utilizar estas constantes para definir unidades de longitud, tiempo y masa – dejando de lado factores numéricos. Por ejemplo, uno puede escribir la longitud de Planck como

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (1.1)$$

Esta cantidad es extremadamente pequeña, corresponde aproximadamente a 1.6×10^{-35} metros.

La teoría cuántica de campos establece que asociada a cualquier partícula de masa m existe una longitud, llamada la longitud de onda de Compton

$$l_c = \frac{\hbar}{mc} \quad (1.2)$$

la cual resulta ser de relevancia ya que para conocer la posición de dicha partícula dentro de este intervalo de longitud, se requiere del uso de una energía equivalente a la energía necesaria para crear otra partícula de igual masa. Es decir, la longitud de onda de Compton determina la escala en la cual la teoría cuántica de campos resulta crucial. Por otro lado, la relatividad general establece que a toda masa m se encuentra asociada una longitud l_s , llamada radio de Schwarzschild,

$$l_s = \frac{Gm}{c^2} \quad (1.3)$$

tal que comprimiendo dicha masa a un tamaño menor al de este radio se obtiene la formación de un agujero negro, es decir, es la escala a la cual la relatividad general resulta importante.

La gran mayoría de la información que tenemos acerca de la relatividad general viene de observar objetos con una gran masa, como planetas y estrellas, en donde $l_s \gg l_c$. En cambio, la mayor parte de la información que tenemos acerca de la teoría cuántica de campos viene dada de estudiar objetos ligeros como electrones y protones, en donde $l_s \ll l_c$. Sin embargo, a partir de simples argumentos físicos, podemos realizar un pequeño experimento mental que nos permita ver la relevancia física que tiene la escala de Planck como una escala que posiblemente posee un carácter fundamental.

De acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg [10],

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar \quad (1.4)$$

podemos aumentar la precisión con la que medimos la posición de una partícula, siempre y cuando permitamos que crezca de la misma manera la incertidumbre en la medición de su momento. Pero este principio no toma en cuenta los efectos gravitacionales del sistema. Consideremos que realizamos mediciones sobre nuestra partícula por medio de un fotón con frecuencia¹ ν , por tanto con energía $E = h\nu$. De acuerdo con la famosa relación de equivalencia de masa-energía de Einstein, $E = mc^2$, el fotón deberá de interactuar gravitacionalmente como si tuviera una masa efectiva

$$m_{\text{ef}} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c} \quad (1.5)$$

Entonces, el fotón que usamos para medir la posición de la partícula ejercerá cierta fuerza gravitacional sobre ella. Esto causará que la partícula sea acelerada, contribuyendo a la incertidumbre propia de la medición. Utilizando la mecánica clásica de Newton podemos estimar de manera aproximada la aceleración y el cambio en la posición de la partícula causada por los efectos gravitacionales:

$$\Delta a_g \approx \frac{Gm_{\text{ef}}}{r_{\text{ef}}^2} = \frac{G}{r_{\text{ef}}^2} \left(\frac{h}{\lambda c} \right) \quad (1.6)$$

$$\Delta x_g \approx \Delta a_g t_{\text{ef}}^2 = \frac{Gh}{\lambda c} \frac{t_{\text{ef}}^2}{r_{\text{ef}}^2} \quad (1.7)$$

donde r_{ef} y t_{ef} denotan una distancia y un tiempo efectivos promedio para la interacción. La única velocidad característica del sistema es la velocidad del fotón c , por lo que tomamos al cociente $r_{\text{ef}}/t_{\text{ef}} \approx c$, de manera que la incertidumbre en la medición de la posición debida a la interacción gravitacional es

$$\Delta x_g \approx \frac{Gh}{\lambda c^3} \approx \frac{G\hbar}{\lambda c^3} = \frac{l_p^2}{\lambda} \quad (1.8)$$

Considerando únicamente al principio de incertidumbre, se tiene que la incertidumbre para la posición es $\Delta x = \hbar/\Delta p$. Si sumamos a esta la contribución gravitacional, obtenemos

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} + l_p^2 \left(\frac{\Delta p}{\hbar} \right) \quad (1.9)$$

generalizando así, si bien de una manera tosca, al principio de incertidumbre de Heisenberg a un contexto que toma en consideración a los efectos gravitacionales. No obstante, este mismo resultado ha sido reportado como resultado de generalizar el principio de incertidumbre en el contexto de las teorías de cuerdas [11].

Podemos observar en (1.9), que la incertidumbre para la posición de la partícula tiene un mínimo cuando $\hbar/\Delta p = l_p$, cuyo valor es $\Delta x \approx 2l_p$. Esto corresponde al caso cuando tenemos un fotón con longitud de onda igual a la longitud de Planck l_p . De manera que, si nos apegamos a este pequeño experimento, podemos concluir que no podemos medir la posición de una partícula con mayor precisión a la longitud de Planck. Esto sugiere que, desde el punto de vista operacional, la longitud de Planck posiblemente representa la distancia más pequeña que es físicamente significativa, o al menos, es la distancia en la que el espacio-tiempo presenta de manera inevitable, propiedades

¹ Cuya longitud de onda correspondiente es $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

cuánticas. Hablar del concepto de un espacio-tiempo continuo clásico a escalas más pequeñas, puede que carezca de sentido físico. Más argumentos acerca de escenarios físicos en los que la escala de Planck resulta significativa, pueden ser encontrados en [12].

Podemos esperar – al menos a primera instancia – que la relatividad general y la teoría cuántica de campos sean necesarias para describir un objeto con una masa igual a la masa de Planck ($m_p \sim 0.02$ miligramos), cuyo radio esté dentro de la longitud de Planck. Es decir, la masa de Planck es el punto intermedio entre los objetos masivos como las estrellas y objetos ligeros como los protones, corresponde aproximadamente a la masa de una célula grande. Pero la longitud de Planck corresponde a 10^{-20} veces el radio de un protón, o sea, necesitamos comprimir a una célula a este tamaño para considerar que los efectos de la gravedad cuántica son importantes. En principio, no existe nada que nos indique que no podamos comprimir a una célula a tal tamaño pero esto nos habla de las dificultades experimentales que se tienen para poder acceder a la escala de Planck. Como consecuencia, la gravedad cuántica es principalmente una empresa teórica a pesar de que existen especulaciones acerca de cómo sus efectos podrían ser observados indirectamente mediante los experimentos actuales.

Desde el punto de vista fenomenológico, las posibilidades que han sido más extensamente consideradas incluyen la búsqueda de violaciones a la invariancia de Lorentz, la búsqueda de posibles huellas dejadas por la gravedad cuántica en la radiación de fondo cósmica de microondas provocadas por ondas gravitacionales en el universo temprano, y la búsqueda de efectos de decoherencia inducidos por las fluctuaciones en la espuma del espacio-tiempo (*space-time foam*) [7].

1.2. ¿Qué ideas se han tenido?

Existen un gran número de enfoques que pretenden dar solución al problema. Estos enfoques pueden ser clasificados de acuerdo al peso que le den a las dos teorías involucradas. Algunos consideran que la relatividad general necesita correcciones y que la teoría cuántica de campos puede ser aplicada de manera general, mientras que otros consideran la situación inversa. Incluso hay algunos enfoques que consideran que en realidad ambas teorías corresponden a diferentes límites de una teoría aún más fundamental. Los enfoques más populares al problema de la gravedad cuántica son dos: la teoría de cuerdas y la teoría de gravedad cuántica de lazos.

1.2.1. Teoría de cuerdas

La teoría de cuerdas es un marco teórico en donde la idea destacada consiste en reemplazar a las partículas puntuales de la teoría de campos ordinaria (i.e. fotones, electrones, etc.) con objetos unidimensionales llamados cuerdas. Esta describe cómo las cuerdas se propagan a través del espacio e interactúan entre sí. Las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas, poseyendo una tensión característica y por tanto un espectro de vibraciones [4]. A diferencia de las observables típicas de la teoría cuántica estándar, las cuerdas no se encuentran caracterizadas por números cuánticos, sino por sus propiedades geométricas y dinámicas. La escala típica que se asume para las cuerdas es del orden de la escala de Planck, o 10^{-35} metros. A escalas de distancia mayores, las cuerdas se ven como partículas ordinarias cuya masa, carga y otras propiedades, son determinadas por su estado vibracional. Uno de los tantos modos vibracionales de las cuerdas corresponde al gravitón: la partícula cuántica encargada de portar la interacción gravitacional. Resulta esencial para la teoría de cuerdas el hecho de que se tengan objetos extendidos en lugar de objetos puntuales para que en ella pueda ser incluida la fuerza de gravedad, a diferencia de lo que sucede en la teoría cuántica de campos. Esta última no es capaz de incluir a la gravedad ya que, al suponer interacciones puntuales, lleva a divergencias intratables en los cálculos matemáticos. En cambio, la naturaleza extendida de las cuerdas ayuda a tratar con las inconsistencias que se tienen en las teorías cuánticas de la gravedad [13]. Esto quiere decir que la teoría de cuerdas tiene la ventaja de ser una teoría perturbativamente renormalizable.

La versión original de la teoría de cuerdas era una teoría exclusivamente bosónica, que además, dentro del espectro de vibraciones – o, equivalentemente, de partículas – de la teoría, incluía una

partícula cuya masa correspondía a un número imaginario: el taquión. La teoría de cuerdas bosónica fue eventualmente sustituida por otras teorías llamadas teorías de supercuerdas. Estas describían bosones y fermiones – reteniendo al gravitón pero ya sin obtener al taquión – e incorporaban la idea de la supersimetría [14]. Una de las características más notables de las teorías de cuerdas, es la necesidad de dimensiones extra para lograr que sean matemáticamente consistentes. En la teoría de cuerdas bosónica el espacio-tiempo posee 26 dimensiones, mientras que en las teorías de supercuerdas posee 10 dimensiones. Antes del año de 1995 se creía que habían cinco versiones consistentes de la teorías de supercuerdas. Esto cambió en ese año, cuando Edward Witten sugirió que estas cinco teorías solo eran casos límite diferentes de una teoría más general en 11 dimensiones, llamada la teoría-M [15].

En el contexto de la teoría, se descubrió una relación importante llamada la correspondencia AdS/CFT [16], la cual establece la equivalencia entre una teoría de cuerdas con una teoría de norma o una teoría cuántica de campos. Dada la equivalencia entre ambas descripciones, es establecido que ninguna de ellas posee un carácter fundamental, así como tampoco son fundamentales los espacio-tiempos que describen. Esto ha llevado a algunos especialistas a hablar del espacio-tiempo como un fenómeno emergente, proponiendo que el par de teorías duales son solo distintos límites clásicos de una teoría cuántica más fundamental.

Sin embargo, en esta teoría existe un problema que se conoce como el problema del *landscape*, que consiste en toda la colección de vacíos posibles que existen en la teoría debido al proceso de compactificación. Se estima que existen del orden de 10^{10} a 10^{500} vacíos posibles, cada uno de ellos definido con distintas constantes físicas [17]. En este trabajo no consideraremos el enfoque de la teoría de cuerdas para estudiar el problema de la gravedad cuántica.

1.2.2. Gravedad cuántica de lazos

Formalmente, la gravedad cuántica de lazos es una cuantización canónica matemáticamente rigurosa del campo gravitacional que es independiente de la métrica de fondo (*background independent*). Esta teoría toma seriamente la idea adoptada en la relatividad general de Einstein en la que el espacio-tiempo es considerado como un campo dinámico más, por tanto esta teoría establece que el espacio-tiempo debe ser considerado como un objeto cuántico por sí mismo. De esta manera, la teoría deja de describir la evolución de campos sobre un espacio-tiempo – como lo hace la teoría cuántica de campos – sino que describe la dinámica de ‘campos sobre campos’ [2]. En este sentido es que se dice que la teoría es independiente del fondo, ya que su formulación no está construida sobre una geometría establecida *a priori*. Las ecuaciones de evolución de la teoría no están definidas sobre un espacio-tiempo, ni tampoco dependen de este. En lugar de eso, se espera en realidad que de las ecuaciones surjan el espacio y el tiempo, a escalas de distancia mayores a la escala de Planck.

El punto de partida de la teoría es una reformulación a nivel clásico de la relatividad general en términos de las variables de Ashtekar [18], lo cual resulta en una teoría dinámica descrita por medio de las conexiones de espín (*spin connections*) y sus momentos conjugados, las triadas espaciales (*spatial triads*). Posteriormente, se realiza una cuantización que, por el teorema de Stone-von Neumann, no es equivalente a la de Schrödinger, obteniendo así que los operadores que describen a la geometría Riemanniana cuántica tienen eigenvalores puramente discretos [19]. Esto quiere decir que el espacio y el tiempo se encuentran cuantizados, dando así una imagen del espacio-tiempo como un objeto granulado o discretizado, en el mismo sentido de la cuantización del fotón en la teoría cuántica del electromagnetismo o la cuantización en los niveles energéticos en los átomos. En este caso, como el espacio mismo es el que es discreto, resulta que existe una distancia mínima de carácter fundamental, lo que permite que la teoría tenga de manera natural un corte ultravioleta (*ultraviolet cut-off*). De manera más precisa, el espacio puede ser visto como una tela extremadamente fina o una red tejida a partir de pequeños lazos. Esta red de lazos, llamada la red de espines (*spin network*), describe el estado cuántico del espacio-tiempo. La evolución de esta red de lazos es llamada espuma de espines (*spin foam*). El tamaño de estas estructuras se cree que debe de ser del orden de la escala de Planck y, de acuerdo a la teoría, a escalas más pequeñas no tiene significado hablar del concepto de distancia.

La característica más predominante de la gravedad cuántica de lazos es tal vez el hecho fundamental de su geometría cuántica. Por ejemplo, es sabido que si realizamos un tratamiento perturbativo de la gravedad cuántica, dejando de lado la dinámica completa del espacio-tiempo como es usualmente hecho en la teoría cuántica de campos, uno llega a una teoría que no es renormalizable. El motivo por el cual se obtiene este resultado, posiblemente tiene que ver con el hecho de que se asume que incluso a distancias muy pequeñas, el espacio-tiempo tiene una naturaleza continua. No existe ninguna razón para afirmar que la naturaleza continua del espacio-tiempo deba ser preservada a escalas del orden de la energía de Planck. Resulta entonces natural intentar incorporar la dinámica de la geometría del espacio-tiempo en la teoría a través de un enfoque no-perturbativo, como es el caso para la gravedad cuántica de lazos, dejando que la teoría misma sea la que determine la micro-estructura del espacio-tiempo [20].

Formalmente, la teoría es independiente del fondo, pero asociada a esta propiedad existen algunos detalles sin resolver. Por ejemplo, algunas derivaciones requieren una elección fija de la topología, mientras que cualquier teoría consistente con la teoría cuántica de la gravedad debe incluir cambios de topología como proceso dinámico [1].

1.3. ¿En dónde puede ser aplicado?

Como ya vimos, las singularidades representan un sistema físico en el cual se cree que una teoría de gravedad cuántica ayudaría a describir claramente las cosas. La principal singularidad de todas es sin duda el origen del universo mismo. De acuerdo al modelo cosmológico estándar – el Big Bang – el universo comenzó hace aproximadamente 13.799 ± 0.021 mil millones de años [21]. Este modelo nos dice que el universo a sus comienzos se encontraba en un estado altamente energético, en el que había una alta densidad de materia y la curvatura del espacio-tiempo era muy grande. A este nivel los efectos cuánticos también deberían tener, al igual que la gravedad, un dominio predominante en el universo. Por lo tanto, el comienzo del universo va más allá del dominio de la relatividad general de Einstein y se cree que se requiere de una teoría de gravedad cuántica para una adecuada descripción del estado inicial del universo. Uno de los aspectos que una teoría de gravedad cuántica debería responder es qué tan cerca de la singularidad del Big Bang es válido hablar de un espacio-tiempo suave y continuo, como el de la relatividad general. Para responder a esta pregunta no podemos empezar asumiendo un espacio-tiempo suave de fondo.

Si consideramos lo anterior y sumamos el hecho de que la cosmología es un modelo de simetría reducida de la relatividad general, esto hace de la cosmología un sistema físico muy interesante para el estudio de los aspectos cuánticos de la gravedad. En este trabajo de tesis precisamente realizamos un estudio de las consecuencias que puede traer la cuantización polimérica en la dinámica efectiva de un modelo cosmológico, producto del carácter no-perturbativo de la cuantización que considera las propiedades cuánticas del espacio-tiempo. Pero es importante primero notar que para sistemas simples como las teorías de campo en un espacio-tiempo de Minkowsky, el formalismo Hamiltoniano – que es el camino natural para la cuantización – indica que la dinámica está dada por las constricciones del sistema [22]. Por tanto, comencemos revisando la formulación hamiltoniana para teorías con constricciones en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Cuantización de teorías de norma

En este capítulo describimos la formulación hamiltoniana o canónica para las teorías con simetría de norma, ya que este es el punto de partida clásico para la cuantización canónica de teorías de norma como lo son el electromagnetismo, la relatividad general y los sistemas cosmológicos.

El término *norma* se refiere al formalismo matemático para regular los grados de libertad redundantes en la función lagrangiana. Esto quiere decir que las teorías de norma pertenecen a las llamadas teorías lagrangianas singulares, o simplemente *teorías singulares*. Las teorías singulares se caracterizan por ser teorías que contienen constricciones. Esto lleva a que los métodos estándar de cuantización no puedan ser aplicados directamente a estas teorías. Como veremos, el formalismo hamiltoniano resulta ser adecuado para el estudio de las teorías singulares ya que nos permite separar, al nivel de las ecuaciones de movimiento, los grados de libertad dinámicos de los grados de libertad algebraicos, siendo estos últimos consecuencia de las constricciones.

Las teorías de norma actualmente resultan ser de vital importancia en la física ya que son las teorías de campo que explican de manera satisfactoria la física de partículas. Por ejemplo, la electrodinámica cuántica es una teoría de norma, abeliana, que cuenta con el grupo de simetría $U(1)$; tiene un campo de norma que es el 4-potencial electromagnético, y su bosón de norma es el fotón. El modelo estándar de partículas resulta ser también una teoría de norma, la cual es no-abeliana, que cuenta con el grupo de simetría $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ y tiene doce bosones de norma: el fotón, tres bosones débiles y ocho gluones.

Por otro lado, cuando en la física se habla de una *cuantización*, se hace referencia a la construcción de una teoría cuántica de algún sistema determinado a partir de su correspondiente teoría clásica. La *cuantización canónica* [23] es el método de cuantización más consistente y que mejor ha sido desarrollado, el cual se encuentra basado en el formalismo hamiltoniano. Existen otras formulaciones que se pueden utilizar, como la formulación mediante *integral de camino* propuesta por R. Feynman [24], pero uno puede darse cuenta que varias de ellas se encuentran cercanamente relacionadas a la cuantización canónica.

Actualmente, las áreas de estudio de la cuantización formal pueden ser divididas en dos. La primera se encarga de estudiar las complicaciones que surgen de la cuantización canónica de sistemas clásicos genéricos, mientras que la segunda investiga formulaciones alternativas y su relación con la cuantización canónica. En el contexto de la cuantización canónica, la descripción de la dinámica de un sistema clásico en su forma hamiltoniana no siempre puede ser lograda de la manera usual, i.e. de manera trivial mediante una transformada de Legendre. Tal es el caso de los sistemas descritos por teorías de norma. Veamos entonces las características de estas teorías.

2.1. Formalismo hamiltoniano para teorías de norma

2.1.1. Teorías singulares

El punto de partida para el estudio de la dinámica de las teorías de norma es comenzar por el principio de mínima acción en su forma lagrangiana [25].

Consideremos un sistema clásico descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas (q_i, \dot{q}_k) tal que sus ecuaciones de movimiento se encuentren definidas mediante un principio variacional sobre la acción

$$S = \int dt L(q_i, \dot{q}_k; t) \quad (2.1)$$

en donde los índices latinos, que corren como $i, k = 1, 2, \dots, N$, denotan el número de coordenadas y velocidades generalizadas que describen el movimiento del sistema en el *espacio de configuraciones*, \mathcal{Q} . Las ecuaciones de movimiento de *Euler-Lagrange* son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.2)$$

Desarrollando de manera explícita la derivada total respecto al tiempo del primer término, tenemos

$$\sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.3)$$

Si definimos las siguientes cantidades

$$W_{ij}(q_j, \dot{q}_k) := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad V_i(q_j, \dot{q}_k) := \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} \quad (2.4)$$

donde la matriz W_{ij} es conocida como la matriz hessiana del sistema, podemos escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente manera

$$\sum_j W_{ij} \ddot{q}_j = V_i \quad (2.5)$$

Una formulación langrangiana es nombrada como una teoría singular si el determinante de la matriz hessiana tiene valor igual a cero, de otra manera es llamada como una teoría no-singular, es decir

$$\det |W_{ij}| = \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| = \begin{cases} = 0 & \text{teoría singular} \\ \neq 0 & \text{teoría no-singular} \end{cases} \quad (2.6)$$

Por un lado, se tiene que para las teorías no-singulares la matriz W_{ij} es invertible, de manera que uno obtiene de manera explícita un conjunto completo de ecuaciones de movimiento de segundo orden

$$\ddot{q}_j = \sum_i (W^{-1})_{ij} V_i \quad (2.7)$$

Por el otro lado, para el caso de las teorías singulares en donde W_{ij} no es invertible, la imagen de W_{ij} visto como el mapeo lineal entre espacios vectoriales

$$W_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

tiene una co-dimensión no nula que es del mismo tamaño que la dimensión de su kernel. Esto significa que el vector V_i al encontrarse en la imagen de W_{ij} , como podemos ver de la ecuación (2.5), no puede ser linealmente independiente y debe estar definido en algún subespacio de dimensión menor a N , el número de coordenadas generalizadas. Esto impone restricciones no triviales sobre q_i y \dot{q}_k .

Definiendo de manera apropiada los momentos generalizados y llevando a cabo una transformación de Legendre, es posible trasladar la dinámica del sistema físico al *espacio fase*, \mathcal{P} . En este sentido, definimos los momentos canónicos como

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.9)$$

2.1.2. Constricciones primarias

En la mecánica clásica, usualmente se da por hecho que los momentos son funciones independientes de las velocidades. A pesar de que la suposición se cumple para muchos casos de interés, esta condición es muy restrictiva como para ser aplicada a teorías físicas más fundamentales. En general, la definición de los momentos resulta en n variables independientes si y solo si la matriz $\partial p_i / \partial \dot{q}_j$ es invertible. Vemos que esta matriz corresponde precisamente a la matriz W_{ij} definida en (2.4). Como nuestro interés se encuentra en el estudio de las teorías de norma (las cuales son teorías singulares), suponemos que la condición que se cumple es

$$\det \left| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right| = \det |W_{ij}| = 0 \quad (2.10)$$

En este caso, las velocidades no pueden ser invertidas en función de las coordenadas generalizadas y los momentos. Se tiene como consecuencia, entonces, que los momentos no son todos independientes; por tanto, surgen relaciones algebraicas entre ellos, directamente de su definición, que deben de ser cumplidas. Es decir, se tiene

$$\phi_m(q_i, p_k) \approx 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.11)$$

donde M corresponde al número de ecuaciones resultantes. Estas relaciones son llamadas *constricciones primarias* para enfatizar que son resultado de la mera definición de los momentos.

En la ecuación (2.11) para las constricciones, se hace uso del símbolo “ \approx ” (que denotaremos como *igualdad débil*) para enfatizar que la cantidad ϕ_m se encuentra numéricamente restringida a ser cero, pero que en general no tiene por qué anularse sobre todo el espacio fase.

En general, cualquier ecuación que se cumpla únicamente en el subespacio $\phi_m \approx 0$, del espacio fase total, se dirá que se cumple *débilmente* [26]. A este subespacio definido por las constricciones primarias, lo llamaremos como *superficie de constricción*. Por otro lado, cualquier ecuación que se cumpla en todo el espacio fase, se dirá que se cumple *fuertemente*, o que cumple con una *igualdad fuerte* “ $=$ ”.

2.1.3. Ecuaciones de Hamilton

Como es usual, definamos al hamiltoniano canónico

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_i, \dot{q}_k(p_j)) \quad (2.12)$$

y calculemos su variación:

$$\delta H = \sum_k (\dot{q}_k) \delta p_k - \sum_j \left(\frac{\delta L}{\delta q_j} \right) \delta q_j \quad (2.13)$$

Nótese que esta solo depende de las coordenadas y de los momentos. Es decir, H puede ser expresada en términos de q 's y p 's, de manera independiente a las velocidades.

Sin embargo, la definición que hemos dado para el hamiltoniano no está determinada de manera única. Esto es debido a que las variaciones se encuentran restringidas por las constricciones. De manera que podemos agregar a (2.12) cualquier combinación lineal de las constricciones, cuyo valor sobre la superficie de constricción es igual a cero, motivándonos a establecer un nuevo hamiltoniano

$$H^* = H + \sum_m c_m \phi_m \quad c_m \in C^\infty(\mathcal{P}) \quad (2.14)$$

equivalente al que habíamos definido, donde c_m es una función arbitraria de las coordenadas y de los momentos. Este nuevo hamiltoniano se encuentra bien definido solo en la superficie de restricción.

Consideremos ahora el procedimiento que se realiza de manera estándar para obtener las ecuaciones de Hamilton. Uno expande la variación del hamiltoniano de dos maneras equivalentes y las iguala

$$\delta H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i) \quad (2.15)$$

donde la segunda igualdad se obtiene de simplificar las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2), con la definición del momento canónico (2.9). De esta igualdad, uno puede deducir las ecuaciones de movimiento en el formalismo hamiltoniano usual, libre de restricciones.

$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) \delta p_i \right] = 0 \quad (2.16)$$

Sin embargo, en el presente contexto en donde tenemos restricciones en el sistema, uno no puede trivialmente igualar a cero a las variaciones δq_i y δp_i , debido a que, precisamente, se encuentran sujetas a las restricciones. En este caso, las variaciones deben ser tangentes a la superficie de restricción.

Uno puede demostrar que la solución de

$$\sum_n A_n \delta q_n + \sum_n B_n \delta p_n = 0 \quad (2.17)$$

para las variaciones δq_n y δp_n , restringidas por las restricciones $\phi_m \approx 0$, es en general [25]

$$A_n = \sum_m u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \quad (2.18)$$

$$B_n = \sum_m u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (2.19)$$

donde las u_m en general son funciones arbitrarias que dependen de las coordenadas y las velocidades. Usando este resultado en (2.17) y comparando término a término con (2.16), las ecuaciones de movimiento que se obtienen son

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_m u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (2.20)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_m u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \quad (2.21)$$

2.1.4. Paréntesis de Poisson

Introducimos ahora un formalismo que nos permitirá escribir una notación más compacta. Nos referimos al *paréntesis de Poisson*. Sean dos funciones arbitrarias $f, g \in C^\infty(\mathcal{P})$, el paréntesis de Poisson entre ambas cantidades se define como

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \quad (2.22)$$

De su definición, el paréntesis de Poisson cumple con ciertas propiedades. Estas son,

- Anticonmutatividad

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (2.23)$$

- Linealidad en cada elemento

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \quad (2.24)$$

- Regla de Leibniz o del producto

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\} \quad (2.25)$$

- Identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (2.26)$$

donde también h es una función en el espacio fase.

Para cualquier función en el espacio fase $g(q_i, p_k)$ se tiene

$$\dot{g} = \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (2.27)$$

Si en esta expresión sustituimos las ecuaciones de movimiento (2.20) y (2.21), llegamos a que podemos expresar la derivada temporal de cualquier función como

$$\dot{g} \approx \{g, H\} + \sum_m u_m \{g, \phi_m\} \quad (2.28)$$

o de manera más compacta

$$\dot{g} \approx \{g, H^*\} \quad (2.29)$$

Es importante recordar que la igualdad débil “ \approx ” nos indica que las constricciones deben de hacerse efectivas solo después de haber calculado las ecuaciones de movimiento, o equivalentemente, después de haber calculado el paréntesis de Poisson.

2.1.5. Condiciones de consistencia

Un requerimiento básico que se debe cumplir para que esta construcción tenga sentido, es que las constricciones primarias deben ser preservadas en el tiempo. Esto da origen a las siguientes condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}_n = \{\phi_n, H\} + \sum_m u_m \{\phi_n, \phi_m\} \approx 0 \quad (2.30)$$

Hay cuatro tipos diferentes de condiciones que pueden resultar:

- i) Una ecuación que nos lleve a una inconsistencia, tal como tener $1 = 0$. Si esto sucede, significa que tenemos un lagrangiano cuyas ecuaciones de movimiento son inconsistentes. Por ejemplo, el caso cuando $L(q, \dot{q}) = q$.
- ii) Una ecuación que se reduzca a $0 = 0$, es decir, que se cumpla idénticamente, tal vez con ayuda de las constricciones primarias.

- iii) Una ecuación que se reduzca a una ecuación independiente de las funciones u_m , y por tanto que solo dependa de las coordenadas y los momentos. Como estas ecuaciones son independientes de las constricciones primarias, sino corresponderían al punto anterior, obtenemos nuevas constricciones en el sistema, de la forma

$$X_{m'}(q_i, p_k) \approx 0, \quad m' = 1, 2, \dots, K \quad (2.31)$$

donde K corresponde al número de las nuevas constricciones obtenidas. Estas nuevas constricciones son llamadas *constricciones secundarias* para señalar que estas se derivan de aplicar las ecuaciones de movimiento a las constricciones primarias. Obviamente, las constricciones secundarias también estarán sujetas a las condiciones de consistencia

$$\dot{X}_{m'} = \{X_{m'}, H\} + \sum_m u_m \{X_{m'}, \phi_m\} \approx 0 \quad (2.32)$$

y se deberá hacer el mismo análisis que se está llevando a cabo para la ecuación (2.30). Este análisis nos lleva a la posibilidad de tener más constricciones secundarias, por lo que uno debe llevar este procedimiento hasta que ya no hayan más constricciones secundarias. Sin embargo, de manera fundamental no existe diferencia entre ambos tipos de constricciones, por lo que las podemos agrupar en una sola ecuación

$$\phi_j(q_i, p_k) \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, M + K = J \quad (2.33)$$

donde ya en este caso podemos considerar a K como el número total de constricciones secundarias, obtenidas de agotar este análisis; mientras que M , recordemos, corresponde al número de constricciones primarias.

- iv) Una ecuación que imponga condiciones sobre las funciones u_m , es decir, cuando se cumple que $\det \{\phi_n, \phi_m\} \neq 0$.

2.1.6. Condiciones para las funciones u_m

Una vez que hayamos encontrado el total de constricciones para el sistema llevando a la condición III) hasta sus últimas consecuencias, podemos pasar a trabajar con la condición IV) que impone restricciones sobre las funciones u_m . Estas restricciones son

$$\{\phi_j, H\} + \sum_m u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (2.34)$$

donde el índice m es sumado sobre las constricciones primarias, $m = 1, \dots, M$, mientras que el índice j es sumado sobre el conjunto completo de constricciones $j = 1, \dots, J$. Podemos considerar entonces a la ecuación (2.34) como un conjunto de J ecuaciones lineales no homogéneas para las $M (\leq J)$ funciones incógnitas u_m .

En este caso uno puede obtener una solución para u_m invirtiendo la matriz $C_{jm} = \{\phi_j, \phi_m\}$. Esto resuelve la parte no homogénea de la ecuación (2.34), y esta solución la denotamos como $U_m(q_i, p_k)$. Sin embargo, la solución completa requiere también la solución a la parte homogénea, es decir, la solución a

$$\sum_m V_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (2.35)$$

que consta de la combinación lineal de todas las soluciones independientes, las cuales etiquetaremos como V_{am} . De esta manera, la solución más general para (2.34) es

$$u_m \approx U_m + \sum_a v_a V_{am}, \quad a = 1, 2, \dots, A \quad (2.36)$$

donde v_a son funciones completamente arbitrarias, y donde A corresponde al número de soluciones linealmente independientes para (2.35), cuyo valor es igual al número de constricciones menos el número de condiciones de consistencia que se hayan obtenido para las funciones u_m . Es decir, A corresponde al número de grados de libertad no físicos en el sistema.

En lo anterior, supusimos que las constricciones son independientes. Si las constricciones no son independientes, se dice entonces que son *reducibles*. Esto no representa ningún problema ya que uno simplemente puede dejar de lado las constricciones redundantes, sin perder información acerca del sistema, y proceder a realizar el análisis.

2.1.7. Hamiltoniano total

En este punto resulta ser natural que introduzcamos al hamiltoniano total del sistema, en términos de esta nueva expresión para u_m ,

$$H_T = H + \sum_m U_m \phi_m + \sum_{a,m} v_a V_{am} \phi_m \quad (2.37)$$

Esta expresión cuenta con una cantidad A de funciones arbitrarias v_a .

Definimos las cantidades

$$H' := H + \sum_m U_m \phi_m \quad \phi_a := \sum_m V_{am} \phi_m \quad (2.38)$$

de manera que podemos escribir al hamiltoniano total en una manera más condensada como

$$H_T = H' + \sum_a v_a \phi_a \quad (2.39)$$

Concluimos que la evolución para una función arbitraria f en el espacio fase, es dada por

$$\dot{f} = \{f, H_T\} \quad (2.40)$$

Por construcción, estas ecuaciones de movimiento son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2.1.8. Funciones de primera clase y de segunda clase

Introducimos ahora una clasificación para las funciones definidas en el espacio fase \mathcal{P} , debido a que tiene un papel central en el presente análisis. Se dice que una función $F(q_i, p_k)$ es de *primera clase*, si su paréntesis de Poisson con cada constricción se anula débilmente

$$\{F, \phi_j\} \approx 0 \quad (2.41)$$

de otra manera, se dice que es una función de *segunda clase*. Entonces, la función F se dice de segunda clase si su paréntesis de Poisson con al menos una de las constricciones no se anula débilmente.

Una característica importante de la propiedad de primera clase, es que se preserva bajo la acción del paréntesis de Poisson. Esto quiere decir que si tenemos dos funciones arbitrarias F y G que son de primera clase, entonces el paréntesis de Poisson entre ambas funciones, $\{F, G\}$, también será de primera clase.

Como primer aplicación del concepto de primera clase, investiguemos a qué clase pertenece el hamiltoniano total. Para esto, calculamos

$$\begin{aligned}
\{\phi_j, H_T\} &= \{\phi_j, H\} + \sum_m \{\phi_j, U_m \phi_m\} + \sum_{a,m} \{\phi_j, v_a V_{am} \phi_m\} \\
&\approx \{\phi_j, H\} + \sum_m U_m \{\phi_j, \phi_m\} + \sum_{a,m} v_a V_{am} \{\phi_j, \phi_m\}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Notamos que los primeros dos términos corresponden a la condición de consistencia (2.34) para el total de constricciones, siendo estos entonces débilmente nulos. El tercer término, adicionalmente, corresponde a la solución (2.35) y también se anula de manera débil. Por tanto concluimos que

$$\{\phi_j, H_T\} \approx 0 \tag{2.43}$$

el hamiltoniano total es una función de primera clase.

2.1.9. Constricciones de primera y segunda clase

La clasificación en términos de clases también puede ser aplicada a las constricciones. De hecho, clasificar de esta manera a las constricciones aporta una gran claridad acerca de la naturaleza de las constricciones, como ya veremos.

Una *constricción de primera clase* se define como una constricción cuyo paréntesis de Poisson con todas las demás constricciones se anula débilmente, esto es

$$\{\phi, \phi_j\} \approx 0 \tag{2.44}$$

de otra manera, tendremos una *constricción de segunda clase*.

Para apreciar las consecuencias de ver de esta forma a las constricciones, consideremos la matriz

$$C_{jj'} = \{\phi_j, \phi_{j'}\} \tag{2.45}$$

que es análoga precisamente a las condiciones de consistencia (2.34), pero que ahora toma en cuenta a todas las constricciones, no solo a las primarias. Para mayor claridad, resulta útil que retomemos dicha expresión

$$\{\phi_j, H\} + \sum_{j'} u_{j'} \{\phi_j, \phi_{j'}\}$$

Es fácil demostrar que si tenemos al menos una constricción de primera clase, es decir, que la ecuación (2.44) se cumple para al menos una de las constricciones, entonces la matriz $C_{jj'}$ no es invertible ya que tendremos que $\det |C_{jj'}| = 0$. Esto nos dice que no todas las funciones $u_{j'}$ podrán ser resueltas de manera explícita y que la dinámica no estará determinada de manera única. Esta ambigüedad, como ya vimos, queda reflejada en el hecho de que en el hamiltoniano total tenemos presentes a las funciones arbitrarias v_a .

Bajo una transformación adecuada, uno puede reescribir a la matriz $C_{jj'}$ tal que podamos separar a todas las constricciones de primera clase (que podremos contener en una submatriz C'_{ab}) de las demás, de manera que sobre la superficie de constricción uno pueda escribirla como

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} C'_{ab} & 0 \\ 0 & C'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

La submatriz $C'_{\alpha\beta}$, al ya no contener constricciones de primera clase, cumplirá con ser invertible. Es decir, se tiene ahora que $\det |C'_{\alpha\beta}| \neq 0$, lo que implica que $\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \neq 0$, mostrando así que las constricciones que quedan deben ser todas de segunda clase. Como consecuencia, ahora podemos determinar el valor de las funciones $u_{j'}$ de manera explícita. En particular, podemos ver que si todas las constricciones del sistema fueran de segunda clase, entonces podríamos determinar a todas las funciones $u_{j'}$ del sistema y la dinámica quedaría descrita de manera única, libre de la ambigüedad de las transformaciones de norma.

Resumamos la información de los párrafos anteriores. Nosotros comenzamos con un cierto número de constricciones en nuestro sistema. Vimos que por cada restricción de segunda clase que tengamos, podremos determinar el valor una de las funciones u_j , cuyo número es igual al número de constricciones totales que tengamos. Por otro lado, la presencia de cada restricción de primera clase implica la presencia de una de las funciones arbitrarias v_a . Cada elección diferente para cada una de las funciones v_a corresponde a una *transformación de norma*, la cual debe dejar invariante al estado físico del sistema. Por tanto, uno puede concluir que la presencia de constricciones de primera clase está relacionada con la presencia de transformaciones de norma.

Habiendo mostrado la relevancia de clasificar de esta manera a las constricciones, es necesario aclarar lo siguiente. Para evitar confusiones al momento de clasificar a las constricciones, resulta importante notar la diferencia entre el conjunto de constricciones primarias (que surgen de la definición de los momentos) y secundarias (que surgen de imponer condiciones de consistencia en las constricciones primarias), y el conjunto de constricciones de primera y segunda clase (que dependen del valor que resulte de tomar el paréntesis de Poisson consigo mismas).

2.1.10. Transformaciones de norma

Para entender el origen de las transformaciones de norma, tratemos de entender la presencia de las funciones arbitrarias v_a en el hamiltoniano total. Su presencia nos indica que la evolución de las coordenadas y de los momentos generalizados no se encuentra determinada de manera única por el estado inicial del sistema, sino que tenemos muchas maneras de caracterizar un mismo estado físico, dado que el estado no debe depender de v_a . Así que debemos encontrar todos los conjuntos de q 's y p 's que correspondan a un mismo estado físico.

Si damos un conjunto inicial de variables canónicas a cierto tiempo inicial, uno esperaría que las ecuaciones de movimiento determinaran completamente al estado del sistema a tiempos posteriores [27]. Consideremos entonces una variable dinámica g , cuyo valor a un tiempo inicial sea $g(t=0) = g_0$, y veamos su evolución después de un intervalo corto de tiempo δt ,

$$g(t + \delta t) = g_0 + \dot{g}\delta t = g_0 + \{g, H_T\}\delta t = g_0 + \delta t \left(\{g, H'\} + \sum_a v_a \{g, \phi_a\} \right) \quad (2.47)$$

Consideremos ahora que tomamos inicialmente otras funciones v'_a , lo cual lo podemos hacer ya que estas son completamente arbitrarias. Esto nos dará una evolución diferente

$$g'(t + \delta t) = g_0 + \dot{g}'\delta t = g_0 + \{g, H_T\}\delta t = g_0 + \delta t \left(\{g, H'\} + \sum_a v'_a \{g, \phi_a\} \right) \quad (2.48)$$

tomando la diferencia entre ambas tenemos

$$\Delta g(t + \delta t) = \sum_a \delta t \Delta v_a \{g, \phi_a\} = \sum_a \epsilon_a \{g, \phi_a\} \quad (2.49)$$

en donde $\epsilon_a := \delta t \Delta v_a$ corresponde a una cantidad infinitesimal. Es decir, durante el intervalo infinitesimal de tiempo δt , la diferencia $\Delta v_a = v_a - v'_a$ entre las dos funciones arbitrarias genera la diferencia $\Delta g = g - g'$ en la evolución. Entonces la transformación (2.49) no altera el estado físico del sistema a un tiempo posterior.

Podemos cambiar las variables que describen cierta configuración física de acuerdo a (2.49) y las nuevas variables describirán el mismo estado. Este cambio consiste en aplicar una transformación de contacto generada por la función $\epsilon_a \phi_a$. Es decir, las constricciones de primera clase son las generadoras de las transformaciones de norma. Encontramos así que todos los conjuntos de variables canónicas que estén relacionados mediante una transformación de norma, describen al mismo estado físico.

En general, la transformación (2.49) no es la única que deja invariante al estado físico del sistema. Se puede demostrar que:

- El paréntesis de Poisson $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ de cualquier par de constricciones de primera clase, genera una transformación de norma.
- El paréntesis de Poisson $\{\phi_a, H'\}$ de cualquier construcción de primera clase con el hamiltoniano H' de primera clase, genera una transformación de norma.

En general no es posible probar que cada construcción secundaria de primera clase sea un generador de transformación de norma. Sin embargo, uno postula que en general todas las constricciones de primera clase – esto es, primarias y secundarias – son generadoras de transformaciones de norma. A esto se le conoce como la *conjetura de Dirac*. Existen buenas razones para postular la conjetura, como el hecho de que la división de las constricciones en primarias y secundarias no es la más natural desde el punto de vista del formalismo hamiltoniano. A pesar de que uno puede construir contraejemplos, la conjetura de Dirac se cumple para todos los sistemas físicos conocidos hasta ahora.

Una vez aclaradas las transformaciones de norma, damos la siguiente definición. Una *observable física* es toda aquella cantidad que cumple con ser invariante ante transformaciones de norma.

2.1.11. Hamiltoniano extendido

Una vez establecida la importancia de clasificar a las constricciones en términos de sus clase, resulta útil introducir una notación que distinga entre ambos tipos de constricciones. Denotamos a las constricciones de primera clase con la letra γ y a las constricciones de segunda clase con χ , mientras que el conjunto completo de constricciones será denotado como $\{\phi_j\}$, tal y como se venía haciendo.

La dinámica más general deberá permitir realizar transformaciones de norma arbitrarias mientras que el sistema físico se encuentre evolucionando en el tiempo. El movimiento generado por el hamiltoniano total H_T sólo contiene constricciones de primera clase primarias. Por tanto, debemos de sumar a este todas las constricciones de primera clase secundarias, multiplicadas por funciones arbitrarias adicionales. A esta función de primera clase que se obtiene, se le conoce como *hamiltoniano extendido*

$$H_E = H' + \sum_a u_a \gamma_a \quad (2.50)$$

donde el índice a corre sobre el conjunto completo de constricciones de primera clase. Este número corresponde al número de grados de libertad no físicos del sistema.

Es claro que para las observables físicas, es decir, las cantidades invariantes ante transformaciones de norma, la evolución descrita por H' , H_T y H_E es la misma. Mientras que para las demás cantidades, el hamiltoniano extendido H_E es el que toma en cuenta toda la libertad de norma que hay en el sistema.

2.1.12. Paréntesis de Dirac

Las constricciones de segunda clase no pueden ser interpretadas como generadores de una transformación de norma. La razón es que, por definición, las transformaciones generadas por estas no preservan a todas las constricciones $\phi_a \approx 0$ y por tanto mapean estados permitidos a estados no permitidos. Uno puede interpretar que las constricciones de segunda clase generan un flujo transversal, o normal, a la superficie de construcción; mientras que las constricciones de primera clase generan un flujo tangente a la superficie de construcción [28].

Si las constricciones de segunda clase no pueden ser resueltas de manera explícita, uno debe de tener cuidado con que el flujo generado por estas en el espacio fase, no nos lleve a dejar la superficie de construcción. Una manera en que podemos estar seguros de que nos mantendremos en todo momento sobre la superficie de construcción es introduciendo el *paréntesis de Dirac*.

Consideremos que tenemos un sistema en el que separamos las constricciones de primera clase de las de segunda clase, tal y como lo hicimos en (2.46), y denotemos a las constricciones de segunda

clase como χ_α . Tomemos ahora un par de funciones arbitrarias F y G sobre el espacio fase. Entonces, el paréntesis de Dirac se define como

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} C'^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\} \quad (2.51)$$

en donde $C'^{\alpha\beta}$ denota a la inversa de la matriz $C'_{\alpha\beta}$ que contiene a todas las constricciones de segunda clase de nuestro sistema.

Al usar el paréntesis de Dirac, uno puede imponer a las constricciones de segunda clase de manera fuerte incluso antes de evaluar al paréntesis de Dirac. También se puede probar que las ecuaciones de movimiento generadas por este, son equivalentes a las que uno obtiene mediante el paréntesis de Poisson

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}_D \approx \{F, H_T\} \quad (2.52)$$

2.1.13. Fijación de la norma

Como ya vimos, la libertad de norma, que es resultado de la presencia de constricciones de primera clase en un sistema físico, implica que hay más de un conjunto de variables canónicas que corresponden a un estado físico determinado. Por tanto, resulta deseable que uno pueda eliminar en la práctica a estas ambigüedades imponiendo más condiciones en las variables canónicas, de manera que se tenga una correspondencia uno a uno entre el estado físico y el valor de un conjunto de variables canónicas independientes. A estas condiciones extra que les podemos imponer a las variables canónicas las llamaremos *condiciones canónicas de norma*. Estas no son consecuencia de la teoría, sino que son ecuaciones impuestas *ad hoc* para evitar contar múltiples veces un mismo estado físico.

Ya que solo queremos eliminar de la teoría a los elementos arbitrarios, no observables, debemos de tener cuidado con que las condiciones de norma que impongamos no afecten a las propiedades observables que son invariantes de norma. Existen dos propiedades que cualquier conjunto de condiciones de norma

$$C_b(q_i, p_k) \approx 0 \quad (2.53)$$

debe de cumplir para considerar que estas fijan la norma de manera correcta o satisfactoria:

- a) La norma seleccionada debe ser accesible. Esto quiere decir que dado cualquier conjunto de variables canónicas, debe existir una transformación de norma que mapee este conjunto al conjunto de variables canónicas que satisfacen (2.53). Esta transformación debe ser obtenida a partir de la iteración de las transformaciones infinitesimales $\delta v_a \{F, \gamma_a\}$, descritas en (2.49). Esto asegura que las condiciones de norma no afecten a las propiedades observables. Como el número de parámetros independientes δv_a es igual al número de constricciones independientes de primera clase, concluimos que el número de condiciones de norma no puede ser mayor a este número .
- b) Las condiciones de norma (2.53) deben de fijar completamente la norma. Esto significa que la única transformación de norma que debe permanecer es la que preserve a las condiciones de norma C_b . En otras palabras, la ecuación

$$\sum_a \delta v_a \{C_b, \gamma_a\} \approx 0 \quad (2.54)$$

debe implicar

$$\delta v_a \approx 0 \quad (2.55)$$

Lo anterior se cumple solo si el número de ecuaciones independientes es igual o mayor al número de funciones δv_a .

Si consideramos simultáneamente las implicaciones que se dan de las propiedades a) y b), llegamos a la conclusión de que el número de condiciones de norma independientes debe ser igual al número de constricciones independientes de primera clase. De esta manera llegamos a que la matriz $\{C_b, \gamma_a\}$ corresponde a una matriz cuadrada. En este caso, para que (2.54) implique (2.55), esta matriz debe ser invertible, es decir,

$$\det |\{C_b, \gamma_a\}| \neq 0 \quad (2.56)$$

pero esta condición nos dice que el conjunto de constricciones C_b y ϕ_a forma un conjunto de constricciones de segunda clase. Entonces, uno puede ver que después de que se fija la norma, no queda ninguna constricción de primera clase. Esto resulta ser bastante razonable, ya que si quedara alguna constricción de primera clase, uno podría tener aún cierta libertad de norma generada por dicha constricción.

Después de fijar la norma, uno puede pasar a implementar el paréntesis de Dirac para así tener una teoría libre de constricciones en el sentido de que ahora las constricciones pueden ser consideradas como identidades que expresan ciertas variables dinámicas en términos de otras.

A pesar de que las condiciones de norma (2.53) se cumplen localmente, esto no implica que necesariamente se deban cumplir de manera global. La geometría de la superficie de constricción puede ser tal que impida la existencia de condiciones de norma globales. En la literatura generalmente se refiere a este problema como la *ambigüedad de Gribov*. Debido a este problema, resulta importante no perder de vista a las teorías con constricciones de primera clase que no fijan la norma.

2.1.14. Ejemplo de un sistema hamiltoniano con constricciones

Consideremos la acción que describe el movimiento de una partícula relativista de masa m en el espacio de Minkowski, desde un sistema de referencia inercial con coordenadas $x^\mu = (t, x^i)$ ¹

$$S[x^i(t)] = -m \int dt \sqrt{1 - \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^i(t)}{dt}} \quad (2.57)$$

Esta descripción es correcta, sin embargo, no es obvia la invariancia ante transformaciones de Lorentz [29]. Resulta útil entonces una descripción en donde esta invariancia se mantenga de manera explícita. Esto puede ser logrado si introducimos variables dinámicas adicionales proporcionadas por simetrías de norma, de manera que uno recupere la equivalencia con la descripción original.

Podemos hacer uso de un parámetro arbitrario τ para etiquetar las posiciones sobre una línea de mundo descrita en el espacio-tiempo por medio de las funciones $x^\mu(\tau)$, de manera que ponemos a un mismo nivel a la coordenada temporal x^0 con respecto a las coordenadas espaciales x^i , [30]. Utilizando estas variables dinámicas, uno ve que la acción toma la forma

$$S[x^\mu(\tau)] = -m \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (2.58)$$

en donde denotamos $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ y utilizamos $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Vemos que esta acción posee de manifiesto la invariancia de Lorentz. A costa de mantener explícita la invariancia de Lorentz, el modelo adopta una característica muy importante: la invarianza ante reparametrización de la línea de mundo. Esta invariancia corresponde a una simetría de norma en el sistema [31]. Si uno realiza la elección de norma $x^0(\tau) = \tau$, uno regresa a la acción original.

Manteniendo la libertad de norma, pasamos ahora a la formulación hamiltoniana del sistema. Los momentos canónicos están dados por

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \quad (2.59)$$

¹En donde utilizamos unidades donde $c = 1$, y en donde los índices corren de manera usual, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$.

Si realizamos una transformación de Legendre para calcular la función hamiltoniana, vemos que esta se anula idénticamente

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - L = 0 \quad (2.60)$$

Uno puede darse cuenta que no todos los momentos son independientes y que cumplen con la constricción

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0 \quad (2.61)$$

Esta constricción es de primera clase y corresponde a la condición de *mass-shell* para una partícula relativista de masa m . Desde la perspectiva de la línea de mundo, esta condición nos dice que la partícula no puede quedarse quieta en el espacio de Minkowski, sino que al menos tiene que mantenerse en movimiento en la dirección temporal con $(p^0)^2 \geq m^2$.

La acción hamiltoniana toma entonces la forma

$$S[x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), \lambda(\tau)] = \int d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{\lambda}{2} (p_\mu p^\mu + m^2) \right] \quad (2.62)$$

donde λ corresponde al multiplicador de Lagrange de la constricción de primera clase $\phi := \frac{1}{2}(p_\mu p^\mu + m^2) = 0$. La constricción juega el papel del generador de la dinámica del sistema una vez que fijamos la norma, por lo que escribimos al hamiltoniano del sistema como

$$H_E = v \phi \quad (2.63)$$

en donde v es una función arbitraria.

Las ecuaciones de movimiento que obtenemos son

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \{x^\mu, v\phi\} = v p^\mu \\ \dot{p}_\mu &= \{p_\mu, v\phi\} = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Vemos que verdaderamente H_E es el generador de la evolución dinámica, y solo debemos de fijar la norma para determinar la evolución por completo. Si queremos fijar la norma mediante una condición de norma Ω , debemos observar que esta debe depender explícitamente del parámetro τ ya que se debe cumplir

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \{\Omega, H_E\} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + v p^\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.65)$$

y solo obtenemos una solución no trivial para v si $\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \neq 0$ y si $\frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \neq 0$, al menos para alguno de los índices μ [32]. Escogemos entonces la condición de norma

$$\Omega = x^0 - \tau \quad (2.66)$$

De esta manera podemos determinar que $v = 1/p^0$, de acuerdo con (2.65). Obtenemos finalmente que el hamiltoniano es

$$H_E = \frac{1}{2p^0} (p_\mu p^\mu + m^2) \quad (2.67)$$

con el cual podemos determinar de manera única la evolución física del sistema.

2.2. Cuantización de Dirac

El método de cuantización de Dirac [26] consiste en un conjunto de prescripciones que busca encarar de manera consistente la cuantización de sistemas físicos con constricciones. Consideremos primero el procedimiento estándar [23] que se sigue para la cuantización de sistemas sin constricciones.

El proceso de cuantización usual consiste en considerar a las coordenadas generalizadas y a sus momentos canónicos asociados como los observables básicos y definir una representación de ellos como operadores cuánticos en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Los operadores deben de ser seleccionados tal que el conmutador entre dos operadores esté dado por el operador correspondiente al paréntesis de Poisson de los observables, es decir, tomamos el mapeo $\widehat{}$

$$[\widehat{F}, \widehat{G}] = i\hbar\{\widehat{F}, \widehat{G}\} \quad (2.68)$$

el cual asigna un operador a cada función del espacio fase. En general este mapeo de funciones del espacio fase a operadores resulta en operadores que no conmutan entre sí. Por ejemplo, si el paréntesis de Poisson entre F y G no es nulo, entonces tendremos que $\widehat{F}\widehat{G} \neq \widehat{G}\widehat{F}$. Por tanto, el mapeo (2.68) es válido “módulo” el ordenamiento de operadores en el lado derecho de la ecuación, o sea

$$[\widehat{F}, \widehat{G}] = i\hbar\{\widehat{F}, \widehat{G}\} + O(\hbar^2) \quad (2.69)$$

En la teoría cuántica, los estados están representados por vectores que se encuentran en el espacio de Hilbert. Uno puede tomar a este *espacio de estados* como el conjunto de funciones complejas de cuadrado integrable, las cuales llamaremos *funciones de onda* Ψ . Utilizando la notación de Dirac, en donde denotamos a un elemento del espacio de estados como $|\Psi\rangle$, podemos establecer de manera simplificada a la mecánica cuántica en la representación de Schrödinger de la siguiente manera. Dado un estado $|\Psi(t_0)\rangle$, su evolución se encuentra determinada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \widehat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (2.70)$$

Las mediciones y las propiedades físicas del estado quedan establecidas por medio del *valor de expectación* de las observables.

$$\langle F \rangle = \langle \Psi | \widehat{F} | \Psi \rangle \quad (2.71)$$

Como queremos que los valores de expectación correspondan a cantidades reales, el producto escalar tiene que ser tal que las observables reales estén representadas por operadores hermiticos.

Siempre se encuentra disponible una *representación estándar* para los operadores cuánticos siempre y cuando el espacio fase sea el espacio cotangente del espacio de configuraciones. En este caso se tiene

$$\widehat{F}\Psi(q_i) = F(q_i)\Psi(q_i), \quad \widehat{p}_k\Psi(q_i) = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial q_k}(q_i) \quad (2.72)$$

Una restricción que se impone sobre la representación es que esta debe ser irreducible. Para la representación estándar, el producto escalar es único y corresponde a

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int dq_i \Phi^*(q_i)\Psi(q_i) \quad (2.73)$$

donde dq_i es la medida que queda invariante ante las “traslaciones” generadas por los operadores \widehat{p}_k . Esto se cumple solo para cuando el espacio de configuraciones es de dimensión finita.

Podemos considerar también el teorema de Ehrenfest, que básicamente nos dice que los valores de expectación se comportan casi como las funciones clásicas del espacio fase.

$$\frac{d}{dt} \langle F \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\widehat{F}, \widehat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + O(\hbar) \quad (2.74)$$

Para el caso de sistemas que cuentan con constricciones hay que tomar en consideración algunos detalles extra para completar el proceso de cuantización. Por ejemplo, si queremos que el teorema de Ehrenfest se siga cumpliendo al menos para orden principal en \hbar , uno tiene que utilizar las constricciones $\hat{\phi}_a$ para imponer la siguiente condición sobre los estados físicos

$$\hat{\phi}_a |\Psi\rangle = 0 \quad (2.75)$$

Esta condición proporciona un subespacio lineal que es llamado *espacio de estados físicos* [33]. En la representación estándar, la condición se traduce en un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Al imponer (2.75), tenemos que asegurarnos que estas ecuaciones sean consistentes entre sí. Estas ecuaciones implican que

$$[\hat{\phi}_a, \hat{\phi}_b] |\Psi\rangle = 0 \quad (2.76)$$

Si todas las constricciones son de primera clase (de no ser así uno simplemente puede utilizar el paréntesis de Dirac en lugar del paréntesis de Poisson para eliminar las constricciones de segunda clase) uno podría esperar que el conmutador en (2.76) sea

$$[\hat{\phi}_a, \hat{\phi}_b] = i\hbar f_{ab}^c \hat{\phi}_c \quad (2.77)$$

dado que en la teoría clásica el paréntesis de Poisson de dos constricciones de primera clase es una combinación lineal de las constricciones de primera clase. Clásicamente, las funciones de estructura f_{ab}^c son en general funciones del espacio fase, por lo que cuánticamente son representadas por operadores. Debido a que estos “operadores de estructura” no necesariamente conmutan con las constricciones, es esencial que aparezcan multiplicando por la izquierda a las constricciones en (2.77). Si no podemos lograr lo anterior, entonces no podemos imponer la ecuación (2.75) de manera consistente y no podremos construir una teoría cuántica adecuada.

De manera similar, tenemos que asegurarnos que la condición (2.75) sea consistente con la ecuación de Schrödinger (2.70). Si empezamos con un estado $|\Psi\rangle$ que cumple con (2.75) y dejamos que evolucione en el tiempo a través de la ecuación de Schrödinger, este debe de seguir cumpliendo con la condición a un tiempo posterior. Este requerimiento puede ser verificado simplemente si dejamos actuar a las constricciones sobre la ecuación de Schrödinger y comprobando si dicha cantidad se anula, es decir

$$\hat{\phi}_a \hat{H} |\Psi\rangle = [\hat{\phi}_a, \hat{H}] |\Psi\rangle - \hat{H} \hat{\phi}_a |\Psi\rangle \quad (2.78)$$

debe anularse. El segundo término desaparece ya que el estado $|\Psi\rangle$ es un estado físico. Entonces, para que esta cantidad se anule, obtenemos la condición extra

$$[\hat{\phi}_a, \hat{H}] = i\hbar \hat{g}_a^b \hat{\phi}_b \quad (2.79)$$

la cual corresponde simplemente a pedir que la propiedad clásica que nos dice que el paréntesis de Poisson del hamiltoniano con cualquier restricción se anula débilmente, debe ser preservada cuánticamente. Nuevamente, se requiere que los coeficientes \hat{g}_a^b se encuentren multiplicando por la izquierda a las constricciones.

2.3. Método del promedio sobre el grupo (*Group averaging*)

El método de promedio sobre el grupo [34, 35, 36] sirve para cuantizar sistemas con constricciones que no pueden ser directamente resueltas. Este método nos proporciona estados físicos a partir de estados cinemáticos. En particular, puede ser utilizado si todas las constricciones a resolver generan una acción unitaria de grupo en el espacio de Hilbert cinemático. En esta sección se esboza la construcción considerando solo una restricción pero el método puede ser generalizado directamente a más constricciones si el conjunto de constricciones es abeliano [37].

Para cuantizar una teoría clásica lo que se hace es representar a las variables canónicas y a su álgebra en un espacio vectorial tal que el álgebra cuántico $[\hat{q}, \hat{p}]$ imite al álgebra clásico $\{q, p\}$. Este espacio vectorial debe de ser equipado con un producto interno a partir del cual se hace una completitud de Cauchy para obtener un espacio de Hilbert. Dado que el espacio fase clásico de funciones se encuentra ahora representado como operadores en el espacio de Hilbert, uno puede empezar a realizar cálculos a partir de estos estados, estos operadores y el producto interno.

Si la teoría clásica tiene constricciones de primera clase \mathcal{C}_I , es decir, es una teoría de norma, entonces el espacio de Hilbert que uno obtiene no es el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{fís}}$ de estados físicos $|\Psi_{\text{fís}}\rangle$ del sistema. En general, el espacio que se obtiene es un espacio más grande llamado el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{cin} con estados $|\Psi_{\text{cin}}\rangle$ que no necesariamente corresponden a soluciones físicas en el sistema. Las soluciones físicas del sistema se encuentran en $\mathcal{H}_{\text{fís}}$, lo que implica que debemos de encontrar un subconjunto de estados en \mathcal{H}_{cin} que sean físicos y definir entre ellos un producto interno físico $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{fís}}$ tal que este subespacio de estados sea nuestro espacio de Hilbert físico.

El conjunto $|\Psi_{\text{fís}}\rangle$ corresponde al conjunto de estados que son aniquilados bajo la acción de la versión cuántica de las constricciones de primera clase: los operadores $\hat{\mathcal{C}}_I$, que se construyen análogamente a como se construiría el operador hamiltoniano. El motivo para utilizar este criterio es debido a que los estados físicos deben quedar invariantes ante las transformaciones generadas por estas constricciones, i.e. las transformaciones de norma.

Clásicamente, las constricciones de primera clase conmutan entre sí débilmente, es decir, conmutan sobre la superficie de restricción

$$\{\mathcal{C}_I, \mathcal{C}_J\} \approx 0 \Rightarrow \{\mathcal{C}_I, \mathcal{C}_J\} = \xi_{IJ}{}^K \mathcal{C}_K \quad (2.80)$$

con $\xi_{IJ}{}^K$ como la constante de estructura. Entonces uno tiene

$$\left[\hat{\mathcal{C}}_I, \hat{\mathcal{C}}_J \right] |\Psi_{\text{fís}}\rangle = 0 \Rightarrow \hat{\mathcal{C}}_K |\Psi_{\text{fís}}\rangle = 0 \quad (2.81)$$

de manera que se puede observar que los estados físicos $|\Psi_{\text{fís}}\rangle$ quedan invariantes ante la acción de los elementos $\hat{U} = e^{i\alpha^I \hat{\mathcal{C}}_I}$ del grupo de norma asociados, tal como era deseado,

$$\hat{U} |\Psi_{\text{fís}}\rangle = \left[1 + i\alpha^I \hat{\mathcal{C}}_I + \left(i\alpha^I \hat{\mathcal{C}}_I \right)^2 + \dots \right] |\Psi_{\text{fís}}\rangle = |\Psi_{\text{fís}}\rangle \quad (2.82)$$

con α^I como los multiplicadores de Lagrange que juegan el papel de los parámetros del grupo.

Una vez que se obtienen los estados, uno puede construir el producto interior asociado a ellos. Sin embargo, no siempre resulta trivial resolver las constricciones como en (2.81), y uno utiliza herramientas como el *promedio sobre el grupo*, con la cual no solo se obtienen los estados físicos, sino que también nos proporciona un producto interno dado que el espacio cinemático \mathcal{H}_{cin} ya cuenta con uno $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{cin}}$.

La construcción que se realiza con el método del promedio sobre el grupo consiste en que dados los elementos del grupo de norma $\hat{U} = e^{i\alpha^I \hat{\mathcal{C}}_I}$, uno escribe a los estados físicos como

$$|\Psi_{\text{fís}}\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\alpha e^{i\alpha^I \hat{\mathcal{C}}_I} |\Psi_{\text{cin}}\rangle \quad (2.83)$$

El kernel de esta transformación está dado por

$$\mathbb{K}(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \langle x_f, t_f | e^{i\alpha^I \hat{\mathcal{C}}_I} | x_i, t_i \rangle \quad (2.84)$$

Entonces podemos escribir a los estados físicos como

$$\Psi_{\text{fís}}(x_f, t_f) = \langle x_f, t_f | \Psi_{\text{fís}} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx_i \int_{\mathbb{R}} dt_i \mathbb{K}(x_f, t_f; x_i, t_i) \Psi_{\text{cin}}(x_i, t_i) \quad (2.85)$$

esto quiere decir que podemos utilizar al kernel para obtener un estado físico a partir de un estado cinemático. Considerando ahora que $|\Psi_{\text{cin}}\rangle$ y $|\phi_{\text{cin}}\rangle$ son estados cinemáticos, si utilizamos el producto interno cinemático, podemos definir el producto interno físico como

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\text{fis}} | \phi_{\text{fis}} \rangle_{\text{fis}} &\equiv \int d\alpha \langle \Psi_{\text{cin}} | e^{i\alpha \hat{\mathcal{C}}} | \phi_{\text{cin}} \rangle_{\text{cin}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx dx' dt dt' \Psi_{\text{cin}}(x, t) \mathbb{K}(x, t; x', t') \phi_{\text{cin}}(x', t') \end{aligned} \quad (2.86)$$

de manera que toda la dinámica cuántica se encuentra contenida en la amplitud de transición $\mathbb{K}(x, t; x', t')$.

2.3.1. Ejemplo: La partícula libre no relativista

La acción de la partícula libre parametrizada puede ser escrita en términos de una constrictión como

$$S = \int d\tau \left[p_t \dot{t} + p_x \dot{x} - \lambda \left(p_t + \frac{1}{2m} p_x^2 \right) \right] \quad (2.87)$$

donde λ corresponde al multiplicador de Lagrange y la constrictión es

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{p}_t + \frac{1}{2m} \hat{p}_x^2 \quad (2.88)$$

Usando el método del promedio sobre el grupo [38], podemos obtener el kernel (2.84). Si descomponemos la evolución en N intervalos de longitud $\epsilon = 1/N$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{C}} = \prod_{n=1}^N e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{C}_n} \quad (2.89)$$

e insertamos bases completas de la forma $\hat{\mathbb{I}} = \int dt_n dx_n |x_n, t_n\rangle \langle x_n, t_n|$, tenemos que el propagador es

$$\langle x_f, t_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{C}}} | x_i, t_i \rangle = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \langle t_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{p}_{t_n}} | t_{n-1} \rangle \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dx_n \right] \prod_{n=1}^N \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \frac{1}{2m} \hat{p}_{x_n}^2} | x_{n-1} \rangle \quad (2.90)$$

donde el estado final y el estado inicial son $\langle x_N, t_N | \equiv \langle x_f, t_f |$ y $|x_0, t_0\rangle \equiv |x_i, t_i\rangle$ respectivamente.

Podemos calcular por separado la parte dependiente del tiempo de la parte dependiente de las coordenadas espaciales para obtener

$$\begin{aligned} \langle t_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{p}_{t_n}} | t_{n-1} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda p_{t_n} + \frac{i}{\hbar} p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) \right] \\ \langle x_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \frac{1}{2m} \hat{p}_{x_n}^2} | x_{n-1} \rangle &= \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_{x_n} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \frac{1}{2m} p_{x_n}^2 + \frac{i}{\hbar} p_{x_n} (x_n - x_{n-1}) \right] \end{aligned} \quad (2.91)$$

Los N productos de exponenciales pueden ser escritos como la suma de los términos en el argumento de las exponenciales. Las $N - 1$ integrales sobre t_n y x_n , al ser combinadas con la exponencial de los términos $p_{t_n}(t_n - t_{n-1})$ y $p_{x_n}(x_n - x_{n-1})$, respectivamente, resultan en $N - 1$ deltas de Dirac en los momentos temporales y espaciales, con los términos $p_{t_1} t_0 + p_{t_N} t_N - p_{x_1} x_0 + p_{x_N} x_N$ restantes dentro de la exponencial. Integramos estas $N - 1$ deltas con las $N - 1$ integrales sobre los momentos temporales y espaciales. Después de la integración, nos quedamos solo con una integral sobre las coordenadas p_{t_N} y p_{x_N}

$$\begin{aligned}
& \langle x_f, t_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{C}}} | x_i, t_i \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_N} e^{-\frac{i}{\hbar} p_{t_N} [\epsilon \lambda N - (t_N - t_0)]} \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_{x_N} e^{-\frac{i}{\hbar} [\epsilon \lambda N \frac{1}{2m} p_{x_N}^2 - p_{x_N} (x_N - x_0)]} \\
&= \delta(\lambda - (t_N - t_0)) \sqrt{\frac{m}{2i\tau\pi\hbar\lambda}} e^{\frac{im(x_N - x_0)^2}{2\hbar\tau\lambda}}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

en donde se utilizó que $\tau = \epsilon N = 1$.

Tomando esta expresión e integrándola respecto al parámetro λ , obtenemos que el kernel para la partícula libre no relativista utilizando el método del promedio sobre el grupo, es igual a

$$\mathbb{K}(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_N - t_0)}} e^{\frac{im(x_N - x_0)^2}{2\hbar(t_N - t_0)}} \tag{2.93}$$

el cual corresponde con el resultado estándar, cf. [39].

Capítulo 3

Mecánica cuántica polimérica

Un vía para atacar al problema de la gravedad cuántica está dada por lo que se conoce como *gravedad cuántica de lazos*. Sin embargo, esta sufre aún de serias dificultades. Estas dificultades han motivado a que algunos investigadores opten por estudiar modelos que imiten algunas de las características de la teoría completa (e.g. la naturaleza discreta del espacio-tiempo) con el fin de entender mejor a la teoría. La *cuantización polimérica* es un procedimiento de cuantización no-estándar que implementa algunas de las técnicas de cuantización de la gravedad cuántica de lazos; en particular, el requerimiento de invarianza bajo difeomorfismos e independencia de una métrica de fondo conduce a ella [40]. Esta cuantización ha sido motivo de atención en los últimos años debido a su posible relación con la física a escalas de Planck. Su implementación en sistemas con un número finito de grados de libertad nos lleva a lo que es conocido como la *mecánica cuántica polimérica*, la cual fue establecida formalmente por primera vez en [41]. El origen del nombre viene del hecho de que en la gravedad cuántica de lazos los estados cuánticos de la gravedad se encuentran etiquetados por medio de lazos, lo que sugiere una estructura semejante a la de un material polimérico¹.

La construcción de una teoría cuántica a partir de un sistema clásico no es de ninguna manera un procedimiento algorítmico en el cual uno deba seguir trivialmente una sucesión de pasos. De hecho, la cuantización es un proceso que involucra una gran cantidad de elecciones que puede llevar a teorías cuánticas no equivalentes. En particular, la cuantización polimérica nos lleva a una teoría cuántica que es diferente a la mecánica cuántica estándar, tal como puede ser demostrado mediante el teorema de Stone-von Neumann. Es por eso que en este capítulo realizamos una revisión de dicho teorema para entender su significado y sus implicaciones respecto a la diferentes teorías cuánticas que uno puede obtener al cuantizar. Posteriormente hacemos una construcción cuidadosa de la representación polimérica de la mecánica cuántica. Esta construcción es realizada de manera tal que una comparación entre esta representación y la representación estándar de Schrödinger pueda ser hecha de manera clara y directa, haciendo explícita la diferencia entre ambas. Finalmente, una vez establecida la representación polimérica, realizamos una descripción de su cinemática y de su dinámica. En la parte cinemática establecemos los estados y los operadores de la teoría, así como el producto interno entre los estados. En lo que respecta a la dinámica, realizamos la implementación de la función hamiltoniana como operador y vemos las consecuencias que conlleva la representación polimérica al nivel dinámico de la teoría.

3.1. Teorema de Stone-von Neumann

En la física teórica, el teorema de Stone-von Neumann [42] es una de varias formulaciones acerca de la unicidad de las relaciones canónicas de conmutación entre los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica. Este teorema nos asegura que cada representación irreducible

¹ Los materiales poliméricos se caracterizan porque su estructura molecular tiene la forma de una cadena constituida de unidades repetitivas.

de un álgebra de Weyl que es débilmente continua en cada uno de sus parámetros, es unitariamente equivalente a la representación de Schrödinger. La construcción de una representación no-equivalente a la de Schrödinger debe de estar en conflicto con una o más suposiciones de este teorema. La mecánica cuántica polimérica es una representación no-regular² de las relaciones de conmutación canónicas que no es unitariamente equivalente a la representación estándar de Schrödinger, pero de la cual se espera que en el límite apropiado uno pueda aproximarse a la representación de Schrödinger.

3.1.1. Problemas para la representación de las relaciones de conmutación

En la mecánica cuántica, los observables físicos son representados matemáticamente por operadores lineales en un espacio de Hilbert. Para una partícula moviéndose en la recta de los reales \mathbb{R} , existen dos observables fundamentales: la posición y el momento. En la descripción cuántica de dicha partícula, el operador de posición y el operador de momento están dados respectivamente por

$$[\hat{x}\phi](x_0) = x_0\phi(x_0) \quad (3.1)$$

$$[\hat{p}\phi](x_0) = -i\hbar \frac{\partial\phi}{\partial x}(x_0) \quad (3.2)$$

sobre el dominio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en \mathbb{R} . Los operadores x, p satisfacen las relaciones de conmutación canónicas de un álgebra de Lie

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (3.3)$$

donde \hbar corresponde a la constante de Planck reducida y toma un valor numérico pequeño en términos de las unidades de acción de la escala macroscópica.

Resulta que esta regla de conmutación es imposible de satisfacer para operadores lineales actuando en un espacio de dimensión finita, a menos que \hbar sea idénticamente cero. Lo anterior resulta evidente al tomar la traza de ambos lados de la ecuación anterior y de considerar la identidad $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. El lado izquierdo de la ecuación es igual a cero, mientras que el lado derecho es diferente de cero. Un análisis posterior revela que en efecto, cualquier par de operadores autoadjuntos que satisfagan estas relaciones de conmutación no pueden ser simultáneamente acotados.

La idea detrás del teorema de Stone-von Neumann es que dos representaciones irreducibles de las relaciones de conmutación canónicas, son unitariamente equivalentes. Sin embargo, como ya vimos, los operadores involucrados son necesariamente no-acotados y existen sutilezas en el dominio de los operadores que pueden llevar a contraejemplos del teorema. Para obtener un resultado riguroso, uno necesita que los operadores satisfagan la versión exponenciada de las relaciones de conmutación canónicas, conocidas como las *relaciones de Weyl*.

3.1.2. Unicidad en las representaciones

Nos gustaría entonces clasificar, hasta por una transformación unitaria, a las diferentes representaciones de las relaciones de conmutación canónicas dadas por un par de operadores autoadjuntos actuando en espacios de Hilbert separables. Hagamos entonces un análisis de lo que el teorema de Stone-von Neumann nos dice.

Definición 1. Primero consideremos que \hat{A} es un operador acotado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Definimos al *mapeo exponencial* de \hat{A} por la serie de potencias

$$e^{\hat{A}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^m}{m!} \quad (3.4)$$

donde $\hat{A}^0 = \hat{I}$.

² Es decir, es una representación que no es débilmente continua en sus parámetros.

Definición 2. Ahora supongamos que \hat{A} y \hat{B} son dos operadores no-acotados autoadjuntos que satisfacen

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{I} \quad (3.5)$$

Aplicando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff obtenemos

$$e^{i(s\hat{A}+t\hat{B})} = e^{isth/2} e^{is\hat{A}} e^{it\hat{B}} = e^{-isth/2} e^{it\hat{B}} e^{is\hat{A}} \quad (3.6)$$

Definimos a las *relaciones de conmutación exponenciadas* o *relaciones de Weyl* como la expresión

$$e^{is\hat{A}} e^{it\hat{B}} = e^{-isth} e^{it\hat{B}} e^{is\hat{A}} \quad (3.7)$$

Es importante notar que la conclusión (3.7) es puramente formal, ya que los operadores involucrados son no-acotados y surgen problemas técnicos que no nos permiten aplicar la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff sin antes hacer suposiciones adicionales acerca del dominio de los operadores. Existen operadores que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas pero no cumplen las relaciones de Weyl. Sin embargo, se espera que en “buenos” casos los operadores satisfagan ambas relaciones.

Definición 3. Consideremos que los operadores A_1, \dots, A_n y B_1, \dots, B_n satisfacen las relaciones de Weyl. Se dice entonces que dichos operadores *actúan irreduciblemente* en el espacio de Hilbert \mathcal{H} si los únicos subespacios cerrados de \mathcal{H} que son invariantes ante los diferentes $e^{it\hat{A}_j}$ y $e^{it\hat{B}_j}$ son $\{0\}$ y \mathcal{H} .

Proposición 1. Los operadores usuales de posición y momento \hat{X}, \hat{P} actúan irreduciblemente en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1. (Teorema de Stone-von Neumann) [43] Supongamos que A_1, \dots, A_n y B_1, \dots, B_n son operadores autoadjuntos en \mathcal{H} que satisfacen las relaciones de Weyl. Entonces, \mathcal{H} puede ser descompuesto como una suma ortogonal directa de subespacios cerrados $\{V_i\}$ con las siguientes propiedades. Primero, cada V_i es invariante ante cada $e^{it\hat{A}_j}$ y $e^{it\hat{B}_j}$ para toda j y t . Segundo, existen operadores unitarios $\hat{U}_i : V_i \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} \hat{U}_i e^{it\hat{A}_j} \hat{U}_i^{-1} &= e^{it\hat{X}_j} \\ \hat{U}_i e^{it\hat{B}_j} \hat{U}_i^{-1} &= e^{it\hat{P}_j} \end{aligned} \quad (3.8)$$

para toda j y t , en donde \hat{X} y \hat{P} son los operadores usuales de posición y momento de la mecánica cuántica.

Adicionalmente, si las A 's y B 's actúan irreduciblemente en \mathcal{H} , entonces existe un mapeo unitario único $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} \hat{U} e^{it\hat{A}_j} \hat{U}^{-1} &= e^{it\hat{X}_j} \\ \hat{U} e^{it\hat{B}_j} \hat{U}^{-1} &= e^{it\hat{P}_j} \end{aligned} \quad (3.9)$$

para toda t . El mapeo \hat{U} es único hasta por un factor constante de valor absoluto igual a 1.

En otras palabras, el teorema de Stone-von Neumann nos dice que para cualquier par de operadores autoadjuntos \hat{A} y \hat{B} que actúen irreduciblemente en \mathcal{H} y que satisfagan la relación de conmutación $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{I}$ – considerando que ciertas suposiciones técnicas se cumplen, como las relaciones de Weyl – podemos concluir que dichos operadores son unitariamente equivalentes a los operadores usuales de posición y momento \hat{X} y \hat{P} . Esto es, existe un operador unitario $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} \hat{U} \hat{A} \hat{U}^{-1} &= \hat{X} \\ \hat{U} \hat{B} \hat{U}^{-1} &= \hat{P} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2. Construcción de la representación polimérica

Para la construcción de la *representación polimérica* [44] partimos de una reformulación de las relaciones de conmutación canónicas, la cual nos permite realizar una generalización apropiada que nos ayude a construir paralelamente la representación de Schrödinger y la representación polimérica, de manera que podamos distinguir explícitamente el punto donde ambas representaciones difieren.

Consideremos que nuestro sistema consiste en una partícula desplazándose en la línea de los reales \mathbb{R} , el cual posee el espacio fase más simple, i.e. $\Gamma = \mathbb{R}^2$, con coordenadas (q, p) . Realizamos una cuantización del sistema utilizando una representación del tipo Schrödinger (funcional), pero tomando en cuenta la estructura necesaria para definir una representación del tipo Fock, ya que resulta más clara para la construcción de la representación polimérica.

La cuantización consiste en promover las coordenadas a operadores hermíticos y promover los brackets de Poisson clásicos a un conmutador cuántico,

$$\begin{aligned} q, p &\rightarrow \hat{q}, \hat{p} \\ \{q, p\} = 1 &\rightarrow [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{\mathbf{I}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Las expresiones en (3.11) son conocidas como las relaciones de conmutación canónicas y constituyen la estructura básica de la cinemática de la teoría cuántica.

El teorema de Wintner [45] nos demuestra que los operadores \hat{q} y \hat{p} no pueden ser simultáneamente acotados, por lo que el lado izquierdo del conmutador cuántico no se encuentra bien definido a menos que introduzcamos condiciones extra para hacerlo. Para sortear este problema podemos considerar el álgebra de Weyl, el cual consiste en los operadores – bien definidos – generados a partir de la exponenciación de los operadores \hat{q} y \hat{p} , denotados por

$$U(\alpha) \equiv e^{i(\alpha\hat{q})/\hbar} \quad ; \quad V(\beta) \equiv e^{i(\beta\hat{p})/\hbar} \quad (3.12)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tienen dimensiones de momento y distancia, respectivamente. Las relaciones de conmutación canónicas expresadas en términos de estos operadores son,

$$\begin{aligned} U(\alpha_1) \cdot V(\alpha_2) &= U(\alpha_1 + \alpha_2) \\ V(\beta_1) \cdot V(\beta_2) &= V(\beta_1 + \beta_2) \\ U(\alpha) \cdot V(\beta) &= e^{(-i\alpha\beta)/\hbar} V(\beta) \cdot U(\alpha) \end{aligned} \quad (3.13)$$

obteniendo así lo que se conoce como *relaciones de Weyl*. El álgebra de Weyl \mathcal{W} es generada tomando una combinación lineal finita de los generadores $U(\alpha_i), V(\beta_i)$. Vemos ahora que la cuantización consiste entonces en encontrar una representación unitaria del álgebra de Weyl en el espacio de Hilbert.

Para la construcción de una representación, hay que tener en cuenta dos cosas: i) la especificación de la acción de los operadores \hat{q} y \hat{p} en los estados del espacio de Hilbert \mathcal{H} , y ii) la naturaleza del espacio de funciones a las que los estados pertenecen, que depende de la elección del producto interno en \mathcal{H} , o de la medida μ en \mathbb{R} .

Por ejemplo, para construir la representación de Schrödinger se selecciona que el espacio de Hilbert corresponda al espacio de funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida de Lebesgue dq

$$\mathcal{H}_{\text{Schr}} = L^2(\mathbb{R}, dq)$$

Mientras que los operadores se representan como:

$$\begin{aligned} \hat{q} \cdot \psi(q) &= q \psi(q) \\ \hat{p} \cdot \psi(q) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \psi(q) \end{aligned}$$

para toda $\psi(q) \in \mathcal{H}_{\text{Schr}}$.

Resulta conveniente considerar la estructura necesaria para realizar una representación tipo Fock. Definimos una estructura extra sobre el espacio fase: una estructura compleja J que consiste en un mapeo lineal $J : \Gamma \rightarrow \Gamma$, tal que cumpla con $J^2 = -1$. En nuestro caso, en el cual el espacio fase corresponde a $\Gamma = \mathbb{R}^2$, la libertad en la elección de J se reduce a la elección de un parámetro d con dimensiones de longitud, $[d] = L$. Definiendo por conveniencia la variable $k = p/\hbar$, seleccionamos a J como el mapeo:

$$J : (q, k) \mapsto \left(-d^2 k, \frac{q}{d^2}\right) \quad (3.14)$$

Haciendo uso de la estructura simpléctica³ $\Omega((q, p); (q', p')) = qp' - pq'$, definimos el producto interno sobre Γ como:

$$g_d(\cdot; \cdot) \equiv \Omega(\cdot; J_d \cdot) \quad (3.15)$$

de manera tal que para un par de coordenadas obtenemos

$$g_d((q, p); (q', p')) = \frac{1}{d^2} qq' + \frac{d^2}{\hbar^2} pp'$$

el cual es positivo definido y adimensional.

Resulta de interés notar que debido a nuestra definición de producto interno, podemos establecer las coordenadas complejas $(\zeta, \bar{\zeta})$ sobre el espacio fase Γ .

$$\zeta \equiv \frac{1}{d}q + i\frac{d}{\hbar}p \quad ; \quad \hat{\zeta} \equiv \frac{1}{d}q - i\frac{d}{\hbar}p \quad (3.16)$$

La definición de estas coordenadas nos permite construir la representación de Fock, que a su vez nos permite definir de manera natural operadores de aniquilación y creación en nuestro espacio. Uno puede ver así la relevancia de definir el parámetro d .

Para construir el espacio de Hilbert, se utiliza lo que se conoce como la construcción GNS. En esta construcción uno utiliza las propiedades algebraicas de \mathcal{W} y un mapeo lineal $\omega : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ – el cual se define como un estado – para obtener no solo un espacio de Hilbert \mathcal{H} , sino también una representación $\pi : \mathcal{W} \rightarrow L(\mathcal{H})$ para \mathcal{W} y un vector $|\Psi\rangle$ tal que

$$\omega(a) = \langle \Psi | \pi(a) \Psi \rangle, \quad \forall a \in \mathcal{W} \quad (3.17)$$

La construcción GNS para obtener una representación tipo Schrödinger (funcional) a partir de una representación de Fock, implica que la medida es no-trivial en el espacio de Hilbert y que por tanto el operador de momento adquiere un término extra para que pueda cumplir con la condición de realidad, i.e., que sea auto-adjunto [46]. La representación del álgebra de Weyl que se obtiene mediante la construcción GNS es entonces

$$\hat{U}(\alpha) \cdot \phi(q) := e^{i\alpha q/\hbar} \phi(q) \quad (3.18)$$

$$\hat{V}(\beta) \cdot \phi(q) := e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\beta/2)} \phi(q - \beta) \quad (3.19)$$

La estructura del espacio de Hilbert se establece mediante la definición de un estado algebraico $\omega_d : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$, una función lineal positiva que va del álgebra de Weyl⁴ a los complejos. El estado debe coincidir con el valor esperado en el espacio de Hilbert tomado en el vacío.

$$\omega_d(a) \equiv \langle \hat{a} \rangle_{vac}, \quad \forall a \in \mathcal{W} \quad (3.20)$$

³ Nótese que el mapeo J actúa sobre la coordenada k ; mientras que la estructura simpléctica Ω , y por tanto g_d , actúan sobre la coordenada p , habiendo que tener cuidado con un factor de \hbar^{-2} .

⁴ Recordar que los elementos del álgebra de Weyl son precisamente las combinaciones lineales de $U(\alpha), V(\beta)$.

Este estado se encuentra relacionado con el invariante de Poincaré de la representación de Fock y explícitamente es de la forma [47]

$$\omega_d(\hat{W}(q, p)) = e^{-\frac{1}{4}g_d((q,p):(q,p))} \quad \forall \hat{W} \in \mathcal{W} \quad (3.21)$$

Para nuestra especificación de la estructura J obtenemos los estados⁵

$$\begin{aligned} \omega_d(\hat{U}(0, \alpha)) &= e^{-\frac{1}{4}\Omega((0,\alpha):J_p(0,\alpha))} \\ &= e^{-\frac{1}{4}\frac{d^2\alpha^2}{\hbar^2}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \omega_d(\hat{V}(\beta, 0)) &= e^{-\frac{1}{4}\Omega((\beta,0):J_p(\beta,0))} \\ &= e^{-\frac{1}{4}\frac{\beta^2}{d^2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La construcción GNS de este álgebra da lugar a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_d = L^2(\mathbb{R}, d\mu_d)$, donde μ_d es la medida Gaussiana, es decir

$$d\mu_d = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{d^2}} dq \quad (3.24)$$

En esta representación el estado base está dado por la función $\phi_0(q) = 1$, la cual es normalizable. Vemos también que la representación se encuentra bien definida y es continua en α y β , para $d > 0$.

Solo nos concentraremos en el estudio de los estados contenidos en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_d generados por la acción $\hat{U}(\alpha)$ sobre el estado base,

$$\phi_\alpha(q) = \hat{U}(\alpha) \cdot \phi_0 = e^{i(\alpha\hat{q})/\hbar} \quad (3.25)$$

es decir, los estados que son función de la posición q .

El producto interno entre dos estados se encuentra descrito mediante:

$$\begin{aligned} \langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle_d &= \int d\mu_d \bar{\phi}_\alpha \phi_\lambda \\ &= \int d\mu_d e^{-i(\alpha\hat{q})/\hbar} e^{i(\lambda\hat{q})/\hbar} \\ &= e^{-\frac{(\lambda-\alpha)^2 d^2}{4\hbar^2}} \\ \Rightarrow \langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle_d &= \exp\left(-\frac{(\lambda-\alpha)^2 d^2}{4\hbar^2}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Uno puede resolver estas integrales mediante [48].

Contrario a lo que sucede en la mecánica cuántica estándar, en el espacio de Hilbert GNS \mathcal{H}_d las *ondas planas* son estados normalizables.

Antes de seguir, obtengamos la representación estándar de Schrödinger para dejar en claro el momento en el que las construcciones de la mecánica cuántica estándar y la mecánica cuántica polimérica difieren.

Existe un isomorfismo *isométrico*⁶ K que mapea la representación- q en \mathcal{H}_d a la representación estándar de Schrödinger en $\mathcal{H}_{\text{Schr}}$, mediante

⁵ Recordemos que $[\alpha] = [M][L][T]^{-1}$, $[\beta] = [L]$ $\therefore \hat{U}(\alpha) = \hat{U}(0, \alpha)$, $\hat{V}(\beta) = \hat{V}(\beta, 0)$.

⁶ Esto es, una transformación que preserva la distancia entre espacios métricos.

$$\Psi(q) = K \cdot \phi(q) = \frac{e^{-\frac{q^2}{2d^2}}}{\sqrt{d\pi^{1/2}}} \phi(q) \in \mathcal{H}_{\text{Schr}} = L^2(\mathbb{R}, dq) \quad (3.27)$$

Y obtenemos que el estado vacío corresponde a

$$\Psi(0) = \frac{e^{-\frac{q^2}{2d^2}}}{\sqrt{d\pi^{1/2}}} \quad (3.28)$$

Si elegimos que $d = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, recuperamos el estado base del oscilador armónico cuántico. Mostramos así que ambas representaciones son unitariamente equivalentes, como era de esperarse por el teorema de Stone-von Neumann, ya que ambas representaciones fueron construidas a partir de las mismas relaciones de conmutación canónicas.

Ahora pasemos a la *representación polimérica*, la cual cuenta con dos casos límite para el parámetro d : a) el límite $1/d \rightarrow 0$ y b) el límite $d \rightarrow 0$.

A. Caso $1/d \rightarrow 0$. Representación-A

De las ecuaciones (3.22) y (3.23) podemos notar que el límite se encuentra bien definido para el estado algebraico ω_d . Para mayor claridad definamos el estado

$$\omega_A := \lim_{1/d \rightarrow 0} \omega_d \quad (3.29)$$

Los estados que obtenemos para este caso son

$$\omega_A(\hat{U}(0, \alpha)) = \lim_{1/d \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{4} \frac{d^2 \alpha^2}{\hbar^2}} = \delta_{\alpha, 0} \quad (3.30)$$

$$\omega_A(\hat{V}(\beta, 0)) = \lim_{1/d \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{d^2}} = 1 \quad (3.31)$$

donde $\delta_{a,b}$ es la delta de Kronecker. Por otro lado, ante el límite, la medida se comporta como

$$\lim_{1/d \rightarrow 0} d\mu_d = \lim_{1/d \rightarrow 0} \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{d^2}} dq \approx \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{\pi}} dq \quad (3.32)$$

es decir, tiende a una medida homogénea cuya constante de normalización $\frac{1}{d} \rightarrow 0$. Esto es ya que $\frac{1}{d^2} \rightarrow 0$, y por tanto $\exp(1/d^2) \rightarrow 1$, tiende más rápido a su límite que $\frac{1}{d} \rightarrow 0$.

Del producto interno definido en la ec. (3.26) para los estados, obtenemos

$$\lim_{1/d \rightarrow 0} \langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle_d = \lim_{1/d \rightarrow 0} e^{-\frac{(\lambda - \alpha)^2 d^2}{4\hbar^2}} = \delta_{\alpha, \lambda} \quad (3.33)$$

De esta manera vemos que los estados $\phi_\alpha(q)$ forman una base ortonormal en este nuevo espacio de Hilbert. Es muy importante notar que, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, la acción del operador \hat{U} sobre un elemento $\phi_\lambda(q)$ de la base genera vectores ortogonales, sin importar lo arbitrariamente cercano que sea el valor para α_1 y α_2 . Por tanto los operadores \hat{U} se vuelven discontinuos en el parámetro α . Esto tiene como gran consecuencia que esta representación ¡no es equivalente a la representación de Schrödinger! ya que una de las hipótesis del teorema de Stone-von Neumann (cf. pág. 29) es que los operadores deben de ser continuos. Por tanto, **el límite $1/d \rightarrow 0$ determina la característica que diferencia la representación estándar de Schrödinger y la representación polimérica**. De manera explícita, si consideramos el límite obtenemos la representación polimérica; si no lo consideramos obtenemos la representación de Schrödinger.

Analicemos ahora la acción del operador \hat{V} sobre los elementos de la base $\phi_\alpha(q)$. Retomando la expresión (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{1/d \rightarrow 0} \hat{V}(\beta) \cdot \phi_\alpha(q) &= \lim_{1/d \rightarrow 0} e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\beta/2)} \phi_\alpha(q-\beta) \\
&= \lim_{1/d \rightarrow 0} e^{\frac{\beta}{d^2}(q-\beta/2)} e^{i\alpha(q-\beta)/\hbar} \\
&= e^{i\alpha(q-\beta)/\hbar} \\
&= e^{-i(\alpha\beta)/\hbar} \phi_\alpha(q)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Vemos entonces que la acción de \hat{V} sobre los estados es continua sobre el parámetro β , por tanto en el límite cuando $1/d \rightarrow 0$ el operador $\hat{p} = -i\hbar\partial_q$ ⁷ se encuentra bien definido. Podemos calcular la acción del operador \hat{p} sobre los estados, obteniendo

$$\begin{aligned}
\hat{p} \cdot \phi_\alpha(q) &= (-i\hbar\partial_q) \phi_\alpha(q) \\
&= (-i\hbar\partial_q) e^{i(\alpha\hat{q})/\hbar} \\
&= \alpha e^{i(\alpha\hat{q})/\hbar} \\
&= \alpha \phi_\alpha(q)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Entonces los estados $\phi_\alpha(q)$ son eigenvectores del operador \hat{p} , cuyos eigenvalores corresponden a α .

Resumiendo los resultados obtenidos para la representación-A (cf. Tabla 3.1) tenemos que los operadores $\hat{U}(\alpha)$ se encuentran bien definidos, pero debido a que no son continuos en α no tenemos un generador para este grupo y por tanto el operador \hat{q} asociado a las distancias no se encuentra bien definido; por otro lado, debido a que el operador $\hat{V}(\beta)$ es continuo en β , el operador \hat{p} queda bien definido. Obtuvimos una base ortonormal ϕ_α (con $\alpha \in \mathbb{R}$), la cual es una eigenbase para el operador \hat{p} . El espacio de Hilbert obtenido para la representación-A polimérica lo denotaremos como \mathcal{H}_A .

Estados	$\phi_\alpha(q) = \hat{U}_\alpha \phi_0(q)$
Producto interno	$\langle \phi_{\alpha_1} \phi_{\alpha_2} \rangle = \delta_{\alpha_1, \alpha_2}$
Operador no continuo	$\hat{U}_{\alpha_1} \phi_{\alpha_2}(q) = \phi_{\alpha_1 + \alpha_2}(q)$
Operador no definido	\hat{q}
Operador discreto	$\hat{p} \phi_\alpha(q) = \alpha \phi_\alpha(q)$

Tabla 3.1: Representación-A ($1/d \rightarrow 0$) en la base de las posiciones q .

B. Caso $d \rightarrow 0$. Representación-B

Realicemos una construcción análoga para el límite $d \rightarrow 0$. Definimos el estado

$$\omega_B := \lim_{d \rightarrow 0} \omega_d \tag{3.36}$$

Considerando el límite, los estados que obtenemos son

$$\omega_B(\hat{U}(0, \alpha)) = \lim_{d \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{4} \frac{d^2 \alpha^2}{\hbar^2}} = 1 \tag{3.37}$$

$$\omega_B(\hat{V}(\beta, 0)) = \lim_{d \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{d^2}} = \delta_{0, \beta} \tag{3.38}$$

⁷ Donde ∂_q denota, como en ocasiones es costumbre, $\frac{\partial}{\partial q}$.

De nuevo, tomando con cuidado el límite para la medida, obtenemos que

$$\lim_{d \rightarrow 0} d\mu_d = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{q^2}{d^2}} dq \approx \delta(q) dq \quad (3.39)$$

donde $\delta(q)$ corresponde a la distribución delta de Dirac. Mientras que es claro que el producto interno se comporta como

$$\lim_{d \rightarrow 0} \langle \phi_\alpha, \phi_\lambda \rangle_d = \lim_{d \rightarrow 0} e^{-\frac{(\lambda - \alpha)^2 d^2}{4\hbar^2}} = 1 \quad (3.40)$$

Esto significa que, en este límite, cualquier estado $\xi = \phi_\alpha - \phi_\lambda$, $\forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ es de norma igual a cero y por tanto pertenece al kernel del producto interior. Para construir un espacio de Hilbert debemos de descartar estos vectores.

Ahora analizando la acción del operador \hat{V} sobre el estado vacío, obtenemos los estados $\tilde{\phi}_\beta$

$$\tilde{\phi}_\beta := \hat{V}(\beta) \cdot \phi_0(q) = e^{\frac{\beta}{d^2}(q - \beta/2)} \quad (3.41)$$

Siguiendo la definición previa de producto interno, calculamos el producto interno de un par de estos estados

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}_\alpha, \tilde{\phi}_\lambda \rangle_d &= \int d\mu_d \tilde{\phi}_\alpha \tilde{\phi}_\lambda \\ &= e^{-\frac{1}{4d^2}(\alpha - \beta)^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

tomamos el límite cuando $d \rightarrow 0$ para obtener que

$$\lim_{d \rightarrow 0} \langle \tilde{\phi}_\alpha, \tilde{\phi}_\lambda \rangle_d = \lim_{d \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{4d^2}(\alpha - \beta)^2} = \delta_{\alpha, \beta} \quad (3.43)$$

Los estados $\tilde{\phi}_\alpha$ son los que forman una base ortonormal de manera que el operador $\hat{V}(\beta)$ es discontinuo y por tanto su generador, el operador \hat{p} , no se encuentra bien definido. Sin embargo, como podemos ver de la ec. (3.41), de manera individual los estados no se encuentran bien definidos para este límite cuando $\beta > 0$:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \tilde{\phi}_\beta = \lim_{d \rightarrow 0} e^{\frac{\beta}{d^2}(q - \beta/2)} = \begin{cases} \infty & q > \beta/2, \\ 1 & q = \beta/2, \\ 0 & q < \beta/2. \end{cases} \quad (3.44)$$

Para solucionar esta dificultad, consideremos estados en los que se incorpore de manera explícita la medida, tal como se hizo en la ec.(3.27) al considerar el isomorfismo K para la construcción de la representación de Schrödinger. Definimos entonces los nuevos estados

$$\psi_\beta(q) := K \cdot \tilde{\phi}_\beta(q) = \frac{e^{-\frac{q^2}{2d^2}}}{\sqrt{d\pi^{1/2}}} \cdot e^{\frac{\beta}{d^2}(q - \beta/2)} = \frac{1}{\sqrt{d\pi^{1/2}}} e^{-\frac{1}{2d^2}(q - \beta)^2} \quad (3.45)$$

El espacio de Hilbert que obtenemos corresponde a $L^2(\mathbb{R}, dq)$. Tomando el límite lo que uno obtiene es

$$\lim_{d \rightarrow 0} \psi_\beta(q) = (\delta(q - \beta))^{1/2} := \delta^{1/2}(q - \beta) \quad (3.46)$$

donde a $\delta^{1/2}(q - \beta)$ lo entendemos como un objeto que satisface

$$\delta^{1/2}(q - \beta) \cdot \delta^{1/2}(q - \alpha) = \delta(q - \beta) \delta_{\beta, \alpha} \quad (3.47)$$

es decir, si $\alpha = \beta$ entonces tenemos una delta de Dirac, sino su valor es igual a cero.

Este objeto puede considerarse como una distribución que no puede ser integrada por sí misma⁸ pero que el producto entre dos de ellas sí; intuitivamente podemos entenderla como una “media-delta de Dirac”. Por tanto, obtenemos así un producto interno

$$\lim_{d \rightarrow 0} \langle \psi_\beta, \psi_\alpha \rangle = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} dq \bar{\psi}_\beta(q) \psi_\alpha(q) = \int_{\mathbb{R}} dq \delta(q - \alpha) \delta_{\beta, \alpha} = \delta_{\beta, \alpha} \quad (3.48)$$

que cumple con lo esperado – ser igual a una delta de Kronecker – mientras que los nuevos estados fundamentales los definimos como

$$\chi_\beta(q) := \lim_{d \rightarrow 0} \psi_\beta(q) = \delta^{1/2}(q - \beta) \quad (3.49)$$

Nótese que en esta nueva representación, el estado vacío es definido como

$$\chi_0(q) = \delta^{1/2}(q) \quad (3.50)$$

Entonces, en la representación-B polimérica, el espacio de Hilbert \mathcal{H}_B que obtenemos lo construimos formando combinaciones lineales finitas de los estados χ_B que formarán así la base del espacio

$$\Psi(q) = \sum_i b_i \chi_{\beta_i}(q) \quad (3.51)$$

Nota:

Resulta conveniente realizar una descripción equivalente de este espacio de Hilbert. En lugar de definir los elementos de la base como “medias-deltas de Dirac” cuyo producto interno se define bajo una medida de Lebesgue ordinaria $d\mu$, los elementos de la base los definimos como deltas de Kronecker $\chi'_\beta := \delta_{q, \beta}$ las cuales bajo el producto interno se comportan de manera similar a la ec. (3.48), i.e. $\chi'_\beta(q) \cdot \chi'_\alpha(q) = \delta_{\beta, \alpha}$. La diferencia es que las deltas de Kronecker, y sus cuadrados, no son integrables bajo la medida de Lebesgue. Entonces uno tiene que definir una nueva medida para solucionar su integrabilidad. Resulta que la medida que se necesita es la medida contable discreta sobre \mathbb{R} .

Observemos ahora cómo actúa el operador \hat{U} sobre los estados χ'_β

$$\hat{U}_\alpha \cdot \chi'_\beta(q) = e^{i\alpha q/\hbar} \cdot \delta_{q, \beta} = e^{i\alpha \beta/\hbar} \cdot \delta_{q, \beta} \quad (3.52)$$

Vemos que su acción es continua (incluyendo en el límite $d \rightarrow 0$) en el parámetro α , por lo que el operador \hat{q} se encuentra bien definido en el espacio. De manera simple podemos ver la acción del operador \hat{q} sobre los estados

$$\hat{q} \cdot \chi'_\beta(q) = q \cdot \chi'_\beta(q) \quad (3.53)$$

Resumiendo, en la representación-B la acción del operador \hat{V}_β es la que se vuelve discontinua ya que su acción para cualquier $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ genera estados ortonormales, por lo que no es posible definir al operador de momento \hat{p} . Por otro lado, la acción sobre los estados del operador \hat{U}_α es continua en el parámetro α y actúa de manera multiplicativa sobre ellos (ec.(3.53)).

Vemos que la acción de los operadores $\hat{U}_\alpha, \hat{V}_\beta$ intercambia roles para las diferentes representaciones: en la representación-A el operador \hat{U}_α es discontinuo y no posible definir un operador asociado a \hat{q} , mientras que el operador \hat{V}_β es continuo y la acción del operador \hat{p} es multiplicativa sobre los estados; en la representación-B el operador \hat{V}_β es discontinuo y no posible definir un operador asociado a \hat{p} , mientras que el operador \hat{U}_α es continuo y la acción del operador \hat{q} es multiplicativa sobre los estados.

⁸ A la función delta de Dirac se le impone que satisfaga la condición $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$.

Estados	$\chi_\beta(q) = K \cdot \hat{V}_\beta \phi_0(q)$
Producto interno	$\langle \chi_{\beta_1} \chi_{\beta_2} \rangle = \delta_{\beta_1, \beta_2}$
Operador no continuo	$\hat{V}_{\beta_1} \chi_{\beta_2}(q) = \chi_{\beta_1 + \beta_2}(q)$
Operador no definido	\hat{p}
Operador discreto	$\hat{q} \chi_\alpha(q) = q \chi_\alpha(q)$

Tabla 3.2: Representación-B ($d \rightarrow 0$) en la base de las posiciones q .

Nótese que la construcción se basó en considerar a los estados como funciones de q , i.e. en la polarización- q . Pudimos haber hecho la construcción suponiendo que los estados eran funciones de p , i.e. en la polarización- p , y hubiéramos obtenido una dualidad para las diferentes representaciones en las que tendríamos la siguiente equivalencia entre las representaciones:

Polarización- q Representación A	\Leftrightarrow	Polarización- p Representación B
Polarización- q Representación B	\Leftrightarrow	Polarización- p Representación A

Tabla 3.3: Dualidad entre las representaciones poliméricas dependiendo de la base (q o p) en la que se expresen los estados.

3.3. Cinemática de la mecánica cuántica polimérica

En esta sección haremos una descripción abstracta de la representación polimérica obteniendo sus dos posibles realizaciones, cercanamente relacionadas con la representación-A y la representación-B estudiadas en la sección anterior.

Comenzamos definiendo vectores abstractos $|\mu\rangle$ sobre el espacio de Hilbert polimérico $\mathcal{H}_{\text{poli}}$, los cuales se encuentran etiquetados por el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$. A partir de estos vectores definimos los *estados cilíndricos* como aquellos que corresponden a la elección finita de una colección de números $\mu_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \dots, N$ de la cual podemos tomar una combinación lineal para obtener

$$|\psi\rangle = \sum_i^N a_i |\mu_i\rangle \quad (3.54)$$

El producto interno entre los vectores fundamentales está dado por

$$\langle \nu | \mu \rangle = \delta_{\nu, \mu} \quad (3.55)$$

de manera que los vectores son ortonormales entre sí. Esto implica que para un par de estados arbitrarios $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ el producto interno queda definido como

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \bar{b}_j a_i \langle \nu_j | \mu_i \rangle = \sum_k \bar{b}_k a_k \quad (3.56)$$

donde la suma sobre k etiqueta los puntos de intersección entre los conjuntos $\{\nu_j\}, \{\mu_i\}$. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{poli}}$ que obtenemos es la completitud de Cauchy de los estados definidos en la ec.(3.54) respecto al producto interno de la ec.(3.55). Este espacio de Hilbert es no-separable debido a que no es posible contar sus elementos al estar etiquetados por $\mu \in \mathbb{R}$.

Definimos dos operadores básicos en este espacio de Hilbert: el *operador de etiqueta* $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\varepsilon} |\mu\rangle := \mu |\mu\rangle \quad (3.57)$$

el cual es simétrico⁹, y el *operador de desplazamiento* $\hat{s}(\lambda)$

$$\hat{s}(\lambda) |\mu\rangle := |\mu + \lambda\rangle \quad (3.58)$$

que define una familia uniparamétrica de operadores sobre el espacio $\mathcal{H}_{\text{poli}}$, en donde el adjunto del operador está dado por

$$\hat{s}^\dagger(\lambda) = \hat{s}(-\lambda) \quad (3.59)$$

La acción de este operador es discontinua en el parámetro λ ya que los vectores $|\mu\rangle$ y $|\mu + \lambda\rangle$ son siempre ortogonales sin importar lo pequeño que sea λ , de manera que no existe ningún operador hermítico que pueda generar a $\hat{s}(\lambda)$ por exponenciación.

Hasta ahora realizamos una exposición abstracta del espacio de Hilbert en la representación polimérica. Para realizar una conexión de esta representación con la parte física de un sistema, existen dos alternativas que dependen de la elección de ‘polarización’ de las funciones de onda. Con esto nos referimos a que tenemos una polarización-p si seleccionamos que las funciones de onda, o estados, estén en función de los momentos p ; o que tenemos una polarización-q si seleccionamos que las funciones de onda estén en función de las coordenadas q .

3.3.1. Polarización-p o de Momentos

En esta polarización, los estados están denotados mediante

$$\psi(p) = \langle p | \psi \rangle \quad (3.60)$$

donde respecto a los vectores fundamentales tenemos

$$\psi_\mu(p) = \langle p | \mu \rangle = e^{i\frac{\mu p}{\hbar}} \quad (3.61)$$

Tomamos ahora al operador $\hat{V}(\lambda)$ asociado al operador \hat{p} (cf. ec. (3.12)) y vemos que su acción sobre los estados es

$$\hat{V}(\lambda) \cdot \psi_\mu(p) = e^{i\frac{\lambda p}{\hbar}} e^{i\frac{\mu p}{\hbar}} = e^{i\frac{(\mu+\lambda)p}{\hbar}} = \psi_{\mu+\lambda}(p) \quad (3.62)$$

El operador $\hat{V}(\lambda)$ corresponde precisamente al *operador de desplazamiento* $\hat{s}(\lambda)$. Justo como ya vimos, de esto podemos concluir que el operador \hat{p} no existe, es incapaz de generar a \hat{V} .

Resulta ahora fácil asociar al operador \hat{q} con el *operador de etiqueta*, definiéndolo como $\hat{q} := -i\hbar(\partial/\partial p)$. Entonces obtenemos

$$\hat{q} \cdot \psi_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi_\mu = \mu e^{i\frac{\mu p}{\hbar}} = \mu \psi_\mu \quad (3.63)$$

Notemos que podemos nombrar a \hat{q} como un operador discreto, ya que sus eigenvalores corresponden al parámetro μ , el cual a pesar de tomar valores continuos puede ser considerado como un conjunto discreto dado que los estados ψ_μ son ortonormales $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

Teniendo definidos los estados, los operadores y la acción de los operadores sobre los estados, necesitamos establecer el producto interno con una medida adecuada sobre el espacio donde las funciones de onda están definidas. Para esto consideremos las herramientas que nos brinda la teoría de las C^* -álgebras.

Si consideramos a los operadores $\hat{V}(\lambda)$, que son los que generan los diferentes estados de la teoría, junto a su producto habitual (ec.(3.13)) y a la relación- \star (ec.(3.59)), vemos forman una estructura \mathcal{A} de un álgebra- C^* abeliana. Es bien sabido de la teoría de representación de estas estructuras,

⁹ Es decir, que cumple con $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^\dagger$. Si cumple con esta condición y se encuentra bien definido en todo el espacio, entonces se dice que es hermítico.

que \mathcal{A} es isomórfico al espacio de funciones continuas sobre un espacio compacto $C^0(\Delta)$, es decir, al espectro de \mathcal{A} [40]. En nuestro caso, el espectro corresponde a la compactificación de Bohr de \mathbb{R}_B [49]. Este espacio es un grupo compacto que posee una medida probabilística natural: la medida de Haar $d\mu_H$. Entonces el espacio de Hilbert que obtenemos es

$$\mathcal{H}_{\text{poli}} = L^2(\mathbb{R}_B, d\mu_H) \quad (3.64)$$

Obtenemos así que el producto interno queda definido como

$$\langle \psi_\mu | \psi_\lambda \rangle := \int_{\mathbb{R}_B} d\mu_H \psi_\mu^*(p) \psi_\lambda(p) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dp \psi_\mu^*(p) \psi_\lambda(p) = \delta_{\mu, \lambda} \quad (3.65)$$

3.3.2. Polarización-q o de Posiciones

Consideremos ahora la polarización en la que las funciones dependen de la coordenada q :

$$\tilde{\psi}(q) = \langle q | \psi \rangle \quad (3.66)$$

Los vectores base $\tilde{\psi}_\mu$ deben de ser, de cierto sentido, duales a las funciones $\psi_\mu(p)$ de la subsección anterior. Definimos a estas funciones mediante una transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\mu(q) &\equiv \langle q | \mu \rangle = \langle q | \int_{\mathbb{R}_B} d\mu_H | p \rangle \langle p | \mu \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}_B} d\mu_H \langle p | \mu \rangle \psi_\mu(p) \\ &= \int_{\mathbb{R}_B} d\mu_H e^{-ipq/\hbar} e^{i\mu p/\hbar} = \delta_{q, \mu} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\tilde{\psi}_\mu(q) = \delta_{q, \mu} \quad (3.67)$$

es decir, los objetos básicos para esta representación son deltas de Kronecker, tal y como encontramos en la subsección B.

Por otro lado esperamos que la acción de los operadores se invierta respecto a lo que se tuvo en la subsección anterior. De un lado vemos que el operador de momento no se encuentra bien definido porque la derivada de la delta de Kronecker no se encuentra bien definida; pero el operador $\hat{V}(\lambda)$ sí, y actúa sobre las funciones como

$$\hat{V}(\lambda) \cdot \psi(q) = \psi(q + \lambda) \quad (3.68)$$

Mientras que el operador de posición vemos que actúa multiplicativamente sobre las funciones

$$\hat{q} \cdot \tilde{\psi}_\mu(q) = \hat{q} \cdot \delta_{q, \mu} = \mu \tilde{\psi}_\mu \quad (3.69)$$

Ahora buscando la medida adecuada tal que tengamos que el producto interno sea

$$\{\tilde{\psi}_\mu(q), \tilde{\psi}_\lambda(q)\} = \delta_{\mu, \lambda} \quad (3.70)$$

encontramos que la compactificación de Bohr es dual a la recta de los reales con la topología discreta \mathbb{R}_d asociada. De esta manera la medida es la *medida contable* $d\mu_c$ y el espacio de Hilbert consta de

$$\mathcal{H}_{\text{poli}} = L^2(\mathbb{R}_d, d\mu_c) \quad (3.71)$$

Podemos ver claramente ahora las consecuencias físicas que implica la representación polimérica: i) por un lado de (3.71) vemos que las posiciones se vuelven discretas a pesar de encontrarse en

toda la recta de los reales, “viviendo” así en \mathbb{R} con una topología discreta y con la medida contable asociada a ella; ii) por el otro lado, de (3.64) vemos que los momentos se encuentran acotados entre $(-L, L)$ al estar contenidos en la compactificación de Bohr de la recta real.

3.4. Dinámica de la mecánica cuántica polimérica

En el análisis hasta ahora hecho, no se tomó en cuenta el hamiltoniano del sistema en ningún momento. El hamiltoniano es el responsable de la dinámica y la energía del sistema.

Consideremos el caso de una partícula con masa m en un potencial $V(q)$. El hamiltoniano asociado es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}(q) \quad (3.72)$$

Vemos que en el contexto de la mecánica cuántica polimérica no es posible una implementación directa del hamiltoniano, debido a que en la representación polimérica solo uno de los operadores \hat{q} o \hat{p} se encuentra bien definido. En este caso, lo que se ha hecho en la literatura es aproximar al operador que no se encuentra bien definido mediante alguna función que se encuentre escrita en términos de las holonomías \hat{U}_α o \hat{V}_β , según sea el caso.

Se debe de decidir cuál de las variables será considerada como discreta, provocando que la variable conjugada no se encuentre bien definida. Por ejemplo, podemos considerar un sistema en el que la dinámica se da en una red – e.g. la dinámica de un fonón en un cristal – donde las posiciones q se consideran entonces como discretas y, por lo tanto, los momentos p en la red no se encuentran bien definidos. La decisión dependerá así, del sistema en particular y del contexto en el que se esté estudiando. Por ejemplo, en la cosmología cuántica de lazos la elección estándar es que la variable de configuración no se encuentre bien definida; esto es debido a que esta teoría corresponde al sector simétrico de la gravedad cuántica de lazos, en donde la conexión, que es considerada como la variable de configuración, no puede ser promovida a operador y uno solo puede definir su versión exponenciada, es decir, la holonomía.

Para el caso de una partícula en un potencial, consideremos que la variable de configuración q sea tomada como discreta y que entonces no podamos promover a su momento conjugado p como un operador. De esta manera, el término cinético del hamiltoniano $\hat{p}^2/2m$, debe ser aproximado mediante alguna función que se encuentre bien definida.

El procedimiento estándar que se sigue para aproximar a la variable que no se encuentra bien definida es el siguiente. Definimos en el espacio de configuraciones un red γ_{μ_0} que consiste de un conjunto numerable de puntos equidistantes caracterizados por el parámetro constante μ_0 que denota la separación entre los puntos de la red. Formalmente probabilista

$$\gamma_{\mu_0} = \{q \in \mathbb{R} \mid q = n\mu_0, \forall n \in \mathbb{Z}\} \quad (3.73)$$

De esta manera, los vectores base $|\mu_n\rangle$ que consideraremos corresponderán a los puntos $\mu_n = n\mu_0$ en la red. Entonces, consideraremos estados de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_n b_n |\mu_n\rangle \quad (3.74)$$

con la condición de que los coeficientes b_n satisfagan que $\sum_n |b_n|^2 < \infty$.

Este espacio de Hilbert, que denotaremos como $\mathcal{H}_{\gamma_{\mu_0}}$, es un espacio separable en el cual sus elementos pueden ser contados mediante la etiqueta $n \in \mathbb{Z}$. Este espacio $\mathcal{H}_{\gamma_{\mu_0}}$, es parte de un espacio de Hilbert más grande

$$\mathcal{H}_{\text{poli}} = \bigoplus_{\mu \in (0, \mu_0]} \mathcal{H}_{\gamma_\mu} \quad (3.75)$$

el cual es no separable debido a que sus elementos no pueden ser contados ya que $\mu \in \mathbb{R}_B$ (la compactificación de Bohr de los reales).

Ahora, limitándonos a trabajar solo en el espacio $\mathcal{H}_{\gamma_{\mu_0}}$, consideremos el término cinético $\hat{p}^2/2m$ del hamiltoniano. Debemos aproximar al operador \hat{p} mediante las holonomías $V_\beta = e^{i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}}$. Como ya vimos, las holonomías actúan sobre la base de las posiciones haciendo desplazamientos (3.68). Si queremos mantenernos dentro de la red, debemos de asegurarnos que las holonomías se restrinjan a desplazamientos sobre la red, es decir, desplazamientos de tamaño de μ_0

$$\hat{V}_{\mu_0} |\mu_n\rangle = |\mu_n + \mu_0\rangle = |\mu_{n+1}\rangle \quad (3.76)$$

por lo que fijamos de manera definitiva el valor del parámetro β de la holonomía como $\beta = \mu_0$. Vemos que la holonomía juega el papel de operador de desplazamiento, justo lo que deseáramos del operador de momento. Ahora bien, podemos aproximar al operador \hat{p}^2 como

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\mu_0 p}{\hbar}\right) &\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 p^2}{\hbar^2}, \quad p \ll \frac{\hbar}{\mu_0} \\ \Rightarrow p^2 &\approx \frac{2\hbar^2}{\mu_0^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\mu_0 p}{\hbar}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

reexpresando la función coseno en términos de exponenciales, obtenemos al momento expresado en términos de las holonomías

$$\begin{aligned} p^2 &\approx \frac{\hbar^2}{\mu_0^2} \left(2 - e^{i\frac{\mu_0 p}{\hbar}} - e^{-i\frac{\mu_0 p}{\hbar}}\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{\mu_0^2} \left(2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}\right) \end{aligned}$$

Escribimos entonces de manera aproximada al operador \hat{p}^2 como¹⁰

$$\hat{p}^2 \equiv \frac{\hbar^2}{\mu_0^2} \left(2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}\right) \quad (3.78)$$

donde utilizamos la propiedad (3.59) del operador \hat{V}_μ . De esta manera uno puede definir al operador hamiltoniano $\hat{H}_{\mu_0} \in \mathcal{H}_{\gamma_{\mu_0}}$ que “vive” sólo en la red γ_{μ_0} . Este operador también se encuentra contenido en $\mathcal{H}_{\text{poli}}$, pero ahí su interpretación física resulta problemática por lo que solo nos limitamos a darle una interpretación física cuando su acción esté restringida a la red γ_{μ_0} .

Finalmente veamos la acción del operador hamiltoniano sobre los estados. Consideremos a la ecuación de Schrödinger para una partícula libre

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi \quad (3.79)$$

La acción del operador hamiltoniano en la base de las posiciones, usando (3.78), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi(q) &= \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} \left(2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{-\mu_0}\right) \Psi(q) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} (2\Psi(q) - \Psi(q + \mu_0) - \Psi(q - \mu_0)) \end{aligned}$$

Obtenemos que la ecuación de Schrödinger es una ecuación de diferencias:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} (2\Psi(q) - \Psi(q + \mu_0) - \Psi(q - \mu_0)) \quad (3.80)$$

¹⁰ En este caso el operador \hat{p}^2 desplaza una cantidad μ_0 a los vectores de posición. Si queremos que sea el operador \hat{p} el que los desplace μ_0 , aproximamos a \hat{p} análogamente mediante la función $\sin^2(\mu_0 p/\hbar)$. De esta manera el operador \hat{p} desplazará a los vectores una distancia μ_0 y el operador \hat{p}^2 los desplazará $2\mu_0$.

Por otro lado, usando (3.77), en la base de los momentos tenemos que el operador \hat{p} actúa multiplicativamente

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(p)}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi(p) = \frac{\hbar^2}{m\mu_0^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\mu_0 p}{\hbar}\right)\right) \Psi(p) \quad (3.81)$$

Llegando así a una ecuación diferencial en p .

Capítulo 4

Aplicaciones de la mecánica cuántica polimérica

La cuantización polimérica puede ser aplicada en una gran variedad de sistemas mecánicos relacionados con la física atómica, así como en la cosmología o en la teoría cuántica de campos, y en la mecánica estadística, [50]. Cada una de estas aplicaciones sirve como un modelo de juguete que facilita el estudio de la relación que guardan las representaciones regulares y no-regulares de la mecánica cuántica en contextos más complicados como lo es el espacio-tiempo cuántico. En este sentido, resulta de gran interés la aplicación de esta cuantización a sistemas simples para estudiar las diferencias que ésta pueda tener con respecto a la representación de Schrödinger de esos mismos sistemas. No está de más decir que por sí sola la representación polimérica resulta un modelo de estudio muy interesante desde la perspectiva de la física-matemática.

En este capítulo tomaremos el ejemplo más sencillo en el que podemos realizar una aplicación de la mecánica polimérica: la partícula libre. De aquí podremos ver de manera explícita las consecuencias que implica la mecánica cuántica polimérica, tales como la discretización y compactificación de los grados de libertad del sistema.

4.1. La partícula libre

Consideremos el hamiltoniano de la partícula libre con un solo grado de libertad, es decir, sobre una recta.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \quad (4.1)$$

Tomamos a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi \quad (4.2)$$

y definiendo el operador derivada temporal como $\hat{p}_t \equiv -i\hbar(\partial/\partial t)$, la reescribimos como

$$\left[\hat{p}_t + \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \right] \Psi(x, t) = 0 \quad (4.3)$$

Si realizamos una cuantización polimérica, debemos promover las variables canónicas clásicas a operadores. Escogemos que las posiciones sean las que tengan la característica de ser discretas, por lo que su momento asociado no se encuentra bien definido. Tal y como estudiamos en la Sección 3.4, definimos al momento como¹

¹ Nótese que esta vez elegimos que sea el operador \hat{p} el que desplace a las posiciones una cantidad μ y no \hat{p}^2 .

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{2i\mu} (\hat{V}_\mu - \hat{V}_\mu^\dagger) \quad (4.4)$$

por lo que el operador hamiltoniano es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{8\mu^2 m} \left(\hat{V}_\mu^2 - 2\hat{V}_\mu \hat{V}_\mu^\dagger + (\hat{V}_\mu^\dagger)^2 \right) \quad (4.5)$$

Insertando la expresión anterior en la ecuación de Schrödinger tenemos

$$\left\{ \hat{p}_t - \frac{\hbar^2}{8\mu^2 m} \left(\hat{V}_\mu^2 - 2\hat{V}_\mu \hat{V}_\mu^\dagger + (\hat{V}_\mu^\dagger)^2 \right) \right\} \Psi(x, t) = 0 \quad (4.6)$$

y haciendo actuar a las holonomías \hat{V}_μ sobre los estados $\Psi(x, t)$ obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{8\mu^2 m} [\Psi(x + 2\mu, t) - 2\Psi(x, t) + \Psi(x - 2\mu, t)] = 0 \quad (4.7)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger para la partícula libre en la mecánica cuántica polimérica. Como ya vimos al final del capítulo anterior, lo que obtenemos en la base de las posiciones es una ecuación en diferencias para la función de onda.

Resulta importante mencionar que – clásicamente – hay sistemas físicos que quedan invariantes ante reparametrizaciones $\tau \rightarrow f(\tau)$ de la variable temporal. A estas transformaciones se les llama transformaciones de norma, y el parámetro de norma τ no representa un tiempo físico real. Este tipo de sistemas están completamente constreñidos, es decir, el hamiltoniano puede ser expresado como una combinación lineal de las constricciones:

$$H = \int N^i \mathcal{C}_i d^3x \quad (4.8)$$

donde \mathcal{C}_i son las constricciones de primera clase, y N^i corresponden a los multiplicadores de Lagrange de las constricciones.

Podemos considerar a la partícula libre como un sistema con constricciones, en donde la ecuación de Schrödinger (4.3) juega el papel de la restricción. La acción de la partícula libre es:

$$S = \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt \quad (4.9)$$

Desparametrizamos la acción mediante el parámetro de norma τ , tal que incluimos a la variable t en el espacio fase del sistema

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt \\ &= \int \frac{1}{2} \frac{(dx)^2}{dt} \left(\frac{d\tau}{d\tau} \right)^2 \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 \frac{d\tau}{dt/d\tau} \end{aligned}$$

Redefiniendo la notación para la derivada temporal en términos del nuevo parámetro de tiempo τ como $\dot{f} \equiv df/d\tau$, la acción desparametrizada es

$$S = \int \frac{1}{2} m \frac{\dot{x}^2}{\dot{t}} d\tau \quad (4.10)$$

Es decir, la variable t se incluye en el espacio fase y se promueve a variable canónica en el sistema; de esto tenemos que el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{\dot{t}} \quad (4.11)$$

Calculamos ahora los momentos canónicos asociados a nuestras variables

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\dot{t}} \quad (4.12)$$

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}\right)^2 \quad (4.13)$$

Si hacemos una transformación de Legendre para obtener el hamiltoniano asociado – utilizando las ecs. (4.11-4.13) – vemos que este es idénticamente cero

$$H = p_t\dot{t} + p_x\dot{x} - L = 0 \quad (4.14)$$

Por tanto, el sistema es completamente constreñido y el hamiltoniano puede ser expresado como una combinación lineal de las constrictiones. Para nuestro caso, la constrictión corresponde a (4.3), la ecuación de Schrödinger. La acción hamiltoniana que obtenemos es:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[p_t\dot{t} + p_x\dot{x} - \alpha \left(p_t + \frac{p_x^2}{2m} \right) \right] \quad (4.15)$$

donde α es el multiplicador de Lagrange de la constrictión.

Entonces, como estamos tratando con un sistema constreñido, el producto interno físico del sistema queda modificado, como ya vimos en la Sección 2.3. El método del ‘promedio sobre el grupo’ nos dice que los estados físicos deben de quedar invariantes ante la acción de las constrictiones

$$\hat{U}_\alpha |\Psi\rangle_{\text{fis}} = e^{-i\alpha\frac{\hat{C}}{\hbar}} |\Psi\rangle_{\text{fis}} = |\Psi\rangle_{\text{fis}} \quad (4.16)$$

Por lo que el producto interno queda expresado como

$$\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\text{fis}} = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \langle \Psi_f | \hat{U}_\alpha | \Psi_i \rangle_{\text{cin}} \quad (4.17)$$

Esta cantidad, que es la amplitud de probabilidad en el espacio físico de pasar de un estado inicial Ψ_i a un estado final Ψ_f , es precisamente la cantidad que nos interesa, ya que es la que nos permite obtener la física del sistema mediante el método de cuantización por integral de camino.

El lado derecho de (4.17), por otro lado, se interpreta como la amplitud de probabilidad en el espacio cinemático de pasar de un estado inicial Ψ_i a un estado final Ψ_f , bajo el promedio de la acción de la transformación \hat{U}_α .

Ahora, insertando la relación de completez en la base de las posiciones en la ec. (4.17) se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\text{fis}} &= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \sum_{x_f, x_i \in \mathbb{Z}} dt_f dt_i \langle \Psi_f | x_f, t_f \rangle_{\text{cin}} \langle x_f, t_f | \hat{U}_\alpha | x_i, t_i \rangle_{\text{cin}} \langle x_i, t_i | \Psi_i \rangle_{\text{cin}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \sum_{x_f, x_i \in \mathbb{Z}} dt_f dt_i \Psi_f^*(x_f, t_f) \Psi_i(x_i, t_i) \langle x_f, t_f | \hat{U}_\alpha | x_i, t_i \rangle_{\text{cin}} \end{aligned}$$

donde el kernel de los elementos de matriz del operador de evolución es

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \langle x_f, t_f | \hat{U}_\alpha | x_i, t_i \rangle_{\text{cin}} \quad (4.18)$$

El kernel lo podemos ver como la siguiente amplitud de probabilidad dada por el método del ‘promedio sobre el grupo’:

$$\begin{aligned}
K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \langle x_f, t_f | \hat{U}_\alpha | x_i, t_i \rangle_{\text{cin}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \langle x_f, t_f | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{\hbar}} | x_i, t_i \rangle_{\text{cin}}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A partir de ahora dejamos de lado las etiquetas ‘fis’ y ‘cin’ del producto interior al dar por hecho que se deben de entender adecuadamente por el contexto.

Continuando con la construcción de la integral de camino, insertamos en el kernel al operador identidad

$$\hat{\mathbb{I}} = \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dt_1 |x_1, t_1\rangle \langle x_1, t_1| \tag{4.20}$$

donde se entiende que la suma en x_1 es sobre la red $\gamma_\mu = \{n\mu \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Al insertar la identidad en (4.19) también descomponemos a la exponencial en particiones iguales.

$$K = \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\alpha dt_1 \langle x_f, t_f | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{2\hbar}} | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{2\hbar}} | x_i, t_i \rangle \tag{4.21}$$

Y así sucesivamente, $N - 1$ veces

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\alpha dt_1 dt_2 \langle x_f, t_f | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{3\hbar}} | x_2, t_2 \rangle \dots \langle x_1, t_1 | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{3\hbar}} | x_i, t_i \rangle \\
&= \sum_{x_1, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\alpha dt_1 \dots dt_{N-1} \langle x_f, t_f | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{N\hbar}} | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle x_1, t_1 | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{N\hbar}} | x_i, t_i \rangle
\end{aligned}$$

Si reetiquetamos a las coordenadas final e inicial como $(x_f, t_f) \rightarrow (x_N, t_N)$ y $(x_i, t_i) \rightarrow (x_0, t_0)$, podemos escribir al kernel como

$$K = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \langle x_n, t_n | e^{-i\alpha \frac{\hat{c}}{N\hbar}} | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \tag{4.22}$$

Al considerar la forma explícita de la constricción, ya que los operadores \hat{p}_t y \hat{p}_x conmutan entre sí, podemos escribir a los estados $|x_n, t_n\rangle$ como un producto tensorial $|x_n\rangle \otimes |t_n\rangle$ y expresar al kernel como

$$K = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_x^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \langle t_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \hat{p}_t} | t_{n-1} \rangle \tag{4.23}$$

Para mayor claridad, reescribimos el kernel como un producto de dos funciones: una que depende solo de las posiciones y otra que depende solo de la variable t .

$$\begin{aligned}
K &= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \langle t_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \hat{p}_t} | t_{n-1} \rangle \right] \left[\prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} \right] \prod_{n=1}^N \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_x^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \right] \\
&\equiv \int_{\mathbb{R}} d\alpha [T(t)][X(x)]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Considerando únicamente la parte temporal de la expresión anterior, insertamos en el n -ésimo término de la amplitud de probabilidad a la identidad en la base de los momentos temporales

$$\hat{\mathbb{I}} = \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} |p_{t_n}\rangle \langle p_{t_n}| \quad (4.25)$$

tal que tenemos

$$\langle t_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \hat{p}t} | t_{n-1} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \langle t_n | p_{t_n} \rangle e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} p_{t_n}} \langle p_{t_n} | t_{n-1} \rangle \quad (4.26)$$

donde tenemos que el operador de momento asociado a t actúa multiplicativamente, i.e. $\hat{p}t |p_{t_n}\rangle = p_{t_n} |p_{t_n}\rangle$. Por otro lado tenemos que

$$\langle t_n | p_{t_n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_{t_n} t_n)} \quad (4.27)$$

$$\langle p_{t_n} | t_n \rangle = \langle t_n | p_{t_n} \rangle^* \quad (4.28)$$

Entonces (4.26) queda como

$$\langle t_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \hat{p}t} | t_{n-1} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} e^{\frac{i}{\hbar} p_{t_n} (t_n - t_{n-1})} e^{\frac{i\alpha}{N\hbar} p_{t_n}} \quad (4.29)$$

Haciendo esto para todos los N términos en $T(t)$

$$\begin{aligned} T(t) &= \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} e^{\frac{i}{\hbar} p_{t_n} (t_n - t_{n-1})} e^{\frac{i\alpha}{N\hbar} p_{t_n}} \\ &= \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) - \frac{\alpha}{N} p_{t_n}]} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Trabajamos ahora solo con la sumatoria que se encuentra en la exponencial

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^N \left[p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) - \frac{\alpha}{N} p_{t_n} \right] \\ &= p_{t_1} (t_1 - t_0) - \frac{\alpha}{N} p_{t_1} + p_{t_2} (t_2 - t_1) - \frac{\alpha}{N} p_{t_2} + \dots + p_{t_N} (t_N - t_{N-1}) - \frac{\alpha}{N} p_{t_N} \\ &= p_{t_1} (t_1 - t_0) + p_{t_2} (t_2 - t_1) + \dots + p_{t_N} (t_N - t_{N-1}) - \frac{\alpha}{N} [p_{t_1} + p_{t_2} + \dots + p_{t_N}] \\ &= p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 + t_1 (p_{t_1} - p_{t_2}) + \dots + t_{N-1} (p_{t_{N-1}} - p_{t_N}) - \frac{\alpha}{N} [p_{t_1} + \dots + p_{t_N}] \\ &= p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 + \sum_{n=1}^{N-1} t_n (p_{t_n} - p_{t_{n+1}}) - \frac{\alpha}{N} [p_{t_1} + \dots + p_{t_N}] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Insertando este resultado de regreso en (4.30), reacomodamos los factores

$$\begin{aligned} T(t) &= \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 + \sum_{n=1}^{N-1} t_n (p_{t_n} - p_{t_{n+1}}) - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_N})]} \\ &= \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_N})]} \frac{1}{2\pi^N} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} t_n (p_{t_n} - p_{t_{n+1}})} \end{aligned}$$

Expresamos de manera explícita los términos en el segundo multiplicatorio y en la sumatoria,

$$\begin{aligned}
T(t) &= \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_N})]} \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi^N} \int_{\mathbb{R}} dt_1 \dots dt_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} [t_1(p_{t_1} - p_{t_2}) + \dots + t_{N-1}(p_{t_{N-1}} - p_{t_N})]} \\
&= \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_N})]} \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_1} e^{\frac{i}{\hbar} t_1 (p_{t_1} - p_{t_2})} \dots \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_{N-1}} e^{\frac{i}{\hbar} t_{N-1} (p_{t_{N-1}} - p_{t_N})} \\
&= \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_N})]} \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \delta(p_{t_1} - p_{t_2}) \delta(p_{t_2} - p_{t_3}) \dots \delta(p_{t_{N-1}} - p_{t_N}) \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Ahora escribimos los términos del multiplicatorio de manera explícita y realizamos la integral sobre la variable $dp_{t_{N-1}}$

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_1} \dots dp_{t_N} \delta(p_{t_1} - p_{t_2}) \dots \delta(p_{t_{N-1}} - p_{t_N}) \\
&\quad \times e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_N})]} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_1} \dots dp_{t_{N-2}} dp_{t_N} \delta(p_{t_1} - p_{t_2}) \dots \delta(p_{t_{N-3}} - p_{t_{N-2}}) \\
&\quad \times e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_{N-2}} + p_{t_N})]} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} dp_{t_{N-1}} \delta(p_{t_{N-2}} - p_{t_{N-1}}) \delta(p_{t_{N-1}} - p_{t_N}) e^{-\frac{i\alpha}{\hbar N} p_{t_{N-1}}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_1} \dots dp_{t_{N-2}} dp_{t_N} \delta(p_{t_1} - p_{t_2}) \dots \delta(p_{t_{N-3}} - p_{t_{N-2}}) \\
&\quad \times e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + \dots + p_{t_{N-2}} + p_{t_N})]} \\
&\quad \times \delta(p_{t_{N-2}} - p_{t_N}) e^{-\frac{i\alpha}{\hbar N} p_{t_N}}
\end{aligned}$$

Integramos así para $dp_{t_{N-2}} \dots dp_{t_2}$, obteniendo sucesivas funciones delta de Dirac hasta llegar a

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_N} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_1} \delta(p_{t_1} - p_{t_N}) e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_1} t_0 - \frac{\alpha}{N} (p_{t_1} + p_{t_N} + \dots + p_{t_N})]} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_N} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{t_N} t_N - p_{t_N} t_0 - \frac{\alpha}{N} N p_{t_N}]} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_N} e^{\frac{i}{\hbar} p_{t_N} [(t_N - t_0) - \alpha]} \\
&= \delta[(t_N - t_0) - \alpha]
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que la parte temporal es

$$T(t) = \delta[(t_N - t_0) - \alpha] \tag{4.33}$$

Trabajamos ahora con la parte espacial del kernel. De la ec. (4.24) tomamos la amplitud de probabilidad espacial y realizamos una expansión en series de la exponencial

$$\begin{aligned}
& \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_x^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \\
&= \langle x_n | \left[1 + \left(-\frac{i\alpha \hat{p}_x^2}{2m\hbar N} \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\alpha \hat{p}_x^2}{2m\hbar N} \right)^2 + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right) \right] | x_{n-1} \rangle \\
&= \langle x_n | x_{n-1} \rangle + \left(-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right) \langle x_n | \hat{p}_x^2 | x_{n-1} \rangle + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right)^2 \langle x_n | \hat{p}_x^4 | x_{n-1} \rangle \\
&\quad + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Haciendo uso de la definición polimérica del operador de momento y de su acción sobre los eigenectores de posición, ecs. (4.4) y (3.76) respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
& \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_x^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \\
&= \langle x_n | x_{n-1} \rangle \\
&\quad + \left(-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right) \left(-\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right) [\langle x_n | x_{n-1} - 2\mu \rangle + \langle x_n | x_{n-1} + 2\mu \rangle - 2 \langle x_n | x_{n-1} \rangle] \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right)^2 \left(-\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right)^2 [\langle x_n | x_{n-1} - 4\mu \rangle + \langle x_n | x_{n-1} + 4\mu \rangle \\
&\quad - 4 \langle x_n | x_{n-1} - 2\mu \rangle - 4 \langle x_n | x_{n-1} + 2\mu \rangle + 6 \langle x_n | x_{n-1} \rangle] + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Ahora utilizando la relación (3.65) en la expresión anterior y denotando al n-ésimo momento espacial como $p_{x_n} \equiv p_n$

$$\langle x_i | x_j \rangle = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_i e^{\frac{i}{\hbar} p_i (x_i - x_j)} \tag{4.36}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
& \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_n^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \right. \\
&+ \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right) \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right) \left[e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1} + 2\mu)} + e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1} - 2\mu)} - 2e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \right] \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right)^2 \left[e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1} + 4\mu)} + e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1} - 4\mu)} \right. \\
&- 4e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1} + 2\mu)} - 4e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1} - 2\mu)} + 6e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \left. \right] + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right) \left. \right\} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \left\{ 1 + \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right) \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right) \left[e^{\frac{2ip_n\mu}{\hbar}} + e^{-\frac{2ip_n\mu}{\hbar}} - 2 \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right)^2 \left[e^{\frac{4ip_n\mu}{\hbar}} + e^{-\frac{4ip_n\mu}{\hbar}} - 4 \left(e^{\frac{2ip_n\mu}{\hbar}} + e^{-\frac{2ip_n\mu}{\hbar}} \right) + 6 \right] \\
&+ \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right) \left. \right\} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \left\{ 1 + \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right) \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right) \left[2 \cos \left(\frac{2p_n\mu}{\hbar} \right) - 2 \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right)^2 \left[2 \cos \left(\frac{4p_n\mu}{\hbar} \right) - 8 \cos \left(\frac{2p_n\mu}{\hbar} \right) + 6 \right] + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

donde se puede llegar a que los factores

$$2 \cos \left(\frac{2p_n\mu}{\hbar} \right) - 2 = -4 \sin^2 \left(\frac{p_n\mu}{\hbar} \right) \quad (4.37)$$

$$2 \cos \left(\frac{4p_n\mu}{\hbar} \right) - 8 \cos \left(\frac{2p_n\mu}{\hbar} \right) + 6 = 16 \sin^4 \left(\frac{p_n\mu}{\hbar} \right) \quad (4.38)$$

llegando a que

$$\begin{aligned}
& \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_n^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \left\{ 1 + \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right) \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right) \left[-4 \sin^2 \left(\frac{p_n\mu}{\hbar} \right) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{4\mu^2} \right)^2 \left[16 \sin^4 \left(\frac{p_n\mu}{\hbar} \right) \right] + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right) \left. \right\} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \left\{ 1 + \left(-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \cdot \frac{\hbar^2}{4\mu^2} \cdot 4 \sin^2 \left(\frac{p_n\mu}{\hbar} \right) \right) \right. \\
&+ \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \cdot \frac{\hbar^2}{4\mu^2} \cdot 4 \sin^2 \left(\frac{p_n\mu}{\hbar} \right) \right)^2 + \mathcal{O}^3 \left(\frac{1}{N} \right) \left. \right\} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Si calculamos los términos de orden mayor, vemos que se llega a

$$\begin{aligned}
& \langle x_n | e^{-\frac{i\alpha}{N\hbar} \frac{\hat{p}_x^2}{2m}} | x_{n-1} \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-\frac{i\alpha}{2m\hbar N} \cdot \frac{\hbar^2}{4\mu^2} \cdot 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \right]^n \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} \left[p_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha \hbar^2}{2mN\mu^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \right]} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Insertando este resultado en la parte espacial del kernel (cf. ec. (4.24)) tenemos

$$X(x) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[p_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha \hbar^2}{2mN\mu^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \right]} \quad (4.41)$$

Trabajamos únicamente con el primer término de la sumatoria que aparece en la exponencial de la expresión anterior

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \\
&= p_1(x_1 - x_0) + p_2(x_2 - x_1) + \dots + p_{N-1}(x_{N-1} - x_{N-2}) + p_N(x_N - x_{N-1}) \\
&= p_N x_N - p_1 x_0 + x_1(p_1 - p_2) + \dots + x_{N-1}(p_{N-1} - p_N) \\
&= p_N x_N - p_1 x_0 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1}) \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Colocando este resultado en (4.41) y definiendo la cantidad

$$\mathcal{H} = p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^N \frac{\alpha}{N} \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \quad (4.43)$$

obtenemos que

$$X(x) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1})]} \quad (4.44)$$

Ahora bien, considerando primero a la fórmula de Poisson,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i l p}{\hbar}} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \delta(p + r) \quad (4.45)$$

trabajamos solo con la sumatoria sobre x_n , así como con el n -ésimo término de la sumatoria en la exponencial en (4.44), y lo escribimos como

$$\begin{aligned}
\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{i}{\hbar} x_n (p_n - p_{n+1})} &= \sum_{x_n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i x_n}{\hbar} \frac{(p_n - p_{n+1})}{2\pi}} \\
&= \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \delta \left(\frac{p_n - p_{n+1}}{2\pi} + l_n \right) \\
&= \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} 2\pi \delta(p_n - p_{n+1} + 2\pi l_n) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Utilizamos la transformada de Fourier de la delta de Dirac

$$\delta(p_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx_k e^{\frac{i}{\hbar} x_k p_k} \quad (4.47)$$

para obtener

$$\sum_{x_n \in \mathbb{Z}} e^{\frac{i}{\hbar} x_n (p_n - p_{n+1})} = \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dx_n e^{\frac{i}{\hbar} x_n (p_n - p_{n+1} + 2\pi l_n)} \quad (4.48)$$

Haciendo lo anterior para los $N - 1$ términos en (4.44), obtenemos

$$X(x) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dx_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1}) + 2\pi x_n l_n]} \quad (4.49)$$

en donde, de manera análoga a como se hizo para la ec. (A.12) del Apéndice A, podemos absorber las sumatorias sobre l_n al cambiar el rango de integración de los momentos de $[-\pi\hbar/\mu, \pi\hbar/\mu] \rightarrow (-\infty, \infty)$. De esta manera tenemos

$$X(x) = \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_n \right] \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dx_n \right] e^{\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1})]} \quad (4.50)$$

Nótese que debido a que tenemos $N - 1$ sumatorias, la N -ésima integral en los momentos es la única que no cambia su intervalo de integración.

El último paso en la construcción de la integral de camino consiste en tomar el límite cuando el número de particiones es infinita, es decir, $N \rightarrow \infty$. Retomamos la ecuación (4.24) y sustituimos en ella el resultado obtenido en (4.50), mientras que para la parte temporal consideramos desde ec. (4.30) para la construcción de la integral de camino.

$$\begin{aligned} K &= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} [p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) - \frac{\alpha}{N} p_{t_n}]} \\ &\times \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_n \right] \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N e^{\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1})]} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Trabajamos con el argumento de la exponencial de la parte espacial, recordando la definición de \mathcal{H} en (4.43)

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1}) \\ &= p_N x_N - p_1 x_0 - \sum_{n=1}^N \frac{\alpha}{N} \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) + \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_n - p_{n+1}) \\ &= p_N x_N - p_1 x_0 + x_1 (p_1 - p_2) + \dots + x_{N-1} (p_{N-1} - p_N) - \sum_{n=1}^N \frac{\alpha}{N} \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) - \sum_{n=1}^N \frac{\alpha}{N} \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Y reescribimos a (4.51) como:

$$K = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_n \right] \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[p_{t_n} (t_n - t_{n-1}) - \frac{\alpha}{N} p_{t_n} + p_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha}{N} \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \right]} \quad (4.53)$$

Ahora definiendo la cantidad $\epsilon \equiv 1/N$, reescribimos la expresión anterior de la siguiente manera.

$$K = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dx_n \right] \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_n \right] \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N \left[p_{t_n} \frac{(t_n - t_{n-1})}{\epsilon} - \alpha p_{t_n} + p_n \frac{(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} - \alpha \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_n \mu}{\hbar} \right) \right]} \quad (4.54)$$

Tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, el cual implica que $\epsilon \rightarrow 0$, así como las siguientes sustituciones:

$$\epsilon \sum_{n=0}^N \rightarrow \int d\tau \\ \frac{(t_n - t_{n-1})}{\epsilon} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \rightarrow \frac{dx}{d\tau} \quad (4.55)$$

de manera que obtenemos una acción continua sobre τ ; y definimos las siguientes cantidades

$$[\mathcal{D}t(\tau)] \equiv \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dt_n \right] \quad [\mathcal{D}p_t(\tau)] \equiv \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp_{t_n} \right] \\ [\mathcal{D}x(\tau)] \equiv \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} dx_n \right] \quad [\mathcal{D}p_x(\tau)] \equiv \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_n \right] \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_N \quad (4.56)$$

tal que obtenemos que el kernel es

$$K = \int_{\mathbb{R}} d\alpha \mathcal{D}t(\tau) [\mathcal{D}p_t(\tau)] [\mathcal{D}x(\tau)] [\mathcal{D}p_x(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau \left[p_t \dot{t} + p_x \dot{x} - \alpha \left(p_t + \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_x \mu}{\hbar} \right) \right) \right]} \quad (4.57)$$

de donde la acción polimérica efectiva es

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left[p_t \dot{t} + p_x \dot{x} - \alpha \left(p_t + \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{p_x \mu}{\hbar} \right) \right) \right] \quad (4.58)$$

Resulta relevante mencionar que la medida para los momentos espaciales p_x es especial en el sentido de que tiene $N-1$ integrales no acotadas, pero no así la N -ésima integral, la cual es acotada. Esta característica es consecuencia del carácter discreto de la representación polimérica.

Las ecuaciones de Hamilton para la acción polimérica nos dan las siguientes ecuaciones:

$$\dot{p}_t = 0, \quad \dot{p}_x = 0 \\ \dot{t} = \alpha, \quad \dot{x} = \frac{\alpha\hbar}{2m\mu} \text{sen} \left(\frac{2p_x \mu}{\hbar} \right) \quad (4.59)$$

Notamos que podemos redefinir las posiciones ya que

$$\frac{\dot{x}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\dot{t}} \frac{dx}{d\tau} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \equiv x' \quad (4.60)$$

Usamos a las ecuaciones de movimiento para reescribir a la acción polimérica en función de x'

$$\mathcal{S}[x'] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\hbar}{2\mu} x' \arcsen \left(\frac{2m\mu}{\hbar} x' \right) - \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2\mu^2}{\hbar^2} x'^2} \right) \right] \quad (4.61)$$

De donde podemos obtener el hamiltoniano asociado

$$H = \frac{\partial L}{\partial x'} x' - L = \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2\mu^2}{\hbar^2} x'^2} \right) = \frac{\hbar^2}{2m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_x}{\hbar} \right) \quad (4.62)$$

Ya que el hamiltoniano es una constante de movimiento, la cual corresponde a la energía del sistema, podemos escribir a la velocidad x' en términos de ella:

$$x'^2 = \frac{2H}{m} \left(1 - \frac{2m\mu^2}{\hbar^2} H \right) \quad (4.63)$$

De la expresión anterior vemos que si queremos que las velocidades se encuentren bien definidas debemos restringir los valores de la energía a

$$0 < H < \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} \quad (4.64)$$

de manera que las velocidades quedan también acotadas. Si calculamos el máximo en (4.63) vemos que éste se encuentra en $H = \frac{\hbar^2}{4m\mu^2}$, es decir, las velocidades quedan acotadas por

$$-\frac{\hbar}{2m\mu} < x'(H) < \frac{\hbar}{2m\mu} \quad (4.65)$$

mientras que para $H = 0$ y para $H = \frac{\hbar^2}{4m\mu^2}$ la velocidad es cero (figura 4.1). Notemos que el límite en la velocidad es inversamente proporcional a la escala polimérica μ , establecida en la ecuación (3.73) en el Capítulo 3. De aquí que podamos de alguna manera darle una interpretación a la escala μ .

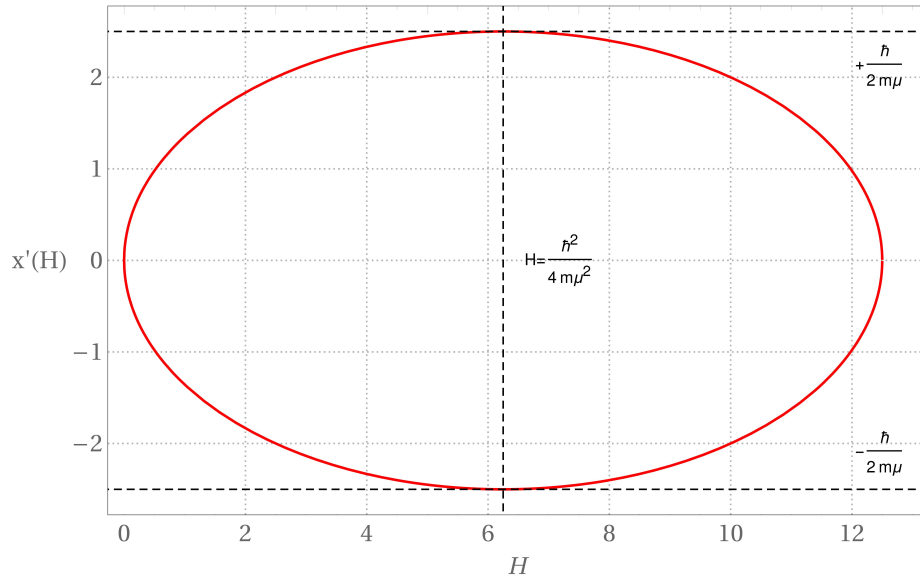


Figura 4.1: Diagrama de velocidades para la partícula libre polimérica en función de la energía.

Podemos integrar las velocidades en (4.63) para obtener las soluciones del sistema

$$x_{\text{poli}}(t) = \pm \sqrt{\frac{2H}{m} \left(1 - \frac{2m\mu^2}{\hbar^2} H \right)} (t - t_0) \quad (4.66)$$

Recuperando el límite al continuo – es decir, cuando $\mu \rightarrow 0$ – vemos que la energía tiene que ser positiva $H > 0$, las velocidades ya no se encuentran acotadas y que las soluciones corresponden a las soluciones clásicas

$$x_{\text{clas}}(t) = \pm \sqrt{\frac{2H}{m}} (t - t_0) \quad (4.67)$$

Es decir, en el límite al continuo recuperamos la dinámica clásica de la partícula libre no-relativista [38].

Capítulo 5

Cuantización polimérica de un modelo cosmológico

En este capítulo comenzamos por realizar una breve introducción a la cosmología. Establecemos lo básico referente a un modelo cosmológico tipo Friedmann-Robertson-Walker y por medio de una formulación hamiltoniana recuperamos las ecuaciones de movimiento clásicas para un universo con un campo escalar de materia. Habiendo establecido la parte clásica del modelo cosmológico, procedemos a aplicar la cuantización polimérica mediante la integral de camino. Calculamos el propagador que nos brinda el método del promedio sobre el grupo, para obtener la acción efectiva polimérica. Desparametrizamos esta acción, de manera que expresamos la dinámica cosmológica efectiva en términos de un parámetro interno de la teoría: el campo escalar de materia. Finalmente, se hace un análisis de la dinámica clásica y polimérica que se obtiene.

5.1. Introducción a la cosmología estándar

La cosmología es el estudio del origen del universo, su estructura a gran escala, su dinámica y su eventual destino, así como las leyes físicas que rigen estos procesos. Se considera que la cosmología moderna comienza en el año de 1917, con la publicación de Albert Einstein [51] acerca de las modificaciones de su teoría de la relatividad general. Actualmente se considera que el universo comenzó hace 13.799 ± 0.021 años [21], a partir de una gran explosión – el *Big Bang* – a la que le siguió, de manera casi inmediata, una expansión acelerada del espacio conocida como *inflación cósmica*.

El universo observable, es decir, al que tenemos acceso mediante nuestra visión y tecnología disponible (e.g. telescopios), posee claramente una estructura granular en la que sus unidades básicas las constituyen las estrellas, las galaxias, los cúmulos de galaxias, etc. dependiendo de la escala que uno tome en consideración; mientras que el espacio que existe entre estas unidades básicas se encuentra prácticamente ausente de materia. Sin embargo, al considerar al universo como un todo, se asume lo que se conoce como el *principio cosmológico*. Este principio establece que, a gran escala, la distribución de materia en el universo entero es homogénea e isotrópica. La homogeneidad se refiere a que cada punto en el espacio es equivalente o posee la misma evidencia observacional, mientras que la isotropía se refiere a que cada dirección en el espacio a la que volteemos a ver es equivalente o posee la misma evidencia observacional. A pesar de que no existen pruebas directas que validen al principio cosmológico, las observaciones indican que el espacio a nuestro alrededor es aproximadamente isotrópico¹, mientras que estudios recientes muestran que la expansión del universo es altamente isotrópica [52]. Estas observaciones también nos pueden dar información acerca de la homogeneidad en el espacio, ya que un espacio que es isotrópico en todo punto, debe ser también

¹ Actualmente el principal argumento observacional que apoya esta idea tiene que ver con la isotropía de la radiación cósmica de fondo de microondas (CMB).

homogéneo. A la luz del principio de Copérnico, el cual establece que el planeta Tierra no ocupa ningún lugar privilegiado o favorecido en el universo, pareciera tener validez considerar que si el espacio a nuestro alrededor es isotrópico, entonces el espacio también debería ser isotrópico alrededor de cualquier otro punto en el universo [53]. Que nuestro universo sea verdaderamente homogéneo e isotrópico a gran escala, es una característica que resulta fundamental y de gran importancia ya que esto aseguraría que las observaciones que realizamos desde la Tierra son representativas del universo como un todo y por tanto podemos validar de manera legítima los modelos cosmológicos que se teorizan [54]. En particular se puede mencionar que la homogeneidad del espacio implica la existencia de un tiempo cósmico [55]. Si el principio cosmológico es aceptado, es posible definir un tiempo cósmico absoluto, es decir, una manera de asignar un tiempo a eventos cósmicos, el cual es independiente del observador. Este tiempo cósmico corresponde al tiempo propio medido por observadores co-móviles [56].

5.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Al considerar que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico se llega a que el único elemento de línea genérico que satisface estas propiedades es la muy conocida métrica de Friedmann-Robertson-Walker²

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (5.1)$$

La métrica determina la geometría del espacio mediante el parámetro de curvatura k , el cual solo toma los valores $k = \{-1, 0, 1\}$. El caso $k = -1$ corresponde a un espacio hiperbólico cuya curvatura es de valor negativo y es referido como un universo *abierto*. El caso $k = 0$ corresponde a un espacio euclídeo, el cual carece de curvatura y es referido como un universo *plano*. Finalmente, el caso $k = 1$ corresponde a un espacio esférico cuya curvatura es positiva y es referido como un universo *cerrado*.

Los únicos grados de libertad se encuentran en la función de lapso $N(t)$ y en el factor de escala $a(t)$. La función de lapso determina el ritmo con el que la coordenada t mide el tiempo. Esta función no representa un grado de libertad físico ya que puede ser absorbida en la definición del tiempo propio cosmológico τ , que es el tiempo que mide un observador que es co-móvil a la expansión del universo, es decir, que se mueve con ella. El tiempo cosmológico es definido mediante $d\tau = N(t)dt$. El factor de escala mide la expansión o contracción del espacio en el tiempo. A diferencia de $N(t)$, $a(t)$ no puede ser absorbida por las coordenadas.

5.3. Formulación hamiltoniana de la cosmología clásica

Como es bien sabido, la teoría de la relatividad general de Einstein nos enseña que las interacciones gravitacionales son el resultado de la curvatura producida en el espacio-tiempo por la presencia de masa y energía. Las ecuaciones de campo de Einstein nos brindan las herramientas necesarias para obtener las ecuaciones que dictan la dinámica de un sistema sujeto a la interacción gravitacional. Las ecuaciones de movimiento de dicho sistema pueden ser obtenidas a partir de la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R + \mathcal{L}_{\text{mat}} \right] \quad (5.2)$$

donde $g_{\mu\nu}$ corresponde a la métrica, $g := \det(g_{\mu\nu})$, R al escalar de Ricci y \mathcal{L}_{mat} se refiere a la densidad lagrangiana correspondiente a la distribución de materia del sistema.

El escalar de Ricci es una cantidad geométrica, por tanto depende únicamente de la métrica, y se define como

² La obtención explícita de este resultado puede ser encontrado en diversos libros clásicos de relatividad general, e.g. [57]

$$R = g^{\mu\nu} \left(\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \right) \quad (5.3)$$

en donde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ son los *símbolos de Christoffel* y los índices griegos corren como $\mu = \{0, 1, 2, 3\} \equiv \{t, r, \theta, \varphi\}$.

En el contexto cosmológico, la métrica que se utiliza corresponde a (5.1). De ella es directo obtener que

$$\sqrt{-g} = \frac{r^2 a^3 \sin \theta N}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Mientras que al realizar el cálculo para el escalar de Ricci, se obtiene

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{aN^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2 N^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right]$$

Al sustituir estos dos resultados en (5.2) y dejando de lado por el momento la contribución correspondiente a la distribución de materia, obtenemos la acción gravitacional

$$S_{\text{grav}} = \frac{3\mathcal{V}_0}{8\pi G} \int dt \left(\frac{a^2 \ddot{a}}{N} + \frac{a\dot{a}^2}{N} - \frac{a^2 \dot{a}\dot{N}}{N^2} + kaN \right) \quad (5.4)$$

en donde la cantidad \mathcal{V}_0 es una constante arbitraria que surge después de integrar sobre una región compacta arbitraria en el espacio, tal como podemos ver de su definición:

$$\mathcal{V}_0 \equiv \int dr d\phi d\theta \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (5.5)$$

Notemos que podemos reescribir a (5.4) en términos de una derivada total respecto al tiempo

$$S_{\text{grav}} = \frac{3\mathcal{V}_0}{8\pi G} \int dt \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{a^2 \dot{a}}{N} \right) - \frac{a\dot{a}^2}{N} + kaN \right] \quad (5.6)$$

De manera que llegamos a una acción cuya función lagrangiana tiene un término que es una derivada total en el parámetro temporal. De la teoría de la mecánica clásica sabemos que si tenemos un par de funciones lagrangianas que difieren a lo más por una derivada total en el tiempo, entonces sus ecuaciones de movimiento serán las mismas. Es decir, si consideramos a las funciones lagrangianas $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ y $\mathcal{L}'(q, \dot{q})$, las cuales se encuentran relacionadas mediante

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} F(q, \dot{q})$$

y denotamos al *operador ecuaciones de Lagrange* como

$$\hat{\text{E}}\text{L} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right)$$

entonces se cumple que

$$\hat{\text{E}}\text{L}[\mathcal{L}] = \hat{\text{E}}\text{L}[\mathcal{L}']$$

Podemos escribir entonces a la acción gravitacional (5.6), a nivel clásico³, como

$$S_{\text{grav}}[a, \dot{a}; N, \dot{N}] = -\frac{3\mathcal{V}_0}{8\pi G} \int dt \left[\frac{a\dot{a}^2}{N} - kaN \right] \quad (5.7)$$

³ A nivel cuántico no podemos asegurar que \mathcal{L} y \mathcal{L}' sean equivalentes ya que las cantidades de interés cuántico resultan ser las amplitudes de transición $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{iS}$, de las cuales no tenemos garantía que queden invariantes al agregar una derivada total del tiempo a la función lagrangiana.

Consideremos ahora la contribución de materia. La única fuente de materia que cumple con las condiciones de homogeneidad e isotropía es un campo escalar ϕ mínimamente acoplado a la gravedad⁴. Su acción está dada por

$$S_{\text{mat}}[\phi, \dot{\phi}] = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \quad (5.8)$$

donde $V(\phi)$ corresponde a un potencial arbitrario que solo depende del valor del campo. Tomando la métrica de FRW y considerando de nuevo la definición para \mathcal{V}_0 llegamos a

$$S_{\text{mat}}[\phi, \dot{\phi}] = \mathcal{V}_0 \int dt \left[\frac{a^3 \dot{\phi}^2}{2N} - Na^3 V(\phi) \right]$$

Juntando el resultado para la acción gravitacional y la acción de materia, obtenemos que la acción de Einstein-Hilbert queda como

$$S_{\text{EH}} = \int dt \left[-\frac{3\mathcal{V}_0}{8\pi G} \left(\frac{a\dot{a}^2}{N} - kaN \right) + \mathcal{V}_0 \left(\frac{a^3 \dot{\phi}^2}{2N} - Na^3 V(\phi) \right) \right] \quad (5.9)$$

De donde tenemos que el lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}(a, \dot{a}; N, \dot{N}; \phi, \dot{\phi}) = -\frac{3\mathcal{V}_0}{8\pi G} \left(\frac{a\dot{a}^2}{N} - kaN \right) + \mathcal{V}_0 \left(\frac{a^3 \dot{\phi}^2}{2N} - Na^3 V(\phi) \right) \quad (5.10)$$

Antes de proceder a obtener el hamiltoniano asociado, realizamos un análisis de (5.10). Calculamos la matriz Hessiana M_{ab} asociada al lagrangiano

$$M_{ab} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} = \begin{pmatrix} -\frac{3\mathcal{V}_0 a}{4\pi G N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{V}_0 a^3}{N} \end{pmatrix}; \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

en donde se tomó a $\dot{q}^a = \{\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\} \equiv \{\dot{a}, \dot{N}, \dot{\phi}\}$. De manera trivial observamos que el determinante de la matriz es idénticamente cero, i.e. $\det |M| = 0$. Esto nos habla de que tenemos una teoría singular (cf. Sección (2.1.1), [58]). Como consecuencia de lo anterior, no podemos llegar a su formalismo hamiltoniano por medio del procedimiento estándar.

Seguimos el procedimiento descrito en el Capítulo 2. Comenzamos calculando los momentos generalizados asociados

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\mathcal{V}_0}{4\pi G} \frac{a\dot{a}}{N} \quad (5.12)$$

$$p_N = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (5.13)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EH}}}{\partial \dot{\phi}} = \mathcal{V}_0 \frac{a^3 \dot{\phi}}{N} \quad (5.14)$$

Se obtiene que la ecuación (5.13) representa una restricción primaria en el sistema $\Phi_1 := p_N \approx 0$. Esta restricción corresponde a una libertad de elección de norma que nos permite redefinir la coordenada temporal.

Escribimos ahora al hamiltoniano \mathcal{H}_0 como la transformada de Legendre del lagrangiano. Debido a la presencia de la restricción \mathcal{H}_0 corresponde simplemente al hamiltoniano canónico. El hamiltoniano del sistema, \mathcal{H}_{EH} , debe considerar de manera explícita a la restricción:

⁴ De manera más general, un acople no-mínimo a la gravedad tendría que involucrar un término de la forma $\frac{1}{2} \xi R \phi^2$ con el escalar de Ricci.

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \mathcal{H}_0 + \lambda_1 \Phi_1 \quad (5.15)$$

con

$$\mathcal{H}_0 = \dot{a}p_a + \dot{N}p_N + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L}_{\text{EH}}$$

donde λ_1 es una función completamente arbitraria. De las expresiones de los momentos generalizados, escribimos a las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos, y las sustituimos en la expresión del hamiltoniano, obteniendo que

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \left(-\frac{3\mathcal{Y}_0 k}{8\pi G} a - \frac{2\pi G}{3\mathcal{Y}_0} \frac{p_a^2}{a} + \frac{1}{2\mathcal{Y}_0} \frac{p_\phi^2}{a^3} + \mathcal{Y}_0 V(\phi) a^3 \right) N + \lambda_1 p_N \quad (5.16)$$

A partir de las ecuaciones de Hamilton, calculamos las ecuaciones de movimiento para (a, p_a) , (N, p_N) y (ϕ, p_ϕ)

$$\dot{a} = \{a, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = -\frac{4\pi G}{3\mathcal{Y}_0} \frac{N p_a}{a} \quad (5.17)$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = \frac{3\mathcal{Y}_0 k}{8\pi G} N - \frac{2\pi G}{3\mathcal{Y}_0} \frac{N p_a^2}{a^2} + \frac{3}{2\mathcal{Y}_0} \frac{N p_\phi^2}{a^4} - 3\mathcal{Y}_0 V(\phi) a^2 N \quad (5.18)$$

$$\dot{N} = \{N, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = \lambda_1 \quad (5.19)$$

$$\dot{p}_N = \{p_N, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = \frac{3\mathcal{Y}_0 k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3\mathcal{Y}_0} \frac{p_a^2}{a} - \frac{1}{2\mathcal{Y}_0} \frac{p_\phi^2}{a^3} - \mathcal{Y}_0 V(\phi) a^3 \quad (5.20)$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = \frac{N p_\phi}{\mathcal{Y}_0 a^3} \quad (5.21)$$

$$\dot{p}_\phi = \{p_\phi, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = -\mathcal{Y}_0 a^3 N \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (5.22)$$

Analicemos con cuidado las ecuaciones que obtuvimos. Las ecuaciones (5.17) y (5.21) solamente reproducen las definiciones para los momentos. La ecuación (5.19) nos habla acerca de la arbitrariedad de la función de lapso $N(t)$ y nos confirma lo que se comentaba al final de la sección anterior acerca de que no representa realmente un grado de libertad físico [28].

La ecuación (5.20) es la derivada temporal de la constricción primaria Φ_1 . Por la condición de consistencia para las constricciones⁵, esta ecuación debe cumplir con $\dot{\Phi}_1 = \dot{p}_N \approx 0$. Ya que no se cumple de manera trivial con esta condición, esta ecuación resulta ser una constricción secundaria en el sistema

$$\Phi_2 := \frac{3\mathcal{Y}_0 k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3\mathcal{Y}_0} \frac{p_a^2}{a} - \frac{1}{2\mathcal{Y}_0} \frac{p_\phi^2}{a^3} - \mathcal{Y}_0 V(\phi) a^3 \approx 0 \quad (5.23)$$

Pero vemos que esta constricción se encuentra relacionada con el hamiltoniano canónico, el cual, de (5.16), vemos que es

$$\mathcal{H}_0 = N \left(-\frac{3\mathcal{Y}_0 k}{8\pi G} a - \frac{2\pi G}{3\mathcal{Y}_0} \frac{p_a^2}{a} + \frac{1}{2\mathcal{Y}_0} \frac{p_\phi^2}{a^3} + \mathcal{Y}_0 V(\phi) a^3 \right) = N \Phi_2 \quad (5.24)$$

Ahora debemos de verificar si hay más constricciones secundarias en el sistema. Usamos la condición de consistencia sobre Φ_2 para comprobar si la constricción se preserva en el tiempo. Esta condición nos dice que $\dot{\Phi}_2 \approx 0$. Calculamos entonces la derivada temporal de esta constricción, usando la ec. (5.24) en la última igualdad

⁵ La cual fue establecida en la Sección 2.1.5

$$\dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = \left\{ \frac{\mathcal{H}_0}{N}, \mathcal{H}_0 + \lambda_1 \Phi_1 \right\} = \left\{ \frac{\mathcal{H}_0}{N}, \lambda_1 p_N \right\} = 0 \quad (5.25)$$

Como la ecuación anterior cumple con ser idénticamente igual a cero, esto nos dice que ya no tenemos más constricciones en nuestro sistema. Una consecuencia importante que podemos notar de haber realizado el cálculo anterior, viene del resultado obtenido en la última igualdad, el cual implica

$$\{\Phi_2, \Phi_1\} = 0 \quad (5.26)$$

es decir, que las constricciones conmutan entre sí bajo la acción del paréntesis de Poisson. Esto significa que las constricciones del sistema son de primera clase.

Obtenemos entonces un hamiltoniano completamente constreñido. Ya que las constricciones en el sistema son de primera clase, si usamos la conjetura de Dirac, se tiene que el hamiltoniano queda como la suma de las constricciones

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 = \lambda_1 p_N + \lambda_2 \left[\frac{3\mathcal{V}_0 k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3\mathcal{V}_0} \frac{p_a^2}{a} - \frac{1}{2\mathcal{V}_0} \frac{p_\phi^2}{a^3} - \mathcal{V}_0 V(\phi) a^3 \right] \quad (5.27)$$

De la ecuación (5.20) llegamos a la ecuación (5.23). Si usamos las definiciones de p_a y p_ϕ y las sustituimos en esta última, obtenemos

$$\frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot{a}}{aN} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2N^2} + V(\phi) \right] \quad (5.28)$$

la cual es conocida como la *primera ecuación de Friedmann* de donde podemos definir el parámetro de Hubble como $H \equiv \dot{a}/a$. Similarmente, si tomamos a la ecuación (5.18) y sustituimos el valor de los momentos en ella, llegamos a

$$\frac{\ddot{a}}{aN} = -\frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) \right] \quad (5.29)$$

la cual es conocida como la *segunda ecuación de Friedmann*. Finalmente, si tomamos la ecuación (5.22) y sustituimos el valor de p_ϕ en ella, tenemos

$$\frac{1}{N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}}{N} \right) + 3 \frac{\dot{a}}{aN} \left(\frac{\dot{\phi}}{N} \right) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (5.30)$$

la cual corresponde a la *ecuación de Klein-Gordon*.

Habiendo obtenido las ecuaciones clásicas del sistema, hacemos un par de observaciones. Primero notamos que las ecuaciones que continen la dinámica del sistema, i.e. (5.28)–(5.30), no dependen del parámetro \mathcal{V}_0 . Es decir, \mathcal{V}_0 no es un parámetro dinámico. Incluso, bajo el radio apropiado de integración (cf. (5.5)), este puede ser normalizado. De este modo, a partir de ahora consideramos que $\mathcal{V}_0 = 1$. Segundo, a manera de simplificación, consideramos que no existe potencial al que esté sujeto el campo escalar ϕ , de manera que tomamos $V(\phi) = 0$. Es importante notar que de (5.22), esto implica que

$$\dot{p}_\phi = 0 \quad \therefore \quad p_\phi \in \mathbb{R} \quad (5.31)$$

Aplicando las consideraciones anteriores al hamiltoniano (5.27), obtenemos

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \lambda_1 p_N + \lambda_2 \left[\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right] \quad (5.32)$$

Ahora escribimos el lagrangiano asociado

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \dot{a}p_a + \dot{N}p_N + \dot{\phi}p_\phi - \lambda_1 p_N - \lambda_2 \left[\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right]$$

Eligiendo una norma para el parámetro λ_1 , imponemos que $\lambda_1 = \dot{N}$ y obtenemos que la acción hamiltoniana de Einstein-Hilbert puede ser escrita como

$$S_{\text{EH}} = \int dt \left[\dot{a}p_a + \dot{\phi}p_\phi - \lambda_2 \left(\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right) \right] \quad (5.33)$$

Por lo que llegamos a que la dinámica es independiente de la variable de lapso N . El hamiltoniano que obtenemos de la dinámica clásica, partiendo de la acción de Einstein-Hilbert es

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right] \quad (5.34)$$

donde, desde ahora, denotaremos al parámetro λ_2 simplemente como λ .

5.4. Cuantización polimérica

Promovemos las coordenadas canónicas (a, p_a) a operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} justo como lo hicimos en la Sección 3.4, tal que los operadores actúen poliméricamente

$$\langle a_m | \hat{a} = \langle a_m | a_m \quad (5.35)$$

$$\hat{p}_a^2 |a_m\rangle = \frac{\hbar^2}{4\mu^2} [2|a_m\rangle - |a_m - 2\mu\rangle - |a_m + 2\mu\rangle] \quad (5.36)$$

es decir, la base $\{|a_m\rangle\} \in \mathcal{H}$ se vuelve discreta, de manera que la relación de completez se vuelve

$$\hat{\mathbb{I}} = \sum_{a_m \in \mathbb{Z}} |a_m\rangle \langle a_m| \quad (5.37)$$

y la relación de ortonormalidad es

$$\langle a_m | a_n \rangle = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{a_m} e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_m} (a_m - a_n)} \quad (5.38)$$

donde p_{a_m} denota el momento canónico asociado a la coordenada a_m . La cuantización polimérica tiene como consecuencia que los momentos se compactifiquen, es decir $p_{a_m} \in [-\frac{\hbar\pi}{\mu}, \frac{\hbar\pi}{\mu})$, y que su relación de ortonormalidad quede como

$$\langle p_{a_m} | p_{a_n} \rangle = \sum_{a_n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{i}{\hbar} a_n (p_{a_m} - p_{a_n})} \quad (5.39)$$

De manera similar, promovemos a las variables canónicas (ϕ, p_ϕ) a operadores en el espacio de Hilbert \mathcal{H} de la manera estándar.

$$\hat{\phi} |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle, \quad \hat{p}_\phi |\phi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} |\phi\rangle \quad (5.40)$$

$$\hat{p}_\phi |p_\phi\rangle = p_\phi |p_\phi\rangle, \quad \hat{\phi} |p_\phi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_\phi} |p_\phi\rangle \quad (5.41)$$

Donde tenemos que las relaciones de ortonormalidad son

$$\langle \phi | \phi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi} e^{\frac{i}{\hbar} p_{\phi} (\phi - \phi')} \quad (5.42)$$

$$\langle p_{\phi} | p_{\phi'} \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\phi e^{-\frac{i}{\hbar} \phi (p_{\phi} - p_{\phi'})} \quad (5.43)$$

Entonces, el hamiltoniano de Einstein-Hilbert (5.34) también es promovido a operador

$$\hat{\mathcal{H}} = \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} \hat{a} + \frac{2\pi G}{3} \frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} - \frac{\hat{p}_{\phi}^2}{2\hat{a}^3} \right] \quad (5.44)$$

A partir de ahora nos desharemos de la etiqueta ‘EH’ del hamiltoniano, presente en (5.34), para simplificar la notación.

5.5. Amplitud de transición en la cosmología polimérica

Como vimos en la Sección 2.3, para una teoría clásica con constricciones de primera clase, los estados físicos del sistema son aquellos que son aniquilados por la acción cuántica de las constricciones, es decir, deben quedar invariantes ante las transformaciones generadas por estas. El método del promedio sobre el grupo nos dice entonces (cf. ecs. (2.83), (2.84)) que los estados físicos son

$$|\Psi_{\text{fis}}\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} |\Psi_{\text{cin}}\rangle \quad (5.45)$$

Y el kernel de la transformación está dado por

$$\mathbb{K}(a_f, \phi_f; a_i, \phi_i) = \int d\lambda \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle \quad (5.46)$$

El propagador de manera explícita es

$$\langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle = \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} \hat{a} + \frac{2\pi G}{3} \frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} - \frac{\hat{p}_{\phi}^2}{2\hat{a}^3} \right]} | a_i, \phi_i \rangle \quad (5.47)$$

Descomponemos esta evolución en N particiones de tamaño $\epsilon = 1/N$ e insertando $N - 1$ veces el operador identidad en la base de $|a_n\rangle$ y de $|\phi_n\rangle$

$$\begin{aligned} & \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle \\ &= \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\phi_1 \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{2\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_1, \phi_1 \rangle \langle a_1, \phi_1 | e^{\frac{i}{2\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle \\ &= \sum_{a_1, a_2 \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\phi_1 d\phi_2 \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{3\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_2, \phi_2 \rangle \langle a_2, \phi_2 | e^{\frac{i}{3\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_1, \phi_1 \rangle \langle a_1, \phi_1 | e^{\frac{i}{3\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle \\ &= \sum_{a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_{N-1}, \phi_{N-1} \rangle \dots \langle a_1, \phi_1 | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle \end{aligned}$$

considerando $\langle a_N | \equiv \langle a_f |$, $\langle \phi_N | \equiv \langle \phi_f |$, $|\phi_0\rangle \equiv |\phi_i\rangle$ y $|a_0\rangle \equiv |a_i\rangle$ se llega a

$$\langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_i, \phi_i \rangle = \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{a_m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle. \quad (5.48)$$

Trabajando con el n -ésimo término, escribimos el hamiltoniano de manera explícita

$$\langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \hat{\mathcal{H}}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle = \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} \hat{a} + \frac{2\pi G}{3} \frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} - \frac{\hat{p}_\phi^2}{2\hat{a}^3} \right]} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle. \quad (5.49)$$

Podemos calcular por separado cada término en el argumento de la exponencial y juntar el resultado al final con mucho cuidado. Empezando por el primer término, definimos

$$\omega_1 = \epsilon \lambda \frac{3k}{8\pi G}. \quad (5.50)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} & \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \omega_1 \hat{a}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\ &= \langle a_n, \phi_n | \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{i}{\hbar} \omega_1 \hat{a} \right]^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{i}{\hbar} \omega_1 \right]^k \langle a_n, \phi_n | \hat{a}^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{i}{\hbar} \omega_1 a_n \right]^k \langle a_n, \phi_n | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \omega_1 a_n} \langle a_n, | a_{n-1} \rangle \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \omega_1 a_n} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_n} (a_n - a_{n-1})} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1})} \\ &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \omega_1 a_n]} \end{aligned}$$

en donde fueron utilizadas las relaciones de ortonormalidad. Tenemos así que para el primer término en (5.49) podemos escribir

$$\begin{aligned} & \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \frac{3k}{8\pi G} \hat{a}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle = \\ & \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda \frac{3k}{8\pi G} a_n]}. \quad (5.51) \end{aligned}$$

Ahora tomamos el segundo término de dicha expresión y hacemos actuar a los operadores \hat{a} y \hat{p} sobre los estados de acuerdo a (5.35) y (5.36). Definimos

$$\omega_2 = \epsilon \lambda \frac{2\pi G}{3}, \quad (5.52)$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \omega_2 \hat{p}_a^2 \hat{a}^{-1}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \langle a_n, \phi_n | \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{i}{\hbar} \omega_2 \hat{p}_a^2 \hat{a}^{-1} \right]^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{i}{\hbar} \omega_2 \right]^k \langle a_n, \phi_n | (\hat{p}_a^2 \hat{a}^{-1})^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{i}{\hbar} \omega_2 a_n^{-1} \right]^k \langle a_n, \phi_n | (\hat{p}_a^2)^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \langle a_n, \phi_n | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \langle a_n, \phi_n | \hat{p}_a^2 | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \right)^2 \langle a_n, \phi_n | \hat{p}_a^4 | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle + \dots
\end{aligned}$$

haciendo uso de (5.36), la acción de los momentos es

$$\begin{aligned}
&= \langle a_n | a_{n-1} \rangle \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \langle a_n | \left[\frac{\hbar^2}{4\mu^2} (2 |a_{n-1}\rangle - |a_{n-1} - 2\mu\rangle - |a_{n-1} + 2\mu\rangle) \right] \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle + \dots \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \left[\langle a_n | a_{n-1} \rangle + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} [2 \langle a_n | a_{n-1} \rangle - \langle a_n | a_{n-1} - 2\mu \rangle - \langle a_n | a_{n-1} + 2\mu \rangle] + \dots \right].
\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}
\langle a_n | a_{n-1} - 2\mu \rangle &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_n} (a_n - a_{n-1} + 2\mu)} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_n} (a_n - a_{n-1})} e^{\frac{i}{\hbar} 2\mu p_{a_n}} \\
&= \langle a_n | a_{n-1} \rangle e^{\frac{i}{\hbar} 2\mu p_{a_n}}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \omega_2 \hat{p}_a^2 \hat{a}^{-1}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \langle a_n | a_{n-1} \rangle \left[1 + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} \left(2 - e^{\frac{i}{\hbar} 2\mu p_{a_n}} - e^{-\frac{i}{\hbar} 2\mu p_{a_n}} \right) + \dots \right] \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \langle a_n | a_{n-1} \rangle \left[1 + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{2\mu p_{a_n}}{\hbar} \right) \right) + \dots \right] \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \langle a_n | a_{n-1} \rangle \left[1 + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{4\mu^2} \left(4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right) \right) + \dots \right].
\end{aligned}$$

Si calculamos con cuidado los términos de orden mayor, veremos que se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \omega_2 \hat{p}_a^2 \hat{a}^{-1}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \langle a_n | a_{n-1} \rangle \left[1 + \frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right) \right)^2 + \dots \right] \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \langle a_n | a_{n-1} \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right) \right]^k \\
&= \langle \phi_n | \phi_{n-1} \rangle \langle a_n | a_{n-1} \rangle e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right)} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1})]} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\omega_2}{a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right)}.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que el segundo término en (5.49) es

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \frac{2\pi G}{3} \frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda \frac{2\pi G}{3 a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right)]}. \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Por último, tomamos el tercer término antes definiendo

$$\omega_3 = -\frac{\epsilon \lambda}{2}, \tag{5.55}$$

entonces, se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \omega_3 \hat{p}_\phi^2 \hat{a}^{-3}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \langle a_n, \phi_n | \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \omega_3 \hat{p}_\phi^2 \hat{a}^{-3} \right)^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \omega_3 \right)^k \langle a_n, \phi_n | (\hat{p}_\phi^2 \hat{a}^{-3})^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \omega_3 a_n^{-3} \right)^k \langle a_n, \phi_n | (\hat{p}_\phi^2)^k | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \omega_3 a_n^{-3} \right)^k \langle a_n, a_{n-1} \rangle \langle \phi_n | (\hat{p}_\phi^2)^k | \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \omega_3 a_n^{-3} \right)^k \langle a_n | a_{n-1} \rangle \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \langle \phi_n | (\hat{p}_\phi^2)^k | p_{\phi_n} \rangle \langle p_{\phi_n} | \phi_{n-1} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{\hbar} \omega_3 a_n^{-3} p_{\phi_n}^2 \right)^k \langle a_n | a_{n-1} \rangle \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \langle \phi_n | p_{\phi_n} \rangle \langle p_{\phi_n} | \phi_{n-1} \rangle \\
&= e^{\frac{i}{\hbar} \omega_3 a_n^{-3} p_{\phi_n}^2} \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1})]} \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \omega_3 a_n^{-3} p_{\phi_n}^2]}.
\end{aligned}$$

Para obtener que es

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \frac{\hat{p}_\phi^2}{2\hat{a}^3}} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} \left[p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) - \epsilon \lambda \frac{p_{\phi_n}^2}{2\hat{a}_n^3} \right]}. \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Por tanto, juntando estos tres resultados, obtenemos que el n -ésimo término del propagador, es decir (5.49), es igual a

$$\begin{aligned}
& \langle a_n, \phi_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} \hat{a} + \frac{2\pi G}{3} \frac{\hat{p}_a^2}{\hat{a}} - \frac{\hat{p}_\phi^2}{2\hat{a}^3} \right]} | a_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} e^{\frac{i}{\hbar} [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}, \quad (5.57)
\end{aligned}$$

donde se hizo la identificación

$$H_n = \frac{3k}{8\pi G} a_n + \frac{2\pi G}{3a_n} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_{a_n}}{\hbar} \right) - \frac{p_{\phi_n}^2}{2\hat{a}_n^3}. \quad (5.58)$$

Sustituyendo estas evoluciones de tamaño ϵ en la ecuación de la evolución total, obtenemos que el propagador (5.48) es

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{a_m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}. \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Tomando el primer término de la sumatoria de la exponencial en la expresión anterior

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N p_{a_k} (a_k - a_{k-1}) \\
&= p_{a_1} (a_1 - a_0) + p_{a_2} (a_2 - a_1) + \dots + p_{a_{N-1}} (a_{N-1} - a_{N-2}) + p_{a_N} (a_N - a_{N-1}) \\
&= p_{a_N} a_N - p_{a_1} a_0 + a_1 (p_{a_1} - p_{a_2}) + a_2 (p_{a_2} - p_{a_3}) + \dots + a_{N-1} (p_{a_{N-1}} - p_{a_N}) \\
&= p_{a_N} a_N - p_{a_1} a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k (p_{a_k} - p_{a_{k+1}}). \quad (5.60)
\end{aligned}$$

Insertando este resultado en el propagador se tiene

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{a_m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_N} a_N - p_{a_1} a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n (p_{a_n} - p_{a_{n+1}})} \times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}. \quad (5.61)
\end{aligned}$$

Reacomodando los términos en la expresión

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
&\times \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{a_m \in \mathbb{Z}} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} a_n (p_{a_n} - p_{a_{n+1}})} \times e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_N} a_N - p_{a_1} a_0 + \sum_{n=1}^N [p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}, \quad (5.62)
\end{aligned}$$

vemos que la primer exponencial que se tiene, junto a la sumatoria, corresponden a la relación de ortonormalidad para los momentos, (5.39). Utilizando la fórmula de Poisson podemos reescribir la relación de ortonormalidad como

$$\sum_{a_k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{i}{\hbar} a_k (p_{a_k} - p_{a_{k+1}})} = \sum_{l_k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} da_k e^{\frac{i}{\hbar} a_k (p_{a_k} - p_{a_{k+1}} + \frac{2\pi l_k \hbar}{\mu})} \quad (5.63)$$

de manera análoga a como se realizó en el Apéndice A para la ecuación (A.5), obteniendo (A.9). Sustituyendo este resultado, se tiene que el propagador es

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \prod_{m=1}^{N-1} \left[\sum_{l_m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} da_m \int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} a_n (p_{a_n} - p_{a_{n+1}} + \frac{2\pi l_n \hbar}{\mu})} \times e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_N} a_N - p_{a_1} a_0 + \sum_{n=1}^N [p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}. \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Ahora, podemos absorber a cada l_m y a sus sumatorias al cambiar el rango de integración de cada $dp_{a_{m+1}}$ como $[-\pi\hbar/\mu, \pi\hbar/\mu] \rightarrow (-\infty, \infty)$, tal y como lo hicimos en el Apéndice A para la ecuación (A.12). El cambio en el rango de integración es realizado en todas las integrales, menos en aquella para p_{a_1} . Esto es porque, mientras que se tienen un total de N integrales, solo tenemos $N - 1$ sumatorias sobre l_m . Con este resultado, escribimos al propagador como

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_N} \prod_{m=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} da_m \int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
&\times e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} a_n (p_{a_{n+1}} - p_{a_n})} \times e^{\frac{i}{\hbar} p_{a_N} a_N - p_{a_1} a_0 + \sum_{n=1}^N [p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}. \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Utilizamos la expresión (5.60) para regresar el argumento de la primer exponencial a su forma original

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_N} \prod_{m=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_{a_n} \int_{\mathbb{R}} da_m \int_{\mathbb{R}} d\phi_m \right] \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N [p_{a_n} (a_n - a_{n-1}) + p_{\phi_n} (\phi_n - \phi_{n-1}) + \epsilon \lambda H_n]}. \quad (5.66)
\end{aligned}$$

Y reescribimos la expresión como

$$\begin{aligned}
& \langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle \\
&= \prod_{m=1}^{N-1} [d\phi_m] \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N p_{\phi_n} \frac{(\phi_n - \phi_{n-1})}{\epsilon}} \\
&\times \prod_{m=1}^{N-1} \left[\int_{\mathbb{R}} da_m \right] \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_N} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_{a_n} \right] e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N \left[p_{a_n} \frac{(a_n - a_{n-1})}{\epsilon} + \lambda H_n \right]}. \quad (5.67)
\end{aligned}$$

Finalmente tomamos el límite cuando $N \rightarrow \infty$, i.e. $\epsilon \rightarrow 0$, en donde formalmente tenemos que

$$\frac{a_{k+1} - a_k}{\epsilon} \rightarrow \frac{da}{dt}, \quad \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\epsilon} \rightarrow \frac{d\phi}{dt}, \quad \epsilon \sum_{k=0}^{N-1} \rightarrow \int_{t_i}^{t_f} dt. \quad (5.68)$$

Y haciendo la identificación

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\phi(t) &= \prod_{m=1}^{N-1} [d\phi_m], & \mathcal{D}p_{\phi}(t) &= \prod_{n=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} dp_{\phi_n} \right] \\
\mathcal{D}a(t) &= \prod_{m=1}^{N-1} [da_m], & \mathcal{D}p_a(t) &= \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu}} dp_{a_N} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp_{a_n} \right]
\end{aligned} \quad (5.69)$$

obtenemos finalmente que el propagador es

$$\langle a_f, \phi_f | e^{\frac{i}{\hbar} \lambda \mathcal{H}} | a_i, \phi_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi(t) \mathcal{D}p_{\phi}(t) \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}p_a(t) e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{\text{poli}}}, \quad (5.70)$$

en donde la acción efectiva en la cosmología polimérica a la que llegamos es

$$\mathcal{S}_{\text{poli}} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_{\phi} \dot{\phi} + p_a \dot{a} + \lambda \left(\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3a} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_a}{\hbar} \right) - \frac{p_{\phi}^2}{2a^3} \right) \right] \quad (5.71)$$

y donde denotaremos a partir de ahora a las funciones lagrangiana y hamiltoniana resultantes como $\mathcal{L}_{\text{poli}}$ y $\mathcal{H}_{\text{poli}}$. A este nivel podemos considerar que la dinámica que obtengamos de esta acción es una dinámica que se puede tomar como clásica de manera efectiva.

5.6. Desparametrización de la acción

Resulta importante mencionar ahora que existen ciertos tipos de sistemas físicos, cuya acción es invariante ante reparametrizaciones $\tau \rightarrow f(\tau)$ de la variable temporal τ , de manera que la dinámica del sistema no cambia. Estas reparametrizaciones corresponden en realidad a transformaciones de norma, en donde el parámetro τ no representa al tiempo físico de verdad. Esto sucede cuando tenemos que el hamiltoniano del sistema es completamente constreñido [31]. Para obtener la evolución física verdadera, uno debe fijar completamente la norma en el sistema. Después de hacer esto, uno debe ser capaz de encontrar una función del espacio fase que pueda ser usada como un parámetro global en la descripción de la dinámica. De esta manera, obtenemos una *dinámica relacional* descrita por un tiempo interno, el cual se encuentra expresado en términos de los grados internos físicos del sistema [59]. A este proceso se le conoce como *desparametrización* [36].

Dado que la acción (5.71) que obtuvimos cumple con que su dinámica sea invariante ante reparametrizaciones temporales y dado que esta dinámica ya puede ser tomada como clásica, nuestro sistema entonces puede ser desparametrizado. Comencemos por considerar el principio de Hamilton,

$$\delta S = \int dt \delta \mathcal{L} = 0$$

y realizemos una variación al lagrangiano en (5.71) respecto a p_ϕ

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{poli}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{poli}}}{\partial p_\phi} \delta p_\phi + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{poli}}}{\partial \dot{p}_\phi} \delta \dot{p}_\phi = \left(\dot{\phi} - \lambda \frac{p_\phi}{a^3} \right) \delta p_\phi \\ \Rightarrow \quad \dot{\phi} - \lambda \frac{p_\phi}{a^3} &= 0; \quad \therefore \quad \lambda = \frac{\dot{\phi} a^3}{p_\phi} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Sustituyendo a (5.72) en (5.71), llegamos a la acción

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{poli}} &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_\phi \dot{\phi} + p_a \dot{a} + \frac{\dot{\phi} a^3}{p_\phi} \left(\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3a} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \sin^2 \left(\frac{\mu p_a}{\hbar} \right) - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_a \dot{a} + \dot{\phi} \left(p_\phi + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 + \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{\mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu p_a}{\hbar} \right) - \frac{p_\phi}{2} \right) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_a \frac{da}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \left(\frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{\mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu p_a}{\hbar} \right) + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \right) \right] \end{aligned}$$

Haciendo uso de la regla de la cadena para $\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$, obtenemos la acción

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}[a, a'; \phi] = \int d\phi \left[a' p_a + \frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{\mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu p_a}{\hbar} \right) + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \right] \quad (5.73)$$

con $a' := \frac{da}{d\phi}$. Tenemos así que la variable ϕ pasa a ser el nuevo parámetro de evolución de nuestro sistema. El hamiltoniano asociado a este sistema, considerando el nuevo parámetro temporal, es

$$\mathcal{H}_{\text{poli}}(a, p_a) = a' p_a - \mathcal{L}_{\text{poli}}(a, a')$$

$$\mathcal{H}_{\text{poli}}(a, p_a; \phi) = -\frac{p_\phi}{2} - \frac{2\pi G}{3p_\phi} \frac{\hbar^2}{\mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu p_a}{\hbar} \right) - \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \quad (5.74)$$

Este resultado que hemos obtenido no es ninguna casualidad. Podemos notar que en realidad, en cualquier modelo cosmológico espacialmente homogéneo que cuente con un campo escalar de materia que no esté sujeto a algún potencial asociado, se cumple con que el momento canónico asociado al campo de materia es una constante de movimiento y por tanto el campo es una función monótona a lo largo de cualquier trayectoria. Por tanto, al menos en cualquier teoría clásica, el campo de materia sirve como un reloj interno [22].

5.7. Dinámica cosmológica

Antes de analizar la dinámica efectiva cosmológica que obtenemos como resultado de la cuantización polimérica, analicemos primero la dinámica clásica que se da en la cosmología de FRW para ver las diferencias que surgen en la evolución del sistema como consecuencia de utilizar esta cuantización.

No resultaría correcto comparar la dinámica efectiva polimérica con la dinámica clásica que se pudiera obtener al final de la Sección 5.3 como resultado de calcular las ecuaciones de movimiento de la función hamiltoniana (5.34). Esto es debido a que su dinámica se encuentra descrita con respecto al tiempo t , mientras que la dinámica polimérica que se obtiene de (5.74) se encuentra en términos del tiempo interno ϕ . Por tanto, podemos tomar la acción clásica de Einstein-Hilbert (5.33) para realizar con ella una desparametrización análoga a la que se hizo en (5.73) y hacer que su dinámica se encuentre también descrita en términos del tiempo ϕ .

5.7.1. Dinámica cosmológica clásica

Por cuestiones de claridad escribimos de nuevo la ec. (5.33), la cual corresponde a la acción clásica de Einstein-Hilbert que obtuvimos al final de la Sección 5.3:

$$S_{\text{EH}} = \int dt \left[\dot{a}p_a + \dot{\phi}p_\phi - \lambda \left(\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right) \right]$$

Si realizamos una variación respecto a la variable p_ϕ y tomamos en cuenta el principio de Hamilton, llegamos a que $\lambda = -\dot{\phi}a^3/p_\phi$. Si sustituimos este resultado en la acción anterior se llega a

$$S_{\text{EH}} = \int d\phi \left[a' p_a + \frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G}{3p_\phi} a^2 p_a^2 + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \right] \quad (5.75)$$

donde $a' := \frac{da}{d\phi}$. Aquí ya tenemos que la dinámica del sistema se encuentra descrita de manera relacional por medio del campo de materia ϕ , el cual ahora cumple el papel de reloj interno de la teoría. La información dinámica del sistema se encuentra en la función hamiltoniana, la cual es

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = -\frac{p_\phi}{2} - \frac{2\pi G}{3p_\phi} a^2 p_a^2 - \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \quad (5.76)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton, calculamos las ecuaciones de movimiento del sistema para las variables canónicas (a, p_a)

$$a' = \{a, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = -\frac{4\pi G}{3p_\phi} a^2 p_a \quad (5.77)$$

$$p_a' = \{p_a, \mathcal{H}_{\text{EH}}\} = \frac{4\pi G}{3p_\phi} a p_a^2 + \frac{12k}{8\pi G p_\phi} a^3 \quad (5.78)$$

La solución numérica a estas ecuaciones se encuentra en la figura 5.1. Podemos ver que las soluciones obtenidas coinciden cualitativamente con los resultados estándar que se conocen [54, 57].

Para un universo plano ($k = 0$) y para un universo con geometría hiperbólica ($k = -1$), tenemos una dinámica similar. Podemos tener un universo que a tiempos iniciales remotos $\phi \rightarrow -\infty$ comienza como una singularidad que cuenta con un proceso de expansión. Esta expansión continúa eternamente, de manera que el universo se encuentra siempre en crecimiento. O bien, tenemos inicialmente un universo arbitrariamente grande a tiempos remotos $\phi \rightarrow -\infty$ que presenta una continua desaceleración, la cual finalmente lleva a que el universo tienda a una singularidad a tiempos remotos futuros $\phi \rightarrow \infty$. La diferencia que hay entre ambos modelos es que la aceleración, o desaceleración, que presenta el universo hiperbólico es mayor que la aceleración, o desaceleración, que presenta el universo plano. Podemos ver que el hecho de que estos modelos se encuentren expandiéndose o contrayéndose, depende de la condición inicial del momento canónico del factor de escala que, como vemos de la ec. (5.13), es proporcional a $p_a \approx -a\dot{a}$. Los modelos cosmológicos que describen un universo en contracción han sido descartados desde que Edwin Hubble confirmó la expansión cósmica en el año de 1929 [60]. Por otro lado, para un universo cerrado con geometría esférica ($k = 1$), tenemos que el universo comienza a tiempos pasados remotos como una singularidad que va creciendo. Este crecimiento llega a un valor máximo máximo $a_{\text{máx}}$ para el factor de escala, para luego empezar a contraerse de nuevo y aproximarse asintóticamente a una singularidad a tiempos futuros remotos $\phi \rightarrow \infty$.

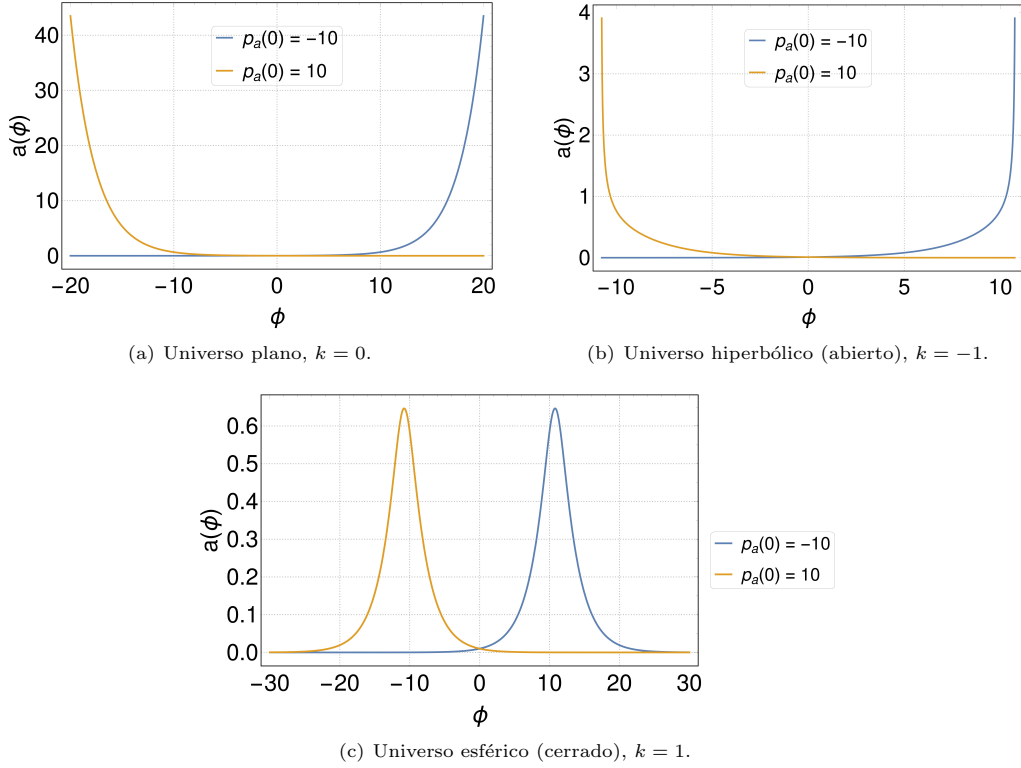


Figura 5.1: Solución numérica para la dinámica clásica del factor de escala $a(\phi)$ considerando los diferentes valores que toma parámetro de curvatura k . Las condiciones iniciales consideradas fueron $a(0) = 10^{-2}$, línea azul: $p_a(0) = -10$, línea dorada: $p_a(0) = 10$. Código computacional en pág. 113.

5.7.2. Dinámica cosmológica polimérica

Consideramos ahora la evolución cosmológica que se obtiene de cuantizar poliméricamente a la teoría clásica. A este nivel consideramos que la dinámica del sistema está dada de manera efectiva por una descripción clásica. Para obtener esta dinámica, retomemos el hamiltoniano efectivo que se obtuvo en (5.74):

$$\mathcal{H}_{\text{poli}} = -\frac{p_\phi}{2} - \frac{2\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a^2 \sin^2\left(\frac{\mu p_a}{\hbar}\right) - \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4$$

Podemos calcular las ecuaciones de movimiento haciendo uso de las ecuaciones de Hamilton. Esto tiene como resultado lo siguiente,

$$a' = \{a, \mathcal{H}_{\text{poli}}\} = -\frac{2\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a^2 \sin\left(\frac{\mu}{\hbar} 2p_a\right) \quad (5.79)$$

$$p_a' = \{p_a, \mathcal{H}_{\text{poli}}\} = \frac{4\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar} 2p_a\right) + \frac{3k}{2\pi G p_\phi} a^3 \quad (5.80)$$

En la figura 5.2 podemos ver las soluciones numéricas que se obtienen del sistema de ecuaciones previo.

La dinámica polimérica que obtenemos presenta importantes diferencias con respecto a la dinámica clásica. Para un universo plano ($k = 0$) obtenemos un único rebote que caracteriza la evolución. Comenzamos a un tiempo pasado muy remoto $\phi \rightarrow -\infty$, con un universo arbitrariamente grande que se encuentra contrayéndose. Esta contracción provoca que el universo llegue a la singularidad y se mantenga ahí hasta que tiempo después cambie su comportamiento y comience a crecer. La expansión se prolonga de manera ininterrumpida para todo tiempo posterior, provocando que el universo crezca indefinidamente. El universo hiperbólico ($k = -1$) presenta un comportamiento que contrasta más respecto a su contraparte clásica. Este universo presenta numerosos rebotes a lo largo de su evolución, en donde cada rebote presenta un comportamiento característico: después de presentar un rápido crecimiento, el universo alcanza un tamaño máximo y sufre un abrupto cambio en su momento, lo que provoca que este ahora empiece a contraerse y llegue a la singularidad, para después comenzar a crecer nuevamente y repetir el mismo comportamiento. El máximo local que alcanza el factor de escala después de cada rebote es diferente en cada caso pero todos presentan un mismo orden de magnitud. Mientras tanto, la dinámica polimérica que presenta un universo con geometría esférica ($k = 1$) también presenta una serie de rebotes periódicos a lo largo de su evolución. Pero a diferencia de un universo hiperbólico, este universo se caracteriza por tener rebotes más suaves y por siempre alcanzar un mismo máximo local. Es decir, este universo crece siempre hasta cierto tamaño máximo para después comenzar a contraerse.

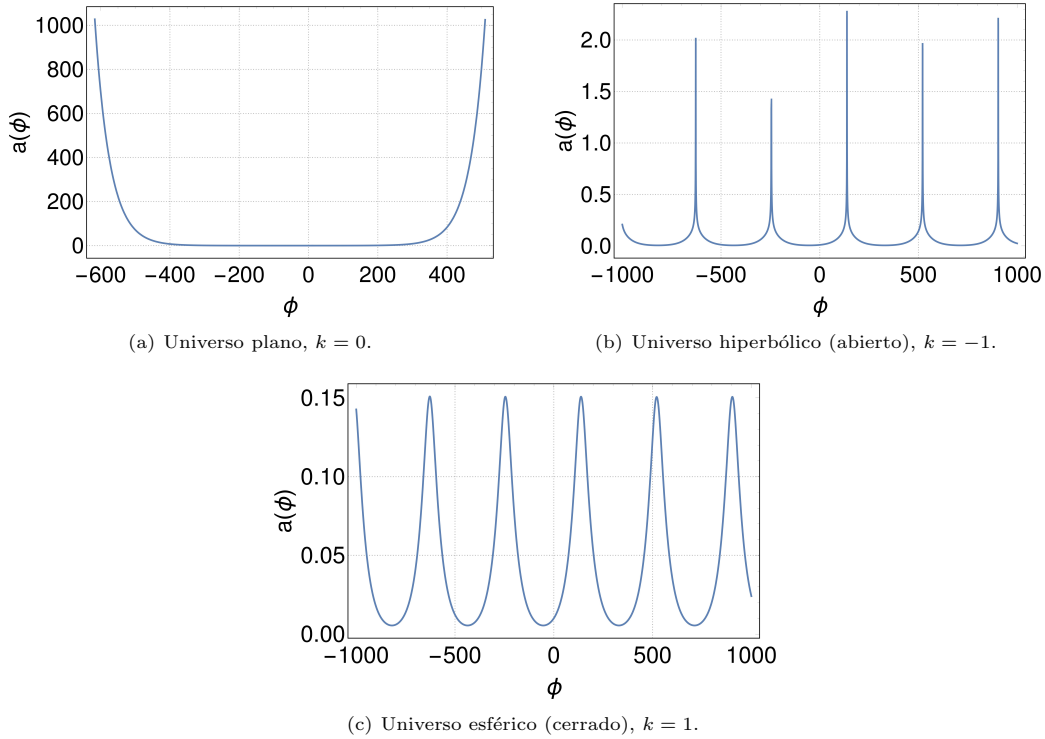


Figura 5.2: Solución numérica para la dinámica polimérica del factor de escala $a(\phi)$ considerando los diferentes valores que toma parámetro de curvatura k . Las condiciones iniciales consideradas fueron $a(0) = 10^{-2}$, $p_a(0) = -10$. Código computacional en pág. 114.

Los resultados que se obtienen para la dinámica cosmológica polimérica están de acuerdo, al menos de manera cualitativa, con los resultados que se han obtenido en el contexto de la cosmología cuántica de lazos, en donde la dinámica cosmológica se encuentra caracterizada por un rebote para

diversos modelos cosmológicos [61]. Esto nos habla de cómo la cuantización polimérica en efecto produce una dinámica diferente al considerar propiedades de la geometría cuántica, dejando de lado la idea de que a distancias muy pequeñas la naturaleza del espacio-tiempo sigue siendo continua.

Sin embargo, a nosotros nos interesa encontrar soluciones tipo instantón para el caso de un universo cerrado $k = 1$. Estas soluciones se deben de buscar en el espacio euclídeo, mientras que las soluciones que obtuvimos para la dinámica polimérica se encuentran en el espacio de Minkowski. Antes de proceder al siguiente capítulo para buscar las soluciones tipo instantón, verifiquemos que en el límite al continuo, en donde la longitud polimérica característica se considera como más pequeña a la longitud de Planck, recuperemos la dinámica cosmológica clásica para un universo con geometría esférica en donde $k = 1$.

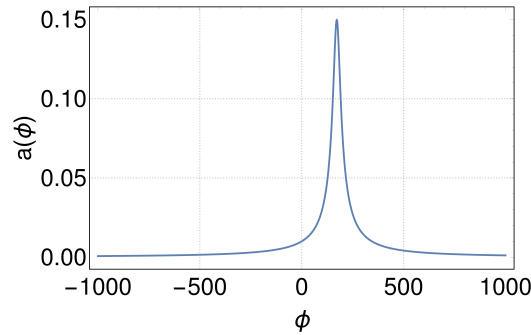


Figura 5.3: Solución numérica para la dinámica polimérica del factor de escala $a(\phi)$ en el límite clásico, considerando un universo cerrado ($k = 1$). Las condiciones iniciales consideradas fueron $a(0) = 10^{-2}$, $p_a(0) = -10$. Mientras que el valor considerado para la longitud polimérica característica fue $\mu = 0.316$. Código computacional en pág. 114.

Efectivamente, al hacer más pequeño el valor de μ recuperamos la dinámica cosmológica clásica en donde el universo a $\phi \rightarrow -\infty$ comienza de manera asintótica como una singularidad, crece hasta llegar a un tamaño máximo y luego se contrae para aproximarse de manera asintótica a una singularidad a tiempo $\phi \rightarrow \infty$. De esta manera nos aseguramos de tener un comportamiento consistente para la dinámica cosmológica polimérica.

Capítulo 6

Dinámica de la acción efectiva en el espacio euclídeo

En este capítulo comenzamos por presentar algunas herramientas necesarias para realizar el análisis de la búsqueda de soluciones tipo instantón en la dinámica efectiva de la cosmología polimérica. Primero damos una definición correspondiente a los instantones. Después analizamos con cuidado las rotaciones de Wick, que son las transformaciones que nos permiten movernos al espacio euclídeo, investigando si estas, de manera general, producen las mismas ecuaciones de movimiento independientemente de si partimos de una acción lagrangiana o de una acción hamiltoniana. Posteriormente presentamos a manera ejemplo, un sistema en donde aparecen soluciones tipo instantón: el oscilador armónico polimérico. Finalmente, aplicando lo aprendido en este capítulo, pasamos al espacio euclídeo la dinámica cosmológica obtenida en el capítulo anterior y realizamos la búsqueda de soluciones tipo instantón en las ecuaciones de movimiento. Este análisis es llevado a cabo, desde el nivel clásico, considerando tres casos diferentes de variables fundamentales para la cosmología: i) el factor de escala a , ii) una cantidad con unidades de “área” en el factor de escala $A \sim a^2$, y iii) una cantidad con unidades de “volumen” en el factor de escala $V \sim a^3$.

6.1. Instantones

Un *instantón* es un concepto que aparece en la física teórica que resulta útil para el estudio no-perturbativo de diversos sistemas en la mecánica cuántica y en la teoría cuántica de campos. De manera más precisa, los instantones corresponden a soluciones localizadas para las ecuaciones de campo euclídeas clásicas de una teoría con acción euclídea finita [62]. Estas soluciones resultan importantes en la teoría cuántica de campos ya que: a) aparecen en la integral de camino como las correcciones cuánticas principales a la dinámica clásica del sistema, b) pueden ser utilizadas para estudiar efectos tales como el tunelaje cuántico.

Algunas de las características de la teoría cuántica de campos en el espacio de Minkowski pueden ser convenientemente exploradas si uno comienza estudiando las soluciones clásicas de la versión euclídea de las ecuaciones de campo. Esta versión es construida al pasar al espacio euclídeo mediante la continuación analítica formal de la coordenada temporal ($t \rightarrow i\tau$) del espacio de Minkowski [63]. Una de las características más notables que puede ser estudiada de esta manera es el tunelaje cuántico entre estados base clásicos que cuentan con una degeneración.

Por ejemplo, ya que los instantones corresponden a un conjunto de soluciones deterministas que conectan diferentes puntos críticos de las ecuaciones de movimiento, pueden ser utilizados para calcular la probabilidad de transición de una partícula mecánico-cuántica pasando a través de una barrera de potencial. A diferencia de la partícula clásica, la probabilidad de que esta cruce una región con una energía potencial mayor a su energía, no es nula.

Para ilustrar mejor este concepto, partamos de la siguiente amplitud de transición

$$\langle x_f | e^{-\frac{iHt}{\hbar}} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{iS} \quad (6.1)$$

donde $|x_f\rangle, |x_i\rangle$ corresponden a eigenestados de las posiciones, H es el hamiltoniano del sistema y N es una constante de normalización.

Haciendo una rotación de Wick al espacio euclídeo ($t \rightarrow i\tau$), llegamos a la versión euclídea de la integral de camino de Feynmann

$$\langle x_f | e^{-\frac{H\tau}{\hbar}} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x e^{-S_E} \quad (6.2)$$

con S_E como la acción euclídea, a la cual se le pide que cumpla con ser positiva definida ($S_E > 0$).

Si reexpresamos el lado izquierdo de la anterior ecuación en términos de la base de eigenestados de la energía

$$\langle x_f | e^{-\frac{H\tau}{\hbar}} | x_i \rangle = \sum_n e^{-\frac{E_n\tau}{\hbar}} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle, \quad (6.3)$$

vemos que el término de orden principal para esta expresión, considerando que τ es muy grande, corresponde al estado base de la energía. En general se asume que el estado base E_0 no se encuentra degenerado.

Entonces, se tiene que las soluciones tipo instantón son aquellas soluciones a las ecuaciones de movimiento derivadas de la acción S_E , tales que si las evaluamos en esta, dejan finito su valor. Al pedir que el valor de S_E sea finito, implícitamente estamos tomando el límite $\tau \rightarrow \infty$, ya que debemos resolver sobre todo el dominio de τ la integral

$$S_E = \int \mathcal{L} d\tau. \quad (6.4)$$

De esta manera nos aseguramos de que obtenemos información solo del estado base del sistema, ya que si no tomáramos este límite podríamos estar obteniendo información del resto del espectro de energías del sistema, como podemos ver de (6.3). Es importante que el valor de S_E sea finito, ya que si este diverge, el lado derecho de la ec. (6.2) sería inmediatamente igual a cero.

6.2. Rotación de Wick

Las *rotaciones de Wick* son un método que se utiliza para encontrar soluciones para un problema matemático en el espacio de Minkowski a partir de una solución relacionada a un problema en el espacio euclídeo, por medio de una transformación que sustituye una variable real por una variable imaginaria. Se encuentran motivadas por la observación que la métrica de Minkowski, en unidades naturales,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.5)$$

y la métrica euclídea en cuatro dimensiones

$$ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.6)$$

son equivalentes si uno permite que la coordenada temporal tome valores imaginarios. La métrica de Minkowski se vuelve la métrica euclídea cuando el parámetro temporal está restringido a tomar valores en el eje imaginario, y viceversa. Tomar un problema expresado en el espacio de Minkowski con coordenadas t, x, y, z , sustituyendo $t = i\tau$, a veces constituye un problema en el espacio euclídeo con coordenadas τ, x, y, z que es más fácil de resolver. Esta solución puede producir, mediante la transformación inversa, una solución al problema original.

Es importante notar que lo anterior no es solo un cambio en la notación. El sistema euclídeo no es el mismo que el sistema de Minkowski escrito en términos de unas nuevas coordenadas. Por ejemplo,

mientras que en el espacio de Minkowski el intervalo invariante corresponde a $s^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$, en el espacio euclídeo tenemos que el intervalo invariante es $s^2 = \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Los dos sistemas son diferentes. Sin embargo, es posible pensar en el sistema euclídeo como una continuación analítica del sistema en el espacio de Minkowski.

Para obtener una acción euclídea, uno hace una continuación analítica de la acción en el espacio de Minkowski y obtiene un factor $\pm i$, en donde el signo es elegido convenientemente para que, en el contexto de la integral de trayectoria, tengamos una exponencial con un argumento negativo definido.

Considérese que de una integral de trayectoria se obtuvo la siguiente acción lagrangiana en el espacio de Minkowski

$$e^{iS_M} = e^{i \int dt \mathcal{L}(x, \dot{x}; t)}. \quad (6.7)$$

Si consideramos que la función lagrangiana es de la forma

$$\mathcal{L}(x^a, \dot{x}^b; t) = \frac{1}{2} m g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - V(x^a), \quad (6.8)$$

es fácil probar que de hacer una variación en la acción, las ecuaciones que se obtienen son

$$m g_{ab} \ddot{x}^a = - \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b}. \quad (6.9)$$

Como ya se comentó, si hacemos una rotación de Wick no necesariamente llegamos a las mismas ecuaciones de movimiento en el espacio euclídeo que las que se obtienen en el espacio de Minkowski. Para verificar lo anterior hacemos la siguiente transformación¹ en la acción S_M

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -i\tau, \\ \frac{d}{dt} &\rightarrow i \frac{d}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^a \rightarrow i \dot{x}_{(E)}^a \end{aligned} \quad (6.10)$$

entonces,

$$\begin{aligned} S_M &= -i \int d\tau \left[\frac{1}{2} m g_{ab} i \dot{x}_{(E)}^a i \dot{x}_{(E)}^b - V(x^a) \right] \\ &= i \int d\tau \left[\frac{1}{2} m g_{ab} \dot{x}_{(E)}^a \dot{x}_{(E)}^b + V(x^a) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Definimos a la acción euclídea S_E como

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} m g_{ab} \dot{x}_{(E)}^a \dot{x}_{(E)}^b + V(x^a) \right]. \quad (6.12)$$

De manera que se tiene $S_M = iS_E$. Resulta importante notar que la acción euclídea cumple con $S_E > 0$, tal que la exponencial de la integral de camino es

$$e^{iS_M} = e^{-S_E}, \quad S_E > 0. \quad (6.13)$$

Hacemos ahora una variación en la acción euclídea

$$\begin{aligned} \delta S_E &= \int d\tau \left[m g_{ab} \dot{x}_{(E)}^a \delta \dot{x}_{(E)}^b + \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b} \delta x^b \right] \\ &= \int d\tau \left[m g_{ab} \dot{x}_{(E)}^a \frac{d}{d\tau} (\delta x^b) + \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b} \delta x^b \right] \\ &= (m g_{ab} \dot{x}_{(E)}^a \delta x^b) \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} - \int d\tau \left[\frac{d}{d\tau} (m g_{ab} \dot{x}_{(E)}^a) \delta x^b - \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b} \delta x^b \right], \end{aligned}$$

¹ Donde tenemos que $\dot{x}^a := \frac{d}{dt} x^a$, mientras que la derivada respecto al tiempo euclídeo se denota (únicamente en esta sección) como $\dot{x}_{(E)}^a := \frac{d}{d\tau} x^a$.

tal que $\delta S_E = 0$. Si imponemos que las variaciones se anulen en los extremos, i.e. en los puntos τ_i y τ_f , se tiene

$$\delta S_E = - \int d\tau \left[\frac{d}{d\tau} (mg_{ab}\dot{x}_{(E)}^a) - \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b} \right] \delta x^b = 0 \quad (6.14)$$

que nos lleva a la ecuación de movimiento

$$mg_{ab}\ddot{x}_{(E)}^a = \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b}. \quad (6.15)$$

Si comparamos esta expresión con la ec. (6.9), notamos que las ecuaciones de movimiento que se obtienen inicialmente en el espacio de Minkowski no son iguales a las que en el espacio euclídeo después de una rotación de Wick.

Pero ahora estamos interesados en ver qué sucede con las ecuaciones de movimiento si, en lugar de tener una acción lagrangiana, tenemos una acción hamiltoniana. Calculamos el hamiltoniano asociado a (6.10), es decir, cuando aún trabajamos con el tiempo t en el espacio de Minkowski. El momento canónico asociado es

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = mg_{ab}\dot{x}^b \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^b = g^{ab} \frac{p_a}{m} \quad (6.17)$$

donde g^{ab} es la inversa de la métrica. Entonces la acción hamiltoniana en el espacio de Minkowski queda como

$$\begin{aligned} S_M &= \int dt [p_a \dot{x}^a - \mathcal{H}(x^a, p_a)] \\ &= \int dt \left[p_a \dot{x}^a - \left(g^{ab} \frac{p_a p_b}{2m} + V(x^a) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Si ahora aplicamos en esta acción la rotación de Wick hecha en (6.10), necesitamos adicionalmente calcular cómo cambia el momento asociado a las posiciones en el espacio euclídeo

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx^a/dt)} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (i dx^a/d\tau)} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{(E)}^a} := -i p_a^{(E)} \quad (6.19)$$

donde $p_a^{(E)}$ denota al momento asociado en el espacio euclídeo. Tenemos pues que la acción se transforma como

$$\begin{aligned} S_M &= -i \int d\tau \left[(-i p_a^{(E)}) (i \dot{x}_{(E)}^a) - \left(g^{ab} \frac{1}{2m} (-i p_a^{(E)}) (-i p_b^{(E)}) + V(x^a) \right) \right] \\ &= -i \int d\tau \left[p_a^{(E)} \dot{x}_{(E)}^a - \left(-g^{ab} \frac{1}{2m} p_a^{(E)} p_b^{(E)} + V(x^a) \right) \right] \\ &= i \int d\tau \left[-p_a^{(E)} \dot{x}_{(E)}^a - \left(g^{ab} \frac{1}{2m} p_a^{(E)} p_b^{(E)} - V(x^a) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Definimos la acción hamiltonia en el espacio euclídeo como

$$S_E = \int d\tau \left[-p_a^{(E)} \dot{x}_{(E)}^a - \left(g^{ab} \frac{1}{2m} p_a^{(E)} p_b^{(E)} - V(x^a) \right) \right] \quad (6.21)$$

de manera tal que tenemos $S_M = i S_E$. En esta ocasión no podemos decir nada acerca del valor absoluto de S_E . Calculamos cómo se transforman las ecuaciones de Hamilton en el espacio euclídeo

$$\begin{aligned} \dot{x}^a &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} \quad \rightarrow \quad i\dot{x}_{(E)}^a = \frac{\partial \mathcal{H}}{-i\partial p_a^{(E)}} \Rightarrow \dot{x}_{(E)}^a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a^{(E)}} \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} \quad \rightarrow \quad i\frac{d}{d\tau}(-ip_a^{(E)}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a} \Rightarrow \dot{p}_a^{(E)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^a}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Ahora calculamos las ecuaciones de Hamilton en el espacio euclídeo

$$\dot{x}_{(E)}^a = g^{ab} \frac{p_b^{(E)}}{m} \quad (6.23)$$

$$\dot{p}_a^{(E)} = \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^a}. \quad (6.24)$$

Al combinar ambas ecuaciones llegamos a que la ecuación de movimiento del sistema es

$$mg_{ab}\dot{x}_{(E)}^a = \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^b}, \quad (6.25)$$

que corresponde precisamente con la ec. (6.15). Es decir, comprobamos que en el espacio euclídeo obtenemos la misma ecuación de movimiento ya sea que comencemos con una acción lagrangiana o con una acción hamiltoniana.

6.3. Ejemplo: Instantones en el oscilador armónico polimérico

Consideremos un oscilador armónico con frecuencia angular ω para una partícula de masa m . Tomamos el resultado obtenido en [50] para la acción efectiva de un oscilador armónico polimérico

$$S[p] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2m\omega^2} \dot{p}^2 - V(p) \right] \quad (6.26)$$

en donde el momento p toma el papel de variable dinámica (en lugar de hacerlo la coordenada x , como es usual) y donde el potencial $V(p)$ esta dado como

$$V(p) = \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p}{\hbar} \right). \quad (6.27)$$

La rotación de Wick de la acción da como resultado

$$S_E[p] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2m\omega^2} p'^2 + \frac{2\hbar^2}{m\mu^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p}{\hbar} \right) \right], \quad (6.28)$$

donde $p' := \frac{dp}{d\tau}$. Calculando la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos que la ecuación de movimiento es

$$\frac{p''}{m\omega^2} - \frac{\hbar}{m\mu} \text{sen} \left(\frac{\mu p}{\hbar} \right) = 0. \quad (6.29)$$

Ahora, integrando esta ecuación obtenemos

$$p'^2 = 2m\omega^2 V(p) + K \quad (6.30)$$

donde K corresponde a una constante de integración. Para que esta solución sea considerada como un instantón, la acción S_E debe ser finita; esto impone la condición $K = 0$ para esta constante. Denotemos entonces a esta solución como

$$P' = \pm \sqrt{2m\omega^2 V(P)}. \quad (6.31)$$

Seleccionamos la raíz positiva de esta ecuación e integramos de nuevo para obtener

$$P^+ = 4 \frac{\hbar}{\mu} \arctan \left[e^{\omega(\tau - \tau_c)} \right] \quad (6.32)$$

donde τ_c es otra constante de integración. Definiendo la cantidad $\Delta\tau := \tau - \tau_c$, no resulta difícil comprobar el comportamiento de esta solución. Cuando tomamos el límite $\Delta\tau \rightarrow \infty$ tenemos que $P^+ \rightarrow \frac{2\pi\hbar}{\mu}$, mientras que en el límite $\Delta\tau \rightarrow -\infty$ se tiene $P^+ \rightarrow \frac{\pi\hbar}{\mu}$.

Si evaluamos esta solución en el potencial $V(p)$ el resultado que se obtiene es

$$V(P^+) = \frac{2\hbar^2}{\mu^2} \operatorname{sech}^2(\omega\Delta\tau). \quad (6.33)$$

Notamos que si tomamos el límite para tiempos muy grandes $\Delta\tau \rightarrow \infty$, entonces el comportamiento del potencial es $V(P^+) \rightarrow 0$, es decir, se mantiene finito en el límite. Ahora evaluando a P^+ en la acción euclídea, obtenemos

$$S_E[P^+] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{1}{2m\omega^2} (P^+)'^2 + V(P^+) \right] = \frac{4\hbar^2}{m\omega\mu^2} \tanh(\omega\Delta\tau)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{8\hbar^2}{m\omega\mu^2}. \quad (6.34)$$

Este resultado nos confirma que la solución P^+ es de manera estricta un instantón, ya que es una solución en el espacio euclídeo cumple con dejar finito el valor de la acción S_E .

6.4. Dinámica euclídea para el factor de escala (a, p_a)

6.4.1. Acción en el espacio euclídeo, $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{E})}[a, p_a]$

Ahora regresemos al contexto cosmológico en busca de soluciones de tipo instantón en el sistema. Retomamos la ec. (5.73) que corresponde a la acción efectiva en el espacio de Minkowski que obtuvimos en el contexto de la cosmología polimérica

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{M})}[a, p_a] = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left[p_a a' + \frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \right] \quad (6.35)$$

donde recordemos que $a' = \frac{da}{d\phi}$.

Intercambiamos el rol de las coordenadas de manera tal que p_a sea considerada como la coordenada canónica y el factor de escala a sea tomado como el momento canónico asociado. Para llevar a cabo este cambio, integramos por partes el primer término de la acción, tal que lo podemos escribir como

$$p_a a' = \frac{d}{d\phi}(a p_a) - p'_a a. \quad (6.36)$$

Como a este nivel la dinámica está dada de manera efectiva por una descripción clásica, eliminamos la derivada total en la expresión anterior y escribimos la acción como

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{M})} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left[-p'_a a + \frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} a^2 \sin^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_a \right) + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} a^4 \right]. \quad (6.37)$$

Hacemos la siguiente transformación en el parámetro temporal, es decir una rotación de Wick

$$\phi \rightarrow i\tau, \quad \frac{d}{d\phi} \rightarrow -i \frac{d}{d\tau}. \quad (6.38)$$

donde denotaremos a las derivadas respecto al tiempo euclídeo como $\dot{a} = \frac{da}{d\tau}$. Tras la rotación de Wick, se tiene que el momento a cambia como

$$a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p'_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dp_a}{d\phi} \right)} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(-i \frac{dp_a}{d\tau} \right)} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_a} := ia_{(\text{E})}, \quad (6.39)$$

por lo que la acción cambia como

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(M)} &= i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[-(-i\dot{p}_a)(ia_{(E)}) + \frac{p_\phi}{2} + \frac{2\pi G\hbar^2}{3p_\phi\mu^2} (ia_{(E)})^2 \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p_a\right) + \frac{3k}{8\pi Gp_\phi} (ia_{(E)})^4 \right] \\ &= i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[-\dot{p}_a a_{(E)} + \frac{p_\phi}{2} - \frac{2\pi G\hbar^2}{3p_\phi\mu^2} a_{(E)}^2 \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p_a\right) + \frac{3k}{8\pi Gp_\phi} a_{(E)}^4 \right].\end{aligned}\quad (6.40)$$

Definimos la acción euclídea como

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[-\dot{p}_a a_{(E)} + \frac{p_\phi}{2} - \frac{2\pi G\hbar^2}{3p_\phi\mu^2} a_{(E)}^2 \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p_a\right) + \frac{3k}{8\pi Gp_\phi} a_{(E)}^4 \right] \quad (6.41)$$

tal que se tiene que $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(M)} = i\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}$. La función hamiltoniana del sistema en el espacio euclídeo la denotaremos como

$$\mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)} = \frac{2\pi G\hbar^2}{3p_\phi\mu^2} a_{(E)}^2 \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p_a\right) - \frac{3k}{8\pi Gp_\phi} a_{(E)}^4 - \frac{p_\phi}{2}. \quad (6.42)$$

6.4.2. Ecuaciones de Hamilton y soluciones numéricas

Calculamos ahora las ecuaciones de Hamilton sin olvidar que estamos tomando a p_a como la coordenada canónica y a $a_{(E)}$ como su momento conjugado.

$$\dot{p}_a = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)}}{\partial a_{(E)}} = \frac{4\pi G\hbar^2}{3p_\phi\mu^2} a_{(E)} \sin^2\left(\frac{\mu}{\hbar}p_a\right) - \frac{3k}{2\pi Gp_\phi} a_{(E)}^3 \quad (6.43)$$

$$\dot{a}_{(E)} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)}}{\partial p_a} = -\frac{2\pi G\hbar}{3p_\phi\mu} a_{(E)}^2 \sin\left(\frac{\mu}{\hbar}2p_a\right). \quad (6.44)$$

Considerando el caso de un universo cerrado con geometría esférica ($k = 1$), la solución numérica al sistema de ecuaciones es

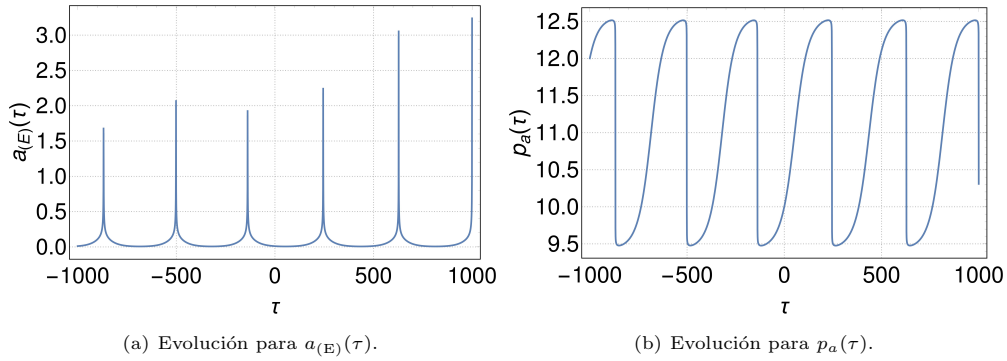
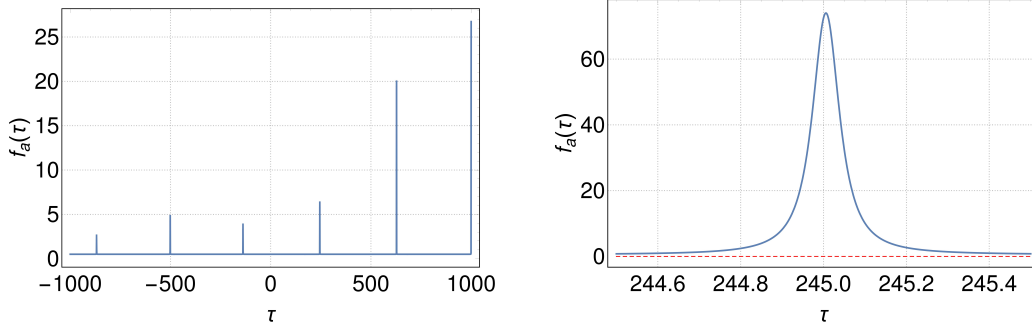


Figura 6.1: Solución numérica de la cosmología polimérica para un universo cerrado ($k = 1$), tomando las coordenadas $(p_a, a_{(E)})$ con condiciones iniciales $p_a(0) = 10$, $a_{(E)}(0) = 10^{-2}$. Código computacional en la pág. 114.

Para que estas soluciones sean consideradas como instantones, deben cumplir que al evaluarlas en la acción euclídea mantengan su valor finito. Debido a que solo contamos con las soluciones numéricas, evaluamos numéricamente esta cantidad. Para visualizar de mejor manera el análisis,

denotamos al integrando de la acción euclídea (6.41) como $f_a(\tau)$. Si evaluamos esta cantidad en las soluciones, obtenemos la siguiente gráfica



(a) Perfil numérico para $f_a(\tau)$ con $\tau \in [-10^3, 10^3]$.

(b) Perfil numérico para $f_a(\tau)$ con $\tau \in [244.5, 245.5]$.

Figura 6.2: Gráfica del integrando de la acción euclídea (6.41) evaluado en las soluciones numéricas. Código computacional en la pág. 115.

La gráfica (a) de la figura 6.2 nos muestra que el integrando de la acción euclídea no decae de manera definitiva a un valor nulo a medida que el parámetro temporal tiende a $\pm\infty$, ni cuenta con un comportamiento oscilatorio que esté alrededor del cero. Aún más, notamos que el valor de $f_a(\tau)$, si bien es cercano a cero en muchos intervalos, nunca llega realmente a anularse, por lo que este es siempre positivo. El área bajo la curva, evaluada sobre todo el dominio de τ , es la que nos da el valor de la acción. Desafortunadamente, debido al comportamiento del integrando, el valor de $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}$ diverge a medida que aumentamos el intervalo de integración. Esto puede ser visto de manera cuantitativa mediante la integración numérica.

Intervalo de integración	Valor numérico para $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}$
$\tau \in [-10, 10]$	9.99628
$\tau \in [-10^2, 10^2]$	99.9629
$\tau \in [-10^3, 10^3]$	1005.2985
$\tau \in [-10^4, 10^4]$	9996.9850

Tabla 6.1: Integración numérica para el valor de la acción euclídea.

El valor de $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}$ aumenta linealmente con el intervalo de integración. Debido a la naturaleza de las soluciones que obtuvimos, el comportamiento del integrando no pareciera que vaya cambiar aunque aumentáramos el intervalo de τ en el análisis numérico. Si observamos la figura 6.2, el valor de las funciones $a_{(E)}(\tau)$ y $p_a(\tau)$ diverge si las integramos sobre $\tau \in (-\infty, \infty)$.

De manera que las soluciones que obtuvimos para la cosmología polimérica no corresponden a soluciones de tipo instantón. Esto nos hace que evaluemos un par de alternativas más, como lo veremos en las siguientes dos secciones.

6.5. Dinámica euclídea para variables de área del factor de escala (A, p_A)

Podemos realizar una cuantización polimérica del sistema en la que el factor de escala con unidades “área” pase a ser la nueva variable fundamental. De esta manera, la naturaleza discreta del

espacio-tiempo se verá reflejada en pequeños elementos de área ($\sim a^2$), en contraste a la discretización en la “longitud” ($\sim a$) que se venía realizando hasta ahora. Para lograr esto, se propone una transformación canónica al nivel del hamiltoniano clásico (5.34), obtenido a partir de la acción clásica de Einstein-Hilbert. Recordando, este hamiltoniano es

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right].$$

La transformación que se propone es:

$$A := \frac{3}{2\pi G} a^2 \quad (6.45)$$

$$p_A := \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a}{2a} \quad (6.46)$$

la cual es una transformación canónica y puede ser probado de manera directa si calculamos el paréntesis de Poisson de las nuevas coordenadas

$$\{A, p_A\} = \frac{\partial A}{\partial a} \frac{\partial p_A}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a} \frac{\partial p_A}{\partial a} = 1, \quad (6.47)$$

es decir, preserva la estructura del álgebra del paréntesis de Poisson para las coordenadas originales, $\{a, p_a\} = 1$. Calculamos el hamiltoniano \mathcal{H} asociado a las nuevas coordenadas (A, p_A)

$$\mathcal{H}_{\text{EH}}(A, p_A) = \lambda \left[\sqrt{\frac{3k^2}{32\pi G}} A + \sqrt{\frac{24}{\pi G}} A p_A^2 - \frac{p_\phi^2}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{2\pi G A}} \right)^3 \right]. \quad (6.48)$$

Realizamos una cuantización polimérica al promover las nuevas coordenadas a operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , de manera análoga a como se hizo en la Sección 5.4.

$$\langle A_m | \hat{A} = \langle A_m | A_m \quad (6.49)$$

$$\hat{p}_A^2 |A_m\rangle = \frac{\hbar^2}{4\mu^2} [2 |A_m\rangle - |A_m - 2\mu\rangle - |A_m + 2\mu\rangle]. \quad (6.50)$$

La base $\{|A_m\rangle\} \in \mathcal{H}$ se vuelve discreta, de manera que la relación de completez es

$$\hat{\mathbb{I}} = \sum_{A_m \in \mathbb{Z}} |A_m\rangle \langle A_m| \quad (6.51)$$

y la relación de ortonormalidad es

$$\langle A_m | A_{m'} \rangle = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{A_m} e^{\frac{i}{\hbar} p_m (A_m - A_{m'})}. \quad (6.52)$$

Por otro lado, los momentos se compactifican al intervalo $p_{A_m} \in [-\frac{\hbar\pi}{\mu}, \frac{\hbar\pi}{\mu}]$ y su relación de ortonormalidad queda como

$$\langle p_{A_m} | p_{A_{m'}} \rangle = \sum_{A_{m'} \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{i}{\hbar} A_{m'} (p_{A_m} - p_{A_{m'}})}. \quad (6.53)$$

De manera similar, promovemos las variables canónicas (ϕ, p_ϕ) a operadores en el espacio de Hilbert usando la representación estándar de Schrödinger de forma consistente a como se hizo en las ecs. (5.40)–(5.43).

La acción efectiva que obtenemos de aplicar el formalismo de la integral de camino sobre el hamiltoniano (6.48) es

$$\mathcal{S}_{poli}^{(M)} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[p_A \dot{A} + p_\phi \dot{\phi} + \lambda \left(\sqrt{\frac{3k^2}{32\pi G}} A + \sqrt{\frac{24}{\pi G}} \frac{\hbar^2}{\mu^2} \sqrt{A} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_A \right) - \frac{p_\phi^2}{2} \left(\frac{3}{2\pi G A} \right)^{3/2} \right) \right] \quad (6.54)$$

donde solo por esta subsección denotamos las derivadas respecto al tiempo t como $\dot{\phi} := \frac{d\phi}{dt}$.

Ahora, de calcular una variación del lagrangiano respecto a p_ϕ se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{poli} &= \left[\dot{\phi} - \lambda p_\phi \left(\frac{3}{2\pi G A} \right)^{3/2} \right] \delta p_\phi = 0 \\ \Rightarrow \quad \dot{\phi} &= \lambda p_\phi \left(\frac{3}{2\pi G A} \right)^{3/2} \quad \therefore \quad \lambda = \left(\frac{2\pi G A}{3} \right)^{3/2} \frac{\dot{\phi}}{p_\phi}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Sustituimos este resultado de regreso en la acción para obtener una acción con una evolución desparametrizada, es decir, el parametro temporal t desaparece. La dinámica del sistema se encuentra ahora expresada de manera *relacional* mediante el campo de materia ϕ .

$$\mathcal{S}_{poli}^{(M)}[A, p_A] = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left[p_A A' + \frac{p_\phi}{2} + \frac{k\pi G}{6p_\phi} A^2 + \frac{8\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} A^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_A \right) \right] \quad (6.56)$$

Esta acción realiza una descripción, que de manera efectiva es clásica, de una cosmología polimérica en donde los bloques fundamentales del espacio-tiempo corresponden a pequeñas unidades discretas de área que poseen un tamaño que es del orden de la escala de Planck.

6.5.1. Acción en el espacio euclídeo, $\mathcal{S}_{poli}^{(E)}[A, p_A]$

Intercambiamos el carácter de las variables dinámicas en la acción (6.56) de manera tal que ahora consideramos a p_A como la coordenada canónica y a A la tomamos como su momento conjugado, análogamente a lo que se hizo en la ec. (6.37). Esto hace que reescribamos a la acción como

$$\mathcal{S}_{poli}^{(M)} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left[-p_A' A + \frac{p_\phi}{2} + \frac{k\pi G}{6p_\phi} A^2 + \frac{8\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} A^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_A \right) \right]. \quad (6.57)$$

Ahora realizamos una rotación de Wick, lo que genera las siguientes transformaciones

$$\phi \rightarrow i\tau, \quad \frac{d}{d\phi} \rightarrow -i \frac{d}{d\tau}, \quad A \rightarrow iA_{(E)} \quad (6.58)$$

donde denotamos la derivada respecto al tiempo euclídeo como $\dot{a} = \frac{da}{d\tau}$ y donde $A_{(E)}$ corresponde al momento definido en el espacio euclídeo. Obtenemos que la acción en el espacio euclídeo es

$$\mathcal{S}_{poli}^{(E)} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[-\dot{p}_A A_{(E)} + \frac{p_\phi}{2} - \frac{k\pi G}{6p_\phi} A_{(E)}^2 - \frac{8\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} A_{(E)}^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_A \right) \right], \quad (6.59)$$

de manera que $\mathcal{S}_{poli}^{(M)} = i\mathcal{S}_{poli}^{(E)}$. El hamiltoniano en el espacio euclídeo que se deriva de la acción es

$$\mathcal{H}_{poli}^{(E)} = \frac{k\pi G}{6p_\phi} A_{(E)}^2 + \frac{8\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} A_{(E)}^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_A \right) - \frac{p_\phi}{2}. \quad (6.60)$$

6.5.2. Ecuaciones de Hamilton y soluciones numéricas

Las ecuaciones de Hamilton que se obtienen en el espacio euclídeo para las variables canónicas $(p_A, A_{(E)})$ son

$$\dot{p}_A = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)}}{\partial A_{(E)}} = \frac{k\pi G}{3p_\phi} A_{(E)} + \frac{16\pi G \hbar^2}{3p_\phi \mu^2} A_{(E)} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_A \right) \quad (6.61)$$

$$\dot{A}_{(E)} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)}}{\partial p_A} = -\frac{8\pi G \hbar}{3p_\phi \mu} A_{(E)}^2 \text{sen} \left(\frac{2\mu}{\hbar} p_A \right) \quad (6.62)$$

Mientras que las soluciones numéricas que se obtienen de considerar el caso para un universo esférico ($k = 1$) se muestran en la figura 6.3. Se comprobó que estas soluciones fueran consistentes en el límite al continuo ($\mu \rightarrow 0$) con las soluciones clásicas que uno puede obtener de calcular las ecuaciones de Hamilton de la ec. (6.56). Sin embargo, este análisis no es mostrado de manera explícita en este trabajo.

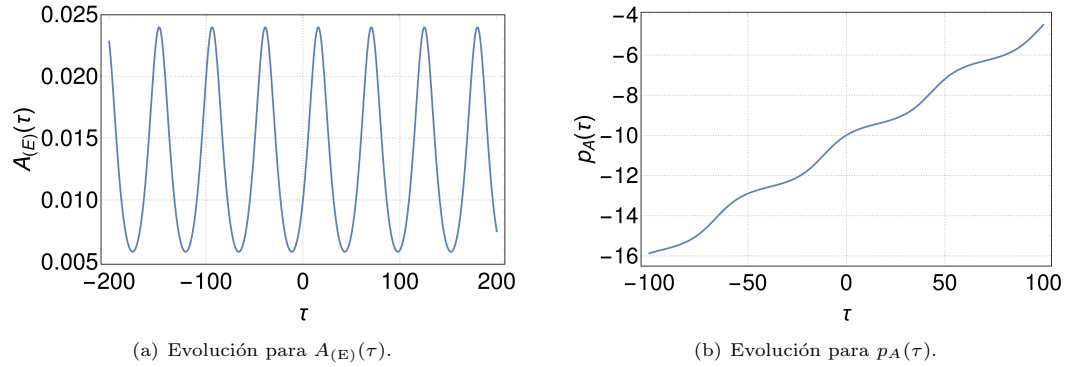


Figura 6.3: Solución numérica de la cosmología polimérica para un universo cerrado ($k = 1$), tomando las coordenadas $(p_A, A_{(E)})$ con condiciones iniciales $p_A(0) = -10$, $A_{(E)}(0) = 10^{-2}$. Código computacional en la pág. 114.

Observando el comportamiento de las soluciones que obtuvimos, notamos que la función $A_{(E)}(\tau)$ tiene un valor que es siempre mayor a cero, lo que nos indica que su valor diverge si la integramos a lo largo del tiempo τ . Por otro lado, la función $p_A(\tau)$ presenta un comportamiento que crece aproximadamente de una manera lineal. Nuevamente, para poder considerar a estas soluciones como soluciones de tipo instantón debemos de comprobar que al evaluarlas en la acción euclídea mantengan su valor finito. Denotamos al integrando de la acción euclídea (6.59) como $f_A(\tau)$ y evaluamos numéricamente esta cantidad en las soluciones obtenidas.

Podemos observar de la figura 6.4 que a pesar del comportamiento errático del integrando, su valor es siempre positivo y varía muy poco, de manera que se mantiene relativamente constante. Esto nos muestra que su comportamiento no decae asintóticamente a cero, ni presenta un comportamiento que oscile alrededor de cero. Por tanto, a medida que uno va integrando la función $f_A(\tau)$ obtenemos que el valor de $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}$ diverge conforme se va aumentando el rango de la integración. Podemos concluir entonces que las soluciones que obtenemos para la cosmología polimérica en términos de las variables dinámicas $(p_A, A_{(E)})$, tampoco corresponden a soluciones tipo instantón en este sistema.

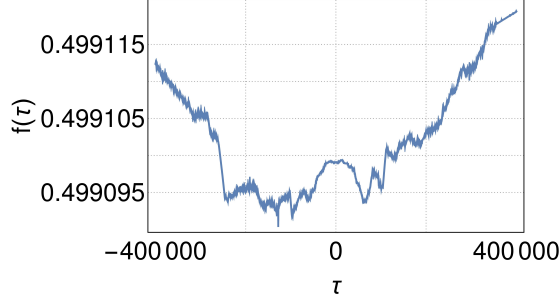


Figura 6.4: Gráfica del integrando de la acción euclídea (6.59) evaluado en las soluciones numéricas. Código computacional en la pág. 115.

6.6. Dinámica euclídea para variables de volumen del factor de escala (V, p_V)

Podemos realizar también una cuantización polimérica de la cosmología en donde la nueva variable fundamental corresponda a una cantidad con unidades de “volumen” con respecto al factor de escala. La naturaleza discreta del espacio-tiempo se verá ahora representada mediante pequeños elementos de volumen ($\sim a^3$). Nuevamente, se propone una transformación canónica al nivel del hamiltoniano clásico (5.34). Reescribimos esta expresión para mayor claridad

$$\mathcal{H}_{\text{EH}} = \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} a + \frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} - \frac{p_\phi^2}{2a^3} \right].$$

La transformación que se propone es:

$$V := a^3 \quad (6.63)$$

$$p_V := \frac{p_a}{3a^2}, \quad (6.64)$$

que cumple con ser una transformación canónica. Para verificarlo simplemente calculamos el paréntesis de Poisson de las nuevas coordenadas

$$\{V, p_V\} = \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial p_V}{\partial p_a} - \frac{\partial V}{\partial p_a} \frac{\partial p_V}{\partial a} = 1. \quad (6.65)$$

Se preserva entonces la estructura algebraica del paréntesis de Poisson de las coordenadas originales, $\{a, p_a\} = 1$. Calculamos entonces el hamiltoniano \mathcal{K} asociado a las nuevas coordenadas (V, p_V)

$$\mathcal{K}_{\text{EH}}(V, p_V) = \lambda \left[\frac{3k}{8\pi G} V^{1/3} + 6\pi G p_V^2 V - \frac{p_\phi^2}{2V} \right]. \quad (6.66)$$

Para llevar a cabo una cuantización polimérica, promovemos las coordenadas (V, p_V) a operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , tal como lo hemos venido haciendo desde la Sección 5.4.

$$\langle V_m | \hat{V} = \langle V_m | V_m \quad (6.67)$$

$$\hat{p}_V^2 |V_m\rangle = \frac{\hbar^2}{4\mu^2} [2|V_m\rangle - |V_m - 2\mu\rangle - |V_m + 2\mu\rangle]. \quad (6.68)$$

La base $\{V_m\} \in \mathcal{H}$ entonces se vuelve discreta, de manera que la relación de completéz es

$$\hat{\mathbb{I}} = \sum_{V_m \in \mathbb{Z}} |V_m\rangle \langle V_m| \quad (6.69)$$

y la relación de ortonormalidad es

$$\langle V_m | V_{m'} \rangle = \frac{\mu}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\hbar\pi}{\mu}}^{\frac{\hbar\pi}{\mu}} dp_{V_m} e^{\frac{i}{\hbar} p_m (V_m - V_{m'})}. \quad (6.70)$$

Por otro lado, los momentos se ven restringidos al intervalo $p_{V_m} \in [-\frac{\hbar\pi}{\mu}, \frac{\hbar\pi}{\mu}]$, mientras que su relación de ortonormalidad se escribe como

$$\langle p_{V_m} | p_{V_{m'}} \rangle = \sum_{V_{m'} \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{i}{\hbar} V_{m'} (p_{V_m} - p_{V_{m'}})}. \quad (6.71)$$

También debemos promover las variables canónicas (ϕ, p_ϕ) a operadores en \mathcal{H} . Elegimos la representación estándar de Schrödinger, justo como se hizo en las ecs. (5.40)–(5.43).

La cuantización polimérica mediante el formalismo de la integral de trayectoria de la función hamiltoniana (6.66) da como resultado la siguiente acción efectiva

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{M})} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\dot{V} p_V + \dot{\phi} p_\phi + \lambda \left(\frac{3k}{8\pi G} V^{1/3} + \frac{6\pi G \hbar^2}{\mu^2} V \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_V}{\hbar} \right) - \frac{p_\phi^2}{2V} \right) \right] \quad (6.72)$$

donde de nuevo solo en esta subsección denotamos las derivadas respecto al tiempo t como $\dot{\phi} := \frac{d\phi}{dt}$. Ahora, de calcular una variación del lagrangiano respecto a p_ϕ se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{poli}} &= \left[\dot{\phi} - \lambda \frac{p_\phi}{V} \right] \delta p_\phi = 0 \\ \Rightarrow \quad \dot{\phi} &= \lambda \frac{p_\phi}{V} \quad \therefore \quad \lambda = \frac{V}{p_\phi} \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Sustituimos este resultado de regreso en la acción para obtener

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{M})}[V, p_V] = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left[V' p_V + \frac{p_\phi}{2} + \frac{6\pi G \hbar^2}{p_\phi \mu^2} V^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_V}{\hbar} + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} V^{4/3} \right) \right]. \quad (6.74)$$

Esta acción describe la dinámica polimérica cosmológica de manera relacional mediante un parámetro interno del sistema, el cual corresponde al campo escalar de materia ϕ . En este caso, al considerar a la variable $V \sim a^3$ con un carácter fundamental, el espacio-tiempo queda conformado a partir de pequeñas unidades discretas de volumen.

6.7. Acción en el espacio euclídeo, $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{E})}[V, p_V]$

Como hemos venido haciendo, intercambiamos el rol de las coordenadas canónicas. Consideramos que p_V corresponde a la coordenada generalizada, mientras que V toma el papel de su momento conjugado. Esto implica que cambiemos el primer término en la acción (6.74) y la reescribamos como

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(\text{M})} = \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \left[-p'_V V + \frac{p_\phi}{2} + \frac{6\pi G \hbar^2}{p_\phi \mu^2} V^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\mu}{\hbar} p_V \right) + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} V^{4/3} \right]. \quad (6.75)$$

Para pasar al espacio euclídeo, hacemos una rotación de Wick. Esto implica hacer las transformaciones:

$$\phi \rightarrow i\tau, \quad \frac{d}{d\phi} \rightarrow -i \frac{d}{d\tau}, \quad V \rightarrow iV_{(\text{E})}, \quad (6.76)$$

donde $V_{(E)}$ denota el momento en el espacio euclídeo y la derivada en el tiempo euclídeo se representa como $p_V = \frac{dV}{d\tau}$. Al llevar a cabo dichas transformaciones y definiendo a la acción polimérica en el espacio euclídeo como $\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(M)} = i\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)}$, llegamos a que esta es

$$\mathcal{S}_{\text{poli}}^{(E)} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[-p_V' V_{(E)} + \frac{p_\phi}{2} - \frac{6\pi G \hbar^2}{p_\phi \mu^2} V_{(E)}^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_V}{\hbar} \right) + \frac{3k}{8\pi G p_\phi} V_{(E)}^{4/3} \right]. \quad (6.77)$$

El hamiltoniano en el espacio euclídeo que se obtiene es

$$\mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)} = \frac{6\pi G \hbar^2}{p_\phi \mu^2} V_{(E)}^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_V}{\hbar} \right) - \frac{3k}{8\pi G p_\phi} V_{(E)}^{4/3} - \frac{p_\phi}{2}. \quad (6.78)$$

6.7.1. Ecuaciones de Hamilton y soluciones numéricas

Si calculamos las ecuaciones de Hamilton, llegamos a que la dinámica polimérica cosmológica para las coordenadas $(p_V, V_{(E)})$ en el espacio euclídeo es

$$\dot{p}_V = \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)}}{\partial V_{(E)}} = \frac{12\pi G \hbar^2}{p_\phi \mu^2} V_{(E)} \text{sen}^2 \left(\frac{\mu p_V}{\hbar} \right) - \frac{k}{2\pi G p_\phi} V_{(E)}^{1/3} \quad (6.79)$$

$$\dot{V}_{(E)} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{poli}}^{(E)}}{\partial p_V} = -\frac{6\pi G \hbar}{p_\phi \mu} V_{(E)}^2 \text{sen} \left(\frac{2\mu p_V}{\hbar} \right). \quad (6.80)$$

Las soluciones numéricas que se resultan de tomar un universo con geometría esférica ($k = 1$) son

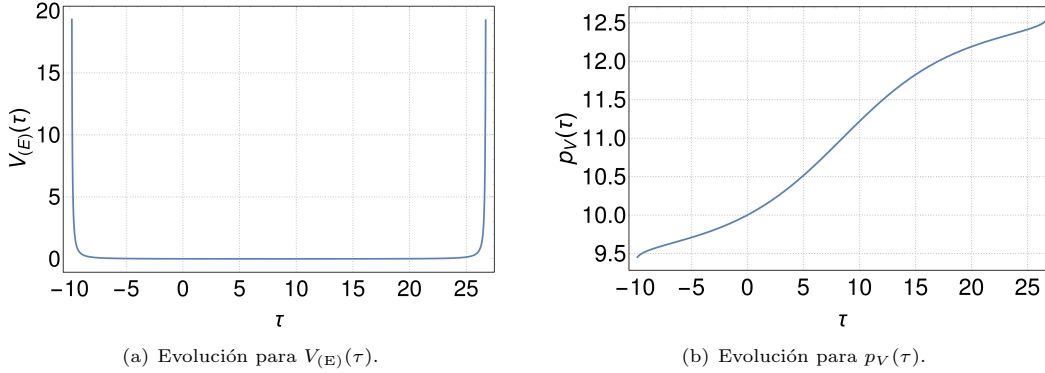


Figura 6.5: Solución numérica de la cosmología polimérica para un universo cerrado ($k = 1$), tomando las coordenadas $(p_V, V_{(E)})$ con condiciones iniciales $p_V(0) = 10$, $V_{(E)}(0) = 10^{-2}$. Código computacional en la pág. 114.

En este caso las soluciones que se obtienen numéricamente resultan estar acotadas en el intervalo temporal. Si observamos a la gráfica (a) en la figura 6.5, vemos que esto podría ser debido a que la función $V_{(E)}$ computacionalmente crece lo suficientemente rápido como para que la computadora no alcance a realizar adecuadamente los cálculos. Sin embargo, uno puede observar que el comportamiento de esta función se asemeja al comportamiento del factor de escala $a_{(E)}$ en la figura 6.1. En realidad, podemos notar que las ecuaciones de movimiento son similares en ambos casos. Las ecuaciones (6.44) y (6.80) poseen la misma forma funcional, mientras que las ecuaciones (6.43) y (6.79) difieren en el orden del segundo término (en la primera ecuación el término va como $\sim a_{(E)}^3$ y en la segunda ecuación va como $\sim V_{(E)}^{1/3}$). Esto nos hace pensar que esta diferencia podría ser la responsable de provocar que el cálculo numérico diverja tan rápidamente. De ser este el caso,

de poco serviría ya que obtendríamos un comportamiento similar al de las variables $(p_A, A_{(\text{E})})$ que provocaría de nuevo que la acción euclídea no tenga un valor finito.

Capítulo 7

Cosmología para teorías $f(R)$ cuadráticas

En este capítulo se pretende extender el estudio a modelos cosmológicos generalizados mediante las teorías $f(R)$ de la gravedad. Primero realizamos una breve descripción de la gravedad $f(R)$. Después, estudiamos un modelo cosmológico ausente de materia de tipo Friedmann-Robertson-Walker generalizado a partir de una teoría $f(R)$ cuadrática. A nivel clásico, establecemos su formulación hamiltoniana utilizando las herramientas presentadas en el Capítulo 2. Motivados por el trabajo realizado en [64], examinamos la posibilidad de usar al campo auxiliar ρ – introducido gracias al modelo $f(R)$ empleado – como un tiempo interno de la teoría. Finalmente, establecemos la formulación canónica para el mismo modelo cosmológico pero ahora considerando la contribución de un campo escalar de materia y dejamos abierta la posibilidad de utilizar la cuantización polimérica en estos modelos.

7.1. Introducción a la gravedad $f(R)$

La teoría de relatividad general es una teoría geométrica para la gravitación publicada por Albert Einstein en el año de 1915 [65]. Esta teoría ha contado con un gran éxito fenomenológico desde sus primeros años. Sus primeras predicciones fueron confirmadas desde el año de 1919 cuando se llevó a cabo una expedición liderada por Eddington para observar la deflexión de la luz solar durante un eclipse total de Sol. Desde entonces, las predicciones de la relatividad general han sido confirmadas por todas las observaciones y experimentos realizados hasta la fecha. Esto ha llevado a que la teoría se haya establecido como la descripción más acertada de la gravitación, siendo elogiada incluso como la teoría más bella de la física [66]. Sin embargo, consideraciones para generalizar la teoría han existido desde los primeros años después de su concepción, como lo hicieron así los famosos físicos H. Weyl (1919) [67] y A. Eddington (1923) [68]. Posteriormente, en la década de los 60, se demostró que para hacer de la relatividad general una teoría renormalizable, términos de orden mayor en la acción de Einstein-Hilbert deberían ser considerados [69], elevando así el interés de la comunidad científica en teorías de orden mayor para la gravedad. Actualmente, quedan abiertas las preguntas acerca del problema de la gravedad cuántica y acerca de la naturaleza de las singularidades del espacio-tiempo, mientras que los datos observacionales que son tomados como evidencia para la energía oscura y la materia oscura podrían indicar la necesidad de nueva física.

Motivado por lo anterior surgen las teorías $f(R)$ para la gravedad como una extensión de la relatividad general de Einstein [70], tomando popularidad a partir del trabajo de Starobinsky [71] en donde se reproduce la inflación cósmica utilizando estos modelos generalizados. Estas teorías se derivan a partir de relajar la hipótesis que considera que la acción de Einstein-Hilbert para el campo gravitacional es estrictamente lineal en el escalar de curvatura de Ricci R , es decir, considera $f(R) = R$. Desde el punto de vista conceptual, no existe ninguna razón *a priori* para mantener esta restricción [72]. En este sentido, la gravedad $f(R)$ es una familia de teorías, cada una definida por una función diferente f del escalar de Ricci R . Como consecuencia de introducir una función

arbitraria a la teoría, existe la posibilidad de explicar la expansión acelerada del universo, así como su formación de estructura, sin necesidad de recurrir a ideas como la energía oscura o la materia oscura. En realidad, un amplio rango de fenómenos pueden ser producidos a partir de estas teorías al hacer uso de diferentes funciones. Sin embargo, muchas de estas formas funcionales pueden descartadas al considerar la información proporcionada por los datos observacionales.

7.2. Cosmología $f(R)$ cuadrática sin contribuciones de materia

Consideremos la acción de un modelo $f(R)$ para la gravedad sin considerar el contenido de materia.

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (7.1)$$

En donde $\kappa^2 = 8\pi G$ (con unidades en donde $c = 1$), $g := \det(g_{\mu\nu})$ y donde, en principio, $f(R)$ es una función arbitraria del escalar de curvatura de Ricci, R . Hacemos uso de una acción de tipo O'Hanlon [75] con un campo escalar auxiliar ρ ,

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \rho(\beta\rho + R)] \quad (7.2)$$

donde β es un parámetro libre, seleccionando así la forma explícita para nuestra teoría $f(R)$. Realizando una variación respecto a ρ , llegamos a que

$$\rho = -\frac{1}{2\beta} R \quad (7.3)$$

Interpretamos entonces a este campo ρ como un parámetro caracterizado por la curvatura del espacio-tiempo. Utilizando la expresión anterior, podemos ver que esta acción es equivalente a una acción para una teoría $f(R)$ cuadrática:

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{4\beta} R^2 \right) \quad (7.4)$$

Si trabajamos con un modelo cosmológico de tipo Friedmann-Robertson-Walker, tal como lo hicimos en el Capítulo 5, la métrica con la que se trabaja es

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-N^2, \frac{a^2}{1-kr^2}, a^2 r^2, a^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (7.5)$$

con la cual llegamos a que el escalar de curvatura es expresado como

$$R = \frac{6}{a^2} \left(\frac{a\ddot{a}}{N^2} + \frac{\dot{a}^2}{N^2} - \frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3} + k \right) \quad (7.6)$$

Para construir una cosmología $f(R)$ cuadrática, utilizamos esta métrica en la acción (7.2). Llegamos a una acción en donde no tenemos derivadas de segundo orden para el factor de escala a , ni derivadas de primer orden para la función de lapso N

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{\mathcal{V}_0}{\kappa^2} \int dt \left[3(1+\rho) \left(Nak - \frac{a\dot{a}^2}{N} \right) - \frac{3a^2\dot{a}\dot{\rho}}{N} + \frac{1}{2}\beta Na^3 \rho^2 \right] \quad (7.7)$$

donde \mathcal{V}_0 es un volumen fiducial definido como¹

$$\mathcal{V}_0 \equiv \int_0^{r_0} dr d\varphi d\theta \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (7.8)$$

el cual siempre puede ser normalizado a la unidad. A partir de aquí consideramos que $\mathcal{V}_0 \equiv 1$.

¹ Este volumen fiducial es el mismo que definimos previamente en la ec. (5.5) del Capítulo 5.

Obtenemos así que la función lagrangiana para el sistema es

$$\mathcal{L}(a, \dot{a}, \rho, \dot{\rho}, N, \dot{N}) = 3(1 + \rho) \left(Nak - \frac{a\dot{a}^2}{N} \right) - \frac{3a^2\dot{a}\dot{\rho}}{N} + \frac{1}{2}\beta Na^3\rho^2 \quad (7.9)$$

El hamiltoniano asociado lo podemos obtener mediante una transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \dot{a}p_a + \dot{\rho}p_\rho + \dot{N}p_N - \mathcal{L} \quad (7.10)$$

Calculamos los momentos canónicos,

$$p_a = (1 + \rho) \frac{6a\dot{a}}{N} - \frac{3a^2\dot{\rho}}{N} \quad (7.11)$$

$$p_\rho = -\frac{3a^2\dot{a}}{N} \quad (7.12)$$

$$p_N = 0 \quad (7.13)$$

de donde obtenemos una constricción primaria para el sistema

$$\Phi_1 = p_N \approx 0 \quad (7.14)$$

Ahora despejando a las velocidades en términos de los momentos canónicos tenemos

$$\dot{a} = -\frac{Np_\rho}{3a^2} \quad (7.15)$$

$$\dot{\rho} = N \left[(1 + \rho) \frac{2p_\rho}{3a^3} - \frac{p_a}{3a^2} \right] \quad (7.16)$$

Escribimos a la función lagrangiana en términos de los momentos canónicos

$$\mathcal{L}(a, p_a, \rho, p_\rho, N, p_N) = N \left[(1 + \rho) \left(3ak + \frac{p_\rho^2}{3a^3} \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} + \frac{1}{2}\beta a^3 \rho^2 \right] \quad (7.17)$$

y despejamos estos resultados en (7.10) para obtener que el hamiltoniano asociado es

$$\mathcal{H} = N \left[(1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} + \frac{1}{2}\beta a^3 \rho^2 \right] \quad (7.18)$$

Pero debido a la presencia de la constricción (7.14), sabemos que este no es el hamiltoniano correcto, sino que debemos de considerar a la constricción de manera explícita en el hamiltoniano. Por tanto

$$\mathcal{H}^* = N \left[(1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2}\beta a^3 \rho^2 \right] + \lambda_1 p_N \quad (7.19)$$

con λ_1 como el multiplicador de Lagrange de la constricción.

Calculando las ecuaciones de movimiento tenemos

$$\dot{a} = \{a, \mathcal{H}^*\} = -\frac{N p_\rho}{3a^2} \quad (7.20)$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, \mathcal{H}^*\} = N(1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{a^4} + 3k \right) - \frac{2p_\rho p_a}{3a^3} - \frac{3}{2} \beta a^2 \rho^2 \quad (7.21)$$

$$\dot{\rho} = \{\rho, \mathcal{H}^*\} = N \left[(1 + \rho) \frac{2p_\rho}{3a^3} - \frac{p_a}{3a^2} \right] \quad (7.22)$$

$$\dot{p}_\rho = \{p_\rho, \mathcal{H}^*\} = N \left(3ak - \frac{p_\rho^2}{3a^3} \right) + \beta a^3 \rho \quad (7.23)$$

$$\dot{N} = \{N, \mathcal{H}^*\} = \lambda_1 \quad (7.24)$$

$$\dot{p}_N = \{p_N, \mathcal{H}^*\} = \frac{p_\rho p_a}{3a^2} + \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 - (1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) \quad (7.25)$$

Las ecuaciones (7.20) y (7.22) solamente reproducen la definición para los momentos asociados, mientras que la ecuación (7.24) refleja la arbitrariedad de la función de lapso N .

Por otro lado, la ecuación (7.25) no es otra cosa que la condición de consistencia para la primer constricción $\{p_N, \mathcal{H}^*\} = \{\Phi_1, \mathcal{H}^*\} = \dot{\Phi}_1 \approx 0$. Debido a que no se anula idénticamente, esta corresponde a una constricción adicional en el sistema

$$\Phi_2 = (1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 \approx 0 \quad (7.26)$$

Notemos que la constricción corresponde precisamente a la ec. (7.18). Tenemos entonces un hamiltoniano completamente constreñido, en donde N juega el papel de multiplicador de Lagrange de la segunda constricción.

$$\mathcal{H}^* = \lambda_1 \Phi_1 + N \Phi_2 \quad (7.27)$$

Es fácil ver que no hay más constricciones. Simplemente aplicamos la condición de consistencia sobre Φ_2

$$\dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, \mathcal{H}^*\} \approx 0 \quad (7.28)$$

Notamos que la condición se cumple idénticamente, entonces ya no se tienen más constricciones en el sistema.

Si ahora regresamos a la función lagrangiana, se tiene

$$\mathcal{L}^* = \dot{a} p_a + \dot{\rho} p_\rho + \dot{N} p_N - \lambda_1 \Phi_1 - N \Phi_2 \quad (7.29)$$

Utilizando la ecuación (7.24), o haciendo una variación respecto a la variable p_N , tenemos

$$\mathcal{L}^* = \dot{a} p_a + \dot{\rho} p_\rho - N \Phi_2 \quad (7.30)$$

o explícitamente

$$\mathcal{L}^* = \dot{a} p_a + \dot{\rho} p_\rho - N \left[(1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 \right] \quad (7.31)$$

La acción queda expresada entonces como

$$S = \int dt \left\{ \dot{a} p_a + \dot{\rho} p_\rho - N \left[(1 + \rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 \right] \right\} \quad (7.32)$$

En este punto, nos gustaría tomar al parámetro ρ como un tiempo interno en la teoría de manera análoga a como se hace en [64]. Para esto, primero debemos de observar cómo es el comportamiento

de ρ respecto al tiempo original t . Consideremos las ecuaciones de Hamilton que se obtienen de (7.32), las cuales son simplemente (7.20)–(7.22), junto con la constricción Φ_2 (7.26), la cual es una ecuación algebraica. Al combinar este conjunto de ecuaciones, terminamos con un total de tres ecuaciones de movimiento.

$$\dot{a} = -\frac{p_\rho}{3a^2} \quad (7.33)$$

$$\dot{\rho} = (1 + \rho) \left(\frac{p_\rho}{3a^3} + \frac{3ak}{p_\rho} \right) + \frac{\beta a^3 \rho^2}{2p_\rho} \quad (7.34)$$

$$\dot{p}_\rho = 3ak - \frac{p_\rho^2}{3a^3} + \beta a^3 \rho \quad (7.35)$$

Es decir que eliminamos una ecuación dinámica con ayuda de la constricción. Ahora, integramos numéricamente este sistema de ecuaciones considerando el caso de un universo plano.

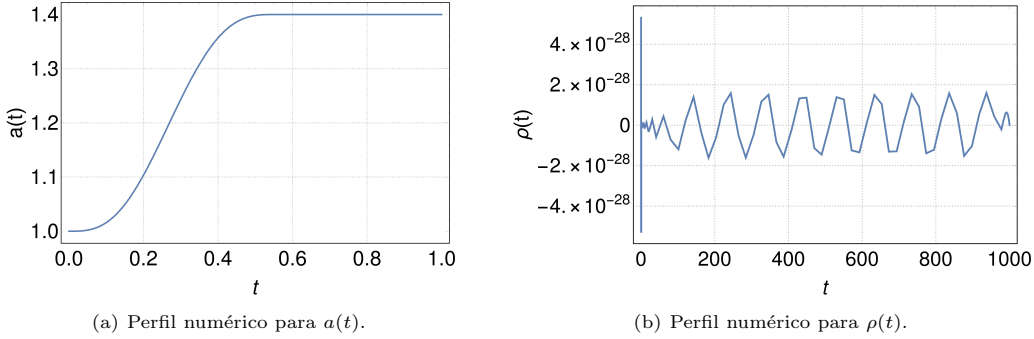


Figura 7.1: Solución numérica a las ecuaciones (7.33)–(7.35) considerando un universo plano ($k = 0$). Las condiciones iniciales fueron $a(0) = 1$, $\rho(0) = 10^{-2}$, $p_\rho(0) = 10^{-3}$ y se tomó $\beta = -200$. Código computacional en pág. 115.

El resultado que se obtiene del análisis numérico nos muestra que la dinámica del factor de escala presenta un rápido crecimiento a tiempos tempranos, para después detener este crecimiento y mantenerse en un valor constante a lo largo de la evolución temporal. Este comportamiento es muy diferente al que se obtiene en el contexto clásico, presentado en la figura 5.1. Por otro lado, la dinámica de ρ nos muestra que su comportamiento es oscilatorio con respecto al tiempo t . Este comportamiento no es deseable para un parámetro que pretende ser usado como un reloj para describir la dinámica de una teoría. En general, un “buen” tiempo, o reloj, se caracteriza por tener un comportamiento monótono a lo largo de cualquier trayectoria dinámica [22]. Esto provoca que el campo auxiliar ρ no resulte ser un parámetro apropiado para ser utilizado como un reloj interno para describir la dinámica clásica del sistema.

7.3. Cosmología para una teoría con un campo de materia

Consideramos ahora un campo escalar de materia en nuestra teoría. Como es bien conocido en la literatura, este campo puede ser utilizado para parametrizar la dinámica cosmológica, tomando así el papel de reloj interno en la teoría, e.g. [22, 76]. Entonces, agregamos a la acción (7.4) un término de materia correspondiente a un campo escalar $\phi(t)$

$$S_{\text{mat}}[\phi(t)] = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \quad (7.36)$$

Escribiendo a la acción total como $S = S_{\text{grav}} + S_{\text{mat}}$, tenemos

$$S[g^{\mu\nu}, \phi(t)] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{4\beta} R^2 \right] - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{tt} \partial_t \phi \partial_t \phi + V(\phi) \right] \quad (7.37)$$

Si tomamos en cuenta el volumen fiducial definido en (7.8), obtenemos que la acción puede ser escrita como

$$S = \mathcal{V}_0 \int dt \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left[3(1+\rho) \left(Nak - \frac{a\dot{a}^2}{N} \right) - \frac{3a^2 \dot{a} \dot{\rho}}{N} + \frac{1}{2} \beta N a^3 \rho^2 \right] + Na^3 \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) \right] \right\} \quad (7.38)$$

A partir de ahora normalizamos el valor del volumen fiducial, $\mathcal{V}_0 = 1$, y consideramos que no hay ningún potencial asociado al campo escalar de materia, $V(\phi) = 0$.

De esta manera, el lagrangiano que se tiene es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} \quad (7.39)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{mat}} = a^3 \dot{\phi}^2 / 2N$ y $\mathcal{L}_{\text{grav}}$ corresponde al lagrangiano (7.10) utilizado en la sección anterior. Debido a esto, las cuentas para el tratamiento hamiltoniano de (7.38) serán muy parecidas a las de la sección anterior y no serán mostradas explícitamente de nuevo.

Calculamos la función hamiltoniana asociada a (7.38) para obtener

$$\mathcal{H}^* = \frac{N}{\kappa^2} \left[(1+\rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 + \frac{\kappa^2 p_\phi^2}{2a^3} \right] + \lambda_1 p_N \quad (7.40)$$

en donde el último término es agregado debido a la presencia de la constricción $\Phi_1 = p_N \approx 0$, con λ_1 como multiplicador de Lagrange de la constricción, tal como en la sección anterior. Imponiendo la condición de consistencia sobre la primera constricción $\dot{\Phi}_1 \approx 0$, encontramos la constricción secundaria

$$\Phi_2 = (1+\rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 + \frac{\kappa^2 p_\phi^2}{2a^3} \approx 0 \quad (7.41)$$

la cual no genera más constricciones ya que su condición de consistencia $\dot{\Phi}_2 = p_N \approx 0$ se anula idénticamente. Llegamos entonces a un hamiltoniano completamente constreñido, en donde N/κ^2 juega de nuevo el papel de multiplicador de Lagrange de la segunda constricción Φ_2 . Como los multiplicadores de Lagrange son en principio completamente arbitrarios, esta vez no tomaremos a N/κ^2 , sino a la función arbitraria λ_2 , como el multiplicador de Lagrange de Φ_2 . El hamiltoniano que tenemos es

$$\mathcal{H}^* = \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_1 \Phi_1 \quad (7.42)$$

Regresando a la acción hamiltoniana, tenemos

$$S = \int dt \left(\dot{a} p_a + \dot{N} p_N + \dot{\rho} p_\rho + \dot{\phi} p_\phi - \lambda_2 \Phi_2 - \lambda_1 \Phi_1 \right) \quad (7.43)$$

Una variación respecto p_N nos dice que $\lambda_1 = -\dot{N}$, por tanto llegamos a

$$S = \int dt \left\{ \dot{a} p_a + \dot{\rho} p_\rho + \dot{\phi} p_\phi - \lambda_2 \left[(1+\rho) \left(\frac{p_\rho^2}{3a^3} - 3ak \right) - \frac{p_\rho p_a}{3a^2} - \frac{1}{2} \beta a^3 \rho^2 + \frac{\kappa^2 p_\phi^2}{2a^3} \right] \right\} \quad (7.44)$$

De nuevo, si realizamos una variación de la acción, pero ahora respecto a p_ϕ , obtenemos

$$\lambda_2 = \frac{a^3 \dot{\phi}}{p_\phi} \quad (7.45)$$

sustituyendo este resultado en la acción (7.44), es posible desparametrizarla del tiempo “externo” t y describir la dinámica en términos de un parámetro interno de la teoría, como lo es el campo ϕ

$$S = \int d\phi \left[a' p_a + \rho' p_\rho + \frac{p_\phi}{2} + \frac{ap_\rho p_a}{3p_\phi \kappa^2} + \frac{\beta a^6 \rho^2}{2p_\phi \kappa^2} - \frac{(1+\rho)}{p_\phi \kappa^2} \left(\frac{p_\rho^2}{3} - 3a^4 k \right) \right] \quad (7.46)$$

en donde el primado $'$ denota derivadas respecto al “nuevo tiempo” ϕ .

Hemos obtenido así un sistema dinámico libre de constricciones, descrito en términos de la relación que hay entre los campos de la teoría, es decir, sus grados internos de libertad, equivalente en principio al sistema original que teníamos. El hamiltoniano para este sistema es

$$\mathcal{H} = \frac{(1+\rho)}{p_\phi \kappa^2} \left(\frac{p_\rho^2}{3} - 3a^4 k \right) - \frac{ap_\rho p_a}{3p_\phi \kappa^2} - \frac{\beta a^6 \rho^2}{2p_\phi \kappa^2} - \frac{p_\phi}{2} \quad (7.47)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de aquí son

$$a' = -\frac{ap_\rho}{3p_\phi \kappa^2} \quad (7.48)$$

$$p_a' = \frac{(1+\rho)}{p_\phi \kappa^2} 12a^3 k + \frac{p_\rho p_a}{3p_\phi \kappa^2} + \frac{3\beta a^5 \rho^2}{p_\phi \kappa^2} \quad (7.49)$$

$$\rho' = \frac{(1+\rho)}{p_\phi \kappa^2} \frac{2p_\rho}{3} - \frac{ap_a}{3p_\phi \kappa^2} \quad (7.50)$$

$$p_\rho' = \frac{\beta a^6 \rho}{p_\phi \kappa^2} - \frac{1}{p_\phi \kappa^2} \left(\frac{p_\rho^2}{3} - 3a^4 k \right) \quad (7.51)$$

Tomando en cuenta el caso para un universo plano ($k = 0$), la solución numérica para las ecuaciones de movimiento es mostrada en la figura 7.2.

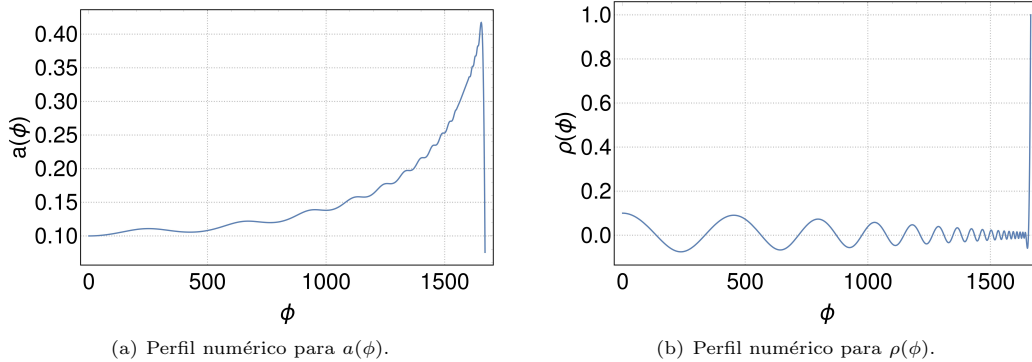


Figura 7.2: Solución numérica a las ecuaciones (7.48)–(7.51) para un universo plano, tomando las condiciones iniciales $a(0) = 10^{-1}$, $p_a(0) = 0$, $\rho(0) = 10^{-1}$, $p_\rho(0) = 0$ y considerando $\beta = -200$, $k = 0$. Código computacional en pág. 116.

La solución numérica a las ecuaciones de movimiento nos muestra que el factor de escala comienza creciendo, como es esperado de la dinámica estándar, hasta que de pronto su dinámica detiene este crecimiento y muestra un decrecimiento repentino. Esto nos indica, al menos de manera cualitativa, que las contribuciones de orden mayor en el escalar de curvatura R que hemos

considerado podrían no ser adecuadas a tiempos ϕ muy en el futuro de la evolución del universo, o de manera equivalente, a densidades de materia suficientemente bajas. Si consideramos que este es el caso, entonces los efectos dinámicos provocados por esta cosmología $f(R)$ cuadrática deben ser tomados en cuenta hasta cierto punto de la evolución cósmica, retomando la descripción estándar (mostrada en la figura 5.1 del Capítulo 5) a partir del punto en el que desestimamos este modelo alternativo. Comparamos entonces la dinámica de ambos modelos cosmológicos en la figura 7.3.

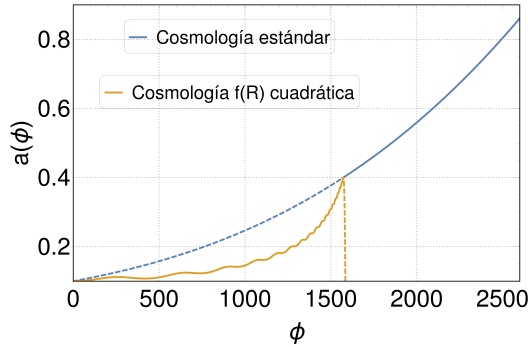


Figura 7.3: Comparación entre la dinámica cosmológica clásica y la dinámica cosmológica $f(R)$ cuadrática para un universo plano. Las condiciones iniciales consideradas para ambos modelos fueron $a(0) = 10^{-1}$, $p_a(0) = -0.002178$. Mientras que las condiciones iniciales restantes para el modelo $f(R)$ fueron $\rho(0) = 10^{-1}$, $p_\rho(0) = 0$. Se tomó $\beta = -200$. Código computacional en pág. 116.

Vemos que si consideramos la evolución cósmica del modelo $f(R)$ cuadrático hasta antes de que empiece a decrecer, podemos continuar la evolución del universo con ayuda de la dinámica clásica para ciertas condiciones iniciales iguales para ambos modelos. Al considerar esta dinámica conjunta, notamos al menos cualitativamente que la evolución de la cosmología $f(R)$ cuadrática presenta un crecimiento más rápido que el crecimiento que presenta la evolución estándar. Esto sucede en un intervalo de tiempo que es inmediatamente anterior al tiempo en el que dejamos de considerar la teoría $f(R)$ cuadrática y comenzamos a considerar la cosmología estándar, i.e. $\phi \approx 1570$. Dicho comportamiento bien podría ser considerado como una época inflacionaria en el universo, provocada por efectos gravitacionales de orden mayor. Resultaría interesante realizar un análisis más detallado de este comportamiento para poder compararlo adecuadamente con modelos inflacionarios bien establecidos que estén de acuerdo con las observaciones cosmológicas actuales.

Por otro lado, logramos establecer una dinámica cosmológica respecto a un parámetro que funciona de manera adecuada como un reloj interno para la teoría, a diferencia del resultado obtenido en la sección anterior. Una vez que tenemos bien establecida una formulación hamiltoniana para la teoría, uno podría pensar en investigar las consecuencias que podría implicar una cuantización polimérica en estos modelos cosmológicos generalizados. La idea de aplicar la cuantización polimérica a las teorías de gravedad $f(R)$ ha sido desarrollada recientemente pero en el contexto de la gravedad cuántica de lazos [73] y posteriormente en el contexto de la cosmología cuántica de lazos [74], teorías en donde se hace uso de las variables de Ashtekar para la descripción de la gravedad. En este trabajo, nosotros proponemos como un posible trabajo a futuro que puede ser realizado, el proyecto de investigar una cuantización polimérica en modelos cosmológicos generalizados por medio de las teorías $f(R)$ de la gravedad utilizando como variable dinámica al factor de escala a , y como un reloj interno de la teoría al campo escalar de materia ϕ .

Capítulo 8

Conclusiones

Motivados por el trabajo realizado en [1], en donde se sugiere la idea de que cualquier teoría de la gravedad cuántica satisfactoria debe de incluir cambios de topología como proceso dinámico, en este trabajo se propuso llevar a cabo una cuantización polimérica de un modelo cosmológico con el objetivo de buscar soluciones de tipo instantón en el sistema, de manera tal que pudiéramos argumentar a favor de la presencia de cambios topológicos en el espacio-tiempo de la teoría de la gravedad cuántica de lazos. La motivación detrás de estas teorías y estas ideas, tiene su origen en el problema de la gravedad cuántica.

Al inicio de este trabajo, se realizó una revisión del problema de la gravedad cuántica en donde argumentamos que resulta de gran relevancia la construcción de una teoría cuántica de la gravedad debido a que los pilares actuales de la física teórica – la relatividad general y la teoría cuántica de campos – no son suficientes para describir de manera adecuada todos los fenómenos de la naturaleza. En particular tenemos el caso de las singularidades, en donde podemos destacar la física de los agujeros negros y el problema del origen del universo. En estos sistemas físicos es donde una teoría de gravedad cuántica podría potencialmente resolver muchas preguntas que hasta ahora no tienen una respuesta satisfactoria.

Después de hablar de la motivación fundamental detrás del trabajo, se presentaron las herramientas necesarias para llevar a cabo una cuantización polimérica de un modelo cosmológico. Debido a que la cuantización polimérica corresponde a una cuantización canónica, uno debe establecer una formulación hamiltoniana del sistema clásico que desee cuantizar. Pero la formulación hamiltoniana de la gravedad nos lleva a una teoría con constricciones, por lo que se comenzó por establecer la formulación hamiltoniana para las teorías de norma. Una vez que se estableció el formalismo clásico, se realizó una breve revisión de la cuantización de Dirac y del método del ‘promedio sobre el grupo’ que nos ayudó saber cómo a cuantizar sistemas con constricciones primarias. Posteriormente se realizó una cuidadosa construcción de la representación polimérica de la mecánica cuántica, revisando el teorema de Stone-von Neumann para probar la no-equivalencia de esta representación respecto a la representación estándar de Schrödinger.

Mas adelante, llevamos a cabo la formulación hamiltoniana de un modelo cosmológico de tipo Friedmann-Robertson-Walker y aplicamos las herramientas que previamente se presentaron para llevar a cabo la cuantización polimérica del modelo cosmológico por medio del formalismo de la integral de camino. Esta cuantización nos dio como resultado una acción polimérica que nos brinda una descripción del sistema que de manera efectiva corresponde a una descripción clásica pero que toma en cuenta los efectos del régimen cuántico. La acción polimérica fue desparametrizada, provocando que su dinámica quedara descrita de manera relacional en términos de un parámetro interno del sistema: el campos escalar de materia ϕ .

Se analizó numéricamente la dinámica cosmológica polimérica para los casos de un universo abierto con geometría hiperbólica ($k = 1$), un universo plano ($k = 0$) y un universo cerrado con geometría esférica ($k = -1$). Esta dinámica se comparó con la dinámica cosmológica clásica descrita también en términos del campo ϕ . Como resultado de la cuantización polimérica de la cosmología

FRW, vimos que el universo evita quedarse de manera definitiva en una singularidad al presentar una evolución que queda caracterizada por medio de rebotes. Para los casos de un universo con $k = 1$ y $k = -1$, tenemos que el universo se encuentra constantemente rebotando. En estos casos, el universo entra en un ciclo en el que crece hasta llegar a un tamaño máximo para después empezar a contraerse hasta que esta dinámica ‘rebota’ y vuelve a crecer, repitiendo de nuevo el ciclo. Por otro lado, para el caso de un universo con $k = 0$, este presenta un único rebote, de manera que asintóticamente en el tiempo su tamaño crece infinitamente. Esta dinámica polimérica que obtenemos para los diferentes casos para la geometría de un universo, resulta muy interesante ya que al menos cualitativamente es compatible con los resultados que se han obtenido en la cosmología cuántica de lazos. Uno de los grandes resultados de esta teoría, que es un modelo de simetría reducida de la gravedad cuántica de lazos, consiste precisamente en el hecho de que las singularidades son evitadas en estos modelos y son sustituidas por rebotes que conectan universos en contracción con universos en expansión.

Después de realizar el análisis de la dinámica de la cosmología polimérica, se presentaron las herramientas necesarias para buscar soluciones tipo instantón. La dinámica cosmológica fue trasladada entonces al espacio euclídeo, en donde se calcularon numéricamente las soluciones del sistema. Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento para la dinámica del factor de escala y su momento conjugado, la acción euclídea fue evaluada numéricamente en estas soluciones, dando como resultado que su valor diverge y por tanto indicando que las soluciones que obtuvimos no eran de tipo instantón. Este mismo análisis fue realizado, partiendo desde el nivel clásico, considerando dos conjuntos de variables dinámicas más: i) (A, p_A) en donde se consideró la nueva variable geométrica fundamental $A \sim a^2$ y ii) (V, p_V) en donde se consideró la nueva variable geométrica fundamental $V \sim a^3$. La cuantización polimérica de la cosmología escrita en estas nuevas variables, sugirió que la naturaleza del espacio-tiempo a la escala de Planck estaba construida a partir de pequeñas unidades discretas de área, en el caso de tomar la variable A , o de volumen, en el caso de tomar la variable V . Al analizar numéricamente la dinámica polimérica con estas nuevas variables en el espacio euclídeo, obtuvimos que las soluciones para las variables (A, p_A) tampoco dejaban finita la acción euclídea y por tanto tampoco cumplían con ser soluciones de tipo instantón; mientras que para las variables (V, p_V) las soluciones numéricas que se obtuvieron se encontraban acotadas en el dominio temporal, por lo que no fueron unas soluciones que se prestaran al análisis que se estaba realizando. Se necesita de un análisis numérico más adecuado para saber por qué las soluciones obtenidas para este conjunto de variables son acotadas, de manera que tal vez se pueda corregir esta situación para poder obtener unas soluciones que resulten útiles para la búsqueda de instantones.

Finalmente, se llevó a cabo un análisis a nivel clásico de modelos cosmológicos modificados mediante las teorías $f(R)$ de la gravedad. Nosotros consideramos el caso de un modelo cosmológico de tipo FRW generalizado mediante una teoría $f(R)$ cuadrática tomando dos casos: un universo sin contribuciones de materia y un universo con un campo escalar de materia. Para el primer caso, establecimos su formulación hamiltoniana y se investigó la posibilidad de utilizar al campo auxiliar ρ como un tiempo interno para la teoría. El resultado que se obtuvo es que este campo no tiene un comportamiento monótono, sino un comportamiento oscilatorio. Esta característica lo descarta como un buen reloj para la teoría ya que debería cumplir con tener un comportamiento monótono a lo largo de cualquier trayectoria dinámica. Para el caso de una cosmología $f(R)$ cuadrática con un campo escalar de materia, también construimos su formulación hamiltoniana, utilizando al campo de materia como reloj interno de la teoría. Vimos que la dinámica que se obtiene no es adecuada para tiempos ya posteriores en la evolución del universo, o de manera equivalente, a densidades de materia suficientemente bajas. Por tanto se propuso combinar esta evolución, con la evolución cosmológica estándar de un modelo tipo FRW. Como resultado obtenemos que en cierto intervalo del régimen en donde es válida la cosmología $f(R)$ cuadrática considerada, esta dinámica cosmológica crece más rápido en comparación con la dinámica cosmológica estándar. Esto nos lleva a pensar que este breve periodo puede ser considerado como un periodo inflacionario en esta evolución cósmica. Por último, una vez que pudimos establecer una formulación hamiltoniana con un reloj interno adecuado para uno de los modelos cosmológicos $f(R)$ cuadráticos, proponemos la idea de analizar las consecuencias que la cuantización polimérica puede implicar en estos modelos.

Confiamos en que esta tesis genere interés en el área y motive posteriores trabajos. En particular, se encuentra la propuesta de continuar la búsqueda de soluciones de tipo instantón por lo menos en el contexto de modelos cosmológicos generalizados mediante teorías $f(R)$ de la gravedad.

Apéndice A

Integral de camino con restricción topológica

En muchos sistemas físicos, la amplitud de evolución temporal está dada por órbitas que debido a alguna restricción topológica en el sistema, están confinadas a solo una región del espacio de configuraciones y no se encuentran en todo el espacio. Esto cambia las relaciones de completitud de la mecánica cuántica y en consecuencia la derivación de la integral de camino. Consideraremos una partícula puntual restringida a moverse sobre un círculo [39, Capítulo 6.1].

A.1. Partícula libre sobre un círculo

Considérese una partícula restringida a moverse sobre un círculo. Su movimiento se encuentra especificado en términos de la variable angular $\varphi(t) = [0, 2\pi]$ con la restricción topológica de que $\varphi = 0$ y $\varphi = 2\pi$ corresponden al mismo punto.

Como es usual, la evolución temporal es expresada haciendo una descomposición del operador de evolución temporal en un producto de N particiones temporales

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle &= \langle \varphi_f | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)\hat{H}(p_\varphi, \varphi)} | \varphi_i \rangle \\ &= \langle \varphi_f | \prod_{n=1}^N e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon \hat{H}(p_\varphi, \varphi)} | \varphi_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde $\epsilon \equiv (t_f - t_i)/N$ y p_φ corresponde al momento canónico asociado a la coordenada φ .

Debido a la periodicidad en la coordenada φ , la relación de completitud para los estados de posición debe ser escrita como

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| = 1; \quad \varphi_n \in [0, 2\pi) \quad (\text{A.2})$$

con $n = 1, \dots, N - 1$. Mientras que la relación de ortonormalidad es

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle = \delta(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \quad (\text{A.3})$$

La función delta de Dirac puede ser reexpresada (à la Fourier) en términos de un conjunto completo de funciones periódicas sobre el círculo¹

$$\delta(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \quad (\text{A.4})$$

donde k_n corresponde al momento asociado a la coordenada φ_n y su relación con el momento canónico es $p_{\varphi_n} = \hbar k_n$. Obtenemos así que

¹La expansión en series de Fourier para una delta de Dirac cuyo argumento tiene un dominio compacto (e.g. $\varphi(t) = [0, 2\pi)$) viene dada por una sumatoria y no por una integral como es usual.

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle = \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \quad (\text{A.5})$$

Para cada partición tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, t_n | \varphi_{n-1}, t_{n-1} \rangle &= \langle \varphi_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(p_\varphi, \varphi)} | \varphi_{n-1} \rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(-i\hbar \partial_{\varphi_n}, \varphi_n)} \langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}(-i\hbar \partial_{\varphi_n}, \varphi_n)} \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})} \end{aligned}$$

Actuando el operador hamiltoniano sobre cada término de la sumatoria obtenemos

$$\langle \varphi_n, t_n | \varphi_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(\hbar k_n, \varphi_n)} \quad (\text{A.6})$$

Realizando con cuidado las N particiones sobre el operador de evolución temporal e insertando adecuadamente la relación de completitud $N - 1$ veces

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle &= \langle \varphi_f | e^{-\frac{i}{\hbar} (t_f - t_i) \hat{H}(p_\varphi, \varphi)} | \varphi_i \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \langle \varphi_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(t_f - t_i)}{2} \hat{H}} | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(t_f - t_i)}{2} \hat{H}} | \varphi_i \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(t_f - t_i)}{2} \hat{H}} \langle \varphi_f | \varphi_1 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{(t_f - t_i)}{2} \hat{H}} \langle \varphi_1 | \varphi_i \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \sum_{k_f \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_f(\varphi_f - \varphi_1) - \frac{i}{\hbar} \frac{(t_f - t_i)}{2} H} \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_i) - \frac{i}{\hbar} \frac{(t_f - t_i)}{2} H} \\ &= \dots \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi_{N-1} \dots d\varphi_1 \sum_{k_f \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_f(\varphi_f - \varphi_{N-1}) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H} \dots \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_i) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de notación $\varphi_N \equiv \varphi_f$ y $\varphi_0 \equiv \varphi_i$, para el lado derecho de la ecuación obtenemos que

$$\langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle = \prod_{m=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_m \prod_{n=1}^N \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(\hbar k_n, \varphi_n)} \quad (\text{A.7})$$

Ahora, la expresión obtenida en (A.7) contiene una sumatoria sobre los momentos discretos ($k_n \in \mathbb{Z}$). Esto no es propiamente una integral de camino, afortunadamente podemos convertir esta sumatoria en una integral de la siguiente manera. Introducimos la fórmula de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi m k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta(m - l) \quad (\text{A.8})$$

Retomando la expresión (A.5), la reescribimos como

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi \left(\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{2\pi} \right) k_n}$$

Utilizando (A.8), vemos que la relación de ortonormalidad puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{2\pi} - l_n\right) \\ &= \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \delta(\varphi_n - \varphi_{n-1} - 2\pi l_n)\end{aligned}$$

Realizamos una descomposición de Fourier sobre la delta de Dirac² para finalmente obtener que la relación de ortogonalidad puede ser escrita como

$$\langle \varphi_n | \varphi_{n-1} \rangle = \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_n}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1} - 2\pi l_n)} \quad (\text{A.9})$$

Entonces podemos reescribir la amplitud (A.7) utilizando el resultado obtenido en (A.9)

$$\begin{aligned}\langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle &= \prod_{m=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_m \prod_{n=1}^N \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_n}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l_n) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(\hbar k_n, \varphi_n)}\end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Aún tenemos las sumatorias \sum_{l_n} en (A.10), pero podemos absorberlas en las variables φ_n al cambiar su rango de integración de $[0, 2\pi) \rightarrow (-\infty, \infty)$. Esto se hace de la siguiente manera. Reescribimos a (A.10) como

$$\begin{aligned}\langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle &= \prod_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_n}{2\pi} \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_m e^{\sum_{j=1}^N ik_n(\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=1}^N H(\hbar k_j, \varphi_j)}\end{aligned}$$

y solo trabajamos con los factores

$$\prod_{n=1}^N \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_m e^{\sum_{j=1}^N ik_n(\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_j)} \quad (\text{A.11})$$

sin que esto afecte a los demás factores. Desarrollamos las multiplicatorias y las sumatorias

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^N \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_m e^{\sum_{j=1}^N ik_j(\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_j)} \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_N \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1} e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_0 + 2\pi l_1)} e^{ik_2(\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi l_2)} \dots e^{ik_N(\varphi_N - \varphi_{N-1} + 2\pi l_N)}\end{aligned}$$

Tomando ahora únicamente los primeros dos índices de las multiplicatorias y sumatorias, i.e. $m, n, k = 1, 2$

$$\begin{aligned}&\sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_0 + 2\pi l_1)} e^{ik_2(\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi l_2)} \\ &= \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 e^{i(k_2\varphi_2 + 2\pi k_2 l_2 - k_1\varphi_0) + i[\varphi_1(k_1 - k_2) + 2\pi k_1 l_1]} \\ &= \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i(k_2\varphi_2 - k_1\varphi_0 + 2\pi k_2 l_2)} \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 e^{i(\varphi_1 k_1 + 2\pi k_1 l_1 - \varphi_1 k_2)}\end{aligned}$$

²Nótese que a diferencia de (A.4), el dominio del argumento de la delta va sobre todo \mathbb{R} , por lo que la expansión queda expresada mediante una integral y no mediante una sumatoria.

definiendo $\tilde{\varphi}_1 \equiv \varphi_1 + 2\pi l_1 \Rightarrow d\tilde{\varphi}_1 = d\varphi_1$, $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 - 2\pi l_1$; notamos que mientras $\varphi_1 \in (0, 2\pi]$, $\tilde{\varphi}_1 \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i(k_2 \varphi_2 - k_1 \varphi_0 + 2\pi k_2 l_2)} \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\varphi}_1 e^{i(\tilde{\varphi}_1 k_1 - \tilde{\varphi}_1 k_2 + 2\pi k_2 l_1)} \\
&= \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i(k_2 \varphi_2 - k_1 \varphi_0 + 2\pi k_2 l_2)} e^{i2\pi k_2 l_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\varphi}_1 e^{i(\tilde{\varphi}_1 k_1 - \tilde{\varphi}_1 k_2)} \\
&= \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i(k_2 \varphi_2 - k_1 \varphi_0 + 2\pi k_2 l_2 + 2\pi k_2 l_1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\varphi}_1 e^{i(\tilde{\varphi}_1 k_1 - \tilde{\varphi}_1 k_2)}
\end{aligned}$$

definiendo ahora $\tilde{l}_2 \equiv l_2 + l_1$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tilde{l}_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i(k_2 \varphi_2 - k_1 \varphi_0 + 2\pi k_2 \tilde{l}_2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\varphi}_1 e^{i(\tilde{\varphi}_1 k_1 - \tilde{\varphi}_1 k_2)} \\
&= \sum_{\tilde{l}_2 \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\varphi}_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i(k_2 \varphi_2 - k_1 \varphi_0 + 2\pi k_2 \tilde{l}_2)} e^{i(\tilde{\varphi}_1 k_1 - \tilde{\varphi}_1 k_2)} \\
&= \sum_{\tilde{l}_2 \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\varphi}_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 e^{i[k_2(\varphi_2 - \tilde{\varphi}_1 + 2\pi \tilde{l}_2) + k_1(\tilde{\varphi}_1 - \varphi_0)]}
\end{aligned}$$

finalmente, renombrando a las variables $\tilde{\varphi}_1 \rightarrow \varphi_1$ y $\tilde{l}_2 \rightarrow l_2$, ya que su nombre solo representa una etiqueta

$$\begin{aligned}
&\sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_0 + 2\pi l_1)} e^{ik_2(\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi l_2)} \\
&= \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_1 e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_0)} e^{ik_2(\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi l_2)}
\end{aligned}$$

Obtenemos que podemos absorber la sumatoria $\sum_{l_1 \in \mathbb{Z}}$ al extender el rango de integración de la variable φ_1 . Haciendo esto para cada término en (A.11), vemos que podemos absorber todas las sumatorias a excepción de la última, i.e. \sum_{l_N} , ya que no contamos con el término $d\varphi_N$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^N \sum_{l_n \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_m e^{\sum_{j=1}^N ik_n(\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_j)} \\
&= \sum_{l_N \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1} e^{ik_1(\varphi_1 - \varphi_0)} e^{ik_2(\varphi_2 - \varphi_1)} \dots e^{ik_N(\varphi_N - \varphi_{N-1} + 2\pi l_N)} \\
&= \sum_{l_N \in \mathbb{Z}} \prod_{n=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_n e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l_N \delta_{n,N})} \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (A.10), obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle \\ &= \sum_{l_N \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_m \prod_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_n}{2\pi} e^{ik_n(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l_N \delta_{n,N}) - \frac{i}{\hbar} \epsilon H(\hbar k_n, \varphi_n)} \end{aligned}$$

notando que $k_n = p_n/\hbar$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l_N \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_m \prod_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p_n(\varphi_n - \varphi_{n-1} + 2\pi l_N \delta_{n,N}) - \epsilon H(p_n, \varphi_n)]} \\ &= \sum_{l_N \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_m \prod_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=1}^N p_j \frac{1}{\epsilon} (\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_N \delta_{j,N}) - H(p_j, \varphi_j)} \end{aligned}$$

Llegamos así a que la amplitud total de transición está dada por

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle \\ &= \sum_{l_N \in \mathbb{Z}} \prod_{m=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_m \prod_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=1}^N p_j \frac{1}{\epsilon} (\varphi_j - \varphi_{j-1} + 2\pi l_N \delta_{j,N}) - H(p_j, \varphi_j)} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Tomamos el límite al continuo, cuando $N \rightarrow \infty$, para obtener la integral de camino. Este límite implica que $\epsilon \sum_{j=1}^N \rightarrow \int dt$, $(\varphi_n - \varphi_{n-1})/\epsilon \rightarrow \dot{\varphi}$ y que $l_N \rightarrow l_f$. Entonces la integral de camino es

$$\langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle = \sum_{l_f \in \mathbb{Z}} \int \frac{\mathcal{D}\varphi(t) \mathcal{D}p(t)}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \int dt [p\dot{\varphi} - H(p, \varphi)]} \quad (\text{A.14})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi(t) &\equiv \prod_{m=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} d\varphi_m \\ \mathcal{D}p(t) &\equiv \prod_{n=1}^N \int_{\mathbb{R}} dp_n \end{aligned}$$

Como comentario final, nótese que la amplitud obtenida en (A.14) corresponde a una suma sobre todos los caminos en todas las repeticiones periódicas de la posición final $\varphi_f + 2\pi l_f$. Esto puede ser interpretado como que la amplitud de probabilidad para un sistema cíclico es equivalente a sumar amplitudes de probabilidad para un sistema que no es cíclico evaluadas en diferentes puntos finales, los cuales son equivalente entre sí para el sistema cíclico.

$$\langle \varphi_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle_{\text{cíclico}} = \sum_{l_f \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_f + 2\pi l_f, t_f | \varphi_i, t_i \rangle_{\text{no-cíclico}}$$

Apéndice B

Códigos computacionales para las soluciones numéricas

Debido a que no es trivial obtener la solución analítica de las diferentes dinámicas cosmológicas que obtenemos en nuestro trabajo, se procedió a calcular las soluciones numéricas de los diferentes sistemas de ecuaciones. Para resolver las ecuaciones se hizo uso del programa *Wolfram Mathematica 11.1 Student Edition*. En este Apéndice colocamos los códigos computacionales que se utilizaron.

Para realizar los diversos cálculos numéricos, consideramos el sistema de unidades de Planck, en donde se tiene

$$\hbar = G = c = 1$$

Por lo que la longitud de Planck sería

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1 \quad (\text{B.1})$$

es decir, si suponemos que la escala de longitud polimérica es del orden de la longitud de Planck, se tiene entonces que $\mu = 1$. Si queremos tomar el límite al continuo, el valor para μ deberá ser menor, o mucho menor, a la unidad. Al realizar los cálculos numéricos se tomó $\mu = 1$, a excepción del cálculo hecho para la figura 5.3. También se seleccionó el valor de p_ϕ , el momento canónico asociado al campo ϕ , igual a la unidad. Esto se hizo considerando que la ec. (5.31) nos asegura que p_ϕ es una cantidad real constante cuyo valor puede ser arbitrario.

Capítulo 5

Ejemplo de código para la figura 5.1.

```
Subscript[p,\[Phi]] = 1;
k = 0; (* Aquí escogemos k = {-1,0,1} *)
s = NDSolve[{ a'[\[Phi]] == -(4\[Pi])/(3Subscript[p,\[Phi]])
  Subscript[p,a][\[Phi]] a[\[Phi]]^2,
  Subscript[p, a]'[\[Phi]] ==
  (4\[Pi])/(3 Subscript[p,\[Phi]])
  Subscript[p, a][\[Phi]]^2 a[\[Phi]]
  +(3 k)/(2\[Pi])a[\[Phi]]^3,
  a[0] == 10^-2, Subscript[p, a][0] == -10},
  (* Estas son las condiciones iniciales *)
  {a, Subscript[p,a]}, {\[Phi], -10^2, 10^2},
  Method -> "StiffnessSwitching",
```

```

WorkingPrecision -> 3 MachinePrecision]
t = NDSolve[{ a'[\[Phi]] == -(4\[Pi])/(3Subscript[p,\[Phi]])
Subscript[p,a][\[Phi]] a[\[Phi]]^2,
Subscript[p, a]'[\[Phi]] ==
(4\[Pi])/(3 Subscript[p,\[Phi]])
Subscript[p, a][\[Phi]]^2 a[\[Phi]]
+(3 k)/(2\[Pi])a[\[Phi]]^3,
a[0] == 10^-2, Subscript[p, a][0] == 10},
(* Estas son las condiciones iniciales *)
{a, Subscript[p,a]}, {\[Phi], -10^2, 10^2},
Method -> "StiffnessSwitching",
WorkingPrecision -> 3 MachinePrecision]

Plot[{Evaluate[a[\[Phi]] /. s],Evaluate[a[\[Phi]] /. t]},
{\[Phi], -20, 20}, (* Este es el rango de integración *)
PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {\[Phi], "a(\[Phi])"},
PlotLegends -> Placed[LineLegend[{
"\!\(\*SubscriptBox[\(p\), \(\a\)]\)\(0) = -10",
"\!\(\*SubscriptBox[\(p\), \(\a\)]\)\(0) = 10"},
LabelStyle -> 20, LegendFunction -> "Frame",
LegendLayout -> "Column"], {0.5,0.8}],
FrameStyle -> Directive[Black],
BaseStyle -> { FontSize -> 26},
PlotRange -> Full, ImageSize -> Large ]

```

Ejemplo de código para las figuras 5.2, 5.3.

```

Subscript[p, \[Phi]] = 1;
k = 1; (* Aquí escogemos k = {-1,0,1} *)
\[Mu] = 1; (* Aquí modificamos la longitud característica polimérica *)
s = NDSolve[{ a'[\[Phi]] == -(2\[Pi])/(3Subscript[p,\[Phi]](\[Mu]^2))
a[\[Phi]]^2 Sin[2 \[Mu] Subscript[p, a][\[Phi]]],
Subscript[p, a]'[\[Phi]] ==
(4\[Pi])/(3Subscript[p,\[Phi]](\[Mu]^2))
a[\[Phi]] Sin[\[Mu] Subscript[p, a][\[Phi]]]^2
+ (3k)/(2\[Pi] Subscript[p, \[Phi]]) a[\[Phi]]^3,
a[0] == 10^-2, Subscript[p, a][0] == -10},
{a, Subscript[p, a]}, {\[Phi], -10^3, 10^3},
Method -> "StiffnessSwitching",
WorkingPrecision -> 3 MachinePrecision ]

Plot[Evaluate[a[\[Phi]] /. s], {\[Phi], -10^3, 10^3},
PlotTheme -> "Detailed", ImageSize -> Large,
FrameLabel -> {\[Phi], "a(\[Phi])"},
PlotLegends -> None, FrameStyle -> Directive[Black],
BaseStyle -> {FontSize -> 26}, PlotStyle -> {Thick},
PlotRange -> Full]

```

Capítulo 6

Ejemplo de código para las figuras 6.1, 6.3, 6.5.

```

Subscript[p, \[Phi]] = 1;

```

```

k = 1;
\[\Mu] = 1;
(* En la variable 's' se deben escribir las ecuaciones de Hamilton para cada
caso. En este ejemplo corresponden a las ecuaciones para (a, p_{a}) *)
s = NDSolve[ {Subscript[a, E]'[\[Tau]] ==
      -(2\[Pi])/(3\[Mu] Subscript[p, \[Phi]])
      Subscript[a, E][\[Tau]]^2 Sin[2\[Mu] Subscript[p, a][\[Tau]]],
      Subscript[p, a]'[\[Tau]] ==
      (4\[Pi])/(3(\[Mu]^2)Subscript[p, \[Phi]])
      Subscript[a, E][\[Tau]] Sin[\[Mu] Subscript[p, a][\[Tau]]]^2
      -(3 k)/(2\[Pi] Subscript[p, \[Phi]])Subscript[a, E][\[Tau]]^3,
      Subscript[a, E][0] == 10^-2, Subscript[p, a][0] == 10},
      {Subscript[a, E], Subscript[p, a]}, {\[Tau], -10^3, 10^3} ]

Plot[Evaluate[Subscript[a, E][\[Tau]] /. s], {\[Tau], -1000, 1000},
  PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {\[Tau],
    "\!(\(*SubscriptBox[\(a\), \((E)\)]\)\)\(\[Tau]\)"},
  ImageSize -> Large, PlotLegends -> None,
  FrameStyle -> Directive[Black], BaseStyle -> { FontSize -> 26},
  PlotStyle -> {Thick}, PlotRange -> Full]
Plot[Evaluate[Subscript[p, a][\[Tau]] /. s], {\[Tau], -1000, 1000},
  PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {\[Tau],
    "\!(\(*SubscriptBox[\(p\), \((a)\)]\)\)\(\[Tau]\)"},
  ImageSize -> Large, PlotLegends -> None,
  FrameStyle -> Directive[Black], BaseStyle -> { FontSize -> 26},
  PlotStyle -> {Thick}, PlotRange -> Full]

```

Ejemplo de código para las figuras 6.2, 6.4.

```

(* Para obtener la gráfica del integrando de la acción, escribimos
este código inmediatamente después del anterior *)
(* Aquí debemos escribir el argumento de la integral de la acción
para cada cosa. En este ejemplo usamos la acción para las variables
(a, p_{a}) *)
Plot[Evaluate[{-Subscript[p, a]'[\[Tau]] Subscript[a, E][\[Tau]]
      +Subscript[p, \[Phi]]/2
      -(2\[Pi])/(3\[Mu]^2 Subscript[p, \[Phi]])
      Subscript[a, E][\[Tau]]^2
      Sin[\[Mu] Subscript[p, a][\[Tau]]]^2
      +( 3 k )/(8\[Pi] Subscript[p, \[Phi]])
      Subscript[a, E][\[Tau]]^4} /. s],
      {\[Tau], -1000, 1000},
  PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {\[Tau],
    "\!(\(*SubscriptBox[\(f\), \((a)\)]\)\)\(\[Tau]\)"}, ImageSize -> Large,
  PlotLegends -> None, FrameStyle -> Directive[Black],
  BaseStyle -> { FontSize -> 26}, PlotStyle -> {Thick},
  PlotRange -> Full]

```

Capítulo 7

Ejemplo de código para la figura 7.1.

```

k = 0;

```



```

\[\Beta] = -200;
s = NDSolve[{ a'[t] == - Subscript[p,\[Rho]][t]/(3 a[t]^2),
  \[Rho]'[t] == (1 + \[Rho][t])
  (Subscript[p,\[Rho]][t]/(3 a[t]^3)
  + (3a[t]k)/Subscript[p,\[Rho]][t])
  + (\[Beta] a[t]^3\[Rho][t]^2)/(2Subscript[p,\[Rho]][t]),
  Subscript[p, \[Rho]]'[t] == 3 a[t] k
  + \[Beta] a[t]^3\[Rho][t]
  - Subscript[p,\[Rho]][t]^2/(3 a[t]^3),
  a[0] == 10^-0, \[Rho][0] == 10^-2,
  Subscript[p, \[Rho]][0] == 10^-3},
  {a, \[Rho], Subscript[p, \[Rho]]},
  {t, 0, 10^3},
  WorkingPrecision -> 2 MachinePrecision,
  StartingStepSize -> 0.000001,
  Method -> "StiffnessSwitching"]

Plot[Evaluate[a[t] /. s], {t, 0, 1}, PlotTheme -> "Detailed",
  FrameLabel -> {t, "a(t)"}, ImageSize -> Large, PlotLegends -> None,
  PlotStyle -> Thick, FrameStyle -> Directive[Black],
  BaseStyle -> { FontSize -> 26}]
Plot[Evaluate[\[Rho][t] /. s], {t, 0, 10^3},
  PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {t, "\[Rho](t)"},
  ImageSize -> Large, PlotLegends -> None, PlotStyle -> Thick,
  FrameStyle -> Directive[Black], BaseStyle -> { FontSize -> 26}]

```

Ejemplo de código para la figura 7.2.

```

k = 0;
\[\Beta] = -200;
Subscript[p, \[Phi]] = 1;
s = NDSolve[{ a'[\[Phi]] == -(a[\[Phi]]Subscript[p,\[Rho]][\[Phi]])
  /(3Subscript[p,\[Phi]]),
  Subscript[p, a]'[\[Phi]] == (1+\[Rho][\[Phi]])
  12/Subscript[p,\[Phi]]a[\[Phi]]^3 k
  +1/(3Subscript[p,\[Phi]])
  Subscript[p,\[Rho]][\[Phi]]Subscript[p, a][\[Phi]]
  +3/Subscript[p,\[Phi]]\[Beta] a[\[Phi]]^5\[Rho][\[Phi]]^2,
  \[Rho]'[\[Phi]] == 2/(3Subscript[p,\[Phi]])
  (1+\[Rho][\[Phi]])Subscript[p,\[Rho]][\[Phi]]
  -1/(3Subscript[p,\[Phi]])a[\[Phi]]Subscript[p,a][\[Phi]],
  Subscript[p, \[Rho]]'[\[Phi]] ==
  \[Beta]/Subscript[p,\[Phi]]a[\[Phi]]^6 \[Rho][\[Phi]]
  -1/(3Subscript[p,\[Phi]])Subscript[p,\[Rho]][\[Phi]]^2
  -3/Subscript[p,\[Phi]]a[\[Phi]]^4 k,
  a[0] == 10^-1, Subscript[p, a][0] == 0,
  \[Rho][0] == 10^-1, Subscript[p,\[Rho]][0] == 0},
  {a, Subscript[p, a], \[Rho], Subscript[p,\[Rho]]},
  {\[Phi], 0, 10^4},
  WorkingPrecision -> 3 MachinePrecision,
  StartingStepSize -> 0.00001]

Plot[Evaluate[a[\[Phi]] /. s], {\[Phi], 0, 1670},

```

```
PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {\[Phi], "a(\[Phi])"},
ImageSize -> Large, PlotLegends -> None,
FrameStyle -> Directive[Black], BaseStyle -> { FontSize -> 26},
PlotRange -> Full]
Plot[Evaluate[\[Rho][\[Phi]] /. s], {\[Phi], 0, 1665},
PlotTheme -> "Detailed", FrameLabel -> {\[Phi], "\[Rho](\[Phi])"},
ImageSize -> Large, PlotLegends -> None,
FrameStyle -> Directive[Black], BaseStyle -> { FontSize -> 26},
PlotRange -> Full]
```


Bibliografía

- [1] J. Maldacena y L. Susskind. “Cool horizons for entangled black holes”. *Fortsch. Phys.* Vol. **61**. Núm. 9 (2013), págs. 781-811. arXiv: [1306.0533 \[hep-th\]](#).
- [2] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [3] B. P. Abbott *et al.* “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. *Phys. Rev. Lett.* Vol. **116**. Núm. 6 (2016). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [4] S. Weinstein y D. Rickles. “Quantum Gravity”. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por E. N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/quantum-gravity/>.
- [5] A. Ashtekar, M. Reuter y C. Rovelli. “From General Relativity to Quantum Gravity” (2014). arXiv: [1408.4336 \[gr-qc\]](#).
- [6] Z. Bern *et al.* “Two-Loop Renormalization of Quantum Gravity Simplified”. *Phys. Rev. D* Vol. **95**. Núm. 4 (2017). arXiv: [1701.02422 \[hep-th\]](#).
- [7] S. Hossenfelder. “Experimental search for quantum gravity”. *Classical and Quantum Gravity: Theory, Analysis and Applications*. Ed. por V. R. Frignanni. Nova Publishers, 2012. Cap. 5. arXiv: [1010.3420 \[gr-qc\]](#).
- [8] S. Hawking y R. Penrose. *The Nature of Space and Time*. Princeton Science Library. Princeton University Press, 1996.
- [9] J. C. Baez. “Higher dimensional algebra and Planck scale physics” (1999). arXiv: [gr-qc/9902017 \[gr-qc\]](#).
- [10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë. *Quantum Mechanics*. Quantum Mechanics. Wiley, 1977.
- [11] F. Scardigli. “Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole Gedanken experiment”. *Phys. Lett. B* Vol. **452** (1999), págs. 39-44. arXiv: [hep-th/9904025 \[hep-th\]](#).
- [12] R. J. Adler. “Six easy roads to the Planck scale”. *Am. J. Phys.* Vol. **78**. Núm. 9 (2010), págs. 925-932. arXiv: [1001.1205 \[gr-qc\]](#).
- [13] M. Kuhlmann. “Quantum Field Theory”. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por E. N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2015. URL: [\url{https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/quantum-field-theory/}](https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/quantum-field-theory/).
- [14] S. Mukhi. “The Theory of Strings: A Detailed Introduction” (1999). URL: <http://theory.tifr.res.in/~mukhi/Physics/string2.html>.
- [15] E. Witten. “String theory dynamics in various dimensions”. *Nucl. Phys. B* Vol. **443** (1995), págs. 85-126. arXiv: [hep-th/9503124 \[hep-th\]](#).
- [16] J. M. Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”. *Int. J. Theor. Phys.* Vol. **38**. Núm. 4 (1999), págs. 1113-1133. arXiv: [hep-th/9711200 \[hep-th\]](#).

- [17] L. Susskind. “The Anthropic landscape of string theory” (2003). arXiv: [hep-th/0302219](https://arxiv.org/abs/hep-th/0302219) [[hep-th](#)].
- [18] A. Ashtekar. “New Hamiltonian formulation of general relativity”. *Phys. Rev. D* Vol. **36**. Núm. 6 (1987), págs. 1587-1602. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.36.1587>.
- [19] C. Rovelli y L. Smolin. “Discreteness of area and volume in quantum gravity”. *Nucl. Phys. B* Vol. **442**. Núm. 3 (1995), págs. 593-619. arXiv: [gr-qc/9411005](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9411005) [[gr-qc](#)].
- [20] A. Ashtekar y R. Tate. *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*. Advanced Series in Astrophysics and Cosmology. World Scientific, 1991.
- [21] P. A. R. Ade *et al.* “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”. *Astron. Astrophys.* Vol. **594** (2016). arXiv: [1502.01589](https://arxiv.org/abs/1502.01589) [[astro-ph.CO](#)].
- [22] A. Ashtekar. “Loop Quantum Cosmology: An Overview”. *Gen. Rel. Grav.* Vol. **41**. Núm. 4 (2009), págs. 707-741. arXiv: [0812.0177](https://arxiv.org/abs/0812.0177) [[gr-qc](#)].
- [23] P. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1981.
- [24] R. P. Feynman. “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics”. *Rev. Mod. Phys.* Vol. **20**. Núm. 2 (1948), págs. 367-387. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.20.367>.
- [25] M. Henneaux y C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton paperbacks. Princeton University Press, 1994.
- [26] P. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1966.
- [27] S. Mercuri. “Introduction to Loop Quantum Gravity” (2010). arXiv: [1001.1330](https://arxiv.org/abs/1001.1330) [[gr-qc](#)].
- [28] M. Bojowald. *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2010.
- [29] D. Tong. “Lectures on String Theory” (2009). arXiv: [0908.0333](https://arxiv.org/abs/0908.0333) [[hep-th](#)].
- [30] F. Bastianelli. “Notes on constrained hamiltonian systems and relativistic particles” (2013). URL: <http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/ch6-FT2.pdf>.
- [31] H. A. Morales-Técolt, S. Rastgoo y J. C. Ruelas. “Path integral polymer propagator of relativistic and non-relativistic particles”. *Phys. Rev. D* Vol. **95**. Núm. 6 (2016). arXiv: [1608.04498](https://arxiv.org/abs/1608.04498) [[gr-qc](#)].
- [32] K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics: With Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, 1982.
- [33] H.-J. Matschull. “Dirac’s canonical quantization program” (1996). arXiv: [quant-ph/9606031](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9606031) [[quant-ph](#)].
- [34] D. Marolf. “Refined algebraic quantization: Systems with a single constraint” (1995). arXiv: [gr-qc/9508015](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9508015) [[gr-qc](#)].
- [35] D. Giulini y D. Marolf. “On the generality of refined algebraic quantization”. *Class. Quant. Grav.* Vol. **16**. Núm. 7 (1999), págs. 2479-2488. arXiv: [gr-qc/9812024](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9812024) [[gr-qc](#)].
- [36] M. Bojowald. *Quantum Cosmology: A Fundamental Description of the Universe*. Springer-Verlag New York, 2011.
- [37] D. Marolf. “Group Averaging and Refined Algebraic Quantization: Where are we now?” (2000). arXiv: [gr-qc/0011112](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0011112) [[gr-qc](#)].
- [38] L. Parra y D. Vergara. “Polymer quantum mechanics some examples using path integrals”. *AIP Conference Proceedings* Vol. **1557** (2014), págs. 269-280. URL: <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4861963>.

- [39] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. 3rd. World Scientific, 2004. Cap. 6.1.
- [40] H. A. Morales-Técotl, A. García-Chung y J. D. Reyes. “Espacios de Hilbert y las representaciones de Schrödinger y polimérica”. *Henri Poincaré y David Hilbert. Y sus fundamentos de la física matemática moderna*. Ed. por A. Anzaldo Meneses *et al.* No hay versión electrónica. CBI-UAMI, 2016.
- [41] A. Ashtekar, S. Fairhurst y J. L. Willis. “Quantum gravity, shadow states, and quantum mechanics”. *Class. Quant. Grav.* Vol. **20**. Núm. 6 (2003), págs. 1031-1062. arXiv: [gr-qc/0207106](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0207106) [[gr-qc](#)].
- [42] J. v. Neumann. “Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren”. *Math. Ann.* Vol. **104** (1931), págs. 570-578. URL: <http://eudml.org/doc/159483>.
- [43] B. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. 1st. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2013.
- [44] A. Corichi, T. Vukasinac y J. A. Zapata. “Polymer Quantum Mechanics and its Continuum Limit”. *Phys. Rev. D* Vol. **76**. Núm. 4 (2007). arXiv: [0704.0007](https://arxiv.org/abs/0704.0007) [[gr-qc](#)].
- [45] A. Wintner. “The unboundedness of quantum-mechanical matrices”. *Phys. Rev.* Vol. **71**. Núm. 10 (1974), 738-739. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.738.2>.
- [46] A. Corichi, J. Cortez y H. Quevedo. “On the relation between Fock and Schrodinger representations for a scalar field”. *Ann. Phys.* Vol. **313** (2004), págs. 446-478. arXiv: [hep-th/0202070](https://arxiv.org/abs/hep-th/0202070) [[hep-th](#)].
- [47] A. Garcia-Chung y J. D. Vergara. “Polymer-Fourier quantization of the scalar field revisited”. *Int. J. Mod. Phys. A* Vol. **31**. Núm. 32 (2016). arXiv: [1606.07406](https://arxiv.org/abs/1606.07406) [[hep-th](#)].
- [48] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Ed. por A. Jeffrey y D. Zwillinger. 7th. Academic Press/Elsevier, 2007.
- [49] W. Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, 1962.
- [50] J. A. Austrich-Olivares, A. Garcia-Chung y J. D. Vergara. “Instanton solutions on the polymer harmonic oscillator”. *Class. Quant. Grav.* Vol. **34**. Núm. 11 (2017). arXiv: [1604.07288](https://arxiv.org/abs/1604.07288) [[hep-th](#)].
- [51] A. Einstein. “Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity”. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* Vol. **1917** (1917), págs. 142-152. URL: <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/433>.
- [52] D. Saadeh *et al.* “How isotropic is the Universe?” *Phys. Rev. Lett.* Vol. **117**. Núm. 13 (2016). arXiv: [1605.07178](https://arxiv.org/abs/1605.07178) [[astro-ph.CO](#)].
- [53] J. Plebanski y A. Krasinski. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [54] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [55] W. Rindler. *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.
- [56] D. Lawden. *An Introduction to Tensor Calculus: Relativity and Cosmology*. 3rd. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 2012.
- [57] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.
- [58] D. M. Gitman e I. V. Tyutin. *Quantization of Fields with Constraints*. 1st. Springer Series in Nuclear and Particle Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [59] A. Ashtekar, M. Campiglia y A. Henderson. “Path Integrals and the WKB approximation in Loop Quantum Cosmology”. *Phys. Rev. D* Vol. **82**. Núm. 12 (2010). arXiv: [1011.1024](https://arxiv.org/abs/1011.1024) [[gr-qc](#)].

- [60] E. Hubble. "A Relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". *Proc. Natl. Acad. Sci.* Vol. **15**. Núm. 3 (1929), págs. 168-173. URL: <http://www.pnas.org/content/15/3/168>.
- [61] I. Agullo y P. Singh. "Loop Quantum Cosmology". *Loop Quantum Gravity: The First 30 Years*. Ed. por A. Ashtekar y J. Pullin. World Scientific, 2017. Cap. 6, págs. 183-240. arXiv: [1612.01236](https://arxiv.org/abs/1612.01236) [gr-qc].
- [62] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland personal library. North-Holland, 1982.
- [63] S. Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [64] V. Vázquez-Báez y C. Ramírez. "Quantum cosmology of quadratic $f(R)$ theories with a FRW metric". *Adv. Math. Phys.* Vol. **2017** (2017). arXiv: [1706.04288](https://arxiv.org/abs/1706.04288) [gr-qc].
- [65] A. Einstein. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". *Annalen Phys.* Vol. **49**. Núm. 7 (1916), págs. 769-822. URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.200590044/abstract>.
- [66] L. Landau y E. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Course of theoretical physics. Butterworth-Heinemann, 1975.
- [67] H. Weyl. "Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie". *Ann. Phys.* Vol. **364**. Núm. 10 (1919), págs. 101-133. URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19193641002/abstract>.
- [68] A. S. Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 1923.
- [69] R. Utiyama y B. S. DeWitt. "Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields". *J. Math. Phys.* Vol. **3**. Núm. 4 (1962), págs. 608-618. URL: <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1724264>.
- [70] H. A. Buchdahl. "Non-linear Lagrangians and cosmological theory". *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* Vol. **150**. Núm. 1 (1970), págs. 1-8. URL: <https://academic.oup.com/mnras/article/150/1/1/2602890>.
- [71] A. A. Starobinsky. "A new type of isotropic cosmological models without singularity". *Phys. Lett. B* Vol. **91**. Núm. 1 (1980), págs. 99-102. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1980PhLB...91...99S>.
- [72] S. Capozziello y M. Francaviglia. "Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications". *Gen. Rel. Grav.* Vol. **40**. Núm. 2-3 (2008), págs. 357-420. arXiv: [0706.1146](https://arxiv.org/abs/0706.1146) [astro-ph].
- [73] X. Zhang e Y. Ma. "Loop quantum $f(R)$ theories". *Phys. Rev. D* Vol. **84**. Núm. 6 (2011). arXiv: [1107.4921](https://arxiv.org/abs/1107.4921) [gr-qc].
- [74] J. Amorós, J. de Haro y S. D. Odintsov. " $R + \alpha R^2$ Loop Quantum Cosmology". *Phys. Rev. D* Vol. **89**. Núm. 10 (2014). arXiv: [1402.3071](https://arxiv.org/abs/1402.3071) [gr-qc].
- [75] J. O' Hanlon. "Intermediate-range gravity: a generally covariant model". *Phys. Rev. Lett.* Vol. **29**. Núm. 2 (1972), págs. 137-138. URL: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.29.137>.
- [76] M. Domagala *et al.* "Gravity quantized: Loop Quantum Gravity with a Scalar Field". *Phys. Rev. D* Vol. **82**. Núm. 10 (2010). arXiv: [1009.2445](https://arxiv.org/abs/1009.2445) [gr-qc].