



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN ECONOMÍA

FACULTAD DE ECONOMÍA ◊ DIVISIÓN DE POSGRADO

ECONOMÍA APLICADA

Modelo bioeconómico para maximizar ganancias con sostenibilidad ecológica
por la explotación del pepino de mar en Baja California

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Maestra en Economía

PRESENTA:

Miriam Del Valle Morales

TUTOR:

Dr. Martín Puchet Anyul
Facultad de Economía, UNAM

MIEMBROS DEL JURADO:

Dr. Francisco Castillo Aranguren
Ciencias Básicas, ITESM

Dr. Daniel Revollo Fernández
Facultad de Economía, UNAM

Dr. Benjamín García Páez
Facultad de Economía, UNAM

Dr. Alonso Aguilar Ibarra
Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Abril 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi papá por todo el apoyo que siempre me ha dado, por su paciencia, cariño y comprensión, por ser un ejemplo y una guía, sin él no hubiera podido llegar hasta aquí. También le doy gracias por sus consejos, orientación y aportes conceptuales en la elaboración de esta tesis.

A mi mamá y a mi hermana por la motivación y el amor que he recibido de ellas.

A mi familia y amigos por siempre estar al pendiente, darme ánimos y festejar mis logros.

Especialmente quiero dar gracias al Dr. Martín Puchet Anyul por aceptar ser mi asesor, por el seguimiento y la supervisión que realizó durante la elaboración de este trabajo. Por su disponibilidad y gentileza.

Al Dr. Francisco Castillo por el soporte profesional que me brindó y por todas sus recomendaciones que fueron de gran ayuda.

A mis sinodales, por el tiempo dedicado, sus aportaciones y correcciones.

Finalmente al programa del Posgrado de Economía de la UNAM, por el respaldo académico que me brindó durante estos años, le doy gracias por esta gran experiencia.

Contenido

Introducción	1
1 Planteamiento del modelo	7
1.1 Supuestos	7
1.2 El modelo	8
2 Herramientas	9
2.1 La ecuación logística	9
2.2 Elementos de cálculo de variaciones	11
2.3 Elementos de la teoría de control óptimo	13
2.4 Mínimos cuadrados	15
3 Parámetros	19
3.1 Estimación de r y K	19
3.2 Estimación del coeficiente de capturabilidad	20
3.3 Modelo para la función de precios	22
3.4 Modelo para la función de costos	22
4 Solución al modelo	25
4.1 Solución general	25
4.2 Precio y costo constantes	28
4.3 Solución al modelo del pepino de mar con esfuerzo sostenido	29
4.4 Planeación de esfuerzos sostenidos	29
4.5 Contrastando con otro modelo	30
4.6 Solución al modelo del pepino de mar con esfuerzo variable	32
5 Consideraciones finales	35
5.1 Recapitulación	35
5.2 Contrastación	37
5.3 Conclusiones	37
5.4 La literatura sobre el tema	38

5.5	Limitaciones del modelo	39
5.6	Recomendaciones	40
5.7	Planes para el futuro	40
A	Valores propios	43
B	Límites al infinito, integral impropia, valor presente	45
C	Uso de tecnología	51
D	Regla de oro con el Hamiltoniano	55
	Bibliografía	59
	Listas de símbolos	63
	Glosario	64
	Índice	65

Introducción

Uno de los objetivos fundamentales de la bioeconomía es lograr equilibrio entre la explotación de recursos naturales y su conservación, de tal manera que se alcance sostenibilidad ecológica y rentabilidad económica. Evidentemente este objetivo tiene más relevancia ahora que nunca, debido a que en la mayoría de los casos los recursos naturales se están agotando por su sobre explotación. Cuando un recurso comienza a decrecer, por debajo de su límite natural, el costo por su explotación aumenta y por ende disminuyen ganancias y fuentes de trabajo, produciéndose inestabilidad económica y, en el peor de los escenarios, la extinción permanente del recurso.

La preocupación sobre la sostenibilidad de los recursos cada vez es mayor, en especial con respecto a la escasez de alimentos y la capacidad limitada a nivel mundial para producir bienes. Gobiernos en varias partes del mundo se están centrando cada vez más en desarrollar bioeconomías nacionales e internacionales con el fin de hacer frente a los problemas ambientales y económicos. La actual crisis en materia de alimentos, energía, clima, etc., está influyendo en decisiones normativas y en la administración de sectores como la agricultura, la silvicultura, la pesca y la acuicultura. Sudáfrica, Dinamarca, Islandia, Suecia, Finlandia y Alemania participan activamente creando estrategias específicas para la bioeconomía. Países como Brasil, Paraguay, Argentina y Chile han logrado algunos avances en esta materia. Sin embargo, este tema tiene escasa relevancia en las demás naciones de América Latina, particularmente en México, que no cuenta con proyectos estratégicos, ni políticas de regulación adecuados y control en su amplia gama de actividades productivas relacionadas con recursos naturales (Henry, G., et al., 2014).

Para lograr el equilibrio, entre el recurso que se aprovecha y su conservación –que plantea la bioeconomía– es primordial crear modelos cuantitativos que planeen la explotación, no sólo preservando el recurso, sino manteniéndolo, a largo plazo, en una cantidad conveniente para que el costo de la actividad no se eleve y, en el mejor de los casos, la ganancia sea máxima.

La pesca constituye una fuente fundamental de alimentos, empleo e ingreso. El principal problema que padece esta actividad económica es la sobre pesca que, sumada a una inadecuada regulación gubernamental, no sólo afecta gravemente el ecosistema, también a la economía de las pesquerías y comunidades de pescadores. Desafortunadamente son muy pocos los trabajos en latinoamérica y sobre todo en México, que plantean modelos cuanti-

tativos para coadyuvar, con el enfoque bioeconómico, a resolver estos problemas; y mucho de la investigación que se encuentra publicada está enfocada a una descripción meramente cualitativa, que se limita a describir la problemática sin llegar a plantear soluciones de fondo. Las fuentes oficiales del gobierno mexicano no cuentan con información suficiente y actualizada de datos estadísticos de censos de poblaciones de las diversas especies que se comercializan; o de precios, costos, capturas anuales, etc; y los centros de investigación, especializados en pesca, no han realizado estudios para establecer modelos matemáticos que determinen crecimientos poblacionales con o sin captura, capacidades de carga de los diversos medios por especie, etc.

Para resolver el problema de la sobrepesca, las secretarías locales y federales mexicanas se han limitado a imponer cuotas de captura y vedas; que muy probablemente carecen de una investigación científica profunda en la que se sustenten, pues rara vez presentan el reporte técnico correspondiente con la justificación de la medida. Lo cual implica que este sector comercial se vea gravemente afectado económicamente. Esto no significa que las regulaciones sean, en todos los casos, inadecuadas; pues es evidente que con frecuencia son la única alternativa para salvar el recurso; pero en esencia únicamente han considerado aspectos de sostenibilidad ecológica, sin tomar en cuenta la rentabilidad económica. La crisis a nivel mundial muestra que estas estrategias sólo han sido paliativas (OECD, 2009).

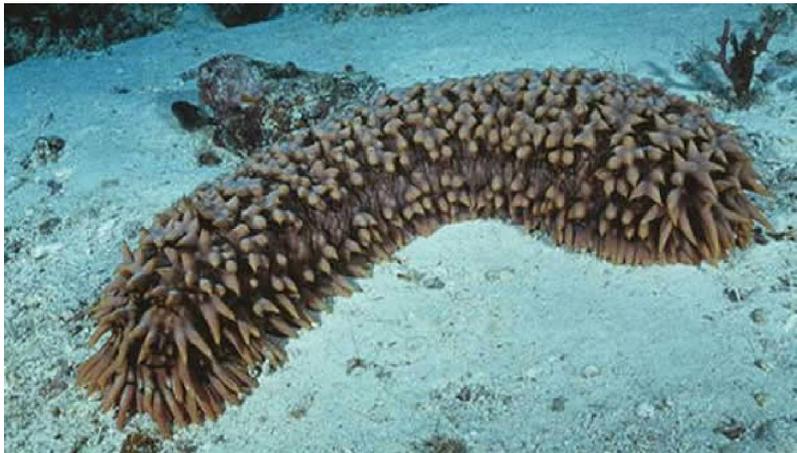
Existen, no obstante, investigaciones que intentan considerar los dos aspectos: sostenibilidad ecológica y económica. Uno de éstos es el artículo de Albornoz (et al., 2006) que plantea un modelo para la planeación de la captura del langostino amarillo en Chile; su objetivo es establecer el plan de captura de este recurso para obtener una ganancia máxima en un período total de diez años, con restricciones de sostenibilidad ecológica impuestas en la región, utilizando programación no lineal. Sin embargo, con el modelo de la presente tesis –para el caso particular de precio y costo constantes– aplicado al problema de ese artículo, se llega a una solución que satisface todas las restricciones que los autores imponen –ecológicas y de esfuerzo– pero con ganancia mayor (casi el doble) y con una planeación de esfuerzos mucho más eficiente.

Es frecuente en artículos y en libros de este tema (incluyendo algunas de las fuentes más citadas), trivializar la estimación de los parámetros en los modelos que plantean. Sólo indican el valor de esos parámetros, sin explicar cómo fue que se calcularon y mucho menos presentan alguna contrastación con los datos de donde provienen para validarlos. Los parámetros de un modelo son la piedra angular en la que se basan y su estimación, en la mayoría de los casos, es muy compleja y es sumamente importante mostrar la forma en la que se calculan. Aunado a esto, si los datos de *campo* son muy escasos (como es para el pepino de mar), la estimación se convierte en una tarea que requiere de bastante esfuerzo e ingenio.

Uno de los principales retos en la presente investigación, fue el trabajar con muy poca información –para costos por unidad de esfuerzo, ésta fue nula– y, aún así, estimar cada parámetro. En ninguno de los casos se contó con información completa y actualizada en fuentes oficiales o artículos de investigación. Quizá en el primer mundo se cuenta con bases

de datos que contienen información estadística de las especies marítimas que explotan, pero en México no es así.

Los pepinos de mar (*Parastichopus parvimensis* e *Isostichopus badionotus*) son equinodermos igual que las estrellas y erizos de mar. Estos animales de cuerpo alargado tienen,



en edad adulta, 19 a 23.8 cm de longitud en promedio y un peso entre 206 y 284 g, aproximadamente (Fajardo-León, et al., 2009). Su captura tiene gran importancia comercial por la demanda y el precio que alcanza en el mercado asiático. Representa una excelente fuente de divisas, dado que su extracción es relativamente barata al igual que su procesamiento; y su precio en el mercado es alto. Actualmente se cotiza entre 45-50 pesos mexicanos el kilogramo y procesado llega a venderse hasta en \$1000 MXN (DOF, 2017). La captura del pepino de mar, su procesamiento y comercialización en Baja California, proporcionaron, en años recientes, alrededor de 700 empleos directos por temporada y una derrama económica de casi un millón de dólares estadounidenses (Palleiro-Nayar, 2013: 53). Sin embargo, su alto valor comercial, aunado a una mala regulación pesquera, han provocado que su explotación sea indiscriminada, excesiva e incluso ilegal. La sobre pesca en los años recientes ha dado lugar a la extinción en algunas localidades y se han impuesto vedas en muchas pesquerías para permitir que las poblaciones se recuperen (DOF, 2016).

El objetivo de esta investigación es:

Establecer un modelo de optimización dinámica para maximizar la ganancia por la captura del pepino de mar en Baja California —específicamente, el valor presente de la función de utilidad con una tasa de descuento y con horizonte de tiempo infinito—, sujeto a una ecuación de control para el crecimiento de la biomasa residual con captura, y un estándar de preservación de la especie en función de la capacidad del medio.

Grosso modo el modelo se basa en una ecuación de *equilibrio* entre lo que se captura y el crecimiento de la especie. La solución al modelo tiene como salida la planeación del

esfuerzo para la captura, sin sobrepasar las limitaciones de la firma, y la biomasa residual, que cumple con el estándar ecológico en cada período, para alcanzar una ganancia óptima.

Todos los parámetros del modelo se estimaron con datos reales de las fuentes citadas y en cada caso se hizo patente el método para lograrlo. Como se mencionó antes, la información, tanto en artículos como en fuentes oficiales, para biomasa, captura, esfuerzo y precios es muy escasa, y de costos nula. Para establecer un modelo para la función de precios se tuvo que recurrir a los datos de fuentes que sólo tenían información de períodos entre 1989 a 1993 y de 2008 al 2013; entre 1994 a 2007 y de 2014 en adelante no existen datos de precios. Entonces, fue necesario modelar en forma indirecta una función de costos, interpolando la función de precios que se propone en los períodos donde no existe información real y aprovechando la información de capturas y utilidades con la que se cuenta en esos períodos. Algo similar se tuvo que realizar para estimar los parámetros de crecimiento exponencial y capacidad del medio debido a la falta de información de biomasa en períodos sin captura o de veda. Cabe mencionar que, sorprendentemente, no hay información disponible en la literatura y en fuentes oficiales de los parámetros de crecimiento exponencial y capacidad del medio de la ecuación logística, o de algún modelo que prediga el crecimiento natural del pepino de mar; algo fundamental para el estudio de la preservación y explotación de esta especie. Los parámetros estimados y los modelos de precios y costos se contrastaron gráficamente con los datos reales para validarlos por cohesión.

El modelo se establece de forma general considerando precios y costos variables, pero se analiza el caso particular cuando éstos son constantes y se compara su aplicación con el modelo para la captura del Langostino Amarillo en Chile, con el fin de hacer patentes ventajas sobre éste.

La tesis está dividida en cinco capítulos y cuatro apéndices, más una lista de los símbolos matemáticos utilizados –con una breve explicación de su significado– y un glosario de términos. La descripción es la siguiente:

- En el primer capítulo se establecen los supuestos, y el planteamiento del modelo como un problema de optimización con factor de descuento y con horizonte de tiempo infinito de la teoría de control óptimo.
- El segundo capítulo contiene las herramientas matemáticas, escritas en forma concisa, que fueron necesarias para poder plantear y resolver el modelo; así como las que se utilizaron para la estimación de los parámetros y los modelos para precios y costos.
- La estimación de los parámetros, los modelos para precios y costos, está contenida en el capítulo tres; las gráficas que contrastan datos y estimaciones están obviamente en este apartado.
- En el capítulo cuatro se encuentra la solución general al modelo transformando el problema de control, que se establece en el capítulo uno, en un problema del cálculo de variaciones; obteniendo una relación funcional –*regla de oro*– entre la biomasa, la

ecuación logística y los demás parámetros, que conduce a una ecuación algebraica cuya solución positiva –biomasa óptima– es el posible valor donde la ganancia es máxima. Las razones para transformar el problema de control óptimo en uno de cálculo de variaciones fueron:

- Es más simple con la ecuación de Euler llegar a la *regla de oro*, que por medio del hamiltoniano de la teoría de control óptimo.
- Mucho más importante y la razón fundamental: Es posible verificar que se cumplen las condiciones necesarias para que en la biomasa óptima y en el correspondiente esfuerzo óptimo se alcance la ganancia máxima. Es decir, si el problema tiene solución, ésta se tiene que alcanzar en la biomasa y esfuerzos óptimos calculados en este capítulo.
- Al verificar las condiciones necesarias, de paso se calculan las cotas asintóticas para la biomasa y esfuerzo óptimos que implican el cumplimiento de las restricciones ecológicas (estándar de preservación) y de esfuerzo (máximo esfuerzo que puede realizar la pesquería).

Esta manera de atacar el problema es un rasgo particular de la investigación realizada en esta tesis; que fue necesario implementar debido a que en la bibliografía consultada –por cierto muy escasa– no resuelven estos fundamentales puntos. En §5.4, p. 38, se trata con más detalle el tema de la literatura existente para modelos bioeconómicos con optimización dinámica para el sector económico dedicado a la pesca. En este capítulo también se establece la planeación general de captura y esfuerzo, y se resuelve con el modelo de esta tesis el problema del artículo de Albornoz et al.¹ Finalmente, aunque este punto no es algo que se pueda considerar alentador, mucho menos es una desgracia, se demuestra que el integrando en problema (4.1), p. 25, no es cóncavo (tampoco convexo), lo cual implica que no hay garantía de que en la biomasa y esfuerzos óptimos se alcance la ganancia máxima. Sin embargo, la naturaleza práctica del problema, hace factible que éste tenga solución y, por tanto, tiene que ser alcanzada en la biomasa y esfuerzo óptimos que se calculan en este capítulo, pues éstos cumplen las condiciones necesarias de la teoría del cálculo de variaciones.

- El capítulo cinco contiene las conclusiones, consideraciones y recomendaciones finales; así como los planes de la autora para realizar investigaciones futuras sobre este importante tema que mejoren y generalicen el modelo bioeconómico de esta tesis.
- El objetivo de los primeros tres apéndices es que esta tesis resulte autocontenida – para el lector que la consulte–, en las demás herramientas matemáticas y tecnológicas que se utilizan en esta investigación: valores propios, apéndice A; límites, integral impropia y valor presente, apéndice B; uso de tecnología, apéndice C.

¹op. cit., p. 2

- El apéndice D contiene la derivación de la *regla de oro* por medio del hamiltoniano de la teoría de control óptimo, para que se pueda comparar con la forma que se obtiene ésta mediante la ecuación de Euler del cálculo de variaciones.

De sobra está el mencionar que el capítulo 2 y los apéndices A, B, C y D, los puede omitir el lector familiarizado con estos temas e ir directo a la lectura de los capítulos 1, 3, 4 y 5. Sin embargo, si este es el caso, una rápida lectura de esos segmentos es recomendable para fijar notaciones y jerga.

Albergo la esperanza que este trabajo estimule a mis colegas economistas a realizar investigación en esta importante, y casi no explorada, área de la economía aplicada a la sostenibilidad ecológica con rentabilidad económica; o que se pueda utilizar en la docencia para ilustrar la potencia de la optimización dinámica en la bioeconomía con aplicaciones a la realidad, desde una perspectiva inteligente de equilibrio para la coexistencia del ser humano y la naturaleza.

Capítulo 1

Planteamiento del modelo

1.1 Supuestos

Se utilizará como unidad de tiempo el año. Sean:

- $X = X(t)$, la **biomasa** de pepino de mar al instante t , medida en toneladas.
- $Y = Y(t)$ la **captura** por unidad de tiempo, medida en toneladas.
- $E = E(t)$ el **esfuerzo**, por unidad de tiempo, medido como el número de embarcaciones utilizado por la pesquería para capturar $Y(t)$ toneladas por unidad de tiempo.
- $p = p(t)$ la función de precio de playa por tonelada de pepino de mar en pesos mexicanos.
- $c = c(t)$ el costo por unidad de esfuerzo en pesos mexicanos.

Los supuestos del modelo son:

1. La explotación es realizada por un sólo dueño. Esto no significa que sea un monopolio; sino que durante todo el proceso de explotación únicamente es una firma la que lo realiza y jamás se agregan otras pesquerías.
2. Naturalmente se considera que los costos son de oportunidad.
3. El crecimiento natural (sin captura), \dot{X} , del pepino de mar, se rige de acuerdo a la ecuación logística (Quinn, 1999: 5):

$$\dot{X} = G(X) = rX \left(1 - \frac{X}{K} \right) \quad (1.1)$$

donde r es la constante de crecimiento exponencial, K es la capacidad del medio y X es la biomasa.

4. La razón, en todo instante del tiempo, de la velocidad de captura a la velocidad de esfuerzo es proporcional a la biomasa presente; esto es

$$\frac{Y}{E} = qX \quad (1.2)$$

donde q es la llamada constante o coeficiente de capturabilidad (Clark, 1985).

5. Existe un valor máximo de esfuerzo, $E_{\text{máx}}$, que la pesquería puede ejecutar, el cual se ha fijado en 200 unidades.
6. La tasa de descuento, δ , permanece constante en el tiempo. Para este estudio se consideró $\delta = 0.1$.
7. La masa residual debe ser mayor a 40% de la capacidad del medio en cada período (estándar de preservación de la especie).

1.2 El modelo

Por las hipótesis 3 y 4

$$\begin{aligned} \dot{X} &= G(X) - Y \\ &= G(X) - qEX \end{aligned} \quad (1.3)$$

es el crecimiento instantáneo de la biomasa del pepino de mar con captura (modelo de Schaefer¹) y

$$pY - cE = pqEX - cE$$

es la ganancia por unidad de tiempo; luego $\int_0^{\infty} (pqX - c)Ee^{-\delta t} dt$ es el valor presente con tasa de descuento δ . Entonces, por (1.3), el problema a resolver es

$$\text{máx} \quad \int_0^{\infty} (pqX - c)Ee^{-\delta t} dt \quad (1.4.1)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \begin{cases} \dot{X} = G(X) - qEX \\ E \leq E_{\text{máx}} \end{cases} \quad (1.4.2) \quad (1.4)$$

con una biomasa inicial X_0 .

¹(Schaefer, 1954: 30)

Capítulo 2

Herramientas

2.1 La ecuación logística

Sea $X = X(t)$ la cantidad en la que se mide una población al instante t ; en el caso del pepino de mar es la cantidad de toneladas que habitan en Baja California.

Crecimiento exponencial o de Malthus o no limitado

En este modelo se establece que el ritmo de crecimiento es proporcional a la población; esto es

$$\dot{X} = rX$$

donde r es una constante. La figura 2.1, p. 10, contiene la gráfica de crecimiento poblacional para este modelo. Si se resuelve la ecuación diferencial anterior, con $X(0) = X_0$ la población inicial, se tiene

$$X(t) = X_0 e^{rt}$$

Al parámetro r se le llama constante de crecimiento exponencial. En este caso, la población crece en forma exponencial como se indica en la figura 2.1 (a) porque las condiciones del medio –espacio, alimento, clima, etc.–, así se lo permiten. La figura 2.1 (b) contiene la gráfica de la población contra el tiempo para este caso.

Ecuación logística o de crecimiento limitado

En este modelo se establece que al inicio la población crece de manera exponencial, pero conforme aumenta ésta, el medio, por condiciones de su naturaleza (capacidad de espacio, de alimento, etc.), hace que el crecimiento decaiga tendiendo la población a un valor límite K , llamada capacidad del medio o de carga, conforme t tiende a infinito. La ecuación diferencial correspondiente a este modelo es

$$\dot{X} = rX \left(1 - \frac{X}{K}\right)$$

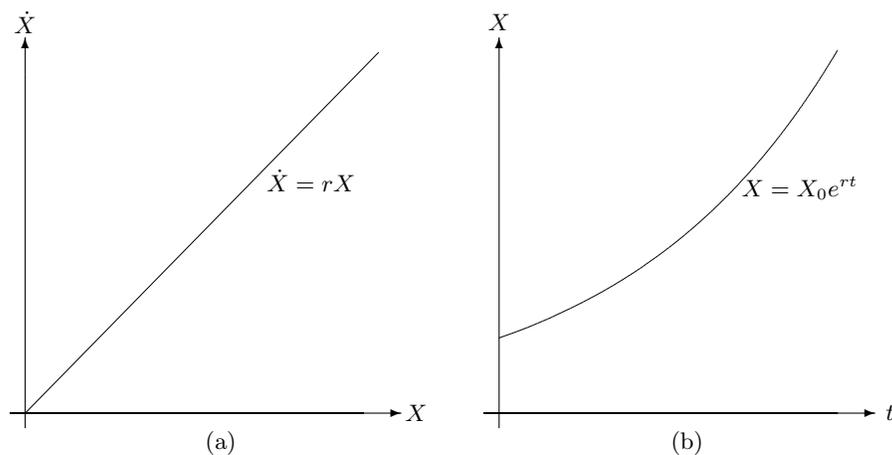


Figura 2.1:

La gráfica del crecimiento logístico, \dot{X} contra X , tiene la forma de una parábola como se muestra en la figura 2.2 (a). En ésta se observa que el crecimiento es nulo cuando $X = 0$ y cuando $X = K$. La solución de la ecuación logística está dada por

$$X = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-X_0}{X_0} e^{-rt}\right)}$$

donde $X_0 = X(0)$ es la población inicial. Es claro que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K-X_0}{X_0} e^{-rt}\right)} = K$$

lo cual significa que a la larga la población X tiende a la capacidad del medio K –la *máxima* población, o población límite que soporta el medio–, como se hace patente en la gráfica de la figura 2.2 (b).

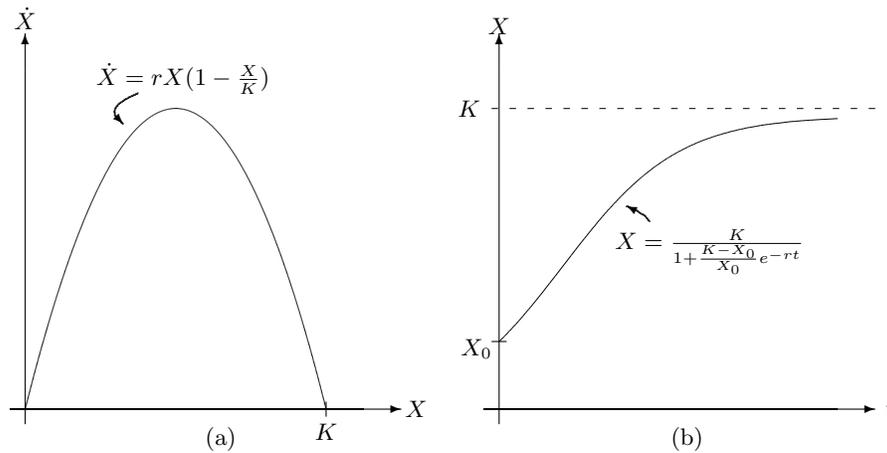


Figura 2.2:

2.2 Elementos de cálculo de variaciones

Problema básico y condición de Euler

El problema básico del cálculo de variaciones consiste en resolver

$$\begin{aligned} \text{optimizar } & J(X) = \int_0^T F(t, X, \dot{X}) dt \\ \text{sujeto a } & X(0) = X_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $F = F(t, X, \dot{X})$ es una función dada de tres variables, $X = X(t)$, $t \in [0, T]$, es la variable del funcional J , y X_0 es un número real dado; ambas funciones con condiciones adecuadas de suavidad¹. Si el problema (2.1) tiene una solución $X^* = X^*(t)$, entonces ésta debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right)$$

con

$$X(0) = X_0$$

¹ F con primeras derivadas parciales continuas en una región que contenga a los puntos (t, X, \dot{X}) con $t \in [0, T]$, y $X, \dot{X} \in \mathbb{R}$ y X una función con primera y segunda derivadas continuas en el intervalo $[0, T]$.

la cual se llama condición de Euler. Sin embargo, ésta es una condición necesaria pero no suficiente. Es decir, puede ser que X^* satisfaga la condición de Euler, pero X^* no resuelva el problema (2.1); esto es, existen funciones $X_1 = X_1(t)$ y $X_2 = X_2(t)$, $t \in [0, T]$, con $X_1(0) = X_0 = X_2(0)$, tales que $J(X_1) < J(X^*) < J(X_2)$ (cf. ejemplo 5.5 Del Valle-Morales, 2014: 75). Sin embargo, bajo ciertas hipótesis sobre el integrando F la condición de Euler también es suficiente.

Condiciones suficientes

Un subconjunto A de vectores de \mathbb{R}^n es convexo, si el segmento de línea que une a cualquier par de puntos, $\vec{a}, \vec{b} \in A$, está contenido en A ; esto es,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^n : \vec{u} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), 0 \leq t \leq 1 \right\} \subset A$$

Si F es una función de n variables y A es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n :

- F es convexa en A si

$$F(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u})) \leq F(\vec{u}) + t(F(\vec{v}) - F(\vec{u}))$$

- F es cóncava en A si

$$F(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u})) \geq F(\vec{u}) + t(F(\vec{v}) - F(\vec{u}))$$

para todo par de puntos $\vec{u}, \vec{v} \in A$ y para todo $t \in [0, 1]$. Para determinar, con uso de cálculo, si una función F es cóncava o convexa se utiliza el siguiente criterio (Fleming, 1985: 74-78): Sea

$$H(\vec{u}) = [F_{x_i x_j}(\vec{u})],$$

$1 \leq i, j \leq n$, la matriz hessiana de la función F , donde $F_{x_i x_j}(\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) (\vec{u})$. Entonces:

- F es convexa en A si y sólo si para cada $\vec{u} \in A$ todos los valores propios de $H(\vec{u})$ son mayores o iguales a cero.
- F es cóncava en A si y sólo si para cada $\vec{u} \in A$ todos los valores propios de $H(\vec{u})$ son menores o iguales a cero.

Se puede probar (Chiang, 2000: 258-259; van Brunt, 2006: 81-82) que si X^* satisface la condición de Euler (es una función o trayectoria estacionaria) del problema (2.1) y

1. si la función que a cada (X, \dot{X}) le asigna $F(t, X, \dot{X})$ es convexa en \mathbb{R}^2 para todo $t \in [0, T]$, entonces en $X^* = X^*(t)$ el funcional J alcanza el mínimo absoluto.
2. si la función que a cada (X, \dot{X}) le asigna $F(t, X, \dot{X})$ es cóncava en \mathbb{R}^2 para todo $t \in [0, T]$, entonces en $X^* = X^*(t)$ el funcional J alcanza el máximo absoluto.

Problema con factor de descuento con horizonte de tiempo infinito

Es el problema

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & J(X) = \int_0^{\infty} F(t, X, \dot{X}) e^{-\delta t} dt \\ \text{sujeto a } & X(0) = X_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde F y X son como en el problema básico y $\delta > 0$ es el factor o tasa de descuento. Las condiciones necesarias para que una función $X_\delta = X_\delta(t)$, sea solución son (Del Valle-Morales, 2014: 112-113; Chiang, 2000; Takayama, 1974):

$$\left. \begin{aligned} 1. & X_\delta \text{ es solución de la ecuación de Euler} \\ & \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right) \\ 2. & \lim_{T \rightarrow \infty} \left[F - \dot{X}_\delta \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right]_{(T, X_\delta(T), \dot{X}_\delta(T))} = 0. \\ 3. & \text{Una (por lo menos) de las siguientes condiciones:} \\ & \text{(a) } \lim_{t \rightarrow \infty} X_\delta(t) = X_\delta^* \in \mathbb{R}. \\ & \text{(b) } \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right]_{(t, X_\delta(t), \dot{X}_\delta(t))} = 0. \\ 4. & Y, \text{ por supuesto, la condición de frontera } X(0) = X_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Nuevamente, si el integrando es cóncavo, respecto al parámetro t como se explicó para el problema básico del segmento precedente, y X_δ satisface las cuatro condiciones de (2.3), en esta función el funcional J del problema (2.2) alcanzará un máximo.

2.3 Elementos de la teoría de control óptimo**Principio del máximo de Pontriaguin**

El problema básico de la teoría de control óptimo es

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & J(X, Y) = \int_0^T F(t, X, Y) dt \\ \text{sujeto a } & \begin{cases} \dot{X} = g(t, X, Y) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde F es una función dada de tres variables, $X = X(t)$ y $Y = Y(t)$, $t \in [0, T]$, son las funciones variables del funcional J ; las tres con condiciones adecuadas de suavidad² y g es una función de tres variables también dada. A X se le llama variable de estado y a Y variable de control. Las condiciones necesarias que deben satisfacer un par de funciones

² F con primeras derivadas parciales continuas en los puntos (t, X, Y) , $t \in [0, T]$, $X, Y \in \mathbb{R}$; y $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ con primera y segunda derivadas continuas en todo punto del intervalo $[0, T]$

(X^*, Y^*) para resolver el problema (2.4) se encuentran resumidas en el siguiente criterio conocido como principio del máximo de Pontriaguin:

Sea

$$\mathcal{H} = F(t, X, Y) + \lambda(t)g(t, X, Y)$$

el hamiltoniano del problema básico, donde la variable $\lambda = \lambda(t)$, la variable de coestado, es una función por determinar. Si el problema (2.4) tiene una solución en (X^*, Y^*) , entonces existe una función $\lambda^* = \lambda^*(t)$ tal que estas funciones satisfacen las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y} = 0$
2. $\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \\ \dot{X} = g(t, X, Y) \end{cases}$

y las condiciones de frontera

3. $\begin{cases} X^*(0) = X_0 \\ \lambda^*(T) = 0 \end{cases}$

Problema de control óptimo con factor de descuento y con horizonte de tiempo finito

Consiste en resolver

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } J(X, Y) = \int_0^T F(t, X, Y)e^{-\delta t} dt \\ &\text{sujeto a } \begin{cases} \dot{X} = g(t, X, Y) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\delta > 0$ es el factor (tasa) de descuento. Este problema se puede resolver por medio de lo que se estableció en el apartado §2.2, para cálculo variacional, en el caso de que sea posible despejar la variable de control la relación $\dot{X} = g(t, X, Y)$; pues, de ser así, entonces

$$Y = g_1(t, X, \dot{X})$$

y (2.5) se reduce a resolver el problema de tipo (2.2):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } J(X) = \int_0^T F_1(t, X, \dot{X}) dt \\ &\text{sujeto a } X(0) = X_0 \end{aligned}$$

con

$$F_1(t, X, \dot{X}) = F(t, X, g_1(t, X, \dot{X}))e^{-\delta t}.$$

2.4 Mínimos cuadrados

Sean (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, n$, un conjunto de datos “reales” tomados *in situ* o experimentalmente de ciertas mediciones como se ilustra en la figura 2.3. El objetivo de este método

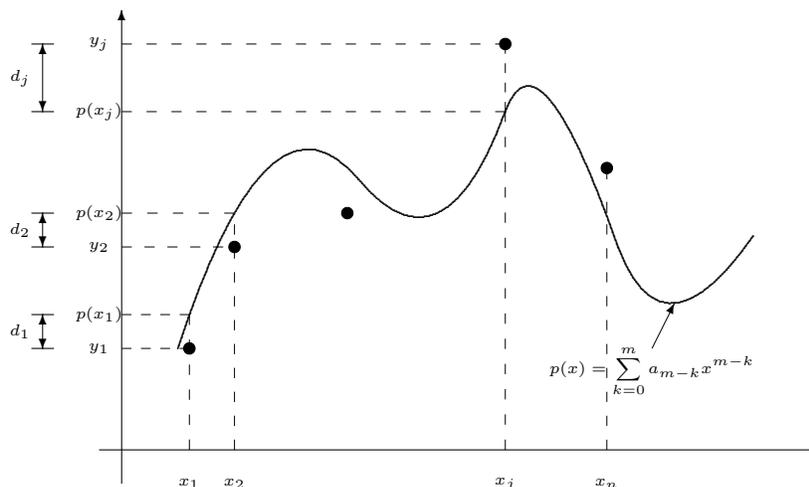


Figura 2.3:

es encontrar el polinomio de grado m , $P_m(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ de entre todos los polinomios de grado m , $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$, que mejor se ajuste a los datos (x_j, y_j) de acuerdo al siguiente criterio: Sea

$$d = \sum_{j=1}^n d_j^2 = \sum_{j=1}^n (p(x_j) - y_j)^2$$

es decir, d es el cuadrado de la distancia entre los vectores $(p(x_1), \dots, p(x_n))$ y (y_1, y_2, \dots, y_n) ; esto es, $d = \sum_{j=1}^n d_j^2$ donde las d_j son las diferencias entre las ordenadas de los datos experimentales (x_j, y_j) y los puntos $(x_j, p(x_j))$ de la gráfica del polinomio p , como se puede observar en la figura 2.3. Entonces el polinomio $P_m(x)$ de mejor ajuste es aquél para el cual d es el mínimo. Por tanto, d es mínimo para aquellos valores a_j , para los que la función de $m + 1$ variables

$$F(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0) = \sum_{j=1}^n (p(x_j) - y_j)^2$$

tiene un punto crítico. Luego $(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$ debe ser solución del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m$$

Al polinomio $P_m(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ se le dice el polinomio de ajuste por mínimos cuadrados de grado m para el conjunto de datos muestrales (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, n$. Así por

ejemplo, la línea recta de ajuste por mínimos cuadrados, $P_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$, del conjunto de datos (x_j, y_j) , tiene por coeficientes α_1 y α_0 las soluciones del sistema

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left(\sum_{j=1}^n a_1 x_j + a_0 - y_j \right)^2 = 0, \quad j = 1, 0$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^n 2(a_1 x_j + a_0 - y_j) x_j = 0$$

implica

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) a_0 = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

y

$$\sum_{j=1}^n 2(a_1 x_j + a_0 - y_j) = 0$$

implica

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \right) a_1 + \sum_{j=1}^n a_0 = \sum_{j=1}^n y_j$$

Por lo que (α_1, α_0) es la solución del sistema

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j^0 \right) a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j^0 y_j \\ \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{aligned}$$

Y si $P_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ es el polinomio de ajuste por mínimos cuadrados de los datos (x_j, y_j) , ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\sum_{j=1}^n (a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_0)^2 \right) &= 2 \sum_{j=1}^n (a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_0) x_j^2 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\sum_{j=1}^n (a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_0)^2 \right) &= 2 \sum_{j=1}^n (a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_0) x_j \\ \frac{\partial}{\partial a_0} \left(\sum_{j=1}^n (a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_0)^2 \right) &= 2 \sum_{j=1}^n (a_2 x_j^2 + a_1 x_j + a_0), \end{aligned}$$

entonces $(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$ debe ser la solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)a_2 + \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)a_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j^0\right)a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j^0 y_j \\ \left(\sum_{j=1}^n x_j^3\right)a_2 + \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)a_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ \left(\sum_{j=1}^n x_j^4\right)a_2 + \left(\sum_{j=1}^n x_j^3\right)a_1 + \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j^2 y_j \end{aligned}$$

Y, por recurrencia, el vector de coeficientes $(\alpha_m, \dots, \alpha_1, \alpha_0)$ del polinomio de grado m de ajuste por mínimos cuadrados al conjunto de datos (x_j, y_j) es la solución del sistema

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_j^m\right)a_m + \left(\sum_{j=1}^n x_j^{m-1}\right)a_{m-1} + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j^0\right)a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j^0 y_j \\ \left(\sum_{j=1}^n x_j^{m+1}\right)a_m + \left(\sum_{j=1}^n x_j^m\right)a_{m-1} + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j^1\right)a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j^1 y_j \\ &\vdots \\ \left(\sum_{j=1}^n x_j^{2m}\right)a_m + \left(\sum_{j=1}^n x_j^{2m-1}\right)a_{m-1} + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j^m\right)a_0 &= \sum_{j=1}^n x_j^m y_j \end{aligned}$$

Ajuste especial para el modelo

En este trabajo conviene realizar ajustes a parábolas de la forma

$$y = ax - bx^2 = ax\left(1 - \frac{b}{a}x\right)$$

El procedimiento es análogo al descrito arriba: se encuentra el punto crítico de la función de dos variables:

$$d(a, b) = \sum_{j=1}^n (ax_j - bx_j^2 - y_j)^2$$

Luego

$$0 = \frac{\partial d}{\partial a} = 2 \sum_{j=1}^n (ax_j - bx_j^2 - y_j)x_j$$

y

$$0 = \frac{\partial d}{\partial b} = 2 \sum_{j=1}^n (ax_j - bx_j^2 - y_j)(-x_j^2)$$

implican el sistema 2×2

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) a - \left(\sum_{j=1}^n x_j^3 \right) b &= \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ \left(- \sum_{j=1}^n x_j^3 \right) a + \left(\sum_{j=1}^n x_j^4 \right) b &= - \sum_{j=1}^n x_j^2 y_j \end{aligned}$$

Si

$$A = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right), B = \left(\sum_{j=1}^n x_j^3 \right), C = \left(\sum_{j=1}^n x_j^4 \right), D = \sum_{j=1}^n x_j y_j \text{ y } F = \sum_{j=1}^n x_j^2 y_j$$

el sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} Aa - Bb &= D \\ -Ba + Cb &= -F \end{aligned}$$

que se puede resolver por regla de Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} D & -B \\ -F & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & -B \\ -B & C \end{vmatrix}}$$

y

$$b = \frac{\begin{vmatrix} A & D \\ -B & -F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & -B \\ -B & C \end{vmatrix}}$$

Capítulo 3

Parámetros

Por desgracia, casi no existe información en revistas científicas y fuentes oficiales relativa a biomاسas, capturas, esfuerzos y, sobre todo, precios y costos de captura para el pepino de mar. Así que para la estimación de los parámetros del modelo 1.4, p. 8, se ha tenido que recurrir a la poca información que se encuentra dispersa en unas cuantas revistas y fuentes oficiales; parte de ella ni siquiera es directa, sino que se basa también en estimaciones. En todo momento se cita la fuente de donde se tomaron los datos.

3.1 Estimación de r y K

Como no se contó con información de biomasa anual del pepino de mar en períodos sin captura, no es posible calcular r y K directamente por medio de la solución de la ecuación diferencial logística del supuesto 3. Para resolver este inconveniente se utilizó la siguiente aproximación en diferencias:

$$G(X_t) \approx X_{t+1} - X_t + Y_{t+1} \quad (3.1)$$

donde X_t es la biomasa residual, Y_t la captura y $G(X_t)$ el crecimiento biológico natural durante el período t , $t = 0, 1, 2, \dots$; es decir, la biomasa, cuando hay captura, es la suma de la biomasa del período anterior más el crecimiento que tendría la población sin captura menos la captura en ese período. La tabla 3.1, p. 20, contiene biomاسas residuales y capturas en los años de 1997 a 2005 (Chavez, Salgado R., Palleiro-Nayar, 2011: 142) en la segunda y primera columna, respectivamente, y la estimación de $G(X_t)$ dada por (3.1) en la cuarta columna.

Al ajustar, (cf. p. 17 de §2.4) los datos $(X_t, G(X_t))$ de la segunda y cuarta columnas a una cuadrática de la forma $G(X) = aX - bX^2$, se obtuvo

$$r \approx 0.85 \text{ y } K \approx 4585$$

el primero con unidades recíproco de año y el segundo toneladas. La gráfica del ajuste y los datos que se ajustan está contenida en la figura 3.1

Año	X_t	Y_t	$G(X_t)$
1997	2634.12	380.19	852.6
1998	3073.14	413.54	975.3
1999	3768.26	280.14	633.0
2000	3987.77	413.54	343.2
2001	4097.52	233.45	290.0
2002	4134.11	253.46	386.7
2003	4170.69	350.10	330.1
2004	4207.28	293.48	330.1
2005	4243.86	293.48	

Tabla 3.1:

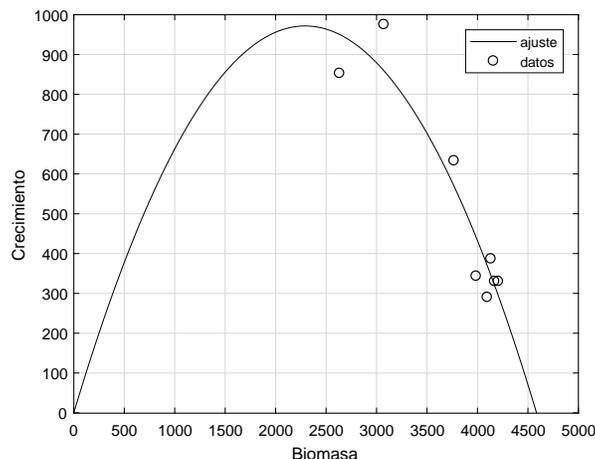


Figura 3.1: Ajuste cuadrático de los datos de la segunda y cuarta columnas de la tabla 3.1 al modelo $G(X) = rX - \frac{r}{K}X^2$.

3.2 Estimación del coeficiente de capturabilidad

Si el esfuerzo es sostenido, la captura es igual al crecimiento; equivalentemente, al ser también X constante, $\dot{X} = 0$ y por (1.3), p. 8, se tiene $G(X) = qEX$, que junto con (1.2) de la hipótesis 3 (p. 8), produce la relación cuadrática entre esfuerzo y captura

$$Y = KqE\left(1 - \frac{q}{r}E\right)$$

La tabla 3.2 contiene esfuerzos y capturas en diversos períodos del pepino de mar en Baja California tomados de Singh-Cabanillas (et al., 1996: 15) y Salgado-Rogel (et al., 2007:

16). Al ajustar éstos a un polinomio cuadrático de la forma $Y = aX - bX^2$, cf. p. 17, se

Año	Y	E
1989	336	47
1990	404	46
1991	324	27
1992	134	18
1993	96	19
1996	646.99	144
1998	413.54	72
2003	350.1	57

Tabla 3.2:

obtuvo

$$q = r \frac{b}{a} \approx 0.00285$$

La figura 3.2, p. 21, contiene la gráfica del ajuste y los datos de la tabla 3.2.

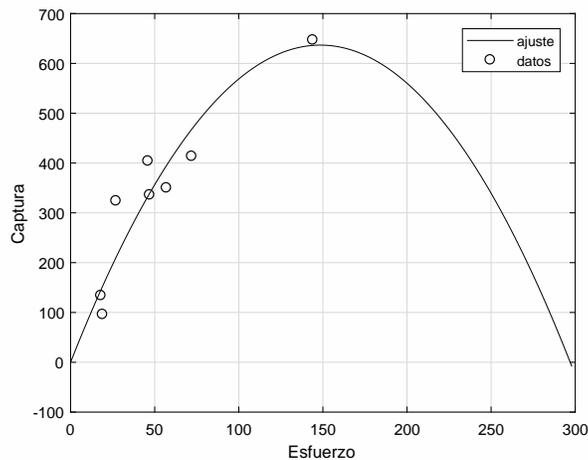


Figura 3.2: Ajuste cuadrático de los datos de la segunda y tercera columnas de la tabla 3.2 al modelo $Y = KqE(1 - \frac{q}{r}E)$.

3.3 Modelo para la función de precios

Para estimar la función de precios, se utilizaron los datos de¹ Singh-Cabanillas (et al., 1996: 15) y del resumen anual de producción pesquera de la SEPESCA, B.C. (Secretaría de Pesca y Acuicultura de Baja California, 2014: 4), los cuales se encuentran en la tabla 3.3; se graficaron y se infirió una tendencia cuadrática (cf. figura 3.3, p. 23); al hacer el

Año	Precio
1989	600
1990	670
1991	1100
1993	1200
2008	20155.98
2010	24413.05
2011	20626.92
2012	22561.73
2013	27315.37

Tabla 3.3: Precio por tonelada del pepino de mar en diversos períodos

ajuste² resultó el modelo ($t = 0$, en 1989).

$$p(t) = 16.96t^2 + 691.14t - 269.94 \quad (3.2)$$

para estimar los precios, en pesos mexicanos, por tonelada como función del tiempo. La figura 3.3 contiene los datos de *campo* y los del modelo cuadrático del ajuste.

3.4 Modelo para la función de costos

Como se observa en la tabla 3.3 y en la figura 3.3, no se tiene información relativa a precios en los períodos entre 1994 y 2007 y de 2014 a la fecha (el más antiguo es el de 1989); y de costos en ningún período. Entonces, para poder construir un modelo de estimación de costos, se tomó la información de utilidades y capturas en la fuente Chávez (et al., 2011: 144), y esfuerzos de Salgado-Rogel (et al., 2007:16) en los períodos de la primera columna de la tabla 3.4, p. 23, se interpolaron los precios en éstos por medio de la función del modelo (3.2), p. 22, para estimar ingresos (columna 6), y mediante la información de utilidades (columna 4) y de esfuerzos (columna 3) se calcularon costos anuales por unidad de esfuerzo en estos períodos. La información completa está contenida en esa tabla. Al

¹No fue posible obtener información de precios entre 1994 y 2007 y de 2014 en adelante

²Cf. §2.4, p. 15.

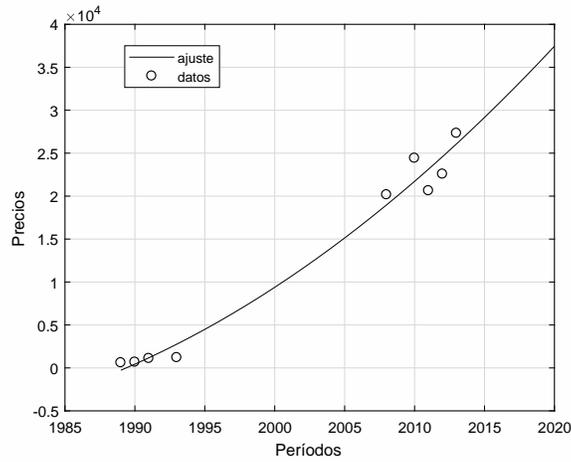


Figura 3.3:

graficar tiempos y costos por unidad de esfuerzo, se observó una tendencia lineal (cf. fig. 3.4, p. 24) y el ajuste ($t = 0$, en 1989) produjo el modelo lineal

$$c(t) = 1636.7t - 13270.13 \tag{3.3}$$

en pesos mexicanos. La figura 3.4, p. 24, contiene la gráfica del modelo de costos por

Año	Captura	Esfuerzo	Utilidad	Precio	Ingreso	Costo	Costo/ Esfuerzo
1999	280.14	89	2135185.78	8337.17	2335574.41	200388.63	2251.56
2000	413.54	106	3183374.11	9384.41	3880827.38	697453.27	6579.75
2001	233.45	84	1961916.25	10465.56	2443184.47	481268.22	5729.38
2002	253.46	83	2285243.47	11580.62	2935224.73	649981.26	7831.10
2004	293.48	83	3235310.44	13912.50	4083039.06	847728.62	10213.60
2005	293.48	98	3087735.97	15129.30	4440147.49	1352411.52	13800.12

Tabla 3.4: Datos para estimar costos usando el modelo de precios

$$p(t) = 16.96t^2 + 691.14t - 269.94.$$

unidad de esfuerzo (3.3) y de los pares formados por la primera y última columnas de la tabla 3.4.

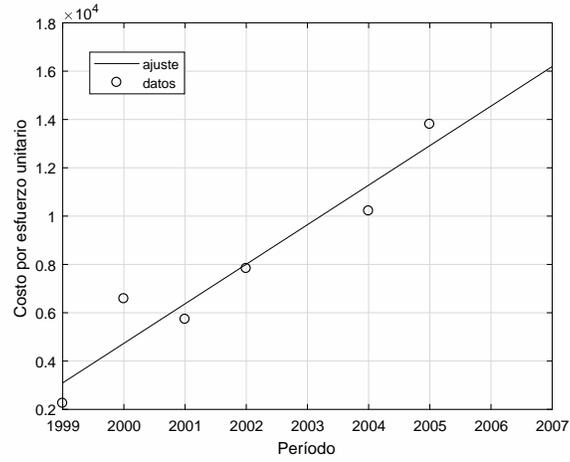


Figura 3.4:

Capítulo 4

Solución al modelo

4.1 Solución general

Si se despeja la variable E en la ecuación de control (1.4.2) y se sustituye en la función de utilidad (1.4.1) del modelo 1.4, p. 8, se obtiene el problema equivalente de cálculo variacional

$$\begin{aligned} & \text{máx} && \int_0^{\infty} \left(p - \frac{c}{qX}\right) (G(X) - \dot{X}) e^{-\delta t} dt \\ & \text{sujeto a} && \dot{X}(0) = X_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si X_δ es solución de este problema, entonces debe satisfacer las cuatro condiciones de (2.3), p. 13, con

$$F(t, X, \dot{X}) = \left(p - \frac{c}{qX}\right) (G(X) - \dot{X}) e^{-\delta t}$$

y $G(X) = rX(1 - \frac{X}{K})$ dada por (1.1), p. 7. Ya que

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \left(\left(p - \frac{c}{qX}\right) \dot{G}(X) + \frac{c}{qX^2} (G(X) - \dot{X}) \right) e^{-\delta t} \quad (4.2)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\left(p - \frac{c}{qX}\right) e^{-\delta t} \right) \\ &= \left(\delta \left(p - \frac{c}{qX}\right) - \dot{p} + \frac{\dot{c}}{qX} - \frac{c\dot{X}}{qX^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{c}{qX^2} (G(X) - \dot{X}) + \left(p - \frac{c}{qX}\right) \dot{G}(X) = \delta \left(p - \frac{c}{qX}\right) - \dot{p} + \frac{\dot{c}}{qX} - \frac{c\dot{X}}{qX^2}$$

de donde se obtiene la relación (regla de oro¹)

$$\dot{G}(X) + \frac{cG(X)}{qX^2 \left(p - \frac{c}{qX}\right)} = \delta - \frac{\dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX}}{p - \frac{c}{qX}} \quad (4.4)$$

Al sustituir $G(X) = rX(1 - \frac{X}{K})$ en (4.4), resulta

$$r - \frac{2r}{K}X + \frac{\frac{c}{X}(rX - \frac{r}{K}X^2)}{qX(p - \frac{c}{qX})} = \delta - \frac{\dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX}}{p - \frac{c}{qX}}$$

por lo que,

$$\left(r - \frac{2r}{K}X\right)\left(p - \frac{c}{qX}\right) + \frac{c\left(r - \frac{r}{K}X\right)}{qX} = \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right) - \dot{p} + \frac{\dot{c}}{qX}$$

luego,

$$\left(r - \frac{2r}{K}X\right)(pqX - c) + c\left(r - \frac{r}{K}X\right) = \delta(pqX - c) - \dot{p}qX + \dot{c}$$

entonces

$$r pq X - rc - \frac{2rpq}{K}X^2 + \frac{2rc}{K}X + cr - \frac{cr}{K}X = \delta pq X - \delta c - \dot{p}q X + \dot{c}$$

por tanto,

$$-\frac{2rpq}{K}X^2 + \left(rpq + \frac{rc}{K} - \delta pq + \dot{p}q\right)X + \delta c - \dot{c} = 0$$

así que

$$2rpqX^2 - (rpqK + rc - \delta pqK + \dot{p}qK)X + (-\delta c + \dot{c})K = 0$$

La ecuación cuadrática precedente tiene solución positiva, biomasa óptima,

$$X_\delta(t) = \frac{1}{4} \left[\bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} + \frac{\dot{p}}{rp}\right) + \sqrt{\left[\bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} + \frac{\dot{p}}{rp}\right)\right]^2 + \frac{8K}{r} \left(\delta \bar{X} - \frac{\dot{c}}{pq}\right)} \right] \quad (4.5)$$

con $\bar{X} = \frac{c}{pq}$. Como $p = p(t)$ es una función cuadrática y $c = c(t)$ es una función lineal (cf. (3.2), p. 22 y (3.3), p. 23),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{pq} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{p}}{rp} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{c}}{pq} &= 0 \end{aligned}$$

¹Cf. Clark, op. cit., p. 8

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_\delta(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right) K =: X_\delta^* \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

Sean

$$A = \bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} + \frac{\dot{p}}{rp}\right) \text{ y } B = \frac{8K}{r} \left(\delta \bar{X} - \frac{\dot{c}}{pq}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{X}_\delta &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4} \left[A + \sqrt{A^2 + B} \right] \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\dot{A} + \frac{2A\dot{A} + \dot{B}}{2\sqrt{A^2 + B}} \right] \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\bar{X}} + K \left(\frac{\ddot{p}}{rp^2} - \frac{\dot{p}^2}{rp^2} \right), \\ \dot{B} &= \frac{8K}{r} \left(\delta \dot{\bar{X}} + \frac{\dot{c}\dot{p}}{p^2q} \right) \text{ y} \\ \dot{\bar{X}} &= \frac{\dot{c}}{pq} - \frac{c\dot{p}}{p^2} \end{aligned}$$

por lo que (pues c es lineal y p es cuadrático)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{X}} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{A} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{B} &= 0; \end{aligned}$$

entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left[\dot{A} + \frac{2A\dot{A} + \dot{B}}{2\sqrt{A^2 + B}} \right] = \frac{1}{4} \left[0 + \frac{0 + 0}{2K(1 - \frac{\delta}{r})} \right] = 0,$$

esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X}_\delta(t) = 0 \quad (4.7)$$

Luego, si $\vec{u} = (t, X_\delta(t), \dot{X}_\delta(t))$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[F(\vec{u}) - \dot{X}_\delta(t) \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}(\vec{u}) \right] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(p(t) - \frac{c(t)}{qX_\delta(t)} \right) G(X_\delta(t)) e^{-\delta t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{p(t)}{e^{\delta t}} - \frac{c(t)}{e^{\delta t}} \frac{1}{qX_\delta(t)} \right) G(X_\delta(t)) \\ &= \left(0 - 0 \frac{1}{qX_\delta^*} \right) G(X_\delta^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera, $X_\delta = X_\delta(t)$ cumple con los primeros tres requisitos para ser solución del problema (4.1). Sin embargo, no necesariamente $X_\delta(0) = X_0$; pero esto, en realidad, no representa un mayor problema, pues se puede capturar o imponer veda de manera conveniente para que en el menor tiempo posible la biomasa alcance el valor $X_\delta(0)$ y ahí comenzar el proceso; en §4.4, p. 29, se hace un análisis completo de este tópico. Asumiendo entonces que el problema (1.4), p. 8, tiene solución, ésta se alcanza en (X_δ, E_δ) ; donde la biomasa óptima X_δ está dada por (4.5), p. 26, y, de (1.3), p. 8, el esfuerzo óptimo por

$$E_\delta = \frac{G(X_\delta) - \dot{X}_\delta}{qX_\delta} \quad (4.8)$$

No concavidad del integrando

Por (4.2), p. 25,

$$F_{\dot{X}X} = F_{X\dot{X}} = -\frac{c}{qX^2}e^{-\delta t}$$

y de (4.3)

$$F_{\dot{X}\dot{X}} = 0$$

Entonces la matriz hessiana

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} F_{XX} & F_{X\dot{X}} \\ F_{\dot{X}X} & F_{\dot{X}\dot{X}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{XX} & -\frac{c}{qX^2}e^{-\delta t} \\ -\frac{c}{qX^2}e^{-\delta t} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tiene determinante $-\frac{c^2}{q^2X^4}e^{-2\delta t} < 0$ para todo (X, \dot{X}) y para todo t . Luego, la función del integrando del problema (4.1), p. 25, no es cóncavo² para todo t . Esto significa, desafortunadamente, que no se puede garantizar que en $(X_\delta(t), E_\delta(t))$ se alcance el máximo absoluto (cf. §2.2, pp. 12-13). Sin embargo, la naturaleza de este problema concreto hace factible que tenga solución y, por ende, el valor máximo del valor presente de la utilidad se alcanza en $(X_\delta(t), E_\delta(t))$, dadas, respectivamente, por (4.5) y (4.8).

4.2 Precio y costo constantes

Si el precio p y el costo c son constantes, entonces, de (4.5), p. 26, y (4.8), el valor óptimo se alcanza en las funciones constantes

$$X_\delta = \frac{1}{4} \left[\bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} \right) + \sqrt{\left[\bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} \right) \right]^2 + \frac{8K\delta\bar{X}}{r}} \right] \quad (4.9)$$

²Si fuera cóncavo, los valores propios de la matriz hessiana serían no negativos, y como el determinante es el producto de los valores propios, éste sería positivo. Por razones análogas tampoco es convexo

4.3. SOLUCIÓN AL MODELO DEL PEPINO DE MAR CON ESFUERZO SOSTENIDO 29

y

$$E_\delta = \frac{G(X_\delta)}{qX_\delta} \quad (4.10)$$

Esto significa que con el esfuerzo E_δ , dado por la relación anterior, sostenido de manera constante cada año, el valor presente (3.2.1), p. 8, con tasa de descuento δ alcanzará su máximo valor y la biomasa, dada por (4.9), permanecerá constante. Evidentemente, se alcanzará el objetivo de sostenibilidad ecológica si el valor de X_δ es suficientemente *grande*; en este estudio se ha fijado en $X_\delta/K > 0.40$.

4.3 Solución al modelo del pepino de mar con esfuerzo sostenido

Si los precios y costos siguen las tendencias estimadas en este artículo dadas por (3.2), p. 22, y (3.3), p. 23; en 2018 serán, respectivamente, $p = 34036.48$ y $c = 34194.32$ en pesos mexicanos; y si a partir de esta fecha se mantienen constantes, al sustituir en (4.9) y (4.10) estos valores y los parámetros calculados en el c. 3.3, se obtendrá

$$\begin{aligned} X_\delta &\approx 2241.46 \text{ t} \\ E_\delta &\approx 152 \text{ unidades de esfuerzo} \end{aligned}$$

Así, al sostener un esfuerzo constante de 152 unidades, si la masa inicial tiene valor X_δ , la pesquería obtendrá el valor presente máximo dado por (3.2.1), p. 8:

$$\frac{(pqX_\delta - c)E_\delta}{\delta} = \$28,086,759.92$$

La masa residual $X_\delta = 2241.46$ toneladas, permanecerá constante a lo largo de todo el proceso; y es aproximadamente el 49% de la máxima biomasa de pepino de mar que soporta el medio natural de este recurso, que cumple con el objetivo de sostenibilidad ecológica propuesto. El esfuerzo E_δ es 48 unidades menor que el esfuerzo máximo de la pesquería; esto significa que la firma deja de usar 48 unidades, con todas las ventajas que eso implica. La figura 4.1 contiene las gráficas de la ganancia acumulada a lo largo del tiempo y del valor presente óptimo. En la misma se observa la rapidez con la que se alcanza el valor presente óptimo, de hecho, al cabo de 5 años ya se tiene más del 99% de este valor.

4.4 Planeación de esfuerzos sostenidos

En el caso de que la biomasa X_0 sea distinta a la biomasa óptima X_δ , entonces no se puede aplicar el esfuerzo sostenido E_δ . Se procede entonces de la siguiente manera:

1. Si $X_0 < X_\delta$, se aplica la aproximación en diferencias

$$X_{t+1} = X_t + G(X_t)$$

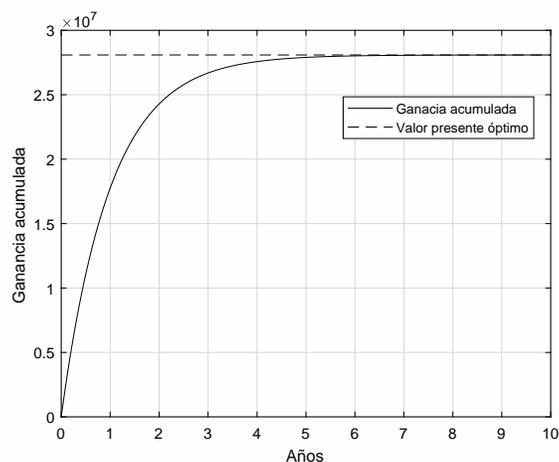


Figura 4.1:

hasta encontrar el primer período t_0 tal que $X_{t_0} \leq X_\delta < X_{t_0+1}$.

- Si $X_{t_0} = X_\delta$, entonces se aplica el esfuerzo E_δ a partir del período $t_0 + 1$, y veda en los períodos $t = 1, 2, \dots, t_0$.
- En caso contrario se aplica el esfuerzo

$$E_{t_0+1} = \frac{X_{t_0} + rX_{t_0} \left(1 - \frac{X_{t_0}}{K}\right) - X_\delta}{qX_\delta}$$

durante el período $t_0 + 1$ para alcanzar al final de éste el valor X_δ . Entonces se aplica el esfuerzo E_δ a partir del período $t_0 + 2$ y en los períodos $t = 1, \dots, t_0$, se aplicará veda.

- Si $X_0 > X_\delta$, entonces se aplica el máximo esfuerzo hasta encontrar el primer período t_0 tal que $X_{t_0} \leq X_\delta$. Si $X_{t_0} = X_\delta$, $E_t = E_{\text{máx}}$ para $t = 1, 2, \dots, t_0$ y $E_t = E_\delta$ para $t \geq t_0 + 1$; si $X_{t_0} < X_\delta$ se aplica el inciso (1) (con $X_0 = X_{t_0}$).

4.5 Contrastando con otro modelo

En Albornoz et al. (op. cit., p. 2) se plantea un modelo bioeconómico con un objetivo similar –optimizar el valor presente, de las ganancias de una pesquería que se dedica a la captura del Langostino amarillo en Chile, con horizonte de tiempo finito– utilizando programación no lineal. En ese artículo se propone maximizar una función de valor presente a 10 años con una tasa de descuento fija $\delta = 0.12$, precio por tonelada, $p = 1350$ dólares,

y costo por unidad de esfuerzo, $c = 3258$ dólares, constantes, sujeta a restricciones no lineales para que se cumplan condiciones de sostenibilidad ecológica y de capacidad de la pesquería, resolviendo el problema

$$\begin{aligned} & \text{máximizarse} \quad \sum_{k=1}^{10} (pY_k - cE_k)(1 + \delta)^{1-k} \\ & \text{sujeto a} \quad \begin{cases} X_k = X_{k-1} + G(X_{k-1}) - Y_k \\ Y_k = X_{k-1} - e^{qE_k} X_{k-1} \\ E_k \leq E_{\text{máx}} = 1000 \\ X_k \geq \tau K = 2019.2 \\ X_{10} \geq B_{\text{mín}} = 12000 \text{ t} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde Y_k es la captura anual; X_k es la masa residual y E_k es el esfuerzo anual, $k = 1, 2, \dots, 10$; $q = 0.00084$ el coeficiente de capturabilidad; $K = 50480 \text{ t}$, la capacidad del medio para el langostino amarillo; $\tau = 0.04$; y $X_0 = 6004 \text{ t}$. La primera restricción es la versión discreta del modelo de Schaefer para el crecimiento de la biomasa con captura donde $G(X) = rX(1 - \frac{X}{K})$ es la ecuación logística con $r = 0.4044$; la segunda restricción es el modelo que se emplea usualmente para medir la captura con mortalidad natural despreciable en período de pesca; la cuarta es la capacidad de esfuerzo de la pesquería; las últimas dos son las restricciones de sostenibilidad ecológica que se imponen. Para resolver el problema (4.11) los autores utilizan el programa computacional AMPL, obtienen un valor presente máximo de 10,711,363 dólares, con una planeación de un período de veda los primeros cuatro años, y capturas subsecuentes realizadas con esfuerzos crecientes, que a partir del quinto año son: 167, 312, 321, 335, 629 y 1000 (este último es el máximo esfuerzo de la firma). Como el precio y el costo los han considerado constantes, se puede aplicar el modelo de optimización dinámica (4.9), (4.10) del presente artículo (p. 28) y los resultados que se obtienen son los siguientes (con $\delta = 0.12$):

$$\begin{aligned} X_\delta &= 20249.52 \text{ t} \\ E_\delta &= 288 \end{aligned}$$

y un valor presente máximo de 47,291,839.2 dólares. Como $X_0 = 6004 < X_\delta$, si se aplica la planeación de pesca dada en §4.4 (p. 29), se requieren 4 años de veda, en el quinto año se aplican 177 unidades de esfuerzo para alcanzar la biomasa óptima $X_\delta = 20249.52$ y se mantiene el esfuerzo óptimo $E_\delta = 288$ a partir del quinto año. Esto es,

$$X_t = \begin{cases} 8143.23, & t = 1 \\ 10905.12, & t = 2 \\ 14362.46, & t = 3 \\ 18518.11, & t = 4 \\ 20249.52, & t = 5 \\ 20249.52, & t = 6, \dots, 10. \end{cases} \quad \text{y} \quad E_t = \begin{cases} 0, & t = 1 \\ 0, & t = 2 \\ 0, & t = 3 \\ 0, & t = 4 \\ 177, & t = 5 \\ 288, & t = 6, \dots, 10. \end{cases}$$

satisfacen todas las restricciones de ese modelo y se obtiene una ganancia acumulada al décimo año dada por

$$\frac{(pqX_\delta - c)E_\delta}{\delta} (1 - e^{-5\delta}) = 21,337,552.11$$

dólares. Es decir, con el modelo del presente trabajo, se obtiene una ganancia superior (casi el doble), pero con el modelo (4.11) se tienen que emplear, a partir del sexto año, esfuerzos crecientes (312, 321, 335, 629, 1000) mayores, todos, a $E_\delta = 288$; de hecho, el penúltimo año es más del doble y en el último año se requiere utilizar el máximo esfuerzo permitido (1000 unidades); un ahorro de 24, 33, 47, 341 y 722 unidades en sendos períodos con todas las ventajas que eso conlleva.

4.6 Solución al modelo del pepino de mar con esfuerzo variable

Si los precios y costos del pepino de mar tienen los comportamientos variables dados por (3.2), p. 22, y (3.3), p. 23, entonces la masa residual y el esfuerzo óptimos, $(X_\delta(t), E_\delta(t))$, son funciones del tiempo dadas por (4.5) y (4.8), pp. 26, 28. La figura 4.2 (a) contiene las gráficas ($t = 0$, en 2018) de $X = X_\delta(t)$ y de $E = E_\delta(t)$ (b) en el intervalo $[0, 60]$.

Por (4.6), p. 27, $\lim_{t \rightarrow \infty} X_\delta(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\delta}{r})K =: X_\delta^*$ y por (4.7) $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X}_\delta(t) = 0$, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_\delta(t) = \frac{G(X_\delta^*)}{qX_\delta^*} =: E_\delta^*$$

Se puede demostrar que $X = X_\delta(t)$ es una función decreciente y $E = E_\delta(t)$ es creciente; como se hace patente en las figura 4.2 (a) y (b), p. 33. Con los parámetros calculados para el pepino de mar en B. C. (cf. c. 3),

$$\begin{aligned} X_\delta^* &\approx 0.4412K = 2022.90 \text{ t} \quad \text{y} \\ E_\delta^* &\approx 167 \end{aligned}$$

Entonces $X_\delta(t) > X_\delta^* = 0.4412K$ para todo t y $E_\delta(t) < 167 < E_{\text{máx}}$ para todo t . Así, en todo período la masa residual $X_\delta(t)$ está dentro del criterio de sostenibilidad ecológica propuesto y el esfuerzo $E_\delta(t)$ es menor, para todo t , al esfuerzo máximo que puede realizar la pesquería. La figura 4.3 contiene la ganancia acumulada como función del tiempo en el intervalo $[0, 40]$; en ésta se observa que tiende a un valor límite, el valor presente dado por (3.2.1), p. 8, que es, de hecho, \$454,342,007 MXN, aproximadamente. La planeación de la pesquería, en cuanto a esfuerzos, está dada para los primeros 60 años como se indica³

³Para aplicar esta planeación, la biomasa X_0 , al inicio, debe tener el valor $X_\delta(0) = 2352.83$ toneladas; si $X_0 \neq X_\delta(0)$ se procede de acuerdo a §4.4 con $X_\delta = 2352.83$.

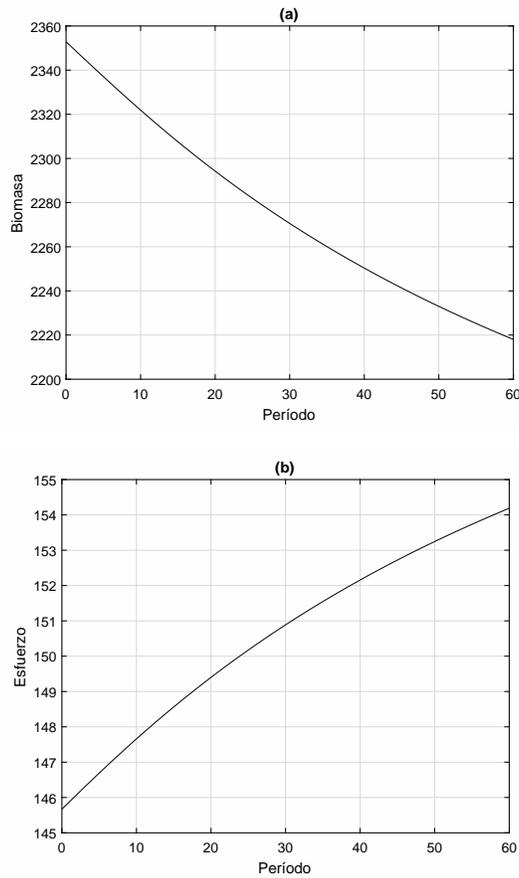


Figura 4.2:

en la gráfica de la figura 4.2 (b) [cf. (4.8), p. 28]. Naturalmente, si así lo determina, la firma puede utilizar esta planeación por un determinado número de años para obtener una ganancia máxima final; así, por ejemplo, siguiendo la planeación (con los esfuerzos redondeados a enteros en la práctica) dada en la segunda columna de la tabla 4.1, obtendría la ganancia de la tercera columna, que al final del proceso (10 años) sería de \$218,081,510.39 MXN; la tercera columna contiene la biomasa residual en cada período.

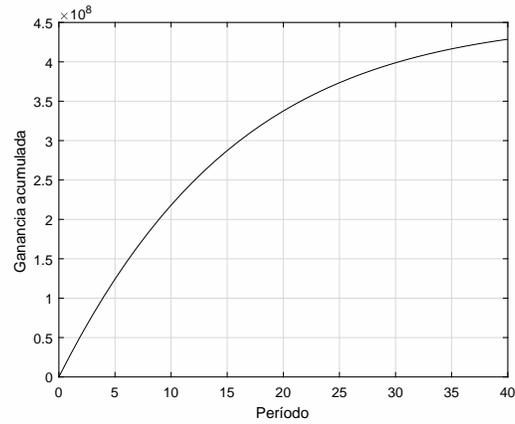


Figura 4.3:

t	$E_\delta(t)$	Ganancia	$X_\delta(t)$
1	145	27,555,063.92	2349.67
2	145	53,715,178.61	2346.51
3	146	78,521,454.55	2343.35
4	146	102,017,426.78	2340.21
5	146	124,248,446.34	2337.08
6	147	145,261,144.49	2333.98
7	147	165,102,963.23	2330.91
8	147	183,821,756.17	2327.86
9	147	201,465,384.15	2324.85
10	148	218,081,510.39	2321.88

Tabla 4.1:

Capítulo 5

Consideraciones finales

5.1 Recapitulación

Aunque en el capítulo 4 se resolvió el modelo y se explicó el significado de los resultados obtenidos detalladamente, es conveniente insistir en la interpretación de éstos desde una perspectiva sintética y enfática, separándolos un poco de la complejidad matemática con la que fue posible obtenerlos. La figura 5.1, p. 36, contiene juntas las gráficas de la planeación de esfuerzos propuesta por el modelo y la biomasa residual por período (año) que quedaría si se aplica dicha planeación –las gráficas (a) y (b) del esfuerzo y biomasa residual de la figura 4.2, p. 33–, con las mediciones de la biomasa en el eje izquierdo y en el derecho las del esfuerzo; para que se obtenga una ganancia máxima a largo plazo. En esta gráfica se puede observar que la biomasa residual comienza a decrecer conforme avanza el tiempo por la captura que se realiza cada año; mientras que el esfuerzo, debido a que la biomasa disminuye, debe aumentar año tras año¹. Sin embargo, como se demostró en (4.6) y (4.10), pp. 27-29, a largo plazo la biomasa residual tiende a la cota inferior $X_{\delta}^* = 2022.9$ t, y el esfuerzo converge la cota superior $E_{\delta}^* = 167$. Esto significa:

1. En todo período la biomasa residual es mayor a $X_{\delta}^* = 2022.9$; lo cual implica que en todo instante del tiempo hay una biomasa superior al 44% de la capacidad del medio del pepino de mar en B.C.
2. El esfuerzo utilizado en todo período es inferior a $E_{\delta}^* \approx 167$.
3. Por el primer inciso, la biomasa residual en todo período está por arriba del estándar prefijado de preservación ecológica : 40% de la capacidad del medio.
4. El esfuerzo utilizado en todo período está por debajo del máximo esfuerzo que la firma es capaz de realizar: 200 unidades; de hecho permanece al menos 33 unidades

¹La masa inicial para la planeación debe ser $X_{\delta}(0) = 2352.83$ t y $t = 0$ cuando empieza el proceso en 2018.

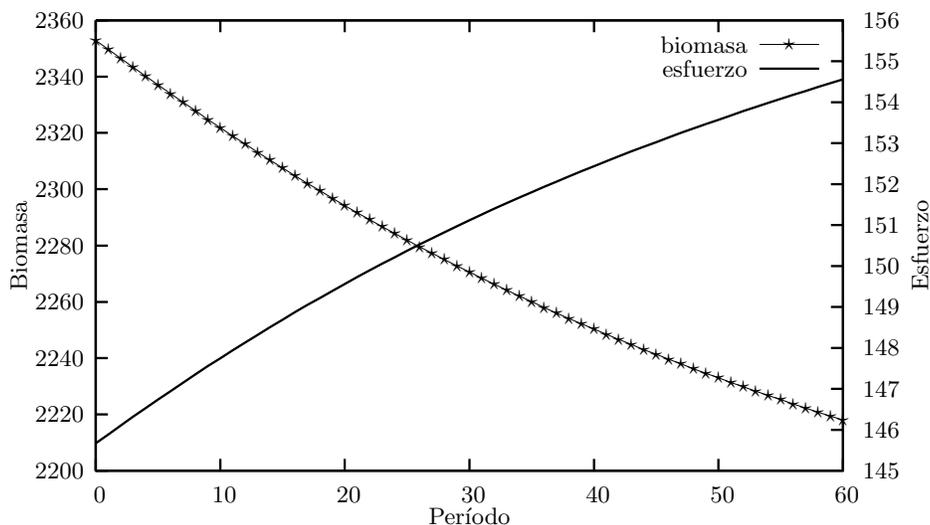


Figura 5.1: Gráficas de la planeación de esfuerzo, número de embarcaciones al año, y la biomasa residual, en toneladas.

por debajo de éste en todo período.

5. A largo plazo la biomasa residual tiende decreciendo al valor constante X_{δ}^* , inferior al 44% de la capacidad del medio; mientras que el esfuerzo converge creciendo al valor constante E_{δ}^* ; es decir, a largo plazo esfuerzo y biomasa residual tienden a ser constantes, con valores siempre dentro de los límites de capacidad de la pesquería y del estándar de preservación ecológica.
6. En el caso particular de precios y costos constantes, la máxima ganancia se alcanza aplicando un esfuerzo sostenido constante y, por ende, la masa residual también será constante con un valor aproximado del 49% de la capacidad del medio, cumpliendo el estándar ecológico prefijado ($0.40K$). El esfuerzo sostenido resultó de 152 unidades, inferior 48 unidades del máximo esfuerzo que es capaz de realizar la pesquería.
7. En el caso de que el precio y el costo se mantengan constantes, la ganancia máxima se alcanza, tanto en horizonte de tiempo infinito como finito, gracias al equilibrio bioeconómico de que en cada período se captura el incremento poblacional.
8. Si los precios y costos son variables, se obtiene casi lo mismo: A largo plazo se mantiene un equilibrio entre captura y crecimiento del pepino de mar; pues prácticamente se captura en cada período lo que aumenta la población; debido a que a la larga el esfuerzo y la biomasa resultante tienden a ser constantes.

5.2 Contrastación

A pesar de la escasa información estadística que existe relativa al pepino de mar, fue posible estimar parámetros y modelos para precios y costos que, por lo menos, fueron compatibles al *contrastarlos gráficamente* con los datos reales que inspiraron su arquitectura. El precio de playa del pepino de mar por kilogramo es entre 45 y 50 pesos mexicanos en la actualidad en Yucatán y con el modelo propuesto en este trabajo sería de \$34.04 MXN, a pesar del enorme incremento que se ha dado en la inflación en los últimos años en este país y de los grandes aumentos de combustibles. Para calcular los parámetros de crecimiento exponencial y capacidad del medio, se tuvo que recurrir a la estimación de biomazas con captura e indirectamente estimar estos parámetros haciendo “una estimación con estimaciones” en lugar de con datos reales en ausencia de éstos; sin embargo, para contrastar el valor de la constante de crecimiento exponencial, r , se calculó, con la ecuación de crecimiento exponencial este parámetro con la información de tres mediciones en veda –para el pepino de mar– en Sisal, Yucatán; se obtuvo un valor de 0.89, que es cercano al estimado para el pepino de mar en Baja California en esta tesis: 0.85. Para el caso de precios y costos constantes la aplicación del modelo de esta tesis demostró ser más efectivo al encontrar una solución con una planeación mucho más eficiente, que cumple con todas las restricciones impuestas y con una ganancia final de casi el doble que la solución encontrada por el modelo en el artículo de Albornoz et al.² para la captura del langostino amarillo.

5.3 Conclusiones

1. El modelo bioeconómico planteado en esta investigación logra el equilibrio entre el recurso y su conservación, que es un objetivo primordial en la bioeconomía. Y no sólo se preserva el recurso, sino que se mantiene a largo plazo en una cantidad adecuada para que la producción de la actividad no sea costosa y la ganancia sea máxima en un intervalo con horizonte de tiempo infinito o finito considerando una tasa de descuento constante.
2. La manera en la que se establece este equilibrio bioeconómico puede contribuir a evitar cuotas de captura o frecuentes y largos períodos de veda que merman fuertemente la actividad económica. Pues, de acuerdo al plan de captura desarrollado en el modelo, si la población está por debajo $X_\delta(0)$, la veda únicamente se debe mantener el tiempo necesario para alcanzar este valor –de acuerdo a la planeación dada en §4.4, p. 29,– y después aplicar los esfuerzos calculados en ésta; sin necesidad de recurrir ya más a vedas o cuotas de captura.
3. El hecho de que la aplicación del modelo en esta investigación encuentre una solución más efectiva que la calculada para el caso del langostino amarillo en el artículo de

²op. cit., pp. 2, 30

Albornoz³ es una prueba de su fiabilidad.

4. La compatibilidad al contrastar los parámetros estimados y los datos reales que se utilizarán para ser calculados, o su comparación con parámetros semejantes o con valores actuales, es un elemento a favor de la consistencia interna del modelo; esto es, la solidez de los supuestos en los que se basa.
5. Cómo se indicó en la página 28 de §4.1, no hay garantía matemática de que en los valores óptimos de biomasa y esfuerzo, siguiendo el plan de captura propuesto, se alcance la ganancia máxima; sin embargo, el plan de captura, el equilibrio teórico que establece para que el recurso se mantenga en cantidad suficiente a largo plazo y la captura se realice con un esfuerzo eficiente, y la ganancia nada despreciable que propone, pueden ser atractivos para el sector que se dedica a la explotación del pepino de mar.
6. A pesar de no tener condiciones suficientes; el haber podido verificar rigurosamente que la biomasa y esfuerzo óptimos satisfacen las condiciones matemáticas necesarias para que en éstos se alcance la ganancia máxima, es la garantía teórica en la que se fundamenta la confianza de que este máximo, de darse, se alcanza en esos valores. La justificación de que, en efecto, se alcanza una ganancia máxima, tiene que ver con un argumento intuitivo de la naturaleza práctica del problema que tenemos que aceptar como válido. Es decir, si asumimos que el problema de encontrar una planeación de esfuerzos para el pepino de mar, en base a los supuestos de §1.1, con correspondiente masa residual, para maximizar ganancias tiene solución, entonces esa solución está dada por el par $(X_\delta(t), E_\delta(t))$ que propone el modelo.

5.4 La literatura sobre el tema

Textos y artículos sobre el principal tema de esta tesis son muy pocos; de hecho, la mayor parte de las citas y referencias bibliográficas en este trabajo tienen que ver con el contexto de la investigación y con la recolección de datos; mas no con modelos bioeconómicos aplicados a casos concretos y que trabajen con información real; particularmente con maximización de ganancias de pesquerías utilizando optimización dinámica, especialmente en México. La principal referencia a nivel mundial, y la primera que aparece como texto, es la de Clark⁴. En este libro, el autor resuelve el problema de teoría de control óptimo (1.4), p. 8, con un procedimiento *ad hoc*, que resulta artificial y un tanto oscuro; únicamente deriva la relación funcional –a la que llama *regla de oro*⁵, por analogía con la famosa máxima del modelo de crecimiento de Solow,– estableciendo ésta como la única condición matemática

³Et al., op. cit., pp. 2, 30, 37

⁴op. cit., pp. 8, 26

⁵Cf. p. 26

necesaria para que en la biomasa óptima –y en su respectivo esfuerzo óptimo– se alcance el valor máximo de la ganancia; sin comprobar las condiciones de transversalidad que en este tipo de problemas con horizonte de tiempo infinito es tan importante verificar. En su procedimiento teórico, no establece alguna cota inferior para la trayectoria de la biomasa óptima ni una superior para el esfuerzo óptimo; lo cual significa que, con su metodología, no es posible determinar si efectivamente las trayectorias cumplen con un estándar de sostenibilidad ecológica y con el máximo esfuerzo de la pesquería. Los parámetros, en ejemplos concretos, los trata de manera análoga a como lo hacen los autores en Albornoz et al.,⁶ sin profundizar en su obtención y sin contrastar con los datos reales, presuponiendo que se ajustan a los supuestos *per se*. A partir de la premisa de esfuerzos y biomasa constantes generaliza a esfuerzos y biomasa variables, algo que en realidad no es necesario como se demuestra en esta tesis. Otra referencia, mucho más reciente, el libro de Anderson (et al.; 2010), tiene en el capítulo 4 un tratamiento semejante al de Clark y difiere con éste en que obtienen la *regla de oro* por medio del hamiltoniano de la teoría de control óptimo⁷; pero no hacen más que eso; tampoco establecen cotas asintóticas para las trayectorias óptimas, ni verifican condiciones de transversalidad y mucho menos ilustran con aplicaciones a casos reales.

Por las razones anteriores es que se prefirió buscar un tratamiento propio, reduciendo el problema de teoría de control óptimo a uno de cálculo de variaciones; con el fin de verificar rigurosamente condiciones necesarias y además, algo que es sumamente importante, encontrar asíntotas horizontales para las trayectorias óptimas y comprobar que éstas realmente cumplen con la sostenibilidad ecológica y la rentabilidad económica; es decir, que el modelo, en efecto, sea bioeconómico. A diferencia de estos textos, y del artículo del langostino amarillo (Albornoz, et al., 2006), los parámetros juegan un papel esencial en esta investigación y en lugar de presuponer que son coherentes con los datos reales, se contrastaron con éstos para verificar, por medio de cohesión, su fiabilidad. En contraparte a esa referencias, en esta tesis, se parte del supuesto de precios y costos variables y, como consecuencia, cuando éstos son constantes, la solución tiene como resultado trayectorias óptimas de biomasa y esfuerzo constantes.

5.5 Limitaciones del modelo

El punto más débil del modelo bioeconómico de la presente investigación es a la vez su principal fortaleza. Y esta es que el modelo se sustenta en datos reales y éstos fueron, desafortunadamente, insuficientes en cuanto a volumen de información; incompletos en lo que se refiere a que sólo hay datos en algunos períodos de tiempo y en otros no; indirectos –las biomasa para determinar el crecimiento natural proceden de datos en períodos de

⁶op. cit., pp. 2, 37, 38

⁷El apéndice 4 de esta tesis contiene esta derivación, y la obtención de la trayectorias óptimas que no contiene este libro.

captura-; y, lo que es peor, en el caso de costos no hay información. Por tanto, es posible que el modelo no se ajuste bien a la realidad y que los resultados obtenidos tengan un margen considerable de error y, en consecuencia, el modelo no sea fiable. El supuesto de considerar todo el sector que se dedica a la explotación del pepino de mar en Baja California como una sola firma, fue una hipótesis que se tuvo que asumir porque no se encontraron datos diferenciados por subsectores en esta región, pero evidentemente este supuesto está lejos de ser cierto. La tasa de descuento se tuvo que considerar constante en el tiempo debido a que no se encontró información de costos fijos y variables, luego la función de costos que se propuso para el modelo considera costos totales. Y, algo que no debe pasar por alto, es que el estándar de preservación ecológico para la preservación del pepino de mar pudiera resultar insuficiente para las autoridades que regulan esta actividad.

5.6 Recomendaciones

Entonces, si se cuenta con suficiente información estadística confiable para el pepino de mar, es posible construir modelos que optimicen ganancias con sostenibilidad ecológica de este recurso que sean compatibles con la realidad y se puedan contrastar con datos de campo, como se ha intentado hacer en este trabajo. Pero es necesario, para la construcción de estos modelos, que organismos oficiales –comisiones locales y federal de pesca, institutos de pesca federal y locales– se aboquen a la tarea de recabar información ya sea *in situ* de biomazas en períodos de veda, o en condiciones controladas por investigadores en laboratorio, para el estudio del crecimiento natural; o en períodos antes y después de capturas para el estudio del crecimiento poblacional en períodos de captura. Es también fundamental que las secretarías correspondientes tengan la información relativa a precios de playa de este producto y si ya los tienen los faciliten a los investigadores; realicen convenios con pesquerías, sobre todo las subsidiadas, para que faciliten información de costos. También es importante dar incentivos para la investigación en esta área de la economía aplicada a la sostenibilidad ecológica, para que más economistas trabajen con equipos interdisciplinarios creando modelos bioeconómicos para coadyuvar a esta importante actividad económica ya sea para la explotación sostenible del pepino de mar o para otras especies.

Finalmente, el modelo propuesto en esta investigación, dada la naturaleza restrictiva de sus hipótesis y su simplicidad, se recomienda –con las adecuaciones correspondientes–, para pesquerías que poseen la concesión gubernamental para la explotación exclusiva en áreas naturales protegidas de esta u otra especie y que trabajan en forma similar a una cooperativa.

5.7 Planes para el futuro

El objetivo original de la investigación en esta tesis, era el plantear y resolver el modelo de forma más general. Considerando la tasa de descuento variable en el tiempo; el coeficiente

de capturabilidad como función de la biomasa en lugar de ser constante, discriminado costos variables de fijos. Modelar las funciones de precios y costos de acuerdo a suficiente información real. Establecer un modelo de crecimiento natural que podría ser logístico o no y que se ajustara a los datos reales. Esto implicaría, en lugar de una ecuación algebraica –la regla de oro a la que se llegó en este trabajo–, una ecuación diferencial no lineal que se tendría que resolver, seguramente, con métodos numéricos para estimar las trayectorias óptimas de biomasa y esfuerzo, o aplicar métodos directos del cálculo de variaciones para lograr el mismo propósito. Y contrastar, en la medida de lo posible, el modelo con la realidad; extrapolando el modelo y sus componentes al pasado y comparándolo con la información real de datos recientes. Desafortunadamente, debido a la poca información con la que se contó, esto no fue posible. Sin embargo, cuando obtenga información suficiente, trataré de cumplir este objetivo, ya sea por etapas o directamente.

Apéndice A

Valores propios

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Un número real λ es un valor propio (valor característico, eigenvalor, autovalor) de A , si existe \vec{u} , vector no nulo de n coordenadas reales, tal que

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

Los valores propios de la matriz A son las soluciones reales de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

donde I_n es la matriz identidad –la matriz que tiene unos en la diagonal y ceros fuera de ella–, de tamaño $n \times n$ y $\det(A - \lambda I_n)$ es el determinante de la matriz $A - \lambda I_n$; esto es, $\det(M) = |M|$. De hecho,

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

es un polinomio en la indeterminada λ de grado n ; así que los valores propios de A son las raíces de su polinomio característico. En particular, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - \text{tra}(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

donde $\text{tra}(A) = a_{11} + a_{22}$ es la traza de la matriz A , la suma de los elementos de su diagonal. Luego, los valores propios de una matriz cuadrada están dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\text{tra}(A)}{2} + \frac{\sqrt{[\text{tra}(A)]^2 - 4 \det(A)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{\text{tra}(A)}{2} - \frac{\sqrt{[\text{tra}(A)]^2 - 4 \det(A)}}{2}\end{aligned}$$

por lo que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tra}(A)$$

y

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_2 &= \left(\frac{\text{tra}(A)}{2} + \frac{\sqrt{[\text{tra}(A)]^2 - 4 \det(A)}}{2} \right) \\ &\quad \left(\frac{\text{tra}(A)}{2} - \frac{\sqrt{[\text{tra}(A)]^2 - 4 \det(A)}}{2} \right) \\ &= \frac{[\text{tra}(A)]^2}{4} - \left(\frac{[\text{tra}(A)]^2 - 4 \det(A)}{4} \right) \\ &= \det(A)\end{aligned}$$

En realidad, estas dos propiedades se cumplen para toda matriz cuadrada de cualquier orden n .

Una matriz cuadrada, $A = [a_{ij}]$, es una matriz simétrica, si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y para todo j ; es decir, si A coincide con su transpuesta. Una propiedad muy importante de las matrices simétricas, es que las raíces de sus polinomios característicos son todas reales; esto es, los valores propios de una matriz simétrica son todos números reales.

Apéndice B

Límites al infinito, integral impropia, valor presente

Límites al infinito finitos

Si f es una función real definida en todos los puntos de un intervalo $[a, \infty)$, la función tiende (converge) a un número real l cuando t tiende a infinito, lo cual se denota como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = l,$$

si $f(t)$ es *arbitrariamente cercano* a l tomando t *suficientemente grande*; como se ilustra en la figura B.1.

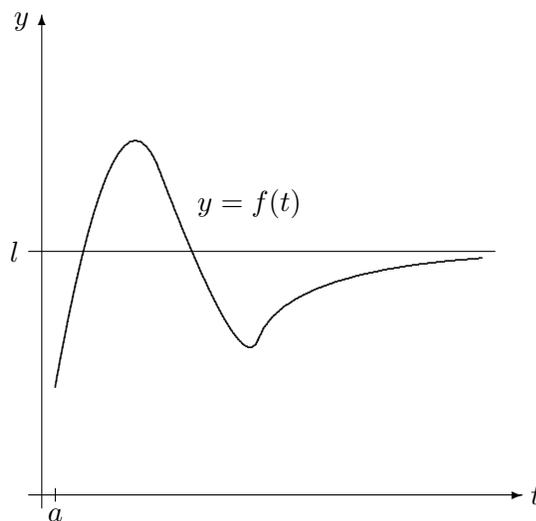


Figura B.1:

En tal caso, la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f .

Propiedades

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \alpha$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \beta$, entonces:

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) + g(t)) = \alpha + \beta$.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} kf(t) = k\alpha$, para todo $k \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)g(t) = \alpha\beta$.
4. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\alpha}{\beta}$ si, además, $\beta \neq 0$.
5. Si $\varphi = \varphi(t)$ es una función continua en α , entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(f(t)) = \varphi(\alpha)$.

Es claro que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$$

entonces, por las propiedades 2 y 3,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{t^m} = 0$$

para todo número real A y para todo $m = 1, 2, \dots$. Luego, si

$$\begin{aligned} p(t) &= a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0, \\ q(t) &= b_{n+k} t^{n+k} + b_{n+k-1} t^{n+k-1} + \dots + b_1 t + b_0 \end{aligned}$$

son dos polinomios con k un entero positivo, por las propiedades 1, 2 y 4,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{q(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n (a_n + \frac{a_{n-1}}{t} + \frac{a_{n-2}}{t^2} + \dots + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \frac{a_0}{t^n})}{t^{n+k} (b_{n+k} + \frac{b_{n+k-1}}{t} + \frac{b_{n+k-2}}{t^2} + \dots + \frac{b_1}{t^{n+k-1}} + \frac{b_0}{t^{n+k}})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^k} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{t} + \frac{a_{n-2}}{t^2} + \dots + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \frac{a_0}{t^n}}{b_{n+k} + \frac{b_{n+k-1}}{t} + \frac{b_{n+k-2}}{t^2} + \dots + \frac{b_1}{t^{n+k-1}} + \frac{b_0}{t^{n+k}}} \\ &= 0 \cdot \frac{a_n}{b_{n+k}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, el límite del cociente de dos polinomios donde el denominador tiene grado mayor que el numerador, cuando la variable independiente tiende a infinito, es cero.

Límites al infinito infinitos

Una función f tiende (diverge) a infinito cuando t tiende a infinito, lo cual se denota como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty,$$

si $f(t)$ es *arbitrariamente grande* si t es *suficientemente grande* como se ilustra en la figura B.2.

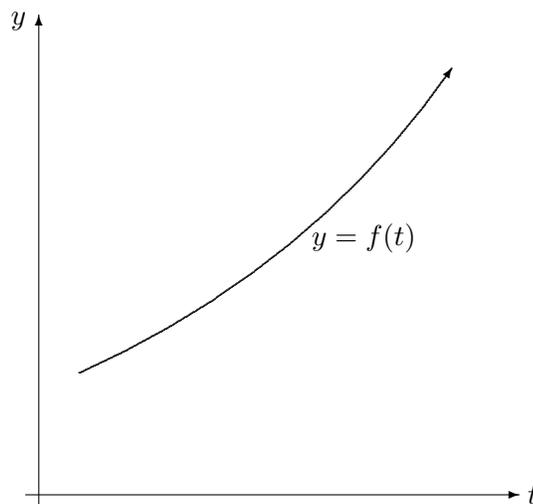


Figura B.2:

Es obvio que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$$

y, por ende,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} At^m = \infty$$

si $A > 0$ y $m = 1, 2, \dots$. Entonces, si $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$, con $a_n > 0$ es un polinomio, puesto que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{t^m} = 0$ si $m = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= t^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{t} + \dots + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \frac{a_0}{t^n} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^n a_n \\ &= \infty \end{aligned}$$

De la gráfica de la función exponencial $f(t) = e^{\alpha t}$, donde $\alpha > 0$, figura B.3, se desprende que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{\alpha t} = \infty$$

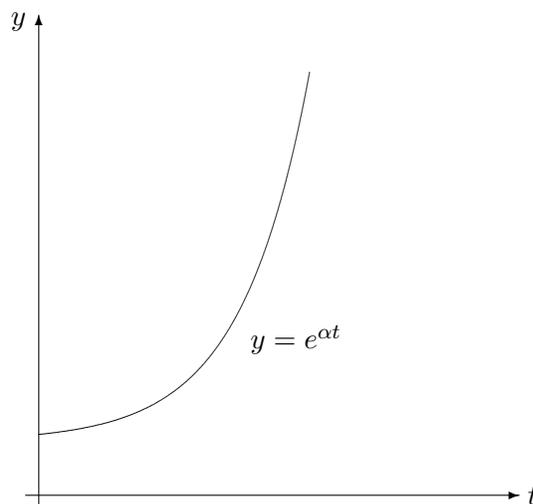


Figura B.3:

si $A > 0$. En consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{e^{\alpha t}} = 0$$

si $\alpha > 0$ y A es cualquier constante.

Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = a$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = b$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{f}(t)}{\dot{g}(t)} = \frac{a}{b}, \quad \text{si } b \neq 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{At^m}{e^{\alpha t}} = 0$$

si $m = 1, 2, \dots$, $\alpha > 0$ y A es cualquier constante.

Integral impropia

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo $[a, \infty)$, la integral impropia

$$\int_a^{\infty} f(t) dt$$

existe (converge) si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(t) dt$$

existe (es un número real); en tal caso se define

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(t) dt$$

y si el límite no existe o es infinito se acostumbra decir que la integral impropia diverge. Así, por ejemplo, si $\delta > 0$, y A es una constante

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A e^{-\delta t} dt &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r A e^{-\delta t} dt \\ &= A \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-\delta t} dt \\ &= A \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \right]_{t=0}^{t=r} \\ &= A \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta r}) \\ &= \frac{A}{\delta} \end{aligned}$$

Valor presente con tasa de descuento y horizonte de tiempo infinito

Supongamos que $f(t)$, al instante t , es el flujo instantáneo de un ingreso (unidades monetarias por unidad de tiempo) que se capitaliza continuamente con una tasa de interés δ . Entonces $f(t)e^{-\delta t}$ es el valor presente, por unidad de tiempo, del ingreso al instante t con tasa de descuento δ ; luego,

$$\int_0^T f(t) e^{-\delta t} dt$$

es el valor presente total (o acumulado) del ingreso en el intervalo de tiempo $[0, T]$ con tasa de descuento δ ; y

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\delta t} dt$$

es el valor presente total a largo plazo (o con horizonte de tiempo infinito) del ingreso cuyo flujo instantáneo es $f(t)$ y con una tasa de descuento δ .

Apéndice C

Uso de tecnología

Matlab

Las gráficas, cálculos numéricos, ajustes por mínimos cuadrados se hicieron con el paquete computacional MATLAB[®]. Algunos de los procedimientos que se emplearon son funciones ya programadas en este paquete para que el usuario simplemente las utilice; ejemplo de estas son la función `polyfit` que se emplea para hacer un ajuste de datos (x_i, y_i) a un polinomio de grado n , o `plot` para graficar. Sin embargo, para otros cálculos numéricos se tuvieron que construir programas para que MATLAB los efectuara. En este apéndice no se pretende realizar un manual de este paquete, sino, simplemente, indicar los instrumentos computacionales con los que se efectuaron los cálculos numéricos.

- Para la estimación de los parámetros r y K de la ecuación logística y del coeficiente de capturabilidad q a polinomios cuadráticos de la forma $p = aX - bX^2$ se realizó el programa

```
function G=ajustecuaesp2(X,Y)
alpha=sum(X.^2);
beta=sum(X.^3);
delta=sum(X.^4);
gama=sum(X.*Y);
phi=sum(X.^2.*Y);
DELTA=
M1=[D -B; E C];
M2=[A D; -B E];
a=det(M1)/det(M);
b=det(M2)/det(M);
r=a;
K=r/b;
G=[r K];
```

- Para los modelos de precios (3.2) y costos (3.3), se utilizó la instrucción `polyfit` para un ajuste cuadrático y uno lineal respectivamente.

- Los valores para construir las gráfica 4.1 de ganancia acumulada para esfuerzo sostenido se calcularon con los programas:

```
function P=gananciavar(p,c,q,delta,X,E,T)
P1=((p*q*X-c)*E/delta)*(1-exp(-delta*T));
P=[T' P1'];
```

- Los valores para hacer la gráfica de la biomasa óptima $X_\delta(t)$ de la figura 4.2 (a), y la cuarta columna de la tabla 4.1 se calcularon con el programa:

```
function X=Xdelta(t);
K=4585;
r=0.85;
d=0.1;
q=.00285;
c=modcosto(t);
c1=modcostder(t);
p=modprecio(t);
p1=modprecder(t);
xbarra=(1/q)*c.*(p.^(-1));
termino1=xbarra+K*(1-(d/r)+(1/r)*p1.*(p.^(-1)));
termino1a=(8*K/r)*(d*xbarra-(1/q)*c1.*(p.^(-1)));
X=.25*(termino1+sqrt((termino1).^2+termino1a));
```

- Los cálculos para graficar la función $E_\delta(t)$ de la figura 4.2 (b) y la segunda columna de la tabla 4.1 se realizaron con el programa:

```
function E=Edelta(t)
K=4585;
r=0.85;
q=.00285;
E=(1/q)*(r*(1-(1/K)*Xdelta(t))-(Xdeltapunto(t)./Xdelta(t)));
```

- Los valores para la construir la gráfica de la figura 4.3 y la ganancia acumulada con esfuerzos variables de la tabla 4.1, así como para calcular el el valor presente máximo para esfuerzo variable se hicieron con los programas:

```
function P=modprecio(t)          | function C=modcosto(t)
P=16.96*t.^2+1674.82*t+34036.48; | C=1636.7*t+34194.17;

function G=Dganacum(t)
delta=0.1;
q=.00285;
G=(q*modprecio(t).*Xdelta(t)-modcosto(t)).*Edelta(t).*exp(-delta*t);

function Ga=ganacum(T)
for j=1:length(T);
    a(j)=quad('Dganacum',0,T(j));
end
Ga=a;
```

Edición

La edición de esta tesis fue realizada con el editor de texto matemático \LaTeX , utilizando SWP55 y los paquetes TeXCAD y GNUPLOT para hacer algunas de las figuras.

Apéndice D

Regla de oro con el Hamiltoniano

Si en (X_δ, E_δ) el problema (1.4), p. 8, tiene solución y

$$\mathcal{H} = (pqEX - cE)e^{-\delta t} + \lambda(G(X) - qEX)$$

es el hamiltoniano de este problema, entonces (X_δ, E_δ) debe satisfacer el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} &= 0 \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} &= \dot{\lambda}\end{aligned}\tag{D.1}$$

Luego,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = (pqX - c)e^{-\delta t} - \lambda qX = 0$$

implica

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{pqX - c}{qX}e^{-\delta t} \\ &= \left(p - \frac{c}{qX}\right)e^{-\delta t}\end{aligned}$$

y al derivar la anterior expresión se obtiene

$$\dot{\lambda} = \left(\dot{p} - \left(\frac{\dot{c}qX - qc\dot{X}}{q^2X^2}\right)\right)e^{-\delta t} - \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right)e^{-\delta t}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} &= pqEe^{-\delta t} + \lambda(\dot{G}(X) - qE) \\ &= \left(pqE + \left(p - \frac{c}{qX}\right)(\dot{G}(X) - qE)\right)e^{-\delta t}\end{aligned}$$

Al sustituir λ , $\dot{\lambda}$ y $\partial\mathcal{H}/\partial X$ en (D.1), se tiene

$$\left(\dot{p} - \left(\frac{\dot{c}qX - qc\dot{X}}{q^2X^2}\right)\right)e^{-\delta t} - \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right)e^{-\delta t} = - \left(\left(pqE + \left(p - \frac{c}{qX}\right)(\dot{G}(X) - qE)\right)e^{-\delta t}\right)$$

esto es,

$$\dot{p} - \left(\frac{\dot{c}qX - qc\dot{X}}{q^2X^2}\right) - \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right) = -pqE - \left(p - \frac{c}{qX}\right)(\dot{G}(X) - qE)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX} + \frac{c}{qX^2}(G(X) - qEX) - \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right) &= -pqE - \left(p - \frac{c}{qX}\right)(\dot{G}(X) - qE) \\ &= -pqE + pqE - p\dot{G}(X) \\ &\quad + \frac{c}{qX}\dot{G}(X) - \frac{cE}{X} \\ &= -\dot{G}(X)\left(p - \frac{c}{qX}\right) - \frac{cE}{X} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX} + \frac{cG(X)}{qX^2} - \frac{cE}{X} - \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right) = -\dot{G}(X)\left(p - \frac{c}{qX}\right) - \frac{cE}{X}$$

de donde

$$\dot{G}(X)\left(p - \frac{c}{qX}\right) + \dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX} + \frac{cG(X)}{qX^2} = \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right)$$

y entonces

$$\dot{G}(X) + \frac{cG(X)}{qX^2\left(p - \frac{c}{qX}\right)} = \delta - \frac{\dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX}}{p - \frac{c}{qX}}$$

Al sustituir $G(X) = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right)$ en la precedente expresión resulta

$$r - \frac{2r}{K}X + \frac{\frac{c}{x}(rX - \frac{r}{K}X^2)}{qX\left(p - \frac{c}{qX}\right)} = \delta - \frac{\dot{p} - \frac{\dot{c}}{qX}}{p - \frac{c}{qX}}$$

por lo que,

$$\left(r - \frac{2r}{K}X\right)\left(p - \frac{c}{qX}\right) + \frac{c\left(r - \frac{r}{K}X\right)}{qX} = \delta\left(p - \frac{c}{qX}\right) - \dot{p} + \frac{\dot{c}}{qX}$$

luego,

$$\left(r - \frac{2r}{K}X\right)(pqX - c) + c\left(r - \frac{r}{K}X\right) = \delta(pqX - c) - \dot{p}qX + \dot{c}$$

entonces

$$rppqX - rc - \frac{2rppq}{K}X^2 + \frac{2rc}{K}X + cr - \frac{cr}{K}X = \delta pqX - \delta c - \dot{p}qX + \dot{c}$$

por tanto,

$$-\frac{2rpq}{K}X^2 + \left(rpq + \frac{rc}{K} - \delta pq + \dot{p}q\right)X + \delta c - \dot{c} = 0$$

así que

$$2rpqX^2 - (rpqK + rc - \delta pqK + \dot{p}qK)X + (-\delta c + \dot{c})K = 0$$

La ecuación cuadrática precedente tiene solución positiva

$$X_\delta = \frac{1}{4} \left[\bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} + \frac{\dot{p}}{rp} \right) + \sqrt{\left[\bar{X} + K \left(1 - \frac{\delta}{r} + \frac{\dot{p}}{rp} \right) \right]^2 + \frac{8K}{rpq} (\delta c - \dot{c})} \right]$$

con $\bar{X} = \frac{c}{pq}$. Y de la relación (1.3), p. 8,

$$E_\delta = \frac{G(X_\delta) - \dot{X}_\delta}{qX_\delta}$$

Bibliografía

- [Albornoz, V., Canales, C., Fazzi, R], *Modelo de optimización para el cálculo de la cuota de captura de langostino amarillo.*, División de Evaluación de Pesquerías Nacionales Instituto de fomento pesquero, 34(1): 15-21, Chile, 2006.]
- [Anderson, L.G., Seijo, J.C], *Bioeconomics of fisheries managment.*, Wiley Blackwell, USA, 2010.
- [Biran, A., Breiner, M], *Matlab for Engineers*, Addison-Wesley, Great Britain, 1997.
- [Chávez, E.A., Salgado Rogel], *M.L., Palleiro Nayar, J., Stock assessment of the warty sea cucumber fishery (Parastichopus parvimensis) of NW Baja California.* CalCOFI Report 42: 136-147. Vol. 52, México, 2011.
- [Chiang, A], *Elements of Dynamical Optimization.*, Waveland Press, Illinois, 2000.
- [Circular 2019/95 emitida por el Banco de México], *TIIE a distintos plazos y calculada por el Banco de México con base en cotizaciones presentadas por las instituciones de banca múltiple valuado en moneda nacional.*, Banxico., 2017.
- [Clark, W.C], *Bioeconomic Modelling and fisheries managment.*, Wiley-Interscience, USA, 1985.
- [Comisión Nacional de Acuacultura y Pesca], *Anuario estadístico de Acuacultura y Pesca 2013.*, México, 2013.
- [Del Valle-Morales, M], *Optimización Dinámica: una guía metodológica para el estudiante de Economía*, UNAM (Tesina), 2014.
- [DOF], *Acuerdo por el que se da a conocer el plan de manejo pesquero de pepino de mar café (Isostichopus badionotus) y lápiz (Holothuria floridana) en la península de Yucatán.*, SEGOB, México, 2015.
- [DOF], *Acuerdo por el que se establece veda temporal para la pesca de todas las especies de camarón en las aguas marinas de jurisdicción federal del Océano Pacífico, incluyendo el Golfo de California, así como de los sistemas lagunarios estuarinos, marismas y*

bahías de los estados de Baja California Sur, Sonora, Sinaloa, Nayarit, Jalisco y Colima., SEGOB, México, 2016.

- [DOF], *Acuerdo por el que se modifica el Aviso por el que se da a conocer el establecimiento de épocas y zonas de veda para la pesca de diferentes especies de la fauna acuática en aguas de jurisdicción federal de los Estados Unidos Mexicanos, publicado el 16 de marzo de 1994, para modificar el período de veda de pepino de mar y establecer la cuota de aprovechamiento de pepino de mar café (Isostichopus badionotus) en las aguas marinas de jurisdicción federal colindantes con el Estado de Yucatán.*, México, 2017.
- [Fajardo-León, M.del C., Turribiates-Morales, J.R.], *Distribución y densidad de Parastichopus parvimensis de Puerto Escondido Abreojos en la costa noroeste de Baja California Sur.*, Ciencia Pesquera, Vol. 17, núm. 2, noviembre, p.p. 13-20, México, 2009.
- [FAO Fisheries Department], *The ecosystem approach to fisheries.*, FAO Technical Guidelines for Responsible Fisheries. No. 4, Suppl. 2. Rome, 2003.
- [Fleming, W., H.], *Funciones de Varias Variables*, CECSA, México, D.F., 1965.
- [Henry, G., Pahun, J., Trigo, E.], *La bioeconomía en América Latina: oportunidades de desarrollo e implicaciones de política e investigación.*, FACES No. 42-4, p.p. 125-141., Argentina, 2014.
- [OECD Multi-Disciplinary Issues International Futures Programme], *The Bioeconomy to 2030 designing a policy agenda.*, París, 2009.
- [Palleiro-Nayar, J.S (Compilador)], *Recursos Bentónicos de Baja California: Erizo y Pepino de mar.*, INAPESCA, México, 2013.
- [Quinn II. T. J., Deriso, R. B], *Quantitative Fish Dynamics.*, Oxford University Press, New York, 1999.
- [Salgado-Rogel, M.L., Palleiro-Nayar, J.S., Rivera-Ulloa, J.L., Aguilar, D], Vázquez, E., Jiménez, M.C., *La pesquería y propuestas de manejo de pepino de mar Parastichopus parvimensis en Baja California.*, Ciencia Pesquera 17(1):17-26., México, 2009.
- [Salgado Rogel, M.L., Palleiro Nayar, J.S., Rivera Ulloa, J.L., Aguilar, D], Vázquez, E., Jiménez, M.C., Uribe Osorio, F., *Análisis y manejo de la pesquería de pepino de mar Parastichopus parvimensis en Baja California, Informe de Investigación.*, 22 p., México, 2007.
- [Secretaría de Hacienda y Crédito Público], *Tasa social de descuento (TSD).*, www.gob.mx/shcp/documentos, México, 2015.

- [Secretaría de Pesca y Acuicultura de Baja California], *Informe Estadístico, Resumen Anual de Producción Pesquera y Acuícola de Baja California*, Sistema SIPESCA/CONAPESCA., México, 2014.
- [Seijo, J.C., Defeo, O., Salas, S], *Bioeconomía pesquera. Teoría, modelación y manejo.*, FAO Documento Técnico de Pesca. No. 368:176p. Rome, 1997
- [Schaefer, M.B], *Some aspects of the dynamics of polpulations important to the management of comercial marine fisheries.* Bull. Inter- Amer. Trop. Tuna Comm. 1:25-56., California, 1954.
- [Singh-Cabanillas, J., Vélez-Barajas, A], *La pesquería de pepino de mar *Isostichopus fuscus* en la costa oriental de Baja California Sur y propuestas de regulación.*, INP. SEMARNAP. Ciencia Pesquera No.12. p.p.13-17., México, 1996.
- [van Brunt, V.], *The Calculus of Variations*, Springer, New York, 2006.
- [Takayama, A], *Mathematical Economics.*, The Dryen Press, USA, 1974.

Lista de símbolos

Los símbolos de uso común se describen sólo brevemente, mientras que los que se definen en el texto, además de una descripción, incluyen referencia a la página donde se hace este proceso.

$c = c(t)$	costo por unidad de esfuerzo, p. 7
\dot{c}	crecimiento instantáneo del costo, p. 26
δ	tasa de descuento, p. 8
$\frac{\partial f}{\partial u}$	derivada parcial de la función f respecto a la variable u
$E = E(t)$	esfuerzo por unidad de tiempo, p. 7
$E_\delta = E_\delta(t)$	esfuerzo óptimo para alcanzar máxima ganancia, p. 28
E_δ^*	= $\lim_{t \rightarrow \infty} E_\delta(t)$, p. 29
$E_{\text{máx}}$	esfuerzo máximo, p. 8
\dot{f}	derivada de la función f
$G(X)$	crecimiento biológico natural, ecuación logística p. 7
$G(X_t)$	crecimiento biológico natural al final del período t , p. 19
\mathcal{H}	hamiltoniano en teoría de control óptimo, p. 13
$\int_0^\infty f(t)e^{-\delta t} dt$	valor presente del flujo de capital $f(t)$, p. 49
$\int_0^\infty f(t, X, \dot{X}) dt$	= $\int_0^\infty f(t, X(t), \dot{X}(t)) dt$
$\int_0^\infty f(t, X, Y) dt$	= $\int_0^\infty f(t, X(t), Y(t)) dt$
K	capacidad de carga o del medio, p. 7
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	límite cuando t tiende a infinito de $f(t)$, p. 45
$\lambda = \lambda(t)$	variable de coestado, p. 13
máx	maximizar
$p = p(t)$	precio por tonelada al instante t , p. 7
\dot{p}	crecimiento instantáneo del precio, 26
q	coeficiente de capturabilidad, p. 8
$\sum_{j=1}^n a_j$	= $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
r	constante de crecimiento exponencial, p. 7
$X = X(t)$	biomasa al instante t , p. 7
\dot{X}	crecimiento instantáneo de la biomasa, p. 8
$X_\delta = X_\delta(t)$	biomasa óptima para alcanzar ganancia máxima, p. 26
X_δ^*	= $\lim_{t \rightarrow \infty} X_\delta(t)$, p. 27
X_t	biomasa residual al final del período t , p. 19
$Y = Y(t)$	captura por unidad de tiempo al instante t , p. 7

Glosario

Biomasa: 1) Peso total de los organismos vivos de que se trate, tanto en un sistema, una población o una parte de una población: por ejemplo, biomasa de plancton en una zona, biomasa de desovadores o de peces recientemente reclutados. 2) Peso total de un recurso, una población o un componente de dicha población. Ejemplos: la biomasa de todos los peces bentónicos de Georges Bank; la biomasa de la población de bacalao; la biomasa de desovadores (es decir, el peso de las hembras maduras) (también ictiomasa).

Capacidad del medio: (Capacidad de carga) La población máxima de una especie que un ecosistema específico puede soportar indefinidamente sin deterioro del carácter y calidad del recurso. Representa el punto de equilibrio entre la reproducción potencial y las limitaciones ambientales.

Captura: 1) Cualquier actividad que da por resultado la muerte de peces o la captura de peces vivos a bordo de una embarcación. 2) El componente de peces que se encuentran con un arte de pesca y que retiene dicho arte.

Coefficiente de capturabilidad: representa a la fracción de la población que cada unidad de esfuerzo mata o captura en cada instante.

Esfuerzo: Medida de intensidad de las operaciones de pesca. La definición del Esfuerzo depende del tipo de pesquería (arte) y con frecuencia, del tipo de información disponible. Respecto a las pesquerías palangreras, el esfuerzo suele definirse en unidades de número de anzuelos o en horas-anzuelo. Respecto a la pesquería de cerco, el esfuerzo se suele definir como días-barco (tiempo de pesca más tiempo de búsqueda). Los científicos deberían procurar definir el esfuerzo de forma tal que facilite la estandarización de dicho esfuerzo.

Modelo bioeconómico: Instrumento analítico para facilitar las decisiones de ordenación. Los modelos bioeconómicos establecen relaciones funcionales entre características específicas de la base de recursos naturales (es decir, el recurso pesquero), y las actividades humanas para utilizar dicho recurso. La formalización de dichas relaciones requiere ciertas abstracciones de la realidad, así como estimaciones sobre los procesos biológicos y el comportamiento humano. En la medida en que dichas estimaciones pueden falsearse en parte en una pesquería concreta estudiada, los resultados de los modelos deberían considerarse teóricos y potencialmente sesgados. Si bien la fiabilidad de los modelos aumenta con la validez de las estimaciones, existen límites para formalizar e interpretar los resultados de los sistemas altamente complejos.

Índice

A

- Ajuste
 - por mínimos cuadrados, 19
 - especial para el modelo, 22

B

- Bioeconomía, 1
- Biomasa, 4, 9
 - óptima, 6, 32
 - con o sin captura, 25
 - del pepino de mar, 9
 - inicial, 11
 - presente, 11
 - residual, 4, 25

C

- Cálculo
 - de variaciones, 15
- Capacidad
 - de carga, 14
 - del medio, 10, 14
- Captura, 9
 - con mortalidad natural despreciable, 38
 - langostino de amarillo, 2
 - pepino de mar, 4
- Coefficiente de capturabilidad, 10, 27
- Condición
 - de Euler, 15, 16
 - de frontera, 17
- Condiciones
 - suficientes, 16

- Conjunto convexo, 16
- Constante
 - de capturabilidad, 10
 - de crecimiento exponencial, 10
- Costo
 - constante, 35
 - por unidad de esfuerzo, 9
- Costos
 - de oportunidad, 9
 - variables, 39
- Crecimiento
 - de Malthus o no limitado, 13
 - exponencial, 10, 13
 - instantáneo de la biomasa del pepino
 - de mar con captura, 10
 - limitado, 13
 - natural sin captura, 10

E

- Ecuación
 - característica, 51
 - de Euler, 6,7, y 17
 - logística, 13
- Esfuerzo, 9
 - óptimo, 34
 - constante, 36
 - sostenido, 36
 - variable, 39
- Estimación
 - de r y K , 26
 - de parámetros, 25

del coeficiente de capturabilidad q ,
27

F

Factor de descuento, 17

Función

cóncava, 16

convexa, 16

estacionaria, 17

Funcional

variable del, 15

G

Ganancia

acumulada, 36, 39

acumulada en función del intervalo,
40

máxima final, 41

GNUPLOT, 61

H

Hamiltoniano, 18

Horizonte

de tiempo infinito, 17

de tiempo finito, 37, 46

I

Integral impropia, 57

Integrando

cóncavo, 18

no cóncavo, 6

no concavidad del, 35

no convexo (nota al pie de página),
35

Isostichopus badionotus, 3

L

L^AT_EX, 61

Límites al infinito

finitos, 53

infinitos, 55

Langostino amarillo, 37

M

Matriz

determinante de una, 51

Hessiana, 16

simétrica, 52

valores propios reales, 52

Modelo

de crecimiento de Solow, 47

de optimización dinámica, 4

de Schaefer, 10

para función de costos, 29

para función de precios, 27

planteamiento del, 9

solución general al, 31

solución para la captura del pepino
de mar con esfuerzo sostenido
del, 36

Matlab, 59

O

Optimización dinámica, 4

P

Parastichopus parvimensis, 5

Pepino de mar, 3

Planeación

de captura para el pepino de mar, 41

de esfuerzos sostenidos, 36

para captura del langostino amarillo,
38, 39

Polinomio

característico, 51

Precio

constante, 35

Precios

variables, 39

Programa

en matlab, 59

ajustcuadesp2, 59

Dganacum, 61

Edelta, 60

ganacum, 61
ganaciavar, 60
modcosto, 61
modprecio, 61
Xdelta, 60

R

Regla

de oro, 6, 32
obtención por medio del
Hamiltoniano, 7, 48, 63
de L'Hôpital, 56

Rentabilidad económica, 1

S

Sostenibilidad

ecológica, 1
económica, 1
SWP55, 61

T

Teoría de control óptimo, 18
TeXCAD, 61

V

Valor presente, 57
Valores propios, 51
Variable
de coestado, 18
de control, 18
de estado, 18