UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL CAMPO DE LOS NÚMEROS FLEXIBLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JORGE RUBÉN RUVALCABA ÁLVAREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RODOLFO SAN AGUSTÍN CHI

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.
2018

Agradecimientos

A Carlos Álvarez y Daniel Labardini por (intentar) enseñarme a ver

A Melisa Gutiérrez por las enseñanzas dentro y fuera del aula, porque confiaste en mí y me recordaste como confiar en mí. Tú también mereces lo que sueñas, Mel

A Adrián Gallardo, Grecia Aguilera, Axel Olivares, Santiago Rovira e Itzel Escamilla, porque estuvieron conmigo en los momentos más obscuros, que comenzaron cuando comenzó este trabajo. Si la creatividad fue compañera de la desgracia, es porque ustedes así lo atestiguaron y permitieron.

A mi madre y padre, por la incansable confianza, el amor y los ánimos; por el regalo del conocimiento y la libertad creativa. Soy la más orgullosa de sus creaciones, y mis pequeños triunfos son suyos.

Contenido

Prólogo 3

Intención y marco teórico 6

Recomendación 9

Parte I. Del lado de acá 10

Capítulo I. Un poco sobre el campo de los Números Construibles. 10

Capitulo II. Otro poco sobre el campo de los Números Construibles. 17

Capitulo III. Donde se expone una nueva axiomática para la geometría basada en la idea de doblar papel 20

Capítulo IV. Parábolas, quinto y sexto axiomas. 31

Capítulo V. De la relación entre la axiomática de doblado de papel y la de la Regla y el Compás. 34

Capítulo VI. Donde se ofrecerán dos construcciones importantes debidas al Axioma de Doblado de Papel. 37

Teorema I.5. Obtención de la raíz cúbica de un número construible 37

Teorema I.6. La trisección de un ángulo cualquiera 38

Capítulo VII. El conjunto de los números flexibles. 41

Capítulo VIII. Las raíces cúbicas complejas de un número flexible 42

Capítulo IX. La ecuación general de grado tres. Fórmula de Cardano 44

Capitulo X. La ecuación general de cuarto grado. Método de Descartes 47

Parte II. Del lado de allá 50

II.1. Primera contención: las extensiones 50

Capítulo XI. Una araña construible o de la Regla y el Compás como extensiones de campo finitas 50

Definición II.1. Araña 50

Capítulo XII. Una araña flexible y un subconjunto de los Números Flexibles que es un campo 56

II.2. Segunda contención: On conic numbers 59

Capítulo XIII. De cónicas, de Cardano y de Descartes 59

Capítulo XIV. De cónicas proyectivas y de dualidad proyectiva. 62

Teorema II.3 68

Capítulo XV. Cierre 69

Teorema II.4. El Teorema 69

Parte III. De otros lados 71

Capítulo XVI. Sobre herramientas, construcciones y equivalencias axiomáticas 71

Capítulo XVII. Un hexágono regular flexible 77

Capítulo XVIII. Sobre la independencia del Axioma de Doblado de Papel (i). 80

Capítulo XIX. Un heptágono regular flexible 82

Capítulo XX. Un poco más sobre herramientas, construcciones y equivalencias axiomáticas 85

Capítulo XXI. Sobre la independencia del Axioma de Doblado de Papel (ii). 88

Tabla de Ecuaciones 89

Tabla de Ilustraciones 90

Bibliografía 91

Prólogo

"...se me ocurría como una especie de eructo mental que todo ese abecé de mi vida era una penosa estupidez porque se quedaba en mero movimiento dialéctico, en la elección de una inconducta en vez de una conducta, de una módica indecencia en vez de una decencia gregaria…"

Rayuela. Julio Cortázar

Todas las adquisiciones de conocimiento se parecen de cierta forma. La cerrazón repentina de los aparentes misterios escondidos detrás de los porqués da lugar a cierta forma apacible y lentísima de reconocer y repasar mentalmente la lógica –que estamos desesperados de poder hacer existir– del universo y de las ideas; las dudas son ardientes y pasionales; las certezas, tibias y descorazonadas.

El desarrollo del presente trabajo tuvo dos etapas principales, la primera –debida a mi completa ignorancia y a la dificultad de la búsqueda de información confiable al respecto del tema– gira en torno a un conjunto de reflexiones que he mantenido desde hace varios años al respecto de las limitaciones de la geometría euclidiana, que comenzó para mí con algunas lecturas del trabajo de David Hilbert y encontró cabida en una interesantísima clase de Historia de las Matemáticas de mano de Carlos Álvarez y Manuel Barrios en la Facultad de Ciencias. Uno de mis problemas principales era aquel en torno al Problema Deliano y algunos otros con él relacionados; este problema se clarificó para mí cuando conocí la versión algebraica de los números construibles: el conjunto que es la cerradura del campo de los racionales bajo la raíz cuadrada y la conjugación compleja.

Después de algunos semestres y de reflexiones vagas anotadas en cualquier folleto, papel o en la parte trasera de numerosos libros; y tras una brevísima conversación con Francisco Struck (también en una clase de la Facultad de Ciencias), llegué a los muy interesantes terrenos del origami geométrico. Me encontré a mí mismo rescatando algunas de las principales consecuencias de los axiomas de origami y allí concluyendo que estos permitían hacer construcciones imposibles con regla y compás. Finalmente, decidí (sin ningún tipo de seguridad matemática, claro) que aquellos resultados podían sintetizarse en el lenguaje de la Teoría de Campos básica como bien ya se ha hecho para la geometría de la Regla y el Compás, es decir, delimitar cierta estructura matemática que explique de manera mecánica, lógica y sistemática todas las construcciones del llamado One-Fold-Origami.

Totalmente a ciegas me lancé a escribir las primeras versiones de este trabajo, y a través de él, logré por mi cuenta demostrar la mitad de lo que planeaba, pero a la vez, me acerqué cada vez más a la firme comprensión de que no podría solo, por lo que durante bastante tiempo estuve buscando información más específica sobre el tema, sin demasiados resultados. En mi camino ciego me vi en la necesidad de generar y nombrar conjuntos y comportamientos dentro de ellos que no había visto antes; en particular, el por mi llamado "campo de los números flexibles" y un campo más, contenido dentro de los flexibles y que no me interesó nombrar, pues al final deseaba mostrar que estos campos eran exactamente el mismo. Por supuesto, no lo conseguí solo.

La segunda etapa comienza aquí, cuando casi al borde de dejar el trabajo incompleto me aventuré a escribir un correo electrónico a Robert J. Lang, quien tuvo la amabilidad de responderme de modo casi inmediato y de guiar mi trabajo a través de recomendaciones de literatura especializada en el tema y que no es fácil de conseguir googleando a ciegas; el problema que me detenía , y hasta entonces lo noté, era de concepto, mi búsqueda de términos incorrectos que aludían a objetos que por supuesto ya existían y yo no conocía, encerrado como estaba en mi ego y mi ignorancia. También de éste modo me enteré de que mi campo de los números flexibles (que ingenuamente me tenía tan orgulloso por haberlo generado por mi cuenta) había sido ya definido por Roger Alperin en numerosos de sus trabajos, y la traducción mecanicista del proceso de doblado de papel, sintetizado y bien explicado por Eulalia Tramuns, Carlos Videla, los mismos Roger Alperin y Robert Lang, entre otros muchos matemáticos notables.

El nombre real de este campo es *Field of origami-constructible numbers,* pero por un deje de mi viejo ego, y por la leve dificultad de la traducción, decidí conservar el nombre que yo elegí. Estoy esperanzado en que se me perdonará esta pequeña petulancia en aras de que (al menos así lo creemos) esta es una de las pocas versiones en español del tema, además de completamente directa y enfocada al tema desde todos los ángulos en que los distintos expertos lo han abordado (hasta donde sabemos).

Intención y marco teórico

Se tiene el objetivo, como ya se ha dejado entrever, de hacer un análisis lo más completo posible de las consecuencias algebraicas de los primeros seis axiomas de la geometría del origami de Huzita-Hatori, que corresponden a ciertas configuraciones geométricas posibles del One-Fold-Origami, es decir, aquellas construcciones que pueden ser efectuadas con solamente un doblez por vez (sin poder efectuar uno nuevo sobre un papel previamente plegado sin antes desdoblarlo). Debido a que la intuición primera del tema apareció como una suerte de analogía a lo ocurrido con el campo de los números construibles (al que en este trabajo llamaremos $\mathfrak{C}$), mantendremos esta forma de trabajo y trataremos de imitar el comportamiento matemático de éste. Así, tratamos de abordar el tema en los tres ejes principales que ubicamos dentro de su comprensión:

1. Noción geométrica-intuitiva

Donde expondremos los axiomas en su enunciación intuitiva, es decir, su idealización como herramientas abstractas (dobleces, puntos) sobre objetos ideales (papel), que tendrán el mismo significado que el plano, la regla y el compás tienen para la geometría euclidiana; además se introducirá una suma, producto, raíz cuadrada y raíz cúbica de segmentos que nos permitan construir con ellos un campo.

2. Noción algebraica-mecanicista

Justificaremos la transformación de la idea de "doblar papel" en una noción puramente lógica y matemática (en el sentido más simple del formalismo matemático) directamente desprendible de las labores ya hechas sobre los números construibles (en la medida de lo posible) e introduciremos una herramienta mental nueva cuando esto no sea posible; para poder así explicar (o más bien, hacer corresponder) el campo generado en el punto anterior como una estructura algebraica bien definida y cerrada bajo ciertas condiciones, que desearemos sea una extensión de algebraica del campo $\mathfrak{C}$

3. Justificación filosófica junto con pertinencia matemática.

Presentaremos la novedad y utilidad de contar con un conjunto como éste, además de los resultados interesantes que arrojan sus posibilidades algebraicas sobre sí mismo y su anillo de polinomios en el terreno de la Teoría de Galois; y sus posibilidades geométricas en el terreno de la geometría sintética y la intuición del plano, además de la necesidad de avanzar en el conocimiento de ciertos subconjuntos de los números algebraicos en general. Justificaremos su solidez, desprendida de la noción intuitiva que le da origen

Se ha decidido evitar, en la medida de lo posible, hacer alusiones directas al continuo matemático por creer que representa más un impedimento metodológico que una ventaja; así, lejos de pensar a nuestro conjunto de discurso como un subconjunto del campo $\mathbb{C}$ (cosa que, en el discurso de los cardinales grandes, definitivamente es), nos enfocaremos en presentarlo como una extensión de $\mathfrak{C}$. Por supuesto esto solo resultará posible y aceptable hasta cierta parte del trabajo, cuando, por razones que no alanzamos a entender, deberemos dar un giro inesperado, pero bien justificado en la dirección de nuestro discurso y apelar brevemente a la teoría de cónicas proyectivas reales. Es por lo tanto que se sentirá una brusca diferencia entre lo subyacente de la primera parte del trabajo con la segunda, solicitamos atentamente se comprenda este viraje.

El trabajo tiene una forma que podría provocar interpretarlo como simplemente una colección básica de conocimientos del origami rescatados desde diferentes áreas y con diferentes interpretaciones, por lo tanto, se tiene la ventaja de necesitar únicamente herramienta básica de todas las áreas a las que apelaremos. En la primera parte del trabajo se hará una remembranza de los axiomas, postulados y nociones comunes de la geometría euclidiana y se precisarán conocimientos a nivel básico de las construcciones geométricas de la Regla y el Compás; sobre la estructura de campo algebraico, y sobre la fórmula general de segundo grado; además de unas pocas ideas sobre aritmética de números complejos.

La segunda parte se divide a su vez en dos; precisa, también de modo básico, nociones de Teoría de Galois, en especial sobre extensiones algebraicas, anillo de polinomios, extensiones de Galois y conceptos, ideas, teoremas y objetos adyacentes a tal dominio de las matemáticas. Expone de manera muy sintética la proyectivización del plano real, y requerirá nociones sobre teoría de matrices y de cónicas planas reales; nada que pueda considerarse profundo.

La tercera parte, un conjunto de reflexiones y de temas adyacentes o complementarios al corpus del trabajo, no precisa conocimiento alguno en particular pues de hecho ni siquiera se ha pensado como una parte vital (que sí importante, complementaria y fuertemente emocional) del trabajo.

Por último, se anticipa que se darán demostraciones de ciertos teoremas posiblemente ya conocidas por el lector, pero que se desean dejar lo más sólidamente plantadas posible por resultar de sumo interés al desarrollo del tema; por el contrario, en más de una ocasión se mencionará solamente, o simplemente se esbozará brevemente la demostración de algún otro teorema que resulte útil pero no vital para nuestros objetivos; todo con el fin de mantener en la medida de lo posible la coherencia y sobriedad del discurso, pues como se mencionó antes, los temas que lo componen son muchos y variopintos, cada uno igualmente profundo y apasionante; y no deseamos caer en ambigüedades o reflexiones innecesarias.

Se espera con toda humildad que este trabajo resulte de utilidad e interés para cualquiera que esté en busca de información básica sobre el One-Fold-Origami, la Geometría Euclidiana y la teoría de extensiones algebraicas del campo de los números racionales, por lo que se ha hecho un esfuerzo en clarificar y ahondar en temas que carecen de atención en otros documentos y artículos académicos revisados a lo largo del desarrollo de esta tesis, que por estar dirigidos en tal o cual área específica (o para tal o cual público específico), toman al tema con poca profundidad, más como una curiosidad.

Recomendación

Es posible y muy ordenado leer este trabajo como se lee un libro normal, sin haber problema alguno comenzando en la **Parte I. Del lado de acá** y finalizando en la **Parte II. Del Lado de Allá**, pues ahí se detienen las reflexiones estrictamente necesarias para su comprensión; o bien, Proceder leyendo de golpe y de modo tradicional las tres partes de que este trabajo se integra. Al modo de una famosa contranovela argentina de la cual mi estilo es una cínica copia, y con el ánimo de seguir la misma línea desordenada que siguió su autor, se recomienda intercalar la lectura de los capítulos que conforman la **Parte III: De otros Lados** de éste trabajo, entre capítulos específicos de las Partes I y II, para lo cual, *al final de cada capítulo* se indicará con un símbolo ⋓ el capítulo que su interlocutor le recomienda sea leído.

Parte I. Del lado de acá

Capítulo I. Un poco sobre el campo de los Números Construibles.

Se comenzará de un modo natural, haciendo una rememoración de los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás en el Plano Euclidiano que armonicen con lo que en ésta sección, y en general, en el resto de éste trabajo, se desea expresar. Es importante mencionar que se desea preservar la esencia que tienen los conceptos de punto, recta, ángulo y circunferencia en ese texto, es decir, vamos primero a hace un breve sumario de las *definiciones* (Euclides, 1991, págs. 189-196) y *nociones comunes* (Euclides, 1991, págs. 199-201) de los Elementos de Geometría y que nos serán útiles:

- Un punto es lo que no tiene partes.
- Una línea es una longitud sin anchura. Los extremos de una línea son puntos.
- Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Una circunferencia es una línea tal que todas las líneas rectas que caen en ella desde un punto llamado centro dentro de la figura, son iguales.
- Un ángulo es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran en el plano y no están ambas en una línea recta.
- Dos cosas iguales ambas a una tercera son iguales entre sí.
- Si se añaden o sustraen cosas iguales a dos cosas iguales los totales son iguales.

Vamos a entender aquí como un axioma los postulados mismos de los *Elementos*. Se anticipa que algunos de ellos se reescribirán en una forma de manera que sean más accesibles, llamaremos a estos “Axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás” (Euclides, 1991, pág. 197)

I. Es posible trazar un segmento de recta entre cualesquiera dos puntos del plano.
II. Es posible prolongar una línea recta de manera indefinida.
III. Es posible trazar una circunferencia con centro en un punto cualquiera del plano y con un radio cualquiera.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí. Sobre una línea recta yacen dos ángulos rectos.
V. (Quinto postulado) Dada una línea recta y un punto fuera de ella, se puede trazar a lo más una única recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada. [1]

Como puede verse fácilmente ésta es la forma en que se entiende la geometría de la regla y el compás de manera usual. Supondremos, como ya se mencionó, que el lector está familiarizado con las construcciones con regla y compás que abundan en un curso básico de geometría sintética.

Se sabe que si se establece un segmento de recta arbitrario y se le llama *unidad* o 1 se puede demostrar que el conjunto de todos los números que se pueden construir haciendo uso de los axiomas arriba enunciados es un campo al que se conoce como campo de los números construibles. Veámoslo de nuevo –por ser de importancia capital para nuestro propósito– en el siguiente teorema:

Teorema I.1

(Rotman, 1998, págs. 132-133) Sean X_1 y X_2 dos puntos no iguales en el plano. Llamemos 1 a la magnitud del segmento de recta comprendido entre ellos. Si AB es un segmento de recta dado y no trivial, y con CD un segmento cualquiera, son construibles como segmentos de recta los siguientes números:

a. $AB + CD$ (Rotman, 1998, págs. 132-133)
b. Cualquier número $n \in \mathbb{N}$ (Rotman, 1998, págs. 132-133)

[1] Axioma de Playfair. Equivalencia del quinto postulado de los *Elementos* formulada por Proclo y pulbicado por John Playfair en 1795

c. $OX = AB \cdot CD$ (Hilbert, 1950, pág. 31)

d. $AB = \frac{OX}{CD}$

e. $\sqrt{CD}$ (Rotman, 1998, págs. 132-133)

Demostración I.1

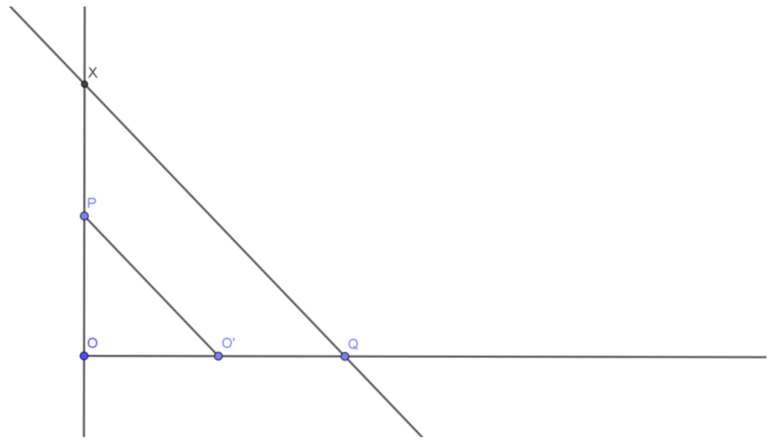
a. Prolónguese la recta AB tanto como sea necesario y colóquese sobre ella el segmento CD de tal modo que $B = C$; así, $AD = AB + CD$.

Construcción I. Suma de Segmentos

b. Repetir el proceso del inciso anterior n veces con $X_1X_2 = AB = CD$.

c. Como en (Hilbert, 1950, pág. 31) Se introduce la siguiente construcción: Dado un segmento fijo de longitud $OO' = 1$, tracemos una perpendicular a él por uno de sus extremos O. Sean P en la perpendicular tal que $OP = AB$ y Q en la prolongación del segmento de longitud 1 tal que $OQ = CD$. Se traza la recta PO' y la paralela a ella que pase por Q y a cuya intersección con OP llamaremos X.

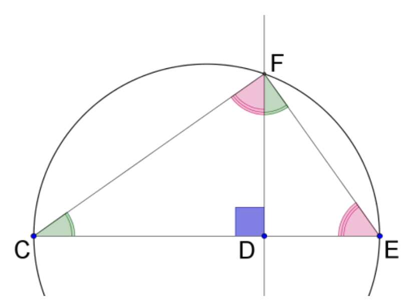
A OX lo llamaremos por definición el producto de AB y CD, es decir $OX = AB \cdot CD$.



Construcción II. Producto de Segmentos

d. Para cualesquiera segmentos arbitrarios OX y CD puede ser encontrado un segmento AB tal que $OX = AB \cdot CD$. A tal segmento lo llamaremos $AB = \frac{OX}{CD}$, el cociente de OX y CD.

e. Sea $E \in \overline{CD}$ tal que $DE = 1$, y sea $\mathcal{C}$ la circunferencia con diámetro CE. Tracemos una perpendicular a CD que pase por D y llamemos F a alguna de sus intersecciones con $\mathcal{C}$. Nótese que $\varDelta CEF$ es rectángulo por tener un lado como diámetro de su circuncírculo, además $\varDelta CFE \sim \varDelta CDF \sim \varDelta FDE$; por lo tanto se tiene que: $\frac{FD}{CD} = \frac{DE}{FD} \Rightarrow \frac{FD}{CD} = \frac{1}{FD} \Rightarrow FD^2 = CD \Rightarrow FD = \sqrt{CD}$.



Construcción III. Raíz cuadrada de un segmento

■

Al igual que con nuestros axiomas, el teorema desea preservar la elegancia observacional que posee la geometría euclidiana; sin embargo, lo anterior deja de manifiesto un poder que en principio la regla y el compás no parecen tener, y que resulta ser bastante notable, a saber, que si se consideran segmentos de recta dirigidos resulta posible modificar un poco los incisos **a.** y **b.** de nuestro teorema; estamos pensando, en el primer caso, en que basta aclarar que se deben hacer coincidir los puntos final del segmento AB con el inicial del segmento CD para completar una definición aceptable de suma; y en el segundo, concluir que se pueden construir no solo todos los números naturales, sino también todos los enteros. También es obvio que, en vista de esta observación, los incisos **c.** y **d.** nos dicen que se pueden construir todos los números racionales.

Sería erróneo suponer que —si llamamos $\mathcal{S}$ al conjunto de todos los segmentos de una única recta— estamos, con nuestro primer teorema, haciendo alguna especie de "algebrización" del conjunto $\mathcal{S}$; es decir, asignando una suma y un producto para darle estructura de campo; más aún se estaría admitiendo implícitamente que $\mathbb{Q}$, el campo de los números racionales, puede mediante algún morfismo de campos, ser inyectado en $\mathcal{S}$.

Recuerde el lector que en el más puro espíritu de la geometría euclidiana el producto de segmentos no es un segmento, además nuestras construcciones previas dejan claramente ver que no estamos multiplicando segmentos de una única recta; estamos valiéndonos de las nociones de Hilbert e imitando su interpretación de la teoría de la proporción para lograr el producto de segmentos.

Más que inyectar a los naturales en los segmentos nos gustaría pensar que lo que acabamos de hacer es una reinterpretación del concepto de número natural, una distinta a la de la teoría de conjuntos, pero valiéndonos de la teoría algebraica existente para hacer crecer esta reinterpretación intuitiva y convertirla en un objeto formal, pero con una conexión directa a la realidad observable, a diferencia del trabajo conjuntista.

Los razonamientos previos, junto con el **Teorema I.1** nos permiten deducir el siguiente resultado:

Corolario I.1

El conjunto de todos los números que pueden ser construidos (como segmentos de recta) es un campo.

Prueba I.1

Del teorema anterior se sigue fácilmente que la suma y el producto de segmentos de recta es un segmento de recta, es decir, el conjunto de los números construibles es cerrado bajo estas operaciones. La existencia de los neutros e inversos aditivos y multiplicativos se discutió suficientemente. Por último, las dos conmutatividades y las tres distributividades se siguen fácilmente de la forma en que las relaciones de equivalencia y las formas de la construcción están dadas.

■

Al campo de los números construibles lo denotaremos como $\mathfrak{C}$. Además de lo anterior, se pueden deducir algunos otros resultados de nuestro primer teorema:

Corolario I.2

El campo de los números construibles $\mathfrak{C}$ es cerrado bajo la raíz cuadrada.

Prueba I.2

Es obvio por el inciso **e.** del **Teorema I.1.**

■

Y de esto último se deduce que aunque ya dijimos que $\mathfrak{C}$ contiene a todos los racionales, contiene también, por ejemplo, a $\sqrt{2}$, que no es racional, por tanto, esta contención es propia, lo que nos permite enunciar un tercer corolario:

Corolario I.3

El campo de los números racionales está contenido propiamente en el campo de los números construibles: $\mathbb{Q} \subset \mathfrak{C}$.

Prueba I.3

Como ya se dijo, todo racional es construible, pero no todos construible es racional. En particular, todas las raíces de números naturales son construibles, y por obvias razones, también sus raíces cuartas y en general, sus raíces 2^n −ésimas, que por lo general, no son racionales.

■

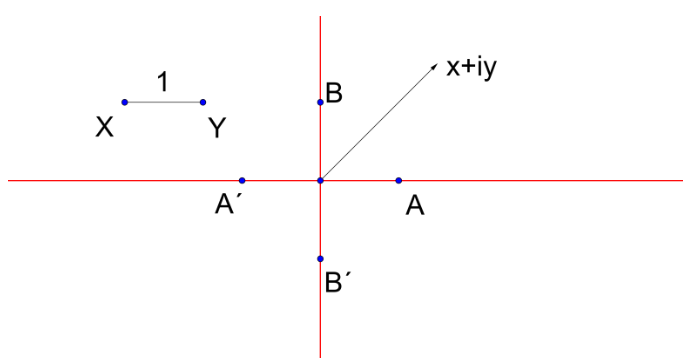
$\mathbb{U}$ Capítulo II

Capitulo II. Otro poco sobre el campo de los Números Construibles.

Muy en el espíritu interpretativo de nuestro trabajo, cuya inspiración se encuentra en la Teoría de Galois, y valiéndonos ahora de la biyección existente entre el Plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ y el conjunto de los Números Complejos $\mathbb{C}$, requerimos de la siguiente construcción:

Sean como en (Rotman, 1998, pág. 129) X y Y dos puntos no iguales en el plano. Llamemos $unidad$ a la magnitud del segmento de recta comprendido entre ellos. Elíjase un punto cualquiera del plano y llámesele O, trácese una recta por él. Sean A y A' puntos sobre tal recta de modo que $\overline{AO} = \overline{XY} = \overline{A'O}$. Trácese una perpendicular a $\overline{AA'}$ que pase por O y de igual manera, sean B y B' puntos en tal recta perpendicular tal que $\overline{BO} = \overline{XY} = \overline{B'O}$.

Como se adivina fácilmente, estamos introduciendo un sistema de coordenadas cartesianas al plano euclidiano. La finalidad es simple: siempre que podamos construir un par de números reales, podremos también construir un punto del plano identificado por tales números, y así, podremos estar también construyendo un número complejo.



Construcción IV. Construibles complejos

Teorema I.2

Los postulados del **Teorema I.1** se sostienen para números construibles complejos:

a. La suma de dos números construibles complejos es un número construible complejo.
b. El producto de dos números construibles complejos es un número construible complejo.
c. Existe un inverso aditivo para todo número construible complejo distinto de 0.
d. Las dos raíces cuadradas de un número construible complejo son números construibles complejos.

La demostración es trivial en vista del teorema anterior y de una mención breve de la aritmética de los números complejos, que incluirá una revista necesaria al:

Teorema I.3. Teorema de DeMoivre

Un número complejo $rcos\theta + irsen\theta$ distinto de cero posee exactamente n raíces n −ésimas distintas dadas por $\left\{\sqrt[n]{r}cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sqrt[n]{r}sen\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n-1}$ donde $\sqrt[n]{r}$ es la raíz n −ésima real del módulo del número. (Cárdenas, Lluis, Raggi, & Tomás, 1990, págs. 271-273)

■

Demostración I.2 (Rotman, 1998, págs. 129-131)

Sean $a + bi$ y $c + di$ dos construibles complejos:

a. De la suma de números complejos tenemos que $(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$ y como a, b, c y d son construibles, $(a + b)$ y $(c + d)$ también lo son; así, $(a + b) + (c + d)i$ es construible
b. Del producto de números complejos tenemos que $(a + bi)(c + di) = (ab - cd) + (ad + bc)i$, como a, b, c y d son construibles,también lo

son $(ab-cd)$ y $(ad+bc)$; por tanto $(ab-cd)+(ad+bc)i$ es construible

c. Sabemos que si $(a+bi)=z\in\mathbb{C}$ entonces $z\bar{z}=|z|^2$ así, $z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=1$; luego, $z^{-1}=\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)$ así, si z es construible, $\bar{z}$ también lo es, pues basta encontrar el inverso aditivo de su parte imaginaria; también lo son $|z|=a^2+b^2$ y $\frac{1}{|z|^2}$ pues el producto, la suma y el inverso aditivo son construibles ; finalmente, $\left(\frac{\bar{z}}{|z|}\right)$ es construible pues el producto de complejos es cerrado por el inciso anterior

d. Pongamos $(a+bi)$ en su forma polar: $(a+bi)=rCiS\theta$. Por el teorema de De Moivre sabemos que nuestro número tiene 2 raíces cuadradas, tales son, $\sqrt{r}CiS\frac{\theta}{2}$ y $\sqrt{r}CiS\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)$ con $\sqrt{r}$ la raíz cuadrada real positiva del número real r, la norma del complejo. Es decir, basta calcular la raíz de $r=\sqrt{a^2+b^2}$, cosa que ya sabemos hacer por el teorema I.1; y bisecar el ángulo θ con regla y compás, cosa que también sabemos de la geometría euclidiana, así, ambas raíces cuadradas son construibles.

■

La intención es establecer que $\mathbb{Q}\subset\mathfrak{C}$, que $\mathfrak{C}\not\subset\mathbb{R}$ y que $\mathfrak{C}\subset\mathbb{C}$. También resulta fácil deducir que esta última contención es propia, pues existe al menos un número complejo que no es construible, por ejemplo, $\pi+i$; y aunque se pueden construir con regla y compás los primeros digamos, n escalones de la expansión por fracciones continuas de π, recordemos que tal fracción es infinita y una construcción con regla y compás exige un número finito de pasos, es decir, π no es construible. En general, ningún número trascendente lo es; sin embargo, tal discusión se cerrará con el anterior breve comentario pues no es de gran interés para los fines de este trabajo.

⋓ Capítulo III

Capitulo III. Donde se expone una nueva axiomática para la geometría basada en la idea de doblar papel

A continuación se ofrecerán una serie de axiomas que podrían considerarse “alternativos” para la geometría euclidiana pero que exigen cierto manejo del plano euclidiano como un objeto de trabajo, es decir, un objeto abstracto susceptible de manipulación, y no simplemente un mero universo de discurso, como en el caso de la Geometría de la Regla y el Compás.

Al igual que con esta última, la idea es introducir una herramienta abstracta para la geometría que permita idealizar el tipo de construcciones que se van a permitir a través de los axiomas. Para la Geometría de la Regla y el Compás, estas herramientas son, evidentemente, la regla y el compás (recordemos, un compás que no tiene medidas angulares, y sirve simplemente para transportar distancias y dibujar circunferencias dados un centro y un radio; y una regla sin graduar, que permite trazar la recta que une a dos puntos cualesquiera); y para nuestra nueva axiomática, propuesta a continuación, será simplemente la idea de *doblar papel*. En consecuencia vamos a explorar las posibilidades de ésta idea abstracta a través de los siete ya conocidos *axiomas de Huzita-Hatori* –en honor a sus descubridores[2]–y discutiremos con más rigor su traducción mecanicista al lenguaje matemático en una parte posterior de éste trabajo.

En 1989 se llevó a cabo el *First International Meeting of Origami Science and Technology,* donde Benedetto Scimemi y Humiaki Huzita, matemáticos Italiano y Japonés respectivamente, presentaron una serie de investigaciones referentes a la relación entre el origami y la Geometría Euclidiana. Según testimonios recogidos en (Tonelli, 2006) Huzita se presentó a las puertas de Scimemi, en la universidad de Padova, con lo que parecía una demostración incorrecta, en el ámbito de la Geometría Euclidiana, del problema de la trisección del ángulo; uno de los dolores de cabeza históricamente adquiridos más grande de las matemáticas.

[2] (Lang, Origami and Geometric Constructions, 2004, pág. 38)

El problema, junto con algunos otros igualmente patológicos, fue resuelto en el siglo XIX por el matemático Francés Pierre Laurent Wantzel[3] dentro de los dominios de la teoría de Galois, con la decepcionante pero ya sospechada conclusión de que tal cosa era imposible de construir con regla y compás. Huzita y Scimemi buscaban, pues, el error en la construcción; no lo encontraron. Lo que si encontraron fue la curiosa sensación de estar frente a algo mucho más poderoso que la Geometría de la Regla y el Compás, pero que estaba íntimamente relacionada con ellos: el One-Fold-Origami. Fue así como Huzita enunció seis axiomas que permiten, entre otras cosas, construir la trisección de un ángulo cualquiera, además de otras cosas sumamente interesantes, que pueden ser encontradas en (Lang, Origami and Geometric Constructions, 2004)

En el año 2002 el también japonés Koshiro Hatori enunció un séptimo axioma que, desde su perspectiva, era independiente de los axiomas de Huzita y Scimemi; y en efecto así era. Sin embargo, de acuerdo a Robert Lang este descubrimiento fue hecho primero por Jacques Justin en su *Resolution par le pliage de l'equation du troisieme degre et applications geometriques*[4]*;* por lo que, según él, es más correcto referirse a este grupo de axiomas como *Axiomas de Huzita-Justin* y no por su nombre popular: *Axiomas de Huzita-Hatori*.

Para finalizar, y como una curiosidad histórica resaltamos el hecho de que tal y como se menciona en (Tonelli, 2006), estas y otras primitivas construcciones, además de un primer acercamiento a la axiomática del "Origami Euclidiano". fueron dadas —en un primer lugar durante la década de 1930— por la matemática italiana Margherita Beloch Piazzolla; sin embargo en las matemáticas, como en todas partes, las cosas no siempre son justas. De cualquier modo, no son las disputas sobre derechos de autor lo que nos ocupa, sino las consecuencias de tales investigaciones. Eventualmente Robert Lang demostró el carácter axiomático de estos siete enunciados, es decir, su independencia y no contradicción. Tal demostración puede ser encontrada en (Lang, Origami and Geometric Constructions, 2004, págs. 40-45) y no nos ocuparemos en ella.

---

[3] (Stewart, 2003, pág. 81)

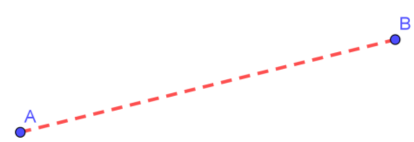
[4] (Lang, Origami and Geometric Constructions, 2004)

Al igual que con lo hecho por Hilbert en Los Fundamentos, acompañaremos los axiomas de Huzita-Hatori con la (in)definición de tres grupos de objetos, con el objetivo de establecer el enlace mental que es necesario entre un axioma y su contraparte en la "arquitectura mental" propia del individuo, de la que Carl Possy tanto hablaba.[5]:

- *El papel* es infinito, transparente y no tiene grosor.
- Los objetos de la Geometría del Origami son: *los puntos* y *los dobleces*. Todos los cuales se encuentran en *El Papel.*

Se presentan ahora los siete axiomas de Huzita-Hatori de la mano de (Lang, Robert J. Lang Origami, 2004) para conformar lo que se ha llamado One-Fold-Origami, es decir, la actividad consistente en doblar papel con fines geométricos sólo una vez, por tanto no se permite "encimar dobleces" debiendo ser necesario deshacer un doblez previo para hacer uno nuevo. Los axiomas son:

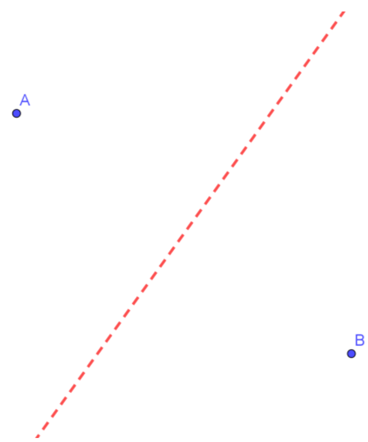
I. Por cualesquiera dos puntos del papel existe un doblez que pasa por ambos.



Construcción V. Axioma I

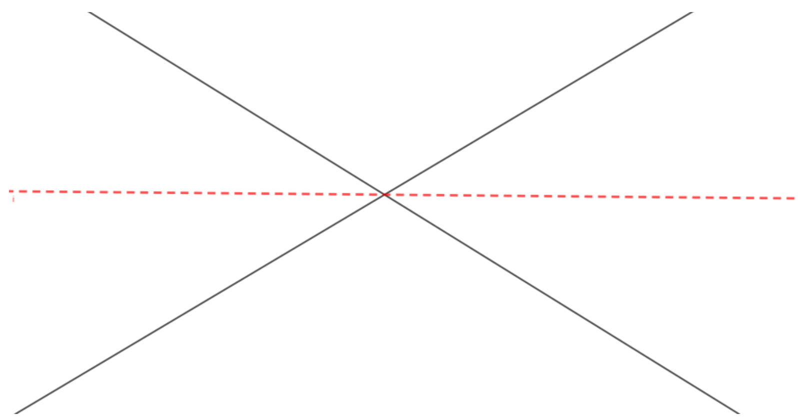
II. Dados dos puntos P_1 y P_2 existe un doblez ℓ_1 que encima uno en el otro. [6]

[5] Complementación y reinterpretación de las nociones de (Camacho Galván, 2008, pág. 7)
[6] En tal caso diremos que P_1 (o P_2) es la calca de P_2 (o P_1) con respecto a ℓ_1



Construcción VI. Axioma II

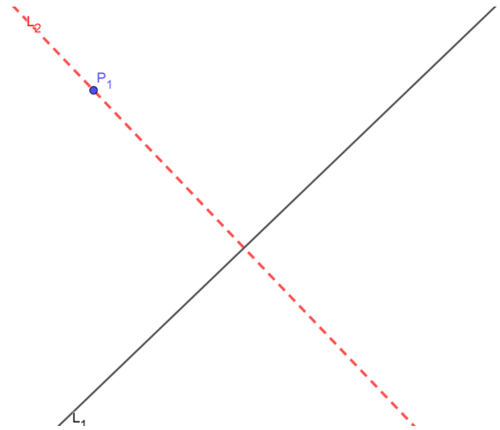
III. Dados dos dobleces cualesquiera existe un doblez que encima uno en el otro.



Construcción VII. Axioma III

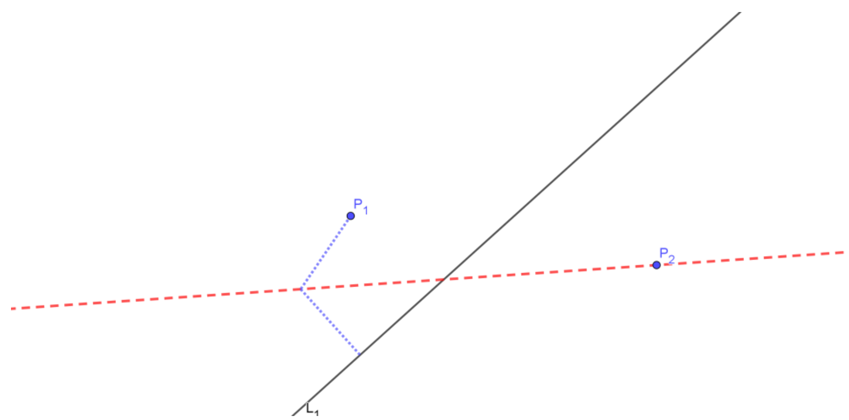
IV. Dados un doblez ℓ_1 y un punto P_1 existe un doblez ℓ_2 que encima a ℓ_1 sobre sí misma y que pasa por P_1.[7]

[7] Escrito en (Lang, Robert J. Lang Origami, 2004) como Dados un doblez ℓ_1 y un punto P_1 existe un doblez ℓ_2 que es perpendicular a ℓ_1 y que pasa por P_1.



Construcción VIII. Axioma IV

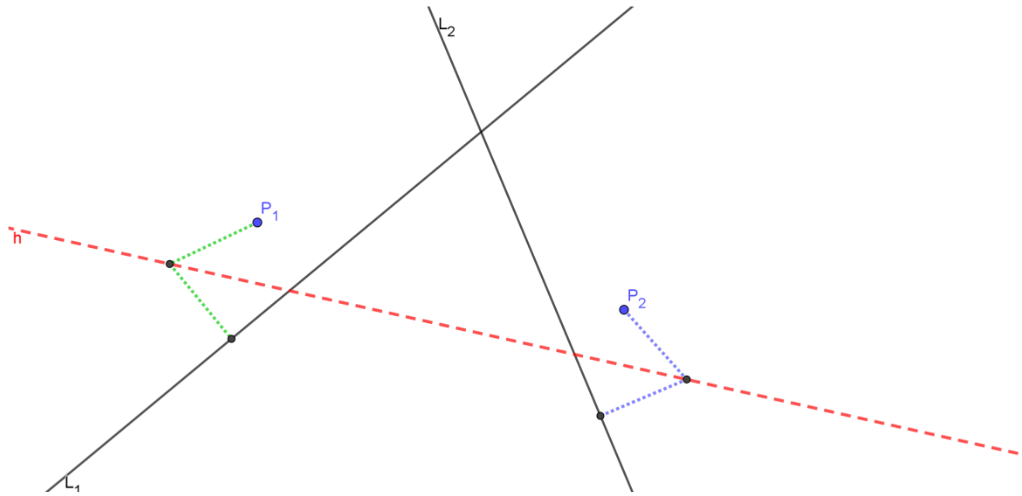
V. Dados dos puntos P_1 y P_2 y un doblez ℓ_1 podemos hacer un doblez que encime a P_1 en ℓ_1 y que pase por P_2.



Construcción IX. Axioma V

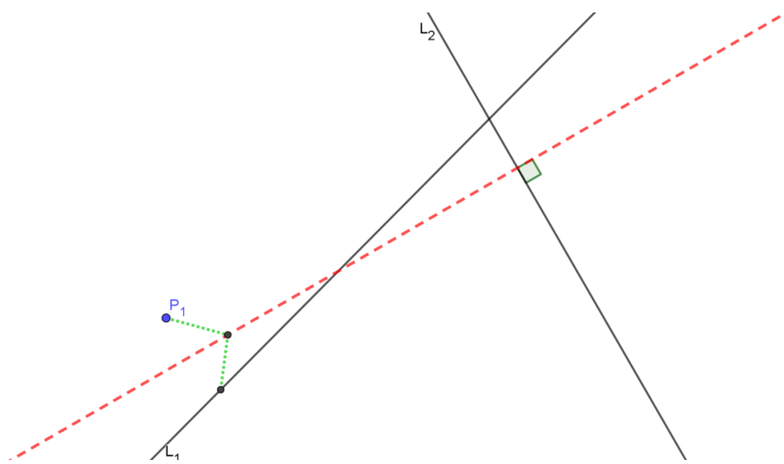
VI. Dados dos puntos P_1 y P_2, y dos dobleces ℓ_1 y ℓ_2, podemos hacer un doblez que encime P_1 en ℓ_1 y P_2 en ℓ_2.[8]

[8] Este axioma es el que ha inspirado este trabajo, pues sus posibilidades son enormes. De tal modo, lo llamaremos también en este trabajo "Axioma de Doblado de Papel".



Construcción X. Axioma VI

VII. Para un punto P_1 y dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 podemos hacer un doblez que encime ℓ_2 en sí misma y a P_1 en ℓ_1.[9]



Construcción XI. Axioma VII

Nos Parece importante ahora hacer la siguiente observación, seguida a detalle en (Hatori, 2017), y que expresa un hecho sorprendente, y quizá un tanto irrelevante (pragmáticamente hablando) sobre la Geometría del Origami:

---

[9] Presentado en (Lang, Robert J. Lang Origami, 2004) como "Para un punto P_1 y dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 podemos hacer un doblez perpendicular a ℓ_2 que encime P_1 en ℓ_1." Nuestro axioma 7 es el axioma extra propuesto por Hatori para complementar los axiomas de Huzita. No nos será de utilidad, pero se desea enunciarlo por cuestiones de cortesía profesional y completez.

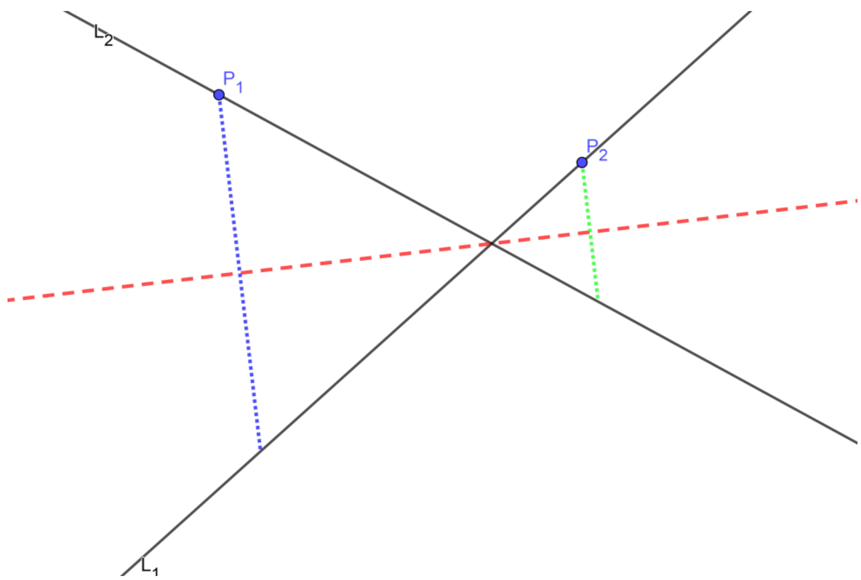
Proposición I.1

(Hatori, 2017) Todos los dobleces propuestos en los Axiomas de Huzita-Hatori pueden efectuarse como el Axioma VI sometido a ciertas restricciones.

Para una prueba de la proposición, véase (Hatori, 2017).

■

Únicamente daremos un ejemplo simple de la idea de Hatori: El Axioma III que dice "Dados dos dobleces, existe un doblez que encima uno en el otro" puede mirarse como el Axioma VI. Sean l_1 y l_2 los dos dobleces dados y hagamos que P_1 esté en l_2 y P_2 en l_1. Así, al doblar el papel, de modo que P_1 caiga sobre l_1 y a P_2 en l_2 obtenemos el doblez que encima a l_1 y l_2 como se deseaba.



Construcción XII. Axioma III. Versión de Hatori

Lo que Hatori intenta decirnos es que todos los dobleces de la Geometría del Origami no son más que solo uno, uno que nos dice de qué manera puede ser efectuado un doblez si es que pudiesen determinarse puntos en el papel; de donde se desprende una consecuencia bien esperable: todos los axiomas de Huzita-Hatori nos dicen cómo generar dobleces.

Así, y siguiendo de cerca la estructura de (Hilbert, 1950) se hace evidente la necesidad de la introducción de axiomas de otros grupos a nuestra Geometría del Origami, es decir, debe establecerse puntualmente la manera en que ha de funcionar tal geometría para lograr así desenvolver su íntima relación con la Geometría de la Regla y el Compás de modo adecuado. Adicionalmente se ha decidido introducir una técnica para la generación de puntos en el papel, pues tal y como menciona Hatori:

> Moreover, let's avoid using any tool such as a ruler, another sheet of paper, or even a pencil.
>
> Under these conditions, we cannot place a point on the plane directly. If we make a fold arbitrarily, we get a line, not a point. To locate a point, we need at least two creases. In other words, any point in the origami construction has at least two lines passing through it.
>
> Then, the origami construction would be a finite sequence of either "to fold a line at a time without any tool" or "given some creases, to locate points of intersection" on a plane with some lines placed arbitrarily. (Hatori, 2017)

De tal modo que, como preámbulo a nuestros razonamientos se requiere también de una forma sistemática de la generación de puntos, una suerte de dual del Axioma I:

Cualquier par de dobleces no paralelos determinan un único punto.

Para finalmente, dar paso a los:

Axiomas de Orden

(Hilbert, 1950, págs. 3-4)

- Si A, By C son 3 puntos en una mismo doblez de tal manera que B está en medio de A y C entonces B está en medio de C y A.
- Si A y C son dos puntos en un doblez entonces existe al menos un punto B en el doblez que está en medio de A y C y otro punto también en el dobles tal que C está en medio de A y D.
- Dados tres puntos en un único doblez, uno y solo uno de ellos se encuentra en medio de los dos restantes.

Definición I.1

Entenderemos por segmento al sistema formado por dos puntos A y B cualesquiera sobre un mismo doblez. Llamaremos puntos del segmento a todos los puntos que se encuentren en medio de los dos puntos. Se denotará AB.

- Dados tres puntos A, B, C no en el mismo doblez y un doblez l_1 que no pase por ninguno de ellos; si l_1 pasa por un punto del segmento AB entonces debe pasar también por un punto del segmento AC o bien, del segmento CB. [10]

El axioma anterior implica que todo doblez divide al papel en dos regiones. Cuando tomamos, haciendo uso del Axioma II, la calca de un punto, se entiende que el punto y la calca se encuentran en regiones distintas del plano delimitadas por el doblez que los encima.

Definición I.2

Llamaremos línea poligonal a un sistema de segmentos $AB, BC, CD, \dots, KL$. Si sucede que la línea poligonal hace coincidir a A con L la llamaremos polígono. Los lados de un polígono son cada uno de sus segmentos, y los vértices, cada uno de los puntos. Un polígono de tres lados se llama triángulo.

Axioma de Euclides

Dados l_1 un doblez l_1 y P_1 un punto fuera de él, entonces existe a lo más un doblez que pasa por P_1 y es paralelo a l_1.[11]

Axiomas de congruencia

- Sean P, Q dos puntos en el papel que se encuentren determinando un doblez l_1 y sea P' y Q' en l_2, el mismo u otro que l_1. Llamemos P_1 y Q_1a las calcas de P y Q

[10] Axioma de Pasch

[11] Nuevamente el Axioma de Euclides en la versión del Axioma de Playfair.

que queden al doblar l_1 sobre l_2. Hágase el doblez que encime P_1 sobre Q'; si sucede que al doblar también se enciman Q_1 sobre P' entonces diremos que los segmentos PQ y $P'Q'$ son congruentes y los denotamos por $PQ \equiv P'Q'$.[12]

Definición I.3

(Hilbert, 1950, pág. 6)

Todos los puntos que se encuentren en un mismo lado de un punto dado O sobre un doblez se llaman el semi-rayo que mana de O.

Definición I.4

(Hilbert, 1950, pág. 9)

Sean dos semi-rayos α, β que manen del mismo punto O. Denotamos este sistema llamado "El ángulo determinado por α, β" como $\sphericalangle(\alpha, \beta)$. Este sistema divide al papel en dos regiones distintas de tal modo que si un punto se encuentra en una de ellas, y otro en la otra, se cumple que toda línea poligonal que une a los puntos pasa por O o tiene puntos en común con α o con β.

Más aún, si dos de los puntos se encuentran dentro de la misma región del papel, existe una recta poligonal que los une sin tocar a O ni al semi-rayo. Si existe un segmento que une a los puntos que están en una misma región, entonces llamaremos a esta región el "ángulo interior determinado por α, β" y a la otra región "el ángulo externo determinado por α, β"

- Sean $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ y $\sphericalangle(\alpha', \beta')$ dos ángulos con vértices en O y O' efectúese el el doblez que encima el semi-rayo α'en el semi-rayo β, y de tal modo que la calca de algún punto en el interior de $\sphericalangle(\alpha', \beta')$ caiga en el interior de $\sphericalangle(\alpha, \beta)$; sea O_1 la calca de O' con respecto a este doblez, y llamemos α_1, β_1 a las calcas de α', β'. Efectuamos ahora el doblez que encime O_1 en O y a α_1 sobre sí mismo. Si

[12] Enunciación de desarrollo propio a partir de las ideas dadas en (Hilbert, 1950)

las calcas de O_1, α_1, β_1 con respecto al último doblez efectuado, caen sobre O, α', β' respectivamente, diremos que los ángulos son congruentes[13] y lo denotamos $\sphericalangle(\alpha, \beta) \equiv \sphericalangle(\alpha', \beta')$.

- Las relaciones definidas para congruencia de ángulos y congruencia de segmentos, son relaciones de equivalencia.

Definición 1.5

Diremos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son congruentes (y lo denotaremos como: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$) cuando se cumpla:

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C', \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

Teorema I.4. (Primer teorema de congruencia de triángulos(LAL))

Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$son tales que $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ entonces $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Demostracion I.4

Háganse los los dobleces que encimen AC en $A'C'$ de tal modo que A se encima sobre A'. Como los ángulos por A y A' son gongruentes y los segmentos dados también, resulta que C se encima sobre C' y B se encima sobre B' eso significa que el segmento BC es congruente al $B'C'$ y por lo tanto, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$.

■

⋓ Capítulo XVII

[13] Enunciación de desarrollo propio a partir de las ideas dadas en (Hilbert, 1950)

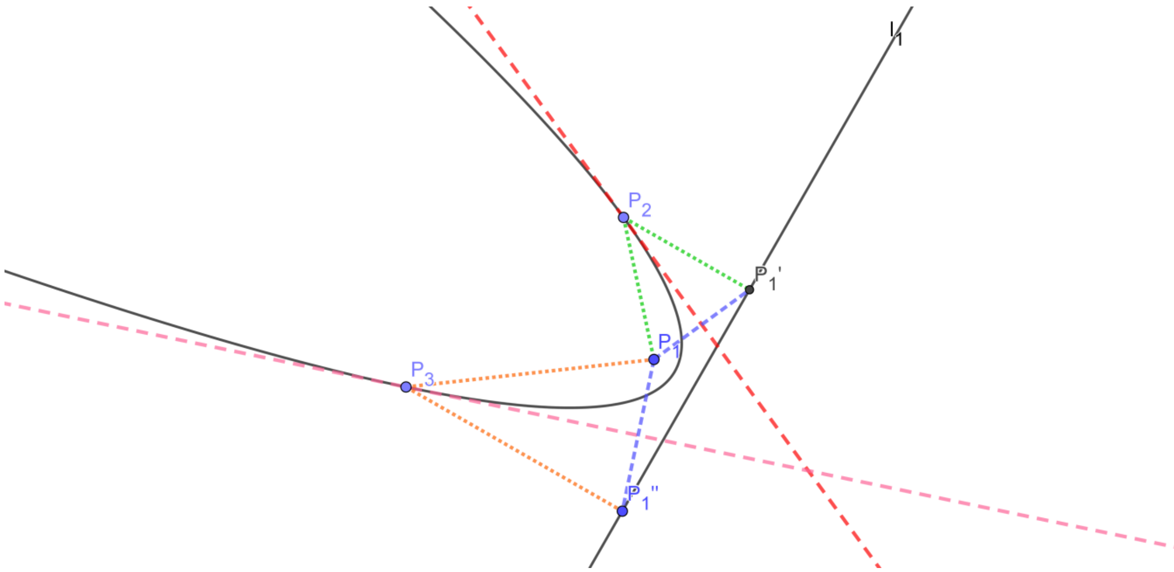
Capítulo IV. Parábolas, quinto y sexto axiomas.

Consideremos el siguiente sencillo argumento. Sea $\mathcal{C}$ una parábola en el plano cuyo foco es el punto P_1 y directriz, la recta ℓ_1; recordemos que podemos definir a los puntos de $\mathcal{C}$ como aquellos que equidistan de P_1 y de ℓ_1. Así, sea $P_2 \in \mathcal{C}$, resulta entonces que $d(P_1, P_2) = d(P_2, \ell_1)$ donde, por supuesto, d denota la distancia euclidiana. Llamemos $P_1{}'$ al pie de la mediatriz de ℓ_1 por P_1, tenemos entonces obviamente que $d(P_2, \ell_1) = d(P_2, P_1{}')$.

Si ahora hacemos pasar una tangente a la parábola por el punto P_2 tenemos que el triángulo $\triangle P_2 P_1 P_1{}'$ es isósceles, y la tangente por P_2 es la bisectriz del ángulo $\sphericalangle P_1 P_2 P_1{}'$ y consecuentemente $P_1{}'$ es la reflexión de P_1 con respecto a ésta tangente. En este sentido, acudiendo al axioma V de Huzita-Hatori (Dados 2 puntos P_1 y P_2 y un doblez ℓ_1 podemos hacer un doblez que encime a P_1 en ℓ_1 y que pase por P_2) podemos tomar a ℓ_1 y P_1 como directriz y foco de una parábola $\mathcal{C}$, y así, tenemos que el doblez resultante de este axioma es exactamente la recta tangente a $\mathcal{C}$ que pasa por P_2. Notemos que si P_2 está fuera de la parábola, entonces tenemos que existen de hecho dos de estos dobleces.

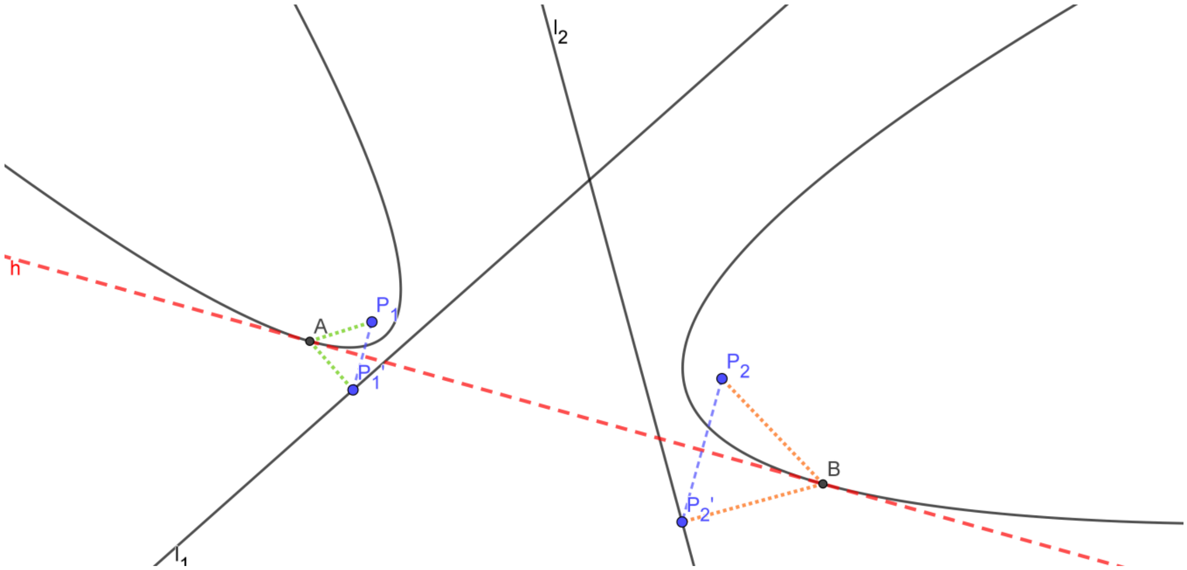
Además, nótese que haciendo variar la posición del punto P_1 sobre la recta $\ell_1$la recta tangente comenzará a variar a lo largo de todos los puntos de la parábola. Este procedimiento, por supuesto, también hará variar al punto P_2.

Es notable también que éste doblez podría no existir, de hecho así es cuando el punto P_2 se encuentra en la región del plano que corresponde al interior de la parábola.



Construcción XIII. Quinto Axioma de Origami

A la luz del comentario anterior, podemos ahora repasar la estructura de nuestro ya sabidamente importante sexto axioma de Huzita-Hatori: "Dados dos puntos P_1 y P_2, y dos dobleces ℓ_1 y ℓ_2, podemos hacer un doblez que encime P_1 en ℓ_1 y P_2 en ℓ_2". Parece ser un axioma que, de modo simultaneo, reproduce dos veces al axioma V; es decir, este axioma no es más que simplemente, buscar una de las rectas tangentes comunes a dos parábolas, una con ℓ_1 y P_1 como directriz y foco; la otra con ℓ_2 y P_2 también como directriz y foco. Las rectas tangentes pueden ser, recuérdese, entre ninguna y hasta cuatro de ellas; de manera que el doblez a efectuarse de ninguna manera podría ser único



Construcción XIV. Sexto Axioma de Origami

Aún un poco más, y para relacionar los párrafos precedentes con un antiguo problema, proponemos un modo sencillo de efectuar el doblez propuesto por el axioma VI. Resulta fácil colocar, por medio de un doblez cualquiera (pues hay infinidad de ellos, tantos como puntos en una recta), a ℓ_1 sobre P_1 y gradualmente deslizar ℓ_1 en P_1 hasta colocar a ℓ_2 sobre P_2. El procedimiento anterior es ahora más evidente: la bien conocida *neusis*, que Menecmo utilizó para resolver el Problema Deliano, la duplicación del cubo. El problema de encontrar el doblez que el Axioma de Doblado de Papel promete tiene ahora una traducción más reconocible; y nos crea la necesidad de discursar sobre cónicas en el plano de una manera suficiente.

Permítase por último, remarcar lo que se ha dicho; que el Axioma de Doblado de Papel puede explicarse de manera analítica como una recta tangente simultánea a dos parábolas, es decir, afirmamos que todos los puntos de esa tangente simultanea son flexibles si y solo si los puntos de las parábolas lo son, es decir, cuando los puntos de las directrices y los focos son flexibles (como números complejos)

Capítulo V. De la relación entre la axiomática de doblado de papel y la de la Regla y el Compás

Obsérvense bien los axiomas de Huzita-Hatori. Como se sugirió en el capítulo anterior, llevan la impronta de la Geometría Euclidiana en su interior. A través de (in)definiciones, construidas artificialmente e imitando a las de Hilbert se trata de otorgar al concepto de *punto* y doblez el mismo vacío conceptual que en los Grundlagen.

El segundo axioma sugiere que es posible encontrar la mediatriz de un segmento dado, incluso si el punto se encuentra sobre esa recta; el tercero se dedicaría a encontrar las bisectrices de los ángulos formado por dos rectas. Nótese que si ambos dobleces son el mismo basta usar el axioma para encimar la recta en sí misma, produciendo dos ángulos rectos.

Parece sugerirse que es posible reproducir todas las construcciones basadas en rectas solamente. ¿Qué hay de las circunferencias? No hay un motivo al menos aparente para creer que es posible dibujar una circunferencia doblando papel; de hecho, no es posible. El concepto de circunferencia, en la Geometría Euclidiana, es muy simple: "*el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo*". Entonces, si en nuestra geometría de doblado de papel disponemos de un punto llamado centro, y también de una distancia fija, ¿qué hace falta?

Se intentará convencer de que nada; quizá imitar la respuesta que dio Saccheri a la geometría cuando formuló su sistema geométrico basado en solamente compás; es decir, que la recta que une dos puntos en efecto existe, que uno pueda dibujarla o no es irrelevante. Evidentemente *no es posible* dibujar *todos* los puntos de una circunferencia, pero sí disponemos de todos los que sean necesarios. Basta elegir un centro y un radio; resulta muy fácil trazar una recta cualquiera por el centro, y trasladar la distancia elegida sobre esa recta; asi disponemos de un radio (o incluso un diámetro) para cualquier recta que podamos trazar por el centro elegido.

Si Euclides utilizó el concepto de circunferencia para traer a discurso de su geometría a la congruencia de segmentos, además de su posible traslación, nosotros hemos ya cubierto ese punto al modo de Hilbert, introduciendo axiomas de congruencia. Es evidente que cuándo dibujamos una circunferencia no usamos realmente todos sus puntos.

Lo que se trata de decir es lo siguiente: que todos las construcciones que pueden realizarse con regla y compás pueden realizarse también usando los axiomas de doblado de papel, pues en los términos estrictos a los que seguramente Pierre Wantzel redujo la Geometría Euclidiana en su (Wantzel, 1837), esta solo se trata sobre las interacciones (o mejor dicho, intersecciones) binarias que pueden suceder entre rectas y circunferencias.

Como ya se sugirió, el conjunto de objetos que se pueden construir con regla y compás está contenido –de cierta manera– en el conjunto de aquellos que se pueden construir doblando papel; y más aún, es posible reinterpretar los Axiomas de la Regla y el Compás y traducirlos al lenguaje de doblado de papel, como ya también se sugirió.

No obstante y debido a esta estrecha conexión, no haremos eso, y a pesar de que el trabajo pretende justificar la existencia de un conjunto (y exhibirlo) motivándose en el doblado de papel, por practicidad y eficiencia nos valdremos de ambas herramientas para hacer un par de construcciones necesarias en este trabajo. Una cuestión de interés es que, si toda construcción del sistema de la Regla y el Compás es posible con One-Fold-Origami, ¿cuál es entonces la utilidad de tal técnica?

Conservaremos las hipótesis de que el papel en donde trabajamos con regla y compás tiene las características que ya se teorizó que tiene, es decir, se puede doblar, es transparente y sin grosor. Aceptaremos que un doblez equivaldrá a una recta y viceversa e intercambiaremos esos dos conceptos cuando así convenga. La razón principal que nos motiva para esto es que expondremos una serie de construcciones con doblado de papel *que no se pueden reproducir con regla y compás,* como bien lo notaron Huzita y Scimemi. Tales construcciones están justificadas por el Axioma VI de Huzita-Hatori. Es ese es el primero de los axiomas que permite ir más allá de la propuesta estándar de un sistema de regla y compás; de modo que, mezclando a placer nuestras listas de axiomas iniciales, proponemos sea introducido el sexto axioma de Huzita-Hatori a los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás, o más precisamente, se nos conceda mezclar estas dos técnicas con el fin de facilitar las construcciones tanto como el discurso.

La anterior modificación del sistema del One-Fold Origami no es tomada a la ligera, es decir, es perfectamente posible mostrar que las construcciones euclidianas estándar pueden ser entendidas en el lenguaje del origami solamente con la ayuda de los primeros cinco axiomas de Huzita-Hatori y del andamiaje conceptual que hemos construido para ellos a través de los axiomas de Hilbert.[14] Finalmente, y para conservar la naturaleza simple de este trabajo, no nos ocuparemos del séptimo axioma de Huzita-Hatori, ni discutiremos sus consecuencias.[15]

⋓ Capítulo XIX

[14] para una demostración rigurosa del hecho, véase (Alperin, 2000, págs. 121-128)

[15] Como se asegura en (Lang, Robert J. Lang Origami, 2004) el séptimo axioma no permite la solución de ningún otro polinomio de grado superior, solamente aporta una construcción imposible de realizar con los primeros seis.

Capítulo VI. Donde se ofrecerán dos construcciones importantes debidas al Axioma de Doblado de Papel.

Ya se estableció una de las primeras ideas importantes y nuestro primer objetivo: el de lograr una construcción, usando el Axioma de Doblado de Papel, que no se corresponda con ninguna posible en el terreno de la regla y el compás. Veremos que esto es casi inmediato y además servirá para sostener la argumentación del resto de este trabajo. Trataremos de presentar de una forma elementalmente geométrica una construcción para trisecar un ángulo y otra para extraer raíz cúbica. Se recomienda encarecidamente se tengan en cuenta ambas construcciones en los siguientes capítulos.

Teorema I.5. Obtención de la raíz cúbica de un número construible

(Camacho Galván, 2008, págs. 67-69). Dado un segmento de recta arbitrario, es posible construir un segmento que equivalga a la raíz cúbica del dado; usando los axiomas de la regla y el compás acompañados del Axioma de Doblado de Papel.

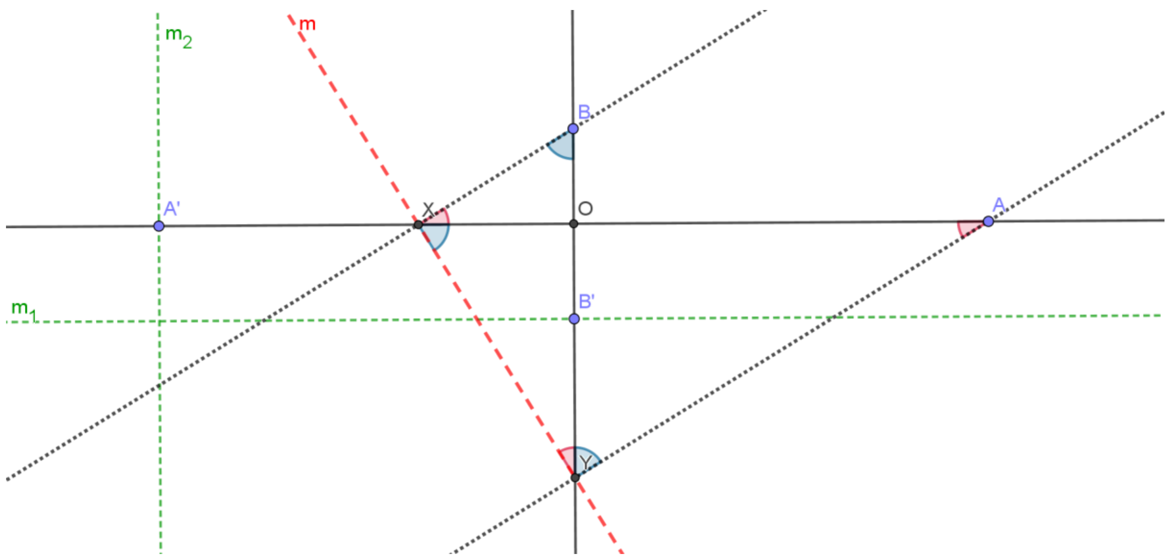
Demostración I.5

Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas perpendiculares, y O la intersección de ellas. Elegir una unidad arbitraria y construir con ella el número al que se desea extraer raíz cúbica, llamemos x a tal número. Sobre ℓ_1 sean A y A' puntos tales que $OA \equiv x \equiv OA'$ y sobre ℓ_2 sean B y B' tales que $OB \equiv 1 \equiv OB'$. Sean m_1 una recta paralela a ℓ_1 y que pase por B'; y m_2 recta paralela a ℓ_2 y que pase por A'.

Por el Axioma de Doblado de Papel existe un doblez que encima el punto A en m_2 y a B en m_1, llamemos m a ese doblez y X y Y a sus intersecciones con ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. Finalmente, sean n_1 y n_2 rectas perpendiculares a m desde X y Y, respectivamente. Note que éstas perpendiculares tocan a A y a B. Observese que los triángulos ΔXOB , ΔXOY , ΔAOY son semejantes. De tal modo se tienen las siguientes igualdades:

$$\frac{OB}{OX} \equiv \frac{OX}{OY} \text{ en los triángulos } \Delta XOB \text{ y } \Delta XOY$$

$$\frac{OX}{OY} \equiv \frac{OY}{OA} \text{ en los triángulos } \Delta XOY \text{ y } \Delta AOY$$



Construcción XV. Raíz cúbica de un segmento

Por lo tanto $OB(OY) \equiv OX^2$ y $OX(OA) \equiv OY^2$ pero $OB \equiv 1$ así $OY \equiv OX^2$ es decir, $OX(OA) \equiv OX^4$ lo cual implica que $OA \equiv OX^3 \equiv x$; finalmente llegamos a que $OX \equiv \sqrt[3]{x}$

■

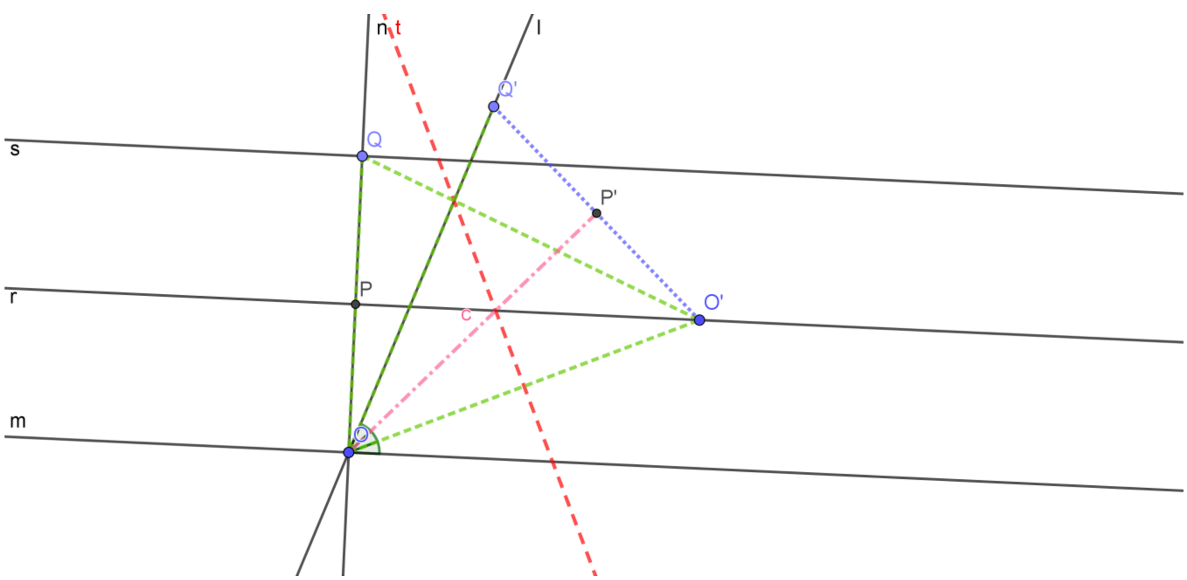
Teorema I.6. La trisección de un ángulo cualquiera

(Camacho Galván, 2008, págs. 70-73). Dado un ángulo cualquiera es posible generar un ángulo que equivalga a una tercera parte de la medida del dado usando los axiomas de la Regla y el Compás junto con el Axioma de Doblado de Papel.

Demostración I.6

Sean ℓ y m dos rectas distintas cualesquiera que concurran en el punto O. Sea θ el ángulo comprendido entre ellas; procederemos a trisecar θ. Trácese por O una recta n ortogonal a m (o a ℓ, es indistinto) y sobre ella encontremos P, Q puntos de tal modo que $OP \equiv PQ$, una distancia cualquiera; por P y Q trácense rectas paralelas a m (es decir, ortogonales a n) y llámenselas r y s respectivamente.

Haciendo uso del Axioma de Doblado de Papel, hagamos un doblez t que envíe Q a la recta ℓ y O a la recta r; sean O', P' y Q' las respectivas calcas de O, P y Q. Notemos que por la naturaleza de la construcción anterior, observada ya en la discusión de los axiomas, las parejas de puntos O, O' ; P, P' ; y Q,Q' equidistan de cualquier punto en el doblez t, puesto que tal recta es la bisectriz del ángulo comprendido entre las recta OP y la $O'P'$. Así, como O' está sobre la recta r que es ortogonal al segmento OQ (que tiene a P como punto medio) entonces el triángulo $\triangle QOO'$ es isósceles; lo cual significa que $\triangle Q'OO'$ también es isósceles, y más aún OP' es la mediatriz del segmento $Q'O'$, es decir es una altura para $\triangle Q'OO'$. De lo anterior se infiere inmediatamente que $\sphericalangle Q'OP' \equiv \sphericalangle P'OO'$.



Construcción XVI. Trisección del ángulo

Finalmente, sea R un punto sobre m de tal modo que RO' es ortogonal a m , entonces $\triangle P'OO'$ y $\triangle ORO'$ son congruentes, puesto que comparten el lado OO' y por la construcción se tiene que $P'O' \equiv RO'$ (es importante señalar aquí el hecho de que la acción de calcar un par de puntos no afecta la distancia entre ellos, es decir, la distancia entre dos puntos es la misma que la distancia entre sus respectivas calcas con respecto a una recta cualquiera; esto es fácil de demostrar simplemente diciendo que la calca de la calca de un punto cualquiera con respecto a la misma recta es el punto mismo).

Todo lo anterior significa que $\sphericalangle Q'OP' \equiv \sphericalangle P'OO' \equiv \sphericalangle OO'R$ pero como $Q' \in \ell$ y $R \in m$ entonces $\sphericalangle Q'OP' + \sphericalangle P'OO' + \sphericalangle OO'R \equiv \theta$ por tanto es cierto que las rectas OO' y OP' trisecan al ángulo θ

■

⋓ Capítulo VII

Capítulo VII. El conjunto de los números flexibles.

Definición I.6

Llamaremos número flexible *a un número (segmento de recta) que pueda ser finitamente generado a través de los primeros seis axiomas de Huzita-Hatori propuestos aquí, o alternativamente, de los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás junto con el Axioma de Doblado de Papel y tomando como base de construcción solamente números (segmentos de recta) construibles.*

Se desea hacer notar que al hablar de "finitamente generado" nos referimos a producir un número, partiendo de un segmento de recta (o segmento de doblez), con un número finito de pasos y haciendo uso de los axiomas –y consecuencias de ellos–, en el mismo sentido en que un número construible es generado por los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás partiendo de una unidad. Denotaremos aquí al conjunto de todos los números flexibles con $\mathfrak{F}$

Debido a que, como se ha dicho, la Geometría de la Regla y el Compás es un "subconjunto" de la Geometría del One-Fold-Origami, podemos concluir que todo número construible es flexible, es decir; $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$; y se podrá intuir con facilidad que esa contención no es propia. Tal cosa es evidente: si el Axioma de Doblado de Papel permite construir la raíz cúbica de cualquier número (cosa que dicho sea de paso, resuelve el problema de la duplicación del cubo, problema irresoluble con regla y compás), entonces resulta que debería existir al menos un número flexible que no sea construible. Esa es el alma de este trabajo. En efecto tal cosa es cierta, y una demostración concisa de ello se dará más adelante.

$\Cup$ Capítulo VIII

Capítulo VIII. Las raíces cúbicas complejas de un número flexible

Como ya se discutió, podemos encontrar una *interpretación construible* para un número complejo valiéndonos de la relación existente entre el plano euclidiano y el conjunto de los números complejos, así que al igual que anteriormente:

Definición I.7

Diremos que un número complejo es flexible si sus partes real e imaginaria son números flexibles como segmentos de recta, es decir, pueden ser generados a través de los axiomas de la Regla y el Compás además del Axioma de Doblado de Papel.

De nuevo apelando al teorema de DeMoivre se enuncia y demuestra el siguiente:

Teorema I.7

Si $z = a + bi$ es un complejo flexible cualquiera, entonces todas sus raíces cúbicas son flexibles.

Demostración I.7

Pongamos $z = rCiS\theta$ con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ el angulo comprendido entre el eje X del plano complejo y el vector determinado por z. Del teorema de DeMoivre sabemos que las tres raíces cúbicas de z son los números:

$$\xi_1 = tCiS\frac{\theta}{3},$$

$$\xi_2 = tCiS\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\xi_3 = tCiS\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Con $t = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt[6]{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

Por supuesto, se toma la raíz cubica real del argumento, tal cosa existe siempre porque tal argumento es un número real positivo; y tal número es flexible debido a la construcción ya hecha; es decir, si $\sqrt{a^2 + b^2}$ es construible como ya vimos, entonces su raíz cubica real es flexible pues se puede generar a partir del Axioma de Doblado de Papel.

Finalmente los ángulos $\frac{\theta}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ se pueden obtener también desde nuestro teorema de trisección de ángulos. Concluimos así que ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son flexibles

$\blacksquare$

$\Cup$ Capítulo IX

Capítulo IX. La ecuación general de grado tres. Fórmula de Cardano

Fue el matemático, médico y filósofo italiano Gerolamo Cardano quien en su *Ars Magna* de 1545 da la primera solución general conocida para la ecuación de tercer grado. Se sabe también que Cardano fue inspirado por la solución de Niccolò Fontana (comunicada por él mismo a Cardano) de una ecuación de tercer grado con una forma particular y que aparece como la piedra angular de la solución de Cardano. También, como Cardano mismo reconoce en el *Ars Magna*, una primera forma para esta fórmula fue hallada por Scipione Dal Ferro en 1515.

Lo que sigue es una breve demostración constructiva de la fórmula de Cardano con el propósito de relacionarla a nuestro discurso, pues es fundamental para los subsecuentes desarrollos de este trabajo.

Teorema I.8

Existe una fórmula general para expresar las soluciones de una ecuación polinomial arbitraria de grado 3 en una variable.

Demostración I.8 (Ivorra, 2016, págs. 2-12)

> **Observación.** Sea un polinomio $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta = Ax^2 + Bx + C$. A modo de recordatorio de las fórmulas de Vietta para un caso particular, nótese que los coeficientes del polinomio están relacionados con las raíces del polinomio: $B = -(\alpha+\beta)$ y $C = \alpha\beta$

Por comodidad y practicidad, trabajaremos en la solución de un polinomio cuyo coeficiente principal sea exactamente 1, pues una vez encontrada una solución para este tipo de polinomios, será trivial encontrar la de cualquier otro. Así, sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Lo primero que deseamos es transformarlo para obtener una expresión de la forma $y^3 + py + q = 0$. Hagamos $x = y - \frac{a}{3}$. Sustituyendo en f:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c$$

$$= y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c$$

Agrupando términos semejantes:

$$y^3 + y\left(\frac{-a^2 + 3b}{3}\right) + \left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}\right)$$

Llamemos p y q a los coeficientes del término lineal y del término libre:

$$p = \left(\frac{-a^2 + 3b}{3}\right) \quad , \quad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

Ahora, tomemos números u y v tales que $y = u + v$; entonces:

$$y^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv^2 + 3vu^2 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = u^3 + 3uvy + v^3$$

Tomando el primer y último término de esta cadena:

$$y^3 = u^3 + 3uvy + v^3$$

Por tanto:

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0$$

Así si existiesen u y v que cumpliesen:

$$-p = 3uv \text{ y } -q = u^3 + v^3$$

Obtendríamos el resultado deseado.

Tomando ahora la observación hecha al respecto de las fórmulas de Vietta podemos ver que u^3 y v^3 son las dos soluciones del polinomio $g(y) = y^2 + qy - \frac{p^3}{27}$ es decir:

efectivamente pueden ser encontradas rápidamente con la fórmula general de segundo grado

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Deshaciendo todos los cambios de variable acumulados hasta el momento se obtienen las soluciones para nuestra ecuación.

■

Es ahora fácil ver que las soluciones de un polinomio de grado tres pueden ser construidas a través de los axiomas de Huzita-Hatori aplicados a un campo arbitrario que contenga a los coeficientes del polinomio, pues no involucra nada más que las operaciones del campo y raíces cuadradas y cúbicas; si en particular estos elementos pertenecen al campo de los construibles, tenemos entonces que las soluciones son números flexibles.

En otras palabras, dado que el campo de los números flexibles es cerrado bajo la raíz cuadrada y la raíz cúbica (y por supuesto, las operaciones del campo), son flexibles también todas las soluciones de polinomios de grado tres con coeficientes flexibles.

Capitulo X. La ecuación general de cuarto grado. Método de Descartes

A continuación, y continuando con el espíritu del capítulo anterior, vamos a ofrecer una breve demostración de una fórmula general para la resolución de un polinomio arbitrario de grado cuatro. Seguiremos, a grandes rasgos, el método indicado por René Descartes en su *Geometria* de 1637; aunque se sabe que el matemático italiano Ludovico Ferrari dio con la solución en 1540 y que fue publicada por Cardano en su *Ars Magna.*

Teorema I.9

Existe una fórmula general para expresar las soluciones de una ecuación polinomial arbitraria de grado 4 en una variable.

Demostración I.9 (Menchen Caballero, 2011)

Sea, de nuevo y por convenir a simplificar, un polinomio de cuarto grado con coeficiente principal igual a 1.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Mediante la sustitución $x = y - \frac{b}{4}$ se obtiene la expresión:

$$\left(y - \frac{b}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{b}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{4}\right) + d$$

Desarrollando y simplificando (cosa que no planeamos plasmar aquí por resultar tan trivial como engorroso) se obtiene un polinomio que carece de término cúbico:

$$y^4 + py^2 + qy + r$$

Que a su vez puede factorizarse de la siguiente forma:

$$(y^2 + Ay + B)(y^2 - Ay + C)$$

Donde, por supuesto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1)\ \ p = -A^2 + B + C$$

$$(2)\ \ q = AC - AB$$

$$(3)\ \ r = BC$$

Si multiplicamos (1) por A y la sumamos a (2):

$$(4)\ \ \mathrm{A}p + q = -A^3 + 2AC$$

Y despejando:

$$(5)\ \ C = \frac{A^2}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2A}$$

$$(6)\ \ B = \frac{r}{C}$$

Sustituyendo (6) en (2) y multiplicamos por C:

$$(7)\ \ Cq = AC^2 - Ar$$

Agrupando:

$$(8)\ \ AC^2 - qC - Ar = 0$$

Finalmente, substituyendo (5) en (8) y elevando al cuadrado obtenemos:

$$(9)\ \ \left(A\left(\frac{A^2}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2A}\right)^2 - q\left(\frac{A^2}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2A}\right) - Ar\right)^2 = 0$$

Que después de mucha aritmética básica toma la forma final:

$$(10)\ \ A^6 + 2pA^4 + (p^2 - 4r)A^2 - q^2 = 0$$

Nótese que éste último polinomio (de grado 6 en la variable A) es perfectamente soluble como un polinomio bicubico, es decir, mediante una sustitución del tipo $A^2 = \alpha$ podemos llevarlo a la forma:

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

Y que llamaremos la resolvente cúbica auxiliar, que ya sabemos solucionar mediante el método de Cardano.

■

De todo lo anterior se deduce: las soluciones de un polinomio de grado cuatro son flexibles. La argumentación es exactamente la misma que la del capítulo anterior: las soluciones dependen únicamente de las operaciones de un subcampo cualquiera de los números complejos además de la raíz cúbica, la raíz cuadrada y la conjugación compleja. Así, si tomamos como base a nuestro campo de los números construibles $\mathfrak{C}$, resulta que todas las soluciones de polinomios de tercer y cuarto grado con coeficientes construibles, se encuentran en $\mathfrak{F}$.

Nuestro sistema de One-Fold-Origami revela ser una herramienta más poderosa: es capaz de generar las soluciones de todo polinomio de grado menor o igual a 4. Pareciera incluso que el origami es el complemento perfecto del teorema de irresolubilidad de Abel, pero desde las miras geométricas y constructivas; es decir, que podemos, con origami, generar a todas las soluciones de polinomios que posean una forma general de resolución.

$\mathbb{U}$ Capítulo XI

Parte II. Del lado de allá

II.1. Primera contención: las extensiones

Capítulo XI. Una araña construible o de la Regla y el Compás como extensiones de campo finitas

Al igual que como bien se ha hecho para la Geometría de la Regla y el Compás, esta segunda parte del trabajo tiene como propósito dar una estructuración algebraica bien identificable al Campo de los números Flexibles. No estamos hablando de estructura, pues ya sabemos que el conjunto de los Números Flexibles es un campo, sino de una definición y delimitación en términos de un campo menor que posea una definición matemáticamente aceptable y dentro del dominio de la Teoría de Campos, es decir, trataremos de ubicar a nuestro conjunto como una extensión algebraica de algún campo. Como ya es costumbre, comenzaremos por dar un breve resumen de lo sucedido con la formalización del campo de los Números Construibles, y a partir de ella nos adaptaremos a las nuevas exigencias de los axiomas de Huzita-Hatori.

Induciremos una clasificación, y con ella también una concepción más o menos obvia de los números construibles, sin embargo, para eso nos auxiliaremos en una estratificación de las extensiones simples de un campo que llamaremos *araña*. No estamos en condiciones de decir si este concepto auxiliar tiene o no trascendencia, pero estamos convencidos de que su estructura se amolda muy bien a la esencia que subyace a la estructura del conjunto de los Números Construibles.

Definición II.1. Araña

Sea Kun campo, p un número natural primo fijo y $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subseteq K$ un subconjunto de elementos de K. Llamaremos *una araña de grado* p^j sobre los elementos α_i al conjunto de todas las torres de extensiones simples del campo K a través de los elementos $\sqrt[p^j]{\alpha_i}$ $\forall i \in I$ y $\forall j \in J \subseteq \mathbb{N}$. La denotaremos por $\mathfrak{A}^p_{K,\{\alpha_i\}}$. Asi, $\mathfrak{A}^p_{K,\{\alpha_i\}} \coloneqq \left\{K : K[\sqrt[p]{\alpha_i}] : \ldots : K\left[\sqrt[p^j]{\alpha_i}\right] : \ldots : \ ; \forall j \in J \subseteq \mathbb{N}\right\}_{i \in I}$.

A cada torre de extensiones la llamaremos una pata de la araña.

Sea $r \in \mathbb{Q}$ cualquier número no cuadrático, entonces $\mathbb{Q}[\sqrt{r}]$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$. Además, por la definición de $\mathbb{Q}[\sqrt{r}]$ es obvio que es un subconjunto de $\mathfrak{C}$, el conjunto de los números construibles; pues sus elementos son combinaciones lineales de $\sqrt{r}$ y 1. Evidentemente si s es otro racional no cuadrático, entonces $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{r}]$ de manera que no todo construible está en $\mathbb{Q}[\sqrt{r}]$, pero sí podemos definir el conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{s}]$ que también resultaría ser un subcampo de $\mathfrak{C}$ y extensión de $\mathbb{Q}$.

Tenemos además el siguiente teorema que será de utilidad en lo sucesivo:

Teorema II.1 Lema de la Torre: *Si E, F, G son campos de tal modo que $G : F$ y $F : E$ son algebraicas de grados m, n respectivamente entonces $G : E$ es algebraica de grado mn.*

■

Como ya se discutió anteriormente $\mathfrak{C}$ es un campo cerrado bajo la operación raíz cuadrada, es decir, que si r es un número racional entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\sqrt[2^n]{r} \in \mathfrak{C}$, de tal modo que la raíz $2^n - ésima$ de cualquier número racional se encuentra en una extensión de campo de $\mathbb{Q}$ de grado 2^n.

Así, estamos generando una araña con el campo de los números Racionales como base, y con las raíces cuadradas de todo racional no cuadrático como objetos de extensión, es decir, la araña $\mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}$ donde $\mathbb{Q} \supseteq F \coloneqq \left\{\frac{p}{q} \,|\, \nexists x, y \in \mathbb{Z}\ con\ x^2 = p\,, y^2 = q\right\}$.

Precisaremos también el siguiente resultado clásico de la teoría de campos:

Teorema II.2 Teorema del Elemento Primitivo

(Rotman, 1998, pág. 86)Toda extensión algebraica simple finita de un campo es simple, es decir, posee un elemento primitivo.

■

Sería complicado ilustrar a todas las extensiones algebraicas simples que forman a los números construibles, pero podemos localizar a cada número construible de la forma $a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{2^{n-1}}\zeta^{2^{n-1}}$, con $\zeta = \sqrt[2^n]{r}$ y con $r, a_i \in \mathbb{Q}$ en el cuerpo de la araña, con una cantidad numerable de patas (un número racional no cuadrático para cada pata) y cada pata siendo una torre de extensiones de tamaño numerable de grado 2 una sobre la otra empezando por el campo de los números racionales y terminando en los construibles.

En la figura siguiente, q, r, s, t son cuatro números racionales no cuadráticos distintos. Nos sería imposible poner una cantidad numerable de patas a la araña, así que se nos deberá perdonar haber puesto solamente cuatro con al único fin de ilustrar nuestra visión de estas torres de extensiones simples:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathbb{Q} & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q}[\sqrt{s}] & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q}[\sqrt[4]{s}] & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q}[\sqrt[2^i]{s}] & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
\mathbb{Q} & \mathbb{Q}[\sqrt{r}] & \mathbb{Q}[\sqrt[4]{t}] & \dots & \mathbb{Q}[\sqrt[2^i]{t}] & \dots & \mathfrak{C} & \dots & \mathbb{Q}[\sqrt[2^i]{r}] & \dots & \mathbb{Q}[\sqrt[4]{r}] & \mathbb{Q}[\sqrt{r}] & \mathbb{Q} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q}[\sqrt[2^i]{q}] & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q}[\sqrt[4]{q}] & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q}[\sqrt{q}] & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbb{Q} & & & & & &
\end{array}
$$

Ecuación I. Araña Construible

Esta visión del conjunto de los números construibles, o más bien, de las capas de extensiones simples que le dan estructura (porque ciertamente no están todos los números construibles en alguna de estas patas, que más bien sirven como el esqueleto que sostiene al conjunto) nos ayudarán mucho a entender la naturaleza de los mismos y algunas de sus características; debido a que gracias a esta estratificación es relativamente sencillo visualizar algunos hechos constructivos; por ejemplo, el teorema que afirma la imposibilidad de duplicar el cubo o trisecar el ángulo con regla y compás, o el hermoso teorema que ilustra la forma que debe tener un polígono regular para ser construible con regla y compás.

Por supuesto, y como se menciona en el párrafo precedente, no estamos sugiriendo que todo número construible sea miembro de alguna extensión que esté en alguna de las patas de la araña (porque las patas están hechas de extensiones simples a través de las raíces $2^n - ésimas$ de un único racional), pues es evidente que si tomamos dos elementos de algún par de extensiones de la misma pata y los operamos, esa operación estaría cerrada en la extensión que esté "más cerca" de los construibles, es decir, la que posea a la raíz más grande del número racional que represente a esa pata.; sin embargo, quedaría sin resolverse el pequeño problema de considerar qué es lo que sucedería si operamos (y debe ser posible hacerlo, pues presumimos que los construibles forman un campo), a dos números que estén en extensiones que pertenezcan a patas distintas.

El problema es sencillo de resolver, si se desean operar dos elementos de alguna extensión en distintas patas, se puede "hacer crecer" una pata entre estas primeras dos de la siguiente forma, sean : $x = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_{n-1}\zeta^{n-1} \in E$ y $y = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_{m-1}\xi^{m-1} \in F$ con E, F extensiones de los racionales a través de un único elemento ($\zeta = \sqrt[2^n]{r}$ y $\xi = \sqrt[2^m]{s}$ respectivamente), entonces $x + y$ pertenecerá a una extensión de campo resultado de añadir a cualquiera de los dos campos todas las raíces que no posee: ($E[\xi]$ o $F[\zeta]$) evidentemente ambas extensiones son la misma, y tienen grado 2^{m+n}, de nuevo por el ya citado Lema de la Torre. Además el número xy también se encuentra dentro de este campo, pues nuestros dos campos $E[\xi]$ y $F[\zeta]$ son también iguales a la extensión $\mathbb{Q}[\xi, \zeta]$ de los números racionales, que es, claramente, un campo.

Es vital observar que en virtud de lo anterior, no solo los elementos de las patas de la araña son construibles, sino todas las operaciones que puedan resultar de tal conjunto a través de la suma y el producto arriba definidos, además de la raíz cuadrada y la conjugación compleja, es decir que la unión de los campos de las patas de la araña no corresponde con todos los números construibles porque no contiene, por definición, a los elementos de las extensiones de la forma $\mathbb{Q}[\xi, \zeta]$. Se necesitará tomar a la unión de todos esos campos, es decir $\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}$ y producir alguna suerte de "cerradura" de ella bajo las operaciones ya mencionadas. Denotaremos a tal cerradura como $\overline{\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}}$, ésta es la interpretación algebraica del campo de los Números Construibles.

Hemos entonces demostrado que todo número construible se encuentra en una extensión algebraica del campo de los racionales, y de grado 2^k, lo cual podría inducir la idea de que existen no uno sino dos campos de "números construibles", a saber: el conjunto $\overline{\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}}$, el campo de todos los números que pueden verse como combinaciones lineales racionales y finitas de una cantidad finita de raíces $2^k - \acute{e}simas$ de números raciones (llamémoslo $\mathfrak{C}_1$ sólo por un momento); y por otro lado el campo de todos los números que pueden ser construidos (y operados) con regla y compás como se describió en los primeros dos capítulos de este trabajo (llamémoslo $\mathfrak{C}_2$ por sólo un momento).

Más aún, se podría fácilmente deducir que, en principio, $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2$ precisamente por la característica de cerradura bajo raíz cuadrada que se describió para $\mathfrak{C}_1$; pero también, y como ya se mencionó, no existen dos campos, sino solo uno; pues es posible reducir el universo de la Geometría de la Regla y el Compás, al simple hecho de intersectar rectas con rectas, rectas con circunferencias, circunferencias con rectas, y circunferencias con circunferencias tal y como se plantea en (Stewart, 2003, pág. 77) lo cual nos habla de las características de los números en $\mathfrak{C}_1$, es decir, que son precisamente de la forma que tienen los elementos de $\mathfrak{C}_2$. Por tanto, cerramos el capítulo diciendo que $\mathfrak{C}_2 \subset \mathfrak{C}_1$ y así, llamamos a ambos conjuntos simplemente $\mathfrak{C}$

Nótese por último que cuando decimos que estos dos campos son el mismo estamos haciendo alguna suerte de reducción de los principios abstractos de la Geometría de la Regla y el Compás y entendiéndolos como intersecciones binarias de rectas y circunferencias en el sentido de que son las únicas curvas posibles de definir en tal geometría. Entendemos y adaptamos la herramienta abstracta y la convertimos en un ente matemático con la fuerza necesaria para incluir en él cualquier posible interacción que podamos imaginar entre elementos de la herramienta abstracta. Para una más profunda discusión al respecto véase (Tramuns & Guàrdia, 2014).

$\Cup$ Capítulo XII

Capítulo XII. Una araña flexible y un subconjunto de los Números Flexibles que es un campo

De modo análogo al capítulo anterior, y en general, haciendo honor a nuestra intención de mantener una similitud entre la estructura algebraica y geométrica de los Números Construibles y los Flexibles, construiremos una araña de extensiones simples, empezando con el campo de los Números Construibles.

Sea $w \in \mathfrak{C}$ un número no cúbico, construimos el campo $\mathfrak{C}[\zeta] \coloneqq \left\{x + y\zeta + z\zeta^2 \mid \zeta = \sqrt[3]{w}\,; x, y, z \in \mathfrak{C}\right\}$, que es una extensión algebraica de $\mathfrak{C}$ y es, como siempre, el mínimo campo que contiene a ζ. Notemos que $\mathfrak{C}\colon \mathfrak{C}[\zeta]$ es de grado 3, y que una vez hecha tal cosa, podemos volver a hacerla ya sea usando $\mathfrak{C}[\zeta]$ como campo base y algún $\varsigma = \sqrt[3]{\zeta}$ para extenderlo; o con un $v \in \mathfrak{C}$ no cubica linealmente independiente a w. La meta es generar a la araña $\mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}$ con $\mathfrak{C} \supseteq E \coloneqq \{r \mid \nexists x \in \mathfrak{C}\ con\ x^3 = r\}$ como antes, una araña que tenga como patas a la torres de campos generada por cualquier raíz cubica de cualquier número construible no cúbico; llamaremos a esta *araña flexible* por razones más o menos obvias a estas alturas del trabajo.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathfrak{C} & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C}[\sqrt[3]{s}] & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C}[\sqrt[9]{s}] & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C}[\sqrt[3^i]{s}] & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
\mathfrak{C} & \mathfrak{C}[\sqrt[3]{t}] & \mathfrak{C}[\sqrt[9]{t}] & \dots & \mathfrak{C}[\sqrt[3^i]{t}] & \dots & \mathfrak{F}_1 & \dots & \mathfrak{C}[\sqrt[3^i]{r}] & \dots & \mathfrak{C}[\sqrt[9]{r}] & \mathfrak{C}[\sqrt[3]{r}] & \mathfrak{C} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C}[\sqrt[3^i]{q}] & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C}[\sqrt[9]{q}] & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C}[\sqrt[3]{q}] & & & & & & \\
 & & & & & & \mathfrak{C} & & & & & &
\end{array}
$$

Ecuación II. Araña Flexible

Observaciones.

1) Al igual que con la araña construible y atendiendo al Lema de la Torre, nuestra araña flexible tiene una cantidad numerable de patas formadas por extensiones algebraicas de un campo sobre otro, cada extensión de cualquier pata tiene grado 3 sobre la extensión inmediatamente anterior, y en general, grado 3^n sobre el campo de los números construibles, es decir, cada extensión se puede ver como una extensión de los construibles con la raíz $3^n - \acute{e}sima$ de un número construible.
2) Sean $x, y \in \bigcup \mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}$ entonces existen ζ_1 y ζ_2 elementos tales que $(\mathcal{F}_1 , \widetilde{\mp} , \tilde{\circ})$ y $(\mathcal{F}_2 , \breve{\mp} , \breve{\circ})$ son extensiones de campo del campo de los números construibles con $x \in \mathcal{F}_1 = \mathfrak{C}[\zeta_1]$, $y \in \mathcal{F}_2 = \mathfrak{C}[\zeta_2]$ entonces
   - Definimos la suma de x , y como el elemento $x' + y' \in \mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1]$ donde " $+$ " es la suma que se produce naturalmente al crear el campo $\mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1]$; y x' , y' son exactamente las copias de x y y que se producen bajo la inclusión natural de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en $\mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1]$.
   - Definimos el producto de x , y como el elemento $x' \circ y' \in \mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1]$ donde " $\circ$ " es la suma que se produce naturalmente al crear el campo $\mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1]$; y x' , y' son de nuevo exactamente las copias de x y y que se producen bajo la inclusión natural de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en $\mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1]$. Es decir, estamos tomando las operaciones de la primera extensión que los contenga a ambos: $(\mathcal{F}_1[\zeta_2] = \mathcal{F}_2[\zeta_1] , + , \circ)$.
3) Por el anteriormente citado Teorema del Elemento Primitivo, ciertamente podemos decir que cualquier pata puede ser generada a través de un único elemento, pero tal elemento no queremos ni necesitamos encontrar. Simplemente, por cuestiones de pertinencia, diremos que todo elemento de cualquier pata de la araña flexible pertenece a un campo de la forma $\mathcal{F}[\omega] : \mathfrak{C}$ y con $|\mathcal{F}[\omega] : \mathfrak{C}| = 3^k$ pero de nuevo, si operamos elementos pertenecientes a campos de patas distintas, requerimos cerrar a $\bigcup \mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}$ bajo las operaciones que ya se definieron, además de la raíz cúbica y la conjugación compleja; y llamaremos $\overline{\bigcup \mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}} = \mathfrak{F}_1$ a tal cerradura.

4) Nuestra última y más importante observación es que bajo una visualización analítica de nuestra construcción previa de $\mathfrak{F}$, el conjunto de los números flexibles, resulta fácil adivinar que $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Tal cosa sucede, porque $\mathfrak{F}$ es un campo cerrado bajo la raíz cúbica y esa es la característica que define a la araña de la cual se deriva $\mathfrak{F}_1$. Nos gustaría mucho concluir, como lo hicimos antes con los números construibles, que el conjunto generado por los axiomas de doblado de papel puede hacerse equivalente al que acabamos de generar con la araña, el problema es que no estamos seguros (hasta ahora) de que los primeros seis axiomas de Huzita-Hatori puedan generar únicamente números que sean combinaciones lineales de raíces cubicas de números construibles. ¿Qué sucedería si acaso, pudiera producirse un número trascendente usando la axiomática de Huzita-Hatori? Una proposición un poco más humilde: ¿Podría, por ejemplo, calcularse una raíz quinta arbitraria? De (Lang, Robert J. Lang Origami, 2004) sabemos que es posible pentasectar un ángulo con Multi-Fold-Origami. ¿Estamos seguros de que realmente $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$? No lo estamos; y la raíz de esta duda está escondida precisamente en el hecho de que, al contrario de como sucede con la Geometría de Regla y el Compás, que limita su funcionamiento a la intersección de rectas y circunferencias; no hemos terminado de definir la naturaleza del funcionamiento de la tangente común a las parábolas que el Axioma de Doblado de Papel pregona, y que como ya se ha establecido, es el que marca la diferencia entre la geometría de la Regla y el Compás, y la del Origami. Esperamos resolver este problema en capítulos posteriores.

$\Bbbk$ Capítulo XVIII

II.2. Segunda contención: On conic numbers

Donde daremos un viraje hacia la teoría de cónicas y la Geometría Analítica, que parecerá un tanto fuera de lugar en el discurso hasta ahora manejado en este trabajo y por lo tanto esperamos sea breve, conciso y útil. Lograremos construir un conjunto aparentemente nuevo: el de los *Conic Numbers*, pero que sin embargo no lo es y nos servirá para cerrar el problema que dejamos pendiente.

Capítulo XIII. De cónicas, de Cardano y de Descartes

Sean $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ dos cónicas en $\mathbb{R}^2$ no iguales y no degeneradas (es decir, que sean realmente una cónica, i.e. que el determinante de su matriz asociada sea no nulo). Estas cónicas, por supuesto, se intersectan en a lo más 4 puntos distintos. Siguiendo los razonamientos de (Videla, 2016, pág. 8) En principio podríamos considerar un par de ecuaciones de la forma:

$$\mathcal{C}_0 \coloneqq Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F \text{ y } \mathcal{C}_1 \coloneqq A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F'$$

Podemos acotar nuestro discurso un poco considerando una traslación adecuada que coloque a $\mathcal{C}_0$ centrada en el origen, es decir, vamos a considerar al par de cónicas:

$$\mathcal{C}_0 \coloneqq Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey \text{ y } \mathcal{C}_1 \coloneqq A'x^2 + B'y^2 + C'xy + D'x + E'y + F'$$

Si, por ejemplo, multiplicamos a $\mathcal{C}_0$ por $\frac{C'}{C}$ y se la restamos a $\mathcal{C}_1$ obtenemos una cónica nueva:

$$\mathcal{C}_* = A''x^2 + B''y^2 + D''x + E''y + F''$$

Que es una cónica centrada en el origen, y como no tiene término cruzado, sus ejes son paralelos al eje X o el eje Y del plano, por tanto, vamos a distinguir dos casos sencillos (Videla, 2016, págs. 9-10)

- $\mathcal{C}_*$ es una parábola. Tiene la forma $y = \alpha x^2 + \beta$ o $x = \alpha y^2 + \beta$

Sustituyendo por ejemplo el valor de y en alguna de las ecuaciones originales se obtiene $Ax^2 + B(\alpha x^2 + \beta)^2 + Cx(\alpha x^2 + \beta) + Dx + E(\alpha x^2 + \beta)$, claramente un polinomio de grado a lo más cuatro en la variable x. Análogamente si sustituimos el valor de x obtendremos un polinomio de grado a lo más cuatro en la variable y

- $\mathcal{C}_*$ es una circunferencia, una elipse o una hipérbola. Tiene la forma $\frac{x^2}{\alpha^2} \pm \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Despejando obtenemos que $x^2 = \alpha^2 \left(1 \mp \frac{y^2}{\beta^2}\right)$ de la ecuación de $\mathcal{C}_0$ tenemos que

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = 0$$

por tanto

$$Ax^2 + By^2 + Ey = -x(Cy + D)$$

elevando al cuadrado:

$$\left(A\alpha^2 \left(1 \mp \frac{y^2}{\beta^2}\right) + By^2 + Ey\right)^2 = \alpha^2 \left(1 \mp \frac{y^2}{\beta^2}\right) (Cy + D)^2$$

Que es, de nuevo, un polinomio de grado a lo más cuatro.

La reflexión anterior tiene la intención de mostrar que los (a lo más) cuatro puntos de intersección de dos cónicas son el resultado de resolver para x o para y dos polinomios de grado dos, tres o cuatro; es decir usando las herramientas propias del campo de los números flexibles: suma, producto, raíz cuadrada y raíz cúbica. En particular, si las cónicas tienen coeficientes en un subconjunto arbitrario F de $\mathbb{R}$ resulta que todos sus puntos de intersección están alojados en el mínimo campo que cierre a F bajo la raíz cuadrada, la raíz cubica, el producto y la suma de números reales.

⋓ Capítulo XIV

Capítulo XIV. De cónicas proyectivas y de dualidad proyectiva.

Generalidades

Hagamos ahora nuestro último ejercicio: proyectivicemos $\mathbb{R}^2$. Se hará como es usual, es decir, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \coloneqq \mathbb{R}^3/\sim$ donde $(a,b,c) \sim (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ con $\lambda \neq 0$ y $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Cabe recordar brevemente las características de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Ubicamos a los puntos del plano ordinario como las clase de equivalencia de los puntos de la forma $(a,b,1)$ y en adelante las denotaremos como $[a,b,1]$; como se sabe, estas son las coordenadas homogéneas de los puntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$[16].

Si pensáramos en esta noción del plano proyectivo en relación al plano ordinario podríamos decir —de manera irresponsable pero útil— que "los puntos se entienden como rectas" es decir, un punto $[a,b,c]$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ es la recta generada por el vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar. De modo análogo podemos definir a una recta por el punto $[a,b,c]$ con la ecuación $Aa + Bb + Cc = 0$ donde A, B y C no son todos cero; que, a su vez, representa a un plano en $\mathbb{R}^3$. Es claro, además, que cada terna A, B, C representa una recta que pasa por $[a,b,c]$. Es así como podemos pensar en la noción de dualidad proyectiva de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ a través de las coordenadas homogéneas pues la terna puede ser tomada como un elemento $[A,B,C] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)^*$, el espacio dual de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Así como $[a,b,c]$ es la representación del haz de rectas que pasan por él, su noción dual es $[A,B,C]$ como el haz de puntos por ella.

Esta forma de ver la relación dual de la incidencia punto-recta se identifica perfectamente con la dualidad clásica de los espacios proyectivos abstractos, pues, en efecto, conserva la relación de incidencia e intercambia las nociones de punto y recta, y estas permanecen en el limbo lógico propio de sus raíces en la geometría proyectiva abstracta. Hasta aquí lo que necesitamos para proceder a dualizar nuestro concepto de cónica.

[16] (Graustein, 1963, págs. 29-34)

La cónica dual

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, donde una cónica está representada por una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$, en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tenemos a una cónica representada por una matriz $A \in \mathcal{M}_{3x3}(\mathbb{R})$ que es simétrica. Como en la literatura clásica de la geometría analítica, llamaremos a $Det(A)$ el discriminante de la matriz, y una cónica será no degenerada si y solo si su discriminante es distinto de 0. Llamaremos cónica puntual (la ecuación matricial de una cónica puntual) a A (point-conic en la literatura usual).

Los siguientes razonamientos se siguen de lo expuesto en (Graustein, 1963, págs. 187-189)[17] Sea $l \coloneqq \lambda b + \mu c$ una recta (la ecuación vectorial de una recta) en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ que pasa por los puntos $b = [b_1, b_2, b_3]$ y $c = [c_1, c_2, c_3]$ y supongamos que l intersecta a una cónica puntual A no degenerada en el punto $r = [r_1, r_2, r_3]$ es decir

$$rAr^T = 0$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación se convierte en:

$$(r_1\ r_2 r_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

es decir:

$$(r_1a_{11} + r_2a_{12} + r_3a_{13}\ , r_1a_{12} + r_2a_{22} + r_3a_{23}\ , r_1a_{13} + r_2a_{23} + r_3a_{33}\ )\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0$$

y

[17] Es importante decir que este estudio, en la época de la publicación del texto de Graustein, estaba más orientado hacia la Geometría Analítica, sin embargo ahora tiene más contacto y es ubicable dentro de los dominios de la Geometría Algebraica

$$r_1r_1a_{11} + r_1r_2a_{12} + r_1r_3a_{13} + r_1r_2a_{12} + r_2r_2a_{22} + r_2r_3a_{23} + r_1r_3a_{13} + r_2r_3a_{23} + r_3r_3a_{33} = 0$$

Escrito en una forma más compacta se convierte en:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, r_i r_j = 0$$

donde se recuerda, $a_{ij} = a_{ji}$. Sustituyendo los valores de r tenemos la ecuación:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,(\lambda b_i + \mu c_i)(\lambda b_j + \mu c_j) = 0$$

Expandiendo,

$$\lambda^2\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i b_j\right) + \lambda\mu\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i c_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_j c_i\right) + \mu^2\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i c_j\right) = 0$$

Y finalmente, dado que $a_{ij} = a_{ji}$ obtenemos

$$\lambda^2\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i b_j\right) + 2\lambda\mu\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i c_j\right) + \mu^2\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i c_j\right) = 0$$

Por lo tanto, una recta que intersecta a una cónica puntual presenta la anterior ecuación y recíprocamente. La recta puede intersectar a la cónica puntual en un punto (en tal caso se dice que intersecta a la cónica en ese punto dos veces) o dos puntos, dependiendo de las soluciones de la anterior ecuación cuadrática; cuando suceda que la intersección es doble en un solo punto, diremos que la recta es *tangente* a la cónica punto.[18]

Sea ahora, como anteriormente, una cónica puntual A y supongamos que existe una recta tangente a A en su punto b. Es decir

[18] (Graustein, 1963, pág. 192)

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, b_i b_j = 0$$

Sea $c = [c_1, c_2, c_3]$ otro punto, tememos entonces la ecuación de la recta $l = \lambda c + \mu b$. Si c se mueve de tal modo que l sea, en efecto, tangente a A, es decir, de modo que $\lambda = 0$ sea una raíz doble de

$$\lambda^2 \left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i c_j \right) + 2\lambda \left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i b_j \right) = 0$$

entonces

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} c_i b_j = 0$$

y recíprocamente.

Lo anterior, puede desarrollarse y resulta ser una ecuación lineal, la ecuación de la recta tangente a la cónica punto:

$$c_1 \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_j + \ c_2 \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_j + c_3 \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_j = 0$$

Por lo tanto, la recta tangente a una cónica puntual A en el punto b es única y tiene la ecuación:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} b_i x_j = 0$$

Procederemos a analizar ahora el comportamiento de la recta tangente expresada como sus coordenadas homogéneas. Una vez más, como en (Graustein, 1963, pág. 193) sea A una cónica puntual definida como anteriormente, sea $[U_1, U_2, U_3]$ una recta tangente a A en el punto $b = [b_1, b_2, b_3]$. Sabemos entonces que otra forma de expresar esta recta, como tangente a la cónica puntual en sus coordenadas homogéneas es: $\left[\sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_j\, , \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_j\, , \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_j\right]$ es decir:

- $\sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_j = \nu U_1 \Rightarrow a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = \nu U_1$
- $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_j = \nu U_2 \Rightarrow a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{33}b_3 = \nu U_2$
- $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_j = \nu U_3 \Rightarrow a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 = \nu U_3$

Y como $b \in [U_1, U_2, U_3]$ se tiene que $U_1b_1 + U_2b_2 + U_3b_3 = 0$. Así, podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 - \nu U_1 = 0 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{33}b_3 - \nu U_2 = 0 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 - \nu U_3 = 0 \\ Ub_1 + Vb_2 + Wb_3 - 0\nu = 0 \end{gathered}$$

El sistema debe tener solución no trivial para b_1, b_2, b_3, ν y su determinante asociado debe ser de rango 3, y no menos (pues la cónica punto es no degenerada) por lo tanto

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & U_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & U_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & U_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Las soluciones existen y son todas proporcionales en el sentido de la proporcionalidad propia de la clase de equivalencia de las coordenadas homogéneas, por lo tanto representan a una única solución; con lo cual podemos afirmar que esta es una condición necesaria y suficiente para que la recta sea tangente a la cónica.

Aún más, expandiendo el determinante por el último renglón:

$$U_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & U_1 \\ a_{22} & a_{23} & U_2 \\ a_{32} & a_{33} & U_3 \end{vmatrix} + U_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & U_1 \\ a_{21} & a_{23} & U_2 \\ a_{31} & a_{33} & U_3 \end{vmatrix} + U_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & U_1 \\ a_{21} & a_{22} & U_2 \\ a_{31} & a_{32} & U_3 \end{vmatrix} = 0$$

Y ahora cada uno de ellos por la última columna:

$$U_1U_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + U_1U_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + U_1U_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + U_1U_2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$
$$U_2U_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + U_2U_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + U_1U_3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + U_2U_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} +$$
$$U_3U_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Note que en ésta última ecuación aparecen todas las matrices menores A_{ij} de la cónica puntual, tal y como se menciona en (Graustein, 1963, pág. 194) por lo cual podemos simplificar más ese determinante y llamarlo simplemente.

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\, U_i U_j = 0$$

Como se mencionó al inicio de este breve recordatorio de cónicas proyectivas, las coordenadas homogéneas asignadas a los puntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ nos permiten referirnos también a las rectas del mismo plano proyectivo en sus coordenadas homogéneas, de tal modo que si la ecuación anterior

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\, U_i U_j = 0$$

Ecuación III. Expresión de la cónica dual

nos habla de una recta tangente a la cónica puntual, haciendo variar a la recta tangente $[U_1, U_2, U_3]$ por todos los puntos de la cónica puntual, esta ecuación se convierte en una cónica. Lo anterior es evidente desde la dualidad que las coordenadas homogéneas nos permiten manejar, pue existen solo dos cosas que cambian entre la ecuación de nuestra cónica original

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, b_i b_j = 0$$

y la anterior, la primera es que en la ecuación de la cónica puntual nos referimos a un conjunto de puntos, y en la otra, un conjunto de rectas; pero si ambos conceptos son intercambiables en el contexto de la dualidad proyectiva, resulta que el conjunto de las rectas tangentes a una cónica puntual, es decir la "curva dual" a esta es otra cónica, que llamaremos cónica-recta (line-cónic en la literatura estándar).

La otra diferencia entre ambas ecuaciones es que si la matriz de la cónica puntual es A entonces la matriz de la cónica-recta es $Cof(A)$, la matriz de cofactores de A. Es decir si $M = cof(A)$ entonces $m_{ij} = A_{ij}$.

En otras palabras, sin una demostración completamente rigurosa establecemos el siguiente resultado bien conocido y decisivo para este trabajo:

Teorema II.3

La curva dual de una cónica puntual es otra cónica llamada cónica-recta, y la matriz asociada a ésta última es exactamente la matriz de cofactores de la matriz de la cónica puntual.

■

⋓ Capítulo XXI

Capítulo XV. Cierre

Esta última parte del trabajo tiene como objetivo cerrar la discusión sobre los dos campos que hemos traído a discurso: el campo de los números flexibles, y el conjunto derivado de nuestra araña flexible, $\overline{\bigcup \mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}} = \mathfrak{F}_1$

Como se mencionó, el único axioma del origami que hace crecer de manera efectiva al campo de los construibles $\mathfrak{C}$ es precisamente el Axioma de Doblado de Papel, pues los primeros cinco son solamente reinterpretaciones de las construcciones de la Geometría de la Regla y el Compás. También mostramos que este axioma no es sino la construcción de la recta tangente simultánea a dos cónicas; así, si estas cónicas son flexibles, podemos concluir que su tangente común también lo es.

Nótese que si una cónica es construible y la interpretamos como un objeto en el plano proyectivo real, su cónica dual también será construible debido a que la matriz asociada de una es la matriz de cofactores de la otra, y para calcular cada uno de los cofactores solo son necesarias las operaciones dadas para $\mathfrak{C}$, por tanto, cuando dos cónicas se intersectan en un punto, y son construibles, entonces esas intersecciones son números flexibles, pero ese punto de intersección es, sin lugar a dudas, y en términos de la dualidad proyectiva, la recta tangente a las cónicas duales; por tanto, en vista de eso, podemos dar *El Teorema* que le dio vida a éste trabajo y que ya se ha demostrado.

Teorema II.4. El Teorema

Todos los números producidos a través de los axiomas del One-Fold-Origami, es decir, todos los elementos del campo de los números flexibles pertenecen a una extensión de grado 3^s del campo de los números flexibles.

El campo de los números flexibles es el conjunto de todos los números complejos que pueden producirse a través de la Geometría del One-Fold-Origami, y también la cerradura de la unión sobre la araña flexible definida $\mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},\mathrm{E}}$

■

Esta es precisamente la conclusión que esperábamos, hemos demostrado la contención faltante; y por lo tanto hemos mostrado que el campo de los números flexibles es exactamente , $\overline{\bigcup \mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}}$, y los conjuntos $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}_1$ son iguales; son el campo de los números flexibles.

Parte III. De otros lados

Capítulo XVI. Sobre herramientas, construcciones y equivalencias axiomáticas

El presente capítulo tiene como fin hacer una breve ampliación en lo dicho anteriormente sobre la relación entre la Regla y el Compás y el One-Fold-Origami. Como ya se ha dejado saber, a través de (Alperin, 2000) y (Lang, Origami and Geometric Constructions, 2004) es aceptable decir que la geometría de la regla y el compás está "contenida" en la Geometría del One-Fold-Origami; donde con "contención" estamos pensando en el sentido de las posibilidades constructivas que se desprenden de sus estructuras axiomáticas y la relación entre ellas, es decir, estamos dando una interpretación puramente matemática de ambas estructuras axiomáticas.

El sentido de lo que sigue es clarificar y refinar las ideas dadas en capítulos anteriores al respecto de las posibilidades de los dos sistemas geométricos sobre los que este trabajo ha versado hasta ahora, y abordar esta semejanza conceptual de un modo más sistemático. Se espera que la complicada tarea de sistematizar el espíritu axiomático de la geometría sintética que Tramuns y Guàrdia nos han regalado (y que procedemos a resumir aquí) no resulte demasiado pesada por lo novedoso y rebuscado de las ideas expuestas, tales ideas son tomadas de (Tramuns & Guàrdia, 2014) y se redirige al lector a tal trabajo para una exposición más detallada y rica del tema.

Sea como en (Tramuns & Guàrdia, 2014)la siguiente larga lista de definiciones:

Definición III.1

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Un axioma de construcción Cn es un proceso geométrico elemental, que genera una cantidad finita de curvas a partir de un conjunto dado de puntos y curvas.

- **Ejemplo.** Dentro de la geometría de la Regla y el Compás encontramos la posibilidad de dibujar circunferencias, rectas, y circunferencias dado su radio, llamaremos a tales axiomas *Circunferencia, Recta, RadioCircunferencia.*

Definición III.2

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Un axioma de intersección In es un proceso geométrico elemental que genera una cantidad finita de puntos a partir de un conjunto dado de puntos y curvas.

- **Ejemplo.** De nuevo, dentro de la geometría de la Regla y el Compás encontramos a puntos generados por intersecciones simultaneas y bien organizadas de nuestras curvas, de tal modo que llamaremos a tales axiomas *IntRecta, IntCircunferencia, RectaIntCircunferencia*

Definición III.3

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Una herramienta es una dupla $\mathcal{H} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{I} \rangle$ donde $\mathcal{C}$ es un conjunto de axiomas de construcción e $\mathcal{I}$, de axiomas de intersección.

- **Ejemplo.** De nuevo con la geometría de la Regla y el Compás, tenemos la siguiente herramienta que llamaremos RCe, así, tenemos que:

$$RCe = \left\langle \begin{matrix} \{Recta, Circunferencia, RadioCricunferencia\}, \\ \{IntRecta, IntCircunferencia, RectaIntCricunferencia\} \end{matrix} \right\rangle$$

Notación. También como en (Tramuns & Guàrdia, 2014) llamaremos O a los elementos generados por los axiomas: $O = A(p_1, p_2, \dots, p_s)$ donde A es un axioma y p_i los elementos sobre los que el axioma trabaja.

Definición III.4

(Tramuns & Guàrdia, 2014) *Una construcción* de un conjunto de puntos y curvas X es una sucesión finita limitada de aplicaciones de los axiomas de cierta herramienta

$\mathcal{H} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{I} \rangle$ sobre cierto conjunto inicial de puntos X_0 denotada de la siguiente manera: $C(X_0, X) = \{O_1 = A_1(X_1), \dots, O_n = A_n(X_n)\}$ dónde:

$$A_i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{I}$$

$$X_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{k-1} (X_i \cup O_i)$$

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$

$$X \cap O_n \neq \emptyset$$

Además, diremos que $C(X_0, X) \in \mathcal{H}$.

Notación. (Tramuns & Guàrdia, 2014) Para diferenciar los puntos y las curvas de un conjunto de puntos y curvas X, denotaremos con $X = (K|Q)$ donde K representa al subconjunto de las curvas, y Q al de los puntos, es decir, $X = K \cup Q$

Notemos, hasta aquí, que la idea de los autores es bastante natural —como ya se ha dicho— desean sistematizar el comportamiento axiomático y constructivo de ciertos sistemas geométricos para con ello lograr un manejo más natural y organizado de las cercanías y alejamientos que unos y otros mantienen entre sí, pero es importante decir, empero, que esto de ningún modo significa que Guàrdia y Tramuns estén dando una interpretación de los “hechos constructivos” (en el sentido más humano y pragmático del término), de las herramientas y procesos mentales que dan lugar a esos hechos constructivos. No están, por ejemplo, demostrando que la única forma de traducir —al lenguaje mecanicista de las matemáticas formalistas— el concepto abstracto de “compás” es la posibilidad de dibujar circunferencias y trasladar segmentos (porque eso, indudablemente, ya se ha hecho) están simplemente organizando las ideas de las traducciones mecanicistas que de hecho ya existen.

Continuando con nuestra exposición, dejamos la siguiente:

Definición III.5

(Tramuns & Guàrdia, 2014) *Un sistema*[19] es una dupla $\mathcal{S} = [\mathcal{H}, X_0]$ donde $\mathcal{H}$ es una herramienta y X_0 es un conjunto no vacío y finito de puntos y curvas. Además, sea X_n el conjunto de todos los puntos y rectas resultantes de aplicar todos los axiomas de la herramienta a todos los elementos de X_{n-1}. Así, llamamos $X^{\mathcal{S}} = \bigcup X_i$ al conjunto de todos los objetos que pueden generarse a partir del conjunto X_0 con la herramienta $\mathcal{H}$. Si $X_0 = (K_0|Q_0)$ llamaremos $K^{\mathcal{S}}$ al conjunto de todos los puntos generables a partir de la herramienta.

- **Ejemplo[20].** La Geometría de la Regla y el Compás es un sistema (nótese la diferencia entre *la regla y el compás* como herramienta y la *Geometría de la Regla y el Compás* como sistema). En tal caso tenemos que $K^{\mathcal{S}} = \overline{\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}} = \mathfrak{C}$ es decir, la araña construible que generamos para ser el conjunto de los números construibles.[21]

Definición III.6

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos herramientas y X_0 un conjunto no vacío y finito de puntos y curvas. Decimos que las construcciones $C(X_0, X) \in \mathcal{H}$ y $C'(X_0, X') \in \mathcal{H}'$ son equivalentes si mantienen los mismas *relaciones constructivas*[22] con X_0. Lo denotaremos como $C(X_0, X) \sim C'(X_0, X')$. Obsérvese que ésta es una relación de equivalencia.

Un problema es una clase de equivalencia de construcciones y *una solución* a tal problema es cualquier representante de dicha clase de equivalencia.

[19] Nombrado como *Map* en (Tramuns & Guàrdia, 2014)
[20] Interpretación libre y posiblemente inexacta del documento generador por Tramuns y Guàrdia
[21] Observación no incluida en el texto de Tramuns y Guàrdia
[22] Dicho como *geometric links* en (Tramuns & Guàrdia, 2014)

Notemos que el término “relaciones constructivas” carece de profundidad tanto en este breve resumen del texto de Tramuns y Guàrdia como en el texto mismo. Se cree —por supuesto sin evidencia alguna— que se trata justamente de esta pequeña dicotomía entre los axiomas entendidos como traducciones mecanicistas de las herramientas abstractas (no confundir con la definición de herramienta aquí dada); es decir, estamos pensando en que tal relación constructiva está dada por la traducción que de la herramienta se hace en el momento de adaptarla como axioma y que lleva a que el conjunto de puntos y curvas resuelva cierto *problema* o lleve a cabo cierto proceso geométrico que resuelva una o más cuestiones.

Definición III.7

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Una herramienta $\mathcal{H}$ genera geométricamente a otra $\mathcal{H}'$ si todo problema con solución en $\mathcal{H}'$ tiene también solución e $\mathcal{H}$. Lo denotaremos como $\mathcal{H} \Vdash \mathcal{H}'$. Si sucede también que $\mathcal{H}' \Vdash \mathcal{H}$ entonces diremos que las herramientas son geométricamente equivalentes $\mathcal{H}' \doteqdot \mathcal{H}$

La intención de los autores es muy clara. Desean comparar sistemas axiomáticos de acuerdo a sus posibilidades constructivas, pero hasta ahora, estamos algo incapacitados para admitir alguna suerte de generación geométrica entre nuestros dos sistemas geométricos, la Geometría del Origami y la Geometría de la Regla y el Compás. Vamos a finalizar con la definición que nos permitirá hacer exactamente esto, y que como ya se ha dicho en el capítulo precedente, tiene una relación de situación axiomática muy similar a aquella que existe entre la Geometría de la Regla y el Compás y la Geometría de Saccheri, es decir, aquella que se efectúa tan solo con compás

Definición III.8

(Tramuns & Guàrdia, 2014) *Una construcción de puntos con puntos* es una construcción $Cpp(Y_0, Y)$ donde Y_0 y Y son conjuntos inicial y final que contienen únicamente puntos. Así, diremos que la herramienta $\mathcal{H}$ *genera virtualmente* a la herramienta $\mathcal{H}'$ cuando toda construcción de puntos con puntos en $\mathcal{H}'$ tiene una equivalente en $\mathcal{H}$, lo denotaremos como $\mathcal{H} \vdash \mathcal{H}'$. En el caso de que suceda que también $\mathcal{H}' \vdash \mathcal{H}$ diremos que las herramientas son virtualmente equivalentes, y lo denotaremos con $\mathcal{H} \Bumpeq \mathcal{H}'$.

Es ahora mucho más fácil resolver nuestro entuerto, resulta muy natural decir que: $S \Bumpeq RCe$, es decir, la Regla y el Compás es virtualmente equivalente al Compás, es decir, la herramienta propia de la Geometría de Saccheri. Tenemos además la cúspide de esta discusión, es decir, el hecho siguiente. Si Or es la herramienta de la Geometría del Origami (que aún no estamos preparados para definir formalmente), resulta que $Or \vdash RCe$ es decir, la herramienta de la Geometría del Origami genera virtualmente a la geometría de la Regla y el Compás (por supuesto, la generación inversa no es cierta) lo que justifica de manera más que elegante la petición que se hizo en el capítulo anterior, la de cambiar nuestros primeros cinco axiomas de origami por los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás. Tal petición está destinada simplemente a facilitar las construcciones del origami, pues nos da la posibilidad de visualizar al mismo tiempo todos los puntos de una circunferencia en vez de solamente algunos, pues de hecho, con origami la única curva continua que realmente puede generarse son dobleces (rectas)

Por el momento, cerramos aquí la discusión sobre este texto y nos permitiremos reabrirla más adelante para hacer algunas observaciones que creemos pertinentes y darle solidez a una parte subsecuente de este trabajo.

⋓ Capítulo VI

Capítulo XVII. Un hexágono regular flexible

Teniendo la intención de ofrecer una pequeña muestra de las capacidades constructivas del One-Fold-Origami, llevaremos a cabo la construcción de un hexágono regular a través de un trozo cuadrado de papel.[23] Se desea resaltar que en tal construcción no habrá necesidad del uso de ningún axioma de la Geometría del One-Fold-Origami que no sea equiparable con alguna construcción de la Geometría de la Regla y el Compás.

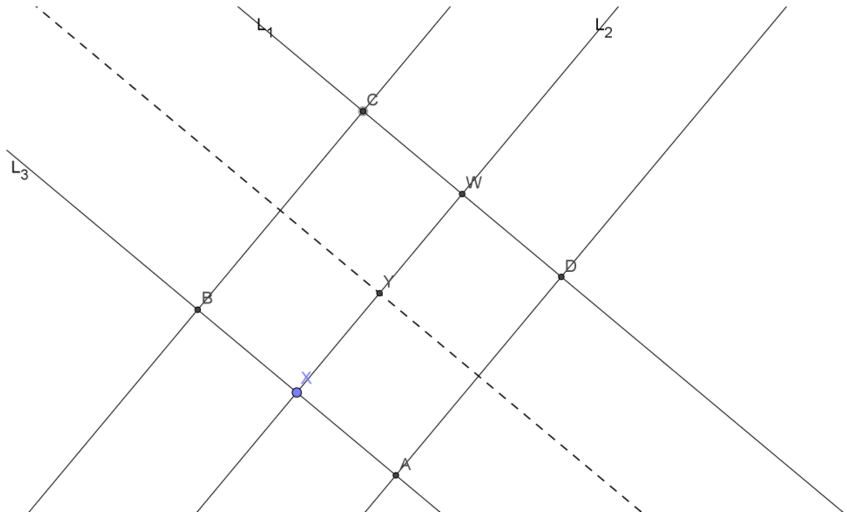
Teorema III.1

El Cuadrado es una figura flexible, es decir, puede generarse con la herramienta del One-Fold-Origami.

Construcción III.1

- Hágase un doblez cualquiera en el papel, lo llamaremos ℓ_1.
- Hágase un doblez cualquiera que encime a ℓ_1 sobre sí mismo, llámesele ℓ_2. Sea W la intersección de ambos. Después, otro doblez que encime a ℓ_2 sobre sí mismo y distinto de ℓ_1, llamémoslo ℓ_3 y a su intersección con ℓ_2, X.
- Marquemos la mediatriz de WX, para esto haremos un doblez m que encime ℓ_1 en ℓ_3. Llamemos Y a tal punto. Hágase un doblez que pase por X y que lleve ℓ_2 a la recta ℓ_3, cálquese Y y llámesele A al nuevo punto.
- De nuevo, dóblese el papel sobre ℓ_2 y cálquese el punto A, que quedará sobre ℓ_1. Llamémoslo B. Finalmente, doblemos de tal manera que ℓ_1 caiga sobre ℓ_3, calquemos A y B para obtener D y C respectivamente sobre A y B.

[23] Desarrollo libre de la construcción a partir de las ideas dadas en este trabajo



Construcción XVII. Cuadrado Flexible

Teorema III.2

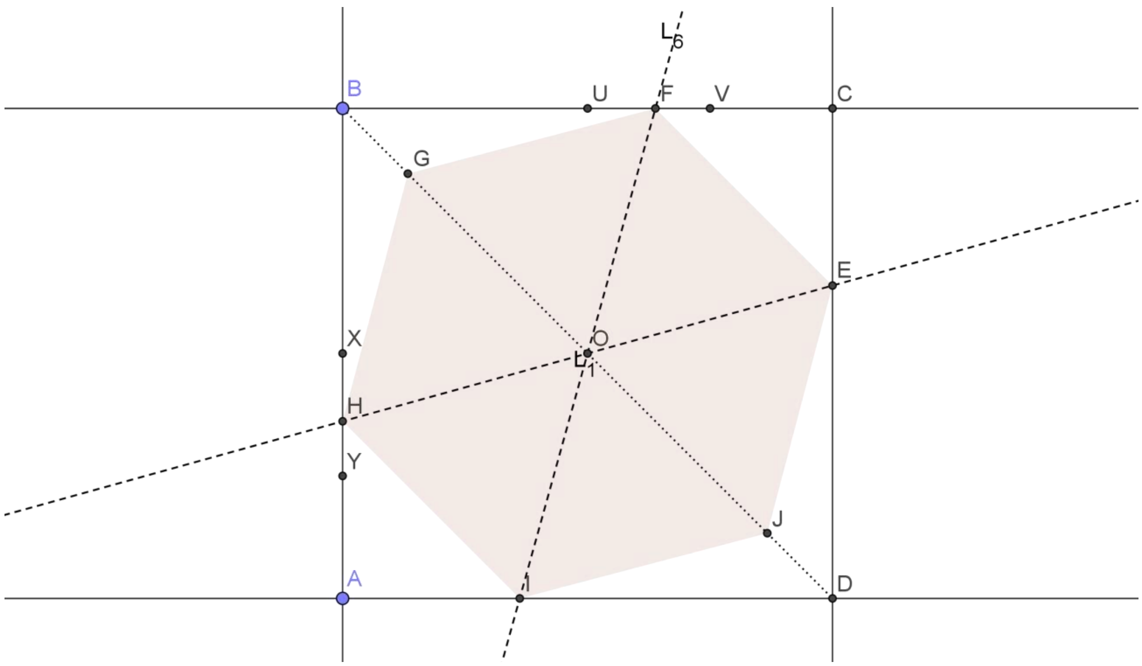
El hexágono regular es una figura flexible.[24]

Construcción III.2

- Hacer el doblez ℓ_4 que lleve a C sobre A, es decir, la diagonal del cuadrado y marcar su punto medio O, es decir, el baricentro del cuadrado (esto se puede hacer llevando B en D y marcando la intersección de este doblez con ℓ_4.
- Marquemos el punto medio del lado BC y llamémosle U, luego el de UC, llamándolo V y el de UV llamándolo W.
- Marquemos el punto medio del lado AB y llamémosle X, luego el de AX, llamándolo Y y el de XY llamándolo Z.
- Háganse los dobleces ℓ_5 y ℓ_6 que lleven a W en ℓ_4 y pase por O; y a Z en ℓ_4 y que pase por O respectivamente. A la intersección de ℓ_5 con CD y con AB llamémoslas E y H respectivamente. A la intersección de ℓ_6 con BC y con AD llamémoslas F e I respectivamente.

[24] Construcción libre desarrollada a partir de las ideas dadas en este trabajo

- El ángulo $\sphericalangle FOE = \sphericalangle HOI$ es de 60° por lo tanto solo basta calcar a E doblando sobre OF y cuya calca caerá justamente en la diagonal del cuadrado, llamemos a tal calca G; finalmente, a la calca de G sobre la misma diagonal donde se encuentra nos dará al punto J.
- El hexágono cíclico $EFGHIJ$ es el hexágono deseado .



Construcción XVIII. Hexágono Flexible

⋓ Capítulo V

Capítulo XVIII. Sobre la independencia del Axioma de Doblado de Papel (i).

Como se mencionó antes, parece relevante para los fines de éste trabajo dar una pequeña comprobación de que el Axioma de Doblado de Papel es efectivamente un axioma, es decir, que su estructura guarda una relación de independencia con el resto de los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás. Por supuesto, no esperamos que la demostración que sigue sea la más elegante, breve y sintética, pero sí se tiene la seguridad de que sigue la línea de este trabajo y que es correcta.

De (Stewart, 2003, págs. 76-79) y (Rotman, 1998, págs. 129-136) conocemos un hecho que se ha usado de manera indiscriminada hasta ahora, a saber, que el conjunto de los números construibles $\mathfrak{C}$ es un campo cerrado bajo la raíz cuadrada, una extensión algebraica del campo $\mathbb{Q}$. Más aún, gracias a nuestra araña $\mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}$ hemos podido visualizar de manera más eficiente esta estructura de cerradura.

Teorema III.4

Existe una construcción de puntos (de un punto) debida al Axioma de Doblado de Papel que no puede realizarse con la Geometría de la Regla y el Compás.

Demostración III.4

Sea un punto construible p no cúbico, entonces $p \in \overline{\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}}$ .Más aún, existe un campo $K \subsetneq \overline{\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}}$ tal que $|K:\mathbb{Q}| = 2^k$ y $p \in F$. Calculemos $\sqrt[3]{p}$, así, $p \in \overline{\bigcup \mathfrak{A}^3_{\mathfrak{C},E}}$ es decir, existe un campo L tal que $|L:K| = 3$ por lo tanto, $\sqrt[3]{p} \notin \overline{\bigcup \mathfrak{A}^2_{\mathbb{Q},F}}$ luego, $\sqrt[3]{p}$ no es construible. Nótese que el cálculo de la raíz cúbica es posible gracias al Axioma de Doblado de Papel.

■

Corolario III.1

El Axioma de Doblado de Papel permite configuraciones geométricas que no pueden llevarse a cabo con los axiomas de la Geometría de la Regla y el Compás, o alternativamente, con los cinco primeros axiomas de Huzita-Hatori

Prueba III.1

Resulta obvio de la demostración del **Teorema III.4**

■

⋓ Capítulo IV

Capítulo XIX. Un heptágono regular flexible

De nuevo con la intención de mostrar el poder de nuestra herramienta híbrida entre regla, compás, y el Axioma de Doblado de Papel, llevaremos a cabo la construcción de un heptágono regular a partir de un trozo cuadrado de papel (para la construcción de este, véase el **Teorema III.2**) Es importante mencionar que aquí se utilizará explícitamente el Axioma de Doblado de Papel para generar un doblez cuya pendiente es exactamente $cos(\frac{2\pi}{7})$ y aprovechar dicha medida para poder llevar a cabo la construcción. Debe recordarse también que dada la herramienta de la Regla y el Compás, Karl Gauss y Pierre Wantzel han demostrado[25] que todo n −ágono regular es construible si y solo si n se factoriza en una potencia de 2 y primos de Fermat distintos entre sí, de modo que la construcción que a continuación se ofrece es *imposible* de realizarse con Regla y Compás.

Teorema III.3

El heptágono regular es una figura flexible.

La demostración de la verdad de ésta construcción puede encontrarse en (Geretschläger, 1997).

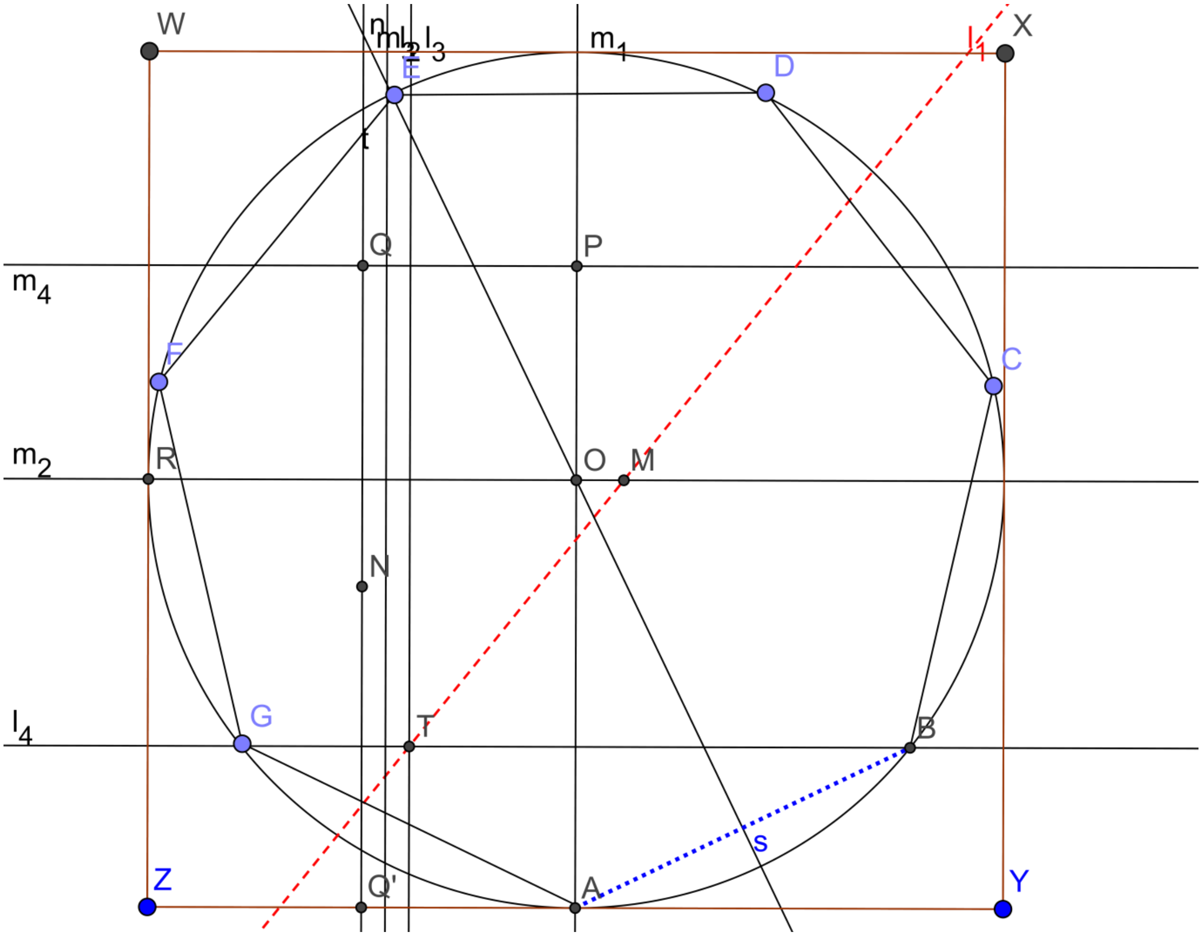
Construcción III.3

- En un cuadrado con vértices $WXYZ$ nombrado de modo cíclico tracemos las mediatrices m_1 de WX y m_2 de WZ. Sea A la intersección de m_1 con ZY, R la

[25] En (Stewart, 2003, pág. 209) Se menciona que Gauss decía poseer las pruebas de necesidad y suficiencia de tal Teorema, sin embargo, solo publicó una de ellas. No obstante, en el mismo texto se le atribuyen ambas pruebas cuando el teorema es enunciado y demostrado (Stewart, 2003, pág. 218)
En (Rotman, 1998, pág. 137) los resultados de necesidad y suficiencia se atribuyen ambos a Gauss para p −ágonos con p un número primo arbitrario.
En (Wantzel, 1837) El mismo Pierre Wantzel menciona que Gauss solo prueba uno de los resultados en su *Disquisitiones Arithmeticae* y en tal texto él se dedica a probar el otro.

de m_2 con WZ y O la intersección de m_1 y m_2, es decir, el baricentro del cuadrado.

- Trácense ahora los dobleces m_3 y m_4 que encimen WZ en m_1 y WX en m_2 llamemos Q a la intersección de m_3 y m_4, Q' a la de m_3 con ZY y P a la de m_4 con m_1. Marquemos N el punto medio de QQ'.
- Hágase un doblez ℓ_1 que coloque al punto P sobre m_2 y a N sobre m_1, sea M su intersección con m_2.
- Pliéguese m_2 sobre sí misma de tal modo que R y M se encimen, llamemos ℓ_2 a tal doblez. Calquemos Q y Q' al doblar sobre ℓ_2 y hagamos un doblez ℓ_3 que pase por ambas calcas. Sea T la intersección de ℓ_1 y ℓ_3.
- Hágase un doblez ℓ_4 que encime ℓ_3 sobre sí mismo y que pase por T. Finalmente hágase un doblez que coloque a A sobre ℓ_4 y que pase por O, llámese B a la calca de A sobre tal doblez. AB es la medida del heptágono inscrito en el cuadrado.



Construcción XIX. Heptágono Flexible

⋓ Capítulo XVI

Capítulo XX. Un poco más sobre herramientas, construcciones y equivalencias axiomáticas

Como último recurso de nuestra exposición regresaremos a (Tramuns & Guàrdia, 2014) para un brevísimo comentario y una discusión más profunda de las ideas expuestas tanto en el texto, como en este trabajo.

Definición III.9

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Dos sistemas son equivalentes si el conjunto de puntos que generan son iguales, es decir, que si $\mathcal{S} = [\mathcal{H}, X_0]$ y $\mathcal{S}' = [\mathcal{H}', X_0']$ con $X_0 = (K_0|Q_0)$ y $X_0' = (K_0'|Q_0')$ respectivamente son dos sistemas entonces se cumple que $K^{\mathcal{S}} = K'^{\mathcal{S}'}$

Definición III.10

(Tramuns & Guàrdia, 2014) Diremos que dos herramientas $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ son aritméticamente equivalentes si existen dos conjuntos de puntos y curvas X_0, y X_0' tales que los sistemas $\mathcal{S} = [\mathcal{H}, X_0]$ y $\mathcal{S}' = [\mathcal{H}', X_0']$ son equivalentes y la construcción de los elementos de los conjuntos $X^{\mathcal{S}}$ y $X^{\mathcal{S}'}$requiere de todos los axiomas de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ respectivamente

En (Tramuns & Guàrdia, 2014) se hace, con referencia a la Geometría del One-Floding-Origami la siguiente clasificación de axiomas de construcción y de intersección:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{matrix} Doblez, Mediatriz, Bisectriz, Perpendicular, \\ Tangente, TangenteComún, TangenteOrtogonal \end{matrix} \right\}^{26}$$

$$\mathcal{I} = \{IntDoblez\}$$

[26] En vista de las observaciones que reducen los axiomas del One-Fold-Origami a uno solo echas en (Hatori, 2017) ésta lista es susceptible de ser enormemente reducida.

Para generar la herramienta de la geometría del origami: $Or = \langle \mathcal{C}, \mathcal{I} \rangle$. Es fácil extraer estos comportamientos axiomáticos desde las herramientas abstractas, es decir, interpretar su comportamiento mecanicista. Más aún, resulta sencillo equipararlos al comportamiento de la geometría de los *conic numbers,* comportamiento que ya hemos delimitado.

Además, en (Tramuns & Guàrdia, 2014) se define una herramienta para los *conic numbers* del siguiente modo:

$$\mathcal{C}' = \{Cirfunferencia, Recta, RadioCircunferencia, Cónica\}$$

$$\mathcal{I}' = \left\{\begin{matrix} IntRecta, IntCirfunferencia, IntCónica, \\ RectaIntCircunferencia, RectaIntCónica, CircunferenciaIntCónica \end{matrix}\right\}$$

Para generar a la herramienta de los *conic numbers*: $Co = \langle \mathcal{C}', \mathcal{I}' \rangle$

Lo anterior para concluir que, las herramientas de ambos sistemas son aritméticamente equivalentes, es decir, que la Geometría del One-Fold-Origami es aritméticamente equivalente a la Geometría de los *Conic Numbers.*

La conclusión anterior no podría ser más acertada, pues como se ha demostrado en la Parte II de éste trabajo, podemos efectuar de manera completamente inequívoca la traducción del Axioma de Doblado de Papel justamente a uno de los axiomas de construcción definidos por Tramuns y Guàrdia, es decir, el de la intersección de dos secciones cónicas; los autores nos ofrecen un modo de mecanizar, resumir y clarificar este hecho con el solo hecho de definir adecuadamente las herramientas y los conjuntos base.

No obstante lo anterior, resulta tentador pensar que existe un tema sin resolver en este choque entre nuestro desarrollo y el de Tramuns y Guàrdia, y que podría considerarse una consecuencia del lenguaje que hasta ahora hemos manejado. Tal tema es el de considerar a la Geometría de los *Conic Numbers* como un sistema susceptible de ser analizado con la herramienta ofrecida por los autores, (o alternativamente, considerar al One-Fold-Origami susceptible de tal proceso).

Como se ha dejado sentir a lo largo de este trabajo, se tienen siempre en presencia dos lados de una misma moneda que es la geometría; tales lados son, primeramente, el ofrecimiento de los axiomas como una herramienta abstracta, y el otro, su traducción mecanicista que los convierte en axiomas acordes a la lógica de las matemáticas contemporáneas (es decir, ancladas al formalismo de Hilbert, con mucho énfasis en la geometría sintética), es decir, en objetos que se autodefinen a través de sus propiedades y que encuadran en el resto del lenguaje matemático.

Así pues, es necesario preguntarse qué sucedería si los axiomas de la Geometría de los *Conic Numbers* (en el sentido de Tramuns y Guàrdia) no fuera otra cosa sino el producto de esta transformación mecanicista al lenguaje del formalismo matemático. Tenemos algunas pistas adecuadas para considerarlo así, y la primera es el hecho de que las secciones cónicas son ésta clase de objetos entendibles dentro del lenguaje formalista (o más precisamente, las ecuaciones algebraicas que las definen) mientras que los procesos básicos de los axiomas de Huzita-Hatori no lo son.

Una más es el hecho de que los autores del artículo que nos ocupa debieron definir un tercer tipo de equivalencia entre herramientas cuando sería razonable y suficiente valerse de la Equivalencia Virtual para discursar sobre la relación entre la Geometría del One-Fold-Origami y la de los *Conic Numbers* (Si es que realmente existiera una, cosa que los autores del artículo aseguran y nosotros nos atrevemos a dudar).

La cuestión es, por supuesto, adyacente a los fines de esta exposición y también a las capacidades matemáticas y filosóficas de ella y de su autor. Por tal motivo se invita encarecidamente al amable lector a reflexionar al respecto y a buscar directamente a Tramnus y a Guàrdia. Se agradecerá grandemente cualquier contacto que el lector pueda establecer con el autor para compartir puntos de vista, reflexiones y discusiones que puedan surgir del análisis de este trabajo y aquellos que le dan origen y que pueden encontrarse en la bibliografía.

Capítulo XXI. Sobre la independencia del Axioma de Doblado de Papel (ii).

Teorema III.5

Axioma de Doblado de Papel no permite ninguna construcción propia de los axiomas de la geometría de la Regla y el Compás.

Demostración III.5

Como ya se mencionó, la Geometría de la Regla y el Compás reduce sus axiomas de intersección a las intersecciones binarias entre circunferencias y rectas; mientras que el Axioma de Doblado de Papel reduce su discurso a la intersecciones de dos parábolas.

■

Teorema III.6

El Axioma de Doblado de Papel es independiente de la axiomática de la Regla y el compás.

Demostración III.6

Véase el **Teorema III.5** y el **Corolario III.1**

■

⋓ **Capítulo XX**

Tabla de Ecuaciones

Ecuación I. Araña Construible 53
Ecuación II. Araña Flexible 56
Ecuación III. Expresión de la cónica dual 67

Tabla de Ilustraciones

Construcción I. Suma de Segmentos 12
Construcción II. Producto de Segmentos 13
Construcción III. Raíz cuadrada de un segmento 13
Construcción IV. Construibles complejos 17
Construcción V. Axioma I 22
Construcción VI. Axioma II 23
Construcción VII. Axioma III 23
Construcción VIII. Axioma IV 24
Construcción IX. Axioma V 24
Construcción X. Axioma VI 25
Construcción XI. Axioma VII 25
Construcción XII. Axioma III. Versión de Hatori 26
Construcción XIII. Quinto Axioma de Origami 32
Construcción XIV. Sexto Axioma de Origami 33
Construcción XV. Raíz cúbica de un segmento 38
Construcción XVI. Trisección del ángulo 39
Construcción XVII. Cuadrado Flexible 78
Construcción XVIII. Hexágono Flexible 79
Construcción XIX. Heptágono Flexible 84

Bibliografía

Alperin, R. C. (2000). A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. *New York Journal of Mathematics*, 119-133.

Camacho Galván, M. A. (2008). *Geometría en Papiroflexia.* Ciudad de México.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F., & Tomás, F. (1990). *Álgebra Superior* (Segunda ed.). Ciudad de México: Trillas.

Euclides. (1991). *Elementos.* Madrid: Gredos.

Geretschläger, R. (1997). Folding the Regular Heptagon. *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, 81-88.

Graustein, W. C. (1963). *Introduction to Higer Geometry* (Primera ed.). New York: Mcmillan.

Hatori, K. (2017). *K´s Origami.* Retrieved Diciembre 2017, from https://origami.ousaan.com/library/conste.html

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry.* Illinois: The Open Court Publishing Company.

Ivorra, C. (2016). *Las Fórmulas de Cardano-Ferrari.* Retrieved Noviembre 2016, from Universidad de Valencia: https://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf

Lang, R. (2004). *Origami and Geometric Constructions.* Retrieved Noviembre 2016, from Robert J. Lang Origami: http://www.langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf

Lang, R. (2004). *Robert J. Lang Origami.* Retrieved Noviembre 2016, from http://www.langorigami.com/article/huzita-justin-axioms

Menchen Caballero, F. J. (2011, Enero 7). *Elemens.* Retrieved Agosto 2017, from Algebra III: La Ecuación Cuártica o de Cuarto Grado:

http://franciscojosemenchencaballero.blogspot.mx/2011/01/algebra-iii-la-ecuacion-cuartica-o-de.html

Rotman, J. (1998). *Galois Theory* (Segunda ed.). Nueva York: North America.

Stewart, I. (2003). *Galois Theory* (Tercera ed.). United States of America: Chapman&Hall.

Tonelli, R. (2006, Julio). *Gli Studenti di Oggi*. Retrieved Noviembre 2016, from http://proooof.blogspot.mx/2007/04/origami.html

Tramuns, E., & Guàrdia, J. (2014, Septiembre). *Geometric and Arithmetic relations concerning origami.* Retrieved Julio 2017, from Research Gate: https://www.researchgate.net/publication/265787983_Geometric_and_arithmetic_relations_concerning_origami

Videla, C. (2016, Septiembre 30). *On points constructible from conics.* Retrieved Junio 2017, from Research Gate: https://www.researchgate.net/publication/227141144

Wantzel, P. L. (1837). Recherches sur le moyens de reconnaitre si un problème de géometrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 366-372.