UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTINUOS HOMOGÉNEOS HEREDITARIAMENTE DESCOMPONIBLES

TESIS

Que para obtener el título de

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

Fernando García Cortés

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Sergio Macías Álvarez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Datos del alumno
García
Cortés
Fernando
55 6681 1740
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
308255375

Datos del tutor
Dr.
Sergio
Macías
Álvarez

Datos del sinodal 1
Dr.
Leopoldo
Morales
López

Datos del sinodal 2
Dra.
María de Jesús
López Toriz

Datos del sinodal 3
Dra.
Rocío
Leonel
Gómez

Datos del sinodal 4
Dr.
Carlos
Islas
Moreno

Datos del trabajo escrito
CONTINUOS HOMOGÉNEOS HEREDITARIAMENTE DESCOMPONIBLES
82 p.
2018

Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
Al andar se hace el camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.
Caminante no hay camino
sino estelas en la mar.

Antonio Machado

Agradecimientos

Los agradecimientos deben ser la parte más leida de cualquier tesis, la leen ajenos y vinculados a esta. Tiene sentido que esto sea así porque, independientemente del tema que trate la tesis, es una sección que cualquier persona que sepa leer entenderá y porque es el vínculo más humano que vamos a tener con el autor (si nos limitamos a la relación lector-escritor). Pero esto, querido lector, usted ya lo sabía. Lo que no sabe es que estoy aprovechando este párrafo para para agradecerle por tomarse la molestia de intimar un poco con su servidor. Pero si, además, usted esta leyendo este escrito porque su contenido le es de utilidad para algún trabajo que esté realizando, entonces le estoy agradecido por la eternidad. Esto porque una tesis no es un paso burocrático en una cadena de acciones que tienen como fin obtener un papel que te asigne un grado, sino un trabajo que sea de provecho para futuras generaciones y que justifique el aprendizaje obtenido durante los años de carrera.

Las instituciones y personas mencionados a continuación han sido pieza fundamental en mi formación universitaria y nadie es mencionado por coincidencia.

Pertenecer a una institución como la Universidad Nacional Autónoma de México y estudiar en una de sus facultades (en mi caso la Facultad de Ciencias) no sólo motiva honor por las credenciales que este simple hecho te da, sino que, también, genera felicidad por lo buenos profesores y amigos que encuentras en ella. Mi primer encuentro con buenos profesores fue inmediato al conocer a Rubén Antonio Molina Hernández, quien me insitió en que nunca debo dejar de soprenderme por un resultado aunque sea la unmillonésima vez que lo vea, y a Erick Iván Rodríguez Castro, persona ideal para pedir un consejo calmado para situaciones sencillas en momentos de estrés. En el curso de Rubén obtuve a varios de los amigos que me han inspirado a seguir adelante; Lupita, Norma, Alexander y Yessica son de esas amistades que siempre están presentes a pesar del no muy continuo trato; también conocí a Jonnathan Gutiérrez Ortiz, una suerte de persona que siempre me ha enriquecido con sus pláticas y que ha fortalecido su presencia en mi vida al volverse mi compañero de estudio para un objetivo muy poco trivial como lo es entrar a la maestría, la palabra noble define perfectamente a Jonny; la última persona de este grupo es Andrés Ahumada Gómez, que de vez en vez se aparece por mi camino y siempre me saca una sonrisa, un buen ejemplo de matemático apasionado. La facultad también me ofreció la oportunidad de entablar una relación laboral con el Dr. Leobardo Fernández Román, a quien estimo mucho y le debo mi iniciación como docente al confiar en mí para ser su ayudante.

El momento de elegir a qué te vas a dedicar llega tarde o temprano. No me fue difícil saber que quería trabajar con el Dr. Sergio Macías Álvarez después de un curso de topología III que daban los alumnos y no el profesor (es decir, es una persona que confía en el potencial de las personas). El Profesor Sergio rápidamente me dió un tema que, aunque me estaba costando bastante entender, me fue atrapando poco a poco.

Las tesis no sólo no se escriben solas, sino que necesitas gente a tu lado que te presione y te apoye. Mi madre, la Psicóloga Ruth M. Cortés Esquivel, el ser al que más debo y quien sé que nunca dejará de estar ahí, siempre estuvo al pendiente, no sólo se conformó con apoyarme y mostrar interés, sino que, al verla superarse a sí misma, me demuestra que siempre será una guía y un objeto de admiración para mí, la amo. En todo este proceso siempre estuve más que bien acompañado por Cecilia Andrea Ortega Bringas, mujer que me ayudó a enfocarme y siempre me aconsejaba adelantar trabajo, constantemente, con su muy marcada y admirable personalidad, me insistió y me impulsó a hacer las cosas, este trabajo también se lo debemos a ella

Siempre se necesita un descanso para todo y seres para distraerme o reposar nunca han faltado. Mis comidas siempre fueron el doble de nutritivas cuando podía platicar con Edgar, Juliane y Lorena; Mi hermana Itzel García Cortés siempre me ha dado tranquilidad al poder llegar a casa y, simplemente, encontrarla ahí en persona, me ha servido de modelo de inspiración; Juan Manuel Aquino Sánchez,siempre oportuno, estuvo ahí, constante, sobrio, sereno y con palabras coherentes y reflexiones que me ayudaban a despejarme pero, al mismo tiempo y sobre todo, a crecer como persona. Con nadie más disfruto tanto discutir; Mayra Nadia Quintanar Cuevas, tan sensible, una de las partes más rosas de mi vida y con quien puedo hablar de todo, fue uno de los mejores distractores a la hora de estar estresado; Nayeli Rosalinda Rodríguez Mendieta, una de las mejores acompañantes para ir al cine, a pesar de las pocas pláticas, siempre me ha encantado lo fantasioso que es imaginar junto a ella ella, una persona creativa; entrando un poco tarde, pero a tiempo, Sheila Keren Palacios Alvarado me ayudo a hacer más llevadero el proceso del término de escritura de mi tesis con buenas pláticas durante los exámenes del profe Leobardo.

El momento de terminar se acercaba y el Dr. Sergio me aconsejó para que buenas personas leyeran mi tesis en calidad de sinodales. El Dr. Leopoldo Morales, la Dra. María de Jesús López, la Dra. Rocío Leonel y el Dr. Carlos Islas me hicieron oportunas y efectivas observaciones para que este trabajo sea de calidad.

A todos ellos, ¡GRACIAS!

Índice general

Introducción

Un continuo es un espacio no degenerado métrico, compacto y conexo. Un continuo es homogéneo si cumple que para cualesquiera dos puntos en él, existe un homeomorfismo del continuo en sí mismo que manda a un punto en el otro. Los espacios homogéneos fueron definidos en 1920 por W. Sierpiński en el artículo *Sur une propété topologique des ensembles dénombrables denses en soi* [34] que apareció en el primer volumen de la revista Fundamenta Mathematicae.

No es difícil ver que el círculo unitario en el plano es un continuo homogéneo. Desde el inicio del estudio de los continuos homogéneos las curvas cerradas simples han tenido una presencia importante en el estudio de los continuos homogéneos. Tal es su relevancia que varias cuestiones importantes las tienen consideradas. Para ejemplo de lo anterior, recurramos a una pregunta postulada por B. Knaster y K. Kuratowski en [20]: *¿es la curva cerrada simple el único continuo homogéneo del plano?* Se sabe que la respuesta es negativa pues R. H. Bing, en su artículo *A homogeneous indecomposable plane continuum* [2], demostró que el pseudoarco es un continuo homogéneo. Más adelante, R. D. Anderson demuestra que la curva cerrada simple y la curva universal de Menger son los únicos dos continuos homogéneos localmente conexos de dimensión 1, en el artículo *One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem* [1, Theorem XIII]. Este último resultado de Anderson también será de vital importancia para el trabajo aquí presentado, específicamente en el Teorema 5.2.2, cuyo objetivo es encontrar un camino para poder utilizar el resultado de Anderson.

Otro ejemplo donde la curva cerrada simple juega un papel muy importante es el problema que J. Krasinkiewicz en [5, Problem 156] y P. Minc en [24, Problem 81, pág. 379] postularon, cada uno de manera independiente. Un problema que hasta el día de hoy sigue abierto y es el problema que da pie a la existencia de este trabajo: *¿es la curva cerrada simple el único continuo homogéneo que es hereditariemente descomponible?* A diferencia de la pregunta de Knaster y Kuratowski, esta segunda no posee una respuesta definitiva, si no que posee algunas respuestas parciales.

Hay tres artículos que contienen las respuestas que se le han dado a la pregunta de J. Krasinkiewicz y P. Minc. El propósito de este trabajo es presentar los resultados principales de dichos artículos a fin de comprender de mejor manera las técnicas con las que han atacado el problema.

El trabajo ha sido dividido en cinco capítulos. El primer capítulo contiene algunos conceptos y resultados a utilizar en la tesis. Además de los resultados básicos más importantes para dar solución a los lemas y teoremas más importantes de los capítulos siguientes. Se ha decidido colocar en el segundo capítulo la demostración de un resultado de R. H. Bing hecha por F. Burton Jones, encontrado en *Use of a new thechnique in homogeneous continua* [19], el cual es una simplificación de la prueba del teorema de R. H. Bing encontrado en el articulo *A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc* [3]. En el tercer capítulo mostramos el artículo de Charles L. Hagopian *Homogeneous plane continua* [12], el cual da una respuesta muy fuerte al asegurar que en el plano sólo hay un continuo homogéneo hereditariamente descomponible. El cuarto capítulo contiene el resultado del artículo de T. Maćkowiak y E. D. Tymchatyn titulado *Continuous mappings on continua, II* [28] que nos dice que todo continuo homogéneo y atriódico que contiene un continuo hereditariamente descomponible es un solenoide (Teorema 4.2.5) y, de hecho, el único solenoide al que aspira ser, al ser él mismo descomponible, es la curva cerrada simple. El quinto capítulo consta de los resultados más importantes del artículo de S. Macías y S. B. Nadler, Jr. *On hereditarily decomposable homogeneous continua* [27], en el cual se encuentran ocho propiedades adicionales a las hipótesis de ser homogeneo y hereditariamente descomponible. Cada una de las cuales implica que un continuo homogéneo y hereditariamente descomponible sea la curva cerrada simple. Además, en este último capítulo encontraremos unos cuantos resultados adicionales sobre las consecuencias de que la respuesta al problema de la curva cerrada simple sea negativa.

Cada uno de los resultados recurre a herramientas topológicas de diversas áreas para atacar un problema común.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzaremos el texto con un capítulo que posee las definiciones más importantes y algunos resultados básicos que utilizaremos a lo largo del mismo.

1.1. Definiciones básicas y Teorema del borde en la frontera

Daremos un resultado muy conocido en Topología que será de gran utilidad. Éste es mejor conocido como *Teorema del borde en la frontera*. Antes, introduciremos los conceptos necesarios.

Definición 1.1.1. Sean X un espacio con métrica ρ, A un subconjunto no vacío de X y $x \in X$. Definimos la *distancia entre* x *y* A (denotada como $\rho(x, A)$) como $\inf\{\rho(x, a) | a \in A\}$.

Definición 1.1.2. Sean X un espacio con métrica ρ, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la *bola abierta de radio* ε *y centro en* x, denotada por $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$, como sigue: $\mathcal{V}_\varepsilon(x) = \{y \in X | \rho(y, x) < \varepsilon\}$. Si A es un subconjunto de X, entonces al conjunto $\bigcup\limits_{y \in A} \mathcal{V}_\varepsilon(y)$ lo llamaremos *bola abierta de radio* ε *y centro en* A y se denotará como $\mathcal{V}_\varepsilon(A)$.

Definición 1.1.3. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Definiremos el conjunto $Cl_X(A) = \bigcap\{C \subset X | C$ es cerrado en X y $A \subset C\}$. Este conjunto es el cerrado más pequeño en X que contiene a A y es conocido como la *cerradura de* A *en* X. Definiremos ahora $Int_X(A) = \bigcup\{U \subset X | U$ es abierto en X y $U \subset A\}$. Este conjunto es el abierto de X más grande contenido en A y es conocido como el *interior de* A *en* X.

Definición 1.1.4. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces *la frontera de* A *en* X, denotada como $Fr_X(A)$, está definida como el conjunto $Cl_X(A) \cap Cl_X(X \setminus A)$.

Definición 1.1.5. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio *normal* si para cualesquiera dos conjuntos no vacíos, cerrados y ajenos, A y B, de X, existen dos abiertos ajenos U y V de X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Proposición 1.1.6. *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de un espacio métrico X con métrica ρ. Para cada $x \in F_1$ y $y \in F_2$, sean $\varepsilon_x = \frac{1}{2}\rho(x, F_2)$ y $\varepsilon_y = \frac{1}{2}\rho(y, F_1)$. Entonces $U = \bigcup\limits_{x \in F_1} \mathcal{V}_{\varepsilon_x}(x)$ y $V = \bigcup\limits_{y \in F_2} \mathcal{V}_{\varepsilon_y}(y)$ son dos abiertos ajenos que contienen a F_1 y a F_2 respectivamente.

Q.E.D.

Proposición 1.1.7. *Sean X un espacio normal, A un subconjunto cerrado de X y U un abierto propio de X que contiene a A. Entonces existe un subconjunto abierto V de X tal que $A \subset V \subset Cl_X(V) \subset U$.*

Demostración. Como $U \neq X$, $B = X \setminus U$ es un cerrado no vacío de X que no intersecta a A. Como X es normal, existen dos abiertos V y W ajenos y no vacíos de X tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Por ser ajenos $Cl_X(V) \cap W = \emptyset$, como $X \setminus B \subset W$, $Cl_X(V) \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Así, $Cl_X(V) \subset U$. Lo que completa la prueba.

Q.E.D.

Definición 1.1.8. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Definiremos la *componente de p en X* (denotada como C_p) como $C_p = \bigcup\{A \subset X | A$ es conexo X y $p \in A\}$. En general, cuando hablamos de una componente de un conjunto, hablaremos de la componente de alguno de sus puntos.

Observación 1.1.9. La componente de un punto de un espacio es el conexo más grande que lo contiene y que las componentes de un subconjunto A de un espacio X son cerradas en A.

Lema 1.1.10. *Sean X un espacio y A un subconjunto cerrado de éste que posea una cantidad finita de componentes. Si $x \in Int_X(A)$ y C_x es la componente de x en A, entonces $x \in Int_X(C_x)$.*

Demostración. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las componentes de A diferentes de C_x. Como $x \in Int_X(A)$, existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset A$. Como A es cerrado y C_i es cerrado en A (por la observación 1.1.9), C_i es cerrado en X para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $V = U \cap (X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_j)$. Entonces V es un abierto de X tal que $x \in V \subset A$ y $V \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i) = \emptyset$. Así, $V \subset C_x$ y, por tanto, $x \in Int_X(C_x)$.

Q.E.D.

Definición 1.1.11. Un *continuo* es un espacio no degenerado, métrico, compacto y conexo. Un subconjunto cerrado y conexo, Y, de un continuo X será llamado un *subcontinuo* de X.

Estamos listos para probar el Teorema del borde en la frontera.

Teorema 1.1.12. *Sean X un continuo y U un subconjunto propio, abierto, no denso y no vacío de X. Si K es una componente de $Cl_X(U)$, entonces $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $K \cap Fr_X(U) = \emptyset$. Entonces, por [31, 5.2, pág. 72], $Cl_X(U) = M_1 \cup M_2$, donde M_1 y M_2 son dos subconjuntos cerrados y ajenos de $Cl_X(U)$ con $K \subset M_1$ y $Fr_X(U) \subset M_2$. Definamos $M_3 = M_2 \cup (X \setminus U)$. Como $Cl_X(U) = M_1 \cup M_2$, es claro que $X = M_1 \cup M_3$. Tanto M_1 como M_3 son cerrados en X. Como $K \neq \emptyset$ y $K \subset M_1$, $M_1 \neq \emptyset$. Como U es subconjunto propio de X y $X \setminus U \subset M_3$, $M_3 \neq \emptyset$. Demostraremos que $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Tenemos que $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (X \setminus U)$. Así, como $M_1 \subset Cl_X(U)$ y $X \setminus U$ es cerrado en X, $M_1 \cap M_3 \subset Cl_X(U) \cap (X \setminus U) = Fr_X(U) \subset M_2$. Pero, como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, obtenemos que $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Esto es una contradicción, pues X es un continuo. Por lo tanto, $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$.

Q.E.D.

Corolario 1.1.13. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X. Si C es una componente de $Cl_X(X \setminus A)$, entonces $C \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Notemos que, como A y $X \setminus A$ son complementos uno del otro, $Fr_X(A) = Fr_X(X \setminus A)$. Por otro lado, como A es cerrado, $Fr_X(A) \subset A$. Por el Teorema 1.1.12, tenemos que $\emptyset \neq C \cap Fr_X(X \setminus A) = C \cap Fr_X(A) \subset C \cap A$. Lo que completa la prueba.

Q.E.D.

Corolario 1.1.14. *Sean X un continuo, A un subcontinuo propio de éste y U un abierto no denso del mismo, tales que $A \subset U$. Entonces existe un subcontinuo propio B de X tal que $A \subset B$, $B \neq A$ y $B \subset U$.*

Demostración. Por la Proposición 1.1.6, X es normal y, por la Proposición 1.1.7, existe un abierto V de X tal que $A \subset V$ y $Cl_X(V) \subset U$. Por el Teorema 1.1.12, la componente de A en $Cl_X(V)$, B, intersecta a $Fr_X(V)$. Esto significa que, como $A \subset V$, $B \neq A$. Por otro lado B es un subcontinuo propio de X y, como $B \subset Cl_X(V) \subset U$, se completa la prueba.

Q.E.D.

1.2. Propiedad de la intersección finita

Definición 1.2.1. Sea A un conjunto, diremos que A está *parcialmente ordenado* si existe una relación $\leq$ tal que, para cualesquiera tres elementos a, b y c de A, 1) $a \leq a$; 2) si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$; 3) si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$. Si $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y, además, para cualesquiera dos elementos a y b de A existe un elemento c tal que $a \leq c$ y $b \leq c$ se dirá que A es un *conjunto dirigido*.

Proposición 1.2.2. *Sea I un conjunto dirigido de índices. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio compacto X tal que si $i, j \in I$ y $j < i$, entonces $C_i \subset C_j$ y U es un abierto no vacío en X tal que $\bigcap_{i \in I} C_i \subset U$. Entonces, existe $l \in I$ tal que $C_l \subset U$.*

Demostración. Como $X \setminus U$ es cerrado en X, es compacto y, además, $X \setminus U \subset X \setminus (\bigcap_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$. Así, $\{X \setminus C_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$, por lo que existe una subfamilia finita $\{C_{i_j}\}_{j=1}^n$ tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^n C_{i_j}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $i_m > i_n$ para toda $m < n$, de esta manera $C_{i_n} \subset C_{i_m}$ para toda $m < n$. Entonces como para cualesquiera dos índices k y l de I tales que $k \leq l$, $X \setminus C_{i_k} \subset X \setminus C_{i_l}$, tenemos que $X \setminus U \subset X \setminus C_{i_n}$, podemos concluir que $C_{i_n} \subset U$.

Q.E.D.

Definición 1.2.3. Sean X un espacio y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos de X. Diremos que $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* si para cualquier subfamilia finita $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n$ de $\{A_i\}_{i \in I}$ se tiene que $\bigcap_{j=1}^n A_{i_j} \neq \emptyset$.

Lema 1.2.4. *Sea X un espacio. Entonces X es compacto si y sólo si cualquier familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Supongamos que $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$. Eso significa que $\bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = X$, así que $\{X \setminus C_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto existe una cantidad finita de elementos en I, $\{i_1, \ldots, i_n\}$, tales que $\bigcup_{j=1}^n (X \setminus C_{i_j}) = X$, por lo tanto, $\bigcap_{j=1}^n C_{i_j} = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $\{C_i\}_{i \in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Ahora, supongamos que cualquier familia de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = \emptyset$. Esto implica que $\{X \setminus U_i\}_{i \in I}$ no tiene la propiedad de la intersección finita. De esta forma existe una cantidad finita de elementos en I, digamos $i_1, \ldots, i_n$, tales que $\bigcap_{j=1}^n (X \setminus U_{i_j}) = \emptyset$. Así $\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} = X$. Y, finalmente, $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$ es una subcubierta finita de X.

Q.E.D.

Proposición 1.2.5. *Sea I un conjunto dirigido de índices. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio compacto X tal que si $j, l \in I$ y $j < l$, entonces $C_l \subset C_j$. Entonces $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Simplemente hay que observar que $\{C_i\}_{i \in I}$ posee la propiedad de la intersección finita. Esto porque, al ser I un conjunto dirigido, para toda cantidad finita de índices $\{i_1, \ldots, i_n\}$, existe $k \in I$ tal que $k > i_j$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $C_k \subset C_{i_j}$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $C_k \neq \emptyset$, $\bigcap_{j=1}^n C_{i_j} \neq \emptyset$ y, por el Lema 1.2.4, $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Q.E.D.

Lema 1.2.6. *Sea I un conjunto dirigido de índices. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subcontinuos de un espacio métrico y compacto X tales que si $j < l$ entonces $X_l \subset X_j$. Entonces $A = \bigcap_{i \in I} X_i$ es un continuo.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.5, A es un subconjunto cerrado y no vacío de X y, por lo tanto, será compacto. A también es métrico por ser subconjunto de un métrico. Así, sólo basta probar que A es conexo.

Supongamos que A es disconexo. Entonces existen dos abiertos U y V de X tales que $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Como $U \cup V$ es abierto, por la Proposición 1.2.2, existe un $m \in I$ tal que $X_m \subset U \cup V$. Como X_m es un continuo, $X_m \subset U$ o $X_m \subset V$ y sólo se cumple una de estas opciones. También, tenemos que $A \subset X_m$, por lo que A sólo puede estar contenido en U o V y no en ambas. Lo cual es absurdo. Luego A es conexo y, por ende, será un continuo.

Q.E.D.

1.3. Espacios completos

Definición 1.3.1. Sean X un espacio métrico, con métrica ρ, y A un subconjunto no vacío de X. Definimos el *diámetro de* A, denotado por $\text{diám}(A)$, como sigue: $\text{diám}(A) = \sup\{\rho(x,y) | x, y \in A\}$.

Definición 1.3.2. Sea X un espacio métrico con métrica ρ. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X es *convergente* a un punto $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Definición 1.3.3. Sea X un espacio con métrica ρ. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X es llamada *una sucesión de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. X será llamado *completo* si cualquier sucesión de Cauchy de elementos de X converge a un punto en X.

Lema 1.3.4. *Sea X un espacio métrico, con métrica ρ. X es completo si y sólo si para cada sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de X, tal que $F_{n+1} \subset F_n$ y $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty}$ diám$(F_n) = 0$, existe un punto $x \in X$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.*

Demostración. Supongamos que X es completo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in F_n$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X tal que, para cada $N \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, entonces x_n y x_m son elementos de F_N. Luego, como $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty}$ $\text{diám}(F_n) = 0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces existe $x \in X$ tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$. Notemos que, como para cada $N \in \mathbb{N}$, $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset F_N$, $x \in \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N$. Ahora, supongamos que existe $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \{x\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 < \rho(x,y) \leq \text{diám}(F_n)$, lo cual es una clara contradicción. Finalmente, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.

Supongamos que para cada sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados de X, tal que $F_{n+1} \subset F_n$ y $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \text{diám}(F_n) = 0$, existe un punto $x \in X$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces, para cada número natural k, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que si i y l son mayores que N_k tendremos que $\rho(x_i, x_l) < \frac{1}{k}$. Para $k = 1$, tomemos $B_1 = Cl_X(\mathcal{V}_1(x_{N_1}))$. Para $k = 2$ sea $B_2 = Cl_X(\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}(x_{N_2})) \cap B_1$. Podemos seguir con este proceso y, así, obtendremos una familia de cerrados no vacíos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que, para cada n, $B_{n+1} \subset B_n$ y $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \text{diám}(B_n) = 0$. Así, por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$. Por construcción, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$. Luego, el espacio es completo.

Q.E.D.

Teorema 1.3.5. *Si X es un espacio métrico y compacto, entonces X es completo.*

Demostración. Vamos a utilizar el Lema 1.3.4. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cerrados tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \text{diám}(F_n) = 0$ y $F_{n+1} \subset F_n$ para cada n. Si tomamos m elementos de la sucesión $F_{n_1}, F_{n_2}, \cdots, F_{n_m}$, con $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$, tendremos que $\bigcap\limits_{k=1}^{m} F_{n_k} = F_{n_m}$. Entonces $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Entonces, por ser X compacto, por el Lema 1.2.4, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Sea x en este conjunto, veremos que es el único elemento ahí. Supongamos que existe $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \{x\}$. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 < \rho(x, y) \leq \text{diám}(F_n)$, lo cual es una clara contradicción. Finalmente, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.

Q.E.D.

1.4. Continuos descomponibles

Definición 1.4.1. Diremos que un continuo X es *descomponible*, si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $A \cup B = X$. Un continuo será llamado *hereditariamente descomponible* si todos sus subcontinuos no degenerados son descomponibles. Un continuo será llamado *indescomponible*, si no es descomponible.

Lema 1.4.2. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de éste tales que $X \setminus A$ no es conexo. Si U y V son dos abiertos ajenos no vacíos de X tales que $X \setminus A = U \cup V$, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son dos subcontinuos de X.*

Demostración. Como $X \setminus (A \cup U) = V$, tenemos que $A \cup U$ es cerrado. Análogamente, $A \cup V$ también es cerrado y, por lo tanto, ambos son compactos. Ahora, sólo bastará ver que ambos conjuntos son conexos. Para eso, lo haremos sólo con $A \cup U$, pues el caso de $A \cup V$ es similar. Supongamos que existen dos cerrados ajenos no vacíos K y L de X, tales que $A \cup U = K \cup L$. Como A es conexo, sin perder generalidad, diremos que $A \subset K$. De esta manera, podemos concluir que $U \subset L$. Como U es ajeno con V, $L \cap Cl_X(V) = \emptyset$. Así, $X = L \cup (K \cup Cl_X(V))$, lo cual es una contradicción, pues L y $(K \cup Cl_X(V))$ son dos subconjuntos cerrados ajenos, no vacíos de X.

Q.E.D.

El siguiente resultado es básico y nos será de mucha utilidad. Es una caracterización de los continuos descomponibles que nos ayudará para sólo tener que trabajar con los interiores de los subcontinuos de un espacio.

Lema 1.4.3. *Un continuo X es descomponible si y sólo si contiene algún subcontinuo propio con interior no vacío.*

Demostración. Supongamos primero que X es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios, A y B, de X tales que $A \cup B = X$. Así, se sigue que $X \setminus B$ es un abierto contenido en A y, por tanto, A tiene interior no vacío.

Ahora supongamos que existe un subcontinuo propio A de X cuyo interior es no vacío. Tenemos dos casos. Si $X \setminus A$ es conexo, al tener que $Int_X(A) \neq \emptyset$ sabemos que $Cl_X(X \setminus A) \neq X$, entonces $Cl_X(X \setminus A)$ es un subcontinuo propio de X y, por lo tanto, $X = A \cup Cl_X(X \setminus A)$. Ahora, si $X \setminus A$ es no conexo, entonces existen dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U y V de X, tales que $X \setminus A = U \cup V$. Por el Lema 1.4.2, tenemos que $A \cup U$ y $A \cup V$ son dos subcontinuos propios de X y, más aún, $X = (A \cup U) \cup (A \cup V)$.

Q.E.D.

El siguiente corolario es inmediato del Lema 1.4.3.

Corolario 1.4.4. *Un continuo es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

1.5. Descomposiciones y espacios cociente

Definición 1.5.1. Una *descomposición* de un espacio X es una colección de subconjuntos no vacíos de X, disjuntos dos a dos, cuya unión es X.

Definición 1.5.2. Diremos que una descomposición, $\mathcal{D}$, de un continuo X, es *semicontinua superiormente* si para cada $D \in \mathcal{D}$ y cada abierto U de X tales que $D \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $D \subset V$ y de tal manera que para todo elemento $E \in \mathcal{D}$ para el cual $E \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $E \subset U$. Diremos que $\mathcal{D}$ es *semicontinua inferiormente* si para cualesquiera $D \in \mathcal{D}$, x y y en D y cada subconjunto abierto U de X con $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $y \in V$ y cada que un elemento D' de $\mathcal{D}$ cumpla con $D' \cap V \neq \emptyset$, se tendrá que $D' \cap U \neq \emptyset$. Por último, diremos que $\mathcal{D}$ es *continua*, si es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.

Definición 1.5.3. Sea $\mathcal{D}$ una descomposición de un espacio X. A la función $q : X \longrightarrow X/\mathcal{D}$ que manda a cada elemento de X al único elemento, D_x, que lo contiene le llamaremos *función cociente*. Definimos $X/\mathcal{D} = \{D_x | x \in X\}$. A la topología:

$$\mathcal{U} = \{U \subset X/\mathcal{D} | q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

le llamaremos *topología cociente*. Al espacio $X/\mathcal{D}$ con la topología cociente le llamaremos *espacio cociente*.

Observación 1.5.4. Notemos que si $x \in X$, entonces $q^{-1}(q(x))$ es el elemento en $\mathcal{D}$ que contiene a x, esto es claro por la definición de función cociente. Así, en general, si $A \subset X$ entonces $q^{-1}(q(A)) = \bigcup\{D \in \mathcal{D} | D \cap A \neq \emptyset\}$.

Definición 1.5.5. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Diremos que f es *abierta* si las imágenes de abiertos en X, bajo f, son abiertos en Y. De igual manera diremos que f es *cerrada* si las imágenes de cerrados en X son cerrados en Y.

Teorema 1.5.6. *Sean X un espacio y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{D}$ es continua si y sólo si la función cociente $q : X \longrightarrow X/\mathcal{D}$ es tanto abierta como cerrada.*

Demostración. Supongamos que la descomposición $\mathcal{D}$ es continua. Comenzaremos demostrando que q es abierta. Para esto sólo usaremos el hecho de que q es semicontinua inferiormente. Sean U un abierto no vacío de X y $x \in q^{-1}(q(U))$. Sea D_x el elemento de $\mathcal{D}$ que contiene a x. Tenemos que $D_x \cap U \neq \emptyset$, pues $D_x \in q(U)$. Tomemos $y \in D_x \cap U$. Entonces, como $\mathcal{D}$ es semicontinua inferiormente, existe un abierto V de X tal que $x \in V$ y cada que un elemento de $\mathcal{D}$ intersecta a V, el mismo elemento intersecta también a U. Afirmamos que $V \subset q^{-1}(q(U))$. De no ser así, existiría un punto $v \in V \setminus q^{-1}(q(U))$ y, por tanto, el elemento $D_v \in \mathcal{D}$ tal que $v \in D_v$ no intersectaría a U. Esto sería una contradicción pues $D_v \cap V \neq \emptyset$ y, por tanto, $D_v \cap U \neq \emptyset$. Luego, $x \in V \subset q^{-1}(q(U))$ y x es un punto interior de $q^{-1}(q(U))$. Como x fue arbitrario, $q^{-1}(q(U))$ es abierto. Finalmente, $q(U)$ es abierto en $X/\mathcal{D}$. (#) Ahora veremos que q es cerrada. Similarmente a como lo hicimos primero, usaremos sólo el hecho de que q es semicontinua superiormente. Sea C un conjunto cerrado en X. Demostraremos que $X \setminus q^{-1}(q(C))$ es abierto en X. Sean $x \in X \setminus q^{-1}(q(C))$ y D_x el elemento en $\mathcal{D}$ que contiene a x. Tenemos que $D_x \cap C = \emptyset$, de otra forma $D_x \subset q^{-1}(q(C))$. Entonces $D_x \subset X \setminus C$. Como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, existe un abierto V de X tal que $D_x \subset V$ y todo elemento de $\mathcal{D}$ que intersecta a V se queda contenido en $X \setminus C$. Veamos que $V \subset X \setminus q^{-1}(q(C))$. De no ser así, habría un punto en $V \cap q^{-1}(q(C))$ y, por lo tanto, habría un elemento en $\mathcal{D}$ que intersectaría tanto a C y al mismo tiempo estaría contenido en $X \setminus C$. Así, como $D_x \subset V$, V es un abierto que contiene a x y se queda contenido en $X \setminus q^{-1}(q(C))$ Luego, $q^{-1}(q(C))$ es cerrado y, así, $q(C)$ es cerrado en $X/\mathcal{D}$. Luego, q es abierta y cerrada.

Supongamos que q es tanto abierta como cerrada. Veamos que que $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente. Sean $K \in \mathcal{D}$ y U un abierto de X tal que $K \subset U$. Como $X \setminus U$ es cerrado en X, $q^{-1}(q(X \setminus U))$ es cerrado también. Sea $V = X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U))$. V es abierto. Si $K' \in \mathcal{D}$ y $K' \cap V \neq \emptyset$, entonces $K' \cap q^{-1}(q(X \setminus U)) = \emptyset$. Así, $K' \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Finalmente $K' \subset U$. Ahora veremos que $\mathcal{D}$ es semicontinua inferiormente. Sean $D \in \mathcal{D}$, x y y, dos elementos de D, y U un abierto de X que tenga a x. Como q es abierta, $V = q^{-1}(q(U))$ es un abierto en X, más aún $D \subset V$, pues $x \in U$. En particular $y \in V$. Así, si $D' \in \mathcal{D}$ y $D' \cap V \neq \emptyset$, entonces $D' \cap U \neq \emptyset$. Finalmente, $\mathcal{D}$ es continua.

Q.E.D.

Lema 1.5.7. *Sean $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superiormente de un continuo X y U un abierto de X. Entonces $W_U = \bigcup\{D \in \mathcal{D} | D \cap U \neq \emptyset\}$ es un conjunto abierto en X.*

Demostración. Sea q la función cociente entre X y $X/\mathcal{D}$. Por la parte (#) en la demostración del Teorema 1.5.6, sabemos que q es cerrada. Entonces $q^{-1}(X/\mathcal{D} \setminus q(X \setminus U))$ es abierto en X. Vamos a probar que $W_U = q^{-1}(X/\mathcal{D} \setminus q(X \setminus U))$. Sea $x \in W_U$. Entonces $q^{-1}(q(x))$ intersecta a U y, por ende, $q(x) \in q(U) \subset X/\mathcal{D} \setminus q(X \setminus U)$. Ahora, sea $x \in q^{-1}(X/\mathcal{D} \setminus q(X \setminus U))$. Entonces $q(x) \in X/\mathcal{D} \setminus q(X \setminus U)$, así $q^{-1}(q(x)) \subset X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U)) \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Por lo tanto, $x \in W_U$.

Q.E.D.

Corolario 1.5.8. *Sean $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superiormente de un continuo X y U un abierto de X que contiene a un elemento D de $\mathcal{D}$. Entonces existe un abierto que es una unión de elementos de $\mathcal{D}$ y se queda contenido en U.*

Demostración. Como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, existe un abierto V tal que, cualquier elemento de $\mathcal{D}$ que intersecta a V, se queda contenido en U. Por el Lema 1.5.7 el abierto $\bigcup\{D \in \mathcal{D} | D \cap V\}$ cumple lo que buscamos.

Q.E.D.

1.6. Continuos homogéneos y un teorema de Effros

Definiremos ahora dos conceptos fundamentales para el trabajo. El primero es vital para el texto, *continuo homogéneo*, y el segundo es conocido como *la propiedad de Effros* que es muy utilizada en la teoría de los continuos. También veremos que ambos son equivalentes.

Definición 1.6.1. Un continuo X es *homogéneo* si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de X, existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(x_1) = x_2$.

Definición 1.6.2. Dados un continuo X, con métrica ρ, y $\varepsilon > 0$, diremos que un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ es un *ε-homeomorfismo* si $\rho(x, f(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in X$.

Lema 1.6.3. *Sean X un continuo, con métrica ρ, y $\varepsilon > 0$. Si $h : X \longrightarrow X$ es un ε-homeomorfismo, entonces h^{-1} también es un ε-homeomorfismo.*

Demostración. Sea $x \in X$. Tenemos que, por ser h un homeomorfismo, $x = h(h^{-1}(x))$. Así $\rho(x, h^{-1}(x)) = \rho(h(h^{-1}(x)), h^{-1}(x))$. Pero, como h sí es ε-homeomorfismo, $\rho(h(h^{-1}(x)), h^{-1}(x)) < \varepsilon$. Lo que completa la prueba.

Q.E.D.

El siguiente corolario es inmediato del resultado anterior.

Corolario 1.6.4. *Sean X un continuo con métrica ρ, g y h dos $\frac{\varepsilon}{2}$-homeomorfismos de X en sí mismo. Entonces, $h^{-1} \circ g$ es un ε-homeomorfismo.*

Definición 1.6.5. Sea $D = \{U_j\}_{j=1}^n$ una familia finita de abiertos de un espacio métrico X. Diremos que D es una *cadena de abiertos* si para cada j y l se tiene que $U_j \cap U_l \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - l| \leq 1$.

Lema 1.6.6. *Sean X un espacio conexo, x y y dos puntos en X y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe una cadena $\{U_j\}_{j=1}^n$ de elementos de $\mathcal{U}$ tales que $x \in U_1$ y $y \in U_n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{X} = \{z \in X|$ existen $k \in \mathbb{N}$ y una cadena $\{U_j\}_{j=1}^k$ de elementos de $\mathcal{U}$ tales que $x \in U_1$ y $z \in U_k\}$. Este conjunto no es vacío ya que x está en él, considerando una cadena cuyo único elemento sea un elemento de $\mathcal{U}$ que contenga a x. Demostraremos que $y \in \mathcal{X}$. $\mathcal{X}$ es un subconjunto abierto de X. Para ver esto, sea $z \in \mathcal{X}$. Entonces existe una cadena $\{U_j\}_{j=1}^m$ tal que $x \in U_1$ y $z \in U_m$. Todo elemento en U_m es elemento de $\mathcal{X}$. Para ver que $\mathcal{X}$ es cerrado tomemos $z \in Cl_X(\mathcal{X})$ y U_z un elemento de $\mathcal{U}$ que tiene a z. Notemos que $U_z \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$. Sea $z' \in U_k \cap \mathcal{X}$. Así, existe una cadena de $\{U_j\}_{j=1}^l$ tal que $x \in U_1$ y $z' \in U_l$. Sea $k = \text{mín}\{j \in \{1, \ldots, l\} | U_l \cap U_j \neq \emptyset\}$. Así $\{U_1, \ldots, U_k, U_{k+1} = U_l\}$ es una cadena de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $x \in U_1$ y $z \in U_{k+1}$. Luego, $z \in \mathcal{X}$.

Finalmente, tenemos que $\mathcal{X}$ es un conjunto tanto abierto como cerrado en un espacio conexo X. En consecuencia, $X = \mathcal{X}$ y, por tanto, $y \in \mathcal{X}$

Q.E.D.

Lema 1.6.7. *Sean X un espacio métrico (con métrica ρ) y compacto y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset X$ y diám$(A) < \delta$ entonces existe $j \in I$ tal que $A \subset U_i$. A dicho número δ se le conoce como un número de Lebesgue para la cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$.*

Demostración. Supongamos que tal número no existe. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto A_n de X tal que diám$(A_n) < \frac{1}{n}$ y A_n no está contenido en U_i, para toda $i \in I$. Sea $x_n \in A_n$. Así, se define una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Como X es compacto, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es convergente a un punto $x \in X$.

Como $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como U_i es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \subset U_i$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, para cada $y \in A_n$, $\rho(y, x) < \rho(y, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Así $A_n \subset \mathcal{V}_\varepsilon(x) \subset U_i$. Pero esto es una clara contradicción. Luego, debe existir un número de Lebesgue.

Q.E.D.

Definición 1.6.8. Sea G un grupo, el cual tiene una topología que cumple que las funciones $\pi : G \times G \longrightarrow G$, con $\pi((g_1, g_2)) = g_1 \cdot g_2$, y $\zeta : G \longrightarrow G$, donde $\zeta(g) = g^{-1}$, son funciones continuas. Entonces diremos que G es un *grupo topológico*.

Definición 1.6.9. Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico. G es un *grupo de transformación topológico* si existe una función continua $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ denotada por $\cdot((g, x)) = g \cdot x$, tal que $e \cdot x = x$ para toda $x \in X$, donde e denota a la identidad en G, y se cumple que $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para cualesquiera dos elementos, h y g de G y $x \in X$. Para cada $x \in X$, definimos los conjuntos: $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$ llamado *el grupo de isotropía de* x y $Gx = \{g \cdot x | g \in G\}$ llamado *la órbita de* x.

Si consideramos el espacio cociente G/G_x, con su respectiva topología cociente, la función con dominio G/G_x y codominio Gx, la cual manda a un elemento gG_x en $g \cdot x$, es biyectiva y continua, [25, Lemma 4.2.22].

Definición 1.6.10. Sean X un espacio topológico y Y un espacio métrico. Supongamos que la función $f : X \longrightarrow Y$ es continua. Diremos que f es *acotada* si existen $p \in Y$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(X) \subset Cl_X(\mathcal{V}_\varepsilon(p))$.

Definición 1.6.11. Sean X un espacio topológico y Y un espacio métrico con métrica ρ. Sean f y g dos funciones continuas y acotadas que van de X en Y. Definimos la siguiente distancia, conocida como *métrica de la convergencia uniforme* como sigue: $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X}\{\rho(f(x), g(x))\}$.

Definición 1.6.12. Un continuo X, con métrica ρ, tiene la *propiedad de Effros* si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x_1 y x_2 son dos puntos de X y $\rho(x_1, x_2) < \delta$, entonces existe un ε-homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(x_1) = x_2$. El número δ es llamado un *número de Effros* para la ε dada.

El siguiente resultado es muy importante en la teoría de los continuos.

Teorema 1.6.13. *Sea X un continuo con métrica ρ. Entonces X posee la propiedad de Effros si y sólo si es homogéneo.*

Demostración. Supongamos que X es homogéneo y sea G el grupo de homeomorfismos de X en X. Entonces, para todo elemento $x \in X$, la órbita de x es X. Sea $x \in X$ entonces, la función $T_x : G \longrightarrow X$ con regla de correspondencia $T_x(g) = g(x)$, siendo la composición de la función continua y abierta(por [25, Lemma 4.2.9]) de G en G/G_x(con regla de correspondencia tal que $g \in G$ es mandada a su propia clase en G/G_x) y el homeomorfismo (por [25, Lema 4.2.25]) de G/G_x en X (que manda a toda clase de G/G_x en la función aplicada en x), es una función continua y abierta de G en X. Sea $\varepsilon > 0$, entonces el conjunto compuesto por todos los elementos $g \in G$ tales que $\rho(x, g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $x \in X$ es abierto y lo denotaremos como U. Definimos W como el conjunto abierto $T_x[U]$. Como la identidad e es un elemento de U y $T_x(e) = x$, tenemos que $x \in W$. Así, existe $\delta_x > 0$ tal que $\mathcal{V}_{\delta_x}(x) \subset W$. Supongamos que $y \in \mathcal{V}_{\delta_x}(x)$. Entonces, como X es homogéneo, existe $h \in G$ tal que $h(x) = y$. Notemos que el conjunto $\{\mathcal{V}_{\delta_x}(x) | x \in X\}$ forma una cubierta abierta de X. Como X es compacto, por el Lema 1.6.7, existe un número de Lebesgue $\delta > 0$ para esta cubierta. Sean y y z elementos de X tales que $\rho(y, z) < \delta$. Entonces existe $x \in X$ tal que tanto y como z pertenecen a $\mathcal{V}_{\delta_x}(x)$.

Así, existen dos elementos de U, f y g, tales que $T_x(f) = y$ y $T_x(g) = z$. Luego, el homeomorfismo $h = g \circ f^{-1}$ tiene la propiedad de que $h(y) = z$ y $\rho(x, h(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ pues:

$$\rho(x, h(x)) = \rho(x, g(f^{-1}(x))) \leq \rho(x, f^{-1}(x)) + \rho(f^{-1}(x), g(f^{-1}(x))) =$$

$$\rho(f(f^{-1}(x)), f^{-1}(x)) + \rho(f^{-1}(x), g(f^{-1}(x))) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, X posee la propiedad de Effros.

Supongamos que X posee la propiedad de Effros. Sean x y y dos elementos de X y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un número de Effros $\delta > 0$ para esa $\varepsilon > 0$. Como X es un espacio conexo y $\mathcal{U} = \{\mathcal{V}_{\frac{\delta}{4}}(x)\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta de X, por el Lema 1.6.6, existe una cantidad finita de elementos de X, digamos $x'_1, \ldots, x'_n$ tales que $\{\mathcal{V}_{\frac{\delta}{4}}(x'_i)\}_{i=1}^n$ es una cadena de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{V}_{\frac{\delta}{2}}(x'_1)$ y $y \in \mathcal{V}_{\frac{\delta}{2}}(x'_n)$. Así, haciendo $x_1 = x, x_2 = x'_2, \ldots, x_{n-1} = x'_{n-1}, x_n = y$, tenemos que $\rho(x_{j-1}, x_j) < \delta$ para cada $j \in \{2, \ldots, n\}$. De esta forma, para cada $j \in \{2, \ldots, n\}$, existe un homeomorfismo de X en él mismo, h_j, tal que $h_j(x_{j-1}) = x_j$. Así, $h = h_2 \circ \cdots \circ h_n$ es un homeomorfismo de X en sí mismo tal que $h(x) = y$. Luego, X es homogéneo.

Q.E.D.

1.7. Categoría de Baire

A continuación introduciremos un resultado mejor conocido como el *Teorema de la categoría de Baire*. Comenzaremos con las definiciones y resutados necesarios.

Lema 1.7.1. *Si X es un espacio métrico, completo, con métrica ρ, y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ es densa en X.*

Demostración. Sea U un abierto de X. Demostraremos que $U \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n) \neq \emptyset$.

Como D_1 es un subconjunto denso y abierto de X, $D_1 \cap U$ es un subconjunto abierto y no vacío en X y existen $x_1 \in D_1 \cap U$ y $\varepsilon_1 > 0$ tales que $\varepsilon_1 < 1$ y $Cl_X(\mathcal{V}_{\varepsilon_1}(x_1)) \subset D_1 \cap U$. Como D_2 es abierto y denso en X y $\mathcal{V}_{\varepsilon_1}(x_1)$ es abierto en X, $D_2 \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_1}(x_1) \neq \emptyset$. Entonces, existen $x_2 \in D_2 \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_1}(x_1)$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ y $Cl_X(\mathcal{V}_{\varepsilon_2}(x_2)) \subset D_2 \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_1}(x_1)$. Continuando con este proceso, tenemos que $\{Cl_X(\mathcal{V}_{\varepsilon_n}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X, cuyos diámetros tienden a cero. Así, por el Lema 1.3.4, existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Cl_X(\mathcal{V}_{\varepsilon_n}(x_n)) \subset (\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n) \cap U$. Por lo que, $U \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n) \neq \emptyset$.

Q.E.D.

Definición 1.7.2. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces se dice que A es *denso en ninguna parte en* X si $Int_X(Cl_X(A)) = \emptyset$.

Definición 1.7.3. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Diremos que A es de la *primera categoría en* X si es la unión numerable de subconjuntos de X densos en ninguna parte en X. Un subconjunto de X que no es de la primera categoría en X será llamado de la *segunda categoría* en X.

Ahora estamos listos para probar el Teorema de la categoría de Baire.

Teorema 1.7.4. *Si X es un espacio métrico, completo y no degenerado, entonces X es de la segunda categoría.*

Demostración. Supongamos que X es de la primera categoría. Entonces existe una cantidad numerable de subconjuntos densos en ninguna parte, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como para todo número $n \in \mathbb{N}$ se tiene que A_n es denso en ninguna parte, resulta que $X \setminus Cl_X(A_n)$ es un abierto denso en X. Por el Lema 1.7.1, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus Cl_X(A_n)) \neq \emptyset$. Por otro lado, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De donde tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus Cl_X(A_n)) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Cl_X(A_n) \subset X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus X = \emptyset$, lo cual es, claramente, una contradicción. Por ende, X es de la segunda categoría.
Q.E.D.

1.8. Continuos irreducibles

Definición 1.8.1. Sean X un continuo y H y J dos subconjuntos cerrados de X. Un subcontinuo K de X es *irreducible* entre H y J si $H \cap K \neq \emptyset$, $J \cap K \neq \emptyset$ y, para cualquier subcontinuo propio L de K, se tiene que $H \cap L = \emptyset$ o $J \cap L = \emptyset$. Diremos que un subconjunto cerrado A de un continuo X es un *conjunto de irreducibilidad de* X si existe un punto $x \in X$ tal que X es irreducible entre $\{x\}$ y A. Finalmente, diremos que un punto $p \in X$ es un *punto de irreducibilidad* si existe un punto q de X tal que X es irreducible entre $\{p\}$ y $\{q\}$. Si p y q son dos puntos en un continuo X que es irreducible entre $\{p\}$ y $\{q\}$ diremos, simplemente, que X es irreducible entre p y q.

Lema 1.8.2. *Sea X un continuo descomponible e irreducible entre dos de sus subconjuntos cerrados A y B. Entonces ocurren las siguientes afirmaciones:*

a) Si $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 subcontinuos de X, entonces uno de los conjuntos, A o B, se queda contenido en $X_1 \setminus X_2$ y el otro en $X_2 \setminus X_1$;
b) Si $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 subcontinuos de X, entonces $X_1 \setminus X_2$ es conexo;
c) Si $X = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 subcontinuos de X, entonces $Cl_X(X_1 \setminus X_2)$ es un subcontinuo en X irreducible entre A y $Fr_X(X_1 \setminus X_2)$. En particular, será un subcontinuo irreducible entre A y X_2; y
d) Si C es un subcontinuo de X que lo separa entonces $X \setminus C = U \cup V$, con U y V abiertos no vacíos y ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$; en particular C no intersecta ni A ni a B. Más aún U y V son conexos.

Demostración. *a)* Sin perder generalidad, supongamos que $A \cap X_1 \neq \emptyset$ (esto puede suponerse por que si ni B ni A intersectaran a X_1, ambos quedarían contenidos en X_2, lo cual sería una contradicción al hecho de que X es irreducible entre A y B). Entonces B no puede intersectar a X_1 pues X es irreducible entre A y B. Así $B \subset X \setminus X_1 \subset X_2$. De manera análoga llegamos a que $A \subset X_1$.

b) Por el inciso *a)* de este lema y, sin perder generalidad, podemos suponer que $B \subset X_2 \setminus X_1$ y $A \subset X_1 \setminus X_2$. Si $X_1 \setminus X_2 = X \setminus X_2$ no fuera conexo, tendríamos que $X \setminus X_2 = U \cup V$, con U y V dos abiertos ajenos y no vacíos de X. Entonces, por el Lema 1.4.2, $X_2 \cup U$ y $X_2 \cup V$ son subcontinuos de X, X_U y X_V respectivamente. Como $A \subset X_1 \setminus X_2$, A debe intersectar a X_U o a X_V, sin perder generalidad supongamos que intersecta al primero. Pero entonces tanto A como B, intersectarían a X_U, lo cual es una contradicción, pues X es irreducible entre A y B. Luego $X_1 \setminus X_2$ es conexo.

c) Es claro que $Fr_X(X_1 \setminus X_2) \subset X_2$. Por el inciso *b)* de este lema, $Cl_X(X_1 \setminus X_2)$ es un subcontinuo de X. Supongamos que existe un subcontinuo propio de $Cl_X(X_1 \setminus X_2)$, F, que intersecta tanto a A como a $Fr_X(X_1 \setminus X_2)$. Entonces $F \cup X_2$ es un subcontinuo de X que intersecta tanto a A como a B, pero X es irreducible entre A y B. Así, $X = X_1 \cup X_2 = F \cup X_2$, luego $X_1 \setminus X_2 = F \setminus X_2 \subset F$. Finalmente, $Cl_X(X_1 \setminus X_2) \subset F$ y, por tanto, $F = Cl_X(X_1 \setminus X_2)$. Así, $Cl_X(X_1 \setminus X_2)$ es irreducible entre A y $Fr_X(X_1 \setminus X_2)$ y, como $Fr_X(X_1 \setminus X_2) \subset X_2$ y $Cl_X(X_1 \setminus X_2) \cap (X_2 \setminus Fr_X(X_2)) = \emptyset$, también será irreducible entre A y X_2.

d) Supongamos que $X \setminus C = U \cup V$, con U y V subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X. Por el Lema 1.4.2, $C \cup U$ y $C \cup V$ son subcontinuos de X. Al ser X irreducible entre A y B, tenemos que ni $C \cup U$ ni $C \cup V$ intersectan tanto a A como a B al mismo tiempo. En particular, C no puede intersectar a ninguno de los dos conjuntos. Sin perder generalidad, $A \subset U$ y $B \subset V$. Sea D una componente de U que contiene a un punto de A. Entonces existe un punto de la frontera de D contenido en C, esto por el Corolario 1.1.13. Entonces $D \cup C \cup V$ es un subcontinuo de X que intersecta tanto a A como B. Como X es irreducible entre A y B, $X = D \cup C \cup V$, pero entonces $D = U$, de donde U es conexo. De manera análoga tenemos que V es conexo.

Q.E.D.

1.9. Conceptos de conexidad local

Definición 1.9.1. Un continuo X es *casi conexo en pequeño en un punto* $p \in X$ si cada subconjunto abierto de X que contiene a p contiene un subcontinuo con interior no vacío. Diremos que X es *casi conexo en pequeño* si es casi conexo en pequeño en todos sus puntos.

Definición 1.9.2. Un continuo X es *conexo en pequeño en un punto* $p \in X$ si existe una base local de vecindades conexas alrededor de p. Diremos que un continuo es *conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 1.9.3. Consideremos el cono sobre la cerradura de la sucesión armónica $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Este conjunto es conocido como el *abanico armóni-*

co. Notemos que el abanico armónico es casi conexo en pequeño en todos sus puntos, esto se debe a que si consideramos un punto p y un abierto U que lo contenga, entonces U va a contener un intervalo abierto, dentro del cual podremos encontrar un intervalo cerrado. Este último es un subcontinuo con interior no vacío del abanico armónico (Figura 1.1). En el mismo ejemplo, si p es un punto sobre la barra límite diferente del vértice, entonces el abanico armónico no es conexo en pequeño en p. Cualquier vecindad, lo suficientemente pequeña, alrededor de p tendrá a una cantidad infinita de componentes, por lo que no puede haber vecindades conexas alrededor de p.

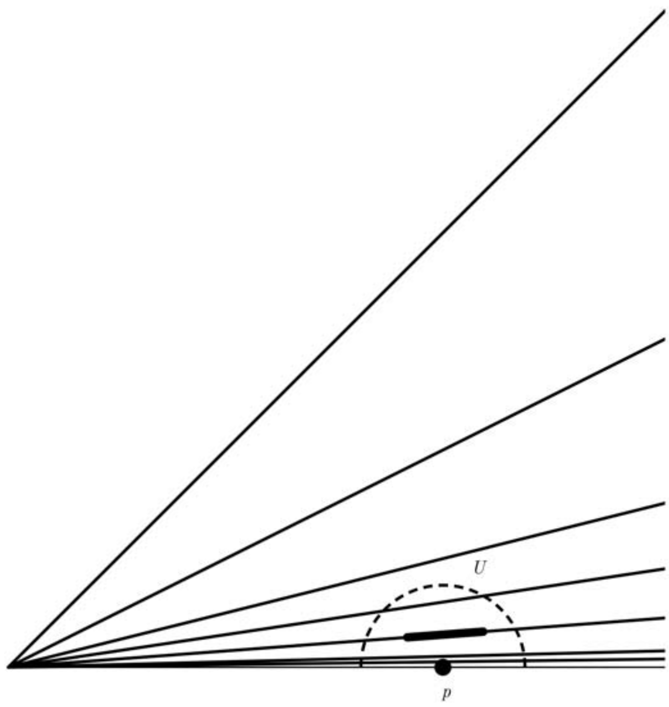

Figura 1.1. Imagen del abanico armónico donde consideramos p un punto sobre la barra límite y un abierto U que lo contiene. La linea remarcada representa un continuo con interior no vacío dentro del interior de una vecindad alrededor de p.

Ejemplo 1.9.4. Ahora considredemos una sucesión decreciente de abanicos armónicos cuyo diámetro tienda a cero y se intersecten solamente en el punto extremo de su barra límite que no lo desconecta, es decir, una sucesión de abanicos armónicos convergente a un punto p (Figura 1.2). Si consideramos un abierto U alrededor de p podemos encontrar un subcontinuo que contenga a p en su interior y que esté contenido en U. Así, este espacio es conexo en pequeño en p.

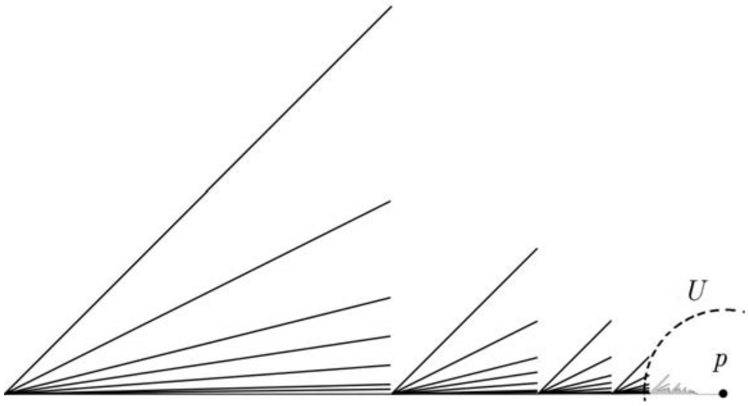

Figura 1.2. U es un abierto que contiene a p. El continuo resaltado de color gris representa un subcontinuo del espacio que contiene a p en su interior.

De igual manera que en el Ejemplo 1.9.3, existen abiertos lo suficientemente pequeños que poseen una cantidad numerable de componentes.

Daremos un teorema que caracteriza a los continuos conexos en pequeño en alguno de sus puntos.

Teorema 1.9.5. *Si X es un continuo y $x \in X$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es conexo en pequeño en x.
(b) Para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y con la propiedad de que para cada $y \in V$, existe un subconjunto conexo C_y tal que $\{x, y\} \subset C_y \subset U$.
(c) Para cada subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subcontinuo de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset U$.

Demostración. Supongamos que X es conexo en pequeño en x. Demostraremos (b). Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Por hipótesis, existe una vecindad conexa, W, alrededor de x tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset U$. Sea $V = Int_X(W)$. Para todo $y \in Int_X(W)$, $C_y = W$ es un conexo que contiene tanto a x como a y y $C_y \subset U$.

Supongamos (b). Demostraremos (c). Sean U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y U' un subconjunto abierto de X tal que $x \in U' \subset Cl_X(U') \subset U$. Por hipótesis, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subset U'$ y, para cada $y \in V$, existe un subconjunto conexo C_y de X tal que $\{x, y\} \subset C_y \subset U'$. Sea $W = Cl_X(\bigcup_{y \in V} C_y)$. Entonces W es un subcontinuo de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset U$.

Supongamos (c). Demostraremos que X es conexo en pequeño en x. Sea U un abierto de X que contenga a x. Entonces, por hipótesis, existe un subcontinuo de X que contiene a x en su interior. Así, la colección de subcontinuos que contienen a x en su interior es una base local de vecindades conexas alrededor de x. Luego, X es conexo en pequeño en x.

Q.E.D.

Definición 1.9.6. Un continuo X es *localmente conexo en un punto* $p \in X$ si existe una base local de abiertos conexos alrededor de p. Un continuo será *localmente conexo* si es localmente conexo en todos sus puntos.

Ejemplo 1.9.7. Un ejemplo sencillo de espacio localmente conexo es la curva cerrada simple. Las vecindades locales alrededor de cualquier punto pueden ser vistos como intervalos abiertos, los cuales son conexos. Sin embargo, a veces, es más interesante dar ejemplos de espacios donde no se cumple la propiedad definida. Los continuos utilizados para los Ejemplos 1.9.3 y 1.9.4 (Figuras 1.1 y 1.2 respectivamente) son ejemplos de continuos que no son localmente conexos.

Igual que para los continuos conexos en pequeño, daremos una caracterización de los continuos localmente conexos.

Teorema 1.9.8. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si las componentes de los subconjuntos abiertos de X son abiertas.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un subconjunto abierto de X y C una componente de U. Para cada punto $x \in C$, existe un subconjunto abierto y conexo V_x de U que contiene a x. Entonces, como C es la componente de x en U, $V_x \subset C$. Por lo tanto, C es abierto.

Supongamos que las componentes de abiertos en X son abiertas en X. Sean $x \in X$ y U un abierto de X que contiene a x. Por hipótesis, la componente, C, de U que contiene a x es abierta y, por lo tanto, será un abierto conexo tal que $x \in C \subset U$. Luego X es localmente conexo.

Q.E.D.

El siguiente resultado es un ejemplo de cómo es que se relaciona el concepto de ser localmente conexo y ser conexo en pequeño.

Teorema 1.9.9. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño.*

Demostración. Es claro que si un continuo es localmente conexo, es conexo en pequeño.

Supongamos que X es conexo en pequeño. Sean U un subconjunto abierto de X y C una componente de U. Consideremos $x \in C$. Por el Teorema 1.9.5, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset U$. Como W es un conexo contenido en U y $W \cap C \neq \emptyset$, $W \subset C$. Entonces x es un punto interior de C y, por lo tanto, C es abierta en X. Finalmente, por el Teorema 1.9.8, X es localmente conexo.

Q.E.D.

Definición 1.9.10. Sean X un continuo y p un punto de éste. Diremos que X es *semilocalmente conexo en* p si para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ sólo tiene una cantidad finita de componentes. Diremos que un espacio X es *semilocalmente conexo* si es semilocalmente conexo en todos sus puntos.

Definición 1.9.11. Un continuo X es *colocalmente conexo en un punto p* si existe una base local de abiertos alrededor de p cuyos complementos son conexos. Diremos que X es *colocalmente conexo* si es colocalmente conexo en todos sus puntos.

Observación 1.9.12. Notemos que todo conjunto colocalmente conexo en uno de sus puntos será semilocalmente conexo en ese mismo punto.

Definición 1.9.13. Sea X un espacio métrico. Consideremos el siguiente conjunto $\mathcal{G} = \{\{(x,t)\}|x \in X \text{ y } t \in (0,1)\} \cup \{(X \times \{0\}), (X \times \{1\})\}$. $\mathcal{G}$ es una descomposición de $X \times [0,1]$ y al espacio cociente $X \times [0,1]/\mathcal{G}$ le llamaremos *suspención de X*.

Ejemplo 1.9.14. VUneremos un ejemplo de un continuo que es semilocalmente conexo y colocalmente conexo es el siguiente: Consideremos la suspensión sobre el conjunto de Cantor Figura 1.3. Cualquier punto p que consideremos ahí y cualquier vecindad que lo contenga tendrá complemento conexo.

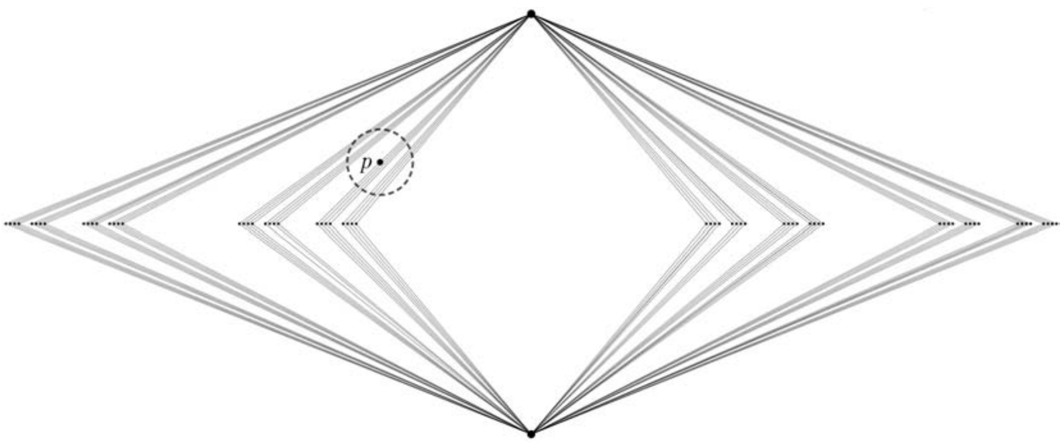

Figura 1.3. Tenemos una vecindad alrededor de p cuyo complemento resulta ser un subconjunto conexo del continuo.

Definición 1.9.15. Un punto p de un continuo X es un *punto de corte* si $X \setminus \{p\}$ es disconexo.

Definición 1.9.16. Un punto p de un continuo X es un *punto de separación local de X* si existe una vecindad compacta R de p en X tal que $R \setminus \{p\} = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap C \neq \emptyset$ y $M_2 \cap C \neq \emptyset$, donde M_1 y M_2 son conjuntos mutuamente separados y C es la componente de R que contiene a p.

1.10. La función $\mathcal{T}$ de Jones

Ahora, vamos a introducir una función definida por F. Burton Jones en su artículo *Concerning Non-aposyndetic Continua* [16]. Esta función, conocida como *la Función $\mathcal{T}$ de Jones*, posee propiedades muy importantes para la teoría de los continuos. Usaremos algunos resultados correspondientes a esta función.

Sin embargo, si se desea conocer más sobre esta función se puede consultar el Capítulo 3 de [25].

Definición 1.10.1. Un continuo X es *aposindético en un punto* $p \in X$ si para cada punto $q \in X \setminus \{p\}$, existe un subcontinuo de X que contiene a p en su interior y no contiene a q. Un continuo será *aposindético* si es aposindético en cada uno de sus puntos.

Definición 1.10.2. Sea X un continuo, definimos la función $\mathcal{T} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X, como sigue. Si A es un subconjunto de X, entonces:

$$\mathcal{T}(A) = X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \setminus A \text{ tal que } x \in Int_X(W)\}.$$

Esta función es mejor conocida como la *función* $\mathcal{T}$ *de Jones*. Como observación, notemos que $\mathcal{T}(A)$ es un subconjunto cerrado de X.

Ejemplo 1.10.3. Consideremos la suspensión sobre la cerradura de la sucesión armónica $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Este continuo es un ejemplo de un espacio aposindético en los puntos de su barra límite (de hecho lo es en todos sus puntos).

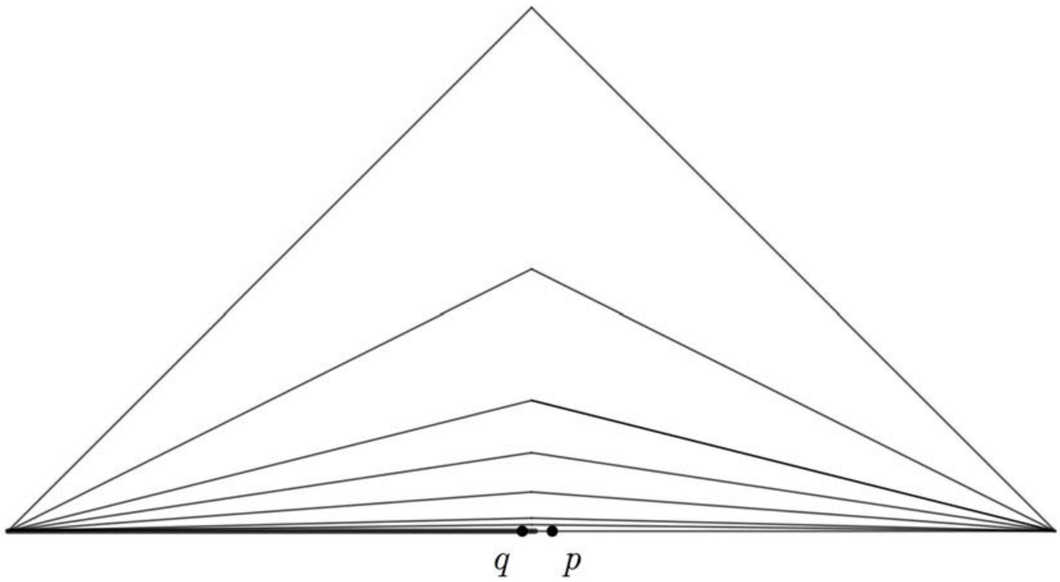

Figura 1.4. q es un punto en $X \setminus \{p\}$ y la linea resaltada representa un subcontinuo en $X \setminus \{p\}$ que contiene q en su interior.

Las siguientes observaciones y resultados nos sirven para entender la relación entre aposindesis y la función $\mathcal{T}$ de Jones. Además de relacionar estos conceptos con el de semilocalmente conexo.

Lema 1.10.4. *Sean A un subconjunto de un continuo X y p y q dos elementos X. Entonces $A \subset \mathcal{T}(A)$ y X es aposindético en p con respecto a q si y sólo si $p \in X \setminus \mathcal{T}(\{q\})$.*

Demostración. La primera parte es clara, así que sólo probaremos que X es aposindético en p con respecto a q si y sólo si $p \in X \setminus \mathcal{T}(\{q\})$. Supongamos que X es aposindético en p con respecto a q. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W)$ y, como W no contiene a q, $W \subset X \setminus \{q\}$. Entonces, por definición, $p \in X \setminus \mathcal{T}(\{q\})$.

Supongamos que $p \in X \setminus \mathcal{T}(\{q\})$, entonces existe un subcontinuo W que no contiene a q tal que $p \in Int_X(W)$. Por lo que X es aposindético en p con respecto a q.

Q.E.D.

Lema 1.10.5. *Un continuo X es aposindético si y sólo si $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ para todo elemento p de X.*

Demostración. Supongamos que X es aposindético. Sea $p \in X$. Entonces, para cada $q \in X \setminus \{p\}$, X es aposindético en q con respecto a p. Así, por el Lema 1.10.4, $q \in X \setminus \mathcal{T}(\{p\})$ y $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$.

Supongamos que $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$ para cada $x \in X$. Sean p y q dos elementos de X tales que $p \neq q$. Como $\mathcal{T}(\{q\}) = \{q\}$, $p \in X \setminus \mathcal{T}(\{q\})$. Así, por el Lema 1.10.4, X es aposindético en p con respecto a q. Luego, X es aposindético.

Q.E.D.

Lema 1.10.6. *Sea X un continuo. Si $p \in X$, entonces X es semilocalmente conexo en p si y sólo si $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$.*

Demostración. Supongamos que X es semilocalmente conexo en p. Por el Lema 1.10.4, $\{p\} \subset \mathcal{T}(\{p\})$. Sean $q \in X \setminus \mathcal{T}(\{p\})$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$ y $q \in X \setminus Cl_X(U)$. Como X es semilocalmente conexo en p, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ sólo tiene una cantidad finita de componentes. Por el Lema 1.1.10, q está en el interior de la componente de $X \setminus V$ que lo contiene, por lo tanto $Cl_X(C_q)$, donde C_q es la componente $X \setminus V$ que contiene a q, es un continuo que tiene a q en su interior y no contiene p. Así, $q \in X \setminus \mathcal{T}(\{p\})$. Luego, $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{T}(\{p\}) = \{p\}$. Sea U un abierto de X que contiene a p. Entonces para cada $q \in X \setminus U$ existe un subcontinuo W_q de X tal que $q \in Int_X(W_q) \subset W_q \subset X \setminus \{p\}$. Notemos que $\{Int_X(W_q) | q \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$, el cual es compacto. Entonces existen $q_1, \ldots, q_n$ en $X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^{n} Int_X(W_{q_i})$. Sea $V = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} W_{q_i})$. Entonces V es un subconjunto abierto de X tal que $p \in V \subset U$ y $X \setminus V$ sólo posee una cantidad finita de componentes. Finalmente X es semilocalmente conexo en p.

Q.E.D.

Corolario 1.10.7. *Un continuo X es semilocalmente conexo si y sólo si es aposindético.*

Demostración. Se sigue de los Lemas 1.10.5 y 1.10.6

Q.E.D.

Ahora daremos un resultado sobre la función $\mathcal{T}$ de Jones con el Teorema de Effros.

Teorema 1.10.8. *Si X es un continuo homogéneo, con métrica ρ, entonces para cada subconjunto cerrado A de X, $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}^2(A)$.*

Demostración. Por el Leman 1.10.4, $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}^2(A)$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \rho(W, A)$ y $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \subset Int_X(W)$. Por el Teorema 1.6.13, existe $\delta \in (0, \varepsilon)$, un número de Effros para ε. Como W es compacto, existen $w_1, \ldots, w_n$ en W, tales que $W \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{V}_\delta(w_i)$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces para cada $y \in \mathcal{V}_\delta(w_i)$, existe un ε-homeomorfismo h_y de X en X tal que $h_y(w_i) = y$. Si pasara que $y = w_i$, entonces podemos seleccionar h_y como la identidad en X. Sea $M_i = Cl_X(\bigcup\limits_{y \in \mathcal{V}_\delta(w_i)} h_y(W))$. Entonces M_i es un subcontinuo de X tal que $w_i \in \mathcal{V}_\delta(w_i) \subset M_i \subset X \setminus A$. Sea $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$. Entonces M es un subcontinuo de X y $W \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{V}_\delta(w_i) \subset Int_X(M) \subset M \subset X \setminus A$. Así, $Int_X(M) \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$. Como $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$, $x \in X \setminus \mathcal{T}^2(A)$. Luego $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}^2(A)$.

Q.E.D.

Lema 1.10.9. *Sean X y Y dos continuos homogéneos. Entonces $X \times Y$ con la topología producto es homogéneo*

Demostración. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos en $X \times Y$. Como X y Y sí son homogéneos, existen h_1 y h_2 homeomorfismos de X en X y de Y en Y, respectivamente, tales que $h_1(x_1) = x_2$ y $h_2(y_1) = y_2$. Como el producto de homeomorfismos es homeomorfismos, $h_1 \times h_2 : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ es también un homeomorfismo y $h_1 \times h_2(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Q.E.D.

Observación 1.10.10. El Teorema 1.10.8 no se puede extender a todos los subconjuntos del continuo homogéneo X. Sean S^1 la circunferencia unitaria, Σ_2 el **2**-solenoide (Ver definición 4.2.2) y $X = S^1 \times \Sigma_2$. Entonces, por el Lema 1.10.9, X es un continuo homogéneo y, por [26, Theorem 3.3], existe un subconjunto no cerrado de X tal que $\mathcal{T}^2(A) \neq \mathcal{T}(A)$.

1.11. Composantes y continuos indescomponibles

Definición 1.11.1. Sean X un continuo y x un punto de X. Definimos la *composante* de x en X como la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a x. La composante de un punto x se denotará como K_x.

Lema 1.11.2. *Si X es un continuo descomponible, entonces X es una composante de algún punto de X.*

Demostración. Como X es descomponible, existen dos subcontinuos propios, A y B de X tales que $X = A \cup B$. Como X es conexo, sea $x \in A \cap B$. Entonces

$A \subset K_x$ y $B \subset K_x$. Así, $X = A \cup B \subset K_x$, por lo que $X = K_x$. Luego, X es una composante de algún punto de X.

Q.E.D.

Lema 1.11.3. *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces p es un punto de irreducibilidad de X si y sólo si $K_p \neq X$.*

Demostración. Supongamos que p es un punto de irreducibilidad de X. Entonces existe $q \in X$ tal que X es irreducible entre p y q. Así, ningún subcontinuo propio de X contiene tanto a p como a q. Por lo tanto, $K_p \neq X$.

Supongamos que $K_p \neq X$. Entonces existe $q \in X$ tal que ningún subcontinuo propio de X contiene tanto a p como a q. Luego, X es irreducible entre p y q.

Q.E.D.

Lema 1.11.4. *Sean X un continuo, $x \in X$ y K_x la composante de x en X. Entonces K_x es densa en X.*

Demostración. Sean U un abierto de X, $x \in X \setminus U$ y $x' \in U$. Como X es métrico, es normal (Proposición 1.1.6) y, por lo tanto, existe un abierto V de X tal que $x' \in V \subset Cl_X(V) \subset U$. Sea C la componente de $X \setminus V$ que contiene a x. Notemos que C es un subcontinuo propio de X que tiene a x. Por lo tanto, $C \subset K_x$. Por otro lado, por el Teorema del borde en la frontera (Teorema 1.1.12), $C \cap Fr_X(V) \neq \emptyset$. Así, $\emptyset \neq C \cap Fr_X(V) \subset C \cap Cl_X(V) \subset K_x \cap U$. Luego K_x es densa en X.

Q.E.D.

Lema 1.11.5. *Si X un espacio métrico y compacto, entonces X tiene una base numerable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathcal{K}_n = \{\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(x) | x \in X\}$. Es claro que $\mathcal{K}_n$ es una cubierta abierta de X. Como éste es compacto, existe una subcubierta finita de $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}'_n$. Veamos que $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}'_n$ es una base numerable de X. Al ser una unión numerable de conjuntos finitos, $\mathcal{B}$ es un conjunto numerable. Veamos que es base. Sean $x \in X$ y U un abierto de X que lo contiene. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V}_{\frac{1}{k}}(x) \subset U$. Como $\mathcal{K}'_{2k}$ es una cubierta abierta de X, existe $p \in X$ tal que $x \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2k}}(p)$. Finalmente, $\mathcal{V}_{\frac{1}{2k}(p)}$ es un elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a x y se queda contenido en U.

Q.E.D.

Lema 1.11.6. *Sea A un subconjunto de un espacio X con una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\mathcal{B}' = \{A \cap U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable para A, visto como espacio con la topología relativa.*

Demostración. Como $\{A \cap U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es numerable, bastará probar que es una base de A. Sean $x \in A$ y U un abierto de X tal que $x \in U \cap A$. Sabemos que existe $U_k \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_k \subset U$. Así $x \in U_k \cap A \subset U \cap A$. Luego, $\mathcal{B}'$ es una base numerable de A.

Q.E.D.

Lema 1.11.7. *Si X es un continuo, entonces cualquier composante de X es la unión de una cantidad numerable de subcontinuos propios de X.*

Demostración. Sea K_p la composante, en X, de un punto p. Como X es métrico y compacto, por los Lemas 1.11.5 y 1.11.6, el conjunto $X \setminus \{p\}$ tiene una base numerable. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal base numerable. Para cada i, denotaremos a la componente de $X \setminus U_i$ que contiene a p como C_i. C_i es un subcontinuo propio de X que tiene como elemento a p y, por lo tanto, está contenido en K_p. Sea x un punto en K_p. Existe un subcontinuo propio A de X que contiene tanto a p como a x. Sea q un elemento de $X \setminus A$. Entonces hay un índice j tal que $q \in U_j$ y U_j está contenido en $X \setminus A$, pues $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base numerable de $X \setminus \{p\}$ y X es normal. Así, A es un conexo que contiene a x y a p y está contenido en $X \setminus U_j$ y, por lo tanto, A está contenido en C_j. Por lo tanto, todo elemento de K_p está contenido en algún C_i. Finalmente, $K_p = \bigcup C_j$.

Q.E.D.

Lema 1.11.8. *Si X es un continuo indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes ajenas dos a dos.*

Demostración. Primero veamos que X tiene una cantidad no numerable de composantes. Supongamos que X contiene sólo una cantidad a lo más numerable de composantes. Al ser X un espacio métrico y compacto, por el Teorema 1.3.5, X es completo y, por el Teorema 1.7.4, X es de la segunda categoría. Sabemos por el Lema 1.11.7, que cada composante es la unión numerable de subcontinuos propios de X y, por el Corolario 1.4.4, tenemos que todos los subcontinuos propios de X tienen interior vacío. Al ser cerrados, son densos en ninguna parte. Así, al ser X la unión de sus composantes, sería la unión de una cantidad numerable de subonjuntos densos en ninguna parte. Por lo que X sería de la primera categoría, lo cual es absurdo. Luego X debe de tener una cantidad no numerable de composantes.

Ahora veremos que las composantes de X son ajenas. Sean a y b elementos de X y K_a y K_b sus respectivas composantes. Supongamos que existe $x \in K_a \cap K_b$. Como x es un elemento de K_a, existe un subcontinuo propio S_1 de X que contiene tanto a x como a a. Análogamente, existe un subcontinuo propio S_2, en la composante K_b, que contiene tanto a x como a b. Como X es indescomponible, $S = S_1 \cup S_2$ es un subcontinuo propio de X que contiene tanto a a como a b. Así, $a \in K_b$ y, por tanto, $K_a \subset K_b$. Análogamente $K_b \subset K_a$. Finalmente $K_a = K_b$.

Q.E.D.

Corolario 1.11.9. *Si X es un continuo indescomponible, entonces sus composantes tienen interior vacío.*

Demostración. Sean $x \in X$ y K_x su composante. Supongamos que existe un abierto de X, U, tal que $U \subset K_x$. Sea K otra composante de X, por el Lema 1.11.4, $K \cap U \neq \emptyset$. Entonces $K \cap K_x \neq \emptyset$. Pero esto es una clara contradicción al Lema 1.11.8.

Q.E.D.

Definición 1.11.10. Un continuo X es llamado un *triodo* si contiene un subcontinuo Z tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres subconjuntos ajenos dos a dos, abiertos y no vacíos. Cuando un continuo no posee ningún triodo diremos que es *atriódico*.

Definición 1.11.11. Un continuo X es *unicoherente* si cada vez que $X = E \cup F$, donde E y F son subcontinuos de X, se tiene que $E \cap F$ es conexo. Diremos que un continuo es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo de él es unicoherente.

Teorema 1.11.12. *Si X es un continuo homogéneo indescomponible en el plano, entonces es atriódico y hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Como X es indescomponible, por el Lema 1.11.8, X tiene una cantidad no numerable de composantes ajenas dos a dos. Si X tuviera incluido un triodo, al ser homogéneo, existiría una cantidad no numerable de triodos ajenos dos a dos (uno por cada composante). Pero un continuo en el plano no puede contener una cantidad no numerable de triodos ajenos [29, Theorem 84, pág. 222]. De donde X es atriódico. Supongamos que X contiene un subcontinuo F que no es unicoherente. Entonces, como X es homogéneo y, por el Lema 1.11.8, tiene una cantidad no numerable de composantes ajenas, X tiene una cantidad no numerable de copias ajenas de F, por [29, Theorem 22, pág. 175], F separa al plano. Por lo menos una de las componentes del complemento de F es acotada y, como F es cerrado, el dominio acotado es un abierto U. Como X es homogéneo cada composante de X tiene una copia de F y, por tanto, en el plano tendremos una cantidad no numerable de copias de U, las cuales no se intersectan pues de lo contrario las copias de F se intersectarían y sabemos que las composantes son ajenas (Lema 1.11.8). Pero, como el plano es separable, no puede tener una cantidad no numerable de abiertos ajenos. Por lo tanto, X es hereditariamente unicoherente.

Q.E.D.

Capítulo 2

Un Teorema de Bing

Con este capítulo iniciamos los resultados encontrados en los artículos tratados en la tesis. Aquí encontraremos una versión simplificada de la prueba del Teorema de Bing que dice que la curva cerrada simple es el único continuo homogéneo en el plano que posee un arco [3]. Esta prueba es dada por F. Burton Jones en su artículo *Use of a new technique in homogeneous continua* [19]. La herramienta fundamental para probar este hecho es el Teorema de Effros (Teorema 1.6.13).

2.1. Sobre puntos accesibles

Definición 2.1.1. Un *arco* en un continuo es un subconjunto de éste homeomorfo al intervalo [0,1].

Notación 2.1.2. Notemos que, al ser imágenes homeomorfas del intervalo, los arcos poseen exactamente dos puntos que no son de corte ([13, Theorem 2-27, pág 54]) (llamados extremos). Si $l : [0,1] \longrightarrow X$ es la función continua e inyectiva que hay entre el intervalo y X tal que $l(0) = a$ y $l(1) = b$, entonces denotaremos a dicho arco como ab y diremos que a y b son los puntos extremos del arco. Si hablamos de un arco que tenga como extremos a los puntos a y b pero que es diferente al arco ab se especificará. Si tenemos un arco que tenga como extremos a a y a b y que, además, contiene un punto p de X, entonces podremos denotarlo como apb. Al ser homeomorfos al intervalo, los arcos poseen un orden relacionado directamente con el orden de $[0,1]$. Como, en un arco ab, $l(0) = a$ y $l(1) = b$ diremos que a es el primer punto del arco y b el último.

Lema 2.1.3. *Sean X un continuo homogéneo e indescomponible en el plano y dos arcos, ab y $a'b'$, de X tales que se intersectan. Entonces $ab \cup a'b'$ es un arco y, en particular, cuando ambos arcos poseen un punto extremo en común y se intersectan en algún otro punto, entonces uno de los arcos está contenido en el otro.*

Demostración. El resultado es claro si ab y $a'b'$ tienen como único punto de intersección uno de sus puntos extremos. Si ambos arcos tuvieran sólo dos puntos de intersección, los cuales resultan ser justo sus puntos extremos, entonces, sin perder generalidad, $a = a'$ y $b = b'$. De esta manera $ab \cup a'b'$ sería una curva cerrada simple (Figura 2.1) y, por lo tanto, sería un subcontinuo de X que no es unicoherente, lo cual es absurdo por el Teorema 1.11.12.

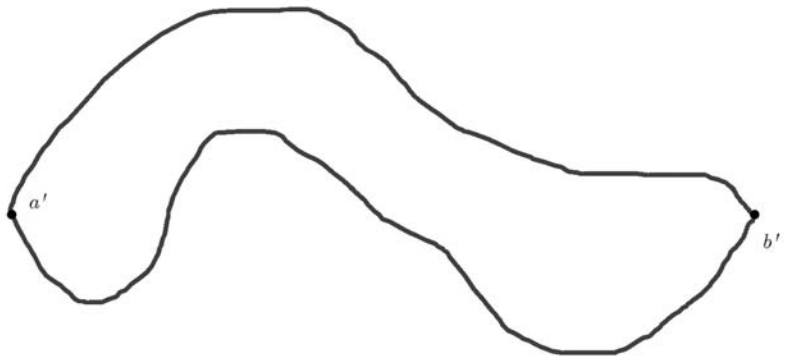

Figura 2.1.

Por el Teorema 1.11.12, sabemos que X debe ser atriódico. Si $ab \cup a'b'$ no fuera un arco, entonces, considerando el primer punto donde estos dos arcos se intersectan, c, encontraremos un subcontinuo de $ab \cup a'b'$ en el cual, al retirar el punto c, obtendríamos más de dos componentes. Pero esto no puede pasar pues X es atríodico (Figura 2.2).

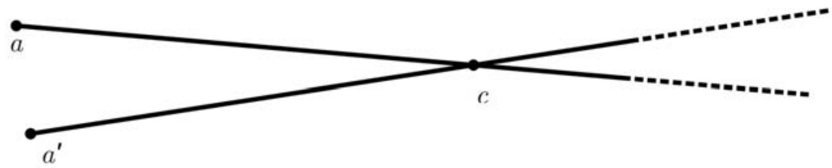

Figura 2.2. Se muestra el segmento de $ab \cup a'b'$ que contiene un triodo.

De la misma manera, si tuviéramos dos arcos ab y ab' tales que tienen un mismo punto extremo, pero uno no estuviera contenido en el otro, entonces podríamos considerar el primer punto a partir del cual se va a separar c. Entonces, podríamos encontrar un subcontinuo que resulta ser un triodo (Figura 2.3).

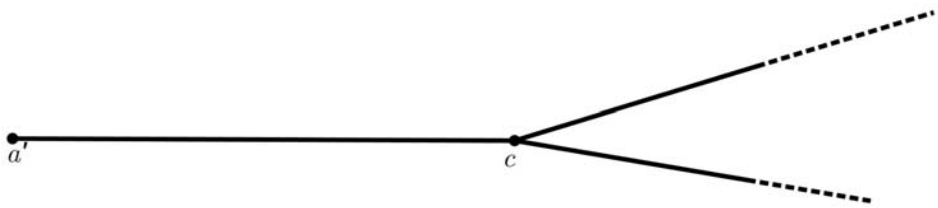

Figura 2.3. Se muestra el segmento de $ab \cup ab'$ que contiene un triodo.

Q.E.D.

Lema 2.1.4. *Sea X un continuo homogéneo indescomponible en el plano, con métrica ρ. Si ab es un arco en X y T es la unión de todos los arcos ax que contienen a ab. Entonces T es una imagen biyectiva y continua de los números reales no negativos y todo punto de ab es un punto límite de $T \setminus ab$.*

Demostración. Por el Lema 2.1.3, cualesquiera dos arcos que contengan al arco ab van a estar contenidos uno en el otro. Así, para cada $x \in X$ tal que $ab \subset ax$, ax será una imagen continua y biyectiva de $[0, r]$ con $r > 1$.

Probemos ahora la segunda conclusión. Sea $W = Cl_X(T \setminus ab)$. Es claro que $b \in W$. Si W contuviera a a pero no a todo ab, entonces $W \cup ab$ no sería unicoherente pues $W \cap ab$ tendría más de una componente (por lo menos la componente que contiene a a y la que contiene a b. Pero esto no puede pasar pues sabemos que, por el Teorema 1.11.12, X es hereditariamente unicoherente y $W \cup ab$ es un subcontinuo de X). Así que si $a \in W$, entonces $ab \subset W$. De esta manera, si la segunda conclusión del teorema fuera falsa, podemos suponer que W no contiene a a pues, si lo contuviera, ab estaría en W. Sea c el primer punto de T (si es que existe) que es un punto límite de $T \setminus ae$, para algún punto e más allá de c en T. Sean $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \text{mín}\{\rho(a, W), \rho(e, ac)\}$ y, por el Teorema 1.6.13, δ un número de Effros para ε. Sea $c' \in (ac \setminus \{c\}) \cap \mathcal{V}_\delta(c)$. Entonces existe un ε-homeomorfismo h de X en X que manda a c en c'. Sabemos que $h(ae)$ es un arco que intersecta a ae en c'. Por el Lema 2.1.3, $h(ae) \cup ae$ es un arco y, también, $ae \subset h(ae) \cup ae$. Como h es un homeomorfismo, c' es punto límite de $T \setminus h(ae) \cup ae$, pero $T \setminus h(ae) \cup ae \subset T \setminus ae$. Entonces c' es punto límite de $T \setminus ae$, lo cual es una contradicción pues c era el primer punto límite. Entonces no existe tal primer punto límite.

T no es cerrado pues, si lo fuera, al ser conexo, sería un subcontinuo de X y, por lo tanto, tendríamos una función continua y biyectiva entre T, que es compacto, y los reales no negativos. Luego, los reales no negativos serían compactos, lo cual sería absurdo. Entonces $Cl_X(T) \setminus T \neq \emptyset$. Si $Cl_X(T) \setminus T$ sólo consistiera de un punto, entonces $Cl_X(T)$ sería un arco y, por definición, $T = Cl_X(T)$. Así, $Cl_X(T) \setminus T$ es un continuo. Sean $0 < \varepsilon = \frac{1}{2}\rho(a, Cl_X(T) \setminus T)$ y, por el Teorema 1.6.13, δ un número de Effros para ε. Sean p y q elementos de $Cl_X((T) \setminus T)$ y $r \in T$ tales que $\mathcal{V}_{\frac{\delta}{2}}(p)$ contiene a q y a r. Entonces existen dos ε-homeomorfismos f_p y f_q de X en X tales que $f_p(r) = p$ y $f_q(r) = q$. Así, por la elección de ε, $T \cup f_p(T) \cup f_q(T)$ contiene un triodo. Pero esto es una contradicción al hecho de que X es atriódico (Teorema 1.11.12).

Finalmente, todo punto de ab tiene que ser un punto límite de $T \setminus ab$.

Q.E.D.

Definición 2.1.5. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $p \in A$. Diremos que p es un *punto accesible de A por B* si existe un arco xp tal que todos los puntos de dicho arco, con excepción de p, pertenecen a $B \setminus A$. Se dirá que un subconjunto de A es *accesible por B*, si todos sus puntos son accesibles por B. Sean X un subcontinuo del plano, ab un arco en X y $p \in ab$. Diremos que p es un *punto accesible de X por ambos lados* si existe un homeomorfismo h del plano en sí mismo tal que $h(ab)$ se queda contenido en el eje x y $h(p)$ es un punto de $h(X)$ accesible por el semiplano inferior y, también, accesible por el semiplano superior. Dos puntos en un arco de un subcontinuo X en el plano serán *accesibles por el mismo lado* si existe un homeomorfismo h del plano en sí mismo tal que las imágenes de los puntos bajo h son dos puntos de $h(X)$ tales que ambas imágenes son accesibles por el semiplano inferior o ambas son accesibles por el semiplano superior.

Lema 2.1.6. *Sea X un continuo homogéneo indescomponible en el plano con métrica ρ. Si ab es un arco accesible en X, entonces todos los puntos de $ab \setminus \{a, b\}$ son accesible spor el mismo lado y $ab \setminus \{a, b\}$ no es accesible por ambos lados.*

Demostración. Como existe un homeomorfismo del plano en sí mismo que manda a ab en $[0, 1]$ del eje x, podemos suponer que $ab = [0, 1] \times \{0\}$. Supongamos que ab es accesible por debajo del eje x al punto $p = (\frac{1}{2}, 0)$. Entonces existe un arco pq tal que todos sus puntos, salvo p, están debajo del eje x. Podemos suponer, sin perder generalidad, que pq es vertical. Supongamos que p es punto límite de X por debajo del eje x. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{4}\,\text{mín}\{1, \rho(p, q)\}$ y, por el Teorema 1.6.13, δ un número de Effros para ε. Sea $p' \in X$ tal que p' está debajo del eje x y $\rho(p', p) < \delta$. Entonces existe un ε-homeomorfismo f de X en sí mismo tal que $f(p) = p'$. Por la elección de ε, la imagen de ninguno de los intervalos $[p, p+2\varepsilon]$ y $[p-2\varepsilon, p]$ del eje x puede intersectar a $pq \cup ab$. Pero este movimiento no puede ocurrir. Así, p no es punto límite de X por debajo del eje x. Entonces existe un número positivo r_p tal que $U = \mathcal{V}_{r_p}(p)$ no contiene ningún punto de X por debajo del eje x. Así, cada punto de $[p - r_p, p + r_p]$ es accesible por debajo del eje x. Repitiendo este procedimiento, podemos llegar a que todos los puntos de ab son accesibles por debajo. Ahora, si algún punto w de ab fuera accesible por arriba, siguiendo el mismo procedimiento que antes, w no sería punto límite por arriba del eje x de X, pero w es punto límite de cualquier composante de X, por el Lema 1.11.4.

Q.E.D.

Lema 2.1.7. *Sea X un continuo homogéneo indescomponible, con métrica ρ. Si p es un punto de X y U es un subconjunto abierto en el plano tal que $p \notin Cl_X(U)$, entonces existe un número positivo ε tal que ningún arco abc en X tiene la propiedad de que tanto a como c sean elementos de U y $\mathcal{V}_\varepsilon(ab)$ contenga tanto a p como bc.*

Demostración. Como X es un espacio normal, por la Proposición 1.1.6, existe un subconjunto abierto U_1 tal que $p \notin Cl_X(U)$ y $Cl_X(U) \subset U_1$ y supongamos que el lema es falso. Entonces existen un arco abc en X y un homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tales que $f(b) = p$ y tanto $q_1 = f(a)$ como $q_2 = f(c)$ están en U. Sean p_1 y p_2 puntos en los subarcos de q_1pq_2, q_1p y pq_2, respectivamente, tales que $Cl_X(U_1) \cap p_1pp_2 = \emptyset$.

Sea ε un número positivo menor que $\frac{1}{4}\,\text{mín}\{\rho(q_1p_1, p_2q_2), \rho(p_1pp_2, Cl_X(U_1), \rho(Cl_X(U), \mathbb{R}^2 \setminus U_1)\}$. Por el Teorema 1.6.13, existe un número de Effros δ para ε. Como el lema es falso, existe un arco $a'b'c'$ tal que tanto a' como c' están en U y $\mathcal{V}_\delta(a'b')$ contiene a $b'c'$ y a p. Entonces existe un ε-homeomorfismo, $h : X \longrightarrow X$, tal que $h(b') = p$. Como $b'c' \subset \mathcal{V}_\delta(a'b')$, la imagen $h(b'c') \subset \mathcal{V}_{3\varepsilon}(a'b')$.

Notemos que $h(a'b') = h(a')p$ y $h(b'c') = ph(c')$ y $h(a'b') \cap q_1q_2 \neq \emptyset$ (por lo menos p está en esta intersección), por el Lema 2.1.3, $q_1q_2 \cup h(a'b')$ es un arco. Tenemos que $a' \in U$ y $\rho(h(a'), a') < \varepsilon$, por lo tanto, $h(a') \in U_1$. Entonces $p_1p \subset h(a')p \cup q_1p$, pero $p_1p \cap Cl_X(U_1) = \emptyset$ y $h(a') \in U_1$ por lo tanto, $p_1 \in h(a'b')$. Análogamente, $p_2 \in h(b'c')$. De donde concluimos que $p_1p \subset h(a'b')$ y $pp_2 \subset h(b'c')$. Pero, entonces, existen puntos de q_2p_2 en $\mathcal{V}_{3\varepsilon}(q_1p_1)$, lo cual es imposible por que $\mathcal{V}_{3\varepsilon}(q_1p_1)$ no contiene puntos de p_2q_2 e inversamente. Luego, se cumple el lema.

Q.E.D.

2.2. Teorema principal

Ahora probaremos que la curva cerrada simple es el único continuo homogéneo en el plano que contiene un arco.

Teorema 2.2.1. *Si X es un continuo homogéneo en el plano que contiene un arco, entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Si X es descomponible, entonces, por [18, Theorem 2], X es una curva cerrada simple. Así que, supongamos que X es indescomponible. Si X contiene un arco pq, por el Lema 2.1.4, si T es el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que px contiene a pq, entonces T es la imagen continua y biyectiva de $[0, \infty)$ (denotaremos como t_r al elemento en T que es la imagen de r). Como X es homogéneo, podemos suponer que $pq = [0, 5]$. También, por el Lema 2.1.4, podemos suponer que T es accesible por el complemento de X, que el intervalo t_0t_5 se ubica sobre el eje x y t_0t_5 es accesible por abajo. Existe un entero positivo η tal que ningún arco de T que vive entre $y = \frac{1}{\eta}$ y el eje x tiene un punto interior en sólo una de las líneas $x = t_n$, con $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, y tiene ambos extremos en $x = n + 1$ o bien en $x = n - 1$, esta propiedad se sigue del Lema 2.1.7.

Sean a y b los números positivos más pequeños tales que $a < b$, t_at_b es irreducible entre $x = t_5$ y $x = t_0$ y viven entre $y = \frac{1}{\eta}$ y el eje x. Como cada punto de t_0t_5 es punto límite de $T \setminus [0, 5]$, por el Lema 2.1.4, los números a y b deben de existir. Podemos suponer que el lado accesible de t_at_b está sobre el eje x. Esta selección es posible ya que si el orden de t_a y t_b fuera inverso, es decir, t_b perteneciera a $x = t_5$ y t_a a $x = t_0$, podríamos tomar el próximo arco de T arriba de t_at_b y apelar al teorema de la curva de Jordan [36] para tener el orden propuesto.

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sean z_i el primer punto de t_at_b en $x = i$ y D_i el dominio simple acotado por t_it_{i+1} en el eje x, t_iz_i en $x = i$, el subarco z_iz_{i+1} de t_at_b y $t_{i+1}z_{i+1}$ en $x = i + 1$.

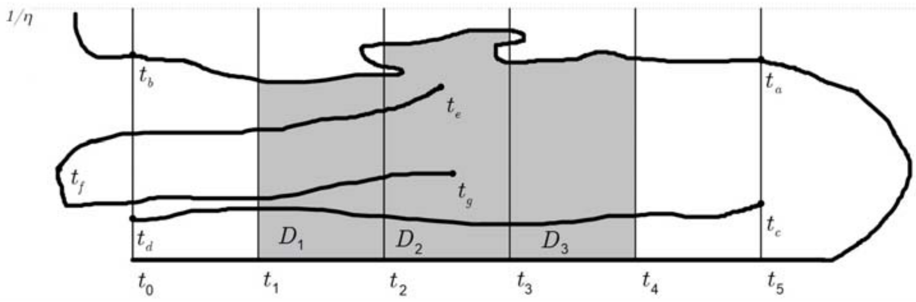

Figura 2.4. Representación de cómo es que se ven los dominios D_1, D_2 y D_3 (zonas sombreadas) y los arcos t_bt_a, $t_et_ft_g$ y t_dt_c

.

Sea ε un número positivo menor que $\frac{1}{2}$, tal que si dos puntos x_1 y x_2 de X no distan más que ε y x_1 está entre t_at_b y t_0t_5 y entre las lineas $x = 1$ y $x = 4$, entonces x_2 también debe de vivir entre t_at_b y t_0t_5. Por el Teorema 1.6.13, existe un número de Effros δ para ε. Sean c y d, números positivos, tales que $c < d$, t_ct_d vive arriba del eje x y es irreducible entre $x = 5$ y $x = 0$ y ningún punto de t_ct_d está arriba de $y = \delta$. Sea $h : X \longrightarrow X$ un ε-homeomorfismo que manda a t_0 en t_d, este mismo homeomorfismo manda a t_0t_d en (aproximadamente) t_dt_0. Entonces existe un punto fijo, t_f, en t_0t_d. t_f no puede vivir en $Cl_X(D_1) \cup Cl_X(D_2) \cup Cl_X(D_2)$ sin violar la selección de η. Entonces existen números e y g tales que $e < f < g$, t_e y t_g viven en D_2, $h(t_et_f) = t_gt_f$ y $h(t_e) = t_g$. Podemos seleccionar valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ convergentes a cero, lo que nos daría una sucesión de puntos $t_{\varepsilon_1}, t_{\varepsilon_2}, \ldots$ convergentes a un punto p, el cual no vive en $Cl_{X(}D_2)$. Por lo que la propiedad dada por el Lema 2.1.7 sería violada. Por lo tanto, X no puede ser indescomponible. Luego, debe ser una curva cerrada simple.

Q.E.D.

Capítulo 3

El continuo homogéneo hereditariamente descomponible en el plano

En este capítulo encontraremos los resultados de Charles L. Hagopian en su artículo *Homogeneous plane continua* [12]. En el teorema principal veremos que en un continuo homogéneo indescomponible en el plano, todo subcontinuo descomponible contiene un continuo homogéneo indescomponible. Como consecuencia de este resultado demostraremos que la curva cerrada simple es el único continuo homogéneo en el plano hereditariamente descomponible.

3.1. Continuos del tipo A y A'

Definición 3.1.1. Decimos que un continuo X es *del tipo A* si es irreducible entre dos puntos y posee una descomposición semicontinua superiormente cuyos elementos son conexos y el espacio cociente $X/\mathcal{D}$ es homeomorfo al intervalo [0,1]. Dicha descomposición será llamada *admisible*. Si un continuo tiene una descomposición admisible, donde cada uno de sus elementos tiene interior vacío (con respecto a X) entonces diremos que X es *del tipo A'*.

A continuación, daremos otra definición equivalente para continuos del tipo A.

Lema 3.1.2. *Sea X un continuo irreducible entre dos puntos x y y. Entonces X es del tipo A si y sólo si X tiene una descomposición semicontinua superiormente, no degenerada $\mathcal{D}$, tal que todo elemento $J \in \mathcal{D}$ es un subcontinuo de X y si J no contiene ni a x ni a y entonces $X \setminus J$ es disconexo.*

Demostración. Primero supongamos que X es del tipo A. Sea $\mathcal{D}$ una descomposición admisible de X. $\mathcal{D}$, al ser una descomposición admisible, es no vacía, semicontinua superiormente y sus elementos son cerrados y conexos en X. Así, sólo basta ver que cualquier elemento que no contenga ni a x ni a y separa a X. Para esto, consideremos la función cociente, q, entre X y $[0,1]$. Demostraremos que, sin perder generalidad, $x \in q^{-1}(1)$ y $y \in q^{-1}(0)$. De no ser así, existirían $r_1 \in (0,1)$ y $r_2 \in (r_1, 1]$, o bien, $r_2 \in (0,1)$ y $r_1 \in [0, r_2)$, tales que, alguno de los dos elementos x o y, se encuentra en $q^{-1}(r_1)$ y el otro en $q^{-1}(r_2)$. Sin perder generalidad, supongamos que ocurre el primer caso y que $x \in q^{-1}(r_1)$ y $y \in q^{-1}(r_2)$. Entonces $\{x, y\} \subset q^{-1}[r_1, r_2]$, pero esto no puede pasar pues $q^{-1}[r_1, r_2]$ es un subcontinuo propio de X que contiene a x y a y, y X es, en principio, irreducible entre estos dos puntos. Finalmente $x \in q^{-1}(1)$ y $y \in q^{-1}(0)$. Ahora, como el arco es el único continuo que tiene exactamente dos puntos que no son de corte [13, Theorem 2-27, pág. 54] (siendo estos dos únicos puntos sus extremos), tendremos que cualquier elemento de $\mathcal{D}$ que no contenga ni a x ni a y, separa a X.

Supongamos que existe una descomposición semicontinua superiormente, no degenerada $\mathcal{D}$, tal que todo elemento $J \in \mathcal{D}$ es un subcontinuo de X y si J no contiene ni a x ni a y entonces $X \setminus J$ es disconexo. Esto significa que cualquier elemento de $\mathcal{D}$ que no contenga a x ni a y es punto de corte de $X/\mathcal{D}$. Así, por [13, Theorem 2-27, pág. 54], el único continuo que posee exactamente dos puntos que no son de corte es el arco. Así que, se debe cumplir que $X/\mathcal{D}$ es homeomorfo al intervalo [0,1].

Q.E.D.

Ejemplo 3.1.3. Consideremos el espacio resultante de multiplicar el conjunto de Cantor por el intervalo intervalo $[0, 1]$ y unir los puntos extremos de la parte superior e inferior alternadamente en el mismo orden que fueron retirados del intervalo original, es decir, uniendo los segmentos $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \{1\}$, $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \times \{0\}$, $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] \times \{0\}$, $[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}] \times \{1\}$, $[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}] \times \{1\}$, $[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}] \times \{1\}$, $[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}] \times \{1\}$... (Figura 3.1).

Figura 3.1.

Este espacio es un continuo que por sí sólo es del tipo A' (basta con considerar la función proyección sobre el intervalo $[0, 1]$ como función cociente). Sin embargo, hay otro continuo tipo A que resulta de identificar los puntos que estén sobre los mismos segmentos de recta horizontales en uno mismo.

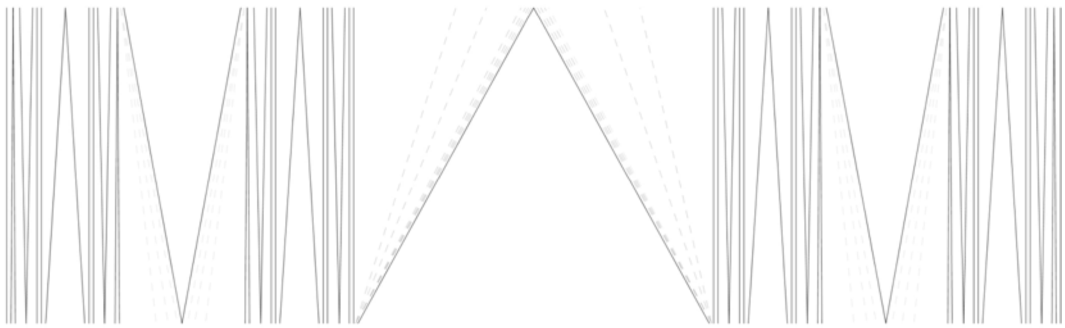

Figura 3.2. Este espacio es mejor conocido como *Continuo* $V\Lambda$.

Si consideramos la descomposición proyección que mencionamos para el primer continuo (Figura 3.1) pero, para cada segmento de recta horizontal, identificando las imágenes de los puntos de ésta en uno sólo, tendremos una descomposición semicontinua superiormente cuyo espacio cociente es $[0,1]$.

Definición 3.1.4. Sean X y Y dos espacios. Una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ es llamada *monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo elemento $y \in Y$.

Lema 3.1.5. *Sean X y Y dos espacios métricos y compactos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces f es monótona si y sólo si $f^{-1}(C)$ es conexo para todo subconjunto conexo C de Y.*

Demostración. Supongamos que f es monótona. Sea C un subconjunto de Y tal que $f^{-1}(C)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos A y B de X tales que $f^{-1}(C) = A \cup B$, $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $Cl_X(B) \cap A = \emptyset$. Notemos que si $y \in C$ y $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(y) \subset A$, esto por que f es monótona. Sea $M = \{y \in C | f^{-1}(y) \subset A\}$, así $A = f^{-1}(M)$. De manera análoga, sea $N = \{y \in C | f^{-1}(y) \subset B\}$, entonces $B = f^{-1}(N)$. Tenemos que $C = M \cup N$. Supongamos que existe $y \in Cl_Y(M) \cap N$. Como $y \in N$, $f^{-1}(y) \subset B$. Como $y \in Cl_Y(M)$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de M que converge a y. Entonces $f^{-1}(y_n) \subset A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Como X es compacto, sin perder generalidad, podemos suponer que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto x. Tenemos que $x \in Cl_X(A)$ y, por la continuidad de f, $f(x) = y$. Entonces $x \in Cl_X(A) \cap f^{-1}(y) \subset Cl_X(A) \cap B$, lo cual es absurdo. Entonces $Cl_X(M) \cap N = \emptyset$. Análogamente se prueba que $M \cap Cl_X(N) = \emptyset$ Luego, C no es conexo.

Es claro que si $f^{-1}(C)$ es conexo para todo subconjunto conexo C de Y, entonces f es monótona.

Q.E.D.

Lema 3.1.6. *Sean X un continuo del tipo A, $\mathcal{D}$ una descomposición admisible, $q : X \longrightarrow [0,1]$ la función cociente asignada a la descomposición y K un subcontinuo de X que intersecta a dos elementos distintos de $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{D}' = \{D \cap K | D \in \mathcal{D}$ y $D \cap K \neq \emptyset\}$ es una descomposición admisible de K.*

Demostración. Al ser un continuo que intersecta por lo menos a dos elementos de $\mathcal{D}$, $q(K) = [r, s]$ con $r < s$. Así, podemos ver a $\mathcal{D}'$ como el siguiente conjunto: $\{q^{-1}(t) \cap K | r \leq t \leq s\}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}'$ es una descomposición no trivial cuyos elementos son cerrados.

Veremos que para cada $t \in (r, s)$, $q^{-1}(t) \subset K$. Sean $t \in (r, s)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $r < t - \varepsilon < t + \varepsilon < s$. Definimos $L_1 = q^{-1}([0, t - \varepsilon])$ y $L_2 = q^{-1}([t + \varepsilon, 1])$. Como las preimágenes de conexos bajo q son conexas (Lema 3.1.5), tenemos que L_1 y L_2 son subcontinuos de X. Así, $L_1 \cup K \cup L_2 = X$ y, por lo tanto, $q^{-1}([t - \varepsilon, t + \varepsilon]) \subset K$. Luego, $q^{-1}(t) \subset K$. De esto se sigue que, como $q^{-1}(t)$ separa a X si $r < t < s$, $q^{-1}(t)$ separa a K. Más aún, si K es irreducible entre dos puntos, x y y, entonces uno de ellos vive en $q^{-1}(r) \cap K$ y el otro en $q^{-1}(s) \cap K$ (si alguno, digamos x, viviera en $f^{-1}(t)$ con $r < t < s$, entonces podemos contiderar $\varepsilon > 0$ tal que $r < t - \varepsilon < t + \varepsilon < s$, de esta manera x y y estarían $q^{-1}([t - \varepsilon, s])$, el cual es un subcontinuo propio de K, lo cual es una contradicción).

Veamos que $\mathcal{D}'$ es semicontinua superiormente. El primer caso lo haremos con $t \in (r, s)$. Sean $q^{-1}(t) \cap K \in \mathcal{D}'$ y U un abierto de K que contiene a $q^{-1}(t) \cap K$ y que no intersecta ni a $q^{-1}(r)$ ni a $q^{-1}(s)$, como $q^{-1}(t) \subset K$ podemos decir directamente que $q^{-1}(t) \subset U$. Entonces, existe un abierto de X, U', tal que $U' \cap K = U$, tenemos que $q^{-1}(t) \subset U'$. Como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente existe un abierto V' de X tal que todo elemento de $\mathcal{D}$ que lo intersecte se quedará contenido en U. Así, sea $V = V' \cap K$. Se sigue que cualquier elemento que intersecte a V se quedará contenido en U. Ahora demostraremos la semicontinuidad superior en los elementos $q^{-1}(r) \cap K$ y $q^{-1}(s) \cap K$. Haremos sólo el caso de uno, pues el otro es análogo. Sea U un abierto de K tal que $q^{-1}(r) \cap K \subset U$. Sabemos que existe un abierto U'' tal que $U = K \cap U''$. Como U es un abierto de K, intersecta a más de un elemento de $\mathcal{D}'$. En consecuencia, existe un intervalo $[r, t']$ contenido en $q(U)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $[r, r + \varepsilon) \subset [r, t']$. Definimos $U' = q^{-1}([0, r + \varepsilon)) \cap U''$. U' es un abierto en X que contiene a $q^{-1}(r)$. Como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente existe un abierto V' de X tal que todo elemento de $\mathcal{D}'$ que intersecte a V' se quedará contenido en U'. Sea $V = V' \cap K$, todo elemento de la forma $q^{-1}(t)$ con $r < t < s$ que intersecte a V intersectará a V' y, por tanto, se quedará contenido en U' pero, al estar contenido en K, se quedará dentro de $U' \cap K$ quien, por construcción, está contenido en $U'' \cap K = U$. Luego, $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente.

Para completar la prueba, veremos que $q^{-1}(r) \cap K$ y $q^{-1}(r) \cap K$ son conexos. Sean $K_0 = Cl_X(q^{-1}((r, s)))$ y $K_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} Cl_X(q^{-1}((r, r + \frac{1}{n})))$ si, por los Lemas 1.2.6 y 3.1.5, K_1 es un subcontinuo de K_0 y, por el Lema 3.1.5, K_0 es un subcontinuo de K. Sean $x \in q^{-1}(r) \cap K$ y C_x la componente de x en $q^{-1}(r) \cap K$. Entonces $C_x \cap K_0 \neq \emptyset$, esto por el Teorema 1.1.12, y, como $C_x \subset q^{-1}(r)$, tenemos que $C_x \cap K_1 \neq \emptyset$, lo cual implica que $q^{-1}(r) \cap K$ es conexo. Análogamente, $q^{-1}(s) \cap K$ es conexo.

Q.E.D.

Definición 3.1.7. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos descomposiciones de un continuo X. Diremos que $\mathcal{B}$ *refina* a $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$) si para todo elemento $B \in \mathcal{B}$, existe un elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$. Diremos que $\mathcal{B}$ *refina propiamente* a $\mathcal{A}$ si, además de refinar a $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

Es claro que la relación *refinar*, induce un orden parcial en el conjunto de las descomposiciónes de un continuo X.

Teorema 3.1.8. *Sea X un continuo irreducible entre dos puntos x y y. Si X es del tipo A, entonces X posee una única descomposición admisible mínima (con respecto al orden inducido por el refinamiento).*

Demostración. Primero demostraremos la existencia de una descomposición admisible mínima. Sea $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in I}$ una cadena de descomposiciones admisibles de X, tales que, si j y l están en I y $j < l$, entonces $\mathcal{D}_l \prec \mathcal{D}_j$ y, para cada $z \in X$ e $i \in I$, X_{zi} es el elemento de $\mathcal{D}_i$ que contiene a z. Así, para z fijo, consideremos $\{X_{zi}\}_{i\in I}$. Ésta es una familia de continuos tales que si j y l están en I y $j < l$, entonces $X_{zl} \subset X_{zj}$. Sea $X_z = \bigcap\limits_{i\in I} Z_{zi}$. Por el Lema 1.2.6, Z es un continuo. Así, definimos $\mathcal{D} = \{X_z\}_{z\in X}$.

Veamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición admisible. Primero mostraremos que $\mathcal{D}$ sí es una descomposición. Supongamos que existen dos elementos, X_y y X_z, de $\mathcal{D}$ tales que se intersectan. Sea $x \in X_y \cap X_z$. Entonces $x \in \bigcap\limits_{i\in I} X_{yi}$ y, por lo tanto, $x \in X_{yj}$ para toda $j \in I$. Análogamente, para todas $j \in I$ y X_z se tiene que $x \in X_{zj}$, eso significa que $X_{yj} \cap X_{zj} \neq \emptyset$, pero $\mathcal{D}_j$ es una descomposición de X. Por lo tanto, $X_{yj} = X_{zj}$ para todo $j \in I$. Como consecuencia $X_z = X_y$ y $\mathcal{D}$ es una descomposición. Ahora, probemos que $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente. Sean $X_z \in \mathcal{D}$ y U un abierto de X tales que $X_z \subset U$. Como $\{X_{zi}\}_{i\in I}$ cumple las hipótesis de la Proposición 1.2.2, existe $j \in I$ tal que $X_{zj} \subset U$. Como $\mathcal{D}_j$ es una descomposición admisible, existe un abierto, V, tal que $X_{zj} \subset V$ y, para todo $X_{yj} \in \mathcal{D}_j$ tal que $X_{yj} \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $X_{yj} \subset U$. Ahora, sea X_y en $\mathcal{D}$ tal que $X_y \cap V \neq \emptyset$. Como $X_y \subset X_{yj}$ tenemos que $X_{yj} \cap V \neq \emptyset$. Ya que $\mathcal{D}_j$ es una descomposición semicontinua superiormente y, por como obtuvimos V, tenemos que $X_{yi} \subset U$ y $X_y \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente. Ahora sólo basta ver que $X/\mathcal{D}$ es homeomorfo al intervalo. Para ésto, usaremos el Lema 3.1.2. Si X es irreducible entre x_1 y x_2, sólo bastaría ver que todo elemento de $\mathcal{D}$ que no contenga a x_1 ni a x_2 desconecta a X. Para cada $i \in I$, sea f_i la función cociente para la descomposición $\mathcal{D}_i$. Consideremos $X_z \in \mathcal{D}$ que no contenga ni a x_1 ni a x_2. Podemos escribir $X \setminus X_z$ como $X \setminus \bigcap\limits_{i\in I} X_{zi} = \bigcup\limits_{i\in I}(X \setminus X_{zi})$. Definamos $t_i = f(X_{zi})$, tenemos que $0 < t_i < 1$. Sabemos que $X \setminus X_{zi} = f_i^{-1}([0, t_1)) \cup f_i^{-1}((t_i, 1])$, notemos que $f_i^{-1}([0, t_i))$ y $f_i^{-1}((t_i, 1])$ son dos abiertos ajenos no vacíos y, además, si $j > i$, $f_i^{-1}([0, t_i)) \subset f_j^{-1}([0, t_j))$ y $f_i^{-1}((t_i, 1]) \subset f_j^{-1}((t_j, 1])$. Así que, si $U_i = f_i^{-1}([0, t_i))$ y $V_i = f_i^{-1}((t_i, 1])$, $X \setminus X_z = \bigcup\limits_{i\in I}(U_i \cup V_i)$. Si $\bigcup\limits_{i\in I}(U_i \cup V_i)$ fuera conexo, existiría $x \in (\bigcup\limits_{i\in I}(U_i)) \cap (\bigcup\limits_{i\in I}(V_i))$ pero, en este caso, existirían i y j en I (sin perder generalidad $i < j$) tales que $x \in U_i$ y $x \in V_j$, como $U_i \subset U_j$, $x \in U_j \cap V_j$. Lo cual sería absurdo. Luego, $X \setminus X_z$ es disconexo.

Ahora vamos a demostrar que la descomposición admisible mínima es única. Para ésto vamos a ver que si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{A}$ son dos descomposiciones admisibles tales que algún elemento, K, de $\mathcal{E}$ intersecta a dos elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{E}$ no puede ser una descomposición mínima. Así, si tenemos otra descomposición mínima, $\mathcal{D}'$, tiene que ser precisamente la descomposición construida $\mathcal{D}$. Pues si no lo fuera, como $\mathcal{D}$ es mínima, tampoco podría refinarla. Por lo tanto, alguno de sus elementos debería intersectar a dos elementos de $\mathcal{D}$ y entonces $\mathcal{D}'$ no podría ser mínima como supusimos en un prinicipio.

Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{A}$ dos descomposiciones admisibles tales que algún elemento, K, de $\mathcal{E}$ intersecta a dos elementos de $\mathcal{A}$ y $f : X \longrightarrow [0,1]$ la función cociente entre X y el intervalo resultante de la partición $\mathcal{A}$. Como K es un continuo que intersecta a dos elementos de $\mathcal{A}$ y f es continua, tenemos que $f(K) = [r,s]$. Ahora definimos: (#) $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus \{K\} \cup \{f^{-1}[t] | t \in (r,s)\} \cup \{f^{-1}[r] \cap K\} \cup \{f^{-1}[s] \cap K\}$. También definimos los siguientes conjuntos $A = f^{-1}[r] \cap K$ y $B = f^{-1}[s] \cap K$. Demostraremos que $\mathcal{E}'$ es una descomposición admisible y refina propiamente a $\mathcal{E}$.

Por el Lema 3.1.6 tenemos que $\{f^{-1}[t] | t \in (r,s)\} \cup \{A\} \cup \{B\}$ es una descomposición admisible del subcontinuo K. Por lo que, $\mathcal{E}'$ refina propiamente a $\mathcal{E}$ y todos sus elementos son subcontinuos de X. Así, para demostrar que $\mathcal{E}'$ es una descomposición admisible de X, veremos que es semicontinua superiormente y que todo elemento que no contenga a x ni a y separa a X.

Es fácil ver que los elementos de $\mathcal{E}'$, distintos de A y B, que no contienen a x ni a y, separan a X, pues si un elemento P con estas características está en $\mathcal{E}' \setminus \{K\}$ entonces también estará en $\mathcal{E}$ y, como ésta sí es una descomposición admisible, P separará a X. De la misma manera, si P fuera de la forma $f^{-1}[t]$ con $t \in (r,s)$, P estaría en $\mathcal{A}$ y, como $\mathcal{A}$ es una descomposición admisible, P separaría a X. Así, basta ver los casos en donde A o B no contienen a x o y. Como ambos casos son análogos, sin perder generalidad, haremos el caso para cuando A no contiene ni a x o y. Notemos que, como $A = f^{-1}[r] \cap K$, forzosamente $0 < r < 1$ pues, sin perder generalidad, $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Consideremos, ahora, dos subcontinuos irreducibles L_1 y L_2, uno entre K y x y el otro entre K y y, respectivamente. Como $0 < r$, $L_1 \setminus K \neq \emptyset$. Notemos que L_1 y L_2 son ajenos y que $X = L_1 \cup K \cup L_2$. Como $L_1 \setminus K$ es el complemento en X de $K \cup L_2$, es abierto. De igual manera, $(K \cup L_2) \setminus L_1$ es abierto por ser el complemento de L_1. Ambos abiertos son ajenos, no vacíos y su unión es $X \setminus (K \cap L_1)$, por lo que este último es disconexo. Como L_1 es irreducible entre x y K tendremos que $f(L_1)$ es irreducible entre $f(x) = 0$ y $f(K) = [r,s]$; es decir, que $f(L_1) = [0,r]$. Entonces $f(L_1 \cap K) = \{r\}$. De donde obtenemos que $L_1 \cap K \subset f^{-1}(r) \cap K = A$, pero sabemos que $L_1 \cap K$ separa a X, entonces A también separa a X.

Por último, veamos que $\mathcal{E}'$ es semicontinua superiormente. Recordemos que, como $\{f^{-1}[t] | t \in (r,s)\} \cup \{A\} \cup \{B\}$ es una descomposición semicontinua superiormente de K, por el Lema 3.1.6, la decomposición $\mathcal{E}'$ es semicontinua superiormente en los elementos de la forma $f^{-1}(t)$ con $t \in (r,s)$. De igual manera lo es en todos los elementos en $\mathcal{E} \setminus \{K\}$. Así, sólo hace falta observar que $\mathcal{E}'$ es semicontinua superiormente en A y en B. Haremos el caso, sin perder generalidad, para A, pues el caso para B es análogo. Supongamos que $0 < r$. Sabemos que $L_1 \setminus K = L_1 \setminus A$, pues $L_1 \cap K \subset A$ y $A \subset K$. Además, es no vacío pues $0 < r$. Supongamos que U es un abierto en X que contiene a A. Entonces definimos $U \cup K \cup L_2 = U_2$, el cual es un abierto en X que contiene a K. Como $\mathcal{E}$ es una descomposición semicontinua superiormente, por el Corolario 1.5.8, existe un abierto V_1 el cual es una unión de elementos de $\mathcal{E}$, contiene a K y está contenido en V_1. Entonces definamos V como la unión de todos los elementos en $\mathcal{E}$ contenidos en $V_1 \cap L_1$. Como $\{f^{-1}[t] | t \in (r,s)\} \cup \{A\} \cup \{B\}$ es semicontinua superiormente en K, existe un subconjunto abierto relativo W en K, que vive en $K \cap U$, contiene a A, es una unión de elementos de $\{f^{-1}[t] | t \in (r,s)\} \cup \{A\} \cup \{B\}$ y se queda contenido en $K \cap U$. Entonces tenemos que $V \cup W$ es un conjunto que está contenido en U, contiene a A y es una unión de elementos de $\mathcal{E}'$. Así, sólo basta ver que es abierto en X. Para esto sea $x' \in V \cup W$. Si $x' \in (V \setminus A)$ entonces V es una vecindad en X de x'. Si $x' \in (W \setminus A)$ entonces W es una vecindad de x' en X, en cualquier caso $V \cup W$ será vecindad. Si $x' \in A$, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X convergente a x'. Por como elegimos a V (o a W), la colección de puntos en la sucesión que vive en $X \setminus K$ (o en K) es finita o posee una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que existe un número natural k, tal que para toda $l > k$, x_{n_l} se queda en V (o en W). Como todo punto de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ está en $X \setminus K$ o en K, existe un número natural k, tal que para toda $l > k$, x_{n_l} se queda en $V \cup W$. Entonces $V \cup W$ es una vecidad en X de cada punto de A y, por lo tanto, es un abierto. Para el caso en el que $r = 0$, el argumento es únicamente considerando W y se sigue de manera análoga. Por tanto, tenemos que $\mathcal{E}'$ es una descomposición admisible que refina propiamente a $\mathcal{E}$.

Finalmente, concluimos en que X posee una única descomposición admisible mínima.

Q.E.D.

Lema 3.1.9. *Sea X un continuo irreducible entre dos subconjuntos cerrados A y B. Supongamos que cualquier subcontinuo de X con interior no vacío es descomponible. Sea $J = \{x \in X | X$ es irreducible entre A y $x\}$, entonces J es un subcontinuo de X e $Int_X(J) = \emptyset$.*

Demostración. Veamos que J es cerrado. Supongamos que existe $x \in Fr_X(J) \setminus J$. Como $x \notin J$, existe un subcontinuo propio L de X que contiene tanto a A como a x. Como L es propio, no intersecta a J. Sean $y \in J$ y N un subcontinuo de X irreducible entre x y y. Como $y \in J$, $L \cup N = X$. Entonces $X \setminus L \subset N$. Por lo tanto, $Int_X(N) \neq \emptyset$. Por hipótesis, N es descomponible. Entonces $N = N_x \cup N_y$, donde N_x y N_y son subcontinuos de N y, así, por el inciso *a)* del Lema 1.8.2, sin perder generalidad, $x \in N_x$ y $y \in N_y$. Como $J \subset X \setminus L \subset N$, $x \in Fr_x(J)$ y, como $x \in Int_X(N_x)$ (esto pues $x \in N_x \setminus N_y$), N_x contiene algún punto z de J. Entonces $L \cup N_x$ es un subcontinuo propio de de X que contiene tanto a z como A, lo cual no puede ser. Por tanto, J contiene a su frontera y, entonces, es cerrado.

Supongamos que $J = P \cup Q$, donde P y Q son subconjuntos cerrados y ajenos de J. Por la normalidad de X, existe un abierto U de X tal que $P \subset U \subset Cl_X(U) \subset X \setminus Q$. Sean C, una componente de $Cl_X(U)$ que contiene a un punto $x \in P$ y tomemos $y \in Fr_X(U) \cap C$ (el cual existe por el Teorema

1.1.12). Como $Fr_X(U)$ no intersecta a J, existe un subcontinuo propio, N, de X que contiene a A y a y y que no intersecta a J. Entonces $N \cup Cl_X(C)$ es un subcontinuo de X que no intersecta a Q, por lo tanto, es propio. Pero, además, contiene a A y a $x \in P \subset J$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, J debe ser conexo y, finalmente, un subcontinuo de X. Supongamos que $Int_X(J) \neq \emptyset$. Como $X \setminus J$ es conexo, por el inciso *b)* del Lema 1.8.2, y como el interior en X de J es no vacío, $Cl_X(X \setminus J)$ sería un subcontinuo propio de X que contiene a A e intersecta J. Lo cual es una contradicción. Luego $Int_X(J) = \emptyset$.

Q.E.D.

Lema 3.1.10. *Sea X un continuo irreducible entre dos subconjuntos cerrados, A y B, tal que cualquier subcontinuo de X con interior no vacío es descomponible. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

a) *Existen dos subcontinuos de X, X_A y X_B, tales que $X = X_A \cup X_B$, donde $A \subset X_A$, $B \subset X_B$ y $Cl_X(X_A \setminus X_B) \cap X_B = Fr_X(X_A \setminus X_B)$ es conexo.*

b) *Si U y V son subconjuntos abiertos de X tales que $A \subset U \subset Cl_X(U) \subset V \subset X \setminus B$ y $Fr_X(V)$ es conexa, entonces existe un subconjunto abierto W de X tal que $Cl_X(U) \subset W \subset Cl_X(W) \subset V$ y $Fr_X(W)$ es conexa.*

Demostración. *a)* Como X es descomponible, $X = P \cup Q$, con P y Q subcontinuos de X. Entonces, por el inciso *a)* del Lema 1.8.2 y sin perder generalidad, $A \subset P \setminus Q$ y $B \subset Q \setminus P$. Por el inciso *b)* del Lema 1.8.2, $P \setminus Q$ es conexo. Entonces $Cl_X(P \setminus Q) = X_A$ es un subcontinuo de X que contiene a A y, por el inciso *c)* del Lema 1.8.2, X_A es irreducible entre A y Q. Sea $J = \{x \in X_A | X_A$ es irreducible entre A y $x\}$. Por construcción, $Fr_X(A) \subset J$. Por el Lema 3.1.9, J es un subcontinuo de X_A tal que $Int_{X_A}(J) = \emptyset$. Entonces $Int_X(J) = \emptyset$. Definimos $X_B = Q \cup J$, el cual es un subcontinuo de X ya que $J \cap Q \neq \emptyset$. Veamos que $J = Cl_X(X_A \setminus X_B) \cap X_B$. Sea $x \in Cl_X(X_A \setminus X_B) \cap X_B$. Si X_A no fuera irreducible entre A y x, existiría un subcontinuo propio de X_A, L, que intersectaría tanto a A como a x. En consecuencia, $L \cup Q$ sería un subontinuo de X que intersectaría tanto a A como a B. Así $L \cup Q = X_A \cup Q$. Lo que implicaría que $X_A \setminus Q = L \setminus Q \subset L$ y, como $Cl_X(X_A \setminus Q) = Cl_X(Cl_X(P \setminus Q) \setminus Q) = Cl_X(P \setminus Q) = X_A$, $X_A \subset L$. Finalmente $X_A = L$. Luego, $x \in J$. Ahora, si $x \in J$, entonces $x \in X_B$. Sea U un abierto de X que contenga a x. Como X_A es un subcontinuo irreducible entre A y x, U va a intersectar a X_A. Como U intersecta a $X_B = J \cup Q$ y es abierto, no puede quedarse contenido en J, pues éste tiene interior vacío. De esta forma, debe intersectar a Q. Entonces $x \in Fr_X(X_A) = Fr_X(P \setminus Q)$. Por lo anterior, U intersecta a elementos de X_A que no están en Q ni en J y, por tanto, $U \cap (X_A \setminus X_B) \neq \emptyset$. Así $x \in Cl_X(X_A \setminus X_B)$. Finalmente, $Cl_X(X_A \setminus X_B) \cap X_B = J$.

b) Sea L un subcontinuo de X irreducible entre $Cl_X(U)$ y $Fr_X(V)$. Como $A \subset V$ y, como $Cl_X(V)$ es conexo (esto por el Teorema 1.1.12 y por ser $Fr_X(V)$ conexa), tenemos que, por los incisos *d)* y *b)* del Lema 1.8.2, $X \setminus Cl_X(V)$ es conexo. Como $Fr_X(V)$ es conexa, $Cl_X(U) \cup L \cup Fr_X(V) \cup Cl_X(X \setminus Cl_X(V))$ es un subcontinuo de X, pues es una unión de continuos que se intersectan, e intersecta tanto a A como a B. Entonces este continuo debe ser todo X. Así, $L \cup Cl_X(U) \cup Fr_X(V) = Cl_X(V)$ y, por lo tanto, $L \setminus (Cl_X(U) \cup Fr_X(V)) =$

$V \setminus Cl_X(U)$. Por consiguiente, $Int_X(L) \neq \emptyset$ y, por lo tanto, es descomponible. Por el inciso *a)* de este lema, existen dos subcontinuos L_1 y L_2 de X tales que $Cl_X(U) \cap (L_1 \setminus L_2) \neq \emptyset$, $Fr_X(V) \cap L \subset L_2 \setminus L_1$, y $Cl_X(L_1 \setminus L_2) \cap L_2$ es conexo. Sea $W = (Cl_X(U) \cup L_1) \setminus L_2$. Entonces W es conexo, abierto en X y $Cl_X(U) \subset W$. Como L es irreducible entre $Cl_X(U)$ y $Fr_X(V)$, $Cl_X(L_1 \setminus L_2)$ no intersecta a $Fr_X(V)$ y, así, se queda contenido en V. Luego, $Fr_X(W) = Cl_X(W) \cap (X \setminus W) = (Cl_X(U) \cup Cl_X(L_1 \setminus L_2)) \cap (L_2 \cup Cl_X(X \setminus V) = Cl_X(L_1 \setminus L_2) \cap L_2$ y este conjunto es conexo.

Q.E.D.

Teorema 3.1.11. *Sea X un continuo irreducible entre un par de puntos x y y. Una condición necesaria y suficiente para que X sea del tipo A' es que todo subcontinuo de X con interior no vacío sea descomponible.*

Demostración. Supongamos que todo subcontinuo de X con interior no vacío es descomponible. Utilizando la parte *a)* del Lema 3.1.10, podemos reescribir a X de la siguiente manera: $X = X_x \cup X_y$, donde $x \in X_x$, $y \in X_y$ y $Cl_X(X_x \setminus X_y) \cap X_y = Fr_X(X_x \setminus X_y)$ es conexa. Sea $W_{\frac{1}{2}} = X_x \setminus X_y$. Entonces, por la parte *b)* del Lema 1.8.2, $W_{\frac{1}{2}}$ es abierto, conexo y tiene frontera conexa. Por el inciso *c)* del Lema 1.8.2, $Cl_X(W_{\frac{1}{2}})$ es irreducible entre x y $Fr_X(W_{\frac{1}{2}})$. Usando nuevamente la parte *a)* del Lema 3.1.10, $Cl_X(W_{\frac{1}{2}})$ se puede reescribir como sigue: $Cl_X(W_{\frac{1}{2}}) = P \cup Q$ donde $x \in P$ y $Fr_X(W_{\frac{1}{2}}) \subset Q$ y $Cl_X(P \setminus Q) \cap Q$ es conexa. Sea $W_{\frac{1}{4}} = P \setminus Q$. Entonces, por la parte *b)* del Lema 1.8.2, $W_{\frac{1}{4}}$ es conexo, abierto y su frontera es conexa. Además, $W_{\frac{1}{4}} \subset W_{\frac{1}{2}}$ y $W_{\frac{1}{2}} \setminus Cl_X(W_{\frac{1}{4}})$ es conexo, esta segunda afirmación es cierta por la parte *b)* del Lema 1.8.2. Aplicando, nuevamente, la parte *a)* del Lema 3.1.10 a $Cl_X(W_{\frac{1}{4}})$ y la parte *b)* del mismo lema a $W_{\frac{1}{4}}$ y a $W_{\frac{1}{2}}$, conseguimos un par de subconjuntos abiertos, conexos, $W_{\frac{1}{8}}$ y $W_{\frac{3}{8}}$, con fronteras conexas tales que $x \in Cl_X(W_{\frac{1}{8}}) \subset W_{\frac{1}{4}} \subset Cl_X(W_{\frac{1}{4}}) \subset W_{\frac{3}{8}} \subset Cl_X(W_{\frac{3}{8}}) \subset W_{\frac{1}{2}}$ y, si r y s son cualesquiera dos números en $\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}\}$, con $s < r$, entonces $W_r \setminus Cl_X(W_s)$ es conexo. Continuando con esta construcción obtendremos una familia $\{W_r | r$ es un racional diádico en $(0, \frac{1}{2}]\}$ con las siguientes propiedades: cada W_r es un conjunto abierto, conexo de X con frontera conexa; para $r < s$, $W_r \subset W_s$ y $W_s \setminus Cl_X(W_r)$ es conexo. Como $X \setminus W_{\frac{1}{2}}$ es conexo, podemos extender el proceso para obtener una familia $\{W_r | r$ es un racional diádico en $(0,1)\}$ con las mismas propiedades anteriores. Finalmente, sea $W_1 = X$. Definamos ahora una función $f : X \longrightarrow [0,1]$ como sigue: $f(z) = \text{ínf}\{t | z \in W_t\}$. Por el Lema 3 de [21, pág. 114] f es continua. Veremos ahora que f es monótona. Supongamos que $0 < r < 1$, para cada número natural n, sean $a_n < b_n$ dos números racionales díadicos que disten de r menos que $\frac{1}{n}$ y tales que $a_n < r < b_n$. Entonces, para todo $z \in X$, $f(z) = r$ si y sólo si $z \in W_{b_n} \setminus Cl_X(W_{a_n})$ (para n lo suficientemente grande), el cual es conexo. Como $Cl_X(W_{b_{n+1}} \setminus Cl_X(W_{a_{n+1}})) \subset Cl_X(W_{b_n} \setminus W_{a_n})$, $f^{-1}[r]$ es la intersección anidada de continuos y, por el Lema 1.2.6, es conexo. Así, para cualesquiera dos números distintos, r y s, en el intervalo $[0,1]$, $f^{-1}[r] \cap f^{-1}[s] = \emptyset$, pues habrá números racionales diádicos lo suficientemente cercanos a r y a s, tales que sus preimágenes no se intersecten. Veamos que $\mathcal{D} = \{f^{-1}[r] | r \in [0,1]\}$ es una descomposición admisible para X. Sean $f^{-1}(t) \in \mathcal{D}$ y U un abierto de X tales que $f^{-1}(t) \subset U$. Tenemos que, al ser los números racionales diádicos densos en $[0,1]$, existen dos números racionales diádicos $a_n < b_n$ lo suficientemente cercanos a t tales que $W_{b_n} \setminus Cl_X(W_{a_n}) \subset U$. Así, sea $V = W_{b_n} \setminus Cl_X(W_{a_n})$. De esta manera, si $f^{-1}(s) \cap V \neq \emptyset$, entonces $a_n < s < b_n$ y, por tanto, $f^{-1}(s) \subset W_{b_n} \setminus Cl_X(W_{a_n}) \subset U$. Se sigue que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente tal que $X/\mathcal{D}$ es el intervalo. Luego, X es del tipo A. Si $\mathcal{E}$ es una descomposición admisible de X y si un elemento K de $\mathcal{E}$ tiene interior no vacío, entonces $Cl_X(Int_X(K))$ es un continuo sobre el cual los resultados anteriores se pueden aplicar. En particular, $Cl_X(Int_X(K))$ es del tipo A. Sea $\mathcal{D}'$ una descomposición admisible para $Cl_X(Int_X(K))$. Entonces procediendodo como lo hicimos en la prueba del Teorema 3.1.8 (#), combinando $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}$ podemos obtener una descomposición admisible de X que refina propiamente a $\mathcal{E}$. Esto muestra que si $\mathcal{E}$ es la descomposición mínima de X, entonces ningún elemento de $\mathcal{E}$ tiene interior no vacío. Así, X es del tipo A'.

Supongamos, ahora, que X es del tipo A' y K es un subcontinuo de X con interior no vacío. Entonces ningún elemento de la descomposición admisible mínima $\mathcal{D}$ tiene interior no vacío. Así, K no puede estar contenido en elemento alguno de $\mathcal{D}$. Por el Lema 3.1.6, K tiene una descomposición admisible y esto implicaría que K es descomponible.

Q.E.D.

3.2. Resultados principales

Teorema 3.2.1. *Sean X un continuo homogéneo indescomponible en el plano y A un subcontinuo descomponible de X. Entonces A contiene un subcontinuo homogéneo indescomponible.*

Demostración. Como A es descomponible, existen dos subcontinuos propios B y C de A tales que $A = B \cup C$. Sean $b \in B \setminus C$, $c \in C \setminus B$ y, por [13, Theorem 2-10, pág 58], sea E un subcontinuo en A irreducible entre b y c. El continuo E no posee subcontinuos indescomponibles con interior no vacío. Para ver esto, supongamos lo contrario. Sea I un continuo indescomponible en E tal que existe abierto no vacío Q de E con $Cl_X(Q) \subset I$. Como X es hereditariamente unicoherente, Teorema 1.11.12, e I es indescomponible, I está contenido en $E \cap B$ o $E \cap C$, de otra manera I sería descomponible. Sin perder generalidad, supongamos que I es un subcontinuo de $E \cap B$. Sea F la componente de $E \setminus Q$ que contiene a c. F es un continuo que no contiene a I pues está fuera de Q y Q está contenido en I y, como X es hereditariamente unicoherente, F intersecta sólo una composante de I. Esto se debe a que, por el Teorema 1.1.12, F intersecta a Q y, como $Cl_X(Q) \subset I$, F intersecta a I. Si F intersectara a dos composantes de I, $F \cap I$ sería disconexo, pero X es hereditariamente unicoherente. Sea, ahora, x un punto en la frontera de Q que pertenece a F. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(c) \subset X \setminus B$. Por el Teorema 1.6.13, existe un número de Effros δ para ε, con $\delta < \varepsilon$, y dos ε-homeomorfismos f y g de X en X tales que:

1. x, $f(x)$ y $g(x)$ están en distintas composantes de I pues, por el Corolario 1.11.9, éstas tienen interior vacío. Así, en $\mathcal{V}_\delta(x)$, existen elementos y_1 y y_2 que están en diferentes composantes de I tales que $f(x) = y_1$ y $g(x) = y_2$.

2. $\{c, f(c), g(c)\}$ es un subconjunto de $X \setminus B$. Por la elección de ε y por el Teorema 1.6.13 , $\rho(c, f(c)) < \varepsilon$ y $\rho(c, g(c)) < \varepsilon$, así $\{c, f(c), g(c)\}$ es un subconjunto de $X \setminus B$.

3. Q no está contenido en $f[F] \cup g[F]$. Esto porque $F, f[F]$y $g[F]$ son disjuntos dos a dos, pues X es hereditariamente unicoherente y cada uno de estos intersecta a diferentes composantes de I. Como I es indescomponible, sus subcontinuos propios tienen interior vacío, Corolario 1.4.4. De donde Q no puede estar contenido en $f[F] \cup g[F]$.

De lo anterior se sigue que $B \cup F \cup f[F] \cup g[F]$ es un triodo contenido en X, lo cual es una contradicción al Teorema 1.11.12. Así, todo subcontinuo de E con interior no vacío es descomponible.

Por Teorema 3.1.11, E es del tipo A$'$ y, por Teorema 3.1.8, E posee una descomposición admisible mínima $\mathcal{D}$, donde cada elemento de $\mathcal{D}$ tiene interior vacío. Sea $k : E \longrightarrow [0, 1]$ la función cociente asociada a $\mathcal{D}$. Existe $s \in (0, 1)$ tal que $k^{-1}(s)$ es no degenerado, de lo contrario, por [35, Theorem 21, pág. 29] E contendría un arco y X sería una curva cerrada simple, por el Teorema 2.2.1, lo cual contradice la suposición de que X es indescomponible. Sean $Y = k^{-1}(s)$ y tomemos dos puntos distintos p y q de Y. Probaremos que existe un homeomorfismo de Y en sí mismo tal que manda a p en q. Sean r y t números tales que $0 < r < s < t < 1$ y $\varepsilon = \rho(k^{-1}([r, t]), k^{-1}(0) \cup k^{-1}(1))$. Sea $\mathcal{W}$ una cubierta abierta de Y tal que, para cada $W \in \mathcal{W}$, si y y z son elementos de W, entonces existe un homeomorfismo h de X en X tal que $h(y) = z$ y $\rho(v, h(v)) < \epsilon$ para todo $v \in X$. Esta cubierta existe por el Teorema 1.6.13. Por el Lema 1.6.6 existe una cadena abierta de $\mathcal{W}$, $\{W_i\}_{i=1}^n$ tal que $q \in W_1$, $p \in W_n$ y $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$ para $1 \leq i < n$. Sea ahora $\{p_i\}_{i=1}^n$ tal que $p_1 = q$, $p_n = p$ y $p_i \in W_i \cap W_{i+1}$ para $0 < i < n$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sea h_i un homeomorfismo de X en X tal que $h_i(p_i) = p_{i-1}$ y $\rho(v, h_i(v)) < \epsilon$ para todo $v \in X$.

Cada h_i manda a Y en sí mismo. Para ver esto, supongamos lo contrario, que $h_i[Y]$ no está contenido en Y. Notemos que $h_i k^{-1}[[r, t]]$ no intersecta a $k^{-1}(0) \cup k^{-1}(1)$, pues $\rho(v, h_i(v)) < \epsilon$. Como $Y \cap h_i[Y] \neq \emptyset$ y X es atriódico y hereditariamente unicoherente, $h_i[Y] \subset h_i k^{-1}[[r, t]] \subset E$, pues de no ser así, si $h_i k^{-1}[[r, t]] \setminus E \neq \emptyset$ y $h_i k^{-1}[[r, t]] \cap E \neq \emptyset$, entonces $h_i k^{-1}[[r, t]] \cup E$ contendría un triodo, pues $(h_i k^{-1}[[r, t]] \cup E) \setminus (h_i k^{-1}[[r, t]] \cap E)$ tiene al menos tres componentes, la que está fuera de E, una componente que intersecta a $k^{-1}(0)$ y una componente que intersecta a $k^{-1}(1)$, (como observación $h_i k^{-1}[[r, t]] \cap E$ es un continuo, al ser X hereditariamente unicoherente). Así, sean d y e números tales que $kh_i[Y] = [d, e]$. Como E es del tipo A$'$, cada elemento de $H = \{k^{-1}(u) | d < u < e\}$ está en $h_i[Y]$, Lema 3.1.6.

Como $h_i[Y] \cap h_i[k^{-1}(r) \cup k^{-1}(t)] = \emptyset$, el conjunto $h_i[k^{-1}(r) \cup k^{-1}(t)]$ está contenido en $k^{-1}[[0, d] \cup [e, 1]]$. Sean R y T las componentes conexas de $h_i[E] \setminus h_i[Y]$

que contienen a $h_ik^{-1}(r)$ y a $h_ik^{-1}(t)$, respectivamente. Notemos que $R \cup T$ está en $k^{-1}[[0,d] \cup [e,1]] \cup h_ik^{-1}[[0,r] \cup [e,1]]$. Como $h_ik^{-1}(r)$ separa a $h_ik^{-1}[[0,r]]$ de $h_i[Y]$ y $h_ik^{-1}(t)$ separa a $h_ik^{-1}[[t,1]]$ de $h_i[Y]$ (esto en $h_i[E]$), la cerradura de $R \cup T$ no intersecta a elemento alguno de H. Entonces $h_i[Y]$ contiene un subconjunto abierto no vacío de $h_i[E]$, lo cual contradice el hecho de que $h_i[Y]$ sea un elemento de $\{h_ik^{-1}(u) | 0 \leq u \leq 1\}$ (la descomposición admisible mínima de $h_i[E]$). De aquí se sigue que $h_i[Y] \subset Y$. Usando el mismo argumento se puede demostrar que $Y \subset h_i[Y]$. Así, cada h_i es un homeomorfismo de Y en sí mismo. Finalmente $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \cdots \circ h_n|_Y$ es un homeomorfismo de Y en sí mismo que manda p a q. Así, Y es homogéneo.

Como Y es un continuo homogéneo unicoherente en el plano, éste es indescomponible [18, Theorem 2, pág. 739].

Q.E.D.

Corolario 3.2.2. *Si X es un continuo homogéneo indescomponible en el plano, entonces ningún subcontinuo de X es hereditariamente descomponible.*

Teorema 3.2.3. *La curva cerrada simple es el único continuo homogéneo en el plano que posee un subcontinuo hereditariamente descomponible.*

Demostración. Sea X un continuo homogéneo en el plano que tiene un subcontinuo hereditariamente descomponible H. Supongamos que X no es una curva cerrada simple. Sea $\mathcal{G}$ la descomposición de Jones de X [25, Theorem 5.1.19, pág 234]. Ésta tiene la propiedad de que cada uno de sus elementos es un continuo homogéneo indescomponible. Por el Corolario 3.2.2, H no puede estar contenido en elemento alguno de $\mathcal{G}$. Por otro lado, si H intersecta a algún elemento de $\mathcal{G}$, entonces contendría a un elemento de $\mathcal{G}$ [25, Theorem 5.1.19, pág. 234], lo cual es una contradicción al hecho de que H es hereditariamente descomponible. Así, X debe ser una curva cerrada simple.

Q.E.D.

Corolario 3.2.4. *Si X es un continuo homogéneo hereditariamente descomponible en el plano entonces es una curva cerrada simple.*

Demostración. Como X es un subcontinuo de sí mismo, posee un subcontinuo hereditariamente descomponible. Así, por el Teorema 3.2.3, X es una curva cerrada simple.

Q.E.D.

Capítulo 4

El solenoide descomponible

Este capítulo tiene como base una selección de resultados del artículo de T. Maćkowiak y E. D. Tymchatyn titulado *Continuous mappings on continua, II* [28]. Los resultados son necesarios para poder demostrar el Teorema 4.2.5, que dice que todo continuo homogéneo y atriódico que contiene un continuo hereditariamente descomponible es un solenoide. Aquí cabe resaltar un resultado importante, todo solenoide que no sea la curva cerrada simple es indescomponible (Observación 4.2.3). De aquí que se puede vincular con el tema de la tesis.

A diferencia de los demás capítulos, éste utilizará herramientas diferentes a las del artículo original. Esto con el propósito de no abarcar temas que se salen del tópico base y dar un resultado más directo y digerible para el teorema principal.

4.1. Primeros resultados

El siguiente lema es fundamental para este capítulo, es conocido como el *Teorema de Dyer*. Como la demostración de este lema se sale de los fines del trabajo, sólo será enunciado. Sin embargo, una prueba del Teorema de Dyer puede ser encontrada en [22]. Antes daremos una definición.

Definición 4.1.1. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Diremos que A es un *conjunto del tipo G_δ* si es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos.

Lema 4.1.2. *Sean X y Y dos continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva, abierta y monótona. Entonces existe un subconjunto G_δ y denso A de Y que posee la siguiente propiedad: para cada $y \in A$, cada subcontinuo $B \subset f^{-1}(y)$, cada x del interior de B en $f^{-1}(y)$ y cada vecindad U de B en X, existen un subcontinuo Z de X que contiene a B y una vecidad V de y en Y tales que $x \in Int_X(Z)$, $(f|_Z)^{-1}(V) \subset U$ y $f|_Z : Z \longrightarrow Y$ es una función monótona y suprayectiva.*

Corolario 4.1.3. *En el Lema 4.1.2, los elementos de la forma $f^{-1}(y)$ con $y \in A$ son continuos indescomponibles.*

Demostración. Supongamos que $f^{-1}(y)$, con $y \in A$, es descomponible. Por el Lema 1.4.3, existe un subcontinuo propio B de $f^{-1}(y)$ con interior no vacío en $f^{-1}(y)$. Como B es un subcontinuo propio de $f^{-1}(y)$, existe un abierto U de X que contiene a B tal que $f^{-1}(y) \setminus U \neq \emptyset$. Entonces, por el Lema 4.1.2, existen un subcontinuo Z de X y un abierto V de Y que contiene a y tales que $(f|_Z)^{-1}(V) \subset U$. De aquí tenemos que $f^{-1}(y) \subset (f|_Z)^{-1}(V) \subset U$. Pero esto es una contradicción pues tendríamos que $f^{-1}(y) \setminus U = \emptyset$. Así que las preimágenes de los elementos de A son indescomponibles.

Q.E.D.

Definición 4.1.4. Un subcontinuo Q de un continuo X es llamado *terminal* si para cada subcontinuo K de X tal que $Q \cap K \neq \emptyset$, se tiene que $K \subset Q$ o bien $Q \subset K$.

Lema 4.1.5. *Sean X y Y continuos y Q un subcontinuo propio y terminal de X. Si $h : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $h(Q)$ es un subcontinuo propio y terminal de Y.*

Demostración. Como $h(Q)$ es un subcontinuo propio de Y, sólo basta ver que es terminal. Sea K un subcontinuo de Y tal que $h(Q) \cap K \neq \emptyset$. Entonces $Q \cap h^{-1}(K) \neq \emptyset$. Como Q es terminal, pueden pasar dos cosas: la primera es que $Q \subset h^{-1}(K)$, lo que implicaría que $h(Q) \subset K$, y la segunda es que $h^{-1}(K) \subset Q$, de donde tendríamos que $K \subset h(Q)$. Por tanto, $h(Q)$ es un subcontinuo terminal de X

Q.E.D.

Lema 4.1.6. *Sean X un continuo y Q un subcontinuo no degenerado, propio y terminal de X. Entonces $Int_X(Q) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que Q es un subcontinuo no degenerado, propio y terminal de X. Por el Corolario 1.1.13, Q intersecta a cada componente de $Cl_X(X \setminus Q)$. Entonces, como Q es terminal, para cada componente K de $Cl_X(X \setminus Q))$, $Q \subset K$ o $K \subset Q$. Si todas las componentes de $Cl_X(X \setminus Q)$ quedaran contenidas en Q, tendríamos que $Cl_X(X \setminus Q) \subset Q$ y, como $X = Q \cup Cl_X(X \setminus Q)$, $X = Q$, lo cual no puede ser posible. Eso significa que Q está contenido en al menos una componente de $Cl_X(X \setminus Q)$. Por lo tanto, $Q \subset Cl_X(X \setminus Q)$, lo que significa que $X = Cl_X(X \setminus Q)$. Esto sólo pasa si $Int_X(Q) = \emptyset$.

Q.E.D.

Lema 4.1.7. *Si Q es un subcontinuo propio y terminal de un continuo homogéneo X (con métrica ρ). Entonces Q es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que Q es como en las hipótesis y, además, es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios A y B de Q tales que $Q = A \cup B$. Sean $a \in A \setminus B$, $b \in B \setminus A$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}\text{mín}\{\rho(a, B), \rho(b, A)\}$. Como X posee la propiedad de Effros (Teorema 1.6.13), existe un ε-homoemorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(Q) \cap Q \neq \emptyset$. Veremos que $h(Q) = Q$. Como $h(Q) \cap Q \neq \emptyset$, podemos suponer que $h(A) \cap Q \neq \emptyset$. Como B no está contenido en $h(A)$ y

Q es un continuo terminal, $h(A) \subset Q$. Esto implica que $h(B) \cap Q \neq \emptyset$, pues $B \cap A \neq \emptyset$. Como A no está contenido en $h(B)$ y Q es terminal, $h(B) \subset Q$. De lo anterior obtenemos que $h(Q) \subset Q$. Por el Lema 1.6.3, h^{-1} es un ε-homeomorfismo. Entonces, usando un argumento análogo al anterior, tenemos que $h^{-1}(Q) \subset Q$. Así, $Q \subset h(Q)$ y $h(Q) = Q$.

Sean $\delta > 0$, un número de Effros para $\frac{\varepsilon}{3}$ y K la componente de $Cl_X(\mathcal{V}_{\frac{\delta}{2}}(Q))$ que contiene a Q. Como X es un continuo, por el Teorema 1.1.12, Q está contenido propiamente en K. Consideremos ahora dos $\frac{\varepsilon}{3}$-homeomorfismos h y g de X en X, tales que $h(Q) \cap K \neq \emptyset$ y $h(Q) \cap g(Q) \neq \emptyset$. Mostraremos que $h(Q) = g(Q) \subset K$. Por el Lema 4.1.5, $h(Q)$ es un subcontinuo terminal de X. De donde se tiene que $h(Q) \subset K$. Como $h^{-1}(g(Q)) \cap Q \neq \emptyset$ y $h^{-1} \circ g$ es un ε-homeomorfismo (Corolario 1.6.4). Por el parrafo anterior, $h^{-1}(g(Q)) = Q$. De donde $h(Q) = g(Q)$. Esto implica que $\mathcal{Y} = \{h(Q) | h$ es un $\frac{\varepsilon}{3}$-homeomorfismo$\}$ es una descomposición de K.

Probaremos que $\mathcal{Y}$ es una descomposición continua de K. Sean $G \in \mathcal{Y}$ y U un abierto de X tales que $G \subset U$. Sea $0 < \varepsilon_0 <$mín$\{\frac{\varepsilon}{3}, \rho(G, K \setminus U)\}$, el cual existe por que G y $K \setminus U$ son compactos y ajenos, lo que implica que $\rho(G, K \setminus U) > 0$. Sea $\eta_0 > 0$ un número de Effros para ε_0. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\eta_0 < \varepsilon_0$. Sea $V = \mathcal{V}_{\eta_0}(G) \cap K$. Entonces V es un abierto en K contenido en U. Sean $G' \in \mathcal{Y}$ tal que $G' \cap V \neq \emptyset$, $g' \in G\ \cap V$ y $g \in G$ de tal forma que $\rho(g, g') < \eta_0$. Como η_0 es un número de Effros para ε_0, existe un ε_0-homeomorfismo de X en sí mismo tal que $h(g) = g'$. Así, $h(G) \cap G' \neq \emptyset$, por la forma en que se definió $\mathcal{Y}$, $h(G) = G'$. Luego, $G' \subset U$. Así, $\mathcal{Y}$ es semicontinua superiormente. Veamos que $\mathcal{Y}$ es semicontinua inferiormente. Sean $G \in \mathcal{Y}$, g_0 y g_1 elementos en G y U un abierto de K tal que $g_0 \in U$. Sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\mathcal{V}_{\varepsilon_1}(G) \cap K \subset U$. Sea $\eta_1 > 0$ un número de Effros para ε_1. Sin perder generalidad, $\eta_1 < \varepsilon_1$. Sean $V = \mathcal{V}_{\eta_1}(g_1) \cap K$, $G' \in \mathcal{Y}$ tales que $G' \cap V \neq \emptyset$ y $g' \in G' \cap V$. De esta manera $\rho(g_1, g') < \eta_1$. Entonces, existe un ε_1-homeomorfismo $k : X \longrightarrow X$ tal que $k(g_1) = g'$. Se sigue que $k(G) \cap G' \neq \emptyset$ y, por la forma en que se definió $\mathcal{Y}$, $k(G) = G'$. Como $k(g_0) \in U \cap G'$, $G' \cap U \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{Y}$ es semicontinua inferiormente y, por último, continua. Esto implica que, por el Teorema 1.5.6, la función cociente $q : K \longrightarrow K/\mathcal{Y}$ es tanto abierta como cerrada. Como los elementos de $\mathcal{Y}$ son subcontinuos de K, q es monótona.

Como q es monótona y abierta, consideramos el subconjunto G_δ denso W en $X/\mathcal{Y}$, el cual existe por el Teorema de Dyer (Lema 4.1.2). Sean $\chi \in W$ y $z \in K$ tales que $q(z) = \chi$. Sin perder generalidad, supondremos que $z \in Q$. Sabemos que $Q = A \cup B$ y que $a \in A \setminus B$. Sea U un abierto de K tal que $A \subset U$ y $B \setminus U \neq \emptyset$. Por el Teorema de Dyer (Lema 4.1.2), existen un subcontinuo Z de K tal que $A \subset Z$ y una vecindad V de χ en $X/\mathcal{Y}$ tales que $a \in Int_K(Z)$ y $(q|_Z)^{-1}(U) \subset U$. Como $a \in Q \cap Int_K(Z) \neq \emptyset$ y Q es terminal, se tiene que $Q \subset Z$ (Lema 4.1.6). Esto implica que $Q \subset (q|_Z)^{-1}(V) \subset U$, lo cual es una contradicción, pues $Q \setminus U \neq \emptyset$. Esto implica que Q es indescomponible.

Q.E.D.

Definición 4.1.8. Sea f una función continua y suprayectiva de un continuo X sobre un continuo Y. Diremos que f es *atómica* si para cada subcontinuo

K de X, se tiene que $K = f^{-1}(f(K))$, siempre que $f(K)$ sea no degenerado.

Lema 4.1.9. *Sean X y Y dos continuos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función atómica entonces es monótona.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y supongamos que $f^{-1}(y) = M \cup N$, donde M y N son dos subconjuntos cerrados y ajenos en X. Supongamos que $M \neq \emptyset$. Como X es normal (Proposición 1.1.6), existen dos subconjuntos abiertos ajenos U y V de X tales que $M \subset U$ y $N \subset V$. Sean $x \in M$ y K la componente de $Cl_X(U)$ que contiene a x. Por el Lema 1.1.12, $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$. Sea $z \in K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$. Como $Cl_X(U) \cap V = \emptyset$ y $Fr_X(U) = Cl_X(U) \setminus U$, tenemos que $z \notin f^{-1}(y)$. Así, $f(K)$ es no degenerado y, al ser f atómica, $K = f^{-1}(f(K))$. Como $y = f(x) \in f(K)$, tenemos que $M \cup N = f^{-1}(y) \subset K \subset Cl_X(U)$. Luego, $N \subset K$ y, como $K \cap N = \emptyset$, $N = \emptyset$. Finalmente, $f^{-1}(y)$ es conexo.

Q.E.D.

Lema 4.1.10. *Sean X y Y dos continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, suprayectiva, abierta y atómica, entonces existe un subconjunto G_δ denso A de Y tal que $f^{-1}(t)$ es indescomponible para cada $t \in A$.*

Demostración. Como f es atómica, por el Lema 4.1.9, es monótona. Entonces se puede usar el Lema 4.1.2 para obtener un subconjunto G_δ denso A de Y que, por el Corolario 4.1.3, cumple con que $f^{-1}(t)$ es indescomponible para cada $t \in A$.

Q.E.D.

Una prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [28, (10.5)].

Lema 4.1.11. *Sea X un continuo unicoherente que no es un triodo. Entonces X es irreducible entre algún par de sus puntos.*

Lema 4.1.12. *La intersección de cualesquiera dos subcontinuos de un continuo atriódico tiene a lo más dos componentes.*

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos de un continuo atriódico X. Supongamos que $A \cap B$ tiene, por lo menos, tres componentes. Sean C_1, C_2 y C_3 tres componentes de $A \cap B$. Consideremos U_1, U_2 y U_3, tres abiertos de A que contienen a C_1, C_2 y C_3, respectivamente, y que son ajenos dos a dos. Por el Corolario 1.1.14, existen tres subcontinuos de A (que también son subcontinuos de X), D_1, D_2 y D_3, que contienen propiamente a C_1, C_2 y C_3, respectivamente, y se quedan contenidos en U_1, U_2 y U_3, respectivamente. Por construcción, $D_i \cap B \neq \emptyset$ y $D_i \setminus B \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Así, definimos $B' = B \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$, el cual es un triodo, pues $B' \setminus B$ posee tres componentes. Lo cual es una contradicción. Así que $A \cap B$ tiene a lo más dos componentes.

Q.E.D.

Lema 4.1.13. *Si X es un continuo atriódico y K es un subcontinuo propio de X que no es unicoherente. Entonces K es un subcontinuo terminal de X.*

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos propios de K tales que $K = A \cup B$ y $A \cap B = P \cup Q$, donde P y Q son subcontinuos ajenos, esto se puede realizar por el Lema 4.1.12. Por [13, Theorem 2-11, pág 44], sean A' un subcontinuo de A irreducible entre P y Q, y B' un subcontinuo de B irreducible entre $P \cap A'$ y $Q \cap A'$.

Afirmamos que $P \cap A'$ y $Q \cap A'$ son continuos. Notemos que $A' \cup P \cup Q = A$ y que $B' = B$. Para la primera afirmación, tenemos que, como $A' \cap B = (P \cap A') \cup (Q \cap A')$, por el Lema 4.1.12, $A' \cap B$ sólo puede tener a lo más dos componentes y, como $P \cap A'$ y $Q \cap A'$ son ajenos y no vacíos, $P \cap A'$ y $Q \cap A'$ deben ser continuos. Ahora, para la segunda afirmación, sean U y V dos vecindades de P y Q en X, respectivamente, tales que $Cl_X(U) \cap Cl_X(V) = \emptyset$ y E y F componentes de $B \cap Cl_X(U)$ y $B \cap Cl_X(V)$, respectivamente. Si $A \setminus (A' \cup P \cup Q) \neq \emptyset$ entonces $A \cup E \cup F$ sería un triodo, pues $(A \cup E \cup F) \setminus (A' \cup P \cup Q)$ tendría al menos tres componentes, lo cual es una contradicción. Así, $A = A' \cup P \cup Q$. Usando un argumento similar veremos que $B = B'$. Sean E' y F' componentes de $A \cap Cl_X(U)$ y $B \cap Cl_X(V)$, respectivamente. Si $B \setminus B' \neq \emptyset$ entonces $B \cup E' \cup F'$ sería un triodo, pues $(B \cup E' \cup F') \setminus (B' \cup P \cup Q)$ tendría tres componentes. Con base en lo anterior, podemos suponer que A y B son irreducibles entre cada punto de P y cada punto de Q. Sea K' un subcontinuo de X tal que $K' \setminus K \neq \emptyset$ y $K' \cap K \neq \emptyset$. Para demostrar que K es terminal, es suficiente demostrar que $K \subset K'$. Supongamos que $K \not\subset K'$. Por el Lema 4.1.12, $K \cap K'$ tiene a lo más dos componentes C_1 y C_2. Consideraremos tres casos:

A) $C_1 \cap B = \emptyset$.

Sean U_1, U_2 y U_3 vecindades abiertas con cerraduras ajenas de C_1, P y Q, respectivamente. Si D_2, D_2 y D_3 denotan las componentes de $Cl_X(U_1) \cap K'$, $Cl_X(U_2) \cap B$ y $Cl_X(U_3) \cap B$, respectivamente, que contienen a C_1, P y Q, respectivamente, entonces el conjunto $(A \cup D_1) \cup (A \cup D_2) \cup (A \cup D_3)$ es un triodo, lo cual es una contradicción.

B) $C_1 \cap P \neq \emptyset$ y $C_1 \cap Q = \emptyset$.

Sea U un abierto que contiene a $C_1 \cap P$ tal que $Cl_X(U) \subset X \setminus (C_2 \cup Q)$. Si D_1, D_2 y D_3 son las componentes de $Cl_X(U) \cap K'$, $Cl_X(U) \cap (A \cup C_1)$ y $Cl_X(U) \cap (B \cup C_1)$, respectivamente, tales que $C_1 \cap P \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Entonces el conjunto $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ es un triodo, lo cual es una contradicción.

C) $C_1 \cap P \neq \emptyset$ y $C_1 \cap Q \neq \emptyset$.

Como A y B son irreducibles, podemos suponer que $A \subset C_1$. La suposición y simetría implica, por los casos A) y B), que $C_2 = \emptyset$ y $C_1 \cap B$ tiene exactamente dos componentes, D_1 y D_2, que contienen a P y a Q, respectivamente. Sean U_1 y U_2 dos vecindades abiertas con cerraduras ajenas de D_1 y D_2, respectivamente, y K_1 y K_2 componentes de $B \cap Cl_X(U_1)$ y $B \cap Cl_X(U_2)$, respectivamente. Así, el conjunto $(C_1 \cup K_1) \cup (C_1 \cup K_2) \cup K'$ es un triodo, lo cual es una contradicción.

Por tanto, K debe de ser un subcontinuo terminal de X.

Q.E.D.

4.2. Teorema Principal

Definición 4.2.1. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de continuos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$ una función continua. Entonces, la doble sucesión de espacios y funciones $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ será llamada *sucesión inversa*. Definiremos el *límite inverso de* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, denotado como $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ o X_∞, como el subespacio del producto topológico $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dado por:

$$\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n | f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Los límites inversos cumplen propiedades muy interesantes que no trataremos aquí. Sin embargo, hay un tipo de continuos dados a partir de límites inversos que utilizaremos fuertemente, los solenoides.

Definición 4.2.2. Sea $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k^{k+1} : \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathcal{S}^1$(con $\mathcal{S}^1$ el círculo unitario) dada por $f_k^{k+1}(z) = z^{n_k}$ (la multiplicación en números complejos). Entonces definiremos $\Sigma_{\mathbf{n}} = \varprojlim\{X_k, f_k^{k+1}\}$, donde $X_k = \mathcal{S}^1$ para toda $k \in \mathbb{N}$. A $\Sigma_{\mathbf{n}}$ se le llamará el $\mathbf{n}$-*solenoide.*

Observación 4.2.3. Por [25, Theorem 2.1.19], tenemos que si, en la definición anterior, $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} n_k \neq 1$, entonces $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un continuo indescomponible. Utilizando este mismo resultado y [25, Theorem 2.1.38], es fácil ver que el único solenoide descomponible es una curva cerrada simple.

Definición 4.2.4. Sean $\mathcal{G}$ una descomposición de un espacio X y $\mathcal{H}$ una familia de homeomorfismos de X en X. Diremos que $\mathcal{H}$ *respeta* a $\mathcal{G}$ si para cualesquiera dos elementos G_1 y G_2 de $\mathcal{G}$ y cualquier elemento $h \in \mathcal{H}$ se tiene que $h(G_1) = G_2$ o $h(G_1) \cap G_2 = \emptyset$.

Teorema 4.2.5. *Todo continuo homogéneo y atriódico que contiene un continuo hereditariamente descomponible es un solenoide.*

Demostración. Sean X un continuo homogéneo y atriódico y Q un subcontinuo propio y hereditariamente descomponible de X. Notemos que Q es unicoherente, pues de no serlo, por el Lema 4.1.13, Q sería un subcontinuo propio, terminal y descomponible de un continuo homogeneo. Se seguiría, por el Lema 4.1.7, que Q sería descomponible e indescomponible, lo cual sería una clara contradicción. Así, Q es unicoherente. Como Q no es un triodo, por el Lema 4.1.11, Q es irreducible entre algún par de sus puntos.

Tenemos que Q es hereditariamente descomponible, así, todos sus subcontinuos propios con interior no vacío son descomponibles. Por el Teorema 3.1.11, Q es del tipo A'. Entonces, por el Teorema 3.1.8, existe una descomposición admisible mínima, $\mathcal{G}$, de Q tal que su cociente es homeomorfo a $[0,1]$. Sea $q : X \longrightarrow [0,1]$ la función cociente. Tomemos $t \in (0,1)$ y consideremos $W = q^{-1}(t)$. Sean ahora t_0 y t_1, elementos en $[0,1]$, tales que

$0 < t_0 < t < t_1 < 1$ y q^{-1} es continua en ellos, éstos existen por [23, Corollary 1, pág. 71]. Notemos, por lo anterior, que el conjunto $q^{-1}([t_0, t_1])$ es un continuo irreducible entre cualquier punto de $q^{-1}(t_0)$ y de $q^{-1}(t_1)$. Sean ahora $t_0 < t'_0 < t < t'_1 < t_1$ y definamos:

$$\rho(A, B) = \text{ínf}\{\rho(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\},$$

donde A y B son subonjuntos de X. También definiremos:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\text{mín}\{\rho(q^{-1}([t_0, t_1]), q^{-1}(0) \cup q^{-1}(1)), \\ \rho(q^{-1}(t_0), q^{-1}([t'_0, 1])), \rho(q^{-1}(t_1), q^{-1}([0, t'_1]))\}.$$

Como X es un continuo homogéneo, por el Teorema 1.6.13, X tiene la propiedad de Effros. Así, sea δ un número de Effros para ε. Sean $v \in q^{-1}((t'_0, t'_1)) \cap \mathcal{V}_\delta(W)$ y w elemento de W tales que $\rho(w, v) < \delta$. Entonces existe un ε-homeomorfismo h de X en sí mismo tal que $h(w) = v$. Por como ha sido seleccionado ε y porque X es atriódico, tenemos que $q^{-1}((t'_0, t'_1)) \subset h(q^{-1}([t_0, t_1]) \subset Q \setminus (q^{-1}(0) \cup q^{-1}(1))$. Como W es la preimagen, bajo q, de un elemento de $[t'_0, t'_1]$, $h(W)$ será la preimagen, bajo q, de un elemento de $[t_0, t_1]$ y estará contenido en $h(q^{-1}([t'_0, t'_1])$. Para ver esto, supongamos que $h(W)$ no es la preimagen, bajo q, de de ningún elemento de $[t'_0, t'_1]$. Primero supongamos que $q(h(W)) = [a, b] \subset [t'_0, t'_1]$, entonces, por el Lema 3.1.6, $h(W)$ posee una descomposición admisible. Como h es un homeomorfismo, las preimágenes de la descomposición de $h(W)$, bajo h, formarán una descomposición admisible de W. Pero ésto no puede pasar, pues q es la función cociente de una descomposición admisible mínima. Así, $h(W) \subset q^{-1}(r)$ para algún $r \in [t'_0.t'_1]$. De donde $W \subset h^{-1}(q^{-1}(r))$. Por la misma razón que antes, $h^{-1}(q^{-1}(r))$ no puede intersectar a dos elementos de la descomposición asociada a q, entonces $h^{-1}(q^{-1}(r)) \subset W$, por lo que $W = h^{-1}(q^{-1}(r))$. Finalmente $W = q^{-1}(s)$, para algún $s \in [t'_0, t'_1]$. Por lo tanto, $h(W)$ es el elemento en la descomposición de Q que contiene a v.

Así, tenemos que, para cada $t \in [0, 1]$, existen dos elementos s y r de $(0, 1)$, tales que $s < t < r$, y donde q^{-1} es continua ([23, Corollary 1, pág. 71]) y un $\varepsilon > 0$ tal que las imágenes de W bajo ε-homeomorfismos forman una descomposición de $q^{-1}([s, r])$ en el arco $[s, r]$. Demostraremos que con esta propiedad $\mathcal{G}$ es una descomposición semicontinua inferiormente.

Sea $a \in (s, r)$ y consideremos $q^{-1}(a)$. Sean ahora p y q dos elementos de $q^{-1}(a)$ y U un abierto de X tal que $p \in U$. Sea $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' < \varepsilon$, donde ε es el número dado en el párrafo anterior, y tal que $\mathcal{V}_{\varepsilon'}(p) \subset U$. Sea $\delta > 0$ un número de Effros para ε' y consideremos $V = \mathcal{V}_\delta(q)$. Sean ahora $b \in [0, 1]$ tal que $q^{-1}(b) \cap V \neq \emptyset$ y $z \in q^{-1}(b) \cap V$. Entonces $\rho(q, z) < \delta$. Como δ es un número de Effros para ε', existe un ε'-homeomorfismo, $k : X \longrightarrow X$, tal que $k(q) = z$ y, en particular, $\rho(q, z) < \varepsilon'$. Así tenemos que $k(p) \in U$ y, como los ε-homeomorfismos mandan a $q^{-1}(a)$ en elementos de la descomposición y $k(q) \in q^{-1}(b)$, tenemos que $k(q^{-1}(a)) = q^{-1}(b)$. Por lo tanto, $q^{-1}(b) \cap U \neq \emptyset$. Así, $q^{-1}([s, r])$ es una descomposición semicontinua inferiormente. Finalmente, por [25, Theorem 1.2.23, pág. 16], tenemos que q es una función abierta.

Usando el Lema 4.1.2, tenemos que existe un subconjunto A de $[0,1]$, del tipo G_δ, tal que, para todo subcontinuo B de $q^{-1}(y)$, con $y \in A$, para cada $x \in Int_{q^{-1}(y)}(B)$ y cada vecindad U de B en Q se cumple que, existe un subcontinuo Z de Q tal que $B \subset Z$ y un abierto V de $[r,s]$ alrededor de y tal que $(q|_Z)^{-1}(V) \subset U$ y $q|_Z$ es monótona y suprayectiva. Por el Corolario 4.1.3, los elementos de la forma $q^{-1}(y)$ con $y \in A$ son indescomponibles. Como los ε-homeomorfismos respetan la descomposición, tenemos que todos los elementos de la descomposición son indescomponibles. Pero tenemos que Q es hereditariamente descomponible. Entonces a los elementos de la descomposición de Q sólo les queda ser conjunos de un sólo punto. Por lo tanto $q^{-1}[s,r]$ es un arco.

Finalmente, por [28, (14.4), pág. 34], tenemos que X es un solenoide.

Q.E.D.

Corolario 4.2.6. *Si X es un continuo homogéneo, hereditariamente descomponible y atriódico entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Como X un continuo homogéneo, hereditariamente descompoible y atriódico. Por el Teorema 4.2.5 X es un solenoide. Pero X mismo es descomponible y, por la Observación 4.2.3, X debe ser una curva cerrada simple.

Q.E.D.

Capítulo 5

Ocho condiciones para la curva cerrada simple

En este capítulo encontraremos el resultado más reciente para la pregunta que origina esta tesis. Este teorema es el principal para el artículo que estamos tratando.

El teorema da, para un continuo homogéneo hereditariamente descomponible, ocho condiciones, de las cuales basta que se cumpla una para asegurar que se esté hablando de la curva cerrada simple.

Este capítulo, al igual que el capítulo 2 con su respectivo artículo, es muy similar al artículo de S. Macías y S. B. Nadler, Jr. *On hereditarily decomposable homogeneous continua* [27], y ha sido dividido en tres secciones, la primera consta de las herramientas necesarias para resolver el teorema principal. La segunda sección consta del enunciado y demostración de dicho teorema. Finalmente, la tercera sección contiene resultados que dan información interesante en caso de que la curva cerrada simple resulte no ser el único continuo homogéneo hereditariamente descomponible.

5.1. Primeros resultados

Comenzaremos definiendo una de las métricas más utilizadas en topología. Esta métrica se define en el espacio de los subconjuntos compactos de un espacio métrico y nos servirá para definir la propiedad de Kelley.

Definición 5.1.1. Sea X un continuo. Definimos $2^X = \{A \subset X | A \text{ es compacto y no vacío}\}$.

Definimos $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \longrightarrow [0, \infty)$ como $\mathcal{H} : \mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 | A \subset \mathcal{V}_\epsilon(B) \text{ y } B \subset \mathcal{V}_\epsilon(A)\}$. Esta función es una métrica ([25, Theorem 1.8.3, pág 59]) y es mejor conocida como *la métrica de Hausdorff*.

Definición 5.1.2. Un continuo X tiene la *propiedad de Kelley en un punto* $p \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in X$, $\rho(p, q) < \delta$ y P es un subcontinuo de X que contiene a p, entonces existe un un subcontinuo Q de X que contiene a q tal que $\mathcal{H}(P, Q) < \epsilon$, donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff. A δ se le llama *un número de Kelley para* ε. Se dice que un continuo X tiene *la* *propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos. Un continuo X tiene *la propiedad de Kelley hereditariamente* si cada uno de sus subcontinuos tiene la propiedad de Kelley.

Lema 5.1.3. *Sea X un continuo homogéneo. Entonces X posee la propiedad de Kelley.*

Demostración. Como X es homogéneo, por el Teorema 1.6.13, posee la propiedad de Effros. Sean $p \in X$, $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, \varepsilon)$ un número de Effros para ε. Consideremos $q \in X$ tal que $\rho(p,q) < \delta$ y P un subcontinuo de X tal que $p \in P$. Entonces existe un $\varepsilon-$homeomorfismo h de X en X tal que $h(p) = q$. Sea $Q = h(P)$, éste es un subcontinuo de X que contiene a q tal que para cualquier $p_1 \in P$ existe $q_1 = h(p_1) \in Q$ tal que $\rho(p_1, q_1) < \varepsilon$, esto por que h es un ε-homeomorfismo, de la misma manera, para cualquier $q_1 \in Q$ existe $p_1 = h^{-1}(q_1) \in P$ tal que $\rho(q_1, p_1) < \varepsilon$. Por tanto, $\mathcal{H}(P, Q) < \varepsilon$. Luego, X posee la propiedad de Kelley.

Q.E.D.

Lema 5.1.4. *Si X es un continuo con la propiedad de Kelley en un punto p y éste es un punto de separación local de X, entonces X es conexo en pequeño en p.*

Demostración. Sean $\varepsilon_0 > 0$ y R una vecindad compacta de p en X tales que $R \setminus \{p\} = M_1 \cup M_2$, con $M_j \cap C \neq \emptyset$, para $j \in \{1, 2\}$, y con M_1 y M_2 mutuamente separados, donde C es la componente de p en R. Sean $\varepsilon \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$ tal que $Cl_X(\mathcal{V}_{2\varepsilon}(p)) \subset R$ y $\delta \in (0, \varepsilon)$ un número de Kelley para ε. Sea L_p la componente de p en $Cl_X(\mathcal{V}_{2\varepsilon}(p))$. Notemos que $L_p \subset C$, pues L_p es un conexo contenido en R que contiene a p y C es la componente conexa de p en R. Notemos también que $L_p \cap M_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, 2\}$, pues $p \in Fr_X(M_j)$, $j \in \{1, 2\}$.

Sea $x \in \mathcal{V}_\delta(p) \setminus \{p\}$. Entonces, por la propiedad de Kelley, como L_p es un subcontinuo de X que contiene a p y $\rho(x, p) < \delta$, existe un subcontinuo L_x tal que $x \in L_x$ y $\mathcal{H}(L_x, L_p) < \varepsilon$. Notemos que $L_x \subset \mathcal{V}_{2\varepsilon}(p) \subset R$. También observemos que L_x debe contener a p en su interior, pues de otra manera pasaría que $L_p \not\subset \mathcal{V}_\varepsilon(L_x)$ y, por tanto, $L_x \cap M_j \neq \emptyset$, $j \in \{1, 2\}$.

Así, $p \in L_x \subset C$. Sea $K = \bigcup\{L_x | x \in \mathcal{V}_\delta(p)\}$, entonces K es una vecindad conexa de p en X tal que $K \subset \mathcal{V}_{\epsilon_0}(p)$. Finalmente, X es conexo en pequeño en p.

Q.E.D.

Definición 5.1.5. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas entre espacios topológicos. Diremos que f *es homotópica a* g si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$.

Definición 5.1.6. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es *esencial* si no es homotópica a una función constante.

Notación 5.1.7. Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ dos números complejos, entonces $|z_1 - z_2|$ denotará la siguiente fórmula $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Supongamos que $|z_1 - z_2| < 2$ y consideremos un círculo unitario que pase por z_1

y z_2. Si O denota el centro de dicho círculo, $\theta(z_1, z_2)$ denotará el ángulo menor a 2π por el cual deberá de ser rotado el radio Oz_1 para que se iguale con el radio Oz_2.

Lema 5.1.8. *Sea f una función continua de un continuo X en S^1. Entonces f no es esencial si y sólo si existe una función continua y acotada $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$.*

Demostración. Supongamos que existe una función continua y acotada $\varphi(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$. Definamos entonces $f_t(x) = e^{it\varphi(x)}$. Ésta es una función continua de $X \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que que $f_0(x) = 1$ y $f_1(x) = e^{i\varphi(x)}$. Por tanto, f es homotópica a un punto y no es esencial.

Para probar la suficiencia, notemos que la función $f_0(x) = 1$ de X en S^1 satisface la condición de que existe $\varphi(x)$ tal que $e^{i\varphi(x)} = f_0(x) = 1$. Así, el conjunto Q, que consta de las funciones f que cumplen la propiedad de que existe $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, es no vacío. Sea $f_1(x)$ cualquier función que cumpla que existe $\varphi_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = e^{i\varphi_1(x)}$. Sea f_2 una función continua de X en S^1 con $d(f_1, f_2) < 2$. Definimos $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \theta(f_1(x), f_2(x))$. Por construcción $\varphi_2(x)$ es continua y acotada. Así, tenemos que $e^{i\varphi_2(x)} = e^{i(\varphi_1(x)+\theta(f_1(x),f_2(x)))} = e^{i\varphi_1(x)}e^{i\theta(f_1(x),f_2(x))} = f_1(x)\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = f_2(x)$, por lo que f_2 satisface la condición. Por tanto, Q es abierto en el conjunto de las funciones que van de X a S^1. Un argumento similar prueba que Q es cerrado en el mismo espacio.

Así Q es abierto y cerrado en el conjunto de funciones que van de X a S^1 y $f_0 \in Q$. Luego Q contiene a todas las funciones continuas no esenciales de X en S^1.

Q.E.D.

Lema 5.1.9. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si cada punto de X es un punto de irreducibilidad.*

Demostración. Primero supongamos que X es indescomponible. Por el Lema 1.11.8, X posee una una cantidad no numerable de composantes ajenas dos a dos. Así, sean $x \in X$ y y un elemento de X que no esté en la composante de x K_x. Entonces, no existe ningún subcontinuo propio de X que contenga tanto a x como y. Por lo tanto, X es irreducible entre x y y.

Supongamos que cada punto de X es un punto de irreducibilidad de X. Por el Lema 1.11.3, la composante de cualquier punto de X es un subconjunto propio de X. Entonces X no es una composante de ningún punto X. Por la contrapuesta del Lema 1.11.2, X es indescomponible.

Q.E.D.

Definición 5.1.10. Una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ entre dos continuos es *irreducible* si para cada subcontinuo propio K de X, $f(K) \neq Y$.

Lema 5.1.11. *Sea X un continuo homogéneo descomponible. Si $f : X \longrightarrow S^1$ es una función continua e irreducible, entonces f es esencial.*

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow S^1$ no es esencial. Entonces, por el Lema 5.1.8, existe una función continua $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$.

Como f es irreducible, sin perder generalidad, podemos suponer que $\varphi(X) = [0, 2\pi]$. Sean $x_0 \in \varphi^{-1}(0)$ y $x_{2\pi} \in \varphi^{-1}(2\pi)$. Sea K un continuo irreducible entre x_0 y $x_{2\pi}$ [39, (11.2), pág. 17]. Notemos que $\varphi(K) = [0, 2\pi]$. Entonces $f(K) = e^{i\varphi(K)} = S^1$. Pero como f es una función irreducible, $K = X$. Así, X es irreducible entre x_0 y $x_{2\pi}$. Ahora, como X es homogéneo, todo punto de X es un punto de irreducibilidad y, por el Lema 5.1.9, X es indescomponible, lo cual es una contradicción. Por lo que, f tiene que ser esencial.

Q.E.D.

Lema 5.1.12. *Si X es un continuo aposindético y p no es un punto de corte en X tal que cualquier subcontinuo de X que contiene a p posee la propiedad de Kelley, entonces X es conexo en pequeño en p.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo en pequeño en p. Entonces existen un abierto U de X, que contiene a p, y una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de $Cl_X(U)$ convergentes a un continuo K tal que $p \in K \subset Cl_X(U)$ y $K_n \cap K = \emptyset$ para cada entero positivo n [39, Theorem (12.1), pág. 18]. Como X es aposindético y p no es punto de corte, por el Corolario 1.10.7 y por [39, Theorem (4.14), pág. 50], X es colocalmente conexo en x. Entonces existe un conjunto abierto V de X tal que $V \subset Cl_X(V) \subset U$ y $X \setminus V$ es conexo. Notemos que $K \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, pues $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$, Teorema 1.1.12 y, como $Cl_X(V) \subset U$, se tiene que $K \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, también por el Teorema 1.1.12. Sean ahora $q \in Fr_X(V) \cap K$ y $0 < r < \frac{1}{2} \text{mín}\{\rho(p, q), \rho(Cl_X(V), X \setminus U)\}$ y $\{q_n\}_{l=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $(\mathcal{V}_r(q) \cap Fr_X(V)) \setminus K$ que converge a q. Para cada entero positivo l, sea R_l la componente de $Cl_X(\mathcal{V}_r(q))$ que contiene a q_l. Notemos que $(X \setminus V) \cup R_l$ es conexo [31, Theorem 5.4] y $Cl_X(\bigcup_{l=1}^{\infty} R_l) \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} R_l \subset K$. Sea $L = K \cup (X \setminus V) \cup (\bigcup_{l=1}^{\infty} R_l)$. L es un subcontinuo de X que contiene a p sin la propiedad de Kelley.

Hemos probado la contrapuesta. Por lo tanto, el lema es cierto.

Q.E.D.

Definición 5.1.13. Sean X un espacio métrico y A un subcontinuo de éste. Diremos que A es un *subcontinuo de convergencia* si existe una sucesión de continuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} A_n = A$ y, además, $A_n \cap A = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 5.1.14. *Si X es un continuo aposindético que tiene la propiedad de Kelley hereditariamente, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es localmente conexo en un punto p. Entonces existen un conjunto abierto U de X que contiene a p y una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de $Cl_X(U)$ que convergen a un continuo K tales que $p \in K \subset Cl_X(U)$ y $K_n \cap K = \emptyset$ para cada entero positivo n [39, Theorem(12.1), pág. 18]. Observemos que K es un subcontinuo de convergencia [31, Theorem

5.11]. Entonces K contiene una cantidad no numerable de puntos que no son de corte de X [31, 6.29 (b)]. Sin perder generalidad, supondremos que p no es un punto de corte de X. El corolario se sigue del Lema 5.1.12.

Q.E.D.

Teorema 5.1.15. *Si X es un continuo homgéneo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es localmente conexo;
(2) X es localmente conexo en algún punto;
(3) X es conexo en pequeño en un punto;
(4) X es casi conexo en pequeño en cualquier punto de X;
(5) X es casi conexo en pequeño en algún punto de X.

Demostración. Es claro que (1) implica (2) y que (2) implica (3). Sabemos que ser conexo en pequeño implica ser casi conexo en pequeño y, como X es homogéneo, (3) implica (4). También es claro que (4) implica (5). Así, sólo basta ver que (5) implica (1).

Supongamos que X es casi conexo en pequeño en un punto x. Por el Teorema 1.6.13, sean $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ un número de Effros para $\frac{\varepsilon}{2}$. Como X es casi conexo en pequeño en x, existe un subcontinuo W de X con interior no vacío tal que $W \subset \mathcal{V}_\delta(x)$. Sea $w \in Int_X(W)$. Entonces $\rho(x, w) < \delta$. Así, existe un $\frac{\varepsilon}{2}$-homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ con $h(w) = x$. De esta forma, $x \in Int_X(h(W))$ y $h(W) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(x)$. Entonces X es conexo en pequeño en x. Como X es homogéneo, es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos y, por Teorema 1.9.9, X es localmente conexo.

Q.E.D.

Lema 5.1.16. *Sean X un continuo y A un subconjunto de éste. Si $\mathcal{T}^2(A) = \mathcal{T}(A)$ entonces las componentes de $X \setminus \mathcal{T}(A)$ son abiertas.*

Demostración. Podemos suponer que A no es el vacío y que $\mathcal{T}(A) \neq X$, de otra manera el resultado es claro. Supongamos que $\mathcal{T}^2(A) = \mathcal{T}(A)$. Sean L una componente de $X \setminus \mathcal{T}(A)$ y $x \in L$. Como $\mathcal{T}^2(A) = \mathcal{T}(A)$, $x \in X \setminus \mathcal{T}^2(A)$. Se sigue que existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$. Como L es la componente de x en $X \setminus \mathcal{T}(A)$ y $L \cap W \neq \emptyset$, resulta que $W \subset L$. Entonces, como $x \in Int_X(W)$, $x \in Int_X(L)$. Luego, L es abierto en X.

Q.E.D.

Lema 5.1.17. *Sean X un continuo tal que $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}^2(A)$ para todo subconjunto cerrado A de X. Si A es un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$ e $Int_X(W)$ es conexo.*

Demostración. Sean A un subconjunto cerrado en X y $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Como $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}^2(A)$, se tiene que $x \in X \setminus \mathcal{T}^2(A)$. Por [25, Corollary 3.1.20, pág 149], existe un subconjunto abierto U de X tal que $\mathcal{T}(A) \subset U$ y $x \in X \setminus$

$\mathcal{T}(Cl_X(U))$. Sea L la componente de $X \setminus \mathcal{T}(Cl_X(U))$ que contiene a x. Por hipótesis, $\mathcal{T}(Cl_X(U)) = \mathcal{T}^2(Cl_X(U))$. Entonces, por el Lema 5.1.16, L es un subconjunto abierto de X. Sea $W = Cl_X(L)$. Así W es un subcontinuo de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$ y, además, $Int_X(W)$ es conexo.

Q.E.D.

Lema 5.1.18. *Sea X un continuo aposindético tal que $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(A)$ para todo subcontinuo cerrado no vacío A de X. Si $\mathcal{T}(W) = W$ para cada W subcontinuo de X tal que $Int_X(W)$ es no vacío y conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Tenemos que, por [25, Theorem 3.1.32, pág 154], basta probar que $\mathcal{T}(A) = A$ para todo subcontinuo A de X. Como $\mathcal{T}(X) = X$, supongamos que A es un subcontinuo propio de X. Sea $x \in X \setminus A$. Como X es aposindético, por el Teorema 5.1.17, para cada $a \in A$, existe un subcontinuo W_a de X tal que $a \in Int_X(W_a) \subset W_a \subset X \setminus \{x\}$ e $Int_X(W_a)$ es conexo. Como A es compacto, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en A tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} Int_X(W_{a_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{a_j} \subset X \setminus \{x\}$. Notemos que $\bigcup_{j=1}^{n} Int_X(W_{a_j})$ es un subconjunto abierto y conexo de X. Sea $W = Cl_X(\bigcup_{j=1}^{n} Int_X(W_{a_j}))$. Entonces W es un subcontinuo de X, $A \subset W$ e $Int_X(W)$ es conexo. Por [25, Proposition 3.1.7, pág 145] $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(W) = W \subset X \setminus \{x\}$. Así, $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ y $\mathcal{T}(A) \subset A$. Por [25, Remark 3.1.5, pág 144], $A \subset \mathcal{T}(A)$. Luego, $\mathcal{T}(A) = A$ y, finalmente, X es localmente conexo.

Q.E.D.

Definición 5.1.19. Sea X un continuo, definimos el conjunto $\mathcal{C}(X) = \{A \subset X | A \text{ es un subcontinuo de } X\}$, lo llamamos *hiperespacio de subcontinuos de* X. Posee la topología generada por la métrica de Hausdorff.

Definición 5.1.20. Una *gráfica* es un continuo que puede ser escrito como la unión finita de arcos donde cualesquiera dos de éstos son disjuntos o se intersectan en uno o en ambos puntos extremos.

Teorema 5.1.21. *Sea X un continuo aposindético. Si $\dim(\mathcal{C}(X)) < \infty$, entonces X es una gráfica y, por tanto, es localmente conexo.*

Demostración. Como $\dim(\mathcal{C}(X)) < \infty$, se sigue que existe un entero positivo n tal que $\mathcal{C}(X)$ no contiene una n-celda. Entonces X no contiene n-odos [30, (1.100)]. Esto implica que el complemento de cualquier subcontinuo de X tiene a lo más $n-1$ componentes.

Para ver que X es localmente conexo, por [25, Theorem 3.1.32, pág. 154], basta mostrar que $\mathcal{T}(A) = A$ para todo A subcontinuo de X. Por [25, Remark 3.1.5, pág 144], si A es un subcontinuo de X, sabemos que $A \subset \mathcal{T}(A)$. Ahora sea $x \in X \setminus A$. Justo como en la prueba del Lema 5.1.18 podemos construir un subcontinuo W de X tal que $A \subset Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{x\}$. Por lo anterior, $X \setminus W$ tiene una cantidad finita de componentes. Sea K la componente de $X \setminus W$ que tiene a x. Entonces, como $X \setminus W$ es abierto y tiene una cantidad finita de componentes, K es abierto en X. De donde $Cl_X(K)$ es un subcontinuo de X tal que $x \in Int_X(Cl_X(K)) \subset Cl_X(K) \subset X \setminus Int_X(W) \subset X \setminus A$. Así $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Luego $\mathcal{T}(A) = A$. Por lo tanto, X es localmente conexo y, por [30, (1.109)], X es un gráfica finita.

Q.E.D.

Lema 5.1.22. *Sea X un continuo que no es separado por ningun subcontinuo. Si $f : X \longrightarrow S^1$ es una función continua y monótona con fibras densas en ninguna parte en X, entonces f es irreducible.*

Demostración. Sea L un subcontinuo de X tal que $f(L) = S^1$. Sean $x \in X$ y B un arco en S^1 tales que $f(x) \in Int_{S^1}(B)$. Entonces $x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(Int_{S^1}(B)) \subset L$. Por [10, Lemma 1], $L = X$. Entonces f es irreducible.

Q.E.D.

Definición 5.1.23. Una función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre dos continuos es llamada *débilmente confluente* si para cualquier subcontinuo Z de Y, existe un subcontinuo W de X tal que $f(W) = Z$. Asimismo, una función es *hereditariamente débilmente confluente*, si su restricción a cualquier subcontinuo de X es débilmente confluente.

Lema 5.1.24. *Si g es una función continua y esencial de un continuo X en S^1, entonces g es débilmente confluente.*

Demostración. Supongamos que g no es débilmente confluente. Sea $[p, q]$ un arco en S^1 tal que la imagen de ninguna componente de $g^{-1}([p, q])$ bajo g contiene a $[p, q]$. Como S^1 es homogéneo, podemos suponer que $[p, q]$ está contenido propiamente en un semicírculo. Sea $W = g^{-1}([p, q])$. Denotemos al conjunto de las componentes de W como Y, al conjunto de las componentes de W que contienen algún punto de $g^{-1}(p)$ como Y_1 y como Y_2 al conjunto de las componentes de W que contienen a algún punto de $g^{-1}(q)$. Entonces $Y = Y_1 \cup Y_2$.

Así $W = \bigcup Y_1 \cup \bigcup Y_2$. Además, $\bigcup Y_1$ y $\bigcup Y_2$ son conjuntos cerrados y ajenos.

Sea r una función de X en S^1 tal que $r = g$ en $X \setminus W$, $r(\bigcup Y_1) = \{p\}$, $r(\bigcup Y_2) = \{q\}$. r es continua y $r(X) \neq S^1$. Así, r es una función no esencial, pues $r(X)$ es un arco y, como $d(g, r) < 2$ (métrica dada en la Definición 1.6.11), por [14, 1.1, pág. 111], g es homotópica a r. Pero en tal caso g no sería esencial. Por lo tanto, g es débilmente confluente.

Q.E.D.

Lema 5.1.25. *Si $f : X \longrightarrow [0, 1]$ es una función continua de un continuo X en I (el intervalo), entonces f es débilmente confluente.*

Demostración. Sean $[a, b]$ un subcontinuo de $[0, 1]$ y $K = \{(x, f(x)) | x \in X\}$. Entonces K es un subcontinuo de $X \times I$. Supongamos que $K \cap (X \times [a, b])$ no contiene un subcontinuo irreducible entre $K \cap (X \times \{a\})$ y $K \cap (X \times \{b\})$. Entonces $K \cap (X \times [a, b]) = P \cup Q$, con P y Q subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos contenidos en $K \cap (X \times \{a\})$ y $K \cap (X \times \{b\})$, respectivamente [29, pág. 15]. Sean p_1 y p_2 las funciones proyección de K en X y $[0, 1]$, respectivamente.

Entonces sean $P' = P \cup [p_2^{-1}([0,a]) \cap K]$ y $Q' = Q \cup [p_2^{-1}([b,1]) \cap K]$. Así $K = P' \cup Q'$, lo cual es una contradicción, pues en este caso K sería disconexo. Entonces existe un subcontinuo L de $K \cap (X \times [a,b])$ irreducible entre $K \cap (X \times \{a\})$ y $K \cap (X \times \{b\})$. Notemos que $f(p_1(L)) = [a,b]$. Así, f es débilmente confluente.

Q.E.D.

Lema 5.1.26. *Sean X un continuo homogéneo con métrica ρ y $\mathcal{G}$ una descomposición de X tal que todos sus elementos son continuos. Si el grupo de homeomorfismos de X en sí mismo respeta a $\mathcal{G}$, entonces se cumplen los siguientes resultados:*

(1) $\mathcal{G}$ es una descomposición continua de X.

(2) Los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos homogéneos mutuamente homeomorfos e indescomponibles.

Demostración. (1) Primero veamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente. Sean $G \in \mathcal{G}$ y U un subconjunto abierto de X que contiene a G. Sea $\varepsilon = \rho(G, X \setminus U)$. Por el Teorema 1.6.13, existe un número de Effros δ para ε. Podemos suponer que $\delta < \varepsilon$. Sea el abierto $V = \mathcal{V}_\delta(G)$. Supongamos que existe $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \cap V \neq \emptyset$. Sea $y \in G' \cap V$. Entonces existe $x \in G$ tal que $\rho(x,y) < \delta$. Así existe un ε-homeomorfismo, h de X en X tal que $h(x) = y$. Entonces $h(G) \cap G' \neq \emptyset$. Por hipótesis, $h(G) = G'$. Así, $G' \subset \mathcal{V}_\varepsilon(G)$ y, por ende, $G' \subset U$. Luego, $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente.

Demostraremos que $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente. Sean x y y elementos de $G \in \mathcal{G}$ y U una vecindad abierta alrededor de x. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \subset U$. Por el Teorema 1.6.13 existe un número de Effros δ para ε. Consideremos $V = \mathcal{V}_\delta(y)$ y supongamos que existe $G' \in \mathcal{G}$ tal que $V \cap G' \neq \emptyset$. Sea $z \in V \cap G'$, entonces existe $p \in G$ tal que $\rho(p,z) < \delta$. Así, existe un ε-homeomorfismo h de X en X tal que $h(p) = z$. Se sigue que $h(G) \cap G' \neq \emptyset$. Por hipótesis, $h(G) = G'$. Por otro lado, $h(x) \in \mathcal{V}_\varepsilon(x) \subset U$. Luego, $G' \cap U \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente y, finalmente $\mathcal{G}$ es una descomposición continua.

(2) Como los homeomorfismos de X en X respetan a $\mathcal{G}$, todos los elementos de $\mathcal{G}$ son homeomorfos entre sí. Veamos que son homogéneos. Sean $G \in \mathcal{G}$ y x y y dos elementos en G. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ tal que $h(x) = y$. Pero, por hipótesis, los homeomorfismos de X en X respetan a $\mathcal{G}$. Así, tenemos que $h(G) \cap G \neq \emptyset$ y, por tanto, $h(G) = G$. Luego, G es homogéneo. Que los elementos son indescomponibles se puede verificar en [32, Theorem 1].

Q.E.D.

Hemos terminado los resultados preliminares. Por lo que estamos listos para resolver el teorema principal.

5.2. Teorema principal

Definición 5.2.1. Un continuo X es una *curva racional* si tiene una base de subconjuntos abiertos cuyas fronteras son a lo más numerables.

Teorema 5.2.2. *Sea X un continuo homogéneo no degenerado y hereditariamente descomponible. Entonces X es una curva cerrada simple si cumple alguna de las siguientes condiciones:*
(1) X tiene un punto de separación local.
(2) X es una curva racional.
(3) Existe una función continua e irreducible de X en S^1.
(4) $\mathcal{C}(X)$ es de dimensión finita.
(5) Cada subcontinuo propio de X tiene la propiedad de Kelley.
(6) X es casi conexo en pequeño en algún punto.
(7) Para cada subcontinuo W de X, $X \setminus W$ tiene a lo más una cantidad numerable de componentes.
(8) $\mathcal{T}(W) = W$ para todo subcontinuo W de X tal que $Int_X(W)$ es no vacío y conexo.

Demostración. (1) Sea p un punto de separación local de X. Como X es homogéneo, X tiene la propiedad de Effros y, por el Lema 5.1.3, X posee la propiedad de Kelley. Entonces por el Lema 5.1.4, X es conexo en pequeño en p y, al ser homogéneo, es conexo en pequeño en todos sus puntos. Por lo tanto, por el Teorema 1.9.9, X es localmente conexo. Todos, salvo una cantidad numerable de puntos de separación local son puntos de orden 2 [39, (9.2), pág. 61]. Ahora, como X es homogéneo, todos los puntos de X son de orden 2. Así, X es una curva cerrada simple [31, 9.6].

(2) Como X es una curva racional, esta tiene un punto de separación local [39, (9.42), pág. 63]. Así, por (1), X es una curva cerrada simple.

(3) Notemos que, por el Lema 5.1.11, f es esencial y, por el Lema 5.1.24 f es una función débilmente confluente. Como la imagen de cada subcontinuo propio de X bajo f es un arco, del Lema 5.1.25, se sigue que la restricción de f a cualquier subcontinuo es débilmente confluente. Entonces f es una función continua hereditariamente débilmente confluente, la cual es irreducible. Así, por [6, Theorem 3.1, pág. 697], f es monótona y, para todo $z \in S^1$, $f^{-1}(z)$ es denso en ninguna parte en X, además, f es constante en cualquier subcontinuo denso en ninguna parte en X. Notemos que, si dividimos S^1 como la unión de dos semicírculos, llamemos a estos arcos A y B. Entonces, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son dos subcontinuos, por ser f monótona, cuya unión es X y cuya intersección tiene más de una componente. Por lo tanto X no es unicoherente.

Sean $\mathcal{G}_f = \{f^{-1}(z) | z \in S^1\}$, $z \in S^1$ y $h : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Entonces $h(f^{-1}(z))$ es un subcontinuo denso en ninguna parte de X. Así, existe $z' \in S^1$ tal que $h(f^{-1}(z)) \subset f^{-1}(z')$. Ahora, como h es un homeomorfismo, $f^{-1}(z) \subset h^{-1}(f^{-1}(z'))$ y, como $h^{-1}(f^{-1}(z'))$ es un subcontinuo denso en ninguna parte en X, tenemos que $f^{-1}(z) = h^{-1}(f^{-1}(z'))$. Por lo tanto, $h(f^{-1}(z)) = f^{-1}(z')$. Entonces, el grupo de homeomorfismos de X respeta a $\mathcal{G}_f$. De donde, por el Lema 5.1.26, $\mathcal{G}_f$ es una descomposición continua y los elementos de $\mathcal{G}_f$ son continuos homogéneos, indescomponibles y homoemorfos entre sí. Entonces $f^{-1}(z)$ es degenerado para cada $z \in S^1$, por lo tanto f es un homeomorfismo y, finalmente, X es una curva cerrada simple.

(4) Como X es homogéneo y hereditariamente descomponible, X es aposindético [25, Corolary 5.1.21]. Por el Teorema 5.1.21, X es localmente conexo. Finalmente, por [1, Theorem XIII], X es una curva cerrada simple.

(5) Como X es homogéneo, tiene la propiedad de Kelley [38, Theorem(2.5), pág. 293]. Como X es homogéneo y hereditariamente descomponible, X es aposindético [25, Corolary 5.1.21]. Así, por el Corolario 5.1.14, X es localmente conexo. Por [1, Theorem XIII], X es una curva cerrada simple.

(6) Por el Teorema 5.1.15, X es localmente conexo. Luego X es una curva cerrada simple, por [1, Theorem XIII].

(7) X es un continuo aposindético [25, Corolary 5.1.21]. Al ser aposindético, por el Corolario 1.10.7, X es semilocalmente conexo. Sabemos que todo continuo posee al menos dos puntos que no son de separación [31, 6.6]. Entonces, como X es homogéneo, X no posee puntos de separación. Así, X es colocalmente conexo [39, (4.14), pág. 50]. Ahora veremos que X es casi conexo en pequeño. Sean p un punto de X y U un abierto de X tal que $p \in U$. Sea U' un subconjunto abierto de X tal que $x \in U' \subset cl_X(U') \subset U$. Como X es colocalmente conexo, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subset U'$ con $X \setminus V$ conexo. Entonces $X \setminus V$ es un subcontinuo de X. Por hipótesis, V tiene a lo más una cantidad numerable de componentes. Así, por el Teorema 1.7.4, al menos una de las componentes de V, llamémosla C, debe tener interior no vacío. Así, $Cl_X(C)$ es un subcontinuo de X con interior no vacío que vive en U. Entonces X es casi conexo en pequeño en x y, por el inciso (6), X es una curva cerrada simple.

(8) Como X es un continuo homogéneo, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(A)$ para todo subcontinuo cerrado no vacío A de X, Teorema 1.10.8. Además, como X es homogéneo y hereditariamente descomponible, X es aposindético [25, Corolary 5.1.21]. Entonces, por el Lema 5.1.18, X es localmente conexo. Entonces, por [1, Theorem XIII], X es una curva cerrada simple.

Q.E.D.

5.3. Resultados adicionales

En esta sección presentamos algunos resultados adicionales obtenidos sobre continuos homogéneos hereditariamente descomponibles. Los resultados dan información sobre los continuos homogéneos hereditariamente descomponibles que resultaran no ser curvas cerradas simples.

Definición 5.3.1. Un *árbol* es un una gráfica que no contiene curvas cerradas simples.

Definición 5.3.2. Un continuo es *tipo árbol* si para toda $\epsilon > 0$, existen un árbol T y una función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow T$ tales que $\text{diám}(f^{-1}(t)) < \epsilon$ para cada $t \in T$.

Definición 5.3.3. Diremos que un continuo X es *cíclico* si ningno de sus puntos desconecta a X. Diremos que X es *acíclico* si no es cíclico.

Lema 5.3.4. *Si X es un continuo homogéneo descomponible de dimensión uno, entonces existe una función continua y esencial de X en S^1.*

Demostración. Sea X un continuo homogéneo descomponible de dimensión 1. Como los continuos homogéneos tipo árbol son indescomponibles [17, Theorem 1, pág. 856], X no es tipo árbol. Entonces, como los continuos homogéneos acíclicos de dimensión uno son tipo árbol [33, Corollary 6.5], existe una función esencial de X en S^1.

Q.E.D.

J. H. Case y R. E. Chamberlin, en [4], caracterizan a los continuos tipo árbol como los continuos X para los cuales, para toda gráfica G y cualquier función continua $f : X \longrightarrow G$, f no es esencial. Ellos construyeron un continuo acíclico de dimensión uno que no era tipo árbol.

Observación 5.3.5. Como los continuos hereditariamente descomponibles son de dimensión uno [31, 13.57], se sigue el resultado que a continuación se presenta.

Teorema 5.3.6. *Si X es un continuo homogéneo hereditariamente descomponible, entonces existe una función esencial de X en S^1.*

Este último teorema se sigue fácilmente de la Observación 5.3.5 y del Lema 5.3.4.

Definición 5.3.7. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre dos continuos. Diremos que un valor q de f es un *valor estable* de f si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier función continua $g : X \longrightarrow Y$ tal que $d(f, g) < \varepsilon$, $q \in g(X)$, donde d es la métrica del supremo.

Definición 5.3.8. Diremos que un continuo Y pertenece a la *Clase(S)* si para cualquier continuo X y cualquier función continua f, de X en Y, f tiene un valor estable.

Ejemplo 5.3.9. Sea $q : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua y suprayectiva. Entonces, cualquier valor de (0,1) es un valor estable de q. Sean $x \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \subset (0, 1)$. Sea f una función del intervalo en sí mismo tal que $\rho(f, q) < \varepsilon$. Como f es continua, $f([0, 1]) = [a, b] \subset [0, 1]$. Como $\rho(f, q) < \varepsilon$, $[\varepsilon, 1 - \varepsilon] \subset [a, b]$. También tenemos que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap \{0, 1\} = \emptyset$. Por lo que, $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Finalmente, $x \in [a, b]$ y $x \in f([0, 1])$.

Antes de proceder con el siguiente Teorema, hagamos una aclaración. La definición de continuos del tipo A' que nosotros utilizamos (Definición 3.1.1) está dada por E. S. Thomas, Jr. en su artículo *Monotone decompositions of irreducible continua* [35]. Sabemos, por el Teorema 3.1.11, que un continuo irreducible entre dos puntos es del tipo A' si y sólo si todo subcontinuo de él con interior no vacío es descomponible. Eldon J. Vought, en su artículo *Monotone decompositions of continua not separated by any continua* [37], propone que, si un continuo cumple con que todos sus subcontinuos con interior no vacío es descomponible pero que no es separado por ninguno de sus subcontinuos, se defina que es del tipo A' si cumple con que posee una descomposición semicontinua superiormente de continuos cuyo espacio cociente sea S^1. Para evitar confusiones nosotros, simplemente cambiaremos el nombre para la segunda definición.

Definición 5.3.10. Decimos que un continuo X es *del tipo* B' si posee una descomposición semicontinua superiormente $\mathcal{D}$ cuyos elementos son conexos, tienen interior vacío (con respecto a X) y el espacio cociente $X/\mathcal{D}$ es homeomorfo a S^1.

Teorema 5.3.11. *Si X es un continuo hereditariamente descomponible, que no es separado por ninguno de sus subcontinuos, entonces X pertenece a la Clase(S).*

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow X$ una función continua y suprayectiva de un continuo M en X. Por [37, Theorem 2], X es del tipo B'. Así, existe una descomposición semicontinua superiormente $\mathcal{D}$ de X tal que $X/\mathcal{D}$ es una curva cerrada simple. Además, $Int_X(G) = \emptyset$ para toda $G \in \mathcal{G}$. Sean $q : X \longrightarrow S^1$ la función cociente, Z un arco en S^1 con z_1 y z_2 sus puntos extremos y $R = Cl_X(q^{-1}(Z \setminus \{z_1, z_2\}))$. Entonces, por [10, Lemma 1], R es un continuo irreducible entre $q^{-1}(z_1)$ y $q^{-1}(z_2)$ y $q|_R$ es una función monótona de R en el arco. Entonces el conjunto $\{z \in Z|(q|_R)^{-1}(z)$ es capa de continuidad [23, pág. 201]$\}$ es un subconjunto G_δ denso en Z [23, pág. 202]. Si $(q|_R)^{-1}(z)$ y $(q|_R)^{-1}(z')$ son dos capas de continuidad de Z, entonces ambos $(q|_R)^{-1}(z)$ y $(q|_R)^{-1}(z')$ son subcontinuos terminales de X (por [10, Lemma 12] y por [11, Lemma 7]), $X \setminus \{(q|_R)^{-1}(z), (q|_R)^{-1}(z')\}$ es no conexo y X pertenece a la *Clase(S)* [15, Theorem 1].

Q.E.D.

Corolario 5.3.12. *Si X es un continuo homogéneo hereditariamente descomponible y no homeomorfo a S^1, entonces todo punto de X pertenece a un subcontinuo M de X perteneciente a la Clase(S), el cual no es unicoherente. Además, existe una función f de M en S^1 tal que, para todo $z \in S^1$, $q^{-1}(z)$ es un subcontinuo denso en ninguna parte en M.*

Demostración. Por el Teorema 5.3.6, existe una función esencial $r : X \longrightarrow S^1$. Entonces, por [39, Theorem (5.4), pág. 222], existe un subcontinuo M de X tal que $r|_M : M \longrightarrow S^1$ es esencial, $r|_A : A \longrightarrow S^1$ no es esencial para ningún subconjunto cerrado y no vacío A de M y $M \setminus L$ es conexo para todo subcontinuo L de M. Por el Teorema 5.3.11, M pertenece a la *Clase(S)*. Como M es hereditariamente descomponible y no es separado por ninguno de sus subcontinuos, M es del tipo B' [37, Theorem 2]. Así, existe una descomposición semicontinua superiormente de M cuyos elementos son densos en ninguna parte en M y su espacio cociente es S^1.

Sea $q : M \longrightarrow S^1$ la función cociente. Por el Lema 5.1.22 q es irreducible. Por [6, Corollary 2.4], q es hereditariamente débilmente confluente, por lo que M no puede ser unicoherente. El corolario se sigue de la homogeneidad de X.

Q.E.D.

Al finalizar el artículo se propone la siguiente pregunta, la cual es importante para el tema principal de esta tesis.

Si X es un continuo homogéneo hereditariamente descomponible que contiene una curva cerrada simple, ¿es X una curva cerrada simple?

Si resultara que el continuo M obtenido en el Corolario 5.3.12 fuera homogéneo, entonces, como la función q del mismo corolario es irreducible, y por el inciso (3) del Teorema 5.2.2, obtendríamos que M es una curva cerrada simple. Entonces si la pregunta resultara ser contestada afirmativamente nosotros tendríamos que la curva cerrada simple sería el único continuo homogéneo hereditariamente descomponible.

Ejemplo de una curva cerrada simple.

Bibliografía

[1] R. D. Anderson, *One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 1-16.

[2] R. H. Bing, *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J.**15** (1948), 729-742.

[3] –, *A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc*, Canad. J. Math. **12** (1960), 209-230.

[4] J. H. Case and R. E. Chamberlin, *Characterization of tree-like continua*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1-16.

[5] H. Cook, W. T. Ingram, and A. Lelek. *A list of problems known as Houston problem book, in Continua*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **170**. New York: Dekker (1995). 365-398.

[6] J. F. Davis and S. B. Nadler, Jr., *Hereditarily weakly confluent mappings onto* S^1, Houston J. Math. **26** (2000), 693-720.

[7] E. G. Effros, *Transformations groups and C*-algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 38-55.

[8] A. Emeryk, and Z. Horbanowicz, *On atomic mappings*, Colloq. Math. **27** (1973), 49-55.

[9] G. A. Feuerbacher, *Weakly chainable circle-like continua*, Fund. Math. **106** (1980), 1-12.

[10] E. E. Grace and E. J. Vought, *Monotone decompositions of* θ_n*-continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **263** (1981), 261-270.

[11] –. *Monotone decompositions of* θ*-continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 287-295.

[12] C. L. Hagopian, *Homogeneous plane continua*, Houston J. Math. **1** (1975), 35-41.

[13] J. G. Hoking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Massachusetts, U.S.A. London, England. Addison-Wesley publiching company, Inc. 1961.

[14] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit (1965).

[15] A. Illanes, *Separating subsets and stable values*, Topology Appl. **126** (2002), 359-360.

[16] F. B. Jones, *Concerning Non-aposyndetic Continua*, American J. Math. **70** (1948), 403-413.

[17] –. *Certain homogeneous unicoherent idecomposable continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 855-859.

[18] –. *On a certain type of homogeneous plane continuum*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 735-740.

[19] –. *Use of a new thechnique in homogeneous continua*, Houston J. Math. **1** (1975), 57-61.

[20] B. Kanaster and K. Kuratowsky, Problème 2, Fund. Math. **1** (1920), 223.

[21] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company Inc. 1955.

[22] J. Krasinkiewicz, *On two theorems of Dyer*, Colloq. Math., **50** (1986), 201-208.

[23] K. Kuratowsky, *Topology Vol. 2, 3rd ed.*, Monografite Mat., Tom 21, PWN, Warsaw, 1961; English transl., Academic Press, New York; PWH, Warsaw, 1968.

[24] W. Lewis, *Continumm Theory Problems*, Topology Proc., **8** (1983), 361-394.

[25] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, **275**, Boca Raton, London, New York, Singapore: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2005.

[26] –. *On the idempoteney of the set function* $\mathcal{T}$, Houston J. Math., **37** (2011), 1297-1305.

[27] S. Macías and S. B. Nadler, Jr., *On hereditarily decomposable homogeneous continua*, Topology Proc., **34** (2009), 130-145.

[28] T. Maćkowiak and E. D. Tymchatyn, *Continuous mappings on continua, II*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Mat.),**225** (1984), 1-57.

[29] R. L. Moore, *Foundations of Point Set Theory*, Rev. Ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **13**, Amer. Math. Soc,. Providence, R. I., 1962.

[30] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **49**, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1978. Reimpreso por Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, serie textos 2006.

[31] –. *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **158**, Marcel Dekker, Inc. New York, 1992.

[32] J. T. Rogers, Jr. *Decompositions of homogeneous continua*, Pacific J. Math. **99** (1982), 137-144.

[33] –. *Hyperbolic ends and continua*, Michigan Math. J. **34** (1987), 337-347.

[34] W. Sierpińsky, *Sur une propiété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, Fund. Math., **1** (1920), 11-16.

[35] E. S. Thomas, Jr. *Monotone Decompositions Of Irreducible Continua*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Mat.) **50** (1966), 1-74.

[36] O. Veblen. *Theory on Plane Curves in Non-metrical Analysis Situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 83-98

[37] E. J. Vought, *Monotone decompositions of continua not separated by any continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 67-78.

[38] R. W. Wardle, *On a property of J. L. Kelley*, Houston J. Math. **3** (1977), 291-299

[39] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **28**. Amer. Math. Soc. Providence R. I., 1942.

Índice alfabético