UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ESFERA CUÁNTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

GUSTAVO AMILCAR SALDAÑA MONCADA

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. MICO DJURDJEVIC

CIUDAD DE MÉXICO, 2018

1. Datos del Alumno	1. Datos del Alumno
Apellido paterno	Saldaña
Apellido materno	Moncada
Nombre(s)	Gustavo Amilcar
Teléfono	26523538
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	306236064
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Mico
Apellido paterno	Djurdjevic
Apellido materno	
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Pierre Michel
Apellido paterno	Bayard
Apellido materno	
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan Manuel
Apellido paterno	García
Apellido materno	Islas
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ricardo
Apellido paterno	Berlanga
Apellido materno	Zubiaga
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dr.
Nombre(s)	Javier Fernando
Apellido paterno	Rosenblueth
Apellido materno	Laguette
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	La Esfera Cuántica
Número de páginas	79
Año	2018

Agradecimientos

Quisiera dar las gracias a todos los que hicieron posible esta tesis. A Ana, mis amigos y profesores de la licenciatura; a mi asesor, el Dr. Micho Durdevich por colaborar conmigo y por el apoyo que ha brindado y a mis sinodales por haberme prestado su tiempo y ofrecerme sus comentarios.

También quisiera agradecer a toda mi familia: mis hermanos y mis sobrinos por su apoyo incondicional en todo momento.

Finalmente, quisiera agradecer a mi papá y especialmente a mi mamá por todo su apoyo.

GRACIAS

Resumen

El surgimiento de la Mecánica Cuántica y la existencia de una equivalencia categórica entre C^*-álgebras conmutativas con unidad y espacios topológicos Hausdorff y compactos son el punto de partida para la creación de la Geometría No-Conmutativa o Geometría Cuántica. En esta área de las matemáticas se estudian los equivalentes algebraicos de conceptos topológicos y geométricos (que resultan ser parte del Álgebra Conmutativa) para luego trasladarlos al Álgebra No-Conmutativa y desarrollarlos.

El propósito de este trabajo de tesis es mostrar los conceptos necesarios para el entendimiento de la Geometría No-Conmutativa y aplicarlo en un caso especial, *la esfera cuántica*. En particular, se mostrará lo que parece la manera más natural de generalizar el Cálculo Diferencial en el marco de la Geometría No-Conmutativa. En este texto se entenderá por *esfera cuántica* a las matrices de 2×2 con coeficientes complejos y durante el desarrollo del mismo se darán justificaciones del por qué llamar *esfera cuántica* a este espacio.

Índice general

Capítulo 1

Preámbulo

Con el nacimiento de la Mecánica Cuántica durante el primer cuarto del siglo XX se cambió la metodología con la que se estudiaba a la naturaleza [7]. Uno de estos cambios es usar operadores sobre un espacio de Hilbert que representen magnitudes observables. Algunos de estos operadores satisfacen ciertas relaciones de conmutación. Por ejemplo, si $\hat{q}$ es el operador de posición y $\hat{p}$ es el operador de momento en la dirección q, entonces se cumple [7]

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar\,\mathrm{Id},$$

donde Id es el operador identidad. Esto sugirió el estudio de álgebras no-conmutativas, lo cual dio origen a una nueva área de las matemáticas llamada Geometría No-Conmutativa o Geometría Cuántica [5], [31]. Hoy en día, al álgebra libre generada por un conjunto de dos letras $\{x, y\}$ módulo el ideal generado por la relación[1]

$$xy - xy = q\wedge$$

donde $q \in \mathbb{C}$ y $\wedge$ es la palabra vacía, se le conoce como *el plano cuántico* y es quizá, el primer ejemplo de un espacio cuántico.

Posteriormente en 1943, I. M. Gelfand y M. A. Naimark establecieron un teorema (conocido como el teorema de Gelfand-Naimark) que muestra una equivalencia entre la categoría de C^*-álgebras conmutativas con unidad y la categoría de espacios topológicos Hausdorff y compactos [2], [27], [35]. Al estudiar el equivalente algebraico de otras propiedades topológicas y geométricas se observó que todas están en el campo del Álgebra Conmutativa. Lo anterior sugirió una manera natural de generalizar dichos conceptos simplemente usando álgebras no-conmutativas, lo cual termino por estructurar a la Geometría No-Conmutativa. Este marco teórico presenta una combinación de la Geometría Diferencial, el Álgebra No-Conmutativa y el Análisis Funcional. Cuando sea conveniente, se usará el término **no-conmutativo** y el término **cuántico** como sinónimos. Asimismo, se usará el termino *clásico* para referirse a la Geometría y la Topología habitual.

[1]En la literatura es común encontrar la definición del plano cuántico como el álgebra libre generada por dos letras modulo el ideal dado por la relación $xy = qyx$ con $q \in \mathbb{C}$ [31].

Vale la pena mencionar el trabajo de E. Prugovečki [23]; quien considera a la geometría cuántica como cuantización usando métodos geometro-estocásticos; que es asociar un haz de Hilbert a un haz principal.

Una aplicación realmente interesante y prometedora de la Geometría No-Conmutativa es, como su origen sugiere, en la física, específicamente en la física más allá del Modelo Estándar pues se cree que tiene el potencial de resolver el problema de unificación de las interacciones fundamentales así como describir el espacio-tiempo a la escala de la longitud de Planck. Esto muestra una de las tantas razones por las cuales estudiar esta (relativamente) nueva y prometedora área de las matemáticas.

El propósito de este trabajo de tesis es mostrar la generalización de los conceptos clásicos de *espacio*, *punto*, *simetría*, *medida de probabilidad*, *campo vectorial*, *haz vectorial* y *formas diferenciales* al ámbito cuántico. Además, se dará un ejemplo detallado de esta generalización sobre un espacio en particular, **la esfera cuántica**. En este texto se entenderá por *esfera cuántica* al espacio de matrices de 2×2 con coeficientes sobre $\mathbb{C}$ con su estructura de C^*-álgebra dada por la norma-operador. Para este fin se empezará haciendo una revisión de los conceptos básicos de C^*-álgebras con unidad llegando a la demostración del teorema de Gelfand-Naimark (Capítulo 2), ya que esto es la base de la Geometría No-Conmutativa. Acto seguido se presentará una manera de generalizar los conceptos antes mencionados al ámbito cuántico (Capítulo 3). Finalmente, se definirá a la *esfera cuántica* y se mostrarán dichos conceptos sobre este espacio (Capítulo 4). El apéndice A proporciona un estudio general de la teoría de elementos positivos en C^*-álgebras con unidad (útil e importante para el desarrollo de la teoría). Mientras que el apéndice B está basado en mostrar la notación de Dirac ya que como se verá en las secciones 4.3 y 4.4, ésta es más amena.

Cabe mencionar que en la literatura existen varios espacios que reciben el nombre de *esfera cuántica* [6], por ejemplo, en 1987 Podles dio una de las definiciones más aceptadas [22]. Durante el desarrollo de este trabajo se justificará el por qué llamar *esfera cuántica* a las matrices de 2×2 con coeficientes sobre $\mathbb{C}$ con su estructura de C^*-álgebra dada por la norma-operador.

A grosso modo, se dice que un espacio es cuántico si es no-conmutativo. Como se verá a lo largo de este texto, esto se traduce en ciertos *fenómenos cuánticos* como *no tener puntos*.

Uno de los problemas de la Geometría No-Conmutativa es que un concepto clásico puede tener varias formas de ser generalizado al caso cuántico. Por ejemplo, se observará en el Capítulo 3 que el concepto de punto se puede generalizar como caracteres o como ideales bilaterales maximales o como estados puros y la teoría cambia dependiendo de la generalización que se usa (en el caso concreto de la esfera cuántica, se verá en el Capítulo 4 que ésta no tiene puntos si se piensa a los puntos como caracteres o como ideales bilaterales maximales y tiene puntos parametrizados por la esfera clásica si se piensa a los puntos como estados puros). Otro ejemplo de este problema es la Geometría Diferencial. En particular, este trabajo se centrará en lo que parece la manera más natural de generalizar el Cálculo Diferencial en el marco de la Geometría No-Conmutativa.

Se dará por hecho que el lector tiene conocimientos básicos de Álgebra Lineal y Moderna [15], [26], Análisis Matemático y Funcional [27], [28], Topología General [20] y Geometría Diferencial [8], [17], [18]. Además, siempre se estará considerando que los productos interiores de los espacios vectoriales utilizados son lineal-conjugados en la primera coordenada y lineales en la segunda coordenada. Dado que durante todo el trabajo se usará la notación de Dirac, los productos interiores se denotarán por $\langle - | - \rangle$, en vez de las notaciones usuales $\langle -, - \rangle$ o $(-, -)$.

Capítulo 2

C*-álgebras

Las C^*-álgebras son los espacios en los cuales se realiza la Geometría No-Conmutativa, como se verá en el próximo capítulo. Es por esa razón que es indispensable empezar este trabajo dando una visión general de este concepto. Si el lector requiere más detalles, se pueden consultar las siguientes referencias [2], [3], [4], [21], [24], [25], [35] y [36].

2.1. Álgebras de Banach

El concepto de álgebra asociativa es uno de los más importantes en el estudio de estructuras algebraicas. La siguiente definición trata sobre este concepto. Aunque no es la forma más general de definir un álgebra asociativa [26], esta definición es suficiente para los propósitos de este trabajo.

Definición 2.1.1. *(Álgebra asociativa) Sea A un $\mathbb{K}$-espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Decimos que A es un álgebra asociativa si está dotada de un producto de vectores que satisface para toda a, b, $c \in A$ y para toda $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. *Asociatividad:* $(ab)c = a(bc)$.
2. *Distributividad izquierda:* $a(b + c) = ab + ac$.
3. *Distributividad derecha:* $(a + b)c = ac + bc$.
4. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Si la multiplicación es conmutativa, se dice que el álgebra es conmutativa.

Los polinomios con coeficientes en un anillo son ejemplos sencillos de álgebras asociativas. En este texto, siempre se usarán álgebras asociativas por lo cual se omitirá la palabra *asociativa* al hacer referencia a un álgebra asociativa.

Definición 2.1.2. *(Álgebra con unidad) Un álgebra con unidad (o unital) es una dupla* $(A, \mathbb{1})$*, donde* A *es un álgebra y* $\mathbb{1}$ *es un elemento de* A *tal que* $a\mathbb{1} = \mathbb{1}a = a$ *para todo* $a \in A$*. Al elemento* $\mathbb{1}$ *se le suele denominar como* el 1 del álgebra*.*

Es fácil probar que en toda álgebra con unidad el elemento $\mathbb{1}$ es único. Además, salvo que se especifique lo contrario, siempre se supondrá que el espacio es no-nulo y el producto de vectores no es el trivial, por lo que $\mathbb{1} \neq 0$.

Definición 2.1.3. *(Morfismo de álgebras) Sean* A*,* B *dos álgebras (sobre el mismo campo* $\mathbb{K}$*). Un morfismo de álgebras entre* A *y* B *es una transformación*

$$f : A \longrightarrow B$$

tal que

1. f *es lineal;*

2. f *es multiplicativa.*

Si $(A, \mathbb{1}_A)$ *y* $(B, \mathbb{1}_B)$ *son dos álgebras con unidad y* f *es un morfismo de álgebras entre* A *y* B*, entonces decimos que* f *es un morfismo unital o unitario si además satisface* $f(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_B$*.*

A partir de este momento y hasta el final de este trabajo, solo se considerarán álgebras con unidad.

2.1.1. Álgebras de Banach con unidad

Definición 2.1.4. *(Álgebra de Banach con unidad). Sea* $(A, \mathbb{1})$ *un álgebra con unidad. Se dice que* A *es un álgebra de Banach con unidad si existe* $|| \; ||$ *una norma en* A *tal que* $(A, || \; ||)$ *es un espacio de Banach y además se satisface*

$$||ab|| \leq ||a|| \, ||b||.$$

para toda $a, b \in A$*. Se denotará a un álgebra de Banach con unidad mediante el triplete* $(A, \mathbb{1}, || \; ||)$*.*

Proposición 2.1.5. Sea $(A, \mathbb{1}, || \; ||)$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces todas las operaciones algebraicas en A son continuas.

Demostración. Nótese que

$$||xy - ab|| \leq ||xy - xb|| + ||xb - ab|| \leq ||x|| \, ||y - b|| + ||x - a|| \, ||b||,$$

de donde es fácil concluir que la multiplicación $A \times A \longrightarrow A$ es una transformación continua. La prueba de que la suma y la multiplicación por escalar son operaciones continuas se sigue de las propiedades de la norma. ∎

El ejemplo más fácil de un álgebra de Banach con unidad es $(\mathbb{K}, 1, | \; |)$. Otro ejemplo es

Ejemplo 2.1.6. Sea (X, τ) en espacio topológico Hausdorff y compacto. Considérese

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es continua}\}$$

Es claro que con la suma, la multiplicación por escalares, la multiplicación estándar (como X es Hausdorff y compacto, la imagen de cada $f \in C(X)$ está acotada [20], por lo que estas operaciones están bien definidas) y $\mathbb{1} = 1(x)$, $(C(X), 1(x))$ es un álgebra conmutativa con unidad sobre $\mathbb{K}$. Más aún, con la norma definida como

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X}\{\, |f(x)|\,\},$$

$(C(X), 1(x), ||\ ||_\infty)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad [27].

Proposición 2.1.7. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||)$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces existe una norma $||\ ||_1$ en A equivalente a $||\ ||$ tal que $(A, \mathbb{1}, ||\ ||_1)$ es también un álgebra de Banach con unidad y $||\mathbb{1}||_1 = 1$.

Demostración. Considérese

$$\begin{aligned} L : A &\longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A) \\ a &\longmapsto L_a, \end{aligned}$$

donde L_a es el operador lineal dado por

$$\begin{aligned} L_a : A &\longrightarrow A \\ b &\longmapsto ab. \end{aligned}$$

Se puede observar que L es una transformación lineal y si $L_a = L_{a'}$, entonces $a = a\mathbb{1} = L_a(\mathbb{1}) = L_{a'}(\mathbb{1}) = a'\mathbb{1} = a'$, por lo cual L es inyectiva. Además si se considera la norma-operador en $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(A)$ [27],

$$||T||_{\text{op}} = \sup_{||a||=1} \{\, ||T(a)||\,\},$$

se tiene L_a es un operador acotado para cada $a \in A$ ya que $||L_a(b)|| \leq ||a||\,||b||$ para toda a, $b \in A$. Defínase

$$\begin{aligned} ||\ ||_1 : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto ||L_a||_{\text{op}}. \end{aligned}$$

Por construcción $||\ ||_1$ es una norma en A que satisface $||a||_1 \leq ||a||$ para toda $a \in A$. Más aún, si $b = \dfrac{\mathbb{1}}{||\mathbb{1}||}$, entonces

$$\frac{||a||}{||\mathbb{1}||} = ||ab|| \leq \sup_{||b||=1} \{\, ||ab||\,\} = \sup_{||b||=1} \{\, ||L_a(b)||\,\} = ||L_a||_{\text{op}} = ||a||_1,$$

de donde se sigue que $\dfrac{||a||}{||\mathbb{1}||} \leq ||a||_1 \leq ||a||$ y por lo tanto, $|| \ ||_1$ y $|| \ ||$ son normas equivalentes en A.

Por otro lado la norma-operador satisface $||T_1T_2||_{\text{op}} \leq ||T_1||_{\text{op}} \, ||T_2||_{\text{op}}$ [27] y así

$$||ab||_1 = ||L_{ab}||_{\text{op}} = ||L_aL_b||_{\text{op}} \leq ||L_a||_{\text{op}} \, ||L_b||_{\text{op}} = ||a||_1||b||_1;$$

por lo cual $(A, \mathbb{1}, || \ ||_1)$ es también un álgebra de Banach con unidad que satisface $||\mathbb{1}||_1 = ||L_{\mathbb{1}}|| = 1$. ■

Observación. Por la proposición anterior, dada $(A, \mathbb{1}, || \ ||)$ un álgebra de Banach con unidad, sin perdida de generalidad siempre se asumirá que $||\mathbb{1}|| = 1$.

Definición 2.1.8. *(Morfismo unitario de álgebras de Banach) Sean $(A, \mathbb{1}_A, || \ ||_A)$, $(B, \mathbb{1}_B, || \ ||_B)$ dos álgebras de Banach con unidad. Un morfismo unitario de álgebras de Banach entre $(A, \mathbb{1}_A, || \ ||_A)$ y $(B, \mathbb{1}_B, || \ ||_B)$ es un morfismo de álgebras unitario f que además es continuo.*

Un resultado común en cualquier libro de análisis funcional es el hecho de que una transformación entre espacios de Banach es lineal y continua si y solo si es lineal y acotada [27], por lo cual, todos los morfismos entre álgebras de Banach también son acotados.

Observación. Claramente, las álgebras (con unidad) con sus morfismos (unitarios) y las álgebras de Banach con unidad con sus morfismos forman categorías pequeñas, las cuales se denotarán por $\text{Alg}_{\mathbb{K}}$ ($\text{Alg}\mathbb{1}_{\mathbb{K}}$) y $\text{BanAlg}\mathbb{1}_{\mathbb{K}}$, respectivamente.

En la siguiente sección se definirá la categoría C^*-álgebras. Para ello, es necesario estudiar algunos conceptos básicos en la teoría de álgebras de Banach.

Lema 2.1.9. *Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||)$ un álgebra de Banach con unidad. Si $a \in A$ es tal que $||a|| < 1$, entonces $\mathbb{1} - a$ es un elemento invertible de A.*

Demostración. Considérese $S_n = \mathbb{1} + a + a^2 + \cdots + a^n$. Como $||a|| < 1$, S_n es una serie absolutamente convergente, por lo cual la sucesión $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a^k$. Además

$$(\mathbb{1} - a)S_n = S_n(\mathbb{1} - a) = \mathbb{1} - a^{n+1}$$

y como $\{a^n\}_{k=0}^{\infty}$ converge a 0 (ya que $||a|| < 1$), tomando el límite en ambos lados de la expresión anterior se tiene que

$$(\mathbb{1} - a)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right)(\mathbb{1} - a) = \mathbb{1},$$

i.e., $\mathbb{1} - a$ es un elmento invertible de A [36]. ■

Bajo una notación más estándar, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (\mathbb{1} - a)^{-1}$.

Proposición 2.1.10. Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||)$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces el conjunto $\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A \mid a \text{ es invertible}\}$ es abierto en A.

Demostración. Sea $a \in A$. Entonces para toda $b \in A$, $a - b = a(\mathbb{1} - a^{-1}b)$. Para alguna b que cumpla $||b|| \leq ||a^{-1}||^{-1}$, se obtiene $||a^{-1}b|| < 1$ y por el lema anterior se concluye que $\mathbb{1} - a^{-1}b \in \mathrm{Inv}(A)$ y como la multiplicación de elementos invertibles es otra vez un elemento invertible, se sigue que $a - b \in \mathrm{Inv}(A)$. Así, se ha mostrado que la bola con centro en a de radio $||a^{-1}||^{-1}$ está completamente contenida en $\mathrm{Inv}(A)$ y por lo tanto, $\mathrm{Inv}(A)$ es un abierto en A [27]. ■

Definición 2.1.11. *(El resolvente y el espectro de un elemento) Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||_A)$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in A$. Se define el resolvente de a como*

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda\mathbb{1} - a \in \mathrm{Inv}(A)\}.$$

Se define el espectro de a como

$$\sigma(a) := \mathbb{K} - \rho(a).$$

Definición 2.1.12. *(El radio espectral de un elemento) Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||)$ un álgebra de Banach con unidad. Dado $a \in A$, el radio espectral de a se define como*

$$r(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}.$$

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de álgebras de Banach pues da una caracterización del radio espectral en términos de la norma.

Teorema 2.1.13. *Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||)$ un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ con unidad y $a \in A$. Entonces*

1. *$\sigma(a)$ es no-vacío y compacto.*
2. *$r(a) = \lim\limits_{k \to \infty} ||a^k||^{\frac{1}{k}} = \inf\limits_{k \geq 1} ||a^k||^{\frac{1}{k}}$.*

Demostración. 1. Defínase

$$\begin{aligned} f : \rho(a) &\longrightarrow \mathrm{Inv}(A) \\ \lambda &\longmapsto (\lambda\mathbb{1} - a)^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces f es holomorfa en $\rho(a)$. En efecto, tomando h tal que $||f(\lambda)h|| < 1$ se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\lambda + h) - f(\lambda)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left((\lambda\mathbb{1} - a + h\mathbb{1})^{-1} - (\lambda\mathbb{1} - a)^{-1}\right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left((\mathbb{1} + f(\lambda)h)^{-1} - \mathbb{1}\right) f(\lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-f(\lambda)h)^k\right) f(\lambda)\right) = -f(\lambda)^2.$$

Lo anterior muestra que f es una transformación holomorfa. De esta manera, si $\rho(a) = \mathbb{C}$, entonces f sería acotada ya que si $2||a|| \leq |\lambda|$,

$$||f(\lambda)|| \leq \frac{1}{||\lambda\mathbb{1} - a||} \leq \frac{1}{|\lambda| - ||a||} \leq \frac{1}{||a||}.$$

Por el teorema de Liouville, f sería constante lo cual es una contradicción. Lo anterior implica que $\rho(a) \neq \mathbb{C}$ y por lo tanto, $\sigma(a)$ es no-vacío.

Por otro lado, considérese $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $||a|| < |\lambda|$. Entonces $||\lambda^{-1}a|| < 1$ y por el Lema 2.1.9 se tiene que $\lambda(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a) = \lambda\mathbb{1} - a \in \mathrm{Inv}(A)$, i.e., $\lambda \notin \sigma(a)$. Lo anterior implica que $\sigma(a)$ está acotado. Más aún, $r(a) \leq ||a||$. Además, si se define

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto \lambda\mathbb{1} - a, \end{aligned}$$

entonces g es continua y así $\rho(a) = g^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ es abierto (pues $\mathrm{Inv}(A)$ es abierto por la Proposición 2.1.10); de donde se sigue que $\sigma(a)$ es cerrado. De esta manera, hemos probado que $\sigma(a)$ es acotado y cerrado y al ser un subconjunto de $\mathbb{C}$, se obtiene que $\sigma(a)$ es compacto.

2. Nótese que si $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $||a|| < |\lambda|$ se obtiene

$$f(\lambda) = (\lambda\mathbb{1} - a)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{1} - \frac{a}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^k .$$

La convergencia de la serie anterior es uniforme en círculos Γ_r^1 centrados en el origen de radio $r > ||a||$ y debido a que $\displaystyle\int_{\Gamma_r^1} \lambda^k d\lambda$ es $2\pi i$ si k es -1 y 0 en otro caso, se tiene [36]

$$a^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^1} \lambda^k f(\lambda)\, d\lambda \qquad k = 0,\, 1,\, 2\cdots$$

Como $r(a) < |\lambda|$ implica que $\lambda \in \rho(a)$, se tiene que si r, $r' > r(a)$, entonces Γ_r^1 y $\Gamma_{r'}^1$ son círculos homotópicos en $\rho(a)$ y así, la ecuación anterior se satisface para toda $r > r(a)$.

Sea $M(r) = \max\limits_{\lambda \in \Gamma_r^1} ||f(\lambda)||$. Por la ecuación anterior, $||a^n|| \leq r^{n+1}M(r)$ para $r > r(a)$. De esta manera se obtiene

$$\limsup_k ||a^k||^{\frac{1}{k}} \leq r,$$

de donde se sigue

$$\limsup_k ||a^k||^{\frac{1}{k}} \leq r(a).$$

Tomando $\lambda \in \sigma(a)$,

$$\begin{aligned} (\lambda^k\mathbb{1} - a^k) = &\quad (\lambda\mathbb{1} - a)(\lambda^{k-1}\mathbb{1} + \lambda^{k-2}a + \cdots + a^{k-1}) \\ = &\quad (\lambda^{k-1}\mathbb{1} + \lambda^{k-2}a + \cdots + a^{k-1})(\lambda\mathbb{1} - a), \end{aligned}$$

por lo cual $\lambda^k \in \sigma(a^k)$, de lo contrario $(\lambda^{k-1}\mathbb{1} + \cdots + a^{k-1})(\lambda^k\mathbb{1} - a^k)^{-1}$ sería el inverso de $(\lambda\mathbb{1} - a)$. De esta forma, si $\lambda \in \sigma(a)$ se tiene que $|\lambda^k| \leq r(a^k) \leq ||a^k||$. En particular, $|\lambda| \leq ||a^k||^{\frac{1}{k}}$. Lo anterior implica $r(a) \leq \inf\limits_{k\geq 1} ||a^k||^{\frac{1}{k}}$ y se deduce que

$$\limsup_k ||a^k||^{\frac{1}{k}} \leq r(a) \leq \inf_{k\geq 1} ||a^k||^{\frac{1}{k}} \leq \liminf_k ||a^k||^{\frac{1}{k}}.$$

Por lo tanto $r(a) = \lim\limits_{k\to\infty} ||a^k||^{\frac{1}{k}} = \inf\limits_{k\geq 1} ||a^k||^{\frac{1}{k}}$ [36].

■

Corolario 2.1.13.1. *Para toda $a \in A$, $r(a) \leq ||a||$.*

Teorema 2.1.14. *(de Gelfand-Mazur) Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||)$ un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$ con unidad. Si todo elemento no-nulo de A es invertible, entonces $(A, \mathbb{1}, ||\ ||)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{C}, 1, |\ |)$*

Demostración. En este caso se tiene que $\mathrm{Inv}(A) = A - \{0\}$. Además, el teorema anterior asegura que $\sigma(a) \neq \emptyset$ para toda $a \in A$. De está forma se tiene que para cada $a \in A$,

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathbb{1} - a = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathbb{1} = a\} = \{\lambda_a\},$$

para una única $\lambda_a \in \mathbb{C}$ que satisface $\lambda_a\mathbb{1} = a$. Lo anterior muestra que $A = \{\lambda\mathbb{1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}\mathbb{1}$ y el teorema se sigue. ■

Proposición 2.1.15. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||)$ un álgebra de Banach conmutativa sobre $\mathbb{C}$ con unidad. Si I es un ideal maximal de A, entonces I es cerrado.

Demostración. Debido a que un punto x es punto límite de un conjunto si y solo si existe una sucesión del conjunto que converge a x, se sigue que $\bar{I}$ es un ideal. Supóngase que existe $a \in \bar{I}$ invertible. Como I no contiene elementos invertibles, entonces a es un punto límite de I. Dado que $\mathrm{Inv}(A)$ es un abierto (véase Proposición 2.1.10), existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subseteq \mathrm{Inv}(A)$ y como a es punto límite de A, existe $b \neq a$ con $b \in B_\epsilon(a)$ tal que $b \in I$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior $\bar{I}$ no contiene elementos invertibles y se tiene que $\bar{I}$ es un ideal propio. Como I es maximal, se concluye $I = \bar{I}$ [27]. ■

Como corolario del teorema de Gelfand-Mazur y de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.15.1. *Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||)$ un álgebra de Banach conmutativa sobre $\mathbb{C}$ con unidad. Si I es un ideal maximal en A, entonces $(\frac{A}{I}, [\mathbb{1}], ||\ ||_I)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{C}, 1, |\ |)$, donde*

$$\begin{aligned} ||\ ||_I : \frac{A}{I} &\longrightarrow [0, \infty) \\ [a] &\longmapsto \inf_{b\in I}\{||a + b||\}. \end{aligned}$$

Demostración. Dado que I es cerrado (por la proposición anterior), es fácil probar que $(\frac{A}{I}, [\mathbb{1}], || \, ||_I)$ es un álgebra de Banach con unidad [27]. Dada $0 \neq [a] \in \frac{A}{I}$, debido a que I es un ideal maximal $A = \langle a \rangle + I$ y se sigue que existe $b \in A$ tal que $ba + I = \mathbb{1}$, por lo cual $[a]$ es invertible. Así, por el Teorema de Gelfand-Mazur, $(\frac{A}{I}, [\mathbb{1}], || \, ||_I)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{C}, 1, | \, |)$. ■

Ahora se proseguirá a enunciar el teorema de Banach-Alaoglu. Se puede encontrar una prueba de este teorema en [27]. Como se verá más adelante, este teorema es de gran utilidad aunque primero se necesita la siguiente definición.

Definición 2.1.16. *(Topología $*$-débil) Sea (A, τ) un espacio vectorial topológico sobre los complejos. Se define la topología $*$-débil (que se denotará por $\tau_{*-\text{débil}}$) sobre el espacio dual A^* (las formas lineales y continuas de A) como la topología más gruesa que hace continuas a todas las funciones de la forma*

$$\begin{aligned} T_a : A^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto \phi(a), \end{aligned}$$

Teorema 2.1.17. *(de Banach-Alaoglu). Sea (A, τ) un espacio vectorial topológico sobre los complejos. Entonces la bola unitaria cerrada $\mathbb{S}_A$ en A^* es compacta con respecto a $\tau_{*-\text{débil}}$.*

2.1.2. El Espectro del Álgebra

Un *espectro* es un *espacio geométrico* que se construye de alguna otra propiedad que a primera vista no tiene una obvia interpretación geométrica. Por ejemplo en la geometría algebraica existe el espectro de Grothendieck (los ideales primos de un anillo conmutativo) [29]. A continuación se definirá el espectro de un álgebra de Banach.

Definición 2.1.18. *(Caracter y el espectro de A) Sea $(A, \mathbb{1}, || \, ||)$ un álgebra de Banach con unidad sobre $\mathbb{C}$. Un caracter de A es un funcional*

$$\kappa : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

que es lineal, multiplicativo y no-cero. Se define el espectro de A como

$$\Omega(A) := \{\kappa : A \longrightarrow \mathbb{C} \mid \kappa \text{ es un caracter}\}.$$

El siguiente teorema muestra una caracterización de los caracteres de un álgebra de Banach con unidad.

Teorema 2.1.19. *Sea $(A, \mathbb{1}, || \, ||)$ un álgebra de Banach con unidad sobre $\mathbb{C}$ y supóngase que existe $\kappa \in \Omega(A)$. Entonces*

1. *$\kappa(\mathbb{1}) = 1$ y para todo $a \in A$ invertible, $\kappa(a) \neq 0$.*

2. $\sup\limits_{||a||=1} \{|\kappa(a)|\} = 1.$

3. *κ es un morfismo de álgebras de Banach con unidad (véase Definición 2.1.8).*

4. *Si el álgebra es conmutativa, entonces $\Omega(A) \neq \emptyset$ y la transformación*

$$\kappa \longmapsto \mathrm{Ker}(\kappa)$$

es una biyección entre $\Omega(A)$ e $\mathrm{Ideal}(A)$, el espacio de todos los ideales maximales de A.

Demostración. 1. Como $\kappa(\mathbb{1}) = \kappa(\mathbb{1}^2) = \kappa(\mathbb{1})\kappa(\mathbb{1})$, se sigue que $\kappa(\mathbb{1}) \in \{0,1\}$. Si $\kappa(\mathbb{1}) = 0$, entonces para toda $a \in A$ se tiene que $\kappa(a) = \kappa(\mathbb{1}a) = \kappa(\mathbb{1})\kappa(a) = 0$, que implicaría $\kappa \equiv 0$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $\kappa(\mathbb{1}) = 1$.

Por otro lado, si a es un elemento invertible de A, se tiene que

$$1 = \kappa(\mathbb{1}) = \kappa(aa^{-1}) = \kappa(a)\kappa(a^{-1}),$$

por lo cual $\kappa(a^{-1}) = \kappa(a)^{-1}$ y $\kappa(a) \neq 0$.

2. Sea $a \in A$ tal que $||a|| = 1$. Dada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$, por el Lema 2.1.9, se sabe que $\mathbb{1} - \lambda^{-1}a$ es invertible y por la parte 1 de este teorema se sigue que

$$1 - \lambda^{-1}\kappa(a) = \kappa(\mathbb{1} - \lambda^{-1}a) \neq 0,$$

por lo cual $\kappa(a) \neq \lambda$. Si $|\kappa(a)| > |\lambda|$, entonces $\mathbb{1} - \kappa(a)^{-1}a$ es invertible y por lo anterior se obtendría que $\kappa(a) \neq \kappa(a)$, que es una clara contradicción. De esta manera se tiene que $|\kappa(a)| \leq |\lambda|$, para toda $\lambda \in \mathbb{C}$ que cumpla $|\lambda| > 1$ y debido a que $||\kappa(\mathbb{1})|| = ||1|| = 1$,

$$\sup_{||a||=1} \{|\kappa(a)|\} = 1.$$

3. Se sigue de la definición de caracter, de la parte 1 y 2 de este teorema y del hecho de que toda transformación entre espacios de Banach que es lineal y acotada es continua (y viceversa) [27].

4. Si A es simple, entonces todo elemento no-nulo debe ser invertible y por el teorema de Gelfand-Mazur (véase Teorema 2.1.14) A es isomorfo a $\mathbb{C}$, por lo cual sí existen caracteres. Si A no es simple, dado I un ideal propio de A, como A es conmutativo y tiene unidad, usando el lema de Zorn es fácil probar que exite un ideal maximal que contiene a I. Usando el Corolario 2.1.13.1 y por el caso anterior, existe un caracter.

Por otra parte, sea $\kappa \in \Omega(A)$. Claramente $\mathrm{Ker}(\kappa)$ es un ideal propio de A. Como $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\mathrm{Ker}(\kappa)$ es un subespacio de codimensión 1, por lo que es un ideal maximal. Considérese

$$\begin{aligned} K : \Omega(A) &\longrightarrow \mathrm{Ideal}(A) \\ \kappa &\longmapsto \mathrm{Ker}(\kappa). \end{aligned}$$

Si κ_1, κ_2 son dos elementos de $\Omega(A)$ tales que $\mathrm{Ker}(\kappa_1) = \mathrm{Ker}(\kappa_2)$, entonces por la parte 1 de este teorema, para cada $a \in A$, $a - \kappa_2(a)\mathbb{1} \in \mathrm{Ker}(\kappa_1)$. Esto implica que $\kappa_1(a) = \kappa_2(a)$, por lo que $\kappa_1 = \kappa_2$ y así, K es una transformación inyectiva. Considérese ahora I un ideal maximal de A. Por el Corolario 2.1.15.1, $(\frac{A}{I}, [\mathbb{1}], \|\ \|_I)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathbb{C}, 1, |\ |)$ mediante alguna transformación f. Denotando por

$$\pi : A \longrightarrow \frac{A}{I}$$

a la proyección canónica, se sigue que $\kappa = f \circ \pi$ es un caracter y satisface $\mathrm{Ker}(\kappa) = I$. Así, K es suprayectiva y por lo tanto una biyección.

■

Observación. Nótese que por el teorema anterior, en el caso de álgebras de Banach conmutativas con unidad se puede definir el espectro del álgebra como $\mathrm{Ideal}(A)$.

Teorema 2.1.20. *Sea $(A, \mathbb{1}, \|\ \|)$ un álgebra de Banach con unidad sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\Omega(A)$ es un subespacio Hausdorff y compacto con respecto a $\tau_{*-\text{débil}}$ (véase Definición 2.1.16).*

Demostración. El teorema es trivial si $\Omega(A) = \emptyset$. Si $\Omega(A) \neq \emptyset$, el teorema anterior muestra que $\Omega(A) \subseteq \mathbb{S}_A$, donde $\mathbb{S}_A$ es la bola unitaria cerrada en A^*. Por el teorema de Banach-Alaoglu (véase Teorema 2.1.17), $\mathbb{S}_A$ es compacto y Hausdorff, por lo cual para demostrar el teorema basta ver que $\Omega(A)$ es cerrado con respecto a $\tau_{*-\text{débil}}$. Sea $\{\phi_j\}_{j\in J}$ una red[1] en $\Omega(A)$. Entonces

$$\lim_{j\in J} \phi_j = \phi,$$

para algún $\phi \in \mathbb{S}_A$. Por definición de $\tau_{*-\text{débil}}$,

$$\phi(a) = \lim_{j\in J} \phi_j(a)$$

para toda $a \in A$ y por la proposición 2.1.5 se sigue que ϕ es un caracter, i.e., $\phi \in \Omega(A)$ y por lo tanto, $\Omega(A)$ es cerrado. ■

2.2. C^*-álgebras y la Dualidad de Gelfand-Naimark

El motivo de esta sección es introducir las nociones básicas de la teoría de C^*-álgebras así como demostrar el teorema de Gelfand-Naimark, el cual es fundamental en la Geometría No-Conmutativa, tal y como se verá en este capítulo. Para este fin, se empezará definiendo otro tipo especial de álgebra.

[1]Dado (X, τ) un espacio topológico y un conjunto $J \neq \emptyset$ con un preorden (con una relación reflexiva y transitiva) tal que cualquier subconjunto finito está acotado superiormente, una red es una transformación $f : J \longrightarrow X$. La imagen de $j \in J$ bajo f se suele denotar como x_j y a f se le suele denotar como $\{x_j\}_{j\in J}$. Un subconjunto B de X es cerrado si y solo si toda red en B convergente tiene límite en B.

2.2.1. C^*-álgebras con unidad

Definición 2.2.1. *($*$-Álgebra con unidad) Un $*$-álgebra con unidad es un triplete $(A, \mathbb{1}, *)$, donde $(A, \mathbb{1})$ es un álgebra con unidad sobre $\mathbb{C}$ y $*$ es una involución conjugada-lineal*

$$\begin{aligned} * : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a^* \end{aligned}$$

que satisface $(ab)^* = b^* a^*$ para todo a, $b \in A$.

En un $*$-álgebra con unidad, como $(ab)^* = b^* a^*$, por la unicidad de $\mathbb{1}$ es fácil verificar $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$. El ejemplo más fácil de un $*$-álgebra con unidad es $\mathbb{C}$ con $*$ el complejo conjugado. Otro ejemplo son las matrices cuadradas con coeficientes en $\mathbb{C}$ con $*$ el transpuesto conjugado.

Definición 2.2.2. *($*$-morfismo unitario) Sean $(A, \mathbb{1}_A, *_A)$, $(B, \mathbb{1}_B, *_B)$ dos $*$-álgebras con unidad. Un $*$-morfismo unitario entre $(A, \mathbb{1}_A, *_A)$ y $(B, \mathbb{1}_B, *_B)$ es un morfismo de álgebras unitario f que además satisface $f(a^*) = f(a)^*$.*

Ahora ya es posible dar la definición de C^*-álgebras.

Definición 2.2.3. *(C^*-álgebra con unidad) Un C^*-álgebra con unidad es una cuarteta $(A, \mathbb{1}, || \, ||, *)$, donde $(A, \mathbb{1}, || \, ||)$ es un álgebra de Banach con unidad y $(A, \mathbb{1}, *)$ es un $*$-álgebra con unidad tal que para toda $a \in A$ se satisface*

$$||a^* a|| = ||a||^2.$$

De la definición anterior se puede concluir que $||a|| = ||a^*||$. En efecto, si $a = 0$, entonces $a = a^*$. Supóngase que $a \neq 0$. Por un lado $||a||^2 = ||a^* a|| \leq ||a^*|| \, ||a||$, por lo cual $||a|| \leq ||a^*||$ y por otro lado, como $*$ es una involución $||a^*||^2 = ||a^{**} a^*|| = ||a a^*|| \leq ||a|| \, ||a^*||$, por lo cual $||a^*|| \leq ||a||$ y por lo tanto $||a|| = ||a^*||$. También es fácil ver que la operación $*$ es continua ya que es una isometría.

El primer ejemplo de un C^*-álegbra con unidad es $(\mathbb{C}, 1, | \, |, *)$ con $*$ el complejo conjugado. Otro ejemplo no tan trivial es

Ejemplo 2.2.4. Sea $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert. Considérese

$$B(\mathcal{H}) := \{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \mid \text{ es lineal y continuo}\}.$$

Entonces $(B(\mathcal{H}), id_{\mathcal{H}}, || \, ||_{\mathrm{op}})$ es un álgebra de Banach, donde $|| \, ||_{\mathrm{op}}$ es la norma-operador [27]. Más aún, si se define

$$\begin{aligned} * : B(\mathcal{H}) &\longrightarrow B(\mathcal{H}) \\ T &\longmapsto T^*, \end{aligned}$$

donde T^* es el operador dual se obtiene que $(B(\mathcal{H}), id_{\mathcal{H}}, *)$ es un $*$-álgebra. Por otro lado

$$\begin{aligned}||T||_{\text{op}}^2 = \sup_{||a||=1}\{||T(a)||^2\} = \sup_{||a||=1}\{\langle T(a), T(a)\rangle\} = \sup_{||a||=1}\{\langle a, T^*(T(a))\rangle\}\\ \leq \sup_{||a||=1}\{||a||\,||T^*(T(a))||\} = \sup_{||a||=1}\{||T^*(T(a))||\} = ||T^*T||_{\text{op}}.\end{aligned}$$

En conclusión, $||T||_{\text{op}}^2 = ||T^*T||_{\text{op}}$ y por lo tanto, $(B(\mathcal{H}), \text{id}_{\mathcal{H}}, || \ ||_{\text{op}}, *)$ es un C^*-álgebra con unidad.

Es importante mencionar que el ejemplo anterior es, en general, un álgebra no-conmutativa. El ejemplo 2.2.5 muestra un C^*-álgebra no-conmutativa con unidad y el ejemplo 2.2.6 muestra un C^*-álgebra conmutativa con unidad.

Ejemplo 2.2.5. Si $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y $\langle - | - \rangle$ es el producto interior estándar, entonces $B(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$ y por lo tanto, $(M_n(\mathbb{C}), \text{Id}_n, || \ ||_{\text{op}}, *)$ es un C^*-álgebra no-conmutativa con unidad.

Ejemplo 2.2.6. Sea (X, τ) en espacio topológico Hausdorff y compacto. En el Ejemplo 2.1.6 se observó que $(C(X), 1(x), || \ ||_\infty)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Más aún, si

$$\begin{aligned} * : C(X) &\longrightarrow C(X)\\ f &\longmapsto f^*,\end{aligned}$$

donde $f^* : X \longrightarrow \mathbb{C}$ está definida por $f^*(x) = f(x)^*$, entonces es fácil observar que $(C(X), 1(x), *)$ es un $*$-álgebra conmutativa con unidad. Además, dada $f \in C(X)$,

$$||f||_\infty^2 = \sup_{x\in X}\{\,|f(x)|^2\,\} = \sup_{x\in X}\{\,f^*(x)f(x)\,\} = ||f^*f||_\infty.$$

Por lo tanto $(C(X), 1(x), || \ ||_\infty, *)$ es un C^*-álgebra conmutativa con unidad.

Definición 2.2.7. *(Elementos distinguidos) Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y $a \in A$. Se dice que*

1. *a es hermitiano o autoadjunto si $a = a^*$.*
2. *a es positivo si existe $b \in A$ hermitiano tal que $a = b^2$. La notación $a \geq 0$ se usará para indicar que a es un elemento positivo.*
3. *a es normal si $aa^* = a^*a$.*
4. *a es unitario si $aa^* = a^*a = \mathbb{1}$.*

Nótese que para la definición anterior es suficiente con pedir un $*$-álgebra.

Ahora se proseguirá a generalizar el Teorema 2.1.13 para C^*-álgebras con unidad, pero para ello, primero es necesario el siguiente lema:

Lema 2.2.8. *Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y sea $a \in A$. Si a es hermitiano, entonces $||a|| = r(a)$, donde $r(a)$ es el radio espectral de a (véase Definición 2.1.10).*

Demostración. Como $a^* = a$, entonces es fácil probar por inducción que $||a^{2k}|| = ||a||^{2k}$ y por el Teorema 2.1.13

$$r(a) = \lim_{k\to\infty} ||a^k||^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} ||a^{2k}||^{\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to\infty} ||a|| = ||a||.$$

■

Teorema 2.2.9. *Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Entonces para toda $a \in A$,*

$$||a|| = \sqrt{r(a^*a)}.$$

Demostración. Para toda $a \in A$, a^*a es hermitiano y se sigue del lema anterior que

$$r(a^*a) = ||a^*a|| = ||a||^2.$$

Por lo tanto $||a|| = \sqrt{r(a^*a)}$. ■

También podemos caracterizar el espectro de los elementos de un C^*-álgebra con unidad:

Proposición 2.2.10. Sea $(A, \mathbb{1}, || \ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y $a \in A$. Entonces

1. $\sigma(a^*) = \sigma(a)^*$ (véase Definición 2.1.11).
2. Si $a \in \mathrm{Inv}(A)$ (véase Definición 2.1.10), $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.
3. Si a es unitario, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, donde $\mathbb{S}^1$ es la circunferencia unitaria.
4. Si a es hermitiano, $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

Demostración.

1. Nótese $\lambda \in \sigma(a^*) \iff \lambda\mathbb{1} - a^*$ no es invertible $\iff \lambda^*\mathbb{1} - a$ no es invertible $\iff \lambda^* \in \sigma(a) \iff \lambda \in \sigma(a)^*$.

2. Como $a \in \mathrm{Inv}(A)$ se tiene que $0 \notin \sigma(a)$ y $0 \notin \sigma(a)^{-1}$. Además, dado que para toda $\lambda \neq 0$

   $$\lambda\mathbb{1} - a = -\lambda a(\lambda^{-1}\mathbb{1} - a^{-1}) \quad \text{y} \quad \lambda^{-1}\mathbb{1} - a^{-1} = -\lambda^{-1}a^{-1}(\lambda\mathbb{1} - a),$$

   se sigue que $\lambda\mathbb{1} - a$ es inverible si y solo si $\lambda^{-1}\mathbb{1} - a^{-1}$ es invertible.

3. Dado que a es unitario,

   $$||a^k||^2 = ||(a^k)^*a^k|| = ||(a^*)^k a^k|| = ||(a^*a)^k|| = ||1|| = 1,$$

   se sigue que $||a|| = 1$ y por el Teorema 2.1.13

   $$r(a) = \lim_{k\to\infty} ||a^k||^{\frac{1}{k}} = 1.$$

   Por lo tanto $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Además por el punto 1 y 2 de esta proposición se sabe que $\sigma(a) = \sigma(a^*)^* = \sigma(a^{-1})^* = \sigma(a)^{*-1}$ y se concluye que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^{-1} > ||a||$. Así $|-i\lambda^{-1}| > ||a||$ y se obtiene que $\mathbb{1} + i\lambda a = i\lambda(a - i\lambda^{-1}\mathbb{1})$ es invertible (por el Lema 2.1.9). Si se define

$$u := (\mathbb{1} - i\lambda a)(\mathbb{1} + i\lambda a)^{-1},$$

se tiene que

$$u^* = (\mathbb{1} + i\lambda a)^{-1^*}(\mathbb{1} - i\lambda a)^* = (\mathbb{1} + i\lambda a)^{*^{-1}}(\mathbb{1} - i\lambda a)^* = (\mathbb{1} - i\lambda a)^{-1}(\mathbb{1} + i\lambda a)$$

y se verifica fácilmente $u^*u = uu^* = \mathbb{1}$, i.e., u es un elemento unitario. Por el punto 3 de esta proposición $\sigma(u) \subseteq \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Pero dado que $|(1 - i\lambda\mu)(1 + i\lambda\mu)^{-1}| = 1 \iff \mu \in \mathbb{R}$, si $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, entonces $(1 - i\lambda\mu)(1 + i\lambda\mu)^{-1}\mathbb{1} - u$ es invertible (por el punto anterior de esta proposición). Más aún, como

$$\begin{aligned}(1-i\lambda\mu)(1+i\lambda\mu)^{-1}\mathbb{1} - u &= (1+i\lambda\mu)^{-1}[(1-i\lambda\mu)(\mathbb{1}+i\lambda a) - (1+i\lambda\mu)(\mathbb{1} - i\lambda a)](\mathbb{1}+i\lambda a)^{-1} \\ &= 2i\lambda(1 + i\lambda\mu)^{-1}(a - \mu\mathbb{1})(\mathbb{1} + i\lambda a)^{-1},\end{aligned}$$

se concluye que $\mu \in \rho(a)$ siempre que $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ y por lo tanto $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ (recuérdese que $\sigma(a)$ es compacto, véase Teorema 2.1.13) [3].

■

Como ejemplo, para $(M_n(\mathbb{C}), \mathrm{Id}_n, || \,||, *)$ el espectro de cualquier elemento es justo la colección de sus eigenvalores y el radio espectral es la norma más grande que toman los eigenvalores.

Los elementos positivos de un C^*-álgebra con unidad juegan un papel importante en la teoría y se usarán en el siguiente capítulo. No obstante, el estudio de estos elementos se escapa del propósito de este capítulo, por lo cual el desarrollo de esta parte de la teoría se presenta en el apéndice A.

Definición 2.2.11. *(Morfismo unitario de C^*-álgebras) Sean $(A, \mathbb{1}_A, || \,||_A, *_A)$, $(B, \mathbb{1}_B, || \,||_B, *_B)$ dos C^*-álgebras con unidad. Un morfismo unitario de C^*-álgebras entre $(A, \mathbb{1}_A, || \,||_A, *_A)$ y $(B, \mathbb{1}_B, || \,||_B, *_B)$ es un $*$-morfismo unitario.*

Observación. Claramente, las $*$-álgebras con unidad con $*$-morfismos unitarios y las C^*-álgebras con unidad con sus morfismos unitarios forman categorías pequeñas y éstas se denotarán por $*\mathrm{Alg}\mathbb{1}$ y $C^*\mathrm{Alg}\mathbb{1}$ respectivamente. Además, se denotará a la categoría de C^*-álgebras conmutativas con unidad como $C^*\mathrm{AlgCon}\mathbb{1}$.

Los *morfismos* siempre son transformaciones[2] que preservan la estructura adicional definida en los conjuntos. A primera vista, la definición anterior no preserva toda la estructura de las C^*-álgebras. Para esto, se necesitaría pedir que los morfimos entre C^*-álgebras también sean continuos.

[2]Cuando se tienen categorías pequeñas

Proposición 2.2.12. Sean $(A, \mathbb{1}_A, || \, ||_A, *_A)$, $(B, \mathbb{1}_B, || \, ||_B, *_B)$ dos C^*-álgebras con unidad. Entonces cualquier $*$-morfismo unitario $f : A \longrightarrow B$ es continuo.

Demostración. Sea $a \in A$ y $\lambda \in \sigma(f(a))$ (véase teorema 2.1.12). Entonces a no es invertible, por lo cual $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$. Se sigue que $r(f(a)) \leq r(a)$ y por el Teorema 2.2.9 se deduce $||f(a)||_B \leq ||a||_A$ para toda $a \in A$. Así, dada $\epsilon > 0$, si $||a - b||_A < \delta = \epsilon$ se tiene que

$$||f(a) - f(b)||_B = ||f(a - b)||_B \leq ||a - b||_A < \epsilon$$

y por lo tanto f es continua. ■

Observación. Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva, la inversa está definida en la imagen y cumple $||a||_A = ||f^{-1}(f(a))||_A \leq ||f(a))||_B$, por lo cual $||a||_A = ||f(a)||_B$ para toda $a \in A$, i.e., f es una isometría con su imagen.

2.2.2. La Dualidad de Gelfand-Naimark

En el Ejemplo 2.2.6 se observó que $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$ es un C^*-álgebra conmutativa con unidad. El teorema de Gelfand-Naimark establece que toda C^*-álgebra conmutativa con unidad es isométricamente isomorfa a $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$, para algún espacio topológico Hausdorff y compacto (X, τ). Ésto induce una relación entre C^*-álgebras conmutativas con unidad y espacios topológicos Hausdorff y compactos que es funtorial. A este resultado se le conoce como la dualidad de Gelfand-Naimark.

Primero se mostrará una propiedad adicional de los caracteres (véase Definición 2.1.18) de C^*-álgebras con unidad y posteriormente se dará una caracterización de ellos en álgebras del tipo $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$ con (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y compacto.

Proposición 2.2.13. Sea $(A, \mathbb{1}, || \, ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y sea κ un caracter de A. Entonces κ es un morfismo de $*$-álgebras con unidad

Demostración. Como $\kappa(\mathbb{1}) = \kappa(\mathbb{1}^2) = \kappa(\mathbb{1})\kappa(\mathbb{1})$, se sigue que $\kappa(\mathbb{1}) \in \{0, 1\}$. Si $\kappa(\mathbb{1}) = 0$, entonces para toda $a \in A$ se tiene que $\kappa(a) = \kappa(\mathbb{1}a) = \kappa(\mathbb{1})\kappa(a) = 0$ que implicaría $\kappa \equiv 0$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior, $\kappa(\mathbb{1}) = 1$.

Por otra parte, sea $a \in A$ un elemento hermitiano. Supóngase que $a - \kappa(a)\mathbb{1}$ es un elemento invertible de A. Entonces existe $b \in A$ tal que $(a - \kappa(a)\mathbb{1}) \cdot b = b \cdot (a - \kappa(a)\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. De esta manera se tiene que $1 = \kappa(\mathbb{1}) = \kappa((a - \kappa(a)\mathbb{1}) \cdot b) = \kappa((a - \kappa(a)\mathbb{1})) \cdot \kappa(b) = (\kappa(a) - \kappa(a))\kappa(b) = 0$, lo cual es una contradicción, por lo que $a - \kappa(a)\mathbb{1}$ no es un elemento invertible y se deduce $\kappa(a) \in \sigma(a)$. Como a es hermitiano, por la Proposición 2.2.10 se obtiene que $\kappa(a) \in \mathbb{R}$ y se sigue $\kappa(a)^* = \kappa(a^*)$. Si a es un elemento cualquiera de A, entonces nótese

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i\frac{a - a^*}{2i},$$

donde
$$\left(\frac{a+a^*}{2}\right)^* = \frac{a+a^*}{2}$$
y
$$\left(\frac{a-a^*}{2i}\right)^* = \frac{a-a^*}{2i}.$$
Así, un cálculo directo muestra que $\kappa(a)^* = \kappa(a^*)$ y por lo tanto, κ es un morfismo de $*$-álgebras con unidad. ■

Corolario 2.2.13.1. *En un C^*-álgebra con unidad, todo caracter es un $*$-morfismo unitario (morfismo unitario de C^*-álgebras) hacia* $(\mathbb{C}, 1, |\ |, *)$.

Lema 2.2.14. *Considérese* $(C(X), 1(x), ||\ ||_\infty, *)$ *(véase el Ejemplo 2.2.6). Entonces* $I_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ *es un ideal maximal y todo ideal maximal* I *de* $C(X)$ *es de la forma* I_x *para un único* $x \in X$.

Demostración. Sea $x \in X$. Es claro que I_x es un ideal propio de $C(X)$. Sea J un ideal de $C(X)$ tal que $I_x \subset J$. Como $I_x \neq J$, existe $f \in J$ tal que $f(x) \neq 0$. Como f es continua, se puede encontrar una vecindad abierta U de x tal que $f(U)$ no contiene a $\{0\}$. Entonces $\{x\}$ y $X - U$ son dos cerrados disjuntos y por el Lema de Urysohn [20] (todo espacio compacto y Hausdorff es normal [20]) existe $g \in C(X)$ tal que $g(x) = 0$ y $g(X - U) = 1$. Lo anterior implica que $g \in I_x \subset J$ y por lo cual
$$h := |f|^2 + g^2 \ \in J,$$
donde $h(x) > 0$ para todo $x \in X$. Entonces para toda $a \in C(X)$ se tiene $a = h\dfrac{a}{h} \in J$, de donde se sigue que $J = C(X)$ y por lo tanto I_x es un ideal maximal.

Por otro lado, sea J un ideal maximal de $C(X)$. Supóngase que $J \neq I_x$ para todo $x \in X$. Entonces para cada $x \in X$ existe $f_x \in J$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Como f_x es continua, existe una vecindad abierta U_x de x tal que $f_x(U_x)$ no contiene a $\{0\}$. Por lo anterior $\{U_x \mid x \in X\}$ es una cubierta de X y por compacidad, existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ sigue siendo una cubierta abierta. Entonces
$$g = \sum_{i=1}^n |f_{x_1}|^2 \ \in J.$$
Además $g(x) > 0$ para todo $x \in X$. Por un argumento similar al del párrafo anterior, se obtiene que $J = C(X)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe existir $x \in X$ que satisface $J = I_x$.

Si $J = I_x = I_y$ con $y \neq x$, como el espacio es Hausdorff existen vecindades abiertas U_x y U_y de x y y respectivamente tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Como $\{x\}$ y $X - U_x$ son dos cerrados disjuntos, por el Lema de Urysohn existe $g \in A$ tal que $g(x) = 0$ y $g(X - U_x) = 1$. Pero $g \in I_x$ y $g \notin I_y$, lo cual es una contradicción. De esta manera se concluye que $x = y$ y por lo tanto x es el único punto de X que satisface $J = I_x$. ■

El lema anterior prueba que existe una correspondencia biyectiva entre puntos del espacio X e ideales maximales de $C(X)$. Además junto con el Teorema 2.1.19 debería existir una biyección entre X y $\Omega(C(X))$. Sin embargo será útil mostrar explícitamente dicha correspondencia.

Proposición 2.2.15. Sea $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$. Entonces X está en biyección con $\Omega(C(X))$.

Demostración. Sea $x \in X$ y considérese

$$\begin{aligned} \kappa_x : C(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Es realmente fácil verificar que $\kappa_x \in \Omega(C(X))$. Por otra parte dado $\kappa \in \Omega(C(X))$, defínase $I = \{f \in C(X) \mid \kappa(f) = 0\}$. Es claro que I es un ideal de $C(X)$. Además, para toda $f \in C(X)$ se tiene que

$$f(x) - \kappa(f) \cdot 1(x) \ \in I. \tag{2.1}$$

Sea J otro ideal de $C(X)$ tal que $I \subset J$. Entonces existe $f \in J$ tal que $\kappa(f) \neq 0$ y por la ecuación anterior $f(x) - \kappa(f) \cdot 1(x) \in J$, de donde sigue que $1(x) \in J$ y por lo cual $J = C(X)$. Lo anterior muestra que I es un ideal maximal. Por el lema anterior existe un único $\hat{x} \in X$ tal que $I = I_{\hat{x}}$. Como la ecuación (2.1) se satisface para toda $f \in C(X)$, se tiene $f(\hat{x}) - \kappa(f) \cdot 1(\hat{x}) = 0$ y por lo tanto $\kappa(f) = f(\hat{x})$ para toda $f \in C(X)$, i.e., $\kappa = \kappa_{\hat{x}}$. Lo anterior muestra que la transformación

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \Omega(C(X)) \\ x &\longmapsto \kappa_x \end{aligned}$$

es biyectiva. ■

Por la proposición anterior a los caracteres de $C(X)$ se les denotará por κ_x.

Teorema 2.2.16. *(de Gelfand-Kolmogoroff) Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) dos espacios topológicos Hausdorffs y compactos. Entonces $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *_X)$ y $(C(Y), 1(y), || \, ||_\infty, *_Y)$ son isométricamente isomorfos como C^*-álgebras conmutativas con unidad si y solo si (X, τ_X) es homeomorfo a (Y, τ_Y).*

Demostración. Supóngase que $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *_X)$ y $(C(Y), 1(y), || \, ||_\infty, *_Y)$ son isométricamente isomorfos como C^*-álgebras conmutativas con unidad y sea F tal isomorfismo isométrico. Es fácil probar que dado $\kappa_y \in \Omega(C(Y))$, $\kappa_y \circ F \in \Omega(C(X))$. Así $\kappa_y \circ F = \kappa_x$ para algún $x \in X$. Considérese

$$\begin{aligned} GK : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Nótese que dada $f \in C(X)$,

$$F(f)(y) = \kappa_y(F(f)) = \kappa_y \circ F \circ f = \kappa_x(f) = f(x) = f(GK(y)),$$

por lo cual $F \circ f = f \circ GK$. Se sigue que para toda $f \in C(X)$, $f \circ GK$ es continua. Como X es Hausdorff y compacto, la topología τ_X coincide con la topología $\tau_{*-\text{débil}}$ generada por $C(X)$ [27] y por la propiedad universal de la topología $*$-débil [4], se concluye que GK es continua. De igual manera F^{-1} induce a GK^{-1} y ésta es continua por los mismos argumentos. Por lo tanto (X, τ_X) es homeomorfo a (Y, τ_Y).

La proposición recíproca es trivial. ■

Definición 2.2.17. *(La transformada de Gelfand) Sea $(A, \mathbb{1}, || \, ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Por el Teorema 2.1.20 se sabe que $\Omega(A)$ es un espacio Hausdorff y compacto, por lo cual, es posible considerar la C^*-álgebra conmutativa con unidad $(C(\Omega(A)), 1(x), || \, ||_\infty, *)$. La transformación*

$$\begin{aligned} \Gamma : A &\longrightarrow C(\Omega(A)) \\ a &\longmapsto \Gamma(a), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(a) : \Omega(A) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \kappa &\longmapsto \kappa(a) \end{aligned}$$

recibe el nombre de la transformada de Gelfand.

Es importante observar que $\Gamma(a)$ sí es una función continua en $\Omega(A)$ por definición de $\tau_{*-\text{débil}}$.

Teorema 2.2.18. *(de Gelfand-Naimark) Sea $(A, \mathbb{1}, || \, ||, *)$ un C^*-álgebra conmutativa con unidad. Entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico de C^*-álgebras conmutativas con unidad.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de los caracteres que Γ es un morfismo unitario de C^*-álgebras conmutativas. Además, si $\kappa_1 \neq \kappa_2$, entonces existe $a \in A$ tal que $\kappa_1(a) \neq \kappa_2(a)$ y así $\Gamma(a)(\kappa_1) \neq \Gamma(a)(\kappa_2)$, por lo cual $\Gamma(A)$ separa puntos.

Sean a_1, $a_2 \in A$ tales que $\Gamma(a_1) = \Gamma(a_2)$. Entonces para todo $\kappa \in \Omega(A)$

$$\kappa(a_1) = \Gamma(a_1)(\kappa) = \Gamma(a_2)(\kappa) = \kappa(a_2)$$

y dado que $\Gamma(A)$ separa puntos se sigue $a_1 = a_2$ y por lo tanto Γ es inyectiva. Más aún, por la observación abajo de la Proposición 2.2.12 se sigue que Γ es una isometría con su imagen.

Finalmente, si $\{\phi_j\}_{j \in J}$ es una red en $\Gamma(A)$ convergente, entonces existe $\phi \in C(\Omega(A))$ tal que $\lim\limits_{j \in J} \phi_j = \phi$. Además se sigue que $\{\phi_j\}_{j \in J}$ es una red de Cauchy. Como Γ es inyectiva existe una red de Cauchy $\{a_j\}_{j \in J}$ en A tal que $\Gamma(a_j) = \phi_j$ (pues Γ es inyectiva e isométrica) y debido a que A es completo existe $a \in A$ tal que $\lim\limits_{j \in J} a_j = a$. De esta manera, dado $\kappa \in \Omega(A)$, por la definición de $\tau_{*-\text{débil}}$

$$\phi(\kappa) = \lim_{j \in J} \phi_j(\kappa) = \lim_{j \in J} \kappa(a_j) = \kappa(a),$$

pues κ es continua (véase el corolario anterior y la Proposición 2.2.12). Así $\phi \in \Gamma(A)$ y por lo tanto $\Gamma(A)$ es cerrado. Se sigue que $\Gamma(A)$ es un C*-subálgebra de $C(\Omega(A))$ que contiene una función constante no-cero $(1(x))$ y separa puntos. Por el teorema Stone-Weierstrass [4] $\Gamma(A)$ es densa en $C(\Omega(A))$ y por lo cual $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)} = C(\Omega(A))$. Lo anterior muestra que Γ es suprayectiva y se obtiene que Γ es un isomorfismo isométrico. ■

Para concluir con esta sección y este capítulo se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.19. *La categoría de espacios topológicos Hausdorff y compactos es (contravariantemente) equivalente a la categoría de C^*-álgebras conmutativas con unidad.*

Demostración. Se denotará por TopHC a la categoría de espacios topológicos Hausdorff y compactos. Dado un morfismo en TopHC, $g : X \longrightarrow Y$, es posible definir

$$\begin{aligned} \Phi_g : C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto \Phi_g(f) = f \circ g. \end{aligned}$$

Es realmente fácil verificar que Φ_g es un $*$-morfismo unitario, por lo que es un morfismo unitario de C^*-álgebras conmutativas (véase Definición 2.2.11). De esta manera se puede definir un funtor contravariante

$$\mathcal{F} : \text{TopHC} \longrightarrow C^*\text{AlgCon}\mathbb{1}$$

que en objetos está definido como

$$\mathcal{F}((X,\tau)) = (C(X), 1(x), ||\ ||_\infty, *)$$

y en morfimos como

$$\mathcal{F}(g) = \Phi_g.$$

Dado un morfismo en AlgCon$\mathbb{1}$, $f : A \longrightarrow B$, defínase

$$\begin{aligned} \Psi_f : \Omega(B) &\longrightarrow \Omega(A) \\ \kappa_B &\longmapsto \Psi_f(\kappa_B) = \kappa_B \circ f. \end{aligned}$$

Es claro que la imagen de Ψ_f sí es $\Omega(A)$. Dado U un abierto en $\Omega(A)$, por definición de $\tau_{*-\text{débil}}$ (véase Definición 2.1.16) existe $a \in A$ y V abierto de $\mathbb{C}$ tal que $T_a^{-1}(V) \cap \Omega(A) = U$. Así

$$\kappa_B \in \Psi_f^{-1}(U) \iff \kappa_B \in T_a^{-1}(V) \cap \Omega(B)$$

y se obtiene que $\Psi_f^{-1}(U)$ es un abierto. De esta manera se concluye que Ψ_f es una transformación continua. Con lo anterior es posible definir un funtor contravariante

$$\mathcal{F}^{-1} : C^*\text{AlgCon}\mathbb{1} \longrightarrow \text{TopHC}$$

que en objetos está definido como (véase Teorema 2.1.20)

$$\mathcal{F}^{-1}((A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)) = (\Omega(A), \tau_{*-\text{débil}})$$

y en morfimos como
$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \Psi_f.$$

Nótese que dados $(A, \mathbb{1}_A, ||\ ||_A, *_A)$ y $(B, \mathbb{1}_B, ||\ ||_B, *_B)$ dos objetos en C^*AlgCon$\mathbb{1}$ y f un morfismo entre ellos, por el teorema de Gelfand-Naimark (véase el teorema anterior)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}((A, \mathbb{1}_A, ||\ ||_A, *_A))) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))"] \arrow[d, "\Gamma_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}((B, \mathbb{1}_B, ||\ ||_B, *_B))) \arrow[d, "\Gamma_B"] \\
(A, \mathbb{1}_A, ||\ ||_A, *_A) \arrow[r, "f"'] & (B, \mathbb{1}_B, ||\ ||_B, *_B)
\end{tikzcd},$$

donde Γ_A y Γ_B son las transformadas de Gelfand de $(A, \mathbb{1}_A, ||\ ||_A, *_A)$ y de $(B, \mathbb{1}_B, ||\ ||_B, *_B)$, respectivamente. De esta forma, los funtores $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}$, $\mathrm{id}_{C^*\mathrm{AlgCon}\mathbb{1}}$ (el funtor identidad en C^*AlgCon$\mathbb{1}$) son naturalmente isomorfos mediante la transformación natural

$$NT : \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow \mathrm{id}_{C^*\mathrm{AlgCon}\mathbb{1}}$$

definida por $NT_{(A,\mathbb{1}_A,||\ ||_A,*_A)} = \Gamma_A$.

Por otra parte el teorema de Gelfand-Naimark también muestra que $(C(X), 1(x), ||\ ||_\infty, *)$ es isométricamente isomorfo a $(C(\Omega(C(X))), 1(x), ||\ ||_\infty, *)$ para cada (X, τ) elemento de TopHC. Por el teorema de Gelfand-Kolmogoroff (véase Teorema 2.2.19) se sigue que (X, τ) es homeomorfo a $(\Omega(C(X)), \tau_{*-débil})$ y así

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}((X, \tau_X)) \arrow[r, "\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))"] \arrow[d, "KG_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}((Y, \tau_Y)) \arrow[d, "KG_Y"] \\
(X, \tau_X) \arrow[r, "g"'] & (Y, \tau_Y)
\end{tikzcd},$$

donde (X, τ_X), (Y, τ_Y) son objetos de TopHC, g es un morfimos entre ellos y KG_X, KG_Y son los homeomorfismos obtenidos del teorema de Gelfand-Kolmogoroff que cumplen

$$(\Omega(C(X)), \tau_{*-débil}) \cong (X, \tau_X) \quad \text{y} \quad (\Omega(C(Y)), \tau_{*-débil}) \cong (Y, \tau_Y),$$

respectivamente. De esta manera los funtores $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ e $\mathrm{id}_{\mathrm{TopHC}}$ (el funtor identidad en TopHC) son naturalmente isomorfos mediante la transformación natural

$$NT : \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{TopHC}}$$

definida por $NT_{(X,\tau_X)} = KG_X$. Por lo tanto la categoría TopHC es contravariantemente equivalente a la categoría C^*AlgCon$\mathbb{1}$. ■

Capítulo 3

Introducción a la Geometría No-Conmutativa

Durante este capítulo se dará un *diccionario* entre algunos términos topológicos/geométricos y términos algebraicos. Además siempre se pensará que el conjunto X está dotado con una topología τ que lo convierte en un espacio Hausdorff y compacto.

3.1. Espacio (Hausdorff y compacto) $\longleftrightarrow$ C*-álgebra conmutativa con unidad

En la Sección 2.2. se observó que los espacios Hausdorff y compactos están en una relación biunívoca con C^*-álgebras conmutativas con unidad. De esta forma, se dice que un **espacio es cuántico** cuando se esté usando **C^*-álgebras no-conmutativas con unidad**[1]. Una versión más general del teorema de Gelfand-Naimark muestra que existe una relación biunívoca entre espacios Hausdorff localmente compactos y C^*-álgebras conmutativas (en general, sin unidad, a menos que el espacio también sea compacto) [2], [27]. En este caso el álgebra $C(X)$ consiste de funciones continuas tales que para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto K de X tal que $|f(x)| < \epsilon$ siempre que $x \notin K$. De igual manera se consideran espacios cuánticos como C^*-álgebras no-conmutativas (en general, sin unidad). En este texto solo se ocupará el caso compacto.

3.2. Punto $\longleftrightarrow$ Caracter (o Ideal Bilateral Maximal)

En la Definición 2.1.8 se presentó la definición de un caracter de un álgebra de Banach; mientras que en el Corolario 2.2.13.1 se muestra una caracterización de ellos para C^*-álgebras con unidad. Además el Teorema 2.2.18 permite dar una primera reinterpretación del concepto de punto en un espacio ((X, τ) Hausdorff y compacto) como un caracter de $(C(X), 1(x), \|\ \|_\infty, *)$ (véase Ejemplo 2.2.6). Por lo anterior se puede generalizar el concepto de **punto** al caso **cuántico**

[1] La existencia del *espacio* cuántico estará implícita.

como un **caracter del álgebra no-conmutativa**. Más aún, se dice que el espacio cuántico *no tiene puntos* si el álgebra *no posee caracteres*. Nótese que por el Lema 2.2.14 también es posible generalizar el concepto de punto como un ideal bilateral maximal.

3.3. Simetría $\longleftrightarrow$ Automorfismo

El concepto de simetría es uno de los más importantes en la geometría. Una posible interpretación algebraica de este concepto es (como se aprecia en los cursos de Geometría Analítica) como un automorfismo del espacio. No es sorpresa que en el caso **cuántico** se pueda definir una simetría de la siguiente manera.

Definición 3.3.1. *(Simetría) Sea $(A, \mathbb{1})$ un álgebra ($(A, \mathbb{1}, *)$ un $*-$álgebra) con unidad. Se define una simetría ($*-$simetría) de A como un automorfismo de álgebras ($*$-automorfismo de álgebras) con unidad.*

Además existe un conjunto especial de simetrías.

Definición 3.3.2. *(Simetría interna) Sea $(A, \mathbb{1})$ un álgebra asociativa con unidad. Se define una simetría interna como un automorfismo de álgebras con unidad, f_g dado por*

$$\begin{aligned} f_g : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto gag^{-1}. \end{aligned}$$

donde g es un elemento fijo e invertible de A.

Otra forma de generalizar el concepto de simetría es por medio de la acción de un grupo (el grupo de simetrías) sobre un espacio. En el caso cuántico también se puede recrear esto, pero usando acciones de un grupo cuántico sobre un espacio cuántico. Dicho camino no se presentará aquí pero si el lector requiere más detalles puede leer la siguiente referencia [31], [37].

3.4. Medida de Probabilidad $\longleftrightarrow$ Estado

En esta sección se generalizará el concepto de medida de probabilidad usando una segunda versión del Teorema de Riesz (para ver la versión original, véase el Teorema B.0.1 del apéndice B). Casi todas las demostraciones de esta sección están basadas en [32].

Definición 3.4.1. *(Estado) Sea $(A, \mathbb{1}, *)$ una $*$-álgebra con unidad. Un estado es un funcional lineal positivo y normalizado (o unitario), i.e., un estado es una función lineal*

$$s : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

que satisface $s(a) \geq 0$ para todo $a \geq 0$, (véase Definición 2.2.7) y $s(\mathbb{1}) = 1$. Se denotará por $S(A)$ al conjunto de todos los estados sobre A.

El conjunto $S(A)$ tiene muchas propiedades que a continuación se explorarán.

Definición 3.4.2. *(Combinación lineal convexa) Sean $v_1, ..., v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Una conbinación lineal convexa de $v_1, ..., v_n$ es una suma*

$$\sum_{i\leq n} d_i v_i,$$

tal que cada d_i cumple $0 \leq d_i \leq 1$ y satisfacen $\sum\limits_{i\leq n} d_i = 1$.

Definición 3.4.3. *(Conjunto convexo) Se dice que un subconjunto S de un espacio vectorial V es convexo si para cada x, $y \in S$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ para todo $\lambda \in [0,1]$.*

Proposición 3.4.4. $S(A)$ es un conjunto convexo.

Demostración. Sean s_1 y s_2 estados de A. Considérese el funcional $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$. Entonces para a, $b \in A$ y δ escalar

$$(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)(a+\delta b) = \lambda s_1(a+\delta b)+(1-\lambda)s_2(a+\delta b) = (\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)(a)+\delta(\lambda s_1+(1-\lambda)s_2)(b),$$

por lo cual $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$ es lineal. Además

$$(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)(\mathbb{1}) = \lambda s_1(\mathbb{1}) + (1-\lambda)s_2(\mathbb{1}) = \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Se sigue que $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$ es normalizado. Por último $(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2)(a)$ es positivo para cada $a \geq 0$, por la positividad de cada estado s_i ($i = 1, 2$). Se sigue que $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$ es un estado y por lo tanto $S(A)$ es un conjunto convexo. ■

Proposición 3.4.5. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y sea $s \in S(A)$. Entonces $S(A) \subseteq A^*$, donde A^* denota al espacio dual de A (las funciones lineales y continuas de A) con la norma-operador.

Demostración. Supóngase que $M := \sup\{|s(a)| \mid ||a|| = 1 \text{ y } a \geq 0\}$ es infinito. Entonces existe $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $|s(a_i)| \geq 2^i$, con $a_i \geq 0$ y $||a_i|| = 1$ para toda i. De esta forma el elemento $a = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-i} a_i$ existe y es también es un elemento positivo (véase la Proposición A.0.3 del apéndice A). También se tiene que $1 \leq |s(2^{-i}a_i)|$ para toda i y se sigue

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} s(2^{-i}a_i) = s\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}a_i\right) \leq s(a),$$

i.e., $n \leq s(a)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. Por lo anterior M es finito.

Por otro lado, sea $a \in A$ con $||a|| = 1$. Por la Proposición A.0.9 del apéndice A existen a_0, a_1, a_2 y a_3 elementos positivos de A tales que $a = \sum_{n=0}^{3} i^n a_n$ y $||a_n|| \leq ||a|| = 1$. Así

$$|s(a)| = \left|s(\sum_{n=0}^{3} i^n a_n)\right| = \left|\sum_{n=0}^{3} i^n s(a_n)\right| \leq \sum_{n=0}^{3} ||a_n|| s\left(\frac{a_n}{||a_n||}\right) \leq 4M.$$

Esto muestra que $\sup\{|s(a)| \mid ||a|| = 1\}$ es finito. Lo anterior prueba que s es un operador lineal y acotado, por lo que s es lineal y continuo [27]. Por lo tanto $s \in A^*$ y $S(A) \subseteq A^*$. ■

Antes de proseguir a caracterizar un poco más a los estados, es necesario el siguiente lema.

Lema 3.4.6. *Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y sea $s \in S(A)$. Entonces la transformación*

$$\begin{aligned} \langle -|-\rangle_{\text{pre}} : A \times A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto s(a^* b) \end{aligned}$$

es un pre-producto interno y para toda a, $b \in A$, $|s(a^*b)| \leq s(a^*a)^{1/2} s(b^*b)^{1/2}$.

Demostración. Es claro que $\langle -|-\rangle_{\text{pre}}$ es lineal-conjugada en la primera coordenada y lineal en la segunda. Un cálculo directo muestra que

$$\langle b|a\rangle_{\text{pre}} = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle a + i^k b | a + i^k b\rangle_{\text{pre}}$$

y así se obtiene $s(a^*b) = \langle a|b\rangle_{\text{pre}} = \langle b|a\rangle_{\text{pre}}^* = s(b^*a)$. Además, dado que a^*a es siempre un elemento positivo (véase la Proposición A.0.6 del apéndice A), $\langle a|a\rangle_{\text{pre}} \geq 0$ para toda $a \in A$ y por lo tanto $\langle -|-\rangle_{\text{pre}}$ es un pre-producto interno. La desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue satisfaciendo (la demostración es exactamente igual que en el caso de un producto interior [15]) y se sigue $|s(a^*b)| \leq s(a^*a)^{1/2} s(b^*b)^{1/2}$ para toda a, $b \in A$. ■

Una primera consecuencia del lema anterior es la mostrada a continuación.

Proposición 3.4.7. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y sea $s \in S(A)$. Entonces $s(a^*) = s(a)^*$ para toda $a \in A$.

Demostración. Por el lema 3.4.6 $s(a^*) = s(a^*\mathbb{1}) = s(\mathbb{1}^*a) = s(\mathbb{1}a) = s(a)$. ■

Proposición 3.4.8. Supóngase que $(\mathcal{H}, \langle -|-\rangle)$ es un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y $(A, \text{id}_{\mathcal{H}}, ||\ ||_{\text{op}}, *)$ un C^*-subálgebra con unidad de $(B(\mathcal{H}), \text{id}_{\mathcal{H}}, ||\ ||_{\text{op}}, *)$ (véase Ejemplo 2.2.4). Sea $s : A \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal y acotado tal que $s(\text{id}_{\mathcal{H}}) = 1$. Entonces s es positivo (y por lo tanto un estado) si y solo si $||s||_{\text{op}} = 1$.

Demostración. Supóngase que s positivo. Dada $f \in A$ tal que $||f||_{\mathrm{op}} = 1$, por el lema 3.4.6

$$|s(f)|^2 = |s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} f)|^2 \leq s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}}^* \mathrm{id}_{\mathcal{H}})\, s(f^* f) \leq s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}}) ||s||_{\mathrm{op}} ||f^* f||_{\mathrm{op}} = ||s||_{\mathrm{op}}.$$

Así

$$||s||_{\mathrm{op}}^2 = \sup_{||f||_{\mathrm{op}}=1} \left\{ |s(f)|^2 \right\} \leq ||s||_{\mathrm{op}}$$

y se sigue $||s||_{\mathrm{op}} \leq 1$. Obsérvese que $1 = ||\mathbb{1}|| = |s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}})| \leq ||s||_{\mathrm{op}}$ y por lo tanto $||s||_{\mathrm{op}} = 1$.

Recíprocamente, supóngase que $||s||_{\mathrm{op}} = 1$. Sea $f \in A$ un elemento hermitiano (véase Definición 2.2.7) y sea $n \in \mathbb{Z}$. Debido a que $s(f) \in \mathbb{C}$, se puede escribir $s(f) = x + iy$, con $x,\, y \in \mathbb{R}$. Además, si $c = ||f^2||_{\mathrm{op}}$, entonces

$$|s(f + i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})|^2 \leq ||s||_{\mathrm{op}}^2 ||f + i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}||_{\mathrm{op}}^2 = ||(f + i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})^*(f + i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})||_{\mathrm{op}} =$$

$$||(f - i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})(f + i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})||_{\mathrm{op}} = ||f^2 + n^2 \mathrm{id}_{\mathcal{H}}||_{\mathrm{op}} \leq ||f^2||_{\mathrm{op}} + n^2 ||\mathrm{id}_{\mathcal{H}}||_{\mathrm{op}} = c + n^2.$$

Más aún

$$|s(f + i\,n\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}})|^2 = |s(f) + i\,n\,s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}})|^2 = |x + iy + i\,n|^2 = x^2 + (y+n)^2 = x^2 + y^2 + 2yn + n^2$$

y por lo cual $x^2 + y^2 + 2yn + n^2 \leq c + n^2$. De esta manera se tiene $2yn \leq c - x^2 - y^2$. Si $y \neq 0$, entonces para toda $n \in \mathbb{Z}$

$$n \leq \frac{c - x^2 - y^2}{2y},$$

lo cual es una contradicción. Lo anterior muestra que $y = 0$ y por lo tanto $s(f) = x$, i.e. $s(f) \in \mathbb{R}$ para toda $f \in A$ hermitiana.

Sea $f \in A$ un elemento positivo. Si $f \neq 0$, defínase $g = \dfrac{f}{||f||_{\mathrm{op}}}$. Como f es hermitiano, entonces g también lo es. Hay que resaltar que $||g||_{\mathrm{op}} = 1$ y tomando $x \in H$ se tiene

$$0 \leq ||x||^2 - ||g||_{\mathrm{op}} ||x||^2 \leq ||x||^2 - ||x||\, ||g(x)|| \leq \langle x,\ x \rangle - \langle x,\ g(x) \rangle = \langle x,\ (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g)x \rangle.$$

Se sigue que $\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g$ es positivo (véase el Ejemplo A.0.2 en el apéndice A). Además, debido a que $0 \leq \mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g \leq \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, se satisface $||\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g||_{\mathrm{op}} \leq 1$ (véase la Proposición A.0.8 en el apéndice A). De esta forma

$$1 - s(g) = s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}}) - s(g) = s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g) \leq |s(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g)| \leq ||s||_{\mathrm{op}} ||\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - g||_{\mathrm{op}} \leq 1.$$

De lo anterior se deduce $0 \leq ||f||_{\mathrm{op}} s(g) = s(f)$ y por lo cual $0 \leq s(f)$. Dado que s es lineal, $0 \leq s(0)$ y por lo tanto se puede concluir que s es un funcional positivo (y por ende un estado). ■

El teorema de Banach-Alaoglu (véase Teorema 2.1.17) permite demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.4.9. Sea $(A, \mathbb{1}, || \, ||, *)$ una C^*-álgebra con unidad. Entonces $S(A) \subset A^*$ es un espacio compacto y Hausdorff con la topología $\tau_{*-débil}$ (véase Definición 2.1.16).

Demostración. Sea $\{f_j\}_{j \in J}$ una red de estados que convergen a $f \in A^*$. Por definición de $\tau_{*-débil}$ se tiene

$$f(a) = \lim_{j \in J} f_j(a)$$

para cada $a \in A$. Entonces $f(\mathbb{1}) = \lim_{j \in J} f_j(\mathbb{1}) = 1$ y si $a \geq 0$, entonces $f(a) = \lim_{j \in J} f_j(a) \geq 0$, ya que cada f_i es un estado (véase la Proposición A.0.3 del apéndice A). Por lo anterior $f \in S(A)$ y se obtiene que $S(A)$ es un subconjunto cerrado de $(A^*, \tau_{*-débil})$. Además, por definición $S(A) \subset \mathbb{S}_A$ y por el teorema de Banach-Alaoglu $S(A)$ es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, por lo cual es compacto con respecto a $\tau_{*-débil}$.

Por otro lado, sean f, $g \in S(A)$ tal que $f \neq g$. Entonces existe $a \in A$ tales que $f(a) \neq g(a)$, por lo cual $|f(a) - g(a)| > 0$. Sea $\delta = |f(a) - g(a)|$ y considérese $U_f = B_{\frac{\delta}{2}}(f) \cap S(A)$ y $U_g = B_{\frac{\delta}{2}}(g) \cap S(A)$. Entonces U_f y U_g son vecindades abiertas de f y g en $S(A)$, respectivamente. Si $h \in U_f \cap U_g$, se tiene

$$|f(a) - g(a)| \leq |f(a) - h(a)| + |g(a) - h(a)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

lo cual es una contradicción. Se sigue que $U_f \cap U_g = \emptyset$ y por lo tanto $S(A)$ es Hausdorff. ■

Ahora, se definirán un conjunto especial de estados.

Definición 3.4.10. *(Elemento extremal) S un conjunto convexo. Un elemento $e \in S$ es extremal si $e \neq \lambda x + (1 - \lambda)y$ para $\lambda \in (0, 1)$, x, $y \in S$. En otras palabras, e es extremal cuando no es un punto interior en el segmento entre x y y.*

Con todo lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 3.4.11. *(Estado puro) Sea $(A, \mathbb{1}, *)$ un $*$-álgebra con unidad. Un estado puro de A es un elemento extremal de $S(A)$. Al conjunto de estados extremales los denotaremos por $Ext(A)$.*

Teorema 3.4.12. *(de Krein-Milman) Sea E un subconjunto compacto y convexo de un espacio localmente convexo X. Entonces $E = cl(conv(Ext(E)))$, es decir, E es la clausura topológica del cubriente convexo de los elementos extremales de E. [28]*

De acuerdo con el teorema de Krein-Milman, $S(A)$ coincide con la cerradura en $\tau_{*-débil}$ del cubriente convexo de los elementos extremales de A.

Los siguientes dos teoremas son importantes en la teoría de estados en C^*-álgebras [19], [21].

Teorema 3.4.13. *(de Gelfand-Naimark-Segal) Sea* $(A, \mathbb{1}, || \, ||, *)$ *un* C^**-álgebra con unidad y sea* $s \in S(A)$*. Entonces existe una* $*$*-representación* π *de* A *en* $(B(\mathcal{H}), \mathrm{id}_{\mathcal{H}}, || \, ||_{\mathrm{op}}, *)$*, para algún* $\mathbb{C}$*-espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ *con un vector* $\xi \in \mathcal{H}$ *normalizado que satisface*

$$s(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$$

para toda $a \in A$*. Además, si* s *es un estado puro la* $*$*-representación* π *es irreducible y satisface que* $\pi(A)' = \mathbb{C} \, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$*, donde*

$$\pi(A)' := \{ f \in B(\mathcal{H}) \mid f \circ g = g \circ f \text{ para toda } g \in \pi(A) \}.$$

Teorema 3.4.14. *(Riesz-Markov-Kakutani o segunda versión del teorema de representación Riesz) Para cada funcional lineal y positivo* ϕ *de* $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$ *existe una única medida de Borel regular* μ *sobre* X *tal que*

$$\phi(f) = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

para todo $f \in C(X)$*. Además* $||\phi||_{\mathrm{op}}$ *es la variación total de* μ*.*

Ahora se caracterizará a los estados puros de $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$.

Teorema 3.4.15. *Considérese* $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$*. Entonces los caracteres (véase Definición 2.1.18 y la Proposición 2.2.15) son estados puros y viceversa.*

Demostración. Sea $\kappa_x \in \Omega(C(X))$. Por definición y por la Proposición 2.2.13, κ_x es un funcional lineal y normalizado. Sea $f \in A$ un elemento positivo. Entonces $f = gg^*$, para algún $g \in C(X)$ (véase la Proposición A.0.6) y $\kappa_x(f) = \kappa_x(gg^*) = g(x)g^*(x) = |g(x)|^2 \geqslant 0$, por lo que κ_x es positivo. Esto prueba que κ_x es un estado.

Por otro lado, sean $\lambda \in [0, 1]$ y ϕ, ψ estados tales que $\kappa_x = \lambda\phi + (1 - \lambda)\psi$. Entonces como κ_x es un caracter, para toda $f \in A$ se debe cumplir $(\lambda\phi + (1 - \lambda)\psi)(f^2) = (\lambda\phi(f) + (1 - \lambda)\psi(f))^2$, lo cual pasa si y solo si $\lambda\phi = 0$ o $(1 - \lambda)\psi = 0$, lo que implica que $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$. Lo anterior muestra que $\phi = \kappa_x$ o $\psi = \kappa_x$ y por lo tanto κ_x es un estado puro.

Sea $s \in S(C(X))$ un estado puro. Entonces s es lineal y no-cero, por lo que solo falta probar que es multiplicativo. Sea $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ la correspondiente $*$-representación obtenida por el teorema de Gelfand-Naimark-Segal. Como $(C(X), 1(x), || \, ||_\infty, *)$ es conmutativa y s es un estado puro se tiene

$$\pi(A) \subseteq \pi(A)' = \mathbb{C} \, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}.$$

De esta manera para toda f, $g \in C(X)$ $\pi(f) = \lambda \, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ y $\pi(g) = \mu \, \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ para λ, $\mu \in \mathbb{C}$. Así

$$s(fg) = \langle \pi(fg)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(f)\pi(g)\xi, \xi \rangle = \lambda^*\mu^* = \langle \lambda\xi, \xi \rangle \langle \mu\xi, \xi \rangle = \langle \pi(f)\xi, \xi \rangle \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle = s(f)s(g).$$

Por lo tanto s es un caracter. ■

El Teorema 3.4.15 muestra que en el caso clásico hay una biyección entre estados puros y caracteres, lo que justifica reinterpretar el concepto de punto en X ahora como un estado puro de $C(X)$. Por esto, también se puede pensar a un **punto** en el caso **cuántico** como un **estado puro** del álgebra (aunque en este caso, podría haber estados puros aunque no haya caracteres o solo haya un ideal bilateral maximal, como se verá en el próximo capítulo). Además es posible decir que si un espacio cuántico *no tiene estados puros*, entonces *no tiene puntos*. Por el teorema 3.4.14, los estados de $C(X)$ se corresponden con medidas cuya variación total es 1, es decir medidas de probabilidad. Los estados puros de $C(X)$ (caracteres κ_x por el teorema 3.4.15) dan medidas que *localizan* completamente a x, es decir, medidas del tipo delta de Dirac (o medidas puras o no mezcladas). Los estados no puros corresponden a distribuciones mezcladas. Por lo anterior se puede pensar a una **medida de probabilidad** en el caso **cuántico** como un **estado**.

3.5. Cálculo Diferencial

En esta sección se verá el equivalente algebraico de algunos conceptos del Cálculo Diferencial. Siempre se considerará a M^n como una variedad suave, compacta de dimensión n y el C^*-álgebra conmutativa con unidad que se usará es $(C^\infty(M), 1(x), || \, ||_\infty, *)$, donde $C^\infty(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es suave}\}$.

3.5.1. Campo Vectorial $\longleftrightarrow$ Derivación del Álgebra

Un resultado básico de Geometría Diferencial es que [18], [34]

$$\Gamma(TM_{\mathbb{C}}) := \Gamma(TM \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathrm{Der}(C^\infty(M)),$$

donde $\mathrm{Der}(C^\infty(M)) = \{D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \mid D \text{ es lineal y satisface la regla de Leibniz}\}$. Así, se identificará al conjunto de derivaciones de $C^\infty(M)$ en $C^\infty(M)$ con los campos vectoriales de la complexificación del haz tangente. Con esto, se puede generalizar el concepto de **campo vectorial** al caso **cuántico** como **derivaciones del álgebra**. Hay que destacar que tanto $\Gamma(TM_{\mathbb{C}})$ como $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ forman un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo (de hecho, finitamente generado y proyectivo como se verá en la siguiente sección) y más aún, forman un $*$-álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ con la operación[2] $*$ dada por

$$D^* = * \circ D \circ *$$

y el corchete de Lie estándar en ambos casos.

A los elementos $D \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ que satisfacen $D^* = D$, se les llama derivaciones hermitianas o reales (una derivación imaginaria D es una derivación que satisface $D^* = -D$). El conjunto

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) = \{D \in Der(C^\infty(M)) \mid D \text{ es hermitiana }\}$$

[2]Esta definición automaticamente hace $D^* \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$, $(D^*)^* = D$, $(D_1 D_2)^* = D_2^* D_1^*$ y $[D_1, D_2]^* = [D_1^*, D_2^*] \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$, siempre que D, D_1, $D_2 \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$.

es un $*$-subálgebra de Lie real de $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ (ya que $[D_1, D_2]^* \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ si D_1, $D_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$). Más aún

$$\mathrm{Der}(C^\infty(M)) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) \bigoplus i\,\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$$

(justo como la descomposición mostrada en la demostración de la Proposición 2.2.13). De igual manera se tiene que $\Gamma(TM) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$, i.e., los campos vectoriales reales son derivaciones hermitianas y viceversa.

Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Entonces $\mathfrak{a} = (A, [-,-])$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ con el corchete estándar ($[a, b] := ab - ba$, para toda a, $b \in A$). Considérese el $*$-álgebra de Lie $(\mathrm{Der}(A), [-,-])$, donde

$$\mathrm{Der}(A) := \{D : A \longrightarrow A \mid D \text{ es lineal y satisface la regla de Leibniz}\};$$

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1, \quad \text{para toda } D_1,\ D_2 \in \mathrm{Der}(A);$$

$$D^* = * \circ D \circ *.$$

De igual manera, las derivaciones hermitianas, $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A)$, son un $*$-subálgebra real de $\mathrm{Der}(A)$.

Definición 3.5.1. *(Derivaciones internas) Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Definimos el conjunto de las derivaciones internas de A en A como*

$$\mathrm{InDer}(A) = \{D_a \in \mathrm{Der}(A) \mid D_a(b) = [a, b] \text{ para toda } b \in A \text{ y para alguna } a \in A\}.$$

Proposición 3.5.2. Si D_a, $D_b \in \mathrm{InDer}(A)$, entonces

$$[D_a, D_b] = D_{[a,b]}.$$

Además $D_a^* = D_{-a^*}$

Demostración. Dada $c \in A$ se tiene

$$[D_a, D_b](c) = (D_a \circ D_b)(c) - (D_b \circ D_a)(c) = [a, [b, c]] - [b, [a, c]] = [[a, b], c] = D_{[a,b]}(c),$$

donde la penúltima igualdad es por la identidad de Jacobi en $\mathfrak{a}$. Lo anterior muestra que $[D_a, D_b] = D_{[a,b]}$.

Por otra parte, obsérvese que para toda $c \in A$,

$$D_a^*(c) = (* \circ D_a \circ *)(c) = [a, c^*]^* = ca^* - a^*c = [-a^*, c] = D_{-a^*}(c)$$

y por lo tanto $D_a^* = D_{-a^*}$. ■

Corolario 3.5.2.1. *D_a es hermitiana si y solo si $D_a = D_{-a^*}$*

Se sigue de la primera parte de la proposición anterior que $\mathrm{InDer}(A)$ forma un $*$-subálgebra[3] de $\mathrm{Der}(A)$.

Nótese que $\mathrm{InDer}(C^\infty(M)) = 0$ pues $C^\infty(M)$ es conmutativa.

Definición 3.5.3. *(Transformación exponencial) Sea* $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ *un* C^**-álgebra con unidad y* $D \in \mathrm{Der}(A)$*. Se define la transformación exponencial como*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^D : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{D^k(a)}{k!}. \end{aligned}$$

Como D es lineal, se sigue que e^D es lineal. Además para toda a, $b \in A$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^D(ab) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{D^k(ab)}{k!} &= ab + D(a)b + aD(b) + \frac{1}{2}[D^2(a)b + 2D(a)D(b) + aD^2(b)] + \cdots \\ &= (a + D(a) + \frac{1}{2}D^2(a) + \cdots)(b + D(b) + \frac{1}{2}D^2(b) + \cdots) = \mathrm{e}^D(a)\mathrm{e}^D(b), \end{aligned}$$

por lo que e^D es multiplicativa. Dado que[4] $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$ si y solo si $[a, b] = 0$ y como $[D, -D] = 0$, se obtiene que

$$\mathrm{e}^D\mathrm{e}^{-D} = \mathrm{e}^0 = \mathrm{id}_A = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{-D}\mathrm{e}^D,$$

por lo cual e^D es invertible y se concluye que e^D es una simetría de A (véase Definición 3.3.1). Para $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ se tiene que e^D preserva $*$ (como $D = D^*$, entonces $D(a^*) = D(a)^*$, por definición de D^*) y se obtiene que e^D es una $*$-simetría de A. Más aún, si $D = D_a$ para alguna $a \in A$, entonces

$$\mathrm{e}^{D_a}(b) = b + [a, b] + \frac{1}{2}[a, [a, b]] + \cdots = \mathrm{e}^a b \mathrm{e}^{-a}.$$

Por lo anterior, e^{D_a} una simetría interna[5] de A (véase Definición 3.3.2). Además, si $D_a \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A)$, entonces e^{D_a} es una $*$-simetría que también es interna.

3.5.2. Haz Vectorial $\longleftrightarrow$ Módulo izquierdo Proyectivo Finitamente Generado

En 1962 Richard Swan probó que existe una equivalencia entre haces vectoriales de una variedad suave y Módulos izquierdos (o derechos, o bimódulos) proyectivos finitamente generados, aunque Jean-Pierre Serre en 1955 ya había probado un teorema similar para variedades algebraicas. El motivo de esta subsección es demostrar el enunciado de Serre. Para esto es necesario primero probar los siguientes lemas.

[3] De hecho, las derivaciones internas forman un ideal pues si $D \in \mathrm{Der}(A)$ y $D_a \in \mathrm{InDer}(A)$, entonces, directamente se puede comprobar que $[D, D_a](b) = D_{D(a)}(b)$ para todo $b \in A$, por lo cual $[D, D_a] = D_{D(a)}$.

[4] Si $[a, b] \neq 0$, entonces $e^a e^b = e^{a+b+z}$, donde z es una suma de polinomios racionales en a y b.

[5] De aquí el nombre de *derivación interna*.

Lema 3.5.4. *Sean $\zeta_1 = (V_1M, M, V_1, \pi_1)$, $\zeta_2 = (V_2M, M, V_2, \pi_2)$ dos $\mathbb{C}$-haces vectoriales de dimensión finita. Entonces $\Gamma(\mathrm{Hom}(V_1M, VM_2))$ es canónicamente isomorfo a $\mathrm{Hom}(\Gamma(V_1M), \Gamma(V_2M))$ como $C^\infty(M)$-módulos.*

Demostración. Para cada sección $s \in \Gamma(\mathrm{Hom}(V_1M, VM_2))$, considérese la transformación

$$\Phi_s : \Gamma(V_1M) \longrightarrow \Gamma(V_2M)$$

dada como

$$\begin{aligned} \Phi_s(\sigma) : M &\longrightarrow V_2M \\ p &\longmapsto s(p)(\sigma(p)) \end{aligned}$$

para cada $\sigma \in \Gamma(VM_1)$. La diferenciabilidad de s y σ implican la difrenciabilidad de $\Phi_s(\sigma)$. Además el hecho de que sean secciones implican que $\Phi_s(\sigma)$ es una sección también, por lo que Φ_s está bien definida. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma(\mathrm{Hom}(V_1M, V_2M)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(V_1M), \Gamma(V_2M)) \\ s &\longmapsto \Phi_s \end{aligned}$$

Es fácil notar que Φ es un morfismo inyectivo de $C^\infty(M)$-módulos.

Por otra parte, sea

$$\phi : \Gamma(V_1M) \longrightarrow \Gamma(V_2M)$$

morfismo de $C^\infty(M)$-módulos. Considérese $s_\phi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(V_1M, V_2M))$ definido como

$$\begin{aligned} s_\phi(p) : V_{1p}M &\longrightarrow V_{2p}M \\ v_p &\longmapsto \phi(\sigma)(p), \end{aligned}$$

para cada $p \in M$, donde $\sigma \in \Gamma(V_1M)$ satisface $\sigma(p) = v_p$ (con $V_{ip}M = \pi_i^{-1}(p)$). Nótese que para probar que s_ϕ está bien definido basta con probar que si $\sigma(p) = 0$, entonces $\phi(\sigma)(p) = 0$. Sea $(\chi_1, \ \ldots, \ \chi_k)$ una base local de V_1M definida sobre algún abierto U. Tomando $g \in C^\infty(M)$ con soporte en U y tal que $g(p) = 1$ [34] es posible definir $X_i := g\chi_i$ y extendiendo por 0 a $M - U$ se obtiene una sección global. De esta manera deben existir $f^i \in C^\infty(M)$ que satisfacen

$$g\sigma = \sum_{i=1}^{k} f^i X_i.$$

Debido a que $\sigma(p) = 0$ se debe cumplir que $f^i(p) = 0$ para $i = 1, ...k$. Así

$$(\phi\sigma)(p) = g(p)(\phi(\sigma))(p) = (g\phi(\sigma))(p) = \phi(g\sigma)(p) = \phi\left(\sum_{i=1}^{k} f^i X_i\right)(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (f^i \phi(X_i))(p) = \sum_{i=1}^{k} f^i(p)\phi(X_i)(p) = 0.$$

Esta construcción muestra que dada $\phi \in \mathrm{Hom}(\Gamma(V_1M), \Gamma(V_2M))$, $\Phi(s_\phi) = \Phi_{s_\phi} = \phi$, por lo cual Φ es suprayectiva y por lo tanto, un isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos. ■

Corolario 3.5.4.1. *Sean $\zeta_1 = (V_1M, M, V_1, \pi_1)$, $\zeta_2 = (V_2M, M, V_2, \pi_2)$ dos $\mathbb{C}$-haces vectoriales de dimensión finita. Entonces ζ_1 es isomorfo a ζ_2 como $\mathbb{C}$-haces vectoriales si y solo si $\Gamma(V_1M)$ es isomorfo a $\Gamma(V_2M)$ como $C^\infty(M)$-módulos.*

Lema 3.5.5. *Sea $\zeta_1 = (V_1M, M, V_1, \pi_1)$ un $\mathbb{C}$-haz vectorial de dimensión finita. Entonces existe $\zeta_2 = (V_2M, M, V_2, \pi_2)$ un haz vectorial trivial complejo de dimensión finita y un epimorfismo de haces $f : \zeta_2 \longrightarrow \zeta_1$.*

Demostración. Para cada $p \in M$, sea (U_p, Φ_p) una trivialización local de haz vectorial de ζ_1 alrededor de p. Entonces existe $\{s'_1, ..., s'_l\}$ base de $\Gamma(\pi_1^{-1}(U_p))$. Sea $\psi \in C^\infty(M)$ una transformación gelatina (bump function en ingles) tal que $\psi \geqslant 0$, $\psi(V_p) = 1$ y $Supp\,\psi \subset U_p$, con $V_p \subset U_p$ abierto [34]. Si se define $s_i = \psi\, s'_i$, $s_i \in \Gamma(V_1M)$ y $\{s_1, ..., s_l\}$ es una base de $\Gamma(\pi_1^{-1}(V_p))$. Como $\{V_p \mid p \in M\}$ es una cubierta abierta de M, por compacidad, existen $p_1, ..., p_r \in M$ tales que $\{V_{p_i}\}_{i=1}^r$ sigue siendo una cubierta abierta de M. Por lo anterior, si $k = lr$, las secciones $s_1, ..., s_k$ $\in \Gamma(V_1M)$ son tales que $\{s_i(p)\}_{i=1}^k$ generan a $V_{1p}M$ (la fibra de p en V_1M) para cada $p \in M$.

Considérese el haz trivial complejo $\zeta_2 = (V_2M = M \times \mathbb{C}^k, M, V_2, \pi_2 = \mathrm{proy}_M)$. Si $\{e_i\}_{i=1}^k$ es la base canónica de $\mathbb{C}^k$, entonces las secciones $\hat{s}_1 : M \to V_2M$ dadas por $\hat{s}_i(p) = (p, e_i)$ forman una base de $\Gamma(V_2M)$. De esta manera la transformación

$$\begin{aligned} F : \Gamma(V_2M) &\longrightarrow \Gamma(V_1M) \\ \hat{s}_i &\longmapsto s_i \end{aligned}$$

induce un epimorfismo lineal $f_p : V_{1p}M \longrightarrow V_{2p}M$ en las fibras. Defínase

$$\begin{aligned} f : V_2M &\longrightarrow V_1M \\ (p, v_1) &\longmapsto f_p(v_1). \end{aligned}$$

La diferenciabilidad de f y su conmutatividad con las proyecciones de los haces se sigue del hecho de que se tiene una base local de las secciones para cada $p \in M$. Además por construcción, f es suprayectiva y por lo tanto es un epimorfismo de haces vectoriales complejos [33]. ■

Teorema 3.5.6. *(de Serre-Swan) Si $\zeta = (VM, M, V, \pi)$ un $\mathbb{C}$-haz vectorial de dimensión finita, $\Gamma(VM)$ es un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo proyectivo y finitamente generado. Más aún, si Γ es un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo proyectivo y finitamente generado, entonces existe un único haz vectorial complejo (salvo isomorfismos) $\zeta = (VM, M, V, \pi)$ tal que $\Gamma = \Gamma(VM)$.*

Demostración. Es claro que $\Gamma(VM)$ es un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo. Además, en el primer parráfo en la demostración del lema anterior se probó que $\Gamma(VM)$ es finitamente generado, por lo cual solo falta probar que $\Gamma(VM)$ es proyectivo. Por el lema 3.5.5, existe $\zeta_2 = (V_2M, M, V_2, \pi_2)$ un haz trivial vectorial complejo de dimensión finita y un epimorfismo de haces $f : \zeta_2 \longrightarrow \zeta$. Entonces $\eta = (Ker(f) = f^{-1}(0), M, V, \pi_2|_{Ker(f)})$ es un subhaz vectorial de ζ_2 y claramente

$$\zeta_2 = \zeta \bigoplus \eta,$$

donde $\bigoplus$ es la suma de Whitney. Se sigue que $\Gamma(V_2M) = \Gamma(VM) \bigoplus \Gamma(Ker(f))$, como $C^\infty(M)$-módulos izquierdos. Dado que ζ_2 es un haz trivial, se obtiene que $\Gamma(V_2M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo finitamente generado y libre (véase la demostración del lema anterior). Por lo tanto $\Gamma(VM)$ es un $C^\infty(M)$-módulo izquierdo proyectivo y finitamente generado.

Por otro lado, sea Γ un $C^\infty(M)$-módulo proyectivo y finitamente generado. Entonces Γ es un sumando directo de algún $C^\infty(M)$-módulo libre G. Por lo anterior, existe un endomorfismo idempotente $F : G \to G$ tal que $\mathrm{Im}(F) = \Gamma$, como $C^\infty(M)$-módulos izquierdos. Pensando a G como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial (con dicha estructura heredada de su estructura de $C^\infty(M)$-módulo), considérese el haz trivial complejo $\zeta_2 = (GM = M \times G, M, G, \pi_2 = \mathrm{proj}_M)$. Entonces se tiene que $\Gamma(GM) \cong G$ como $C^\infty(M)$-módulos izquierdos, por lo que se identificarán estos espacios. Por lo anterior, se tiene que

$$F : \Gamma(GM) \longrightarrow \Gamma(GM),$$

tal que $\mathrm{Im}(F) = \Gamma$. Notemos que F induce un epimorfismo lineal $f_p : G_pM \to G_pM$ en las fibras. Defínase

$$VM = \bigcup_{p \in M} \mathrm{Im}(f_p)$$

y se le puede dar a este conjunto la estructura diferenciable que hace a

$$\begin{aligned} f : GM &\longrightarrow VM \\ (p, x) &\longmapsto f_p(x). \end{aligned}$$

suave. De esta forma $(VM, M, \mathrm{Im}(f_p), \pi)$ es un haz vectorial complejo, donde $\pi(x) = p$ si $x \in \mathrm{Im}(f_p)$ y satisface $\Gamma(VM) \cong \Gamma$ como $C^\infty(M)$-módulos izquierdos. Finalmente el Corolario 3.5.4.1 muestra que el haz vectorial es único, salvo isomorfismos [33]. ■

Observación. El teorema anterior (y los lemas) valen también para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

El teorema de Serre-Swan justifica reinterpretar el concepto de $\mathbb{C}$-haz vectorial de dimensión finita como $C^\infty(M)$-módulos izquierdos proyectivos y finitamente generados. Gracias a esto, se puede generalizar el concepto de **haz vectorial** al caso **cuántico** como un **módulo izquierdo proyectivo y finitamente generado**.

3.5.3. Formas diferenciales $\longleftrightarrow$ Subálgebra Graduada $\Omega^\bullet(M)$

Sea $(\mathfrak{g}, [-,-])$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ y sea

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

una representación de $\mathfrak{g}$ en V (ρ es un morfismo de álgebras de Lie, donde $\mathfrak{gl}(V)$ son los endomorfismos de V con el corchete estándar). Considérese el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de k-formas evaluadas en $\mathfrak{g}$ con valores en V,

$$\Omega^k(\mathfrak{g}, V) := \bigwedge^k \mathfrak{g}^* \bigotimes V,$$

donde aquí $\mathfrak{g}^*$ denota al espacio dual. Nótese que $\Omega^0(\mathfrak{g}, V) = V$ y defínase la transformación lineal

$$\begin{aligned} d^k : \Omega^k(\mathfrak{g}, V) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathfrak{g}, V) \\ \alpha &\longmapsto d^k\alpha \end{aligned}$$

dada por

$$\begin{aligned} d^k\alpha(x_0, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(x_i) \left(\alpha(x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_k)\right) + \\ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha([x_i, x_j], x_0, ..., \hat{x}_i, ..., \hat{x}_j, ..., x_k), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\hat{x}_i$ significa que hay que quitar ese término. Esta transformación satisface [17]

$$d^{k+l}(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = d^l(\alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^l \alpha_1 \wedge d^k(\alpha_2),$$

donde $l = grado(\alpha_1)$ y $k = grado(\alpha_2)$ (la regla de Leibniz graduada). Por ejemplo, para toda $v \in V$, $dv \in \Omega^1(\mathfrak{g}, V)$ está definida por

$$\begin{aligned} d^0 v : \mathfrak{g} &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \rho(x)(v) \end{aligned}$$

y para toda $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}, V)$, $d^1\alpha \in \Omega^2(\mathfrak{g}, V)$ está dada por

$$\begin{aligned} d^1\alpha : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow V \\ (x_0, x_1) &\longmapsto \rho(x_0)\alpha(x_1) - \rho(x_1)\alpha(x_0) - \alpha([x_0, x_1]). \end{aligned}$$

Se puede probar directamente que $d^{k+1} \circ d^k \equiv 0$ [17]. Además, a

$$\Omega^\bullet(\mathfrak{g}, V) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \Omega^k(\mathfrak{g}, V)$$

se le puede dar estructura de álgebra con unidad graduada mediante

$$\alpha \cdot \beta(x_1, ..., x_{k+l}) := \alpha \wedge \beta(x_1, ..., x_{k+l}) = \sum_{[\sigma]\in S_{k+l}\backslash S_k \times S_l} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) \cdot \beta(x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(k+l)}),$$

donde S_p es el grupo simétrico de orden p, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación σ y $\alpha \in \Omega^k(\mathfrak{g}, V)$, $\beta \in \Omega^l(\mathfrak{g}, V)$.

Definición 3.5.7. *(La cohomología de Chevalley-Eilenberg) Se define la cohomología de Chevalley-Eilenberg de $(\mathfrak{g}, [-,-])$ con coeficientes en la representación V como la cohomología del complejo diferencial $(\Omega^\bullet(\mathfrak{g}, V), d)$:*

$$H^k_{CE}(\mathfrak{g}, V) := \frac{\operatorname{Ker}(d^k)}{\operatorname{Im}(d^{k-1})}.$$

Observación. (Cálculo de la cohomología de Chevalley-Eilenberg para dimensiones bajas). Para un álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [-,-])$ cualquiera y una representación cualquiera ρ de $\mathfrak{g}$, se tiene que

$$H^0_{CE}(\mathfrak{g}, V) = V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid \rho(x)v = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$$

y

$$H^1_{CE}(\mathfrak{g}, V) = \frac{\operatorname{Der}(\mathfrak{g}, V)_\rho}{\operatorname{InDer}(\mathfrak{g}, V)_\rho},$$

donde

$$\operatorname{Der}(\mathfrak{g}, V)_\rho := \{D : \mathfrak{g} \to V \mid D \text{ es lineal y } D([x_0, x_1]) = \rho(x_0)D(x_1) - \rho(x_1)D(x_0)\}$$

e

$$\operatorname{InDer}(\mathfrak{g}, V)_\rho := \{D \in Der(\mathfrak{g}, V)_\rho \mid D(x) = \rho(x)v \text{ para alguna } v \in V \text{ fija}\}.$$

Es importante recordar que se define

$$T^*M_{\mathbb{C}} := \bigsqcup_{p\in M} T^*_p M_{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad \bigwedge T^*M_{\mathbb{C}} := \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge T^*_p M_{\mathbb{C}}.$$

Más aún, existe una correspondencia biunívoca canónica entre las secciones $\alpha \in \Gamma(\bigwedge^k T^*M_{\mathbb{C}}) =: \Omega^k(M)$ y las transformaciones k-multilineales y alternantes

$$\begin{aligned} \alpha : \Gamma(TM_{\mathbb{C}}) \times ... \times \Gamma(TM_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X_1\ ,\ ...\ ,\ X_k) &\longmapsto \alpha(X_1, ..., X_k) : M \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad\qquad p \longmapsto \alpha_p(X_{1p}, ..., X_{kp}). \end{aligned}$$

Estas transformaciones también son $C^\infty(M)$-multilineales, en el sentido de que para toda $f \in C^\infty(M)$ se tiene que $\alpha(X_1, ..., (fX_r), ..., X_k) = f\alpha(X_1, ..., X_r, ..., X_k)$.

Es posible darle a $\Omega^{\bullet}(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$ estructura de $*$-álgebra con unidad mediante la derivada exterior, el producto cuña de formas diferencial[6] y

$$\begin{aligned} * : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ \alpha &\longmapsto \alpha^*, \end{aligned}$$

dada por $\alpha^*(X_1, ..., X_k) = (\alpha(X_1^*, ..., X_k^*))^*$.

Considérese el complejo de Chevalley-Eilenberg

$$(\Omega^{\bullet}(\mathfrak{a}, A), d)$$

donde $\mathfrak{a} = (\Gamma(TM_{\mathbb{C}}), [-,-]) = (\mathrm{Der}(C^{\infty}(M)), [-,-])$ (con el corchete estándar correspondiente) y se está pensando en la representación estándar[7] de $\mathfrak{a}$ en el espacio vectorial y $A = C^{\infty}(M)$. Entonces para cada k, se tiene que

$$\Omega^k(M) = span_A\{\, da_1 \wedge \cdots \wedge da_k \mid a_i \in A\} \subset \Omega^k(\mathfrak{a}, A),$$

i.e., $\Omega^{\bullet}(M)$ se puede obtener como un subálgebra de $\Omega^{\bullet}(\mathfrak{a}, A)$. Con lo anterior, se puede generalizar el concepto de **formas diferenciales** al caso **cuántico** como **elementos de un complejo de Chevalley-Eilenberg** para un C^*-álgebra no-conmutativa con unidad.

[6]Definidos de igual manera que la diferencial d^k y el producto para obtener el complejo de Chevalley-Eilenberg [17].

[7]La representación estándar está dada por

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{Der}(C^{\infty}(M)) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(C^{\infty}(M)) \\ D &\longmapsto D. \end{aligned}$$

Capítulo 4

La Esfera Cuántica

En este capítulo, $A = M_2(\mathbb{C})$ (las matrices de 2 por 2 con entradas en los complejos). Por comodidad y cuando sea necesario, se usará la notación de Dirac (véase el apéndice B). En las siguientes secciones se definirá a la esfera cuántica y se darán justificaciones a este nombre. Además, se mostrarán los conceptos desarrollados en el capítulo anterior en la esfera cuántica.

4.1. El espacio cuántico $\mathbb{QS}^2$

Definición 4.1.1. *(La esfera cuántica) Se define a la esfera cuántica como el $\mathbb{C}^*$-álgebra no-conmutativa con unidad dada por $\mathbb{QS}^2 = (A, \mathrm{Id}_2, \| \ \|_{\mathrm{op}}, *)$ (véase Ejemplo 2.2.5)*

Por lo visto en la Sección 3.1, $\mathbb{QS}^2$ es un **espacio cuántico**.

4.2. Puntos de $\mathbb{QS}^2$

Se sabe que $\dim_{\mathbb{C}}(A) = 4$ y claramente el conjunto $\beta = \{\mathrm{Id}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

es un conjunto linealmente independiente, por lo que β es una base (ordenada) de A. A las matrices σ_1, σ_2, σ_3 se les conoce como *las matrices de Pauli.* Un cálculo rápido muestra que $\sigma_i^2 = \mathrm{Id}_2$ para $i = 1, 2, 3$ y

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \ \ \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1 \ \text{ y } \ \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2. \tag{4.1}$$

Proposición 4.2.1. $\mathbb{QS}^2$ no tiene caracteres (véase Definición 2.1.18).

Demostración. Supóngase que A tiene un caracter y sea κ tal caracter. Por la ec. (4.1), se tiene que $\kappa(\sigma_1)\kappa(\sigma_2) = i\kappa(\sigma_3) = -\kappa(\sigma_2)\kappa(\sigma_1)$, por lo cual $\kappa(\sigma_1)\kappa(\sigma_2) = -\kappa(\sigma_2)\kappa(\sigma_1)$. Más aún, se sabe que $\kappa(\sigma_j) \in \mathbb{C}$ para $j = 1, 2, 3$ y como $\mathbb{C}$ es conmutativo, se obtiene que $\kappa(\sigma_1)\kappa(\sigma_2) =$

$-\kappa(\sigma_1)\kappa(\sigma_2)$, es decir $\kappa(\sigma_1) = 0$ o $\kappa(\sigma_2) = 0$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\kappa(\sigma_1) = 0$. Como $\kappa(\sigma_1)\kappa(\sigma_1) = \kappa(\sigma_1^2) = \kappa(\mathrm{Id}_2) = 1$, se sigue que $\kappa(\sigma_1) = 1$ o $\kappa(\sigma_1) = -1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{QS}^2$ no tiene caracteres. ■

Según lo visto en la Sección 3.2, lo anterior nos muestra que $\mathbb{QS}^2$ **no tiene puntos**. Además, es fácil notar que los únicos ideales bilaterales de A son los triviales, por lo cual considerando puntos como ideales bilaterales máximales, $\mathbb{QS}^2$ no tiene puntos.

4.3. Simetrías de $\mathbb{QS}^2$

En esta sección se observará que el grupo de $*$-simetrías (véase Definición 3.3.1) de $\mathbb{QS}^2$ es isomorfo (como grupos) al grupo de simetrías de la esfera *clásica* $\mathbb{S}^2$, i.e, el grupo de simetrías de $\mathbb{QS}^2$ es isomorfo a $SO(3)$. Esta es una razón para llamar a $\mathbb{QS}^2$ *la esfera cuántica*.

Se comenzará estudiando las simetrías para posteriormente estudiar sus $*$-simetrías.

Proposición 4.3.1. Toda simetría de $\mathbb{QS}^2$ es una simetría interna f_g (véase Definición 3.3.2), para algún elemento invertible g de A.

Demostración. Sea F una simetría de $\mathbb{QS}^2$ y sean $|v\rangle$, $|y\rangle \in \mathbb{C}^2$ vectores no-cero. Entones $|v\rangle\langle y|$ es un elemento no-cero de A. Como F es inyectiva existe $|z\rangle \in \mathbb{C}^2$ tal que $F(|v\rangle\langle y|)|z\rangle \neq 0$. Defínase

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ |x\rangle &\longmapsto F(|x\rangle\langle y|)|z\rangle. \end{aligned}$$

g es lineal ya que F es lineal, por lo cual se puede considerar a g como elemento de A escribiendo a g como matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Más aún, $g \neq 0$ ya que $g|v\rangle \neq 0$. Para todo $a \in A$ y para todo $|x\rangle \in \mathbb{C}^2$, se tiene que

$$ga|x\rangle = g|ax\rangle = F(|ax\rangle\langle y|)|z\rangle = F(a \cdot |x\rangle\langle y|)|z\rangle = F(a)F(|x\rangle\langle y|)|z\rangle = F(a)g|x\rangle,$$

lo cual implica que $ga = F(a)g$ para todo $a \in A$. Sea $|u\rangle \in \mathbb{C}^2$. Como $g|v\rangle \neq 0$ y F es suprayectiva existe $b \in A$ tal que $F(b)g|v\rangle = |u\rangle = gb|v\rangle$. Por lo anterior, se tiene que g es suprayectiva y se sigue que g es un elemento invertible de A. Como $ga = F(a)g$, se tiene que

$$F(a) = gag^{-1}$$

para todo $a \in A$. Por lo tanto F es una simetría interna y es de la forma $F = f_g$. ■

Teorema 4.3.2. *Si* $\mathrm{Aut}(A) = \{F : A \to A \mid F \textit{ es una simetría}\}$, *entonces* $\mathrm{Aut}(A) \cong \dfrac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*}$ *(como grupos), donde* $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ *y se está considerando a* $\mathbb{C}^*$ *con su estructura de grupo multiplicativo.*

Demostración. Se sabe que $\mathrm{Aut}(A)$ es un grupo con la composición. Considérese el mapeo

$$\begin{aligned} f : GL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(A) \\ g \quad &\longmapsto \quad f_g : A \longrightarrow A \\ &\qquad\qquad a \longmapsto gag^{-1}. \end{aligned}$$

Es claro que f es un morfismo de grupos. Además, por la proposición anterior se tiene que f es suprayectiva. Sea $g \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces $f(g) = f_g = \mathrm{Id}_2$, por lo que para $a \in A$ $gag^{-1} = a$, lo cual implica que $ga = ag$. Lo anterior muestra que

$$g \in Z(A) \setminus \{0\} = \{g \in A \mid ag = ga \,\forall\, a \in A\} \setminus \{0\} = \{\lambda \mathrm{Id}_2 \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

y es fácil ver que si $g \in Z(A) \setminus \{0\}$, entonces $g \in \mathrm{Ker}(f)$. Por lo anterior $Ker(f) = Z(A) \setminus \{0\}$. Identificando a $\mathrm{Ker}(f)$ con $\mathbb{C}^*$ visto como grupo multiplicativo, por el primer teorema de isomorfismos de grupos se concluye que $\mathrm{Aut}(A) \cong \dfrac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*}$. ■

Todavía es posible caracterizar más al grupo $\mathrm{Aut}(A)$.

Proposición 4.3.3. $\mathrm{Aut}(A) \cong \dfrac{SL(2,\mathbb{C})}{\{1,-1\}}$ y $\mathrm{Aut}(A) \cong M(2)$ (como grupos), donde se está considerando a $\{1,-1\}$ como grupo multiplicativo y $M(2)$ es el grupo de transformaciones de Mobius de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ [16].

Demostración. Considérese la transformación

$$\begin{aligned} T : SL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow \frac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*} \\ g &\longmapsto [g]. \end{aligned}$$

Es calro que T es un morfismo de grupos. Más aún, T es suprayectivo ya que dado $[g] \in \dfrac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*}$,

$$\frac{g}{\sqrt{\det(g)}} \in SL(2,\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad T\left(\frac{g}{\sqrt{\det(g)}}\right) = [g].$$

Sea $g \in \mathrm{Ker}(T)$. Entoneces $T(g) = [g] = [\mathrm{Id}_2]$, lo cual implica que $g = \lambda \mathrm{Id}_2$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dado que g tiene determinante 1, se sigue $\lambda = \pm 1$, i.e, $g \in \{\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_2\}$. Además, es fácil verificar que si $g \in \{\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_2\}$, entonces $g \in \mathrm{Ker}(T)$. Por lo anteior

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_2\}.$$

Identificando a $\mathrm{Ker}(T)$ con $\{1,-1\}$ visto como grupo multiplicativo, por el primer teorema de isomorfismos de grupos se obtiene que

$$\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{1,-1\}} \cong \frac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*}$$

y por el teorema anterior

$$\mathrm{Aut}(A) \cong \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{1,-1\}}.$$

Por otra parte

$$M(2) = \left\{ M : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \mid M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ donde } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ y } ad-bc \neq 0 \right\}$$

que tiene estructura de grupo con la composición. Considérese la transformación dada por

$$\begin{aligned} S : GL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow M(2) \\ g &\longmapsto S_g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \end{aligned}$$

si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Es laborioso pero fácil verificar S es un morfismo de grupos y es claro que S es suprayectiva. Sea $g \in \mathrm{Ker}(S)$. Entonces $S(g) = S_g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, por lo cual $g = \lambda \mathrm{Id}_2$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$, i.e., $g \in Z(A) \setminus \{0\}$ y es fácil ver que si $g \in Z(A) \setminus \{0\}$, entonces $g \in \mathrm{Ker}(S)$. Por lo anteior $\mathrm{Ker}(S) = Z(A) \setminus \{0\}$. Identificando a $Z(A)$ con $\mathbb{C}^*$ y por el primer teorema de isomorfismos de grupos obtenemos que $\dfrac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*} \cong M(2)$ y por el teorema anterior $\mathrm{Aut}(A) \cong M(2)$. ■

En resumen, el Teorema 4.3.2 y la Proposición 4.3.3 muestran que

$$\mathrm{Aut}(A) \cong \frac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{C}^*} \cong \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{1,-1\}} \cong M(2).$$

Ahora se analizarán las $*$-simetrías.

Proposición 4.3.4. Toda $*$-simetría F de A es una simetría interna f_g para algún $g \in A$ unitario.

Demostración. Supóngase que F es una $*$-simetría de A. Entonces por la Proposición 4.3.1, existe $\hat{g} \in A$ invertible tal que $F = f_{\hat{g}}$. El Teorema 4.3.2 muestra que tal $\hat{g}$ es única salvo una constante. Como $f_{\hat{g}}$ es una $*$-simetría, para toda $a \in A$ se satisface $f_{\hat{g}}(a^*) = (f_{\hat{g}}(a))^*$ lo cual implica que $\hat{g}a^*\hat{g}^{-1} = (\hat{g}a\hat{g}^{-1})^* = (\hat{g}^{-1})^* a^* \hat{g}^* = (\hat{g}^*)^{-1} a^* \hat{g}^*$, por lo que para todo $a^* \in A$, $\hat{g}^*\hat{g}a^* = a^*\hat{g}^*\hat{g}$, i.e., $\hat{g}^*\hat{g}a = a\hat{g}^*\hat{g}$ para todo $a \in A$. Lo anterior muestra que $\hat{g}^*\hat{g} \in Z(A) \setminus \{0\} = \{g \in A \mid ag = ga \ \forall\, a \in A\} \setminus \{0\} = \{\lambda \mathrm{Id}_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Como $\hat{g}^*\hat{g}$ es un elemento positivo (véase la Proposición A.0.7 del apéndice A), $\hat{g}^*\hat{g} = \lambda \mathrm{Id}_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ (véase el Ejemplo A.0.2 del apéndice A). Entonces $\hat{g}^* = \lambda \hat{g}^{-1}$ y por lo cual $\hat{g} = (\hat{g}^*)^* = (\lambda \hat{g}^{-1})^* = \lambda(\hat{g}^{-1})^* = \lambda(\hat{g}^*)^{-1}$. Si $g = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}(\hat{g}^*)^{-1}$, se sigue que $g^* = g^{-1}$ y $F = f_g$. ■

Teorema 4.3.5. *Si* $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) := \{F : A \to A \mid F$ *es una* $*$*-simetría*$\}$, *entonces* $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \cong \dfrac{U(2)}{U(1)}$ *(como grupos).*

Demostración. Claramente $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2)$ es un grupo con la composición. Considérese la transformación

$$\begin{aligned} f : U(2) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \\ g \quad &\longmapsto \quad f_g : A \longrightarrow A \\ &\qquad\qquad a \longmapsto gag^*. \end{aligned}$$

De manera análoga al teorema 4.3.2 se prueba que f es un morfismo de grupos suprayectivo cuyo kernel es $U(1)$. El primer teorema de isomorfismos de grupos asegura que $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \cong \dfrac{U(2)}{U(1)}$. ■

Por otra parte se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.3.6. $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \cong \dfrac{SU(2)}{\{1,-1\}}$.

Demostración. Defínase

$$\begin{aligned} T : SU(2) &\longrightarrow \frac{U(2)}{U(1)} \\ g &\longmapsto [g]. \end{aligned}$$

De manera análoga a la primera parte de la Proposición 4.3.3 se prueba que T es un morfismo de grupos suprayectivo cuyo kernel es $\{1,-1\}$. El primer teorema de isomorfismos de grupos asegura que $\dfrac{U(2)}{U(1)} \cong \dfrac{SU(2)}{\{1,-1\}}$ y por lo tanto $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \cong \dfrac{SU(2)}{\{1,-1\}}$. ■

Antes de seguir con el análisis de $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2)$, es necesario hacer un paréntesis para introducir el anillo de los cuaterniones ya que con ellos se podrá identificar más fácilmente al grupo $\dfrac{SU(2)}{\{1,-1\}}$.

Definición 4.3.7. *(Cuaterniones) Sea $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$. Defínase*

$$\begin{aligned} + \quad : \quad \mathbb{H} \quad \times \quad \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ ((a,\overline{a}),(b,\overline{b})) &\longmapsto (a+b, \overline{a}+\overline{b}). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdot \quad : \quad \mathbb{H} \quad \times \quad \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ ((a,\overline{a}),(b,\overline{b})) &\longmapsto (ab - \overline{a}\cdot\overline{b}, a\overline{b} + b\overline{a} + \overline{a}\times\overline{b}). \end{aligned}$$

Se define el anillo de los cuaterniones como $(\mathbb{H}, +, \cdot)$.

Cabe mencionar que el anillo de los cuaterniones es un anillo con división pero no es conmutativo. Es común denotar

$$\mathbb{H} := \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

y pedir que i, j, k cumplan las relaciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \;\; i \cdot j = k = -j \cdot i; \;\; j \cdot k = i = -k \cdot j \;\; y \;\; k \cdot i = j = -i \cdot k.$$

Por lo anterior, $\{1, i, j, k\}$ es una base para $\mathbb{H}$. Otra forma de definir el anillo de los cuaterniones es considerar $i = -i\sigma_1$, $j = -i\sigma_2$ y $k = -i\sigma_3$ (no hay que confundirse entre el cuaternión i y el número imaginario i) y definir a $\mathbb{H}$ como $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$, con la suma y multiplicación estándar de matrices. Las dos definiciones son equivalentes ya que

$$\phi = a + ia_1 + ja_2 + ka_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a - ia_3 & -a_1 - a_2 \\ -ia_1 + a_2 & a + ia_3 \end{pmatrix},$$

es una biyección que preserva la suma y la multiplicación. Sea ϕ un cuaternión. Es fácil verificar que la norma al cuadrado de ϕ como vector es igual al determinante de ϕ como matriz. Más aún $||\phi \cdot \psi|| = ||\phi|| \cdot ||\psi||$. Considérese

$$\begin{aligned} * \;:\; \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (a, \overline{a}) &\longmapsto (a, -\overline{a}). \end{aligned}$$

La transformación $*$ y la multiplicación por un escalar real le dan a $\mathbb{H}$ estructura de $*$-álgebra asociativa con unidad (véase la Definición 2.2.1). La biyección del párrafo anterior también preserva esta estructura. Se usarán las 3 formas de escribir a los cuaterniones indiscriminadamente según convenga.

Definición 4.3.8. *(Cuaternión imaginario) Se define un cuaternión imaginario como un un elemento $\phi \in \mathbb{H}$ tal que $\phi^* = -\phi$.*

Los cuaterniones imaginarios están en biyección canónica con $\mathbb{R}^3$. Hay que destacar que

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

es un subconjunto de los cuaterniones.

Teorema 4.3.9. $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \cong SO(3)$ *como grupos.*

Demostración. Por la definición anterior se puede considerar al conjunto de los cuaterniones imaginarios como $\mathbb{R}^3$. Sea

$$\begin{aligned} f : SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ \phi &\longmapsto f_\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ &\qquad\qquad \overline{x} \longmapsto \phi \cdot \overline{x} \cdot \phi^*. \end{aligned}$$

Para cada ϕ, f_ϕ está bien definida ya que $(\phi \cdot \overline{x} \cdot \phi^*)^* = -\phi \cdot \overline{x} \cdot \phi^*$, i.e., $\phi \cdot \overline{x} \cdot \phi^*$ es un cuaternión imaginario, por lo que sí es un elemento de $\mathbb{R}^3$. Un tedioso cálculo muestra que para cada ϕ, f_ϕ

preserva la norma de $\overline{x}$ y que el determinante de su matriz asociada es positivo, por lo que $f_\phi \in SO(3)$, i.e., f está bien definida. Además, es claro que f es un morfismo de grupos.

Por otra parte, dado un elemento $\xi \in SO(3)$, por el teorema de rotación de Euler, existe un vector unitario $\overline{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ y un ángulo θ tal que ξ es una rotación por θ con respecto a la recta determinada por $\overline{n}$. Si

$$\phi = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\overline{n} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + isen\left(\frac{\theta}{2}\right)n_x + jsen\left(\frac{\theta}{2}\right)n_y + ksen\left(\frac{\theta}{2}\right)n_z,$$

entonces $\phi \in SU(2)$ y por la fórmula de rotación de Rodrigues es posible verificar que $f_\phi = \xi$. Por lo anterior, f es un morfismo de grupos suprayectivo. Si $\phi \in \mathrm{Ker}(f)$, entonces $f_\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, por lo cual $\phi \cdot \overline{x} \cdot \phi^* = \overline{x}$ i.e. $\phi \cdot \overline{x} = \overline{x}\phi$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$. Esto muestra que $\phi \in Z(\mathbb{H}) = \{(1,\overline{0}), -(1,\overline{0})\}$ y es fácil notar que si $\phi \in Z(\mathbb{H})$, entonces $\phi \in \mathrm{Ker}(f)$. Por lo anterior se tiene que $\mathrm{Ker}(f) = Z(\mathbb{H}) = \{(1,\overline{0}), -(1,\overline{0})\}$. Idenficando a $\mathrm{Ker}(f)$ con $\{1,-1\}$ y por el primer teorema de isomorfismos de grupos se obtiene que $\dfrac{SU(2)}{\{1,-1\}} \cong SO(3)$ y por la Proposición 4.3.6 se concluye $\mathrm{Aut}(\mathbb{QS}^2) \cong SO(3)$. ■

4.4. Estados de $\mathbb{QS}^2$

En esta sección se revisarán los estados de la esfera cuántica (véase Definición 3.4.1).

Es posible definir un producto escalar en A de la forma

$$\langle a_1 | a_2 \rangle_A = \mathrm{tr}(a_1^* a_2)$$

Por el teorema de representación de Riesz (véase el Teorema B.1 del apéndice B), para cada funcional lineal $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$ existe una **única** matriz $\hat{\rho} \in A$ tal que:

$$\rho(a) = \langle \hat{\rho} | a \rangle_A = \mathrm{tr}(\hat{\rho}^* a)$$

Proposición 4.4.1. Sea $\rho(-) = \langle \hat{\rho} | - \rangle_A = \mathrm{tr}(\hat{\rho}^* -)$ un funcional lineal de A. Entonces ρ es un estado si y sólo si $\hat{\rho}$ es un elemento positivo y de traza 1.

Demostración. Sea ρ es un estado. Entonces

$$1 = \rho(\mathrm{Id}_2) = \langle \hat{\rho} | \mathrm{Id}_2 \rangle_A = \mathrm{tr}(\hat{\rho}^*) = \mathrm{tr}(\hat{\rho})^*,$$

lo cual implica que $\mathrm{tr}(\hat{\rho}) = 1$.

Sea $|v\rangle = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ y considérese

$$a = \begin{pmatrix} v_1^* v_1 & v_2^* v_1 \\ v_1^* v_2 & v_2^* v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |v_1|^2 & v_2^* v_1 \\ v_1^* v_2 & |v_2|^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces a es un elemento positivo de A (ya que es hermitiano y sus eigenvalores, i.e. su espectro, son 0 y $|v_1|^2 + |v_2|^2$, véase el Teorema A.0.1 del apéndice A) y se tiene que $\rho(a) \geq 0$. Pero

$$\rho(a) = z_1^*|v_1|^2 + z_2^* v_2^* v_1 + z_3^* v_1^* v_2 + z_4^*|v_2|^2 = \langle \hat{\rho} v | v \rangle_{\mathbb{C}^2},$$

tomando a $\langle - | - \rangle_{\mathbb{C}^2}$ como el producto escalar estándar en $\mathbb{C}^2$ y

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior muestra que $\langle \hat{\rho} v | v \rangle_{\mathbb{C}^2} \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^2$ y por el Ejemplo A.0.2 del apéndice A se concluye que $\hat{\rho}$ es positivo.

Recíprocamente, sea $\hat{\rho} \in A$ un elemento positivo de traza 1. Por el teorema espectral [15], el Teorema A.0.1 del apéndice A y el Ejemplo B.0.8 del apéndice B

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{2} \rho_i |z_i\rangle\langle z_i|,$$

con $\rho_i \geq 0$, para alguna base ortonormal $\{|z_i\rangle\}_{i=1}^2$ de $\mathbb{C}^2$. Considérese el funcional ρ dado por

$$\rho(a) = \langle \hat{\rho} | a \rangle_A = \mathrm{tr}(\hat{\rho}^* a).$$

Es claro que ρ es lineal y además se satisface $\rho(\mathrm{Id}_2) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}) = 1$. Sea

$$a = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} |z_i\rangle\langle z_j| \ \in \ A$$

un elemento positivo. Entonces $a_{ii} \geq 0$ (pues $a = b^* b$, para algún $b \in A$, por la Proposición A.0.7 del apéndice A). De está forma

$$\rho(a) = \mathrm{tr}(\hat{\rho} a) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i a_{ii} \geq 0,$$

por lo cual ρ es un estado [32]. ■

Observación. (Caracterización de estados de $\mathbb{QS}^2$) En la Sección 4.2 se observó que $\beta = \{\mathrm{Id}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base de A, donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las matrices de Pauli. Como la traza de las matrices de Pauli es 0, todas los estados de A tienen la forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id}_2 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix},$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Esto es debido a que $\hat{\rho}$ es de traza 1 y tiene que ser autoadjunta. Se sigue del Ejemplo A.0.10 del apéndice A que

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Teorema 4.4.2. *Sea $s(-) = \langle \hat{s}|-\rangle_A = tr(\hat{s}^*-)$ un funcional lineal de A. Entonces s es un estado puro si y solo si $\hat{s} = |\xi\rangle\langle\xi|$ para $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^2$ con $||\xi|| = 1$.*

Demostración. Sea s un estado puro (entonces $\hat{s}$ es un elemento positivo y de traza 1 por la proposición anterior). Supóngase que no existe $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^2$ con $||\xi|| = 1$ tal que $\hat{s} \neq |\xi\rangle\langle\xi|$. Puesto que las diadas son una base de A (véase Proposición B.0.4 del apéndice B), por el teorema espectral y la Proposición B.0.6 del apéndice B existen ψ, $\phi \in \mathbb{C}^2$ con $||\psi|| = ||\phi|| = 1$ tales que

$$\hat{s} = \lambda_1|\psi\rangle\langle\psi| + \lambda_2|\phi\rangle\langle\phi|,$$

donde λ_1, λ_2 son los eigenvalores de $\hat{s}$, por lo que son mayores o iguales a 0 y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ya que $\mathrm{tr}(\hat{s}) = 1$. Si se define

$$\rho_\psi(a) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \cdot a) \quad \text{y} \quad \rho_\phi(a) = \mathrm{tr}(|\phi\rangle\langle\phi| \cdot a),$$

entonces ρ_ψ y ρ_ϕ son estados de A ya que $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\phi\rangle\langle\phi|$ son proyectores ortogonales, por lo que son autoadjuntos y sus eigenvalores son 0 y 1 (véase la Proposición B.0.7 del apéndice B), i.e., son elementos positivos de A (véase el Teorema A.0.1 del apéndice A) y son de traza 1 (la suma de los eigenvalores es 1). Además se satisface

$$s = \lambda_1\rho_\psi + \lambda_2\rho_\phi,$$

lo cual es una contradicción ya que s es un estado puro. Por lo anterior existe $|\xi\rangle \in \mathbb{C}^2$ con $||\xi|| = 1$ tal que $\hat{s} = |\xi\rangle\langle\xi|$ con $||\xi|| = 1$.

Recíprocamente, si el estado s dado por $s(a) = \langle|\xi\rangle\langle\xi||a\rangle_A = \mathrm{tr}(|\xi\rangle\langle\xi| \cdot a)$ no fuera un elemento extremal, podríamos escribir a s como una combinación convexa de estados. Sin embargo, esto no es posible ya que $|\xi\rangle\langle\xi|$ es parte de una base ortonormal y de existir tal combinación se tendría una contradicción entre la independencia lineal de $|\xi\rangle\langle\xi|$ en dicha base y los coeficientes de la combinación convexa. ■

Observación. (Carecterización de los estados puros de $\mathbb{QS}^2$) Por la Proposición 4.4.2 y la observación anterior se puede concluir que los estados puros de $\mathbb{QS}^2$ se caracterizan por matrices

$$\hat{s} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix},$$

cumplen $||s||_A^2 = \mathrm{tr}(s^*s) = \mathrm{tr}(ss) = \mathrm{tr}(s^2) = \mathrm{tr}(|\xi\rangle\langle\xi|) = 1$, i.e.,

$$1 = ||\hat{s}||^2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} (1+z)^2 + x^2 + y^2 & \star \\ \star & (1-z)^2 + x^2 + y^2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(1 + z^2 + x^2 + y^2).$$

Por lo tanto un estado s es puro si y solo si

$$\hat{s} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \text{ y se satisface la relación } x^2+y^2+z^2=1.$$

En otras palabras, los estados puros de $\mathbb{QS}^2$ están parametrizados por los puntos de $\mathbb{S}^2$.

Según el análisis e interpretaciones mostradas en la Sección 3.4, si se piensa a los puntos como estados puros, los puntos de $\mathbb{QS}^2$ son $\mathbb{S}^2$ y ésta es otra razón para llamar a $\mathbb{QS}^2$ *la esfera cuántica.*

Dado que los estados de $\mathbb{QS}^2$ están en biyección con las matrices positivas, estos conjuntos se identificarán. Así se obtiene la siguiente definición.

Definición 4.4.3. *(Amplitud de probabilidad y probabilidad de transición) Si ψ y ϕ son vectores tales que $||\psi|| = ||\phi|| = 1$, entonces al número complejo $\langle\psi|\phi\rangle_{\mathbb{C}^2}$ se le llama* la amplitud de probabilidad *de que el estado $|\psi\rangle\langle\psi|$ pase al estado $|\phi\rangle\langle\phi|$. Además, al número real no-negativo $|\langle\psi|\phi\rangle_{\mathbb{C}^2}|^2$ se le llama* la probabilidad de transición *del estado $|\psi\rangle\langle\psi|$ al estado $|\phi\rangle\langle\phi|$.*

Nótese que para $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$ de norma 1, si $\{|i\rangle\}_{i=1}^2$ denota a la base estándar de $\mathbb{C}^2$, entonces

$$\langle|\psi\rangle\langle\psi|||\phi\rangle\langle\phi|\rangle_A = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi||\phi\rangle\langle\phi|) = \langle\psi|\phi\rangle_{\mathbb{C}^2}\,\mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\phi|) = \langle\psi|\phi\rangle_{\mathbb{C}^2}\sum_{i=1}^{2}\langle i|\psi\rangle_{\mathbb{C}^2}\langle\phi|i\rangle_{\mathbb{C}^2},$$

pero $\langle\psi|\phi\rangle^*_{\mathbb{C}^2} = \langle\phi|\psi\rangle_{\mathbb{C}^2} = \mathrm{Id}_2\,\langle\phi|\psi\rangle_{\mathbb{C}^2} = \sum_{i=1}^{2}|i\rangle\langle i|\langle\phi|\psi\rangle_{\mathbb{C}^2} = \sum_{i=1}^{2}\langle i|\psi\rangle_{\mathbb{C}^2}\langle\phi|i\rangle_{\mathbb{C}^2}$, por lo cual

$$\langle|\psi\rangle\langle\psi|||\phi\rangle\langle\phi|\rangle_A = |\langle\psi|\phi\rangle_{\mathbb{C}^2}|^2.$$

La igualdad anterior muestra la consistencia entre $\langle -|-\rangle_A$ y $\langle -|-\rangle_{\mathbb{C}^2}$. La definición anterior junto con la igualdad anterior están en resonancia con el comentario final de la Sección 3.4, **los estados se corresponden con medidas de probabilidad**.

Ejemplo 4.4.4. Sean $\overline{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $\overline{m} = (m_x, m_y, m_z) \in \mathbb{S}^2$. Ahora se calculará la probabilidad de pasar del estado asociado a $\overline{n}$ al estado asociado a $\overline{m}$. Para

$$\hat{s}_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_2 + n_x\sigma_1 + n_y\sigma_2 + n_z\sigma_3) \quad \text{y} \quad \hat{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_2 + m_x\sigma_1 + m_y\sigma_2 + m_z\sigma_3)$$

los estados asociados a $\overline{n}$ y $\overline{m}$, se tiene que

$$\mathrm{tr}(\hat{s}_1\hat{s}_2) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left[(\mathrm{Id}_2 + n_x\sigma_1 + n_y\sigma_2 + n_z\sigma_3)(\mathrm{Id}_2 + m_x\sigma_1 + m_y\sigma_2 + m_z\sigma_3)\right] =$$

$$\frac{1}{2}(1 + \overline{n}\cdot\overline{m}) = \frac{1}{2}(1+\cos(\theta)) = \cos^2(\theta) \approx 1 - \frac{\theta}{4},$$

donde θ es el ángulo entre $\overline{n}$ y $\overline{m}$.

4.5. Geometría Diferencial en $\mathbb{QS}^2$

En esta sección se dará una primera generalización de algunos conceptos de la Geometría Diferencial simplemente copiando lo hecho en la Sección 3.5 pero usando a A [9], [10], [11]. Ésta podría parecer la generalización más natural del Cálculo Diferencial al caso cuántico; sin embargo, para grupos cuánticos se puede realizar una generalización más adecuada [12], [13], [14], [37]. Ambas generalizaciones cubren el caso clásico. Aún bajo la idea de generalización que se presentará, existen varios *cálculos diferenciales* dados mediante álgebras A, A-bimodulos Γ y una transformación lineal d que va de A a Γ que cumple la regla de Leibniz y para todo $w \in \Gamma$ satisface $w = \sum_{k=1}^{n} a_k d(b_k)$ con (no necesariamente únicos) a_k, $b_k \in A$ [31] [37]. En las siguientes subsecciones se presentará el cálculo de De Rham.

4.5.1. Derivaciones de $\mathbb{QS}^2$

En la sección 3.5.1 se mostró una *algebraización* del concepto de campo vectorial mediante derivaciones del álgebra conmutativa $C^\infty(M)$.

Por otra parte, es claro que $\mathfrak{a} := (A, [-,-])$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, donde $[a,b] = ab-bc$. Consideremos el conjunto de derivaciones de $\mathbb{QS}^2$ y el conjunto de derivaciones internas:

$$\mathrm{Der}(A) = \{D : A \to A \mid D \text{ es lineal y } D(ab) = D(a)b + aD(b) \text{ para todo } a, b \in A\}$$

e

$$\mathrm{InDer}(A) := \{D_a \in \mathrm{Der}(A) \mid D_a(b) = [a,b] \text{ para toda } b \in A \text{ y para alguna } a \in A\}.$$

Entonces $\mathrm{Der}(A)$ es un $*$-álgebra de Lie definiendo $D^* = * \circ D \circ *$. A $\mathrm{Der}(A)$ se le puede considerar como el análogo *cuántico de campos vectoriales complejos sobre la esfera cuántica.*

Proposición 4.5.1. $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{InDer}(A)$.

Demostración. Sea $D_a \in \mathrm{InDer}(A)$. Un cálculo directo muestra que $D_a(cb) = D_a(c)b + cD_a(b)$ para todo c, $b \in A$, por lo cual $D_a \in \mathrm{Der}(A)$ e $\mathrm{InDer}(A) \subseteq \mathrm{Der}(A)$.

Por otra parte, sea $D \in \mathrm{Der}(A)$. Considérese la base de A, $\beta = \{\mathrm{Id}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las matrices de Pauli). Como para cualesquiera dos elementos a, $b \in A$ se tiene $D(ab) = D(a)b + aD(b)$, se sigue que $D(\mathrm{Id}_2) = 0$, lo cual implica que $0 = D(\mathrm{Id}_2) = D(\sigma_j^2) = D(\sigma_j)\sigma_j + \sigma_j D(\sigma_j)$, i.e., para cada j, $D(\sigma_j)$ es una matriz que anticonmuta con σ_j. Por lo anterior

$$D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad D(\sigma_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, \quad D(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix},$$

donde a_i, $b_i \in \mathbb{C}$. Dado que $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$ y D es una derivación, se sigue que $ib_1 = b_2$, $a_3 + b_3 = -2a_1$ y $ia_3 - ib_3 = -2a_2$. De esta manera, si x, y, z, $w \in \mathbb{C}$ son tales que $a_1 = y - z$,

$b_1 = w - x$, $b_2 = i(w - x)$, $a_2 = i(y + z)$ y consideramos

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

entonces $D = D_a$. Se sigue que $\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{InDer}(A)$ y por lo tanto $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{InDer}(A)$. ■

Por la proposición anterior, para cada $D \in \mathrm{Der}(A)$, existe $a \in A$ tal que $D = D_a$. Esta es una primera diferencia con el caso clásico en el cual, no hay derivaciones internas pues se está trabajando sobre un álgebra conmutativa (véase Sección 3.5.1). Otra diferencia con el caso clásico es que $\mathrm{Der}(A)$ **NO** es un A-módulo. En efecto, sea $D_a \in \mathrm{Der}(A)$ y $b \in A$. Entonces $D_a(\sigma_1)$ debe anticonmutar con σ_1. Si bD_a fuera una derivación, $bD_a(\sigma_1)$ también debería anticonmutar con σ_1 pero en general esto no sucede, i.e., $bD_a \notin \mathrm{Der}(A)$. Sin embargo, $\mathrm{Der}(A)$ sí es un $Z(A)$-módulo izquierdo libre, donde $Z(A)$ es el centro de A ($\mathrm{Der}(A)$ es un espacio vectorial ya que $Z(A) \cong \mathbb{C}$). Por lo analizado en la sección 3.5.1, se puede pensar a $\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}}$ como el análogo cuántico de campos vectoriales reales sobre la esfera cuántica.

Teorema 4.5.2. $\mathrm{Der}(A) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) := \{a \in A \mid \mathrm{tr}(a) = 0\}$ *como álgebras de Lie sobre* $\mathbb{C}$.

Demostración. De la prueba de la Proposición 4.5.2 se puede concluir que

$$[D_a]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i(w-x) & -y+z \\ 0 & i(x-w) & 0 & -i(y+z) \\ 0 & y-z & i(y+z) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

donde $\beta = \{\mathrm{Id}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Considérese el conjunto de las matrices de Pauli $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, el cual es una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Entonces

$$[D_{\sigma_1}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}, \quad [D_{\sigma_2}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [D_{\sigma_3}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\{[D_{\sigma_i}]_\beta\}_{i=1}^3$ son 3 matrices linealmente independientes entre sí y debido a que $D_{\mathrm{Id}_2} = 0$, β es base de A y $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{InDer}(A)$, se sigue que $\{[D_{\sigma_i}]_\beta\}_{i=1}^3$ generan a $\mathrm{Der}(A)$. Por lo anterior, el conjunto $\gamma := \{h_1, h_2, h_3\}$ con $h_i = D_{\sigma_1}$ es una base de $\mathrm{Der}(A)$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Der}(A)) = 3 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Como $[D_a, D_b] = D_{[a,b]}$ para cualesquiera derivaciones internas D_a, D_b (véase Proposición 3.5.2), se sigue que el conjunto γ satisface

$$[h_r, h_s] = 2i\epsilon_{rs}^t h_t,$$

donde r, s, $t \in \{1, 2, 3\}$ y ϵ_{rs}^t es el tensor de Levi-Civita (i.e, satisfacen las mismas relaciones mostradas en la ec. (4.1) de la Sección 4.2). Así, la transformación $\mathbb{C}$-lineal que asigna h_i a σ_i para $i = 1$, 2, 3 es también un isomorfismo de álgebras de Lie. ■

Proposición 4.5.3. $(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}),[-,-])$ es un álgebra de Lie (con el corchete estándar) simple

Demostración. Supóngase que existe V un ideal no-trivial de $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ y sea $a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3$ un elemento no nulo de V. Si $a_1=a_2=0$, entonces $\sigma_3\in V$ y dado que $[\sigma_3,\sigma_1]=2i\sigma_2$, $[\sigma_3,\sigma_2]=2i\sigma_1$, se sigue σ_1, $\sigma_2\in V$, i.e., $V=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, lo cual es una contradicción. Lo anterior implica que $a_1\neq 0$ o $a_2\neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $a_1\neq 0$. Entonces

$$[\sigma_1,[\sigma_2,a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3]]=4ia_1\sigma_1,$$

por lo que $\sigma_1\in V$ y como $[\sigma_2,\sigma_1]=-2i\sigma_3$, $[\sigma_3,\sigma_1]=2i\sigma_2$, se obtiene que $V=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, lo cual es una contradicción. Lo anterior prueba que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ no tiene ideales no-triviales y por lo tanto, es un álgebra de Lie simple. ■

Corolario 4.5.3.1. $(\mathrm{Der}(A),[-,-])$ *es un álgebra de Lie simple.*

Teorema 4.5.4. $\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}}\cong\mathfrak{su}(2):=\{a\in A\mid a^*=-a \text{ y } \mathrm{tr}(a)=0\}$ *como álgebras de Lie sobre* $\mathbb{R}$.

Demostración. En general para cualquier álgebra de Lie $(B,[-,-])$ se satisface $\mathrm{InDer}(B)_{\mathbb{R}}=\mathrm{InDer}(B)\cap\mathrm{Der}(B)_{\mathbb{R}}=\{D_b\in\mathrm{InDer}(B)\mid D_b=D_{-b^*}\}$ (véase Corolario 3.5.2.1). Para la esfera cuántica, por la Proposición 4.5.1

$$\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}}=\{D_a\in\mathrm{Der}(A)\mid D_a=D_{-a^*}\}.$$

Si $D_a=D_{-a^*}$, entonces $[D_a]_\beta=[D_{-a^*}]_\beta$ y por la ec. (4.2)

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&i(w-x)&-y+z\\0&i(x-w)&0&-i(y+z)\\0&y-z&i(y+z)&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&i(-w^*+x^*)&z^*-y^*\\0&i(-x^*+w^*)&0&i(z^*+y^*)\\0&-z^*+y^*&-i(z^*+y^*)&0\end{pmatrix}.$$

De la igualdad anterior se puede obtener que $\mathrm{Re}(x)=\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Re}(z)=-\mathrm{Re}(y)$ e $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(y)$, donde $\mathrm{Re}(c)$, $\mathrm{Im}(c)$ denotan la parte real e imaginaria de un número complejo c, respectivamente. De esta forma se concluye que si $D_a\in\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}}$, entonces

$$[D_a]_\beta=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&i(\mathrm{Im}(w)-\mathrm{Im}(x))&-2\mathrm{Re}(y)\\0&i(\mathrm{Im}(x)-\mathrm{Im}(w))&0&2\mathrm{Im}(y)\\0&2\mathrm{Re}(y)&-2\mathrm{Im}(y)&0\end{pmatrix}.$$

Claramente se identifican en $[D_a]_\beta$ 3 grados de libertad reales ($\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}})=3$). Además, usando solo escalares reales, $\{i\sigma_1,i\sigma_2,i\sigma_3\}$ es una base de $\mathfrak{su}(2)$ y $\{i\gamma_1,i\gamma_2,i\gamma_3\}$ es una base $\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}}$. Más aún, las dos bases satisfacen las mismas reglas de conmutación. Así, la transformación $\mathbb{R}$-lineal que asigna ih_j a $i\sigma_j$ para $j=1$, 2, 3 es también un isomorfismo de álgebras de Lie. ■

Como para cualquier álgebra de Lie $(B, [-,-])$,

$$\mathrm{Der}(B) = \mathrm{Der}(B)_{\mathbb{R}} \bigoplus i\, \mathrm{Der}(B)_{\mathbb{R}},$$

por los dos teoremas anteriores se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.5.4.1. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \bigoplus i\, \mathfrak{su}(2)$

Por lo mostrado en la Sección 3.5.1., se puede pensar a $\mathrm{Der}(A)_{\mathbb{R}}$ como el análogo cuántico de campos vectoriales reales sobre la esfera cuántica.

Observación. Sea $D_a \in \mathrm{Der}(A)$. Entonces se sabe que el operador e^{D_a} (véase Definición 3.5.3) es una simetría interna[1], donde $e^{D_a}(b) = e^a b e^{-a}$, para toda $b \in A$. Sea f_g una simetría de A. Para $a = \mathrm{Ln}(g)$ (una matriz tiene logaritmo si y solo si es invertible), se tiene que $e^{D_a} = f_g$, i.e., para la esfera cuántica, todas las simetrías son *exponenciación de campos vectoriales.*

4.5.2. A-módulos izquierdos finitamente generados

En la Subsección 3.5.2 se mostró que las secciones de un haz vectorial sobre una variedad suave compacta M se corresponden con $C^\infty(M)$-módulos izquierdos finitamente generados. En esta sección se caracterizarán los A-módulos izquierdos finitamente generados.

Antes de empezar con el análisis, es importante recordar que si Γ es un R-módulo izquierdo, entonces los siguientes enunciados son equivalentes [26]

1. Γ es la suma directa de R-módulos izquierdos simples.
2. Todo R-submódulo izquierdo simple de Γ es un sumando directo de Γ.
3. Γ es la suma (no necesariamente directa) de una familia de R-submódulos izquierdos simples.

Definición 4.5.5. *Un R-módulo izquierdo que satisfaga cualquiera de los 3 enunciados anteriores es llamado un módulo semisimple.*

Proposición 4.5.6. A es un A-módulo izquierdo semisimple.

Demostración. Considérese

$$A_1 = \left\{ a \in A \mid a = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad A_2 = \left\{ a \in A \mid a = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & w \end{pmatrix} \right\}.$$

Supóngase que B_i es un A-submódulo izquierdo propio no-trivial de A_i. Entonces existe $b_i \in B_i$ con $b_i \neq 0$ y existe un elemento no-nulo $\hat{b}_i \in A_i$ tal que $\hat{b}_i \notin B_i$. Es fácil encontrar (aunque

[1] El hecho de que todas las simetrías en la esfera cuántica son internas está en resonancia con el hecho de que todas las derivaciones son internas.

hay que cubrir todos los casos) $a_i \in A$ tal que $a_i b_i = \hat{b}_i$, lo cual es una contradicción (con $i = 1$, 2). Lo anterior muestra que A_1 y A_2 son A-submódulos izquierdos simples de A y se tiene que

$$A = A_1 \bigoplus A_2.$$

Por lo tanto A es un A-módulo izquierdo semisimple. ■

Proposición 4.5.7. Salvo isomorfismos, A_1 es el único A-módulo izquierdo simple.

Demostración. Si N es un A-módulo izquierdo simple, entonces $N = Ax$ para cada $x \in N$. Dado que $A = A_1 \bigoplus A_2$, se tiene que

$$N = A_1 x \bigoplus A_2 x$$

y claramente $A_1 \cong A_2$ como A-módulos izquierdos, se sigue $N \cong A_1$. ■

Con proposición anterior se puede demostrar el teorema 4.5.8

Teorema 4.5.8. *Si Γ es un A-módulo izquierdo (no-cero), entonces Γ es semisimple.*

Demostración. Sea Γ un A-módulo izquierdo no-trivial. Entonces

$$\Gamma = \sum_{\psi \in \Gamma} A\psi,$$

donde $A\psi$ es el A-submódulo izquierdo generado por ψ. Como $A = A_1 \bigoplus A_2$, se tiene que $A\psi = A_1\psi \bigoplus A_2\psi$, donde $A_1\psi$ y $A_2\psi$ son A-submodulos izquierdos simples de Γ, por lo cual, Γ es la suma de A-submodulos izquierdos simples y por lo tanto Γ es un A-módulo izquierdo semisimple. ■

Antes de caracterizar a los A-módulos finitamente generados es necesario el siguiente lema.

Lema 4.5.9. *Si M es un R-módulo finitamente generado tal que*

$$M = \sum_{i \in I} M_i,$$

donde M_i es un R-submódulo de M, entonces M es una suma finita de submodulos.

Demostración. Como $M = \sum_{i \in I} M_i$, entonces las inclusiones $M_i \longrightarrow M$ generan un epimorfismo

$$\phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow M.$$

Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de R-generadores de M. Sea $y_i \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ tal que $\phi(y_i) = x_i$. y_i tiene solo un número finito de entradas no cero. Considérese

$$J = \{j \in I \mid \text{ algún } y_j \text{ tiene una coordenada no-cero en } j\} \subseteq I.$$

Entonces J es finito y $M = \sum_{j \in J} M_j$. ■

Teorema 4.5.10. *Sea Γ un A-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma_i$, donde Γ_i es un A-submódulo simple de Γ.*

Demostración. Como Γ es semisimple (véase Teorema 4.5.8) y por lema anterior,

$$\Gamma = \sum_{j \in J} \Gamma_j,$$

donde J es un conjunto finito y Γ_i es un A-submódulo simple de Γ. Considérese $\hat{I} \subseteq J$ tal que $\sum_{i \in \hat{I}} \Gamma_i$ es una suma directa, i.e.,

$$\Gamma_i \bigcap \sum_{j \in \hat{I}, j \neq i} \Gamma_j = \{0\}$$

para cada $i \in \hat{I}$. Ordenando estos subconjuntos $\hat{I}$ con la inclusión y aplicando el Lema de Zorn se obtiene un subconjunto maximal I con esta propiedad. Si $I = J$ el teorema se sigue. Supóngase que $I \neq J$ y sea $\Gamma' = \sum_{i \in I} \Gamma_i$. Para $i \in J - I$, $\Gamma_i \cap \Gamma'$ es un A-submódulo de Γ_i, el cual es simple, por lo cual $\Gamma_i \cap \Gamma' = \Gamma_i$ o $\Gamma_i \cap \Gamma' = \{0\}$. Si $\Gamma_i \cap \Gamma' = \{0\}$, entonces $\Gamma' + \Gamma_i$ es una suma directa, lo que contradice la maximalidad de I. Lo anterior implica que $\Gamma_i \cap \Gamma' = \Gamma_i$ y se sigue que $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$. De esta forma se obtiene que $\Gamma = \Gamma'$. ■

Corolario 4.5.10.1. *Sea Γ un A-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces $\Gamma \cong A_1^n$ (véase Proposición 4.5.7) como A-módulos para alguna $n \in \mathbb{N}$.*

Con el Teorema 4.5.8 finalmente se puede dar una caracterización de los A-módulos proyectivos.

Teorema 4.5.11. *Todo A-módulo izquierdo es proyectivo.*

Demostración. Sea Γ un A-módulo izquierdo. El caso $\Gamma = 0$ es claro. Sea Γ un A-módulo izquierdo no-trivial. Considérese

$$0 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_3 \longrightarrow 0$$

una suceción exacta corta de A-módulos izquierdos con Γ_2 no-trivial. Por el Teorema 4.5.8, se tiene que Γ_2 es semisimple. También se sabe que la sucesión se escinde si y solo si Γ_1 es un sumando directo [26], pero como la sucesión es exacta, Γ_1 es un A-submódulo izquierdo de Γ_2 y por lo tanto Γ_1 es un sumando directo de Γ_2 (véase Definición 4.5.5). Se concluye que toda sucesión exacta corta de A-módulos izquierdos se escinde. En particular, toda sucesión exacta corta de A-módulos izquierdos de la forma

$$0 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0$$

se escinde y por lo tanto, Γ es un módulo proyectivo. ■

El Teorema 4.5.11 muestra que todo A-módulo izquierdo es proyectivo, en particular, los finitamente generados. Por otro lado, el Corolario 4.5.10.1 da una caracterización de los A-**módulos izquierdos finitamente generados**. Estos módulos se pueden pensar como el análogo cuántico de los **haces vectoriales de dimensión finita sobre la esfera cuántica**.

4.5.3. $\Omega^\bullet(\mathbb{QS}^2)$

En el caso clásico, las formas diferenciales se pueden ver como transformaciones multilineales, alternatnes y $C^\infty(M)$-lineales (véase la Subsección 3.5.3) pues $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ es un $C^\infty(M)$-módulo. En general, esto no sucede, como en el caso de la esfera cuántica donde $\mathrm{Der}(A)$ NO forma un A-módulo izquierdo. Ésta es la razón por la cual hay que generalizar el concepto de formas diferencial como un subálgebra de Chevalley-Eilenberg y no como transformaciones multilineales alternantes A-lineales. Primero que nada, se va a caracterizar por completo el álgebra gradudada $\Omega^\bullet(\mathrm{Der}(A), A)$, donde está tomando la representación estándar de $\mathrm{Der}(A)$ en A. Para ello, se necesitarán los siguientes resultados.

Teorema 4.5.12. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces el conjunto $R_k := \{e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \mid 0 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\}$ es base de $\bigwedge^k V$, donde $\{e_j\}_{j=1}^n$ es base ordenada de V.*

Demostración. Sea $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \bigwedge^k V$. Considérese $M \in M_{k\times n}(\mathbb{K})$ tal que su i-ésimo renglón es el vector $(M_{i1}, ..., M_{in})$, donde M_{ij} son escalares que satisfacen $v_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} e_j$. Entonces

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{j_1=1}^n M_{1j_1} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_k=1}^n M_{kj_k} e_{j_k} = \sum_{j_1,...,j_k=1}^n M_{1j_1} \cdots M_{kj_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}.$$

Nótese que en el último término de la expresión anterior, se tiene una suma sobre todas las posibles combinaciones de índices $j_1, ..., j_k$ con $j_l \in \{1, ..., n\}$. Además, si en una combinación de índices $j_1, ..., j_k$ hay dos índices con el mismo valor, entonces $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} = 0$ (pues son antisimétricas), por lo cual, sólo las combinaciones de índices $j_1, ..., j_k$ en las que todos los índices son distintos entre sí forman sumandos distintos de 0 en último término de la expresión anterior, i.e, sólo contribuyen las combinaciones que son permutaciones de k elementos y como $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} = 0$ (pues son antisimétricas) entonces

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{j_1,...,j_k=1} M_{1j_1} \cdots M_{kj_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} =$$

$$\sum_{0 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) M_{1\sigma(j_1)} \cdots M_{k\sigma(j_k)} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \right) =$$

$$\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \det(M_{j_1,\ldots,j_k}) e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k},$$

donde $M_{j_1,\ldots,j_k}\in M_k(\mathbb{K})$ cuya i-ésima columna es la j_i-ésima columna de M. Dado que todo elemento en $\bigwedge^k V$ es combinación lineal de elementos de la forma $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$, se sigue que el conjunto R_k genera a $\bigwedge^k V$. Supóngase ahora que

$$0=\sum_{0\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \lambda_{j_1,\ldots,j_k} e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}=\sum_I \lambda_I e_I,$$

donde se ha definido $\lambda_I := \lambda_{j_1,\ldots,j_k}$ y $e_I := e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}$ si $I=\{j_1,...,j_k\}\subseteq\{1,...,n\}$ tal que $0\leq j_1<\cdots<j_k\leq n$. Para $\hat{I}=\{\hat{j}_1,...,\hat{j}_k\}\subseteq\{1,...,n\}$ tal que $0\leq \hat{j}_1<\cdots<\hat{j}_k\leq n$, considérese

$$\begin{aligned} f: V^k &\longrightarrow \mathbb{R}\\ v &\longmapsto \det(M_{\hat{j}_1,\ldots,\hat{j}_k}), \end{aligned}$$

donde $v=(v_1,...,v_k)$. Claramente f es multilineal y alternante. Así, por la propiedad universal de $\bigwedge^k V$ (la cual es inducida por la propiedad universal del producto tensorial pero sólo para transformaciones multilineales y alternantes), se tiene

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\wedge^k"] \arrow[dr, "f"'] & \bigwedge^k V \arrow[d, dashed, "\exists!\, T_{\hat{I}}\ \text{lineal}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd} .$$

Obsérvese que $T_{\hat{I}}(e_I)=1$ si $I=\hat{I}$ (como conjunto ordenado) y $T_{\hat{I}}(e_I)=0$ si $I\neq\hat{I}$ (como conjunto ordenado). Por lo anterior

$$0=T_{\hat{I}}(\sum_I \lambda_I e_I)=\sum_I \lambda_{\hat{I}} T_{\hat{I}}(\lambda_I e_I)=\lambda_{\hat{I}}.$$

La arbitrariedad de $\hat{I}$ implica que $\lambda_{\hat{I}}=0$ para todo I, por lo cual R_k es linealmente independiente y por lo tanto, R_k es base de $\bigwedge^k V$. ■

Proposición 4.5.13. $\dim_{\mathbb{K}}\left(\bigwedge^k V\right)=\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}$.

Demostración. Como $e_{j_{\sigma(1)}} \wedge e_{j_{\sigma(2)}} \wedge \cdots \wedge e_{j_{\sigma(k)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k$ donde σ es una permutación de $1, ..., k$ en $j_1, ..., j_k$ y solo tenemos n elementos para escoger (los n elementos de $\{e_j\}_{j=1}^n$), entonces la cardinalidad de R_k es el número de subconjuntos de k elementos (cada subconjunto de k elementos es un término de la base) del conjunto $\{e_j\}_{j=1}^n$ sin repeticiones. Por lo tanto $\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigwedge^k V \right) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. ∎

Además, hay que considerar los siguientes lemas

Lema 4.5.14. *(Primer Lema de Whitehead) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre un campo de característica 0. Si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de $\mathfrak{g}$ con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $H^1_{CE}(\mathfrak{g}, V) = 0$ (véase Definición 3.5.7) [30].*

Lema 4.5.15. *(Segundo Lema de Whitehead) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre un campo de característica 0. Si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de $\mathfrak{g}$ con V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $H^2_{CE}(\mathfrak{g}, V) = 0$ [30].*

Por definición, $\Omega^k(\operatorname{Der}(A), A) = \bigwedge^k \operatorname{Der}(A)^* \bigotimes A$, donde aquí $\operatorname{Der}(A)^*$ denota al espacio dual. Además, se sabe que $\gamma = \{h_1, h_2, h_3\}$ es base de $\operatorname{Der}(A)$ (véase Teorema 4.5.2). Sea $\gamma^* = \{h^1, h^2, h^3\}$ la base dual de γ. Para $k = 0$, $\Omega^k(\operatorname{Der}(A), A) = A$, cuya base es $\beta = \{\sigma_0 := \operatorname{Id}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Por el Teorema 4.5.12, para $1 \leq k \leq 3$ el conjunto $\hat{R}_k = \{R_k \otimes \sigma_i\}_{i=0}^3 = \{(h^{j_1} \wedge \cdots \wedge h^{j_k}) \otimes \sigma_i \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq 3\}_{i=0}^3$, donde la transformación $(h^{j_1} \wedge \cdots \wedge h^{j_k}) \otimes \sigma_i$ está dada por

$$\begin{aligned} (h^{j_1} \wedge \cdots \wedge h^{j_k}) \otimes \sigma_i : \operatorname{Der}(A) \times \cdots \times \operatorname{Der}(A) &\longrightarrow A \\ (D_{a_1}, \ldots, D_{a_k}) &\longmapsto \det\left(\begin{pmatrix} h^{j_1}(D_{a_1}) & \cdots & h^{j_k}(D_{a_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ h^{j_1}(D_{a_k}) & \cdots & h^{j_k}(D_{a_k}) \end{pmatrix} \right) \sigma_i, \end{aligned}$$

es base de $\Omega^k(\operatorname{Der}(A), A)$. Además se sigue de la Proposición 4.5.13, $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^k(\operatorname{Der}(A), A)) = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix} \cdot 4$.

Por otro lado, considérese la diferencial d del complejo $(\Omega^\bullet(\operatorname{Der}(A), A), d)$ (véase la ec. (3.1)). Entonces para cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} d^0 a : \operatorname{Der}(A) &\longrightarrow A \\ D_b &\longmapsto D_b(a) = [b, a]; \end{aligned}$$

para cada $\alpha \in \Omega^1(\operatorname{Der}(A), A)$, $d^1\alpha \in \Omega^2(\operatorname{Der}(A), A)$ está dada por (usando la Proposición 3.5.2)

$$\begin{aligned} d^1\alpha : \operatorname{Der}(A) \times \operatorname{Der}(A) &\longrightarrow A \\ (D_a, D_b) &\longmapsto [a, \alpha(D_b)] - [b, \alpha(D_a)] - \alpha(D_{[a,b]}). \end{aligned}$$

y para cada $\alpha \in \Omega^2(\mathrm{Der}(A), A)$, $d^2\alpha \in \Omega^3(\mathrm{Der}(A), A)$ está definida por (usando la Proposición 3.5.2)

$$\begin{aligned} d^2\alpha : \mathrm{Der}(A) \times \mathrm{Der}(A) \times \mathrm{Der}(A) &\longrightarrow A \\ (\ D_c\ ,\ \ D_a\ ,\ \ D_b\ ) &\longmapsto [a, \alpha(D_b, D_c)] - [b, \alpha(D_a, D_c)] + [c, \alpha(D_a, D_b)] \\ &\qquad - \alpha(D_{[a,b]}, D_c]) + \alpha(D_{[a,c]}, D_b) - \alpha(D_{[b,c]}, D_a). \end{aligned}$$

Además (véase la observación abajo de la Definición 3.5.7),

$$H^0_{CE}(\mathrm{Der}(A), A) = A^{\mathrm{Der}(A)} = \{a \in A \mid D_b(a) = [b, a] = 0 \text{ para todo } b \in A\} = Z(A) \cong \mathbb{C}$$

y por el Corolario 4.5.3.1 y los lemas de Whitehead se tiene que

$$H^1_{CE}(\mathrm{Der}(A), A) = H^2_{CE}(\mathrm{Der}(A), A) = 0.$$

Se sigue de la definición de los espacios de cohomología (véase Definición 3.5.7) que $\mathrm{Ker}(d^2) = \mathrm{Im}(d^1)$ y $\mathrm{Ker}(d^1) = \mathrm{Im}(d^0)$. Más aún, dado que $H^0_{CE}(\mathrm{Der}(A), A) = \mathrm{Ker}(d^0) = \mathbb{C}$, se obtiene que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(d^0)) = 3$ ya que $\dim_{\mathbb{C}}(A) = 4$. De esta manera

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^3_{CE}(\mathrm{Der}(A), A)) = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^3(\mathrm{Der}(A), A)) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(d^2)) =$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^3(\mathrm{Der}(A), A)) - \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^2(\mathrm{Der}(A), A)) + \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(\mathrm{Der}(A), A)) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(d^0))$$
$$= 4 - 12 + 12 - 3 = 1,$$

por lo cual

$$H^3_{CE}(\mathrm{Der}(A), A) \cong \mathbb{C}.$$

De esta caracterización de los espacios de cohomología se puede concluir $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(d^1)) = 3$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(d^1)) = 9 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}(d^2))$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(d^2)) = 3$.

Hay que recordar que en la Sección 3.5.3 se observó que el álgebra de formas diferenciales se puede obtener considerando el subálgebra generada por $span_{\mathbb{C}}\{a_0\, da_1 \wedge \cdots \wedge da_k \mid a_i \in C^\infty(M)\}$.

Definición 4.5.16. *(Formas diferenciales en $\mathbb{QS}^2$) Se define el espacio de formas formas diferenciales en la esfera cuántica como* $\Omega^\bullet(\mathbb{QS}^2) := \bigoplus_{k=0}^{3} \Omega^k(\mathbb{QS}^2)$, *donde* $\Omega^0(\mathbb{QS}^2) := A$, $\Omega^1(\mathbb{QS}^2) := span_A\{da \mid a \in A\} = span_A\{\mathrm{Im}(d^0)\}$ *y para* $k > 1$, $\Omega^k(\mathbb{QS}^2) := span_A\{\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \mid \omega_i \in \Omega^1(\mathbb{QS}^2)\}$.

Como $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(d^0)) = 3$ se tiene que $\{d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3\}$, donde $d\sigma_s = 2i \sum_{t=1}^{3} \epsilon^p_{ts} h^t \otimes \sigma_p$, es una base de $\mathrm{Im}(d^0)$. Un cálculo directo muestra que salvo para la matriz identidad y la matriz 0, $a\, d\sigma_i \notin \mathrm{Im}(d^0)$ para $i = 1, 2, 3$ con $a \in A$. Por lo anterior (y como $\dim_{\mathbb{C}}(A) = 4$), $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(\mathbb{QS}^2)) =$

$\dim_{\mathbb{C}}(span_A\{\mathrm{Im}(d^0)\}) = 3 \cdot 4 = 12 = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega^1(\mathrm{Der}(A), A))$, i.e., $\Omega^1(\mathbb{QS}^2) = \Omega^1(\mathrm{Der}(A), A)$ y por construcción, se tiene que $\Omega^\bullet(\mathbb{QS}^2) = \Omega^\bullet(\mathrm{Der}(A), A)$. Ésta es una diferencia con el caso clásico: el álgebra de formas diferenciales coincide con todo el álgebra de Chevalley-Eilenberg de las derivaciones. Más aún, la cohomología de De Rham de A es igual a la cohomología de Chevaley-Eilenberg de $\mathrm{Der}(A)$, por lo cual, ya se han calculado las dimensiones de las formas diferenciales exactas y cerradas en cada caso. Otra diferencia con el caso clásico es que, en general, $\sigma_r d\sigma_s(h_t) \neq d\sigma_s(h_t)\,\sigma_r$ (la multiplicación por elementos de A a la derecha y a la izquierda está relacionada mediante la regla de Leibniz).

Apéndice A

Elementos Positivos de un C^*-álgebra con unidad

Teorema A.0.1. *Sea* $(A, \mathbb{1}, || \ ||, *)$ *un* C^**-álgebra con unidad y sea* $a \in A$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. $a \geq 0$ *(véase Definición 2.2.7).*

2. a *es hermitiano y* $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ *(véase Definición 2.1.11).*

3. a *es hermitiano y* $||t\mathbb{1} - a|| \leq t$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $||a|| \leq t$.

4. a *es hermitiano y* $||t\mathbb{1} - a|| \leq t$ *para alguna* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $||a|| \leq t$.

Demostración. Se empezará probando que el primer enunciado es equivalente al segundo. Es claro que si a es positivo entonces a es hermitinano. Nótese que para toda $\lambda \in \mathbb{C}$ y para toda $b \in A$,

$$\lambda\mathbb{1} - b^2 = -(b - \sqrt{\lambda}\mathbb{1})(b + \sqrt{\lambda}\mathbb{1})$$

por lo que $\lambda \in \sigma(b^2)$ si y solo si $\sqrt{\lambda} \in \sigma(b)$ o $-\sqrt{\lambda} \in \sigma(b)$, i.e., $\sigma(b^2) = \sigma(b)^2$. Dado que a es positivo, existe b hermitiano tal que $a = b^2$. De esta forma $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2$ y como $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}$ (por la Proposición 2.2.10) se concluye que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ (recuérdese que $\sigma(a)$ es compacto, véase Teorema 2.1.13).

Recíprocamente, sea a un elemento hermitiano con $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$. Tomando $(\mathrm{span}_A(a), \mathbb{1}, || \ ||, *)$ el C^*-subálgebra con unidad generado por $\{\mathbb{1}, a\}$, es claro que ésta es conmutativa y por el teorema de Gelfand-Naimark (véase Teorema 2.2.18) es isométricamente isomorfa a

$$(C(\Omega(\mathrm{span}_A(a))), 1(x), || \ ||_\infty, *).$$

Nótese que $\Gamma(a) = \Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$, por lo que $\Gamma(a)$ es real-valuada. Si existiera $\kappa \in \Omega(\mathrm{span}_A(a))$ tal que $\Gamma(a)(\kappa) = \kappa(a) < 0$, entonces $\kappa(a) \notin \sigma(a)$ y se tiene que $\kappa(a)1(x) - \Gamma(a)$ es invertible.

Pero $(\kappa(a)1(x) - \Gamma(a))(\kappa) = 0$ lo cual es una contradicción. Lo anterior muestra que $\Gamma(a)$ es una función no-negativa y es posible definir la función $\Gamma(a)^{1/2}$. Denotando por $a^{1/2}$ al elemento en $\operatorname{span}_A(a)$ asociada a $\Gamma(a)^{1/2}$ (por medio de la transformada de Gelfand) se obtiene que ${a^{1/2}}^2 = a$. Además dado que $\Gamma(a)^{1/2}$ es no-negativa $\Gamma(a)^{1/2} = \Gamma(a)^{1/2^*} = \Gamma(a^{1/2^*})$ y debido a que Γ es inyectiva $a^{1/2^*} = a^{1/2}$, i.e., $a^{1/2}$ es hermitiano y por lo tanto $a \geq 0$.

Ahora se proseguirá a probar que el segundo enunciado es equivalente al cuarto. Como a es hermitiano, por lo Proposición 2.2.10 se sabe que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Además, por el Lema 2.2.8 se sigue que $\sigma(a) \subseteq [-||a||, ||a||]$. Considérese

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto t - x, \end{aligned}$$

para alguna $t \in \mathbb{R}$ que cumpla $||a|| \leq t$. Esta función es continua, monotona y decreciente en $[-||a||, ||a||]$, por lo que tomando su restricción en $\sigma(a)$ (el cual es compacto por el Teorema 2.1.13)

$$||f_t|_{\sigma(a)}||_\infty = f_t(\text{ínf}\{\sigma(a)\}).$$

Nótese que para $||a|| \leq t$,

$$\lambda \in \sigma(t\mathbb{1} - a) \iff (t-\lambda)\mathbb{1} - a \text{ es invertible } \iff t - \lambda \in \sigma(a) \iff f_t(\lambda) \in \sigma(a),$$

por lo cual $f_t(\sigma(a)) = \sigma(f_t(a)) = \sigma(t\mathbb{1} - a)$ y se sigue que

$$||f_t|_{\sigma(a)}||_\infty = f_t(\text{ínf}\{\sigma(a)\}) = \text{ínf}\{f_t(\sigma(a))\} = \text{ínf}\{\sigma(t\mathbb{1} - a)\} = ||t\mathbb{1} - a||,$$

donde la última igualdad es debido al Lema 2.2.8 (y la definición del radio espectral de un elemento). Además, nótese que $f_t(x) \leq t$ si y solo si $0 \leq x$. De esta manera se tiene que (recuérdese que $\sigma(a)$ es compacto, véase Teorema 2.1.13)

$$\sigma(a) \subset \mathbb{R}^{\geq 0} \iff 0 \leq \text{ínf}\{\sigma(a)\} \iff f_t(\text{ínf}\{\sigma(a)\}) \leq t \iff ||t\mathbb{1} - a|| \leq t.$$

Hay que mencionar que la demostración anterior también muestra que el segundo enunciado es equivalente al tercer enunciado [3], [24]. ■

Ejemplo A.0.2. Considérese la C^*-álegbra con unidad del ejemplo 2.2.4, $(B(\mathcal{H}), \text{id}_\mathcal{H}, || \, ||_{\text{op}}, *)$. Entonces $T \in B(\mathcal{H})$ es positivo si y solo si $\langle x, T(x) \rangle \geq 0$ para toda $x \in \mathcal{H}$. En efecto, si $T = U^2$ para $U \in B(\mathcal{H})$ hermitiano, entonces

$$\langle x, T(x) \rangle = \langle x, U^2(x) \rangle = \langle U(x), U(x) \rangle \geq 0.$$

Si para toda $x \in \mathcal{H}$ se tiene que $0 \leq \langle x, T(x) \rangle$, entonces

$$\langle x, T(x) \rangle - \langle x, T^*(x) \rangle = \langle x, T(x) \rangle - \langle T(x), x \rangle = 0$$

y se sigue de la unicidad el operador adjunto que $T = T^*$, i.e., T es hermitiano. Además si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces para toda $x \in \mathcal{H}$

$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle \leq \langle (T + \lambda id_{\mathcal{H}})(x), x\rangle \leq ||(T + \lambda id_{\mathcal{H}})(x)||\,||x||.$$

Así, si $x \neq 0$,

$$\lambda||x|| \leq ||(T + \lambda id_{\mathcal{H}})(x)||.$$

Para $0 < \lambda$ se tiene que $0 < ||(T + \lambda id_{\mathcal{H}})(x)||$ siempre que $||x|| \neq 0$, i.e., $(T + \lambda id_{\mathcal{H}})(x) \neq 0$ si $||x|| \neq 0$ y se sigue que $T + \lambda id_{\mathcal{H}}$ es inyectiva. Como

$$(\mathrm{Im}(T + \lambda id_{\mathcal{H}}))^{\perp} = (\mathrm{Ker}(T + \lambda id_{\mathcal{H}}))^* = \mathrm{Ker}(T + \lambda id_{\mathcal{H}}) = 0,$$

se obtiene que $\mathrm{Im}(T + \lambda id_{\mathcal{H}})$ es denso en $(\mathcal{H}, \langle -|-\rangle)$ [1]. Más aún, el inverso de $T + \lambda id_{\mathcal{H}}$ está acotado ya que

$$||(T + \lambda id_{\mathcal{H}})^{-1}(y)|| \leq \frac{1}{\lambda}||(T + \lambda id_{\mathcal{H}}) \circ (T + \lambda id_{\mathcal{H}})^{-1}(y)|| = \frac{||y||}{\lambda}.$$

De esta manera se obtiene que $T + \lambda id_{\mathcal{H}}$ es invertible en $(B(\mathcal{H}), \mathrm{id}_{\mathcal{H}}, ||\ ||_{\mathrm{op}}, *)$ por lo cual $-\lambda \neq \sigma(T)$ y se concluye que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$. El teorema anterior muestra que entonces T es positivo [1].

Proposición A.0.3. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Si se define $A^+ := \{a \in A \mid a \geq 0\}$, entonces A^+ es cerrado. Además, si a, $b \in A^+$, entonces $a + b \in A^+$.

Demostración. Sea $\{a_j\}_{j\in J}$ una red en A^+ convergente a un elemento a. De esta forma también se tiene que $\{||a_j||\}_{j\in J}$ converge a $||a||$. Para alguna $t \in \mathbb{R}$ tal que $||a_j|| \leq t$ para toda $j \in J$, por el teorema anterior se sigue que

$$||t\mathbb{1} - a_j|| \leq t$$

para toda $j \in J$ y se sigue que

$$||t\mathbb{1} - a|| = \lim_{j\in J} ||t\mathbb{1} - a_j|| \leq t.$$

Por el Teorema A.0.1 se obtiene que $a \geq 0$ y por lo tanto A^+ es cerrado.

Por otro lado, sean a, $b \in A^+$ y $t = ||a|| + ||b||$, que evidentemente es mayor que $||a + b||$. Obsérvese que

$$||t\mathbb{1} - (a + b)|| = ||(||a||\mathbb{1} - a) + (||b||\mathbb{1} - b)|| \leq ||(||a||\mathbb{1} - a)|| + ||(||b||\mathbb{1} - b)|| \leq ||a|| + ||b|| = t$$

(donde en la última desigualdad se ha usado el teorema anterior). De esta manera por el Teorema A.0.1 se concluye que $a + b \in A^+$ [24], [25]. ∎

Lema A.0.4. *Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Entonces para toda a, $b \in A$ se tiene que $\sigma(ab) - \{0\} = \sigma(ba) - \{0\}$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ y consíderese $x = \lambda^{-1}\mathbb{1} + \lambda^{-1}b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}a$. Entonces

$$x(\lambda\mathbb{1} - ba) = (\lambda^{-1}\mathbb{1} + \lambda^{-1}b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}a)(\lambda\mathbb{1} - ba) = \mathbb{1} - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}b(\lambda - ab)^{-1}(\lambda a - aba) =$$

$$\mathbb{1} - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}b(\lambda - ab)^{-1}(\lambda - ab)a = \mathbb{1} - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}ba = \mathbb{1}.$$

De manera análoga se prueba que $(\lambda\mathbb{1} - ba)x = \mathbb{1}$. Lo anterior muestra que $\lambda\mathbb{1} - ab$ es invertible si y solo si $\lambda\mathbb{1} - ba$ también es invertible y el lema se sigue [25]. ■

Lema A.0.5. *Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad y a un elemento hermitiano. Entonces existen a^+, $a^- \in A$ elementos positivos tales que $a = a^+ - a^-$ y $a^+a^- = 0$.*

Demostración. Como a es hermitiano, considerando $(\mathrm{span}_A(a), \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ el C^*-subálgebra con unidad generado por $\{\mathbb{1}, a\}$, es claro que ésta es conmutativa y por el teorema de Gelfand-Naimark (véase Teorema 2.2.18) es isométricamente isomorfa a $(C(\Omega(\mathrm{span}_A(a))), 1(x), ||\ ||_\infty, *)$. Además a^2 es un elemento positivo. De la misma manera que en la prueba del Teorema A.0.1, definínase $|a| := a^{2^{1/2}}$, $a^+ := \dfrac{1}{2}(|a| + a)$ y $a^- := \dfrac{1}{2}(|a| - a)$. Claramente $a = a^+ - a^-$ y $a^+a^- = 0$. Por definición

$$\Gamma(|a|) = \Gamma(a^2)^{1/2} = \Gamma(a)^{2^{1/2}} = |\Gamma(a)|.$$

Así, $\Gamma(|a|)$ es no-negativa y es posible definir un elemento $b \in \mathrm{span}_A(a)$ tal que $\Gamma(b) = \Gamma(|a|)^{1/2}$, sea hermitiano y satisfaga $b^2 = |a|$ (de la misma manera que en la prueba del Teorema A.0.1); por lo cual $|a| \geq 0$. Como

$$\Gamma(a^+) = \frac{1}{2}(|\Gamma(a)| + \Gamma(a)) \quad \text{y} \quad \Gamma(a^+) = \frac{1}{2}(|\Gamma(a)| - \Gamma(a)),$$

se sigue que $\Gamma(a^+)$ y $\Gamma(a^-)$ son no-negativas y por un procedimiento análogo se obtiene que $a^+ \geq 0$ y $a^- \geq 0$ [21]. ■

Con los lemas anteriores es posible demostrar una última caracterización de los elementos positivos.

Proposición A.0.6. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Entonces

$$A^+ = \{a^*a \mid a \in A\}.$$

Demostración. Sea $a \in A^+$. Entonces existe $b \in A$ hermitiano tal que $a = b^2 = bb = b^*b$.

Supóngase que existe $d \in A$ tal que $-d^*d \in A^+$. Por el Lema A.0.4 se sabe que $\sigma(-d^*d) - \{0\} = \sigma(-dd^*) - \{0\}$, por lo cual $-dd^* \in A^+$. Tomando b, $c \in A$ elementos hermitianos tales que $d = b + ic$ (justo como en la demostración de la Proposición 2.2.13), se tiene

$$d^*d + dd^* = 2b^2 + 2c^2,$$

por lo cual $d^*d = 2b^2 + 2c^2 - dd^* \geq 0$, debido a la Proposición A.0.3. Dado que $\sigma(x) = -\sigma(x)$ para toda $x \in A$, se sigue $\sigma(d^*d) = \mathbb{R}^{\geq 0} \cap \mathbb{R}^{\leq 0} = \{0\}$ y por el Lema 2.2.8 $||d||^2 = ||d^*d|| = r(d^*d) = 0$.

Así $||d||^2 = 0$ y se concluye que $d = 0$.

Sea $a \in A$. Como $b = a^*a$ es un elemento hermitiano, por el Lema A.0.5, se puede escribir a b como $b = b^+ - b^-$, donde b^+, $b^- \in A$ son elementos positivos y $b^+b^- = 0$. Si se define $d = ab^-$, entonces

$$-d^*d = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = b^{-3} \in A^+$$

y por lo desarrollado anteriormente se tiene que $0 = d = b^{-3}$. Por lo tanto $b^- = 0$ y $a^*a = b^+$ [21]. ■

Es obvio que si $0 \leq \lambda$, entonces $\lambda a \in A^+$ siempre que $a \in A^+$. Por esto y por la proposición anterior al conjunto A^+ se le suele llamar como *el cono positivo.*

Definición A.0.7. *(Orden parcial en A^+) Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. En $A^+ := \{a \in A \mid a \geq 0\}$ se puede definir un orden parcial dado por $a \leq b$ si y solo si $0 \leq b - a$.*

Proposición A.0.8. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Si a, $b \in A^+$ tal que $a \leq b$, entonces $||a|| \leq ||b||$ y $||a||\mathbb{1} \leq ||b||\mathbb{1}$.

Demostración. Por el teorema de Gelfand-Naimark (véase Teorema 2.2.18), el C^*-subálgebra conmutativa con unidad generado por $\{\mathbb{1}, b\}$, $(\text{span}_A(b), \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ es isométricamente isomorfa a $(C(\Omega(\text{span}_A(b))), 1(x), ||\ ||_\infty, *)$. Entonces por el Teorema 2.1.19 se sabe que $||\kappa||_\infty = 1$ y como $||b|| = ||\Gamma(b)||_\infty$, se sigue que $||b||1(x) - \Gamma(b) = \Gamma(||b||\mathbb{1} - b)$ es no-negativa y por un argumento análogo al mostrado en la demostración del Teorema A.0.1 se obtiene $0 \leq ||b||\mathbb{1} - b$. Se sigue que $a \leq ||b||\mathbb{1}$. Aplicando el mismo argumento pero ahora sobre el C^*-subálgebra conmutativa con unidad generado por $\{\mathbb{1}, a\}$ se obtiene que $(||b|| - ||a||)1(x) = (||b|| - ||a||)\Gamma(\mathbb{1})$ es una función no-negativa y por lo tanto $||a|| \leq ||b||$ y $||a||\mathbb{1} \leq ||b||\mathbb{1}$ [21]. ■

Proposición A.0.9. Sea $(A, \mathbb{1}, ||\ ||, *)$ un C^*-álgebra con unidad. Entonces para toda $a \in A$ existen a_0, a_1, a_2, $a_3 \in A^+$ tales que

$$\sum_{k=0}^{3} i^k a_k = a$$

y $||a_k|| \leq ||a||$.

Demostración. Dada $a \in A$, se tiene que

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i\frac{a - a^*}{2i},$$

donde $\frac{a + a^*}{2}$ y $\frac{a - a^*}{2i}$ son hermitianos. Por el Lema A.0.5 existen a_0, a_1, a_2, $a_3 \in A^+$ tales que

$$\frac{a + a^*}{2} = a_0 - a_2 \quad \text{y} \quad \frac{a - a^*}{2i} = a_1 - a_3.$$

Se sigue que $a = \sum_{k=0}^{3} i^k a_k$. Finalmente, nótese que $r(a_k) \leq r(a)$ y por el Lema 2.2.8 se obtiene $||a_k|| \leq r(a) \leq ||a||$. Por lo tanto $||a_k|| \leq ||a||$. ∎

Para finalizar este apéndice se dará una caracterización de las matrices de 2 por 2 con coeficientes complejos (véase Ejemplo 2.2.5).

Ejemplo A.0.10. Sea $a \in M_2(\mathbb{C})$ positiva. Por la Proposición A.0.6 $a = b^*b$ para alguna $b \in M_2(\mathbb{C})$. Entonces

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2^* & a_4 \end{pmatrix},$$

donde $a_1,\, a_4 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Si $p(t)$ denota al polinomio característico de a, entonces

$$p(t) = (a_1 - t)(a_4 - t) - |a_2|^2 = t^2 - (a_1 + a_4)t + a_1a_4 - |a_2|^2.$$

Más aún, por el Teorema A.0.1 los eigenvalores de a (i.e., el espectro de a) deben ser positivos, por lo cual

$$0 \leq \frac{(a_1 + a_4) \pm \sqrt{(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - |a_2|^2)}}{2}$$

y se tiene que

$$-(a_1 + a_4) \leq \pm\sqrt{(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - |a_2|^2)}.$$

Cuando la raíz es positiva, la condición anterior se cumple trivialmente. Cuando la raíz es negativa se obtiene la condición

$$0 \leq a_1a_4 - |a_2|^2$$

o equivalentemente

$$|a_2|^2 \leq a_1a_4.$$

Apéndice B

Notación de Dirac y Proyectores

Teorema B.0.1. *(Teorema de representación de Riesz). Sea $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y sea $\mathcal{H}^*$ su espacio dual (funciones lineales y continuas). Si $f \in \mathcal{H}^*$, entonces existe un único $v \in \mathcal{H}$ tal que $f(u) = \langle v|u \rangle$ para todo $u \in \mathcal{H}$ [28].*

El teorema anterior justifica la notación de Dirac: Sea $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y sea $\mathcal{H}^*$ su espacio dual. A los elementos $v \in \mathcal{H}$ se les denota como $|v\rangle$ y a los elementos $f \in \mathcal{H}^*$ se les denota como $\langle v|$, donde v es el único vector de $\mathcal{H}$ tal que $f(u) = \langle v|u\rangle$ para todo $u \in \mathcal{H}$.

Proposición B.0.2. Sea $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, v, $u \in \mathcal{H}$. Entonces $|\lambda v + u\rangle = \lambda|v\rangle + |u\rangle$ y $\langle \lambda v + u| = \overline{\lambda}\langle v| + \langle u|$

Demostración. Se sigue de formulación de la notación de Dirac y del teorema de representación de Riesz. ■

Definición B.0.3. *(Diada) Sea $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert. Dados $|v\rangle \in \mathcal{H}$ y $\langle u| \in \mathcal{H}^*$, se define una diada como la transformación*

$$\begin{aligned} |v\rangle\langle u| : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ |w\rangle &\longmapsto \langle u|w\rangle|v\rangle. \end{aligned}$$

Es claro que la transformación anterior es lineal y continua (y por lo tanto acotada).

Proposición B.0.4. Sea $(\mathcal{H}, \langle - | - \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert separable y sea $\{|v_i\rangle\}_{i \in A}$ una base de Schauder[1] ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces $\{|v_i\rangle\langle v_j|\}_{i,j \in A}$ es una base de Schauder para $B(\mathcal{H})$ (véase Ejemplo 2.2.4). En particular $\mathrm{id}_{\mathcal{H}} = \sum_{i \in A} |v_i\rangle\langle v_i|$.

[1]Una base de Schauder de un espacio de Banach $\mathcal{B}$ es un conjunto numerable $\{b_i\}_{i \in A}$ que es linealmente independiente y para $b \in \mathcal{B}$ existen escalares $\{\lambda_i\}_{i \in A}$ tales que

$$b = \sum_{i \in A} \lambda_i b_i.$$

Si $dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}) < \infty$, entonces las bases de Schauder son de cardinalidad finita.

Demostración. Sean $\{\lambda_{ij}\}_{i,j\in A}$ tales que $\sum_{i,j\in A} \lambda_{ij}|v_i\rangle\langle v_j| = 0$. Entonces, para cada r

$$0 = 0|v_i\rangle = (\sum_{i,j\in A} \lambda_{ij}|v_i\rangle\langle v_j|)|v_r\rangle = \sum_{i,j\in A} \lambda_{ij}\langle v_j|v_r\rangle|v_i\rangle = \sum_{i\in A} \lambda_{ir}|v_i\rangle.$$

Como $\{|v_i\rangle\}_{i\in A}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que $\lambda_{ir} = 0$, lo cual implica que $\lambda_{ij} = 0$ para todo i, $j \in A$. Por lo tanto $\{|v_i\rangle\langle v_j|\}_{i,j\in A}$ es un conjunto linealmente independiente en $B(\mathcal{H})$.

Sea $T \in B(\mathcal{H})$ y sea $|w\rangle \in \mathcal{H}$. Como $\{|v_i\rangle\}_{i\in A}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}$, se tiene que

$$|w\rangle = \sum_{i\in A} \langle v_i|w\rangle|v_i\rangle.$$

Además $|Tv_j\rangle = \sum_{i,j\in A} a_{ij}|v_i\rangle$, para $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Por lo anterior $|Tw\rangle = \sum_{i,j\in A} a_{ij}\langle v_i|w\rangle|v_i\rangle$. Considérese la transformación f de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ dada por

$$f|w\rangle = \left(\sum_{i,j\in A} a_{ij}|v_i\rangle\langle v_j|\right)|w\rangle,$$

la cual es lineal y continua, por lo tanto, acotada. Es claro que $|fw\rangle = \sum_{i,j\in A} a_{ij}\langle v_i|w\rangle|v_i\rangle$, por lo cual $|fw\rangle = |Tw\rangle$. Como $|w\rangle$ fue arbitrario, se tiene que $f = T$, de donde se sigue que $\{|v_i\rangle\langle v_j|\}_{i,j\in A}$ es un conjunto generador de $B(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $\{|v_i\rangle\langle v_j|\}_{i,j\in A}$ es base de $B(\mathcal{H})$. Asimismo, se sigue de la definición de diada que $\mathrm{id}_{\mathcal{H}} = \sum_{i\in A} |v_i\rangle\langle v_i|$. ■

Nótese que por formulación de la notación de Dirac, si $T \in B(\mathcal{H})$, entonces $T(v) = T|v\rangle = |Tv\rangle$ y $\langle Tu| = \langle u|T^*$, donde $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es el operador adjunto de T. Además $(|v\rangle\langle u|)^* = |u\rangle\langle v|$.

Definición B.0.5. *(Proyector) Sea $(\mathcal{H}, \langle -|-\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert. Se dice que $P \in B(\mathcal{H})$ es un proyector si $P = P^2$. Si además $P^* = P$, entonces se dice que P es un proyector ortogonal. Finalmente, P es un proyector mínimo si es un proyector ortogonal y* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Im}(P)) = 1$.

Hay que observar que si P es un proyector, entonces $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$. En efecto, como $P = P^2$, entonces $\mathrm{Im}(P) \cap \mathrm{Ker}(P)$ y para todo $|v\rangle \in \mathcal{H}$, $|v\rangle = P|v\rangle + (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P)|v\rangle$. Un proyector P *proyecta* el espacio $\mathcal{H}$ en $\mathrm{Im}(P)$.

Proposición B.0.6. Sea $(\mathcal{H}, \langle -|-\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert. Entonces $|v\rangle\langle u|$ es proyector ortogonal si y solo si $|u\rangle = |v\rangle$ y $||v|| = 1$.

Demostración. Es claro que si $||v|| = 1$, entonces $P = |v\rangle\langle v|$ es un proyector ortogonal.

Supóngase que $|v\rangle\langle u|$ es un proyector ortogonal. Entonces $(|v\rangle\langle u|)^2 = |v\rangle\langle u|$ lo que implica que

$$\langle u|v\rangle|v\rangle\langle u| = |v\rangle\langle u|,$$

por lo cual $\langle u|v\rangle = 1$. Además, como $(|v\rangle\langle u|)^* = |v\rangle\langle u|$, se tiene que $|u\rangle\langle v| = |v\rangle\langle u|$, i.e., para todo $|w\rangle \in \mathcal{H}$ $\langle v|w\rangle|u\rangle = \langle u|w\rangle|v\rangle$. Esto muestra que $|u\rangle = |v\rangle$ y se sigue $||v|| = 1$. ■

Cabe mencionar que si $(V, \langle -|-\rangle)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n, entonces V es un espacio de Hilbert, por lo cual se puede usar la notación de Dirac. Sea $T : V \to V$ lineal. Si en alguna base de V, T es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces $\operatorname{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \langle i|T|i\rangle$, donde $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$ representa a la base estándar.

Proposición B.0.7. Si P es un proyector, entonces sus únicos posibles eigenvalores son 0 y 1.

Demostración. Sea $|x\rangle$ un eigenvector de P con eigenvalor λ. Entonces

$$\lambda|x\rangle = P|x\rangle = P^2|x\rangle = \lambda P|x\rangle = \lambda^2|x\rangle$$

y dado que $|x\rangle \neq 0$ se sigue $\lambda = \lambda^2$. Por lo tanto $\lambda \in \{0, 1\}$. ■

Ejemplo B.0.8. Sea $V = \mathbb{C}^2$ y sea P un proyector ortogonal. Entonces $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Im}(P)) = 1$. Dado $0 \neq v \in \operatorname{Im}(P)$, considérese $\hat{v} = \frac{v}{||v||}$. Entonces $P = |\hat{v}\rangle\langle\hat{v}|$.

Bibliografía

[1] Attal. S.,*OPERATOR AND SPECTRAL THEORY*, Francia (notas de internet)
http://math.univ-lyon1.fr/∼attal/Op_and_Spect.pdf

[2] Arveson, W., *An invitation to C^*-algebras*, Springer, Estados Unidos (2007).

[3] Bär, C. & Becker, C., *C^*-algebras*, Princeton (notas de internet, 2009).
https://www.princeton.edu/∼ hhalvors/teaching/phi538_f2011/bar-becker.pdf

[4] Bollobás, B., *Linear Analysis an introduction course*, Cambridge Press, 2da edition, Reino Unido (1990).

[5] Connes, A., *Nonconmutative Geometry*, Academic Press 1994

[6] Dabrowski, L., *The Garden of Quantum Spheres*, arXiv:math/0212264v1 [math.QA] (2002).

[7] de la Peña, L., *Introducción a la Mecánica Cuántica*, Ediciones Científicas Universitarias, México (2006).

[8] Do Carmo, M., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 2da edición, Estados Unidos (1992).

[9] Dubois-Violette, M., *Dérivations et calcul differentiel non-commutatif*, CR Acad Sci Paris 307 (1988).

[10] Dubois-Violette, M., Kerner, R., Madore, J., *Noncommutative Differential Geometry of Matrix Algebras*, J Math Phys 31 316-322 (1990).

[11] Dubois-Violette, M., Kerner, R., Madore, R., *Noncommutative Differential Geometry and New Models of Gauge Theory*, J Math Phys 31 323-335 (1990).

[12] Durdevich M., *Geometry of Quantum Principal Bundles I*, Commun Math Phys 175 (3) 457-521 (1996).

[13] Durdevich M., *Geometry of Quantum Principal Bundles II*, Rev Math Phys 9 (5) 531-607 (1997).

[14] Durdevich, M., *Quantum Principal Bundles and Corresponding Gauge Theories*, J Phys A Math Gen 30 2027-2054 (1997).

[15] Friedberg, S. L. & Insel, A. J. & Spence, L. E., *Álgebra Lienal*, Publicaciones Cultural, S. A., 1ra edición, México (1982).

[16] Hidalgo, S. L., *Variable Compleja*, (notas de internet, 2006).

http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas%20de%20clase/varcomp.pdf

[17] Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Fundations Of Differential Geometry Volume 1*, Interscience Publishers, Estados Unidos (1963).

[18] Lee, J., *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society (2009).

[19] Moretti, V., *Spectral Theory and Quantum Mechanics With an Introduction to the Algebraic Formulation*; Springer (2010).

[20] Munkres, R. J., *Topology*, Prentice Hall, Upper Saddle River (1975).

[21] Murphy, G., *C^*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, INC., Estados Unidos (1990).

[22] Podles, P., *Quantum Spheres*, Lett Math Phys 14 193-202 (1987).

[23] Prugovečki, E., *Quantum Geometry: A Framework for Quantum General Relativity*, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[24] Putnam, F. I., *Lecture Notes on C^*-algebras*, (notas de internet, 2016).

http://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/C*-algebras.pdf

[25] Rieffel, M., *208 C^*-algebras*, Universidad de California (notas de internet hechas por Yuan, Q., 2013).

https://math.berkeley.edu/∼qchu/Notes/208.pdf

[26] Rotman, J. J, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2da edición (2003).

[27] Rudin, W., *Functional Analysis*, Mc-Graw-Hill, 2da edición, Singapur (1991).

[28] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, Mc-Graw-Hill, 3ra edición, Singapur (1987).

[29] Sancho de Salas, C & Sancho de Salas, P., *Álgebra Conmutativa-Geometría Algebraica*, Universidad de Extremadura-Servicio de Publicaciones, España (2013).

[30] Shen-Ning, T.: *Lie Algebra Homology and Cohomology*, Universidad de British Columbia, Noviembre 26, 2013 (notas de internet).

[31] Sontz, S., *Principal Bundles-The Quantum Case*, Springer (2015).

[32] Stevens, M., *The Kadison-Singer property*, Tesis de maestría, Universidad de Radboud, Holanda (2015).

[33] Swan, R. G., *Vector Bundles and Projective Modules*

http://www.ams.org/journals/tran/1962-105-02/S0002-9947-1962-0143225-6/S0002-9947-1962-0143225-6.pdf

[34] Tu, L. W., *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2da edición, Estados Unidos (2010).

[35] Wegge-Olsen, N. E., *K-Theory and C^*-Algebras. A Friendly Approach*, Oxford Unversity Press, Estados Unidos (1993).

[36] Williams, D. P., *Lecture Notes on C^*-algebras*, Universidad de Princeton (notas de internet, 2011).

https://math.dartmouth.edu/archive/m123s11/public_html/cstar.pdf

[37] Woronowicz, S. L., *Differential Calculus on Compact Matriz Pseudogroups (Quantum Groups)*, Commun Math Phys 122, 125-170 (1988).