UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APROXIMACIÓN DE DENDROIDES POR ÁRBOLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICA

PRESENTA
MARCELA ORDORICA ARANGO

DIRECTOR DE TESIS
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO
MARZO 2018

Esta tesis fue parcialmente apoyada por los proyectos:

“Teoría de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos II”(IN101216) de PAPIIT, DGAPA, UNAM, y

“Teoría de continuos e hiperespacios (0221413)”del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), 2013.

Hoja de información

1. **Datos del alumno**
   Ordorica
   Arango
   Marcela
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Licenciatura en Matemáticas
   4-12052011

2. **Datos del tutor**
   Dr.
   Alejandro
   Illanes
   Mejía

3. **Datos del Sinodal 1**
   Dra.
   María Isabel
   Puga
   Espinosa

4. **Datos del Sinodal 2**
   M. en C.
   Miguel Ángel
   Corona
   García

5. **Datos del Sinodal 3**
   M. en C.
   Luis Antonio
   Paredes
   Rivas

6. **Datos del Sinodal 4**
   Dra.
   Verónica
   Martínez de la Vega
   y Mansilla

7. **Datos del trabajo**
   Aproximación de dendroides por árboles
   72 pp.
   2018

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por acompañarme en este trabajo y apoyarme siempre, sin importar lo extrañas que parecieran mis metas.

A mis amigos. Ustedes me han enseñado que uno nunca va solo.

A mis profesores, por hacer de la docencia un estilo de vida y siempre dar todo de sí por sus estudiantes, por ser además amigos llenos de paciencia y sabiduría.

A los sinodales, que se tomaron el tiempo de revisar este trabajo.

Al Instituto de Matemáticas por permitirme un lugar de trabajo.

Hago una mención especial al Dr. Alejandro Illanes Mejía por dirigir este trabajo, por todo lo que me ha enseñado estos años, y por recordarme siempre que la dedicación es lo más importante para alcanzar los sueños.

Índice general

Introducción

En el año de 1961 en [14], B. Knaster introdujo el concepto de dendroide. Los definió como aquellos continuos que cumplen con ser hereditariamente unicoherentes y arco conexos. Knaster comenzó el estudio de estos continuos alrededor de 1960 [8, p. 244]. El siguiente problema relacionado con los dendroides aún no tiene una solución:

Teorema 0.1. Sean X un dendroide y T_0 un árbol contenido en X. Para cada $\epsilon > 0$, existen un árbol T tal que $T_0 \subset T \subset X$, y una retracción $r : X \to T$ tal que, para toda $x \in X$, $d(x, r(x)) < \epsilon$.

Este problema sigue sin tener una respuesta. Muchos investigadores del tema intuyen que el Teorema 0.1 es cierto, pero aún no se ha dado una prueba convincente de esto. El lector interesado en la historia de los continuos y los dendroides puede revisar [4] y [8].

En su artículo *Tree-likeness of dendroids and λ-dendroids* [6], H. Cook demostró que los dendoides son arbolados. Por su parte, en los artículos *Retracting fans onto finite fans* [9] y *Small retractions of smooth dendroid onto trees* [10], J. B. Fugate presenta pruebas el Teorema 0.1 para dos casos particulares: si X es un abanico o si X es un dendroide suave. Sin embargo, como mostramos en esta tesis, su prueba para dendroides suaves no es correcta.
Tiempo después, R. Cauty afirmó haber demostrado el Teorema 0.1 en su articulo *Sur l'approximation interne des dendroides par des arbres* [3], pero el artículo no fue publicado ya que la prueba resultó poco clara y difícil de leer.

Resolver este problema resulta importante ya que como corolario de éste se sigue que si X es un dendroide, entonces los hiperespacios $C(X)$ y 2^X tienen la propiedad del punto fijo. También se sigue que cualquier producto de dendroides tiene la propiedad del punto fijo.

Comenzamos este trabajo con el propósito de leer el artículo *Sur l'approximation interne des dendroides par des arbres* de R. Cauty para comprender a detalle su prueba y decidir si era correcta o no. Para esto, empazamos por revisar el artículo *Dendroids and their endpoints* de J. Krasinkiewicz y P. Minc ([15]), pues para R. Cauty, un resultado demostrado ahí es de suma importancia en su prueba del Teorema 0.1.

Optamos después por entender uno de los casos particulares demostrados por J. B. Fugate y desarrollamos el artículo *Small retractions of smooth dendroid onto trees*. A lo largo de nuestra lectura notamos una serie de huecos y errores, por lo que nos dimos a la tarea de llenar los espacios y corregir los errores, esto con la intención de llegar al final de la prueba sin dudas. Sin embargo, encontramos un error irresoluble que surge de una afirmación falsa. Hemos marcado este punto de la prueba y expuesto un contraejemplo a dicha afirmación. De este modo, el lector puede ver fácilmente por qué esta la prueba no es válida.

La tesis se divide en tres partes:

En el capítulo 1 presentamos los conceptos y teoremas de topología general, teoría de continuos y teoría de gráficas que utilizamos a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2 explicamos a detalle la prueba de J. B. Fugate del Teorema 0.1 para dendroides suaves y marcamos exactamente en qué punto se encuentra el error de la prueba.

Por último, en el capítulo 3 explicamos las definiciones y lemas previos necesarios para demostrar el teorema de *Dendroids and their endpoints* utilizado por R. Cauty en su demostración del Teorema 0.1.

A lo largo de cada capítulo se introducirán nuevos conceptos según sean necesarios.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

A lo largo de este trabajo denotaremos con la letra $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, y con $\mathbb{R}$ al conjunto de números reales. Además, consideraremos a las vecindades como conjuntos abiertos. Por último, dado un espacio topológico X, $Y \subset X$ y $A \subset Y$, denotaremos como $\mathrm{Cl}_Y(A)$, $\mathrm{int}_Y(A)$ y $\mathrm{Fr}_Y(A)$, respectivamente, a la cerradura, interior y frontera de A en Y. Si $Y = X$, escribiremos simplemente $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{Fr}(A)$.

Topología general y teoría de continuos

Definición 1.1. Sean X un espacio métrico con métrica d y $A \subset X$ distinto del vacío. El *diámetro* de A se define como $\mathrm{diám}(A) = \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$.

Definición 1.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $p \in X$. Definimos la *bola de radio épsilon centrada en p* como el conjunto

$$B_\epsilon^d(p) = \{x \in X \mid d(x, p) < \epsilon\}.$$

Escribiremos $B_\epsilon(p)$ cuando d sea la métrica usual para el espacio euclidiano.

Definición 1.3. Un espacio X es *completamente normal* si para cualesquiera subconjuntos A y B de X tales que $A \cap \mathrm{Cl}(B) = \emptyset$ y $\mathrm{Cl}(A) \cap B = \emptyset$, existen dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Lema 1.4. [7, Proposición VII.7.6, p. 199] Si (X, d) es un espacio métrico, entonces X es completamente normal

Definición 1.5. Sea X un espacio métrico y sean A y B subconjuntos de X no vacíos. Definimos la *distancia entre* A y B como $\mathrm{ínf}\{d(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$.

Definición 1.6. Decimos que un espacio topológico X es un *continuo* si es métrico, conexo, compacto y tiene más de un punto. A los subconjuntos de X que satisfagan ser conexos y cerrados los llamaremos *subcontinuos* de X.

Diremos que un espacio topológico es un *continuo degenerado* si es un espacio métrico, compacto y conexo con un único punto.

Observemos que los subcontinuos de un continuo pueden tener un único punto.

Definición 1.7. Un *arco* es un continuo homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Definición 1.8. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 3. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$M = \{(1,0),(1,1),(1,2),\ldots,(1,m-1)\}.$$

Para cada $i \in \{0,\ldots,m-1\}$, sea L_i el segmento de recta que une a los puntos $(0,0)$ y $(1,i)$. Es decir,

$$L_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = t(1,i) \text{ para alguna } t \in [0,1]\}.$$

Definimos el cono de M como el conjunto

$$C(M) = \bigcup_{i=0}^{m-1} L_i.$$

Un *m-odo* es un espacio homeomorfo a $C(M)$.

Definición 1.9. Decimos que un continuo X es *arco conexo* si para cualesquiera dos puntos diferentes $p,q \in X$ existe un arco α contenido en X tal que sus puntos extremos son p y q.

Definición 1.10. Un espacio topológico X es *localmente conexo en un punto* $p \in X$ si para toda vecindad U de p existe una vecindad conexa V de p tal que $V \subset U$. Diremos que X es *localmente conexo* si lo es en todos sus puntos.

Lema 1.11. [20, Problema 31C.1, p. 222] Sea X un continuo localmente conexo. Si U es un subconjunto abierto y conexo de X, entonces U es arco conexo.

Lema 1.12. Sean X un espacio conexo y $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una cubierta finita, cerrada y de elementos no vacíos de X. Entonces los elementos de $\mathcal{A}$ se pueden ordenar en una sucesión finita $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots A_n\}$ de manera que, para cada $i \in \{2,\ldots,n\}$, $A_i \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \neq \emptyset$.

Demostración. Elegimos cualquier elemento de $\mathcal{A}$ y le llamamos A_1. Como, para toda $\alpha \in J$, A_α es cerrado y $\mathcal{A}$ es una cubierta finita, tenemos que

$$\bigcup_{A_\alpha \neq A_1} A_\alpha$$

es cerrado. Entonces, ya que X es conexo,

$$A_1 \cap \bigcup_{A_\alpha \neq A_1} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Por tanto, existe $A_{\alpha_0} \in \mathcal{A} \setminus \{A_1\}$, tal que $A_1 \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Llamamos A_2 a A_{α_0}. Ya que $A_1 \cup A_2$ y $\bigcup\{A_\alpha \mid A_\alpha \notin \{A_1, A_2\}\}$ son subconjuntos cerrados de X, existe $A_{\alpha_1} \in \mathcal{A} \setminus \{A_1, A_2\}$ tal que $A_{\alpha_1} \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$. Repitiendo este procedimiento, ordenamos los elementos de $\mathcal{A}$ de forma que $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ y, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, $A_i \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \neq \emptyset$. $\square$

Definición 1.13. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta de X. Decimos que una cubierta $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ *refina a* $\mathcal{U}$ si, para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_j$.

Teorema 1.14. (Teorema del cable cortado).[19, Teorema 5.2, p. 72] Sean X un espacio métrico compacto y A y B subconjuntos cerrados de X. Supongamos que ningún subconjunto conexo de X interseca tanto a A como a B. Entonces existen cerrados ajenos S_1 y S_2 de X tales que $A \subset S_1$, $B \subset S_2$ y $X = S_1 \cup S_2$.

Teorema 1.15. (Teorema de golpes en la frontera).[19, Teorema 5.4, pp. 73-74] Sean X es un continuo y $A \subset X$ tales que $\emptyset \neq A \neq X$. Sea C una componente de A. Entonces $Cl_X(A) \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

Teorema 1.16. (Teorema de reducción de Brouwer). [16, Teorema 4.18, p. 34] Sean X un espacio topológico compacto y segundo numerable y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de cerrados de X. Supongamos que para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, se tiene que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \subset A_n$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal B con respecto a la inclusión, es decir, B no contiene propiamente a ningún elemento de $\mathcal{A}$

Teoría de gráficas

Definición 1.17. Una *gráfica finita* es un continuo X para el que existen:

1. Un conjunto finito de puntos llamados *vértices*, y denotado $V(X)$, y
2. Un conjunto finito de arcos llamados *aristas*, y denotado $E(X)$, tales que:
   a) $X = \bigcup\{\alpha \mid \alpha \in E(X)\}$, y
   b) Cada $\alpha \in E(X)$ tiene por extremos dos puntos $\{p, q\} \subset V(X)$ y se cumple que $(\alpha \setminus \{p, q\}) \cap (V(X) \cup \{\beta \mid \beta \in E(X) \setminus \{\alpha\}\}) = \emptyset$.

Denotaremos a la gráfica G que tiene como conjunto de vértices $V(G)$ y como conjunto de aristas a $E(G)$ como $G = (V, E)$. Si no deseamos especificar los conjuntos de vértces y aristas, simplemente escribiremos G.

Definición 1.18. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Diremos que los vértices v y w son *adyacentes* si $vw \in E(G)$, es decir, si existe una arista en G con extremos v y w.

Definición 1.19. Una *curva cerrada simple* es un continuo homeomorfo a la circunferencia unitaria en el plano, centrada en el origen.

Definición 1.20. Un *árbol* es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

Definición 1.21. Dada una gráfica $G = (V, E)$, un *camino* en G es una sucesión de elementos de $V(G)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $x_i x_{i+1} \in E(G)$.

Definición 1.22. Dada una gráfica $G(V, E)$, decimos que un camino $(x_1, \ldots, x_n)$ es una *trayectoria* en G si satisface que, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, con $i \neq j$, se tiene que $x_i \neq x_j$.

Lema 1.23. [1, Teorema 2.1, p. 25] Sea G un árbol. Entonces cualesquiera dos vértices pueden ser conectados por una única trayectoria.

Dendroides y dendritas

Definición 1.24. Un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera subcontinuos A y B de X que satisfagan que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si todos los subcontinuos de X son unicoherentes.

Definición 1.25. Un *dendroide* es un continuo que es arco conexo y hereditariamente unicoherente.

Dados dos puntos en un dendroide X, veamos que existe un único arco que los une. Sean α y β dos arcos en X con extremos a y b. Como X es hereditariamente unicoherente, $\alpha \cap \beta$ es conexo. Entonces $\alpha \cap \beta$ es un subconjunto conexo de α y tiene a los extremos de α. Esto implica que $\alpha \cap \beta = \alpha$. Similarmente, $\alpha \cap \beta = \beta$. Por tanto $\alpha = \beta$. Al único arco que une a los puntos a y b lo denotaremos como ab. Extendemos esta notación poniendo $ab = \{a\}$ cuando $a = b$.

Definición 1.26. Una *dendrita* es un dendroide que además es localmente conexo.

Lema 1.27. [16, Corolario 4.20, pp. 37-38] Si X es un dendroide, entonces para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un arco maximal en X que tiene a los puntos a y b.

Lema 1.28. Sean X un dendroide, $y \in X$ y pq un arco en X al que consideraremos con un orden en el que $p < q$. Si $x \in pq$, entonces $x \in py$ o $x \in qy$.

Demostración. Observemos que si $y = p$, entonces el resultado es trivial. Supongamos entonces que $y \neq p$ y consideremos el arco yp con el orden $y < p$. Sea $w = \text{ínf}\{z \in py \mid z \in pq\}$. Entonces $yw \cup wp$ y $yw \cup wq$ son arcos. Analicemos dos casos: (ver Figura 1.1).

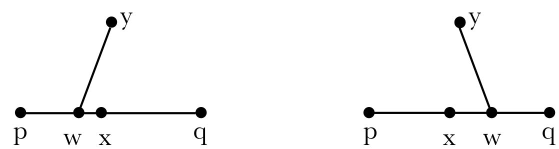

Figura 1.1: w es el primer punto del arco yp que está en el arco pq. Puede ocurrir alguna de estas dos configuraciones.

Caso 1: $p \leq w \leq x$.
En este caso $x \in wq$ y $wq \subset yw \cup wq$. Por tanto $x \in yq$.

Caso 2: $x \leq w \leq q$.
Similar al caso anterior, $x \in pw \subset pw \cup wy$. Entonces $x \in py$. □

Lema 1.29. Si X es un dendroide y $A \subset X$, entonces hay un conjunto mínimo arco conexo que contiene a A y está dado por $\bigcup\{pq \subset X \mid p, q \in A\}$.

Demostración. Llamemos $C = \bigcup\{pq \subset X \mid p, q \in A\}$ y notemos que si $A \neq \emptyset$ y tomamos $a \in A$, entonces $a \in C$ y por tanto $C \neq \emptyset$. Observemos también que si A es un conjunto de un único punto, entonces $C = A$ y C satisface las propiedades deseadas. Supongamos entonces que A es un conjunto con más de un punto.

I. Veamos primero que C es arco conexo. Sean x y y elementos de C. Entonces existen puntos p, q, r y s en A tales que $x \in pq$ y $y \in rs$. Por el Lema 1.28 debe ocurrir que $x \in py$ o $x \in qy$, y $y \in rx$ o $y \in sx$. Analizaremos el caso en el que $x \in py$ y $y \in rx$. Como $x \in py$, entonces $px \cup xy$ es un arco, y como $y \in rx$, entonces $xy \cup yr$ es un arco. Consideremos a $px \cup xy \cup yr$. Éste es un arco con extremos en A que contiene al arco xy. Por tanto $xy \subset C$.

   Los demás casos se prueban de manera análoga intercambiando p por q y r por s. En cualquier caso concluimos que xy es un subarco de un arco con extremos en A. Por tanto C es arco conexo.

II. Tomemos ahora $a \in A$. Queremos ver que $a \in C$. Sea $b \in A$ tal que $a \neq b$. Consideremos el arco ab. Éste cumple que sus extremos son elementos de A, y por tanto $a \in C$. Así concluimos que $A \subset C$.

III. Por último, veamos que si D es arco conexo y $A \subset D$, entonces $C \subset D$. Tomemos x en C. Entonces existen puntos p y q en A tales que $x \in pq$. Como $A \subset D$ entonces p y q son puntos de D, y como D es arco conexo, entonces $pq \subset D$. Por tanto $C \subset D$.

Concluimos que $\bigcup\{pq \subset X \mid p, q \in A\}$ es el conjunto arco conexo más pequeño que contiene a A. $\square$

Teoría de retractos

Definición 1.30. Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Diremos que Y es un *retracto* de X si existe una función continua $r : X \to Y$ tal que para todo $y \in Y$ se tiene que $r(y) = y$. A la función r se le llama *retracción* de X en Y.

Definición 1.31. Si Y es un subcontinuo de X y $\epsilon > 0$, una *ϵ-retracción* de X en Y es una retracción $r : X \to Y$ tal que para toda $y \in Y$ se cumple que el diámetro de $r^{-1}(\{y\})$ es menor que ϵ.

Definición 1.32. Un continuo X es un *retracto absoluto* si para todo continuo Y y para todo encaje $i : X \hookrightarrow Y$, se tiene que $i(X)$ es un retracto de Y.

Definición 1.33. Sea X un continuo. Decimos que X es un *extensor absoluto* si cada vez que tenemos un continuo Y, un cerrado $A \subset Y$ y una función continua $f : A \to X$, existe una función continua $F : Y \to X$ tal que que $F\restriction_A = f$.

Lema 1.34. Todo espacio métrico compacto X se puede encajar en el espacio $Q = \prod_{n\in\mathbb{N}}[0, 1]_n$ (Q tiene la topología producto).

Demostración. En el caso en que X es un conjunto con un único punto ($X = \{x\}$), hacemos $F(x) = (0, 0, \ldots)$. Claramente esta función es un encaje de X en Q. Supongamos que X es un espacio métrico y compacto con más de un punto. Sea d una métrica para X. Elegimos un subconjunto denso numerable $D = \{p_1, p_2, \ldots\}$ de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $f_n : X \to [0, 1]$ dada por

$$f_n(x) = \frac{d(x, p_n)}{\text{diám}(X)}.$$

Entonces f_n es continua y $0 \le f_n(x) \le 1$ para toda $x \in X$. Definimos $F : X \to Q$ como sigue:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

Entonces F es continua porque sus funciones coordenadas son continuas. Veamos que F es inyectiva. Sean a y b dos elementos distintos de X y sea $\epsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Como D es denso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in B_\epsilon(a)$. Entonces $d(a, p_n) < \epsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Si $d(b, p_n) < \epsilon = \frac{d(a,b)}{2}$, entonces $d(a, b) < 2\epsilon = d(a, b)$, lo que es un absurdo. Por tanto $d(b, p_n) \ge \epsilon > d(a, p_n)$ y $f_n(b) > f_n(a)$. Concluimos que F es inyectiva. Ya que X es un espacio compacto y Q es un espacio de Hausdorff, tenemos que F es un homeomorfismo en su imagen. Por tanto F es un encaje. Con esto terminamos la prueba. $\square$

En el siguiente lema pedimos que J sea a lo más numerable para que el producto resulte metrizable y entonces sea un continuo.

Lema 1.35. Sean J un conjunto a lo más numerable y $\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una familia de continuos tales que para cada $\alpha \in J$, X_α es un extensor absoluto. Entonces $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es un extensor absoluto.

Demostración. Sean Y un continuo y A un subconjunto cerrado de Y. Sea

$$f : A \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$$

una función continua. Queremos encontrar una función continua $F : Y \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ tal que $F \restriction_A = f$. Para cada $\beta \in J$, consideremos la proyección natural $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$. Como π_β es continua y f es continua, entonces $\pi_\beta \circ f : A \to X_\beta$ es continua. Como X_β es extensor absoluto, existe una función continua $F_\beta : Y \to X_\beta$ tal que $F_\beta \restriction_A = \pi_\beta \circ f$.
Sea $F : Y \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ definida como sigue:

$$F(x) = (F_\alpha(x))_{\alpha\in J}.$$

Entonces F es continua. Sólo falta ver que $F \restriction_A = f$. Para esto, tomemos $a \in A$. Entonces

$$F(a) = \{F_\alpha(a)\}_{\alpha\in J} = \{\pi_\alpha \circ f(a)\}_{\alpha\in J} = f(a).$$

Por tanto $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es un extensor absoluto. □

Teorema 1.36. (Teorema de extensión de Tietze). [18, Teorema 35.1, p. 219] Sean X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X. Entonces para toda función continua $f : A \to [a, b]$, existe una función continua $F : X \to [a, b]$ tal que $F \restriction_A = f$. Por tanto, el intervalo $[a, b]$ es un extensor absoluto.

Corolario 1.37. El espacio $Q = \prod_{n\in\mathbb{N}} [0, 1]_n$ es un extensor absoluto.

Lema 1.38. Si X es un extensor absoluto y Y es un retracto de X, entonces Y es un extensor absoluto.

Demostración. Sean X un extensor absoluto y Y un retracto de X. Sean Z un continuo, A un subconjunto cerrado de Z y $g : A \to Y$ una función continua. Probaremos que existe una función continua $G_0 : Z \to Y$ tal que $G_0 \restriction_A = g$. Consideremos la inclusión $i : Y \hookrightarrow X$. Entonces $i \circ g : A \to X$ es continua. Como X es extensor absoluto, existe una función continua $G : Z \to X$ tal que $G \restriction_A = i \circ g$. Notemos que para cada $a \in A$,

$$G(a) = i \circ g(a) = g(a).$$

Entonces G es tal que $G \restriction_A = g$. Como Y es retracto de X, existe una función continua $r : X \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, $r(y) = y$. Entonces $r \circ G : Z \to Y$ es continua y para cada $a \in A$ se tiene que $r \circ G(a) = r(g(a)) = g(a)$. Haciendo $G_0 = r \circ G$ concluimos que Y es extensor absoluto. □

Teorema 1.39. Sea X un continuo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

a. X es un retracto absoluto, y

b. X es un extensor absoluto.

Demostración.

a. $\Longrightarrow$ *b.* Supongamos que X es un retracto absoluto. Por el Lema 1.34, X se puede encajar en el espacio $Q = \prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]_n$. Como X es retracto absoluto, entonces X es un retracto de Q. Además Q es extensor absoluto, entonces, por el Lema 1.38 concluimos que X es un extensor absoluto.

b. $\Longrightarrow$ *a.* Supongamos que X un extensor absoluto. Sea Y un continuo y sea $i : X \hookrightarrow Y$ un encaje. Entonces $i(X)$ es cerrado en Y. Queremos probar que $i(X)$ es un retracto de Y, es decir, buscamos una retracción de Y en $i(X)$. Sea $i^{-1} : i(X) \to X$. Entonces i^{-1} es continua. Como X es extensor absoluto e $i(X)$ es cerrado en Y, existe una función continua $F : Y \to X$ tal que $F \restriction_{i(X)} = i^{-1}$. Consideremos la función $i \circ F : Y \to i(X)$. Ésta es una función continua. Además, si $z \in i(X)$,

$$i \circ F(z) = i \circ i^{-1}(z) = z.$$

Es decir,

$$i \circ F \restriction_{i(X)} = Id_{i(X)}.$$

Por tanto $i \circ F$ es una retracción de Y en $i(X)$. Entonces X es un retracto absoluto. □

Lema 1.40. Si X es retracto absoluto, Z es un compacto métrico e $i : X \to Z$ es un encaje, entonces $i(X)$ es un retracto de Z.

Demostración. Por el Lema 1.34, podemos suponer que $Z \subset Q$. Entonces $i(X) \subset Q$. Ya que X es retracto absoluto, existe una retracción $r : Q \to i(X)$. Por tanto $r \restriction_Z : Z \to i(X)$ es una retracción. □

Teorema 1.41. Sean X un continuo y X_1 y X_2 subcontinuos de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $X_0 = X_1 \cap X_2$ y supongamos que X_0, X_1 y X_2 son retractos absolutos, entonces X es un retracto absoluto.

Demostración. Supongamos que X es un subcontinuo de un continuo Z y que Z tiene una métrica d. Definimos

$$Z_0 = \{z \in Z \mid d(z, X_1) = d(z, X_2)\},$$

$$Z_1 = \{z \in Z \mid d(z, X_1) \leq d(z, X_2)\} \text{ y}$$

$$Z_2 = \{z \in Z \mid d(z, X_1) \geq d(z, X_2)\}.$$

Veremos que $Z_1 \cap X = X_1$. Tomemos $z \in Z_1 \cap X$. Entonces $z \in X = X_1 \cup X_2$ y $d(z, X_1) \leq d(z, X_2)$. Si $z \notin X_1$, entonces $d(x, X_1) > 0 = d(x, X_2)$, lo que es absurdo. Entonces $z \in X_1$. Por otro lado, si $z \in X_1$, entonces $z \in X_1 \cup X_2 = X$ y $d(z, X_1) = 0$. Por tanto $z \in Z_1$. Entonces $z \in X \cap Z_1$. De manera similar se demuestra que $Z_0 \cap X = X_0$ y $Z_2 \cap X = X_2$. Además $Z_1 \cap Z_2 = Z_0$ y $Z_1 \cup Z_2 = Z$. Observemos que Z_1 y Z_2 son cerrados en Z y X_0 es cerrado en Z_0. Por el Lema 1.40, existe una retracción $r_0 : Z_0 \to X_0$. Para cada $i \in \{1, 2\}$ definimos $r_i : Z_0 \cup X_i \to X_i$ como sigue:

$$r_i(z) = \begin{cases} r_0(z), & \text{si } z \in Z_0 \text{ y} \\ z, & \text{si } z \in X_i. \end{cases}$$

Dada $z \in Z_0 \cap X_i$, tenemos que $d(z, X_i) = 0$, así que $z \in X_1 \cap X_2 = X_0$ y $r_0(z) = z$. Entonces r_i está bien definida y es una retracción. Por el Teorema 1.39 y el Lema 1.40, existe una función continua $R_i : Z_i \to X_i$ tal que $R_i \restriction_{X_i \cup Z_0} = r_i$. Definimos $R : Z_1 \cup Z_2 \to X$ como sigue:

$$R(z) = \begin{cases} R_1(z), & \text{si } z \in Z_1 \text{ y} \\ R_2(z), & \text{si } z \in Z_2. \end{cases}$$

Veamos que R está bien definida y es una retracción de Z en X. Si $z \in Z_0$ tenemos que

$$R(z) = \begin{cases} R_1(z), & \text{si } z \in Z_1 \text{ y} \\ R_2(z), & \text{si } z \in Z_2. \end{cases}$$

Pero $R_i \restriction_{Z_0} = r_i$ y $r_i \restriction_{Z_0} = r_0$. Entonces $R(z) = r_0(z)$ para $z \in Z_0$. Por lo tanto R está bien definida. Ahora, sea $x \in X$. Supongamos, por ejemplo, que $x \in X_1$. Entonces $R(x) = R_1(x) = r_1(x) = x$. Así, tenemos que R es una retracción. Concluimos que X es un retracto absoluto. □

Corolario 1.42. Los árboles son retractos absolutos, y por tanto son extensores absolutos.

Demostración. Sean T es un árbol y $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$ el conjunto de aristas de T. Entonces $T = \bigcup E$. Por el Lema 1.12, podemos ordenar a E de forma que, para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, $E_i \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1}) \neq \emptyset$. Veremos que $E_i \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1})$ es un conjunto de un único punto. Recordemos de la definición de gráfica finita que si E_i tiene por extremos a los puntos p y q, entonces $(E_i \setminus \{p, q\}) \cap (V(T) \cup \{\beta \mid \beta \in E(T) \setminus \{E_i\}\} = \emptyset$. Por tanto, $E_i \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{i-1}) \subset \{p, q\}$. Supongamos que $E_i \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{i-1}) = \{p, q\}$. Sea A un arco de p a q en $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{i-1}$. Entonces $E_i \cap A = \{p, q\}$. Tenemos que $E_i \cup A$ es una curva cerrada simple en T. Esto es absurdo pues T es un árbol. Cocluimos que $E_i \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1})$ es un conjunto con un único punto. Sea $E_i \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1}) = \{v_{i-1}\}$. Claramente un conjunto de un solo punto es un retracto absoluto, y por el Teorema 1.36 sabemos que un intervalo es un retracto absoluto. Entonces, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, E_i es un retracto absoluto. Aplicando el Teorema 1.41 a E_1 y E_2, tenemos que $E_1 \cup E_2$ es un retracto absoluto. Ahora aplicamos el Teorema 1.41 a $(E_1 \cup E_2)$ y a E_3 y concluimos que $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ es un retracto absoluto. Repitiendo este proceso $n-2$ veces más, concluimos que $T = \bigcup E$ es un retracto absoluto. Por lo tanto, los árboles son retractos absolutos, y así, extensores absolutos. $\square$

El hiperespacio $C(X)$

Definición 1.43. Sea X un continuo con una métrica d. Definimos $C(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado, conexo y no vacío } \}$. En otras palabras, $C(X)$ es el conjunto de subcontinuos de X.

Quisieramos dar una métrica a $C(X)$. Lo haremos de la siguente manera:

Definición 1.44. Dadas $\epsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in C(X)$, definimos *la nube de radio ϵ centrada en A* como:

$$N_\epsilon(A) = \{q \in X \mid \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x,q) < \epsilon\}.$$

Así, definimos la métrica para $C(X)$ como sigue: dados A y B elementos de $C(X)$, definimos la distancia entre A y B (llamada *distancia de Hausdorff*) como $H(A,B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid A \subset N_\epsilon(B) \text{ y } B \subset N_\epsilon(A)\}$. Para ver que H en efecto resulta ser una métrica, el lector puede consultar [12], pp. 22-24.

Lema 1.45. [19, Teorema 1.8, pp. 6-7] Sea $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una familia de continuos tales que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $X_n \supset X_{n+1}$. Sea

$$X = \bigcap \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces X es un continuo.

Lema 1.46. [12, Teorema 4.1, pp. 65-66] Sean X un continuo y $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subcontinuos de X tales que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $X_n \supset X_{n+1}$. Entonces la sucesión converge en $C(X)$ y

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \bigcap \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 1.47. [12, Ejercico 2.13, p. 28] Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ son sucesiones de subcontinuos de X tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, donde A y B son elementos de $C(X)$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$, entonces $A \subset B$, y
2. $\lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B$.

Lema 1.48. [12, Ejercicio 4.4, p. 70] Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión convergente de subcontinuos de X. Si $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, entonces, para cada $a \in A$, existe una sucesión de puntos $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Teorema 1.49. [12, Corolario 4.3, p. 69] El hiperespacio $C(X)$ es compacto.

Capítulo 2

Un caso particular: dendroides suaves

En este capítulo explicamos la prueba que hizo J. B. Fugate en su artículo *Small retractions of smooth dendroids onto trees* y determinamos hasta qué punto pudimos llegar antes de encontrar un error.

Definición 2.1. Decimos que un dendroide X es *suave* si existe un punto $p \in X$ tal que para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$, se tiene que la sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco pa_0 en el hiperespacio $C(X)$. A p se le llama *punto inicial*.

Teorema 2.2. Toda dendrita es un dendroide suave.

Demostración. Sea X una dendrita. Demostraremos que X es suave en cualquiera de sus puntos. Sean $p \in X$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en X y $a_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tomemos $\epsilon > 0$ y consideremos $B_\epsilon(a_0)$. Como X es localmente conexo en a_0, existe un conjunto abierto y conexo U tal que $a_0 \in U \subset B_\epsilon(a_0)$. Además, como X es localmente conexo y U es un abierto conexo, por el Lema 1.11, U es arco conexo. Ya que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $a_n \in U$. Tomemos $n \geq N$. El arco $a_na_0 \subset U$. Como $pa_0 \cup a_0a_n$ es un espacio arco conexo, entonces $pa_n \subset pa_0 \cup a_0a_n$. Además, $a_na_0 \subset U$, por tanto $pa_n \subset pa_0 \cup U \subset pa_0 \cup B_\epsilon(a_0)$. Claramente $pa_0 \subset N_\epsilon(pa_0)$, entonces $pa_n \subset N_\epsilon(pa_0)$. Veamos ahora que $pa_0 \subset N_{2\epsilon}(pa_n)$. Consideremos $B_{2\epsilon}(a_n)$. Como $B_\epsilon(a_0) \subset B_{2\epsilon}(a_n)$, entonces $U \subset B_{2\epsilon}(a_n)$. Además, teníamos que $a_na_0 \subset U$. Por tanto

$$a_na_0 \subset U \subset B_\epsilon(a_0) \subset B_{2\epsilon}(a_n).$$

Ahora, $pa_0 \subset pa_n \cup a_na_0 \subset pa_n \cup U \subset pa_n \cup B_{2\epsilon}(a_n)$. Entonces $pa_0 \subset N_{2\epsilon}(pa_n)$. Concluimos que $H(pa_n, pa_0) < 2\epsilon$ para toda $n \geq N$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} pa_n = pa_0$. Por lo tanto X es un dendroide suave. $\square$

Observación 2.3. No todos los dendroides suaves son dendritas.

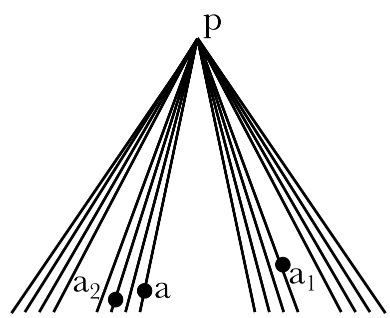

Figura 2.1: Sabemos que el abanico sobre el conjunto de Cantor no es localmente conexo; sin embargo, sí es un dendroide suave. Si tomamos el vértice p como punto inicial y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, observemos que la sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco pa.

Definición 2.4. Sean X un continuo y $\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subconjuntos de X. Definimos el *nervio* de $\mathcal{F}$ como la gráfica G que satisface lo siguiente:

- $V(G) = \mathcal{F}$, y
- $A = [F_\lambda, F_\mu] \in E(G)$ si y sólo si $F_\lambda \cap F_\mu \neq \emptyset$.

Denotaremos como $N(\mathcal{F})$ al nervio de $\mathcal{F}$.

En realidad, esta definición de nervio corresponde unicamente a la parte de dimensión 1 del nervio como es definido normalmente en la literatura. Sin embargo, nosotros lo llamamos nervio ya que sólo usaremos el de esta dimensión y para economizar palabras.

Definición 2.5. Sea X un espacio métrico. Decimos que $\mathcal{C}$ es una *cubierta arbolada* si cumple las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{C}$ cubre a X,
2. $\mathcal{C}$ es una familia finita de subconjuntos de X tal que ningún punto de X está en más de dos elementos de $\mathcal{C}$,
3. $\mathcal{C}$ no tiene cadenas circulares, es decir, el nervio de $\mathcal{C}$ no tiene curvas cerradas simples, y
4. El nervio de $\mathcal{C}$ es conexo y tiene al menos dos vértices.

A los elementos de $\mathcal{C}$ les llamaremos *eslabones*. Notemos que para que $\mathcal{C}$ sea una cubierta arbolada debe ocurrir que cualquier eslabón interseca a algún otro y tres de ellos no pueden tener intersección común.

Diremos que un elemento C de $\mathcal{C}$ es un *eslabón terminal* si existe un único

$D \in \mathcal{C} \setminus \{C\}$ tal que $C \cap D \neq \emptyset$.

Denotaremos como $\mathcal{C}^*$ a la unión de los elementos de $\mathcal{C}$.

Definición 2.6. Si en una cubierta arbolada $\mathcal{C}$ todos los elementos tienen diámetro menor a ϵ, diremos que $\mathcal{C}$ es una *ϵ-cubierta arbolada*.

Definición 2.7. Decimos que un continuo M es *arbolado* si para toda $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cubierta arbolada de M.

Lema 2.8. Un continuo X es arbolado si y sólo si para toda $\epsilon > 0$, existen un árbol T (no necesariamente se cumple que $T \subset X$) y una función continua $f : X \to T$ tal que, para toda $t \in T$, el diámetro de $f^{-1}(t)$ es menor que ϵ.

Teorema 2.9. [6, Corolario, p. 20] Todo dendroide es arbolado.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de un continuo X. Si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{C}$ que no se intersecan están a una distancia estrictamente positiva, decimos que $\mathcal{C}$ es *tensa*.

Lema 2.11. Sea X un espacio normal y conexo y sea $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ de X tal que, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i$. Además, si $\mathcal{U}$ es arbolada, entonces $\mathcal{V}$ es arbolada

Demostración. Consideremos el conjunto $A = X \setminus (U_2 \cup \ldots \cup U_n)$. Entonces A es cerrado y $A \subset U_1$. Ya que X es normal, existe un abierto V_1 tal que

$$A \subset V_1 \subset \mathrm{Cl}(V_1) \subset U_1.$$

Notemos que la familia $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una cubierta abierta de X. Inductivamente, supongamos que hemos encontrado conjuntos abiertos $V_1, \ldots V_{k-1}$ tales que, para toda $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i$ y la familia $\{V_1, \ldots V_{k-1}, U_k, \ldots, U_n\}$ es una cubierta de X. Sea $B = X \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \ldots \cup U_n)$. Entonces B es cerrado y $B \subset U_k$. Por tanto, existe un abierto V_k tal que

$$B \subset V_k \subset \mathrm{Cl}(V_k) \subset U_k.$$

Entonces $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ es una cubierta abierta de X. Continuando este proceso, obtendremos una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ de X tal que, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Cl}(V_i) \subset U_i$.

Ahora probaremos que $\mathcal{V}$ es arbolada si $\mathcal{U}$ lo es. Para esto, probaremos que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ si y sólo si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

($\Rightarrow$) Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Supongamos que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Como $V_i \subset U_i$ y $V_j \subset U_j$, entonces $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ pero que $V_i \cap V_j = \emptyset$. Consideremos el nervio de $\mathcal{V}$. Sean

$$\Lambda = \{\lambda \in \{1, \ldots, n\} \mid \text{ existe un camino de } V_i \text{ a } V_\lambda\}, \text{ y}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in \{1, \ldots, n\} \mid \text{ no existe un camino de } V_i \text{ a } V_\gamma\}.$$

Entonces $i \in \Lambda$, $j \in \Gamma$ y $\Lambda \cup \Gamma = \{1, \ldots, n\}$. Sean

$$A = \bigcup \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, \text{ y}$$

$$B = \bigcup \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Entonces A y B son abiertos y $A \cup B = X$. Veamos que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in A \cap B$. Entonces existen $\lambda \in \Lambda$ y $\gamma \in \Gamma$ tales que $x \in V_\lambda \cap V_\gamma$. Entonces, $[V_\lambda, V_\gamma]$ es una arista del nervio de $\mathcal{V}$. Sabemos que existe un camino de V_i a V_λ. Sea P dicho camino. Entonces $P \cup \{V_\gamma\}$ es un camino de V_i a V_γ. Esto es absurdo. Por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$. Entonces X es disconexo, una contradicción. Concluimos que si i y j son dos elementos distintos de $\{1, \ldots, n\}$ tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. □

Definición 2.12. Si X es un continuo, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y T es un árbol, diremos que una función $f : X \to T$ es una *$\mathcal{U}$-función* si para toda $t \in T$, $f^{-1}(t) \subset U$ para alguna $U \in \mathcal{U}$.

Definición 2.13. Si $\mathcal{C}$ es una cubierta arbolada de un continuo X y $T \subset X$ es un árbol, diremos que T está *derecho* en $\mathcal{C}$ si:

1. $\mathcal{C}$ es una cubierta esencial de T. Esto significa que cada eslabón de $\mathcal{C}$ tiene un punto de T que no está en ningún otro eslabón.

2. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $T \cap \mathrm{Fr}(C)$ tiene exactamente un punto en cada eslabón de $\mathcal{C} \setminus \{C\}$ que interseca a C.

Lema 2.14. Sean X un continuo y $\mathcal{C}$ una cubierta arbolada de X. Sea $T \subset X$ un árbol. Supongamos que T está derecho en $\mathcal{C}$. Sea $C \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathrm{Cl}(C) \cap T$ es conexo. Además, si C es un eslabón terminal de $\mathcal{C}$, entonces $T \setminus C$ es conexo.

Demostración. Veremos primero que $\mathrm{Cl}(C) \cap T$ es conexo. Supongamos por el contrario que no lo es. Entonces existen dos subconjuntos ajenos, cerrados y no vacíos de X, A y B, tales que $\mathrm{Cl}(C) \cap T = A \cup B$. Llamemos $\mathcal{S}$ al nervio de $\mathcal{C}$. Vamos a iluminar con verde y azul a los elementos de $\mathcal{C} \setminus \{C\}$. Para esto, tomemos $D \in \mathcal{C} \setminus \{C\}$.
Primero consideremos el caso en que $D \cap C \neq \emptyset$.
En este caso, como T está derecho en $\mathcal{C}$, existe un punto $p_D \in X$ tal que $\mathrm{Fr}(C) \cap T \cap D = \{p_D\}$. Como $p_D \in A \cup B$ (y sólo está en uno de estos conjuntos), asignamos el color azul a D cuando $p_D \in A$, y el color verde cuando $p_D \in B$. Entonces el color de D está bien definido.

Ahora consideremos el caso en que $D \cap C = \emptyset$.
En este caso, como los vértices de $\mathcal{S}$ son los elementos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{S}$ es un árbol, tenemos que D es un vértice de $\mathcal{S}$ que no es adjacente a C. Además, hay una única trayectoria en $\mathcal{S}$ para ir de C a D. Esta trayectoria empieza en C y su segundo elemento en un vértice D_1 de $\mathcal{C}$, adyacente a C. Entonces $D_1 \cap C \neq \emptyset$. Por el caso anterior, D_1 ya tiene un color asignado. Entonces a D le asignamos el mismo color que a D_1. Por la unicidad de la trayectoria podemos garantizar que el color asignado a D está bien definido, y como $\mathcal{C}$ es arbolada, se tiene que todos los elementos de $\mathcal{C}$ están coloreados. (Ver Figura 2.2).

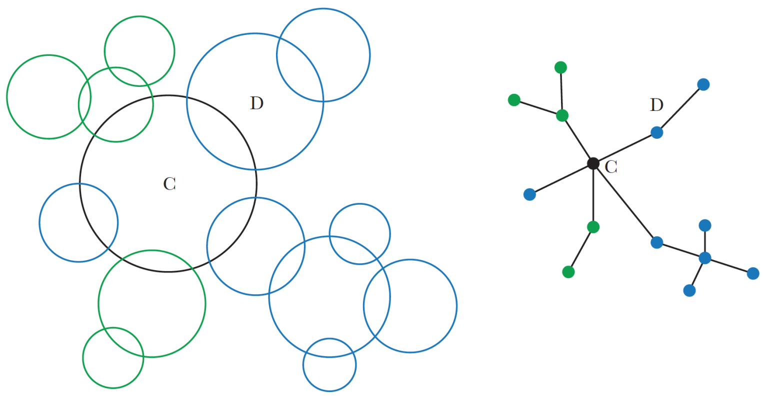

Figura 2.2: Ilustramos aquí lo que se hace en la prueba del Lema 2.14. Se colorean los elementos de $\mathcal{C} \setminus \{C\}$. Cada elemento tiene bien definido su color, y todos los elementos son coloreados.

Definimos

$$Q = A \cup \left(\bigcup \{D \cap T \mid D \text{ es azul y } D \cap C = \emptyset\} \right) \cup$$

$$\left(\bigcup \{(D \cap T) \setminus C \mid D \text{ es azul y } D \cap C \neq \emptyset\} \right), \text{ y}$$

$$R = B \cup \left(\bigcup \{D \cap T \mid D \text{ es verde y } D \cap C = \emptyset\} \right) \cup$$

$$\left(\bigcup \{(D \cap T) \setminus C \mid D \text{ es verde y } D \cap C \neq \emptyset\} \right).$$

Veamos que Q y R forman una separación para T.

I. $T = Q \cup R$.

($\subset$) Tomemos $p \in T$, Si $p \in \mathrm{Cl}(C)$, entonces $p \in A \cup B$ y hemos terminado. Si $p \notin \mathrm{Cl}(C)$, entonces existe $D \in \mathcal{C} \setminus \{C\}$ tal que $p \in D$. Sabemos que todo elemento de D de $\mathcal{C}$ está coloreado y satisface que interseca o no interseca a C. Por tanto $p \in Q \cup R$.

($\supset$) Tomemos ahora $p \in Q \cup R$. Ya que A y B son subconjuntos de T, Q y R son subconjuntos de T. Concluimos que $T = Q \cup R$.

II. Veamos que Q y R están separados. Supongamos que existe $p \in Q \cap \mathrm{Cl}(R)$.

Caso 1: $p \in A \cap \mathrm{Cl}(B) = A \cap B$.
Este caso es imposible pues A y B son ajenos.

Caso 2: $p \in A \cap \mathrm{Cl}(D \cap T)$, donde D es verde y $D \cap C = \emptyset$.
Como $\mathcal{C}$ es tensa, $\mathrm{Cl}(D) \cap \mathrm{Cl}(C) = \emptyset$. Además $p \in A \cap \mathrm{Cl}(D) \subset \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Así que este caso es imposible.

Caso 3: $p \in A \cap \mathrm{Cl}((D \cap T) \setminus C)$, donde D es verde y $D \cap C \neq \emptyset$.
Como $X \setminus C$ es cerrado, tenemos que $\mathrm{Cl}((D \cap T) \setminus C) \subset X \setminus C$. De manera que $p \notin C$. Dado que $p \in A \subset \mathrm{Cl}(C)$, tenemos que $p \in \mathrm{Fr}(C)$. Ya que $\mathrm{Cl}((D \cap T) \setminus C) \subset \mathrm{Cl}(D)$, tenemos que $p \in \mathrm{Cl}(D)$.
Si $p \notin D$, existe $E \in \mathcal{C}$ tal que $p \in E$. Entonces $E \cap C \neq \emptyset$, $E \cap D \neq \emptyset$, y C, D y E son todos diferentes. Esto es absurdo porque el nervio de $\mathcal{C}$ no tiene triángulos. Con esto probamos que $p \in D$. Por tanto, $p \in T \cap D \cap \mathrm{Fr}(C) = \{p_D\}$. Ya que $p_D = p \in A$, D es azul. Esto es una contradicción porque D es verde.

Caso 4: $p \in D \cap T$ y $p \in B$, donde D es azul y $D \cap C = \emptyset$.
Como $\mathcal{C}$ es tensa, $\mathrm{Cl}(D) \cap \mathrm{Cl}(C) = \emptyset$. Además $p \in B \cap \mathrm{Cl}(D) \subset \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Por tanto este caso es imposible.

Caso 5: $p \in D \cap T$, donde D es azul y $D \cap C = \emptyset$; y $p \in \mathrm{Cl}(E \cap T)$, donde E es verde y $E \cap C = \emptyset$.
En este caso, $p \in D \cap \mathrm{Cl}(E)$, por tanto $D \cap E \neq \emptyset$. De manera que $[D, E]$ es una arista en el nervio de $\mathcal{C}$. Ya que $\mathcal{S}$ no tiene triángulos, debe ocurrir alguno de los siguientes casos: E está en la única trayectoria de C a D en el nervio de $\mathcal{C}$, o D está en la única trayectoria de C a E en el nervio de $\mathcal{C}$. En cualquiera de los dos casos D y E tienen el mismo color. Esto es absurdo porque D es azul y E es verde.

Caso 6: $p \in D \cap T$, donde D es azul y $D \cap C = \emptyset$; y $p \in \mathrm{Cl}((E \cap T) \setminus C)$, donde E es verde y $E \cap C \neq \emptyset$.
Como D es abierto, $D \cap (E \cap T) \neq \emptyset$. De manera que $[D, E]$ es una arista de $\mathcal{S}$. Como la pareja $[E, C]$ también es arista y la pareja $[D, C]$ no es arista, tenemos que la única trayectoria en $\mathcal{S}$, que une a D con C es la unión de las aristas $[D, E]$ y $[E, C]$. Por tanto D y E son del mismo color. Esto es una contradicción.

Caso 7: $p \in B$ y $p \in (D \cap T) \setminus C$, donde D es azul y $C \cap D \neq \emptyset$.
Como $p \in B \subset \mathrm{Cl}(C)$ y $p \in (D \cap T) \setminus C \subset X \setminus C$, tenemos que $p \in \mathrm{Fr}(C) \cap D \cap T = \{p_D\}$. Ya que $p_D = p \in B$, tenemos que D es verde. Esto es absurdo pues D es azul.

Caso 8: $p \in (D \cap T) \setminus C$, donde D es azul y $D \cap C \neq \emptyset$; y $p \in \mathrm{Cl}(E \cap T)$, donde E es verde y $E \cap C = \emptyset$
Como D es abierto y $p \in D$, tenemos que $D \cap E \neq \emptyset$. Entonces la única trayectoria en $\mathcal{S}$ que une E con C es la unión de las aristas $[E, D]$ y $[D, C]$. De manera que E y D son del mismo color. Esto es absurdo.

Caso 9: $p \in (D \cap T) \setminus C$, donde D es azul y $D \cap C \neq \emptyset$; y $p \in \mathrm{Cl}((E \cap T) \setminus C)$, donde E es verde y $E \cap C \neq \emptyset$.
Como D y E son de distinto color, $D \neq E$. Entonces los vértices C, D y E forman un triángulo en $\mathcal{S}$. Esto también es absurdo.

III. Para demostrar que $\mathrm{Cl}(Q) \cap R = \emptyset$ se hace una prueba similar a II.

Por tanto, Q y R forman una separación para T, entonces T es disconexo, un absurdo. Así tenemos que $\mathrm{Cl}(C) \cap T$ es conexo.

Probaremos ahora la segunda afirmación. Sea C un eslabón terminal de $\mathcal{C}$. Observemos que si $T \setminus C = T$ o $T \setminus C = \emptyset$, entonces $T \setminus C$ es conexo y hemos terminado. Supondremos entonces que $\emptyset \neq T \setminus C \neq T$.

Supongamos que $T \setminus C$ no es conexo. Sean A y B dos componentes de $T \setminus C$. Por el teorema de golpes en la frontera aplicado a T y $T \setminus C$, tenemos que

$$Cl_T(A) \cap Fr_T(T \setminus C) \neq \emptyset.$$

Como A es cerrado en $T \setminus C$ y $T \setminus C$ es cerrado en T, entonces $Cl_T(A) = A$. Por lo tanto

$$A \cap Fr_T(T \setminus C) \neq \emptyset.$$

Recordemos que $Fr_T(T \setminus C) = Fr_T(C)$ y $Fr_T(C) \subset Fr_X(C) \cap T$. Por tanto

$$A \cap T \cap \mathrm{Fr}(C) \neq \emptyset.$$

De manera similar se puede demostrar que $B \cap T \cap \mathrm{Fr}(C) \neq \emptyset$.

Sean $x \in A \cap T \cap \mathrm{Fr}(C)$ y $y \in B \cap T \cap \mathrm{Fr}(C)$. Si $x = y$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$, un absurdo. Entonces $x \neq y$. Como x y y son elementos de $\mathrm{Fr}(C)$, entonces no están en C. Ya que $\mathcal{C}$ es cubierta de T, existen D y E en $\mathcal{C} \setminus \{C\}$ tales que $x \in D$ y $y \in E$. Si $D \neq E$, ya que estos abiertos son vecindades de x y y, respectivamente, y $\{x, y\} \subset \mathrm{Fr}(C)$, entonces $C \cap D \neq \emptyset$ y $C \cap E \neq \emptyset$. Entonces hay dos eslabones distintos que intersecan a C, contradiciendo que C es un eslabón terminal. Por lo tanto $D = E$. Entonces $\{x, y\} \subset \mathrm{Fr}(C) \cap D \cap T$. Esto contradice que T está derecho en $\mathcal{C}$.

El absurdo vino de suponer que $T \setminus C$ tenía más de una componente. Por tanto $T \setminus C$ es conexo. $\square$

Definición 2.15. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de un dendroide X. Dado $C \in \mathcal{C}$ definimos su corazón como

$$M(C) = C \setminus \Big(\bigcup \{D \in \mathcal{C} \mid D \neq C\}\Big).$$

Notemos que

$$M(C) = X \setminus \Big(\bigcup \{D \in \mathcal{C} \mid D \neq C\}\Big).$$

Entonces $M(C)$ es cerrado en X.

Lema 2.16. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta abierta, tensa y arbolada de un dendroide X, y T un árbol derecho en $\mathcal{C}$. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $M(C) \cap T$ es conexo.

Demostración. Supongamos que no lo es. Entonces existen subconjuntos cerrados y no vacíos A y B en X tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = M(C) \cap T$.
Vamos a definir dos subconjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$.

Dada $D \in \mathcal{C} \setminus \{C\}$, en el caso en que $C \cap D \neq \emptyset$, como T está derecho en $\mathcal{C}$, existe un punto $p_D \in X$ tal que $\mathrm{Fr}(D) \cap T \cap C = \{p_D\}$. Si existe $E \in \mathcal{C}$ tal que $p_D \in E$, entonces $E \cap D \neq \emptyset$ y $E \cap C \neq \emptyset$. Como el nervio de $\mathcal{C}$ no tiene triángulos, tenemos que $E = D$ o $E = C$. Notemos que $E \neq D$ porque $p_D \in E$ y $p_D \notin D$. Entonces $E = C$. Por tanto, C es el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene a p_D. Por tanto $p_D \in M(C)$ Entonces $p_D \in M(C)$, y como $p_D \in T$, entonces $p_D \in A \cup B$ (y sólo está en uno de estos conjuntos ya que A y B son ajenos). En el caso en que $p_d \in A$, ponemos $D \in \mathcal{A}$, y en el caso en que $p_D \in B$, ponemos $D \in \mathcal{B}$.

En el caso en que $D \cap C = \emptyset$, recordemos que los vértices de $N(\mathcal{C})$ son los elementos de $\mathcal{C}$. Además, $N(\mathcal{C})$ es un árbol. Entonces D es un vértice de $N(\mathcal{C})$ que no es adjacente al vértice C. Sabemos que existe una única trayectoria en $N(\mathcal{C})$ que va de C a D. Sea D_1 el elemento de esta trayectoria que es adyacente a C. Entonces $D_1 \cap C \neq \emptyset$. Por el caso anterior, $D_1 \in \mathcal{A}$ o $D_1 \in \mathcal{B}$ y sólo está en uno de ellos. Entonces ponemos $D \in \mathcal{A}$ si $D_1 \in \mathcal{A}$, y $D \in \mathcal{B}$ si $D_1 \in \mathcal{B}$. Observemos que, ya que la trayectoria de C a D es única y D_1 está unicamente en uno de los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces $D \in \mathcal{A}$ o $D \in \mathcal{B}$ y está unicamente en uno de ellos.

Entonces $\mathcal{C} \setminus \{C\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Definimos los siguientes subconjuntos de X:

$$Q = A \cup \left(\bigcup \{D \cap T \mid D \in \mathcal{A}\} \right), \text{ y}$$

$$R = B \cup \left(\bigcup \{D \cap T \mid D \in \mathcal{B}\} \right).$$

Notemos que Q y R son subconjuntos de T ya que tanto A como B lo son. Veremos que Q y R constituyen una separación para T, y así llegaremos a un absurdo.

I. $T = Q \cup R$.
Tomemos $p \in T$. Si $p \in M(C)$, entonces $p \in A \cup B \subset Q \cup R$ y hemos terminado. Supongamos entonces que $p \notin M(C)$. Entonces existe $D \in \mathcal{C} \setminus \{C\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tal que $p \in D$. Entonces $D \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Si $D \in \mathcal{A}$, entonces $p \in Q$, y si $D \in \mathcal{B}$, entonces $p \in R$. Con esto terminamos la prueba de que $T \subset Q \cup R$, y como ya habíamos visto, la otra contención, tenemos que $T = Q \cup R$.

II. $\left(\bigcup \{D \mid D \in \mathcal{A}\} \right) \cap \left(\bigcup \{D \mid D \in \mathcal{B}\} \right) = \emptyset$.
Supongamos que existen eslabones $D \in \mathcal{A}$ y $E \in \mathcal{B}$ tales que $D \cap E \neq \emptyset$. Entonces $[E, D]$ es una arista de $N(\mathcal{C})$. Sea P_1 la única trayectoria en $N(\mathcal{C})$ que va de C a D. Tenemos que $P_1 \cup \{[E, D]\}$ es la única trayectoria que va de C a E. Sea F el elemento de $P_1 \cup \{[E, D]\}$ que es adyacente a C. Entonces $p_F \in A$ o $p_F \in B$. en el primer caso, D y E están en $\mathcal{A}$, y en el segundo caso D y E están en $\mathcal{B}$. Los dos casos contradicen que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por otra parte, si $E \in P_1$, entonces E y D están en P_1, y se obtiene una contradicción similar. Por lo tanto

$$\left(\bigcup \{D \mid D \in \mathcal{A}\} \right) \cap \left(\bigcup \{D \mid D \in \mathcal{B}\} \right) = \emptyset.$$

III. $Q \cap R = \emptyset$.
Supongamos que existe $p \in Q \cap R$. Si $p \in A \subset M(C)$, entonces, por cómo se definió $M(C)$, p no puede estar en ningún elemento E de $\mathcal{C} \setminus \{C\}$. Además, como $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $p \notin B$. Por lo tanto $p \notin R$, un absurdo. Entonces $p \notin A$. Similarmente, $p \notin B$. Pero $R = B \cup \left(\bigcup \{D \cap T \mid D \in \mathcal{B}\} \right)$. Así, $p \in \left(\bigcup \{D \mid D \in \mathcal{A}\} \right) \cap \left(\bigcup \{D \mid D \in \mathcal{B}\} \right)$. Esto contradice II. Por tanto, $Q \cap R = \emptyset$.

IV. Q y R están separados.
Supongamos que existe un punto $p \in \mathrm{Cl}(Q) \cap R$. Si $p \in \mathrm{Cl}(A) = A$, entonces $Q \cap R \neq \emptyset$. Esto contradice III. Por lo tanto $p \notin \mathrm{Cl}(A)$. Como $\mathcal{A}$ es finito, existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $p \in \mathrm{Cl}(D) \cap R$.
Si $p \in B$, como $B \subset M(C)$, entonces $p \in M(C)$, esto quiere decir que $p \in C$ y C es el único eslabón de $\mathcal{C}$ que tiene a p. Como $D \in \mathcal{C} \setminus \{C\}$, entonces $p \notin D$. Por lo tanto $p \in \mathrm{Fr}(D)$. Ya que $p \in B \subset C$ y C es abierto, tenemos que $C \cap D \neq \emptyset$. Dado que $p \in \mathrm{Cl}(Q) \subset T$ y T es compacto, entonces $p \in T \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C = \{p_D\}$. De modo que $p = p_D$. Dado que $D \in \mathcal{A}$, por definición, $p_D \in A$. Por lo tanto $p \in A \cap B$, un absurdo. Concluimos que $p \notin B$.
Como $p \in R$, existe $E \in \mathcal{B}$ tal que $p \in E$. Como E es abierto, entonces $E \cap D \neq \emptyset$. Esto contradice II y prueba que $\mathrm{Cl}(Q) \cap R = \emptyset$.

Similarmente, $Q \cap \mathrm{Cl}(R) = \emptyset$. Por lo tanto Q y R están separados.

Como $A \neq \emptyset \neq B$, entonces Q y R son distintos del vacío. Concluimos que Q y R constituyen una separación para T, lo que es absurdo. Esto prueba que $M(C) \cap T$ es conexo. □

Lema 2.17. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta, tensa y arbolada de un dendroide X. Si C y D son elementos de $\mathcal{C}$, entonces $\mathrm{Cl}(C \cap D) = \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Si además $C \cap D \neq \emptyset$ y $C \neq D$, entonces se cumple lo siguiente:

1. $\mathrm{Fr}(C) \cap \mathrm{Fr}(D) = \emptyset,$ (2.1)

2. $\mathrm{Fr}(D) \cap C$ es cerrado, y (2.2)

3. $\mathrm{Fr}(C \cap D) = (\mathrm{Fr}(C) \cap D) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C).$ (2.3)

Demostración. Si $C = D$, entonces claramente $\mathrm{Cl}(C \cap D) = \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Si $C \cap D = \emptyset$, como la cubierta $\mathcal{C}$ es tensa, entonces $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D) = \emptyset = \mathrm{Cl}(C \cap D)$. Entonces, para el resto de la prueba supondremos que $C \neq D$ y que $C \cap D \neq \emptyset$.

Empecemos por probar la igualdad $\mathrm{Cl}(C \cap D) = \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Claramente, $\mathrm{Cl}(C \cap D) \subset \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$.Veremos ahora que $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D) \subset (C \cap \mathrm{Cl}(D)) \cup (\mathrm{Cl}(C) \cap D)$.
Sea $p \in \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Sea $E \in \mathcal{C}$ tal que $p \in E$. Como E es abierto, $E \cap C \neq \emptyset$ y $E \cap D \neq \emptyset$. Si $E \notin \{C, D\}$, tenemos que C, D y E son los vértices de un triángulo en el nervio de $\mathcal{C}$. Esto es absurdo porque $\mathcal{C}$ es arbolada. Por lo tanto $E \in \{C, D\}$. Si $E = C$ entonces $p \in C \cap \mathrm{Cl}(D)$; y si $E = D$, entonces $p \in \mathrm{Cl}(C) \cap D$. De manera que $p \in (C \cap \mathrm{Cl}(D)) \cup (\mathrm{Cl}(C) \cap D)$.

Ahora veamos que $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)) \subset \mathrm{Cl}(C \cap D)$.
Sea $p \in \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Por el párrafo anterior, podemos suponer que $p \in C \cap \mathrm{Cl}(D)$. Si tomamos un abierto U de X tal que $p \in U$, tenemos que p pertenece al conjunto abierto $C \cap U$. Por lo que $C \cap U \cap D \neq \emptyset$. Por tanto

$p \in \mathrm{Cl}(C \cap D)$. Esto termina la prueba de que $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D) = \mathrm{Cl}(C \cap D)$.

Probemos ahora (2.1), (2.2) y (2.3).

1. Supongamos, contrario a (2.1), que existe un punto $p \in \mathrm{Fr}(C) \cap \mathrm{Fr}(D)$. Como $\mathcal{C}$ es tensa, tenemos que $C \cap D \neq \emptyset$. Ya que C y D son abiertos, entonces $p \notin C \cup D$. Por tanto, existe $E \in \mathcal{C} \setminus \{C, D\}$ tal que $p \in E$. Ya que E es abierto, $E \cap C \neq \emptyset$ y $E \cap D \neq \emptyset$. Entonces $[C, D]$, $[C, E]$ y $[D, E]$ son aristas en el nervio de $\mathcal{C}$. Entonces el nervio de $\mathcal{C}$ contiene un triángulo. Esto es absurdo porque el nervio de $\mathcal{C}$ es un árbol. Con esto terminamos la prueba de que $\mathrm{Fr}(C) \cap \mathrm{Fr}(D) = \emptyset$.

2. Probaremos ahora que $\mathrm{Fr}(D) \cap C$ es cerrado. Sea $p \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Fr}(D) \cap C)$. Sea $E \in \mathcal{C}$ tal que $p \in E$. Entonces existe $q \in E \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C$. De modo que $E \cap C$ es una vecindad de q, por lo que $E \cap C \cap D \neq \emptyset$. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta arbolada, E, C y D no pueden ser todos distintos. Ya que $q \notin D$ (pues está en su frontera) y $q \in E \cap C$, tenemos que $E = C$ y entonces $p \in C$. Como $p \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Fr}(D)) \subset \mathrm{Fr}(D)$, tenemos que $p \in \mathrm{Fr}(D)$. Por tanto, $p \in \mathrm{Fr}(D) \cap C$. Esto termina la prueba de que $\mathrm{Fr}(D) \cap C$ es cerrado.

3. Sólo falta probar que $\mathrm{Fr}(C \cap D) = (\mathrm{Fr}(C) \cap D) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C)$. Probemos las dos contenciones:

   ($\subset$) Sea $p \in \mathrm{Fr}(C \cap D) \subset \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Si $p \notin \mathrm{Fr}(C) \cup \mathrm{Fr}(D)$, tenemos que p está en el interior de ambos conjuntos, así que existe un abierto U tal que $U \subset C \cap D$, lo que contradice que $p \in \mathrm{Fr}(C \cap D)$. Podemos suponer entonces que $p \in \mathrm{Fr}(C)$. Así, $p \notin C$. Si $p \notin D$, tenemos que existe $E \in \mathcal{C} \setminus \{C, D\}$ tal que $p \in E$. Ya que E es abierto, $E \cap (C \cap D) \neq \emptyset$. Esto contradice que $\mathcal{C}$ es una cubierta arbolada. Por tanto $p \in D$, y entonces $p \in \mathrm{Fr}(C) \cap D$. Esto termina la prueba de la primera contención.

   ($\supset$) Tomemos ahora $p \in \mathrm{Fr}(C) \cap D$. Por tanto $p \notin C$, así que $p \notin C \cap D$. Sea U un abierto en X tal que $p \in U$. Entonces $U \cap D$ es una vecindad de p, por lo que $(U \cap D) \cap C \neq \emptyset$. Esto muestra que $p \in \mathrm{Cl}(C \cap D)$, y como $p \notin C \cap D$, concluimos que $p \in \mathrm{Fr}(C \cap D)$.

□

Dada $C \in \mathcal{C}$, definimos $\mathcal{C}(C) = \{D \in \mathcal{C} \mid D \cap C \neq \emptyset \text{ y } D \neq C\}$.

Lema 2.18. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta, tensa y arbolada de un dendroide X. Si $C \in \mathcal{C}$, entonces $M(C)$ es cerrado y $\mathrm{Fr}(M(C)) = \bigcup\{\mathrm{Fr}(D) \cap C \mid D \in \mathcal{C}(C)\}$.

Demostración. Ya sabemos que $M(C)$ es cerrado. Probaremos ahora las dos contenciones:

($\subset$) Tomemos $p \in \mathrm{Fr}(M(C)) \subset M(C) = \mathrm{Cl}(M(C))$. Entonces $p \in C$. Por otra parte, $p \in \mathrm{Cl}(X \setminus M(C)) = \mathrm{Cl}(\bigcup\{D \in \mathcal{C} \mid D \neq C\}) = \bigcup\{\mathrm{Cl}(D) \mid C \in \mathcal{C}$ y $D \neq C\}$. Entonces existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $D \neq C$ y $p \in \mathrm{Cl}(D)$. Como $p \in M(C)$, $p \notin D$. De modo que $p \in \mathrm{Fr}(D) \cup C$. Ya que C es abierto, $p \notin \mathrm{Fr}(C)$ y $C \cap D \neq \emptyset$. De manera que $D \in \mathcal{C}(C)$. Esto termina la prueba de que $\mathrm{Fr}(M(C)) \subset \bigcup\{\mathrm{Fr}(D) \cap C \mid D \in \mathcal{C}(C)\}$.

($\supset$) Tomemos ahora $p \in \bigcup\{\mathrm{Fr}(D) \cap C \mid C \in \mathcal{C}(C)\}$. Entonces existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $D \cap C \neq \emptyset$, $D \neq C$ y $p \in \mathrm{Fr}(D) \cap C$. Si existe $E \in \mathcal{C}$ tal que $p \in E$ y $E \neq C$, entonces $E \cap C$ es una vecindad de p, por lo que $E \cap C \cap D \neq \emptyset$. Ya que $p \notin \mathrm{Fr}(E)$ y $p \in \mathrm{Fr}(D)$, entonces $E \neq D$. Esto contradice el hecho de que el nervio de $\mathcal{C}$ es un árbol y prueba que $p \notin \bigcup\{E \in \mathcal{C} \mid E \neq C\}$. Por tanto $p \in M(C)$. Como $p \in \mathrm{Fr}(D) \subset \mathrm{Cl}(D) \subset \mathrm{Cl}(\bigcup\{E \in \mathcal{C} \mid E \neq C\}) = \mathrm{Cl}(X \setminus M(C))$, concluimos que $p \in \mathrm{Fr}(M(C))$. Esto termina la prueba de la afirmación. □

Sean C y D elementos de $\mathcal{C}$ tales que $C \neq D$ y $D \cap C \neq \emptyset$. Como T está derecho en $\mathcal{C}$, tenemos que existe un único punto en $\mathrm{Fr}(D) \cap C \cap T$. A este punto lo llamaremos $p(C, D)$. Es decir, $\mathrm{Fr}(D) \cap C \cap T = \{p(C, D)\}$.

Lema 2.19. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta abierta, tensa y arbolada de un dendroide X y T un árbol en X derecho en $\mathcal{C}$. Sean C y D elementos de $\mathcal{C}$ tales que $C \neq D$ y $C \cap D \neq \emptyset$. Entonces $\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$ es conexo.

Demostración. Supongamos por el contrario que $\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$ es disconexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos A y B tales que $\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T = A \cup B$. Por el Lema 2.17, $\mathrm{Fr}(C \cap D) = (\mathrm{Fr}(C) \cap D) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C)$. De manera que $\mathrm{Fr}(C \cap D) \cap T = (\mathrm{Fr}(C) \cap C \cap T) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C \cap T) = \{p(D, C), p(C, D)\}$. Hacemos $p_1 = p(C, D)$ y $p_2 = p(D, C)$. Entonces $\{p_1, p_2\} \subset \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T = A \cup B$.
Sea $\mathcal{S}$ el nervio de $\mathcal{C}$. Como $C \cap D \neq \emptyset$, entonces $[C, D]$ es una arista de $\mathcal{S}$. Como el quitar cualquier arista en un árbol lo separa, es posible separar al conjunto de vértices de $\mathcal{S}$ (que es $\mathcal{C}$) en dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tales que $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathcal{B}$ y la única trayectoria entre un elemento de $\mathcal{A}$ y un elemento de $\mathcal{B}$ contiene a la arista $[C, D]$. Definimos los siguientes subconjuntos de X:

$$U = \bigcup\{E \in \mathcal{C} \mid E \in \mathcal{A} \setminus \{C\}\} \text{ y } V = \bigcup\{E \in \mathcal{C} \mid E \in \mathcal{B} \setminus \{D\}\}.$$

(Es importante observar que tomamos a U y V como subconjuntos de X, no como subconjuntos de los vértices de $\mathcal{S}$). Entonces U y V son subconjuntos abiertos de X (alguno podría ser vacío), y como ningún elemento de $\mathcal{A} \setminus \{C\}$ interseca a uno de $\mathcal{B} \setminus \{D\}$, tenemos que $U \cap V = \emptyset$. (Ver Figura 2.3).

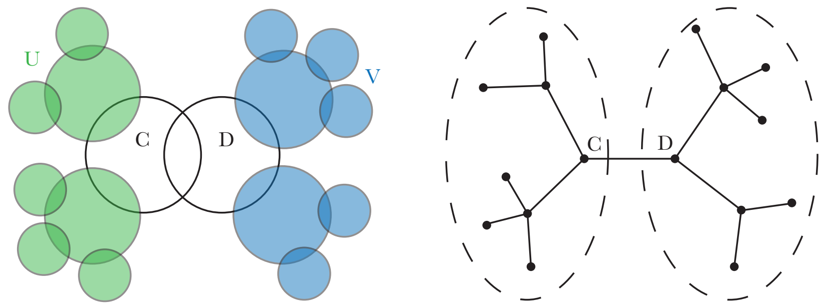

Figura 2.3: Separamos el conjunto de vértices en dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que satisfacen que $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathcal{B}$ y para llegar de un elemento de $\mathcal{A}$ a uno de $\mathcal{B}$ se ocupa la arista $[C, D]$. A partir de esto construimos dos subconjuntos U y V de X, estos abiertos satisfacen que $U \cap V = \emptyset$.

Analizamos tres posibilidades:

Posibilidad 1: $p_1 \in A$ y $p_2 \in B$.
Definimos los siguientes conjuntos:

$$Q = ((U \cup (C \setminus D)) \cap T) \cup A \text{ y } R = ((V \cup (D \setminus C)) \cap T) \cup B.$$

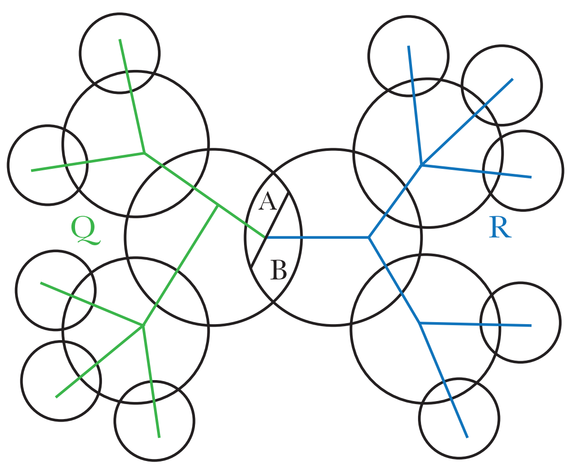

Figura 2.4: Veremos que Q y R separan T para llegar a un absurdo.

Veremos que Q y R constituyen una separación para T.

I. Para empezar, veamos que $T = Q \cup R$.

($\subset$) Sea $t \in T$. Sea $E \in \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tal que $p \in E$. Si $E \in \mathcal{A} \setminus \{C\}$, entonces $p \in U \cap T \subset Q$ y hemos terminado. Si $E = C$ y $p \notin D$, entonces $p \in (C \setminus D) \cap T \subset Q$ y si $E = C$ y $p \in D$, entonces $p \in C \cap D \cap T \subset A \cup B \subset Q \cup R$. Por tanto, si $E \in \mathcal{A}$, concluimos que $p \in Q \cup R$. El caso en el que $E \in \mathcal{B}$ se hace de forma similar.

($\supset$) Como A y B son subconjuntos de T, tenemos que $Q \cup R \subset T$.

Esto completa la prueba de que $T = Q \cup R$.

II. Como A y B son no vacíos, tenemos que Q y R también son no vacíos.

III. Veamos que $\mathrm{Cl}(Q) \cap R = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe un punto $p \in \mathrm{Cl}(Q) \cap R$. Analizamos los posibles casos para p.

Caso 1: $p \in \mathrm{Cl}(U)$ y $p \in V$.
En este caso la contradicción se da porque U y V son abiertos ajenos.

Caso 2: $p \in \mathrm{Cl}(U) \cap T$ y $p \in D \setminus C$.
Ya que D es abierto, tenemos que $D \cap U \neq \emptyset$. Entonces existe $E \in \mathcal{A} \setminus \{C\}$ tal que $D \cap E \neq \emptyset$. Esto contradice la manera en que escogimos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, pues la única trayectoria entre un elemento de $\mathcal{A}$ y un elemento de $\mathcal{B}$ es $[C, D]$.

Caso 3: $p \in \mathrm{Cl}(U) \cap T$ y $p \in B$.
Como $B \subset \mathrm{Cl}(C \cap D) \subset \mathrm{Cl}(D)$, tenemos que $p \in \mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(D)$. Esto implica que existe $E \in \mathcal{A} \setminus \{C\}$ tal que $p \in \mathrm{Cl}(D) \cap \mathrm{Cl}(E)$. Como $\mathcal{C}$ es tensa, se tiene que $D \cap E \neq \emptyset$. Procediendo como en el caso 2 se obtiene una contradicción.

Caso 4: $p \in \mathrm{Cl}(C \setminus D) \cap T$ y $p \in V$.
En este caso, existe $E \in \mathcal{B} \setminus \{D\}$ tal que $p \in E$. Como E es abierto, $E \cap C \neq \emptyset$, esto no es posible porque $C \in \mathcal{A}$ y $E \in \mathcal{B} \setminus \{D\}$.

Caso 5: $p \in \mathrm{Cl}(C \setminus D) \cap T$ y $p \in D \setminus C$.
En este caso, $p \in \mathrm{Cl}(C \setminus D) \subset \mathrm{Cl}(X \setminus D) = X \setminus D$, por lo que no puede estar en $D \setminus C$. Por tanto este caso también es absurdo.

Caso 6: $p \in \mathrm{Cl}(C \setminus D) \cap T$ y $p \in B$.
Como $p \in \mathrm{Cl}(C \setminus D) \subset X \setminus D$, tenemos que $p \notin D$. Notemos que $B \subset \mathrm{Cl}(D)$, así que $p \in \mathrm{Fr}(D)$. Sea $E \in \mathcal{C}$ tal que $p \in E$. Entonces $E \neq D$, $E \cap D \neq \emptyset$ y $E \cap C \neq \emptyset$. Como $\mathcal{S}$ no tiene triángulos, tenemos que $E = C$. De manera que $p \in C \cap \mathrm{Fr}(D) \cap T = \{p(C, D)\} = \{p_1\}$. Entonces $p = p_1 \in A \cap B$, lo cual es absurdo pues A y B son ajenos.

Caso 7: $p \in \mathrm{Cl}(A) \cap T = A \cap T$ y $p \in V$.
Sabemos que $A \subset \mathrm{Cl}(C \cap D) \subset \mathrm{Cl}(C)$. Además, como $p \in V$, existe $E \in \mathcal{B} \setminus \{D\}$ tal que $p \in E$. Entonces $\mathrm{Cl}(C) \cap E \neq \emptyset$. Por tanto $C \cap E \neq \emptyset$. Esto contradice la elección de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Caso 8: $p \in A \cap T$ y $p \in D \setminus C$.
Ese caso es similar al caso 6 intercambiando A por B y C por D. Así, este caso también es imposible.

Caso 9: $p \in A \cap T$ y $p \in B$.
Este caso es absurdo ya que $A \cap B = \emptyset$.

Con esto concluimos que $\mathrm{Cl}(Q) \cap R = \emptyset$. De forma similar se prueba que $Q \cap \mathrm{Cl}(R) = \emptyset$. Entonces T no es conexo, un absurdo. Esto prueba que la posibilidad 1 no se puede dar.

Posibilidad 2: $\{p_1, p_2\} \subset A$.
Definimos

$$Q = ((U \cup (C \setminus D) \cup V \cup (D \setminus C)) \cap T) \cup A \text{ y } R = B.$$

Con argumentos similares a los de la posibilidad 1, obtenemos que Q y R constituyen una separación para T, lo cual es una contradicción.

Posibilidad 3: $\{p_1, p_2\} \subset B$.
En este caso definimos

$$Q = A \text{ y } R = ((U \cup (C \setminus D) \cup V \cup (D \setminus C)) \cap T) \cup B.$$

También ésta es una separación de T y nos lleva a que T es disconexo. Por tanto esta posibilidad no se puede dar. Esto concluye la prueba del lema. $\square$

Construcción 2.20. Sean $\mathcal{C}$ una cubierta abierta, tensa y arbolada de un dendroide X y T un árbol en X derecho en $\mathcal{C}$. Dada $C \in \mathcal{C}$, vamos a definir una función continua

$$f_C : M(C) \to M(C) \cap T.$$

Por el Lema 2.18, sabemos que $M(C)$ es cerrado y que $\mathrm{Fr}(M(C)) = \bigcup\{\mathrm{Fr}(D) \cap C \mid D \in \mathcal{C}(C)\}$. Además, por el Lema 2.16, $T \cap M(C)$ es conexo, y por tanto es

un subárbol de T.
Dada $D \in \mathcal{C}(C)$, tenemos que $D \cap C \neq \emptyset$ y $D \neq C$. Entonces $\mathrm{Fr}(D) \cap C \cap T = \{p(C, D)\}$. Notemos que $\mathrm{Fr}(D) \cap C \cap T \subset \mathrm{Fr}(M(C)) \cap T \subset M(C) \cap T$.

Empezamos por definir $f_C : \mathrm{Fr}(M(C)) \cup (M(C) \cap T) \to M(C) \cap T$ como sigue:

$$f_C(p) = \begin{cases} p(C, D), & \text{si } p \in \mathrm{Fr}(D) \cap C, \text{ y } D \in \mathcal{C}(C), \text{ y} \\ p, & \text{si } p \in M(C) \cap T. \end{cases} \tag{2.4}$$

En el caso en que $p \in \mathrm{Fr}(D) \cap C \cap M(C) \cap T$, donde $D \in \mathcal{C}(C)$, por definición, $p = p(C, D)$. De manera que $f_C(p)$ está bien definida. Además, por (2.1) y (2.2), los conjuntos de la forma $\mathrm{Fr}(D) \cap C$ son cerrados, y cuando D varía en $\mathcal{C}(C)$, son ajenos dos a dos. Por tanto f_C es una función bien definida y continua en $\mathrm{Fr}(M(C)) \cup (M(C) \cap T)$.
Ya que $M(C)$ es un espacio compacto, $\mathrm{Fr}(M(C)) \cup (M(C) \cap T)$ es cerrado en $M(C)$ y $M(C) \cap T$ es un extensor absoluto, tenemos que es posible extender f_C a una función continua (que seguiremos llamando f_C),

$$f_C : M(C) \to M(C) \cap T.$$

Claramente, f_C es una retracción. Además tenemos la siguiente propiedad que nos será útil más adelante:

$$\text{Para cada } t \in M(C) \cap T,\ f_C^{-1}(t) \subset M(C) \subset C. \tag{2.5}$$

Dadas C y D en $\mathcal{C}$ tales que $C \cap D \neq \emptyset$ y $D \neq C$, vamos a definir una función continua

$$f_{\{C,D\}} : \mathrm{Cl}(C \cap D) \to \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T.$$

Por (2.3), sabemos que $\mathrm{Fr}(C \cap D) = (\mathrm{Fr}(C) \cap D) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C)$. Por el Lema 2.19, $\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$ es conexo, y entonces es un subárbol de T.
Definiremos primero $f_{\{C,D\}} : \mathrm{Fr}(C \cap D) \cup (\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T) \to \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$ como sigue:

$$f_{\{C,D\}}(p) = \begin{cases} p(C, D), & \text{si } p \in \mathrm{Fr}(D) \cap C, \\ p(D, C), & \text{si } p \in \mathrm{Fr}(C) \cap D, \text{ y} \\ p, & \text{si } p \in \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T. \end{cases} \tag{2.6}$$

Recordemos que $\{p(C, D)\} = C \cap \mathrm{Fr}(D) \cap T$ y $\{p(D, C)\} = D \cap \mathrm{Fr}(C) \cap T$. Si $p \in \mathrm{Fr}(D) \cap C \cap \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$, entonces, por definición, $p = p(C, D)$, de manera que los valores asignados para p coinciden. Similarmente, si $p \in \mathrm{Fr}(C) \cap D \cap \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$, los valores que le son asignados coinciden. Además, por (2.1) y (2.2), los conjuntos $\mathrm{Fr}(C) \cap D$ y $\mathrm{Fr}(D) \cap C$ son cerrados y ajenos. De manera que la función $f_{\{C,D\}}$ está bien definida y es continua en $\mathrm{Fr}(C \cap D) \cup (\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T)$.
Ya que $\mathrm{Cl}(C \cap D)$ es un espacio compacto, $\mathrm{Fr}(C \cap D) \cup (\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T)$ es cerrado en $\mathrm{Cl}(C \cap D)$ y $\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$ es un extensor absoluto, tenemos que la función $f_{\{C,D\}}$ tiene una extensión continua (que seguiremos llamando $f_{\{C,D\}}$)

$$f_{\{C,D\}} : \mathrm{Cl}(C \cap D) \to \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T.$$

Claramente, $f_{\{C,D\}}$ es una retracción.

Afirmación: Sea $t \in \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si $t = p(C,D)$, entonces $f^{-1}_{\{C,D\}}(t) \subset C$, (2.7)
2. Si $t = p(D,C)$, entonces $f^{-1}_{\{C,D\}}(t) \subset D$, y (2.8)
3. Si $t \notin \{p(C,D), p(D,C)\}$, entonces $f^{-1}_{\{C,D\}}(t) \subset C \cap D$. (2.9)

Demostración. Para demostrar (2.7), notemos que, por la definición de $f_{\{C,D\}}$, se tiene que $f_{\{C,D\}}(\mathrm{Fr}(C) \cap D) = \{p(D,C)\}$. Como $p(C,D) \in \mathrm{Fr}(D) \cap C$ y $p(D,C) \in \mathrm{Fr}(C) \cap D$, entonces $p(C,D) \neq p(D,C)$. Por tanto,

$$\mathrm{Fr}(C) \cap D \cap f^{-1}_{\{C,D\}}(p(C,D)) = \emptyset.$$

Además, por (2.3),

$$\mathrm{Cl}(C \cap D) = \mathrm{Fr}(C \cap D) \cup (C \cap D) = (\mathrm{Fr}(C) \cap D) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C) \cup (C \cap D).$$

De manera que $f^{-1}_{\{C,D\}}(p(C,D)) \subset (\mathrm{Fr}(D) \cap C) \cup (C \cap D) \subset C$. Esto termina la prueba de (2.7).
La prueba de (2.8) es similar a la de (2.7).
Para demostrar (2.9), tomemos $t \in \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap T \setminus \{p(C,D), p(D,C)\}$. Como $f_{\{C,D\}}(\mathrm{Fr}(C) \cap D) = \{p(D,C)\}$ y $f_{\{C,D\}}(\mathrm{Fr}(D) \cap C) = \{p(C,D)\}$, tenemos que

$$(f^{-1}_{\{C,D\}}(t)) \cap ((\mathrm{Fr}(C) \cap D) \cup (\mathrm{Fr}(D) \cap C)) = \emptyset.$$

De modo que

$$(f^{-1}_{\{C,D\}}(t)) \cap \mathrm{Fr}(C \cap D) = \emptyset.$$

Y como

$$f^{-1}_{\{C,D\}}(t) \subset \mathrm{Cl}(C \cap D),$$

obtenemos que $f^{-1}_{\{C,D\}} \subset C \cap D$. $\square$

Proposición 2.21. Sean X un dendroide, $\mathcal{C}$ una cubierta abierta, tensa y arbolada de X y T un árbol contenido en X y derecho en $\mathcal{C}$. Entonces existe una $\mathcal{C}$-retracción $f : X \to T$.

Demostración. Mantendremos la notación que hemos estado usando. Veremos que existe una función continua $f : X \to T$ que extiende a todas las funciones de los tipos f_C y $f_{\{C,D\}}$.
Definimos f como sigue:

$$f(p) = \begin{cases} f_C(p), & \text{si existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in M(C), \text{ y} \\ f_{\{C,D\}}(p), & \text{si } p \in \mathrm{Cl}(C \cap D) \text{ para algunos } C, D \in \mathcal{C} \text{ distintos.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Notemos que las funciones mencionadas están definidas y son continuas en cerrados de X. Para ver que f esta bien definida, basta ver que estas funciones coinciden en las intersecciones. Hay tres casos a considerar:

Caso 1: C y D son elementos de $\mathcal{C}$ y $M(C) \cap M(D) \neq \emptyset$.
Tomemos $p \in M(C) \cap M(D)$. Por como fueron definidos $M(C)$ y $M(D)$, se tiene que C es el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene a p, y lo mismo ocurre con D. De manera que $C = D$. De modo que f_C y f_D coinciden en $C = C \cap D = D$.

Caso 2: C, D y E son elementos de $\mathcal{C}$ tales que $C \neq D$, $C \cap D \neq \emptyset$ y $M(E) \cap \mathrm{Cl}(C \cap D) \neq \emptyset$.
Sea $p \in M(E) \cap \mathrm{Cl}(C \cap D)$. Entonces E es el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene a p. Además, como $p \in \mathrm{Cl}(C \cap D)$, entonces $E \cap C \cap D \neq \emptyset$. Como $\mathcal{C}$ es arbolada, entonces C, D y E no pueden ser todos distintos entre sí. Pero $C \neq D$, así que podemos suponer que $C = E$ y $D \neq E$. Entonces $p \notin D$, y como $p \in \mathrm{Cl}(D)$, tenemos que $p \in \mathrm{Fr}(D)$. Por tanto $p \in C \cap \mathrm{Fr}(D)$. De manera que $f_E(p) = f_C(p) = p(C, D) = f_{\{C,D\}}(p)$.

Caso 3: C, D, E y F son elementos de $\mathcal{C}$ tales que $C \neq D$, $C \cap D \neq \emptyset$, $E \neq F$, $E \cap F \neq \emptyset$ y $\mathrm{Cl}(C \cap D) \cap \mathrm{Cl}(E \cap F) \neq \emptyset$.
Sea $p \in \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap \mathrm{Cl}(E \cap F)$ y sea $G \in \mathcal{C}$ tal que $p \in G$. Entonces $G \cap C \cap D \neq \emptyset$ y $G \cap E \cap F \neq \emptyset$. Ya que $\mathcal{C}$ es arbolada, tenemos que $G \in \{C, D\} \cap \{E, F\}$. Podemos suponer entonces que $C = G = E$. Como $p \in \mathrm{Cl}(D) \cap \mathrm{Cl}(F)$ y $\mathcal{C}$ es tensa, tenemos que $D \cap F \neq \emptyset$. Pero $G = C$ y $C \cap D \neq \emptyset$, entonces $G \cap D \neq \emptyset$, similarmente $G \cap F \neq \emptyset$. Como $D \neq G$, $G \neq F$ y $\mathcal{S}$ (el nervio de $\mathcal{C}$) no tiene triángulos, entonces los elementos D, G y F no son todos distintos. De manera que $D = F$. Tenemos entonces que $C = E$ y $D = F$. Claramente $f_{\{C,D\}}(p) = f_{\{E,F\}}(p)$.

Por tanto, f está bien definida en las intersecciones y es continua en la unión de todos los conjuntos de la forma $M(C)$ y $\mathrm{Cl}(C \cap D)$.

Observemos que en la demostración del Caso 1 se prueba que si existen elementos C y D de $\mathcal{C}$ tales que $p \in M(C) \cap M(D)$, entonces $C = D$ y por tanto $f_C = f_D$. También, en el Caso 3 vemos que si C, D, E y F son tales que $p \in \mathrm{Cl}(C \cap D) \cap \mathrm{Cl}(E \cap F)$, entonces $C = E$ y $D = F$, y por tanto $f_{\{C,D\}} = f_{\{E,F\}}$. Por último, en el Caso 2 vemos que si C, D y E satisfacen que $p \in M(E) \cap \mathrm{Cl}(D \cap C)$, entonces se puede suponer que $C = E$, y $f_E(p) = f_C(p) = p(C, D) = f_{\{C,D\}}(p)$. Esto implica que si p está en el dominio de dos funciones distintas del tipo f_C o $f_{\{C,D\}}$, entonces $p \in M(C) \cap \mathrm{Cl}(C \cap D)$. (2.11)

Veamos ahora que la unión de los conjuntos de la forma $M(C)$ y $\mathrm{Cl}(C \cap D)$ es igual a X. Tomemos $p \in X$. Si existe un único elemento C de $\mathcal{C}$ que tiene a p, entonces $p \in M(C)$. Si, por el contrario, existen dos elementos distintos C y D de $\mathcal{C}$ que tienen a p, entonces $p \in \mathrm{Cl}(C \cap D)$. Esto prueba que la unión de estos conjuntos es igual a X.
Por tanto, f está bien definida en todo X y es continua. Además, es claro que todos los valores de la imagen de f pertenecen a T.

Falta ver que f es una retracción de X en T y que f es una $\mathcal{C}$-función. Para ver que f es una retracción, tomemos $p \in T$. Entonces ocurre alguno de los siguientes casos: $f(p) = f_C(p) = p$ o $f(p) = f_{\{C,D\}}(p) = p$. En cualquier caso $f(p) = p$. Por tanto f es una retracción de X en T.

Veamos que f es una $\mathcal{C}$-función. Para esto, tomemos $t \in T$. Sea

$$\mathcal{A} = \{f_C \mid C \in \mathcal{C}\} \cup \{f_{\{C,D\}} \mid C, D \in \mathcal{C}, C \neq D \text{ y } C \cap D \neq \emptyset\}.$$

Consideremos dos casos:

Caso 1: t sólo está en la imagen de una de las funciones de la familia $\mathcal{A}$. En este caso, por la propiedad (2.5), y las propiedades (2.7), (2.8) y (2.9), tenemos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $f^{-1}(t) \subset C$.

Caso 2: t está en la imagen de al menos dos elementos de $\mathcal{A}$. Sabemos que los elementos de $\mathcal{A}$ son retracciones, entonces, para toda $f \in \mathcal{A}$ se tiene que $Im(f) \subset Dom(f)$ (aquí $Im(f)$ y $Dom(f)$ denotan la imagen y el dominio de f, respectivamente). Entonces existen funciones distintas g y h de $\mathcal{A}$ tales que $t \in Dom(g) \cap Dom(h)$. Por la observación (2.11), existen dos elementos C y D de $\mathcal{C}$ tales que $t \in M(C) \cap \mathrm{Cl}(C \cap D) \subset C \cap \mathrm{Fr}(D)$, $g = f_C$ y $h = f_{\{C,D\}}$ y t no puede estar en ningún otro conjunto de la forma $M(E)$ ni $E \cap \mathrm{Fr}(F)$. Por tanto, $f^{-1}(t) = f_C^{-1}(t) \cup f_{\{C,D\}}(t)$. Así, por las propiedades (2.5) y (2.7), concluimos que $f^{-1}(t) \subset C$. Esto termina la prueba de que f es una $\mathcal{C}$-función. $\square$

Definición 2.22. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{C}$ una cubierta arbolada de X. Tomemos un arco $ab \subset X$. Diremos que ab se *enrolla* en $\mathcal{C}$ si existen eslabones C, D y E de $\mathcal{C}$ y puntos x, y y z tales que:

1. $C \notin \{D, E\}$,
2. $x, z \in ab \cap \mathrm{Fr}(C) \cap D$,
3. $y \in ab \cap \mathrm{Fr}(E)$, y
4. $a \leq x < y < z \leq b$, en el orden natural del arco en el que $a < b$.

Notemos que en esta definición puede ocurrir que $D = E$.

Dados un dendroide X, un subcontinuo Y de X y un punto $p \in X$, podemos construir un punto $q \in Y$ tal que $pq \cap Y = \{q\}$ de la siguiente manera: si $p \in Y$, hacemos $q = p$; si $p \notin Y$, elegimos un punto $y \in Y$ y tomamos el arco que une p con y. Entonces q es el primer punto en el arco py, yendo de p a y, que está en Y. Entonces $pq \cap Y = \{q\}$. Veamos que este punto es único. Si existe un punto r tal que $pr \cap Y = \{r\}$, entonces $pr \cup pq$ es un continuo que satisface que $(pr \cup pq) \cap Y = \{q, r\}$. Como X es un dendroide, entonces $\{q, r\}$ es conexo. Por tanto $q = r$. Dado un punto $w \in Y$, consideremos el arco pw. Sea q_1 el primer punto en este arco, yendo de p a w, que está en Y (si $p \in Y$, hacemos $q_1 = p$).

Por lo que vimos antes, $q_1 = q$. Esto muestra que, para cualquier $w \in Y$, $q \in pw$. En consecuencia, $pw = pq \cup qw$. (2.12)

Definición 2.23. Sean X un dendroide y Y un subconjunto de X. Sea $q \in X$. Tomemos un arco de q a Y, es decir, un arco de la forma qy con $y \in Y$. Decimos que qy es *irreducible* si $qy \cap Y = \{y\}$.

Proposición 2.24. Sean X es un dendroide, $\mathcal{C}$ una cubierta tensa arbolada de X y T un árbol derecho en $\mathcal{C}$. Sea $q \in X \setminus T$ y supongamos que ningún arco qw (donde $w \in T$) se enrolla en $\mathcal{C}$. Si qr es un arco irreducible de q a T, entonces qr está contenido en un eslabón de $\mathcal{C}$ y qr interseca a la cerradura de a lo más otro eslabón de $\mathcal{C}$.

Demostración. Supongamos que la proposición es falsa, es decir, qr no está contenido en un eslabón de $\mathcal{C}$ o qr sí está contenido en un eslabón de $\mathcal{C}$ e interseca a la cerradura de al menos dos eslabones de $\mathcal{C}$.

Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $q \in C$.
Supongamos que qr no está contenido en ningún eslabón de $\mathcal{C}$.
Por la conexidad de qr, tenemos que existe un punto $x \in qr \cap \mathrm{Fr}(C)$. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, tenemos que existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $x \in D$. Ya que D es abierto, tenemos que $C \neq D$ y que $D \cap C \neq \emptyset$. Dado que qr no está contenido en D, tenemos que existe un punto $y \in qr \cap \mathrm{Fr}(D)$. Como D es abierto, $x \neq y$. Revisemos dos casos: (ver Figura 2.5)

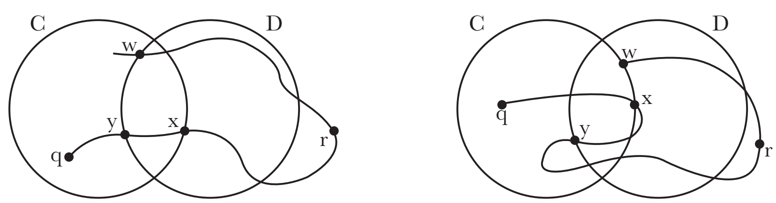

Figura 2.5: Ilustramos aquí los dos casos posibles.

Caso 1: $q \leq x < y \leq r$.
Como T está derecho en $\mathcal{C}$, existe un punto $w \in T \cap D \cap \mathrm{Fr}(C)$. Ya que qr es un arco irreducible de q a T y X es un dendroide, $r \in qw$. Entonces $qr \subset qw$. Por tanto $q \leq x < y \leq r \leq w$. Entonces $\{x, w\} \subset \mathrm{Fr}(C) \cap D$ y $y \in \mathrm{Fr}(D)$. Esto implica que $w \neq y$, y por tanto el arco qw se enrolla en $\mathcal{C}$ (con $E = D$), lo cual es absurdo.

Caso 2: $q \leq y < x \leq r$.
En el caso en que $y \in C$, elegimos un punto $w \in T \cap C \cap \mathrm{Fr}(D)$. Como D es abierto, $x \neq w$. Entonces $qr \subset qw$, por lo que $q \leq y < x \leq r \leq w$. Tenemos

entonces que $\{y, w\} \subset C \cap \mathrm{Fr}(D)$ y $x \in \mathrm{Fr}(C)$, por lo que el arco qw se enrolla en $\mathcal{C}$ (con $E = C$ y $D \notin \{E, C\}$), un absurdo.

Supongamos ahora que $y \notin C$.
Sea $E \in \mathcal{C}$ tal que $y \in E$. Entonces $E \neq C$ y $y \in E \cap \mathrm{Fr}(D)$. Elegimos un punto $w \in T \cap E \cap \mathrm{Fr}(D)$. Entonces $qr \subset qw$, por lo que $q \leq y < x \leq r \leq w$. Si $x \in E$, entonces $D \cap E$ es un abierto de X que tiene a x, por lo que $D \cap E \cap C \neq \emptyset$. Como $\mathcal{C}$ es arbolada, entonces dos de los conjuntos D, C y E coinciden. Sabemos que $C \neq E$, además, como $y \in E \cap \mathrm{Fr}(D)$, entonces $D \neq E$, y como $x \in D \cap \mathrm{Fr}(C)$, $D \neq C$. Esto es un absurdo. Esto muestra que $x \notin E$. Por la conexidad del arco yx, existe un punto $x' \in yx \cap \mathrm{Fr}(E)$. Entonces $q \leq y < x' \leq x \leq r \leq w$. Como $x' \notin E$ y $w \in E$, tenemos que $x' < w$. Dado que $\{y, w\} \subset E \cap \mathrm{Fr}(D)$ y $x' \in \mathrm{Fr}(E)$, concluimos que el arco qw se enrolla en $\mathcal{C}$ (con $D \notin \{E\}$), lo cual es absurdo.

Con esto terminamos la prueba de que qr está contenido en un eslabón de $\mathcal{C}$. A este eslabón le seguiremos llamando C.

Supongamos ahora que existen eslabones D y E en $\mathcal{C} \setminus \{C\}$ tales que $E \neq D$, $qr \cap \mathrm{Cl}(D) \neq \emptyset$ y $qr \cap \mathrm{Cl}(E) \neq \emptyset$.
Veamos que $qr \not\subset D \cup E$. Supongamos, por el contrario, que $qr \subset D \cup E$. Si $qr \subset E$, entonces $qr \subset E \cap C$ y $qr \cap \mathrm{Cl}(D) \neq \emptyset$. Esto implica que $C \cap D \cap E \neq \emptyset$. Esto sólo puede ocurrir si dos de los conjuntos C, D y E son iguales, y como esto no ocurre. concluimos que $qr \not\subset E$. Sabemos que $qr \cap \mathrm{Cl}(E) \neq \emptyset$, entonces, por la conexidad de qr, podemos elegir un punto $x \in qr \cap \mathrm{Fr}(E)$. Por lo tanto $x \notin E$. Como $qr \subset D \cup E$, tenemos que $x \in D$.
Similarmente podemos probar que existe un punto $y \in qr \cap E$. Entonces $qr \cap D \neq \emptyset$ y $qr \cap E \neq \emptyset$. Por lo anterior y ya que $qr \subset D \cup E$, la conexidad de qr implica que existe un punto $w \in qr \cap D \cap E$. Como $qr \subset C$, concluimos que $w \in C \cap D \cap E$, un absurdo ya que $\mathcal{C}$ es arbolada.
Con esto hemos probado que $qr \not\subset D \cup E$.

Ya que $qr \cap \mathrm{Cl}(D) \neq \emptyset$ y $qr \cap \mathrm{Cl}(E) \neq \emptyset$, entonces $qr \cap \mathrm{Fr}(D) \neq \emptyset$ y $qr \cap \mathrm{Fr}(E) \neq \emptyset$. Como $qr \subset C$, tenemos que existen puntos $w \in qr \cap C \cap \mathrm{Fr}(D)$ y $z \in qr \cap C \cap \mathrm{Fr}(E)$. Si $w = z$, como $\mathcal{C}$ es tensa, tenemos que $D \cap E \neq \emptyset$. Pero $C \cap D \neq \emptyset \neq C \cap E$, entonces los elementos C, D y E forman un triángulo en el nervio de $\mathcal{C}$. Esto es imposible pues $\mathcal{C}$ es arbolada. por tanto $w \neq z$. De manera que $w \neq r$ o $z \neq r$. Supongamos, por ejemplo, que $q \leq w < z \leq r$. Ya que T está derecho en $\mathcal{C}$, existe un punto $v \in T \cap C \cap \mathrm{Fr}(D)$. Como qr es irreducible entre q y T y $v \in T$, tenemos que $q \leq w < z \leq r \leq v$. Si $z = v$, entonces $z \in C \cap \mathrm{Fr}(E) \cap \mathrm{Fr}(D)$. Como $\mathcal{C}$ es tensa, esto implica que $E \cap D \neq \emptyset$. Esto contradice (2.1). Por tanto $z \neq v$. Entonces el arco qr se enrolla en $\mathcal{C}$, una contradicción. Esto termina la prueba de la proposición. $\square$

Definición 2.25. Sean X un dendroide suave, p un punto inicial de X y $\mathcal{C}$ una cubierta tensa arbolada de X. Si Y es un subcontinuo de X, diremos que Y

tiene la *propiedad W* si existen un refinamiento $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ y un árbol $T \subset Y$ tales que:

1. $\mathcal{D}$ es una familia tensa y arbolada de abiertos de X tal que D^* (la unión de los elementos de $\mathcal{D}$) cubre a Y, (2.13)

2. T está derecho en $\mathcal{D}$, y (2.14)

3. Si $q \in Y$, entonces el arco $pq \cap Y$ no se enrolla en $\mathcal{D}$. (2.15)

Notemos que la propiedad W se define para un punto inicial de X y para una cubierta tensa y arbolada fija $\mathcal{C}$.

Lema 2.26. Sean X un dendroide suave, $\mathcal{C}$ una cubierta tensa arbolada de X, y Y un subcontinuo de X. Si Y no tiene la propiedad W, entonces Y no es degenerado.

Demostración. Supongamos que Y un continuo degenerado. Entonces $Y = \{y\}$. Sea $T = \{y\}$. Tomemos $\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{D}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}$ que satisface las condiciones (2.13) y (2.14). Para ver que se satisface la condición (2.15), basta notar que el arco $py \cap \{y\} = \{y\}$ no se enrolla en $\mathcal{D}$. Por tanto Y tiene la propiedad W. Con esto terminamos la prueba del lema. □

Teorema 2.27. Sean X un dendroide suave, p un punto inicial de X y $\mathcal{C}$ una cubierta tensa arbolada de X. Si Y_0 es un subcontinuo de X que no tiene la propiedad W, entonces existe un subcontinuo minimal Y de Y_0 que no tiene la propiedad W.

Demostración. De acuerdo con el teorema de reducción de Brouwer (Teorema 1.16), basta que probemos que si $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subcontinuos de Y_0 sin la propiedad W, entonces $Y = \bigcap\{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un subcontinuo de X sin la propiedad W.

Se sabe que la intersección de una familia anidada de continuos es un continuo (Lema 1.45), entonces $Y = \bigcap\{Y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es un subcontinuo de X. Supongamos que Y tiene la propiedad W. Entonces existen un refinamiento $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ y un árbol $T \subset Y$ que satisfacen las propiedades (2.13), (2.14) y (2.15).
Sea $U = \mathcal{D}^*$. Como U es un abierto de X y $Y \subset U$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $Y_n \subset U$. Supongamos entonces que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $Y_n \subset U$.
Dada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}$ cubre a Y_n y el árbol $T \subset Y_n$ está derecho en $\mathcal{D}$, entonces Y_n satisface (2.13) y (2.14). Como Y_n no tiene la propiedad W, tenemos que Y_n no puede cumplir (2.15). Entonces existe $q_n \in Y_n$ tal que el arco $pq_n \cap Y_n$ se enrolla en $\mathcal{D}$. Entonces existen eslabones C_n, D_n y E_n en $\mathcal{D}$ y puntos x_n, y_n y z_n tales que:

- $C_n \notin \{D_n, E_n\}$,
- $\{x_n, z_n\} \subset pq_n \cap \mathrm{Fr}(C_n) \cap D_n$,

- $y_n \in pq_n \cap \mathrm{Fr}(E_n)$, y
- $p \leq x_n < y_n < z_n \leq q_n$.

Como $\mathcal{D}$ tiene un número finito de eslabones, una de las tercetas (C_n, D_n, E_n) se repite una infinidad de veces. Sea (C, D, E) dicha terceta. Entonces $C \notin \{D, E\}$ y existe un subconjunto infinito J de los naturales tal que, para toda $j \in J$, se tiene que $C_j = C$, $D_j = D$ y $E_j = E$. Para no usar índices innecesarios, vamos a suponer que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $C_n = C$, $D_n = D$ y $E_n = E$. Por la misma razón supondremos que las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a x_0, y_0, z_0 y q_0, respectivamente.

Como $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, por el Lema 1.46, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = Y.$$

Por tanto $q_0 \in Y$. Dado que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n, z_n\} \subset \mathrm{Fr}(C) \cap D$ y, por el Lema 2.17, este conjunto es cerrado, tenemos que $\{x_0, z_0\} \subset \mathrm{Fr}(C) \cap D$. Similarmente vemos que $y_0 \in \mathrm{Fr}(E)$.

Ya que p es punto inicial de X, tenemos que, $\lim_{n\to\infty} px_n = px_0$, $\lim_{n\to\infty} py_n = py_0$, $\lim_{n\to\infty} pz_n = pz_0$, y $\lim_{n\to\infty} pq_n = pq_0$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $px_n \subset py_n \subset pz_n \subset pq_n$, entonces, por el Lema 1.47, tenemos que $px_0 \subset py_0 \subset pz_0 \subset pq_0$. Entonces $p \leq x_0 \leq y_0 \leq z_0 \leq q_0$.
Si $x_0 = y_0$, entonces $x_0 \in \mathrm{Fr}(C) \cap D \cap \mathrm{Fr}(E)$. Como $\mathcal{D}$ es tensa, $C \cap E \neq \emptyset$. Además, como D es abierto, tenemos que $C \cap D \neq \emptyset$ y $D \cap E \neq \emptyset$. Como $C \neq D \neq E$, entonces $\mathcal{D}$ tiene un triángulo, un absurdo. Por tanto $x_0 \neq y_0$. Similarmente se muestra que $y_0 \neq z_0$. Por tanto, $p \leq x_0 < y_0 < z_0 \leq q_0$. Esto muestra que el arco pq_0 se enrolla en $\mathcal{D}$. Esto es absurdo ya que estamos suponiendo que Y satisface la propiedad (2.15).

Con esto hemos probado que Y no tiene la propiedad W. Aplicando el teorema de reducción de Brouwer, concluimos que la familia de subcontinuos de Y_0 sin la propiedad W tiene un elemento minimal con respecto a la inclusión. $\square$

Teorema 2.28. Sean X un dendroide suave, p un punto inicial de X, Y un subcontinuo de X y q el punto de Y que satisface que $pq \cap Y = \{q\}$. Entonces Y es un dendroide suave y q es un punto inicial de Y.

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ para algún $y \in Y$. Sabemos, por la propiedad (2.12), que para toda $n \in \mathbb{N}$, $py_n = pq \cup qy_n$. Además $py = pq \cup qy$. Como X es suave en p, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} pq \cup qy_n = pq \cup qy.$$

Debemos ver que

$$\lim_{n\to\infty} qy_n = qy.$$

Supongamos que esto no ocurre. Sea H la métrica de Hausdorff en $C(X)$. Entonces existen $\epsilon > 0$ y $J \subset \mathbb{N}$ infinito tales que, para toda $n \in J$, $H(qy_n, qy) \geq \epsilon$. Como $C(X)$ es compacto, (Teorema 1.49), la sucesión $\{qy_n\}_{n \in J}$ tiene una subsucesión convergente. Sea $\{qy_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dicha sucesión y sea $A \in C(X)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} qy_{n_k} = A.$$

Entonces, para toda $k \in \mathbb{N}$, $H(qy_{n_k}, qy) \geq \epsilon$. Entonces $H(A, qy) \geq \epsilon$.
Como, para toda $k \in \mathbb{N}$, $qy_{n_k} \subset py_{n_k}$, por el Lema 1.47, tenemos que $A \subset \lim_{k \to \infty} py_{n_k} = py$. Ya que $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = y$ y, para toda $k \in \mathbb{N}$, $q \in qy_{n_k}$, usando de nuevo el Lema 1.47, tenemos que $\{q, y\} \subset A$. Entonces A es un subcontinuo del arco $py = pq \cup qy$ y $\{y, q\} \subset A$. Por tanto $qy \subset A \subset py$.
Por el Lema 1.48, dada $a \in A$, existe una sucesión de puntos $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in qy_{n_k} \subset pq \cup qy_{n_k} = py_{n_k}$ y $\lim_{k \to \infty} a_k = a$. Entonces, para toda $k \in \mathbb{N}$, $q \in pa_k$. Como X es suave en p, tenemos que $q \in \lim_{k \to \infty} pa_k = pa$. Por tanto $a \in py$ y $q \in pa$. Esto implica que $a \in qy$. Hemos probado que $A \subset qy$. Por tanto $A = qy$. Esto es absurdo pues $H(A, qy) \geq \epsilon$. Esto concluye la prueba de que $\lim_{n \to \infty} qy_n = qy$. Con esto concluimos que Y es suave en q. □

Definición 2.29. Sea X un continuo. Una *función de Whitney* para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, 1]$ tal que:

1. $\mu(\{p\}) = 0$ para todo $p \in X$,
2. Si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$, y
3. $\mu(X) = 1$.

Es sabido que para cualquier continuo X es posible definir una función de Whitney para $C(X)$. [12, Teorema 5.3, pp. 74-77].

Teorema 2.30. Sea X un dendroide suave en un punto $p \in X$. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Para cada $\epsilon \in (0, 1)$, hacemos $B(\epsilon) = \{q \in X \mid \mu(pq) < \epsilon\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{B(\epsilon) \mid \epsilon \in (0, 1)\}$ es una base de p en X formada por conjuntos abiertos arco conexos.

Demostración. Sea d una métrica para X. Como X es suave en p, entonces la función $\phi : X \to [0, 1]$ dada por $\phi(q) = \mu(pq)$ es continua. Notemos que para cada $\epsilon \in (0, 1)$, $B(\epsilon) = \phi^{-1}([0, \epsilon))$, y por tanto, $B(\epsilon)$ es un abierto de X que tiene a p.
Sea $\epsilon \in (0, 1)$. Dada $q \in B(\epsilon)$, tenemos que $pq \subset B(\epsilon)$, ya que si $x \in pq$, entonces $px \subset pq$. Esto implica que $\mu(px) \leq \mu(pq) < \epsilon$. De modo que $x \in B(\epsilon)$. Esto prueba que $pq \subset B(\epsilon)$. Por tanto $B(\epsilon)$ es arco conexo.
Veamos ahora que $\mathcal{B}$ es una base de p en X. Sea $\delta > 0$. Veremos que existe $\epsilon > 0$ tal que si $q \in B(\epsilon)$, entonces $d(p, q) < \delta$. Supongamos que esto no ocurre. Entonces, es posible construir una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in B(\frac{1}{n})$ pero $d(p, q_n) \geq \delta$. Entonces $\lim_{n \to \infty} \mu(pq_n) = 0$. Podemos

suponer (tomando subsucesiones de ser necesario) que $\lim_{n\to\infty} pq_n = A$ para algún $A \in C(X)$, y que $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ para alguna $q \in X$. Como μ es continua, $\mu(A) = 0$, por lo que A es un conjunto con un único punto. Como, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que p y q_n son elementos de pq_n, entonces p y q están en A. Por tanto $\{p\} = A = \{q\}$. De manera que $\lim_{n\to\infty} q_n = q = p$. Esto es absurdo pues para toda $n \in \mathbb{N}$, $d(p, q_n) \geq \delta$. Hemos probado que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon)$ está contenido en $B_\delta(p)$. Como δ es un número positivo cualquiera, concluimos que $\mathcal{B}$ es una base de p en X. Con esto terminamos la prueba. $\square$

Lema 2.31. Sean X un dendroide, T un árbol contenido en X y $p \in T$. Sea $\mathcal{K} = \{C \subset T \mid C \text{ es una componente de } T \setminus \{p\}\}$. Entonces p tiene una base de abiertos $\mathcal{B}$ de X tal que, para todo $U \in \mathcal{B}$, $|\mathcal{K}| = |Fr_X(U) \cap T|$ y $Fr_X(U) \cap T$ tiene exactamente un punto en cada componente de $X \setminus \{p\}$.

Demostración. Si hace falta, podemos hacer que p sea un vértice de T. Sean $L_1, \ldots, L_n$ todas las aristas, diferentes entre sí, de T que inciden en p. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea x_i el extremo de L_i que es diferente de p. Notemos que $L_i \setminus \{p\}$ es conexo. De manera que existe una componente C_i de $T \setminus \{p\}$ tal que $L_i \setminus \{p\} \subset C_i$. Como T es un árbol, entonces T es una dendrita. Dada $q \in T \setminus \{p\}$, el arco qp interseca a alguna L_i en un conexo no degenerado. Por lo que $qp \setminus \{p\}$ interseca a alguna $L_i \setminus \{p\}$, y como $qp \setminus \{p\}$ es conexo, entonces $qp \setminus \{p\} \subset C_i$. Con esto hemos mostrado que $T \setminus \{p\} = C_1 \cup \ldots \cup C_n$.
Supongamos que existen i y j en $\{1, \ldots, n\}$ tales que $i \neq j$ y $C_i = C_j$. Como C_i es un abierto conexo y T es localmente conexo, por el Lema 1.11 tenemos que C_i es arco conexo. Dadas $x \in L_i \setminus \{p\}$ y $y \in L_j \setminus \{q\}$, como $\{x, y\} \subset C_i$, tenemos que $xy \subset C_i \subset T \setminus \{p\}$. Por otra parte, $L_i \cup L_j$ es un arco que tiene a x y a y y p se ubica entre x y y en este arco. Como X es un dendroide, hay un único arco que une a x con y. Entonces, el único arco que une a x con y en X pasa por p. Es decir, $p \in xy$, lo cual es absurdo. Por tanto, las componentes $C_1, \ldots, C_n$ de $X \setminus \{p\}$ son distintas entre sí. Entonces $|\mathcal{K}| = n$.

Sea W un abierto de X tal que $p \in W$. Tomemos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, puntos $p_i \in L_i \setminus \{p\}$ tales que p_i no es un extremo de L_i y $pp_1 \cup \ldots pp_n \subset W$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$S = (pp_1 \cup \ldots \cup pp_n) \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \text{ y } R = T \setminus (pp_1 \cup \ldots \cup pp_n).$$

Entonces $Cl_X(R)$ y $Cl_X(S)$ son dos subconjuntos cerrados de T tales que $Cl_X(R) \cap Cl_X(S) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $\{p_1, \ldots, p_n\} \cap (R \cup S) = \emptyset$, tenemos que $Cl_X(R) \cap S = \emptyset$ y $Cl_X(S) \cap R = \emptyset$, por lo que R y S son dos conjuntos separados de X. Ya que X es métrico, por el Lema 1.4, X es completamente normal. Entonces existen dos abiertos ajenos U_0 y V de X tales que $S \subset U_0$ y $R \subset V$. Sea $U = U_0 \cap W$. Entonces U es abierto en X y $p \in U \subset W$.
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, como p_i no es un punto extremo de L_i, tenemos que $p_i \neq x_i$. Entonces $x_i \in T \setminus Cl_X(S)$. De modo que $x_i \in R$. Por tanto, $L_i \cap R \neq \emptyset$, y entonces $L_i \cap V \neq \emptyset$. Además, $p \in L_i \cap S \cap W$, así que $L_i \cap S \cap W \neq \emptyset$. Entonces

$L_i \cap U \neq \emptyset$. Como U y V son abiertos ajenos, $L_i \cap U \neq \emptyset$ y $L_i \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Concluimos que $L_i \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$.
Sea $z \in T \cap Fr_X(U)$. Si $z \notin \{p_1, \ldots, p_n\}$, entonces $z \in S \cup R \subset (U_0 \cap W) \cup V = U \cup V$. Como U es abierto y ajeno a V, y además $z \in Fr_X(U)$, tenemos que $z \notin U$ y $z \notin V$. Esto es absurdo. Por tanto $z \in \{p_1, \ldots, p_n\}$. Hemos probado que $Fr_X(U) \cap T \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$.
Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\emptyset \neq Fr_X(U) \cap L_i \subset Fr_X(U) \cap T \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como p_i es el único punto de $\{p_1, \ldots, p_n\}$ que puede estar en L_i, concluimos que $p_i \in L_i \cap Fr_X(U) \subset T \cap Fr_X(U)$. Ésto prueba que $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset T \cap Fr_X(U)$. Por tanto, $T \cap Fr_X(U) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y $|Fr_X(U) \cap T| = n$.
Por lo tanto $|Fr_X(U) \cap T| = n = |\mathcal{K}|$.

Observemos que hemos probado que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i \cap Fr_X(U) = \{p_i\}$. Entonces $Fr_X(U) \cap T$ tiene exactamente un punto en cada componente de $X \setminus \{p\}$. □

La prueba del siguiente "teorema" está incompleta. Hemos puesto la demostración, siguiendo lo escrito por Fugate en [10], hasta el paso en el que ya no se puede avanzar más. De este modo es claro el momento en el que Fugate hace una afirmación falsa.

Teorema 2.32. Sean X un dendroide suave y $\epsilon > 0$. Entonces existe una ϵ-cubierta tensa $\mathcal{C}$ de X y un árbol T de X tales que:

1. El nervio de $\mathcal{C}$ es un árbol, y

2. T está derecho en $\mathcal{C}$.

Demostración. Por el Teorema 2.9, como X es un dendroide, tenemos que X es arbolado. Entonces existe una ϵ-cubierta arbolada $\mathcal{D}$ de X. Además, por el Lema 2.11, podemos pedir que $\mathcal{D}$ sea tensa.
Sea p un punto inicial de X. Para probar el teorema, bastará mostrar que X tiene la propiedad W (con respecto a p y a $\mathcal{D}$). Supongamos por el contrario que X no tiene la propiedad W. Por el Teorema 2.27, existe un subcontinuo X_0 de X sin la propiedad W y que además es minimal.
Sea $q \in X_0$ tal que $pq \cap X_0 = \{q\}$. Por el Teorema 2.28, X_0 es un dendroide suave con punto inicial q. Por el Lema 2.26, X_0 es no degenerado. Fijamos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$. Para cada $\lambda > 0$, hacemos $B(\lambda) = \{x \in X_0 \mid \mu(qx) < \lambda\}$. Como $\mathcal{D}$ es una ϵ-cubierta, entonces $\delta = \text{mín}\{\epsilon - \text{diám}(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$ es un número positivo. Sea $\eta > 0$ tal que $B(\eta) \subset B_{\frac{\delta}{2}}(q)$, y que satisfaga también que $X_0 \neq B(\eta)$. Dada $x \in X_0 \setminus B(\eta)$, $\mu(qx) \geq \eta$. Entonces, reduciendo continuamente el arco qx tomando únicamente arcos que tengan a q, tenemos que existe $x_1 \in qx$ tal que $\mu(qx_1) = \eta$. Sea Y una componente de $X_0 \setminus B(\eta)$. Entonces Y es un subcontinuo propio de X_0, y como X_0 es un continuo minimal sin la propiedad W, tenemos que Y tiene la propiedad W. Por tanto, existen un refinamiento $\mathcal{D}(Y)$ de $\mathcal{D}$ y un árbol $T(Y) \subset Y$ tales que:

1. $\mathcal{D}(Y)$ es una familia tensa arbolada de abiertos de X tal que $Y \subset \mathcal{D}(Y)^*$, (2.16)
2. $T(Y)$ está derecho en $\mathcal{D}(Y)$, y (2.17)
3. Si $y \in Y$, entonces el arco $py \cap Y$ no se enrolla en $\mathcal{D}(Y)$. (2.18)

Sea $q_Y \in Y$ tal que $qq_Y \cap Y = \{q_Y\}$. Por el Lema 2.28, Y es un dendroide suave con punto inicial q_Y.

Para obtener una contradicción, vamos a probar que X_0 tiene la propiedad W. Para esto, constuiremos un refinamiento apropiado de $\mathcal{D}$ y encontraremos un árbol apropiado. Nos apoyaremos del conjunto $B(\eta)$, los refinamientos $\mathcal{D}(Y)$ y los árboles $T(Y)$. Si ocurriera que $q_Y \in T(Y)$, entonces podríamos hacer las cosas más fácilmente. Como esto no necesariamente ocurre, en el caso en el que $q_Y \notin T(Y)$ tenemos que hacer un paso más.

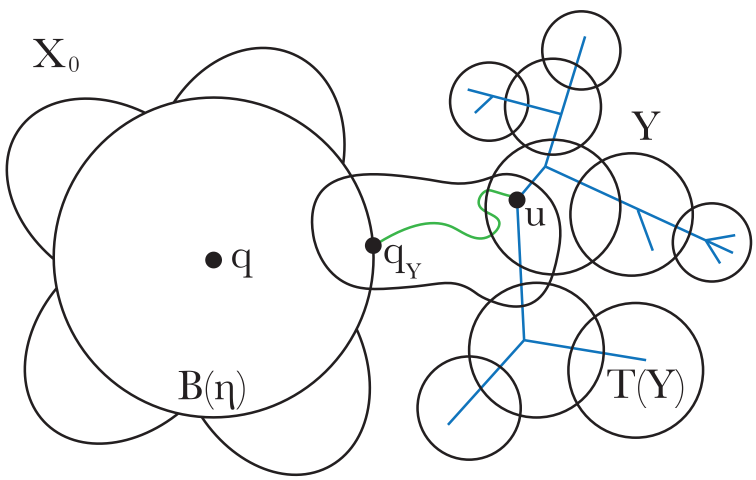

Figura 2.6: Mostramos aquí un esquema de lo que ocurre en la prueba. X_0 es un subcontinuo minimal de X que no tiene la propiedad W, y q es el punto que satisface que $pq \cap X_0 = \{q\}$. Entonces q es un punto inicial de X_0. $B(\eta)$ es una bola arco conexa alrededor de q que satisface que $B(\eta) \subset B_{\frac{\delta}{2}}(q)$ y $B(\eta) \neq X_0$. Y es una componente de $X_0 \setminus B(\eta)$, por lo que Y es un un subcontinuo propio de X_0. Por tanto, Y tiene la propiedad W. Podemos entonces encontrar un refinamiento $\mathcal{D}(Y)$ de nuestra cubierta original $\mathcal{D}$ que cubra a Y y de modo que $\mathcal{D}(Y)$ resulte una familia tensa y arbolada de abiertos, y podemos encontrar un árbol derecho en $\mathcal{D}(Y)$. Sin embargo, este árbol no necesariamente tiene a q_Y, por lo que es necesario considerar el árbol $R = q_Y u \cup T(Y)$. Como R no necesariamente está derecho en $\mathcal{D}(Y)$, nuestra tarea consiste en encontrar un refinamiento $\mathcal{C}(Y)$ de $\mathcal{D}(Y)$ que satisfaga que $\mathcal{C}(Y)$ sea una familia tensa y arbolada de abiertos que cubra a Y, y que R esté derecho en $\mathcal{C}(Y)$.

Caso 1: Supongamos que existe una componente Y de $X_0 \setminus B(\eta)$ tal que $q_Y \notin T(Y)$. Entonces existe un punto $u \in T(Y)$ tal que $q_Y u \cap T(Y) = \{u\}$. Sea $R = q_Y u \cup T(Y)$. Entonces R es un árbol en Y, sin embargo, R no necesariamente está derecho en $\mathcal{D}(Y)$.

Paso 1: Probaremos que existe un refinamiento $\mathcal{C}(Y)$ de $\mathcal{D}(Y)$ que satistace:

1. $\mathcal{C}(Y)$ es una familia tensa arbolada tal que $Y \subset \mathcal{C}(Y)^*$, y
2. R está derecho en $\mathcal{C}(Y)$.

Dada $t \in T(Y)$, por la propiedad (2.18), $pt \cap Y$ no se enrolla en $D(Y)$. Notemos que $pt = pq \cup qt = pq \cup qq_Y \cup q_Y t$, de manera que $pt \cap Y = q_Y t$. Por la propiedad (2.18), pt no se enrolla en $\mathcal{D}(Y)$, entonces tampoco lo hace $q_Y t$. Por el Lema 2.24, existe $C \in \mathcal{D}(Y)$ tal que $q_Y u \subset C$ y $q_Y u$ interseca a la cerradura de a lo más otro elemento en $\mathcal{D}(Y)$. Elegiremos un elemento D de $\mathcal{D}(Y)$ de la siguiente forma: si existe $D \in \mathcal{D}(Y)$ cuya cerradura interseque a $q_Y u$, elegimos ese D (y es el único que puede existir). Notemos que $D \cap C \neq \emptyset$. Si no existe tal D, elegimos un elemento de $\mathcal{D}(Y)$ que interseque a C. En cualquer caso, el elemento D que escogimos cumple lo siguiente: $D \in \mathcal{D}(Y) \setminus \{C\}$, $C \cap D \neq \emptyset$ y, si $E \in \mathcal{D}(Y) \setminus \{C, D\}$, entonces $q_Y u \cap \mathrm{Cl}(E) = \emptyset$.

La familia $\mathcal{C}(Y)$ que construiremos consistirá de los elementos de $\mathcal{D}(Y) \setminus \{D\}$ y de un subconjunto de D. Es decir, sólo modificaremos a D, haciéndolo un eslabón más pequeño y dejaremos iguales a los elementos de $\mathcal{D}(Y) \setminus \{D\}$.

Por el Lema 2.31, podemos elegir un abierto V de X tal que $u \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset C$, para cada $E \in \mathcal{D} \setminus \{C, D\}$, $V \cap \mathrm{Cl}(E) = \emptyset$, y $\mathrm{Fr}(V) \cap R$ tiene exactamente un elemento en cada componente de $R \setminus \{u\}$. En el caso en que $u \notin \mathrm{Cl}(D)$, podemos pedirle a V que cumpla que $\mathrm{Cl}(V) \cap \mathrm{Cl}(D) = \emptyset$.

Afirmación 1: $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V)$ es conexo.
Recordemos que $R = q_Y u \cup T(Y)$, $q_Y u \subset C$ y $V \subset C$. Como $X \setminus C$ es cerrado, tenemos que $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \subset X \setminus C \subset X \setminus q_Y u$. De manera que

$$\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V) = \mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (T(Y) \setminus V) = \mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap T(Y).$$

Veamos que $\mathrm{Cl}(D \setminus C) = \mathrm{Cl}(D) \setminus C$.

$(\subset)$ Ya que $X \setminus C$ es cerrado, tenemos que $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \subset X \setminus C$, y claramente $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \subset \mathrm{Cl}(D)$. Por tanto, $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \subset \mathrm{Cl}(D) \setminus C$.

$(\supset)$ Para la otra contención tomemos $x \in \mathrm{Cl}(D) \setminus C$.
En el caso en que $x \notin \mathrm{Cl}(C)$, tomemos un abierto U de X tal que $x \in U$. Entonces $x \in U \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(C))$ y $U \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(C))$ es abierto. Por tanto

$$\emptyset \neq U \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(C)) \cap D \subset U \cap (X \setminus C) \cap D = U \cap (D \setminus C).$$

De manera que $x \in \mathrm{Cl}(D \setminus C)$. Con esto terminamos este caso.

En el caso en que $x \in \mathrm{Cl}(C)$, como $\mathcal{D}(Y)$ es cubierta, existe $E \in \mathcal{D}(Y)$ tal que $x \in E$. Entonces $E \cap C \neq \emptyset$ y $E \cap D \neq \emptyset$. Como $\mathcal{D}(Y)$ es arbolada, $\mathcal{D}(Y)$ no contiene triángulos, por lo que los elementos C, D y E no pueden ser todos distintos. Como $x \in E \setminus C$, tenemos que $D = E$. Por tanto $x \in D \setminus C \subset \mathrm{Cl}(D \setminus C)$. Con esto terminamos la prueba de que $\mathrm{Cl}(D \setminus C) = \mathrm{Cl}(D) \setminus C$.

Entonces,

$$(\mathrm{Cl}(D) \setminus C) \cap T(Y) = \mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap T(Y) = \mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V).$$

Por tanto,

$$\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V) = \mathrm{Cl}(D) \cap T(Y) \setminus C.$$

Usando el Lema 2.14, concluimos que el conjunto $T_0 = \mathrm{Cl}(D) \cap T(Y)$ es conexo, y por tanto es un árbol.

Sea $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{D}(Y) \mid E \cap D \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{E}$ es un subconjunto de una cadena arbolada ($\mathcal{D}(Y)$), tenemos que el nervio de $\mathcal{E}$ es una subgráfica, en principio, no necesariamente conexa, del nervio de $\mathcal{D}(Y)$. Ya que todos los elementos de $\mathcal{E}$ intersecan a D, tenemos que todos los elementos de $\mathcal{E}$ se conectan con D. Por tanto, el nervio de $\mathcal{E}$ es un árbol.

Dado un elemento $x \in T_0$, tenemos que $x \in T(Y) \subset Y$. De manera que existe $E \in \mathcal{D}(Y)$ tal que $x \in E$. Como $x \in \mathrm{Cl}(D)$, obtenemos que $E \cap D \neq \emptyset$. De modo que $E \in \mathcal{E}$. Esto prueba que la familia $\mathcal{E}$ cubre a T_0.

Dada $E \in \mathcal{E}$, como $T(Y)$ está derecho en $\mathcal{D}(Y)$, $T(Y) \cap \mathrm{Fr}(D) \cap E$ tiene exactamente un elemento x. Entonces $x \in T_0 \cap E$. No puede ocurrir que exista otro elemento $F \in \mathcal{E}$ tal que $x \in F$, pues esto implicaría que los eslabones D, E y F forman un triángulo en el nervio de $\mathcal{D}(Y)$. Por tanto, E es el único elemento de $\mathcal{E}$ que tiene a x. Esto muestra que $\mathcal{E}$ es una cubierta esencial de T_0.

Para ver que T_0 está derecho en $\mathcal{E}$, tomemos $E \in \mathcal{E}$ y tomemos $F \in \mathcal{E} \setminus \{E\}$ tal que $E \cap F \neq \emptyset$. Veremos que $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0$ tiene exactamente un punto en F. Dado que $T(Y)$ sí está derecho en $\mathcal{D}(Y)$, tenemos que $\mathrm{Fr}(E) \cap T(Y) \cap F$ tiene exactamente un punto. Hacemos $\{x\} = \mathrm{Fr}(E) \cap T(Y) \cap F$. Como ambos eslabones E y F intersecan a D y $E \cap F \neq \emptyset$, dado que el nervio de $\mathcal{D}(Y)$ no contiene triángulos, entonces $E = D$ o $F = D$.
En el caso en que $E = D$, tenemos que $x \in \mathrm{Fr}(D) \cap T(Y) \subset T_0$, así que $x \in \mathrm{Fr}(E) \cap T_0$, y como $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0 \subset \mathrm{Fr}(E) \cap T(Y)$, tenemos que F no tiene más elementos de $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0$. Por tanto, $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0 \cap F$ tiene exactamente un punto.
En el caso en que $F = D$, tenemos que $x \in \mathrm{Fr}(E) \cap T(Y) \cap D \subset \mathrm{Fr}(E) \cap T_0$. Como $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0 \subset \mathrm{Fr}(E) \cap T(Y)$, tenemos que F no tiene más elementos de $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0$. Por tanto, $\mathrm{Fr}(E) \cap T_0$ tiene exactamente un elemento en F. Esto

termina la prueba de que T_0 está derecho en $\mathcal{E}$.

Notemos que todos los eslabones de $\mathcal{E} \setminus \{D\}$ intersecan a D, por lo que el nervio de $\mathcal{E}$ es un m-odo (para alguna m). De manera que C es un eslabón terminal de $\mathcal{E}$. Por el Lema 2.14, obtenemos que $T_0 \setminus C$ es conexo, es decir, $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V) = \mathrm{Cl}(D) \cap T(Y) \setminus C = T_0 \setminus C$ es conexo. esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Por la Afirmación 1, existe una componente L de $R \setminus V$ que contiene a $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V)$. Por la elección de V, $R \setminus V$ tiene un número finito de componentes. ya que son las componentes de un subconjunto compacto de X, tenemos que todas ellas son compactas. La unión de las componentes que son diferentes de L es igual a $(R \setminus V) \setminus L$. Entonces L y $(R \setminus V) \setminus L$ son dos subconjuntos cerrados y ajenos de X.

Como
$$\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap ((R \setminus V) \setminus L) \subset \mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V) \subset L,$$
tenemos que
$$\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap ((R \setminus V) \setminus L) = \emptyset.$$
Por tanto, $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cup L$ y $(R \setminus V) \setminus L$ son dos cerrados ajenos en el espacio normal X. De manera que existe un subconjunto abierto W de X tal que

$$(R \setminus V) \setminus L \subset W \text{ y } \mathrm{Cl}(W) \cap (\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cup L) = \emptyset.$$

Definimos $\mathcal{C}(Y)$ como sigue:

$$\mathcal{C}(Y) = (\mathcal{D}(Y) \setminus \{D\}) \cup \{D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))\}.$$

Notemos que $\mathcal{C}(Y)$ coincide con $\mathcal{D}(Y)$ en todos los eslabones excepto en el eslabón D. En lugar de este eslabón, se pone a D recortado. con esto tenemos que $\mathcal{C}(Y)$ refina a $\mathcal{D}(Y)$.

Veremos que:

1. $\mathcal{C}(Y)$ es una familia tensa arbolada en X que cubre a Y, y
2. R está derecho en $\mathcal{C}(Y)$.

Veamos que $\mathcal{C}(Y)$ cubre a Y. Como $\mathcal{D}(Y)$ es cubierta de Y, y ya que $\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{D}(Y)$ coinciden en todos menos su segundo elemento, sólo hace falta ver que $\mathcal{C}(Y)$ cubre a $D \cap Y$. Sea $y \in D \cap Y$. Si $y \in D \setminus \mathrm{Cl}(W \cup V)$, no hay nada que hacer. Supongamos entonces que $y \in D \cap \mathrm{Cl}(W \cup V)$. Entonces

$$y \in D \cap (\mathrm{Cl}(W) \cup \mathrm{Cl}(V)) \subset D \cap ((X \setminus (L \cup \mathrm{Cl}(D \setminus C))) \cup C).$$

De manera que $y \in D$ y ($y \notin L \cup (D \setminus C)$ o $Y \in C$). Así que $y \in C$. Por tanto $\mathcal{C}(Y)$ es cubierta de Y.

Veamos ahora que los nervios de $\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{D}(Y)$ son isomorfos (como árboles). Sea

$$\phi : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{D}(Y)$$

la función definida como sigue:

$$\phi(G) = \begin{cases} G, & \text{si } G \neq D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W), \text{ y} \\ D, & \text{si } G = D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W). \end{cases} \tag{2.19}$$

Claramente ϕ es una biyección. Probaremos que dados dos elementos E y F de $\mathcal{C}(Y)$, se tiene que $E \cap F \neq \emptyset$ si y sólo si $\phi(E) \cap \phi(F) \neq \emptyset$. Ya que para toda $G \in \mathcal{C}(Y)$, $G \subset \phi(G)$, tenemos que si $E \cap F \neq \emptyset$, entonces $\phi(E) \cap \phi(F) \neq \emptyset$. Ahora supongamos que E y F son dos elementos de $\mathcal{C}(Y)$ tales que $\phi(E) \cap \phi(F) \neq \emptyset$. El único caso que debemos considerar es el caso en que $E \cap D \neq \emptyset$ para alguna $E \in \mathcal{C}(Y) \setminus \{D\}$. Debemos probar que $E \cap (D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \neq \emptyset$. Supongamos por el contrario que $E \cap D \neq \emptyset$ pero $E \cap (D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) = \emptyset$. Recordemos que $C \cap D \neq \emptyset$. Como $\mathcal{D}(Y)$ es arbolada, entonces su nervio no contiene triángulos. Esto implica que $E \cap C = \emptyset$ o que $E = C$.

Caso 1: $E \cap C = \emptyset$
En este caso tenemos que $E \subset X \setminus C$. Como $E \cap (D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) = \emptyset$, entonces $E \cap D \subset \mathrm{Cl}(V \cup W)$. Por tanto,

$$\emptyset \neq E \cap D \subset \mathrm{Cl}(V \cup W) \cap (X \setminus C) = (\mathrm{Cl}(V) \cap (X \setminus C)) \cup (\mathrm{Cl}(W) \cap (X \setminus C)).$$

Sabemos que V es un abierto que satisface que $\mathrm{Cl}(V) \subset C$, entonces $\mathrm{Cl}(V) \cap (X \setminus C) = \emptyset$. Por lo tanto

$$E \cap D \subset \mathrm{Cl}(W) \cap (X \setminus C).$$

Sea $z \in E \cap D$. Recordemos que W fue construido de manera que $\mathrm{Cl}(W) \cap (D \setminus C) = \emptyset$. Entonces $z \in D$, $z \notin C$ y $z \notin D \setminus C$, lo cual es absurdo. Con esto terminamos la prueba de este caso.

Caso 2: $E = C$.
En este caso estamos suponiendo que $C \cap D \neq \emptyset$. Como $T(Y)$ está derecho en $\mathcal{D}$, podemos elegir un punto $q \in \mathrm{Fr}(C) \cap D$. Ya que C es abierto, entonces $q \notin C$. Sabemos que W es un abierto que satisface que $\mathrm{Cl}(W) \cap (L \cup (D \setminus C)) = \emptyset$. Por tanto $q \notin \mathrm{Cl}(W)$. Además, ya que $\mathrm{Cl}(V) \subset C$ y $q \notin C$, entonces $q \notin \mathrm{Cl}(V)$. Entonces

$$q \in D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W).$$

Este último conjunto es abierto, y ya que $q \in \mathrm{Fr}(C)$, tenemos que

$$C \cap (D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \neq \emptyset.$$

Con esto terminamos la prueba de este caso.

Hemos probado que los nervios de $\mathcal{C}(Y)$ y $\mathcal{D}(Y)$ son isomorfos. Por tanto, ya que $\mathcal{D}(Y)$ es arbolada, tenemos que $\mathcal{C}(Y)$ es arbolada.

Sólo falta ver que $\mathcal{C}(Y)$ es tensa. Supongamos que E y F son dos eslabones de $\mathcal{C}(Y)$ son tales que $E \cap F = \emptyset$, entonces $\phi(E) \cap \phi(F) = \emptyset$. Como $\mathcal{D}(Y)$ es tensa, entonces $d(\phi(E), \phi(F)) > 0$. Sabemos que para todo $G \in \mathcal{D}(Y)$, $G \subset \phi(G)$. Entonces $d(E, F) \geq d(\phi(E), \phi(F)) > 0$. Por lo tanto $\mathcal{C}(Y)$ es tensa.

Empezaremos ahora la prueba de que R está derecho en $\mathcal{C}(Y)$. Para esto, probaremos primero que

$$R \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) = (R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)).$$

($\supset$) Esta contención es clara.

($\subset$) Sea $y \in R \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))$. Basta probar que $y \notin V$. Supongamos por el contrario que $y \in V$. Entonces

$$y \in V \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)).$$

Esto implica que $\emptyset \neq V \cap (D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \subset V \cap (D \setminus V)$. Como esto es imposible, concluimos que

$$R \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) = (R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)).$$

Veamos ahora que

$$(R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \subset (L \cap \mathrm{Fr}(V)) \cup (L \cap \mathrm{Fr}(D)).$$

Sea $y \in (R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))$. Si $y \notin L$, tenemos que $y \in R \setminus (V \cup L) \subset W$, de manera que $y \in W$. Como $y \in \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))$, entonces $W \cap (D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Esto prueba que $y \in L$. Recordemos que W cumple que $\mathrm{Cl}(W) \cap (L \cup \mathrm{Cl}(D \setminus C)) = \emptyset$. Por tanto $y \notin \mathrm{Cl}(W)$. Queremos ver que $y \in \mathrm{Fr}(V) \cup \mathrm{Fr}(D)$. Supongamos que $y \notin \mathrm{Fr}(V) \cup \mathrm{Fr}(D)$. Como $y \in R \setminus V$, tenemos que $y \notin \mathrm{Cl}(V)$. Dado que

$$y \in \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \subset \mathrm{Cl}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \subset \mathrm{Cl}(D),$$

tenemos que $y \in D$. Por tanto $D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)$ es un conjunto abierto que tiene a y. Entonces $y \notin \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))$, lo cual es absurdo. Esto prueba que $y \in \mathrm{Fr}(V) \cup \mathrm{Fr}(D)$. Por lo tanto

$$(R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \subset (L \cap \mathrm{Fr}(V)) \cup (L \cap \mathrm{Fr}(D)).$$

Entonces

$$(R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) \subset (L \cap \mathrm{Fr}(V)) \cup (L \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C).$$

Veamos que los conjuntos $L \cap \mathrm{Fr}(V)$ y $L \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C$ tienen un único punto. Por la elección de V, el cual cumple la conclusión del Lema 2.31, tenemos que $L \cap \mathrm{Fr}(V)$ es un conjunto con un solo punto. Supongamos que a y b son dos puntos distintos en $L \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C$. Recordemos que $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V) \subset L \subset R = T(Y) \cup q_Y u$, L es una componente de $R \setminus V$ y $u \in V$. Como $T(Y) \cap q_Y u = \{u\} \subset V$ y $L \subset (T(Y) \cup q_Y u) \setminus V$, tenemos que $L = (L \cap T(Y)) \cup (L \cap q_Y u)$. La conexidad de L implica que $L \subset T(Y)$ o $L \subset q_Y u$. Como $T(Y)$ está derecho en $\mathcal{D}(Y)$, existe un punto $z \in T(Y) \cap \mathrm{Fr}(C) \cap D$. Como vimos antes (p. 42) que $\mathrm{Cl}(D \setminus C) \cap (R \setminus V) = \mathrm{Cl}(D) \cap T(Y) \setminus C$ y $z \in \mathrm{Cl}(D) \cap T(Y) \setminus C$, tenemos que $z \in L$. Por tanto $L \cap T(Y) \neq \emptyset$. Esto prueba que $L \subset T(Y)$. por tanto $L \cap q_Y u = \emptyset$. Esto implica que a y b están en $T(Y) \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C$. Esto es absurdo pues $T(Y)$ está derecho en $\mathcal{D}(Y)$. Con esto hemos probado que $L \cap \mathrm{Fr}(D) \cap C$ es un conjunto de un único punto.

En este punto J. B. Fugate afirma lo siguiente: el conjunto

$$(R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))$$

está contenido en uno y sólo uno de los dos conjuntos $L \cap \mathrm{Fr}(D)$ o $L \cap \mathrm{Fr}(V) \cap C$. Con esto busca concluir que $(R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W))$ es un conjunto de un único punto. Esto es necesario para probar que R está derecho en $\mathcal{C}(Y)$. Sin embargo, en el siguiente ejemplo veremos que esta afirmación no es válida para la situación ilustrada en la Figura 2.7 de la página siguiente.

Sin esta afirmación no podemos concluir que el nuevo árbol R está derecho en el refinamiento $\mathcal{C}(Y)$. La prueba de J. B. Fugate continúa, sin embargo nosotros decidimos deternernos en este punto ya que no vemos solución a este problema. $\square$

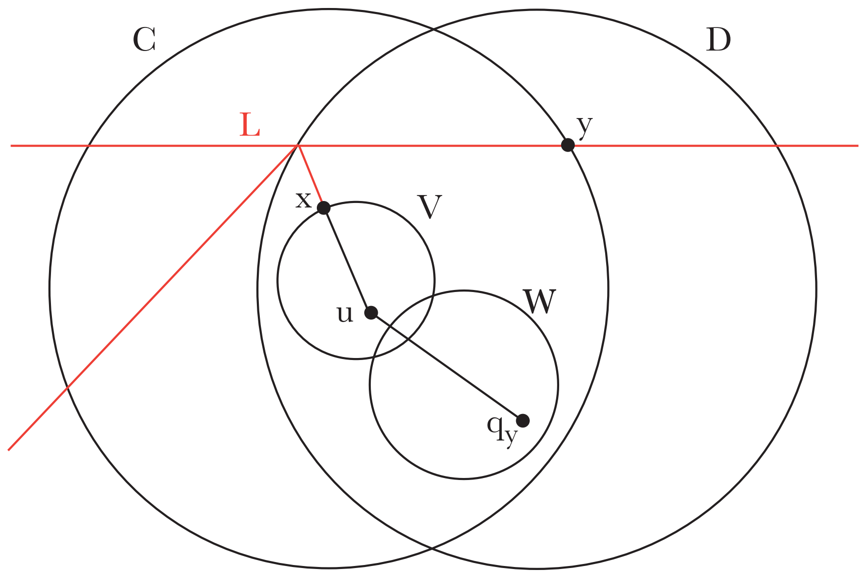

Figura 2.7: En este ejemplo, $T(Y)$ (el conjunto rojo unión xu) está derecho en $\mathcal{D}(Y)$; L (el conjunto rojo) es la componente de $R \setminus V$ que contiene a $(D \setminus C) \cap (R \setminus V)$; V es un abierto que satisface que $u \in V$, $\mathrm{Cl}(V) \subset C$ y $Fr_X(V) \cap T(Y)$ tiene tantos puntos como componentes tiene $T(Y) \setminus \{u\}$ (sólo una); W es un abierto tal que $\mathrm{Cl}(W) \cap (L \cup (D \setminus C)) = \emptyset$; $q_Y u \subset C$ y $q_Y u$ no se enrolla en $\mathcal{D}(Y)$. Sin embargo, si hacemos $L \cap \mathrm{Fr}(V) = \{x\}$ y $L \cap \mathrm{Fr}(D) = \{y\}$, tenemos que $x \neq y$ y $(R \setminus V) \cap C \cap \mathrm{Fr}(D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)) = \{x, y\}$. Vemos así que en este ejemplo R no está derecho en la nueva cubierta $C(Y)$ constituida por los eslabones de $\mathcal{D}(Y) \setminus \{D\}$ y un nuevo eslabón $D \setminus \mathrm{Cl}(V \cup W)$. Vemos así que la construcción de J. B. Fugate de una nueva cubierta $\mathcal{C}(Y)$ en la que el árbol $R = T(Y) \cup q_Y u$ esté derecho no funciona para este caso.

Capítulo 3

El teorema de Krasinkiewicz y Minc

En esta sección mostraremos que para cada dendroide X, el conjunto más pequeño, conexo por arcos, que contiene al conjunto de puntos extremos de X en los que X es colocamente conexo, es denso en X. (Ver la Figura 3.3). En su artículo *Sur l'approximation interne des dendroides par des arbres*, R. Cauty usa fuertemente este hecho para la "demostración" de su Teorema 0.1. Es por eso que nos hemos dado a la tarea de presentar las definiciones necesarias y ejemplificar estos conceptos para que el enunciado y su prueba sean claras para el lector.

Definición 3.1. Recordemos que para un dendroide X y puntos $\{p, q\} \subset X$, denotamos por pq al único arco en X que une p con q si $p \neq q$, y $pq = \{p\}$ si $p = q$. Dado un punto $p \in X$, diremos que p es un *punto extremo* de X si todos los arcos de X que tienen a p lo tienen como extremo.

Denotaremos como X^e al conjunto de puntos extremos de X.

Definición 3.2. Dado un espacio topológico X, diremos que X es *semilocalmente conexo* en un punto $p \in X$ si para toda vecindad U de p existe un abierto $V \subset U$ con $p \in V$ y tal que $X \setminus V$ tiene una cantidad finita de componentes.

Denotaremos como X^e_s al subconjunto de X de todos los puntos extremos en los que X es semilocalmente conexo.

Definición 3.3. Decimos que un dendroide X es *colocalmente conexo* en un punto $x \in X$ si toda vecindad U de x contiene una vecindad V de x tal que $X \setminus V$ es conexo. (Ver Figuras 3.1 y 3.2).

Teorema 3.4. Si X es un dendroide, el conjunto X^e_s coincide con el conjunto de puntos en donde X es colocalmente conexo.

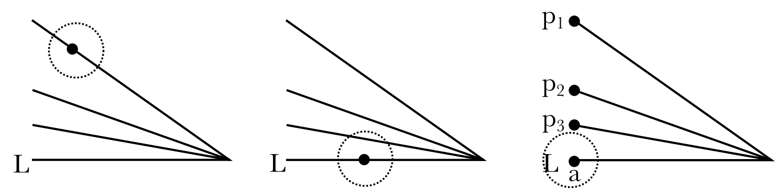

Figura 3.1: En el abanico armónico, los puntos de conexidad semilocal son todos los que no pertenecen la barra límite L, y a, el punto extremo de L. Sin embargo, el conjunto de puntos de conexidad colocal es únicamente $\{a, p_1, p_2, \ldots\}$. Es decir, el conjunto de puntos extremos del abanico.

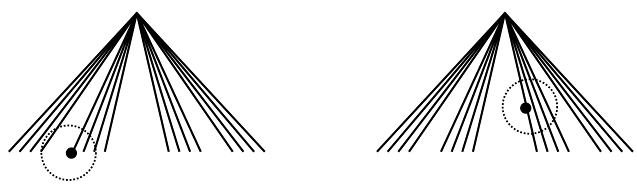

Figura 3.2: En el abanico de Cantor, los puntos extremos son los únicos puntos de conexidad semilocal y éstos coinciden con los de conexidad colocal. Si tomamos un punto que no es extremo y un abierto de este punto que no tenga puntos extremos, el complemento de dicho abierto tiene una infinidad de componentes.

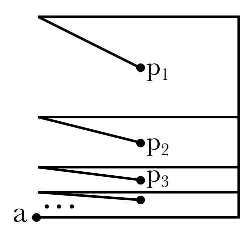

Figura 3.3: Aunque podría parecer que el conjunto de puntos de conexidad semilocal y el de puntos extremos de un continuo coinciden, en este ejemplo vemos que a es un punto extremo pero no es un punto de conexidad semilocal. Además, el conjunto $\{p_1, p_2, \ldots\}$ es el conjunto de puntos extremos de X en los que X es colocalmente conexo. Entonces el conjunto más pequeño conexo por arcos que contiene a $\{p_1, p_2, \ldots\}$ es denso pero no es el total.

Demostración. Sea $x \in X_s^e$ y sea U una vecindad de x. Como $x \in X_s^e$, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \setminus V$ tiene una cantidad finita de componentes. Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las componentes de $X \setminus V$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos $y_i \in C_i$. Sea $M = \bigcup\{y_i y_j \mid \{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}\}$. Como x es un punto extremo de X y $x \neq y_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $x \notin M$.
Consideremos $\widehat{V} = V \setminus M$, así $x \in \widehat{V}$. Veremos que $\widehat{V} \subset U$ y que $X \setminus \widehat{V}$ es conexo. Como $V \subset U$ y como $\widehat{V} = V \setminus M \subset V$, tenemos que $\widehat{V} \subset U$. Para ver que $X \setminus \widehat{V}$ es conexo notemos que por la definición de $\widehat{V}$ se tiene que $X \setminus \widehat{V} = X \setminus (V \setminus M)$, y $X \setminus (V \setminus M) = M \cup (X \setminus V)$. Ahora, M es arco conexo y por tanto es conexo, y, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $M \cap C_i \neq \emptyset$. Por esto último, M interseca a todas las componentes de $X \setminus V$, así concluimos que $X \setminus \widehat{V}$ es conexo. Por lo tanto X es colocalmente conexo en x.

Ahora tomemos un punto $x \in X$ que satisfaga que X es colocalmente conexo en x y sea U una vecindad de x. Entonces existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \setminus V$ es conexo. Por tanto $X \setminus V$ tiene una cantidad finita de componentes y por lo tanto X es semilocalmente conexo en x.
Por último supongamos que x no es un punto extremo de X, entonces existe un arco ab tal que $x \in ab$ y $a \neq x \neq b$. Sea U_0 un abierto de X tal que $x \in U_0$ y $a, b \notin U_0$. Como X es colocalmente conexo en x, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U_0$ y $X \setminus V$ es conexo. Así, $X \setminus V$ es un subcontinuo de X. Como X es un dendroide, $(X \setminus V) \cap ab$ es un subcontinuo del arco ab que tiene a los puntos a y b. Entonces $(X \setminus V) \cap ab = ab$, esto es absurdo porque $x \in ab$ pero $x \notin X \setminus V$. El absurdo vino de suponer que x no era un punto extremo de X, por lo tanto $x \in X_s^e$. □

Definición 3.5. Sea ab un arco en un espacio X con el orden natural en el que $a < b$, y sean $U_i, U_2, \ldots$ subconjuntos de X. Decimos que el arco $ab \subset X$ es de tipo $(U_1, U_2, \ldots)$ (y lo denotamos $ab \in (U_1, U_2, \ldots)$) si existen puntos $a_1, a_2, \ldots$ que satisfacen:

1. $a_n \in ab \cap U_n$ para todo $n \geq 1$, y
2. $a < a_1 < a_2 < \cdots < b$.

No se supone en la definición que la sucesión $U_1, U_2, \ldots$ sea infinita ni que $U_i \neq U_j$ cuando $i \neq j$. En el caso en el que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sea una sucesión finita con n elementos, escribiremos $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Definición 3.6. Fijemos un punto a en un dendroide X. Para cada abierto U de $X \setminus \{a\}$, denotamos C_U a la componente de $X \setminus U$ que tiene a a. También definimos
$$D_U = X \setminus (U \cup C_U), \text{ y}$$
$$P(U) = \{x \in X \mid \text{existe un abierto } V \text{ de } X \text{ tal que } x \in V, a \notin V \text{ y } C_U \subset \operatorname{int}(C_V)\}.$$
(Ver Figura 3.4).

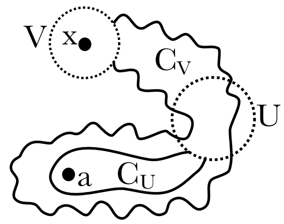

Figura 3.4: x es un elemento de $P(U)$.

Lema 3.7. Sean X un dendroide y fijemos un punto $a \in X$. Sea U un abierto de $X \setminus \{a\}$. Si $x \notin P(U) \cup \mathrm{Cl}(U) \cup C_U$, entonces para toda vecindad V de x existe un punto $y \in X$ tal que $ay \in (U, V, U)$.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $x \notin P(U) \cup \mathrm{Cl}(U) \cup C_U$. Sea V una vecindad cualquiera de x. Tomemos una vecindad G de x tal que $G \subset V$ y $\mathrm{Cl}(G) \cap (C_U \cup \mathrm{Cl}(U)) = \emptyset$.
Notemos que C_U y $\mathrm{Cl}(G)$ son cerrados en $X \setminus U$, C_U es componente de $X \setminus U$ y además $C_U \cap \mathrm{Cl}(G) = \emptyset$. Entonces $X \setminus U$ es un espacio métrico compacto y ninguna componente de $X \setminus U$ puede intersecar a ambos conjuntos C_U y $\mathrm{Cl}(G)$. Entonces, por el Teorema del Cable Cortado (1.14), existen dos cerrados ajenos A y B de $X \setminus U$ (y entonces cerrados de X) tales que $A \cup B = X \setminus U$, $C_U \subset A$ y $\mathrm{Cl}(G) \subset B$.

Como $a \in C_U$, $a \notin G$, por lo que tiene sentido hablar de D_G.

Veamos ahora que $\mathrm{Cl}(D_G) \cap C_U \neq \emptyset$. Supongamos por el contrario que $\mathrm{Cl}(D_G) \cap C_U = \emptyset$, entonces

$$C_U \subset \mathrm{int}(X \setminus \mathrm{Cl}(D_G)) \subset \mathrm{int}(X \setminus D_G) = \mathrm{int}(G \cup C_G).$$

Sea $W = \mathrm{int}(G \cup C_G) \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(G))$. Como $C_U \cap \mathrm{Cl}(G) = \emptyset$, tenemos que W es un abierto de X tal que $C_U \subset W \subset G \cup C_G$ y $W \cap G = \emptyset$. De manera que $C_U \subset W \subset C_G$. Por tanto $C_U \subset \mathrm{int}(C_G)$. Como $a \in C_U$, tenemos que $a \notin G$. Esto muestra que $x \in P(U)$, lo cual es absurdo. Por tanto $\mathrm{Cl}(D_G) \cap C_U \neq \emptyset$.
Como B es cerrado, $X \setminus B = U \cup A$ es abierto en X. Probaremos que $D_G \cap (U \cup A) \neq \emptyset$. Supongamos por el contrario que $D_G \cap (U \cup A) = \emptyset$. Entonces

$$D_G \subset B, \text{ y}$$

$$\mathrm{Cl}(D_G) \subset B.$$

Sabemos que $C_U \subset A$ y $A \cap B = \emptyset$. Esto implica que $C_U \subset X \setminus B$, y entonces

$$C_U \cap \mathrm{Cl}(D_G) = \emptyset,$$

una contradicción. Por lo tanto $D_G \cap (U \cup A) \neq \emptyset$.

Elegimos $y \in D_G \cap (U \cup A)$ y consideramos el arco ay. Veamos que $ay \not\subset X \setminus U$. Si ocurre que $ay \subset X \setminus U$, como $A \cup B = X \setminus U$ y $a \in A$, la conexidad de ay implica que $ay \subset A$. Más aún, como C_U es la componente de $X \setminus U$ que tiene a a, entonces $ay \subset C_U$. Por otro lado $y \in D_G = X \setminus (G \cup C_G)$, entonces $y \notin C_G$, pero $C_U \subset C_G$ ya que $C_U \subset X \setminus G$, por tanto $y \notin C_U$, una contradicción. Concluimos entonces que $ay \cap U \neq \emptyset$. Si ocurre que $ay \subset X \setminus G$, entonces $ay \subset C_G$, lo cual es absurdo pues $y \in D_G$. Esto muestra que $ay \cap G \neq \emptyset$, y como $G \subset V$, tenemos que $ay \cap V \neq \emptyset$.
Tenemos entonces que $ay \cap U \neq \emptyset$, que $ay \cap G \neq \emptyset$, y que $U \cap G = \emptyset$. Por otro lado, sabemos que $a \notin U$ y que $y \in U \cup A$. Como $ay \cap G \neq \emptyset$ y G es abierto, existe $z \in ay \cap G$ tal que $a < z < y$. Veamos que $az \cap U \neq \emptyset$. Si $az \subset X \setminus U$, entonces $az \subset C_U$, pero $z \notin C_U$ pues $z \in G$. Por lo tanto $az \cap U \neq \emptyset$. Sea $w \in az \cap U$, entonces $a < w < z < y$ $(a \notin U, w \in U, z \in V)$.
Recordemos que $y \in A \cup U$. Revisemos dos casos:

Caso 1: $y \in U$.
En este caso la conclusión es fácil pues $a < w < z < y$ con $w, y \in U, z \in V$. Por lo tanto $ay \in (U, V, U)$.

Caso 2: $y \notin U$.
En este caso $y \in A$. Como $z \in G \subset B$, $z \notin A$ y $z \notin U$. Dado que zy es conexo, $zy \cap B \neq \emptyset$ y $zy \cap A \neq \emptyset$, tenemos que $zy \not\subset A \cup B = X \setminus U$. Entonces $zy \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $t \in U \cap zy$, y entonces $a < w < z < t < y$ con $w \in U, z \in V$ y $t \in U$. Por lo tanto $ay \in (U, V, U)$. □

Lema 3.8. Sean X un dendroide y $a \in X$ un punto fijo. Sea U un abierto de $X \setminus \{a\}$ y tomemos $x \in P(U)$. Si y es un punto tal que $x \in ay$, entonces $y \in P(U)$.

Demostración. Como $x \in P(U)$, existe una vecindad V de x tal que $a \notin V$ y $C_U \subset \mathrm{int}(C_V)$. Si ocurriera que $y \in C_V$, como C_V es un subcontinuo de X que tiene a a, obtenemos que $ay \subset C_V$. Así que $x \in C_V \cap V$, lo cual es absurdo pues $C_V \cap V = \emptyset$. Esto prueba que $y \notin C_V$. Sea $W = X \setminus C_V$. Entonces W es abierto y $y \in W$. Por definición C_W es la componente de $X \setminus W$ que tiene a a. Como $X \setminus W = C_V$ es conexo, tenemos que $C_V = C_W$. Por hipótesis, $C_U \subset \mathrm{int}(C_V)$. Entonces $C_U \subset \mathrm{int}(C_W)$. Por lo tanto y es un punto para el cual existe una vecindad W que satisface que $a \notin W$ y $C_U \subset \mathrm{int}(C_W)$. Con esto concluimos que $y \in P(U)$. □

Lema 3.9. Sea $U_1, U_2, \ldots, U_n$ una sucesión finita de abiertos en un continuo hereditariamente unicoherente Y, y sea ab un arco en Y de tipo $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$. Entonces existen vecindades U y V de a y b, respectivamente, tales que todo arco en Y de U a V (esto significa que el arco va de un punto de U a un punto de V) es de tipo $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Demostración. (por inducción)

- $n = 1$.
Sea U_1 un abierto en Y y sea ab un arco de tipo (U_1). Entonces existe $x_1 \in ab \cap U_1$ tal que $a < x_1 < b$. Supongamos que para toda vecindad U de a y para toda vecindad V de b se cumple que hay un arco de U a V que no es de tipo (U_1). Consideremos para cada $k \in \mathbb{N}$ a $B_{1/k}(a)$ y $B_{1/k}(b)$. Éstas son vecindades de a y b, respectivamente, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un arco de $B_{1/k}(a)$ a $B_{1/k}(b)$ que no es de tipo (U_1). Sean $a_k \in B_{1/k}(a)$ y $b_k \in B_{1/k}(b)$ tales que $a_k b_k \notin (U_1)$. Notemos que $\{a_k b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X \setminus U_1$ y $X \setminus U_1$ es cerrado en X (por tanto es compacto). Entonces podemos encontrar una subsucesión $\{a_{k_l} b_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{a_k b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que
$$\lim_{l \to \infty} a_{k_l} b_{k_l} = A,$$
donde A es un subcontinuo de X (esto ocurre porque el hiperespacio $C(X)$ es compacto (1.49)). Además, $a_{k_l} b_{k_l} \subset X \setminus U_l$, para toda $l \in \mathbb{N}$. Claramente
$$\lim_{l \to \infty} a_{k_l} = a \in A, \text{ y}$$
$$\lim_{l \to \infty} b_{k_l} = b \in A.$$
Como Y es hereditariamente unicoherente y ab y A son subcontinuos de Y, entonces $ab \cap A$ es un subconjunto conexo del arco ab y tiene a sus extremos. Por tanto $ab \cap A = ab$, pero $A \cap U_1 = \emptyset$ mientras que $x_1 \in ab \cap U_1$, una contradicción. Por lo tanto existen vecindades U y V de a y b, respectivamente, tales que todo arco de U a V es de tipo (U_1).

- Supongamos ahora que $n \geq 2$ y el resultado es válido para $n-1$. Sea ab un arco en Y de tipo $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$. Entonces existen puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in ab$ tales que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in U_i$. Como U_{n-1} es abierto, existe un subarco del arco ax_{n-1} contenido en U_{n-1}. De manera que existe $z_{n-1} \in ax_{n-1}$ tal que $x_{n-2} < z_{n-1} < x_{n-1}$ y $z_{n-1} \in U_{n-1}$. Por tanto el arco ax_{n-1} es de tipo $(U_1, U_2, \ldots, U_{n-1})$. También notemos que $x_{n-1}b$ es de tipo (U_n). Por hipótesis de inducción, existen abiertos W, R, S y Y tales que $a \in W$, $x_{n-1} \in R \cap S$, $b \in Y$, y todo arco de W a R (respectivamente, de S a Y) es de tipo $(U_1, U_2, \ldots, U_{n-1})$ (respectivamente, de tipo (U_n)). También existen abiertos $U \subset W$ y $V \subset Y$ tales que $a \in U$ y $b \in V$ y todo arco de U a V es de tipo $(R \cap S)$. De manera que si uv es un arco de U a V (con $u \in U$ y $v \in V$), entonces existe $y \in R \cap S \cap uv$ tal que $u < y < v$. Entonces existen $z_1, \ldots, z_{n-1} \in uy$ y existe $z_n \in yv$ tales que $u < z_1 < \cdots < z_{n-1} < y$, $y < z_n < v$ y, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, $z_i \in U_i$. Por tanto uv es de tipo $(U_1, \ldots, U_n)$. Esto completa la prueba inductiva.

$\square$

Lema 3.10. Sean X un dendroide y $a \in X$ fijo. Sean U y V abiertos ajenos de $X \setminus \{a\}$ y sean $G_1, G_2, \ldots, G_n$ abiertos arbitrarios de X. Supongamos lo siguiente:

1. $P(U) \cap \{x \in X \mid ax \in (V, U, V)\} = \emptyset$, y
2. existe un abierto no vacío $V_1 \subset V$ tal que todo arco de a a V_1 es de tipo (V, U, V) y de tipo $(G_1, \ldots, G_n)$.

Entonces existe un abierto no vacío V_2 tal que $V_2 \subset \mathrm{Cl}(V_2) \subset V_1$ y todo arco de a a V_2 es de tipo $(G_1, \ldots, G_n, U, V)$.

Demostración. Sea $x_0 \in V_1$, como ax_0 es un arco de a a V_1, $ax_0 \in (V, U, V)$. Por la condición 1, $x_0 \notin P(U)$. Veamos que $x_0 \notin \mathrm{Cl}(U) \cup C_U$. Supongamos por el contrario que $x_0 \in \mathrm{Cl}(U) \cup C_U$. Analizaremos dos casos:

Caso 1: $x_0 \in \mathrm{Cl}(U)$.
En este caso, como U y V son abiertos ajenos, $\mathrm{Cl}(U) \subset X \setminus V$, de modo que $x_0 \in \mathrm{Cl}(U) \cap V_1 \subset \mathrm{Cl}(U) \cap V = \emptyset$, lo cual es imposible.

Caso 2: $x_0 \in C_U$.
Como C_U es un subcontinuo de X y X es un dendroide, tenemos que $ax_0 \subset C_U$. Ya que $C_U \subset X \setminus U$, $ax_0 \cap U = \emptyset$. Esto es imposible pues $ax_0 \in (V, U, V)$. Esto termina la prueba de que $x_0 \notin \mathrm{Cl}(U) \cup C_U$.
Notemos que probamos, en particular, que $V_1 \cap U = \emptyset$.

Como $x_0 \notin P(U)$, por hipótesis, entonces $x_0 \notin P(U) \cup C_U \cup \mathrm{Cl}(U)$, y como V_1 es una vecindad de x_0, entonces, por el Lema 3.7 existe un punto $\hat{b} \in X$ tal que $a\hat{b} \in (U, V_1, U)$.
Ya que $a\hat{b} \in (U, V_1, U)$, podemos encontrar $b \in a\hat{b} \cap U$ tal que $ab \in (U, V_1, U)$. Sea $c \in ab \cap V_1$, entonces $c \neq b$ y ac es un arco que une a a con V_1. Por lo tanto, por la condición 2, $ac \in (V, U, V)$ y $ac \in (G_1, \ldots, G_n)$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $g_i \in ac \cap G_i$ de tal manera que

$$a < g_1 < g_2 < \cdots < g_n < c < b.$$

Entonces

$$ab \in (G_1, G_2, \ldots, G_n, U).$$

Como $ac \subset ab$ y $ac \in (V, U, V)$, entonces $ab \in (V, U, V)$, y ya que $P(U) \cap \{x \in X \mid ax \in (V, U, V)\} = \emptyset$, entonces $b \notin P(U)$. Recordemos que $P(V_1) = \{x \in X \mid$ existe una vecindad K de x tal que $a \notin K$ y $C_{V_1} \subset \mathrm{int}(C_K)\}$. Veamos que $b \notin P(V_1)$. Para esto mostremos primero que $C_U \subset C_{V_1}$. Supongamos que existe $z \in C_U \setminus C_{V_1}$, como $a \in C_U$ y C_U es un continuo, entonces $az \subset C_U$, por tanto $az \subset X \setminus U$. Como $z \notin C_{V_1}$ y C_{V_1} es componente de $X \setminus V_1$, no puede ocurrir que $az \subset X \setminus V_1$. Entonces existe $w \in V_1 \cap az$. Así, aw es un arco de a a V_1 y por tanto $aw \in (V, U, V)$, esto implica que $aw \cap U \neq \emptyset$ y como $aw \subset az$, entonces $az \cap U \neq \emptyset$, una contradicción. Por lo tanto $C_U \subset C_{V_1}$. Como $b \notin P(U)$ se tiene que $C_U \not\subset \text{int}(C_K)$ para ninguna vecindad K de b con $a \notin K$. Concluimos que $C_{V_1} \not\subset \text{int}(C_K)$ para ninguna vecindad K de b con $a \notin K$, así, $b \notin P(V_1)$.

Veamos ahora que $b \notin \text{Cl}\,(V_1) \cup C_{V_1}$. Supongamos por el contrario que $b \in \text{Cl}(V_1) \cup C_{V_1}$. Revisamos dos casos:

Caso 1: $b \in \text{Cl}\,(V_1)$.
En este caso tenemos que $b \in \text{Cl}\,(V_1) \cap U$, esto contradice que $\text{Cl}\,(V_1) \cap U = \emptyset$, por tanto $b \notin \text{Cl}\,(V_1)$.

Caso 2: $b \in C_{V_1}$.
En este caso $ab \subset C_{V_1} \subset X \setminus V_1$, pero por otro lado tenemos que $ab \in (U, V_1, U)$, entonces $ab \cap V_1 \neq \emptyset$, una contradicción. Por tanto $b \notin C_{V_1}$.

Usando el Lema 3.9 y el hecho de que $ab \in (G_1, G_2, \ldots, G_n, U)$, tenemos que existe una vecindad W de b que satisface que todo arco que une a con W es de tipo $(G_1, G_2, \ldots, G_n, U)$. Observemos que todo abierto contenido en W también satisfará las condiciones del enunciado anterior, así podemos suponer que $W \subset U$, ya que en caso de que $W \not\subset U$, tomamos $W \cap U$.
Como $b \notin P(V_1) \cup C_{V_1} \cup \text{Cl}\,(V_1)$, por el Lema 3.7 existe un arco $aq \in (V_1, W, V_1)$ y además podemos suponer que $q \in V_1$. De nuevo por el Lema 3.9, como $aq \in (V_1, W, V_1)$ y $q \in V_1$, existe una vecindad V_2 de q tal que todo arco que une a con V_2 es de tipo (V_1, W, V_1). Notemos que como X es métrico, podemos tomar V_2 de tal forma que $V_2 \subset \text{Cl}\,(V_2) \subset V_1$.

Por último quisiéramos ver que todo arco que une a a con V_2 es de tipo $(G_1, \ldots, G_n, U, V)$. Para esto, sea $p \in V_2$. Sabemos que todo arco de a a V_2 es de tipo (V_1, W, V_1), por tanto existen $p_1 \in V_1 \cap ap$, $p_2 \in W \cap ap$ y $p_3 \in V_1 \cap ap$ con

$$a < p_1 < p_2 < p_3 < p.$$

Como ap_1 es un arco de a a V_1, entonces $ap_1 \in (G_1, \ldots, G_n)$. También, como $W \subset U$, entonces $p_1p_2 \in (U)$. Por último, como $p_2 \in W$ y $p \in V_2 \subset V$, entonces $p_2p \in (V)$. Por lo tanto $ap \in (G_1, \ldots, G_n, U, V)$, y como $p \in V_2$ es arbitrario, entonces todo arco de a a V_2 es de tipo $(G_1, \ldots, G_n, U, V)$, lo que concluye la prueba. □

Lema 3.11. Sea $U_1, U_2, \ldots$ una sucesión de abiertos en un espacio métrico Y. Si $ab \subset Y$ es un arco de tipo $(U_1, U_2, \ldots)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(U_n, U_{n+1}) = 0.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $a_n \in ab \cap U_n$ tales que

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < b.$$

Como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en un arco, tenemos que es convergente. Sea

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(a, a_n) < \frac{\epsilon}{2} \text{ para toda } n \geq N.$$

Entonces, si $n \geq N$,

$$d(U_n, U_{n+1}) \leq d(a_n, a_{n+1}) < \epsilon. \text{ Por tanto,}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(U_n, U_{n+1}) = 0.$$

□

En el siguiente lema daremos una sucesión infinita de abiertos $U_1, U_2, \ldots$ de un espacio Y y un arco ab en Y. Usaremos la notación $ab \in (U_1, U_2, \ldots)_\infty$ (o ab es de tipo $(U_1, U_2, \ldots)_\infty$) para enfatizar que la sucesión tiene una infinidad de abiertos.

Lema 3.12. Sean $U_1, U_2, \ldots$ abiertos de un espacio Y tales que para toda $n \geq 1$ se tiene que $\mathrm{Cl}(U_n) \cap \mathrm{Cl}(U_{n+1}) = \emptyset$. Si para cada $n \geq 1$ se cumple que ab es un arco en Y de tipo $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$, entonces ab es de tipo $(U_1, U_2, \ldots)_\infty$.

Demostración. Sea $b_1 = \inf\{x \in ab \mid x \in U_1\}$ con respecto al orden en ab que satisface con $a < b$. Como ab es del tipo (U_1, U_2), existen y_1 y y_2 en ab tales que $a < y_1 < y_2 < b$, $y_1 \in U_1$ y $y_2 \in U_2$. Entonces $a \leq b_1 \leq y_1 < y_2$. Por lo que tiene sentido definir $b_2 = \inf\{x \in b_1 b \mid x \in U_2\}$. Entonces $b_1 \leq b_2$. Ya que $b_1 = \inf(ab \cap U_1) \subset \mathrm{Cl}_Y(U_1)$ y $b_2 \in \mathrm{Cl}_Y(U_2)$, tenemos que $b_1 \neq b_2$. De manera que $b_1 < b_2$. Como ab es del tipo (U_1, U_2, U_3), existen z_1, z_2 y z_3 en ab tales que $z_1 \in U_1$, $z_2 \in U_2$, $z_3 \in U_3$ y $a < z_1 < z_2 < z_3 < b$. Entonces $b_1 \leq z_1$ y $b_2 \leq z_2 < z_3$, por lo que tiene sentido definir $b_3 = \inf\{x \in b_2 b \mid x \in U_3\}$. Entonces $b_2 \leq b_3$ y como $b_2 \in \mathrm{Cl}(U_2)$ y $b_3 \in \mathrm{Cl}(U_3)$, tenemos que $b_2 < b_3$. Definimos inductivamente $b_{n+1} = \inf\{x \in b_n b \mid x \in U_{n+1}\}$. Razonando como antes obtenemos que $a \leq b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $a_n \in b_n b_{n+1} \cap U_n$, con $b_n < a_n < b_{n+1}$. Así los puntos $a_1, a_2, \ldots$ satisfacen:

1. $a_n \in ab \cap U_n$ para toda $n \geq 1$, y
2. $a < a_1 < a_2 < \cdots < b$.

Por lo tanto $ab \in (U_1, U_2, \ldots)_\infty$. □

Definición 3.13. Sean X un dendroide y $a \in X$ un punto fijo. Fijemos un natural $n \geq 1$. Para un punto arbitrario $x \in X$ consideremos al conjunto de puntos $y \in ax$ tales que para toda vecindad U de x y para toda vecindad V de y, existe un arco $az \in (V, U, V, U, \ldots)_{n+2}$, (donde el subíndice $n+2$ indica que este arreglo tiene $n+2$ lugares). Denotaremos como $A_n(x,a)$ a este conjunto, de modo que

$$A_n(x,a) = \{y \in ax \mid \text{para toda vecindad } U \text{ de } x \text{ y toda vecindad } V \text{ de } y, \text{ existe un arco } az \in (V,U,V,U,\ldots)_{n+2}\}.$$

Notemos que, para toda $n \geq 1$, $x \in A_n(x,a)$, pues si U y V son vecindades de x, $U \cap V$ contiene un subintervalo no degenerado de ax que tiene a x. Además, este conjunto resulta un subarco de ax con un extremo igual a x (ver Teorema 3.15).
Definimos también la función $\alpha_{na} \colon X \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha_{na}(x) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid A_n(x,a) \subset B_\epsilon(x)\}.$$

Por último definimos $\alpha_n \colon X \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha_n(x) = \sup\{\alpha_{na}(x) \mid a \in X\}.$$

El siguiente es un caso especial del Lema 3.9.

Lema 3.14. Sean X un dendroide y x y y dos puntos distintos de X. Sea $w \in xy \setminus \{x,y\}$ y sea W una vecindad de w. Entonces existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y cualquier arco que interseca a V y a U también interseca a W.

Teorema 3.15. Sean X, a, x y n como en la Definición 3.13. Entonces el conjunto $A_n(x,a)$ es un subarco (posiblemente degenerado) de ax con uno de sus extremos igual a x.

Demostración.

I. Primero notemos que $x \in A_n(x,a)$ pues para cualesquiera vecindades U y V de x se tiene que existe $w \in ax \setminus \{a,x\}$ tal que $wx \subset U \cap V$. Tomando puntos en wx se obtiene que $ax \in (V,U,V,\ldots)_{n+2}$.

II. Ahora mostraremos que si $y \in A_n(x,a)$, entonces para todo $w \in yx$ se cumple que $w \in A_n(x,a)$. Analicemos dos casos:

Caso 1: n es par.
Supongamos que $y \in A_n(x,a)$ y sea $w \in yx$. Tomemos una vecindad W de w y una vecindad U de x. Por el Lema 3.14, existen vecindades U_0 y V_0 de x y y, respectivamente, tales que todo arco que interseca a U_0 y a V_0 también interseca a W. Ya que $U_0 \cap U \subset U_0$ y $U_0 \cap U \subset U$, podemos

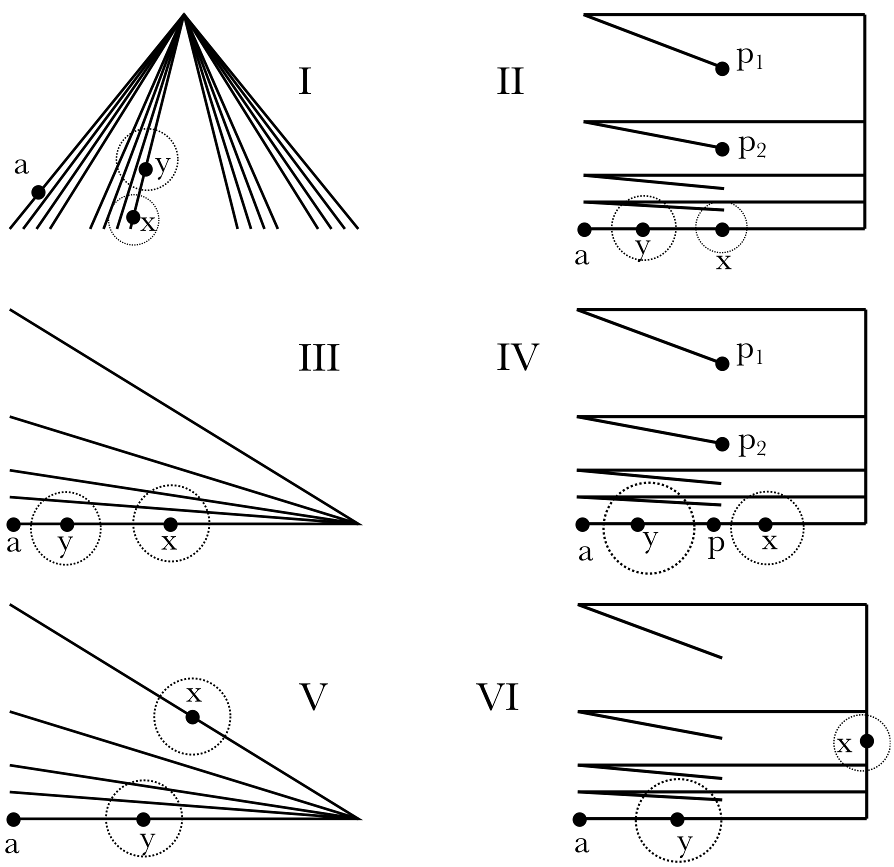

Figura 3.5: En I, $A_1(x,a) = \{x\}$, ya que ningún otro punto y del arco ax satisface que para cualquiera de sus vecindades existe $z \in X$ tal que $az \in (V,U,V)$. En II, $A_1(x,a) = ax$ pues $x = \lim_{n\to\infty} p_n$. Sin embargo, IV muestra que si recorremos x un poco a la derecha, $A_1(x,a) = ap$, donde $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. Mientras que en VI vemos que si x no es un punto de la barra límite, entonces $A_1(x,a) = \{x\}$. Algo similar ocurre en III y V, donde $A_1(x,a) = ax$ si x está en la barra límite del abanico armónico, y $A_1(x,a) = \{x\}$ en otro caso.

suponer que U_0 es tal que $U_0 \subset U$. Como $x, y \in A_n(x, a)$, entonces para las vecindades U_0 y V_0 existe un arco $az \in (V_0, U_0, V_0, \ldots)_{n+2}$, es decir, existen $z \in X$, $y_1, \ldots, y_{\frac{n+2}{2}} \in V_0$ y $x_1, \ldots, x_{\frac{n+2}{2}} \in U_0$ tales que

$$a < y_1 < x_1 < \cdots < y_{\frac{n+2}{2}} < x_{\frac{n+2}{2}} < z.$$

Consideremos los arcos $y_i x_i$ con $i \in \{1, \ldots, \frac{n+2}{2}\}$. Por la elección de U_0 y V_0, para cada $i \in \{1, \ldots, \frac{n+2}{2}\}$ existe $w_i \in y_i x_i \cap W$. Entonces

$$a < y_1 \leq w_1 \leq x_1 < \cdots < y_{\frac{n+2}{2}} \leq w_{\frac{n+2}{2}} \leq x_{\frac{n+2}{2}} < z. \text{ Así que}$$

$$a < w_1 \leq x_1 \leq w_2 \leq x_2 \leq \cdots \leq w_{\frac{n+2}{2}} \leq x_{\frac{n+2}{2}} < z.$$

Como W es abierto y cada $w_i \in W$, podemos elegir puntos menores y cercanos a w_i que también pertenezcan a W. Por lo que podemos suponer que

$$a < w_1 < x_1 < w_2 < x_2 < \cdots < w_{\frac{n+2}{2}} < x_{\frac{n+2}{2}} < z.$$

Entonces $az \in (W, U_0, W, \ldots)_{n+2}$ y por tanto $az \in (W, U, W, \ldots)_{n+2}$. Concluimos que $w \in A_n(x, a)$.

Caso 2: n es impar.
Este caso es similar al caso anterior teniendo cuidado con los índices.

III. Por último probaremos que $A_n(x, a)$ es compacto.
Sea $y \in ax \setminus A_n(x, a)$. Por definición de $A_n(x, a)$, existen vecindades U_0 de x y V_0 de y tales que $aw \notin (V_0, U_0, V_0, \ldots)_{n+2}$, para todo $w \in X$. Sea $t_0 \in V_0 \cap ax$. Como V_0 y U_0 son vecindades de t_0 y x, respectivamente, y para todo $w \in X$, $aw \notin (V_0, U_0, V_0, \ldots)_{n+2}$, entonces $t_0 \in ax \setminus A_n(x, a)$. Por lo tanto $V_0 \cap ax \subset ax \setminus A_n(x, a)$, entonces $ax \setminus A_n(x, a)$ es abierto en ax, es decir $A_n(x, a)$ es cerrado en ax y por tanto compacto.

De I, II y III concluimos que $A_1(x, a)$ es un subarco (posiblemente degenerado) de ax con uno de sus extremos igual a x. □

Lema 3.16. Sean X un dendroide y x_0 y $\hat{x_0}$ puntos de X tales que $\hat{x_0} \in A_1(x_0, a)$. Sean U y V vecindades de x_0 y $\hat{x_0}$, respectivamente, tales que $\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V) = \emptyset$ y $a \notin U \cup V$. Entonces $P(U) \cap \{x \in X \mid ax \in (V, U, V)\} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $P(U) \cap \{x \in X \mid ax \in (V, U, V)\} = \emptyset$. Como $\hat{x_0} \in A_1(x_0, a)$, podemos elegir un punto $x \in V$ tal que $ax \in (V, U, V)$. Así, por el Lema 3.9 y ya que $x \in V$, existe una vecindad V_1 de x tal que $V_1 \subset \mathrm{Cl}\,(V_1) \subset V$ y todo arco que une a con V_1 es de tipo (V, U, V). Aplicamos el Lema 3.10 a $G_1 = V$, $G_2 = U$ y $G_3 = V$. Entonces existe un abierto no vacío V_2 tal que $V_2 \subset \mathrm{Cl}\,(V_2) \subset V_1$ y todo arco que une a con V_2 es de tipo (V, U, V, U, V). En particular se cumple que todo arco de a a V_2 es de tipo (V, U, V). Aplicamos ahora el Lema 3.10 a $G_1 = V$, $G_2 = U$, $G_3 = V$, $G_4 = U$ y $G_5 = V$. Entonces existe un abierto no vacío V_3 tal que $V_3 \subset \mathrm{Cl}\,(V_3) \subset V_2$ y todo arco de a a V_3 es de tipo (V, U, V, U, V, U, V). Repitiendo este proceso inductivamente, podemos construir una sucesión de abiertos no vacíos $\{V_n\}_{i=1}^{\infty}$ de forma que, para todo natural $n \geq 1$, $\mathrm{Cl}\,(V_{n+1}) \subset V_n$ y todo arco que una a a con V_n sea de tipo $(V, U, V, U, \ldots, V)_{2n+1}$. Como

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}(V_{n+1}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n, \text{ y}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cl}(V_{n+1}) \neq \emptyset, \text{ entonces } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset.$$

Elegimos $b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Así, para toda $n \geq 1$, ab es de tipo $(V, U, V, U, \ldots, V)_{2n+1}$. Por el Lema 3.11 concluimos que $d(U, V) = 0$. Entonces $\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V) \neq \emptyset$, una contradicción. Por lo tanto $P(U) \cap \{x \in X \mid ax \in (V, U, V)\} \neq \emptyset$. $\square$

Lema 3.17. Un dendroide X es semilocalmente conexo en un punto $x \in X$ si y sólo si $\alpha_1(x) = 0$.

Demostración. Primero supongamos que X es semilocalmente conexo en x y que $\alpha_{1a}(x) > 0$ para algún punto $a \in X$. Entonces

$$\text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid A_n(x, a) \subset B_\epsilon(x)\} > 0.$$

En particular $A_1(x, a)$ es un arco (no degenerado), por lo que podemos tomar un punto $\hat{x} \in A_1(x, a) \setminus \{x\}$. Sea G una vecindad de x tal que $a\hat{x} \cap \mathrm{Cl}(G) = \emptyset$. Como X es semilocalmente conexo en x, existe una vecindad U de x tal que $x \in U \subset G$ y $X \setminus U$ tiene una cantidad finita de componentes. Sea C_U la componente de $X \setminus U$ que tiene a a y sea $V = \mathrm{int}(C_U)$. Como $a\hat{x}$ es conexo, $a\hat{x} \cap U = \emptyset$ y $a \in C_U$, tenemos que $\hat{x} \in C_U$. Por tanto $a\hat{x} \subset C_U$. Sean $D_1, \ldots, D_m$ las componentes de $X \setminus U$ que no tienen a a. Ya que cada D_i es cerrado en X, tenemos que $X \setminus (\mathrm{Cl}(U) \cup D_1 \cup \ldots \cup D_m)$ es un abierto en X que tiene a $\hat{x}$ y está contenido en C_U. Por tanto $\hat{x} \in \mathrm{int}(C_U)$, es decir, $\hat{x} \in V$. Como $\hat{x} \in A_1(x, a)$, existe $z \in V \subset C_U$ tal que $az \in (V, U, V)$, pero como a y z están en C_U y C_U es un subcontinuo del dendroide X, tenemos que $az \subset C_U \subset X \setminus U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe ocurrir que $\alpha_{1a}(x) = 0$.

Supongamos ahora que $\alpha_1(x) = 0$, es decir, que $\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid a \in X\} = 0$, y supongamos que X no es semilocalmente conexo en x. Entonces existe una vecindad G de x tal que para toda vecindad U de x que satisfaga que $U \subset G$, $X \setminus U$ tiene una cantidad infinita de componentes. Sea U cualquier vecindad de x contenida en G y para cada $a \in X \setminus U$, sea C_U la componente de $X \setminus U$ que tiene a a. Veremos que existe un punto $a \notin G$ tal que $a \notin \mathrm{int}(C_U)$. Supongamos que para todo punto $a \in X \setminus G$ existe una vecindad U de x con $U \subset G$ tal que $a \in \mathrm{int}(C_U)$. Entonces

$$X \setminus G \subset \bigcup\{\mathrm{int}(C_U) \mid U \text{ es abierto y } x \in U \subset G\}.$$

Como $X \setminus G$ es compacto y $\{\text{int}(C_U) \mid x \in U \subset G\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus G$, existe $m \in \mathbb{N}$ y existen vecindades de x $U_1, U_2, \ldots, U_m$ tales que $U_1 \cup \ldots \cup U_m \subset G$ y

$$X \setminus G \subset \text{int}(C_{U_1}) \cup \text{int}(C_{U_2}) \cup \ldots \cup \text{int}(C_{U_m}).$$

Sea $C = C_{U_1} \cup C_{U_2} \cup \ldots \cup C_{U_m}$ y sea $U = X \setminus C$. Como $U = (X \setminus C_{U_1}) \cap \ldots \cap (X \setminus C_{U_m})$, entonces U es abierto y $X \setminus U$ tiene una cantidad finita de componentes. Además $x \in U$ por construcción. Por lo tanto U es una vecindad de x contenida en G y cuyo complemento tiene un número finito de componentes, contradiciendo la elección de G. Por lo tanto podemos elegir $a \in X \setminus G$ tal que $a \notin \text{int}(C_U)$ para ninguna vecindad U de x contenida en G.
Dadas vecindades V de a y U de x con $U \subset G$, como $a \notin \text{int}(C_U)$, tenemos que $V \setminus C_U \neq \emptyset$. Sea $z \in V \setminus C_U$. Consideremos el arco az. Si ocurriera que $az \subset X \setminus U$, entonces $az \subset C_U$, una contradicción. Por tanto $az \cap U \neq \emptyset$. Además, $\{a, z\} \subset V$, por tanto $az \in (V, U, V)$.

Por último probaremos que

$$\alpha_1(x) \geq a_{1a}(x) \geq d(a, x) > 0. \tag{3.17.1}$$

I. Claramente $\sup\{\alpha_{1b} \mid b \in X\} \geq \alpha_{1a}$. De modo que $\alpha_1(x) \geq a_{1a}(x)$.

II. Falta probar que $a_{1a}(x) \geq d(a, x) > 0$.
Supongamos que $d(a, x) > a_{1a}(x) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid A_1(x, a) \subset B_\epsilon(x)\}$. Entonces

$$A_1(x, a) \subset B_{d(a,x)}(x).$$

Sin embargo, notemos que para toda vecindad V de a y para toda vecindad a U de x, existe z tal que $az \in (V, U, V)$, entonces

$$a \in A_1(x, a).$$

Pero $a \notin B_{d(x,a)}(x)$, una contradicción.

III. Ya que $x \in G$ y $a \in X \setminus G$, tenemos que $x \neq a$. Por tanto $d(a, x) > 0$.

De (3.17.1) concluimos que $\alpha_1(x) > 0$, una contradicción. Por lo tanto X es semilocalmente conexo en x. □

Lema 3.18. Sea X un dendroide y tomemos $x \in X$. Si para toda vecindad G de x existe un abierto V tal que $x \in V \subset G$ y tal que $X \setminus G$ está contenido en una única componente de $X \setminus V$, entonces X es colocalmente conexo en x (en particular se cumple que X es semilocalmente conexo en x).

Demostración. Sea G una vecindad cualquiera de x. Sabemos que existe una vecindad $V \subset G$ de x tal que $X \setminus G$ está contenido en una única componente de $X \setminus V$. Sea C dicha componente y sea $U = X \setminus C$.

I. $X \setminus U = C$, por tanto $X \setminus U$ es conexo.

II. Ya que $C = X \setminus U \subset X \setminus V$ y $x \in V$, entonces $x \in U$.

III. Como $X \setminus G \subset C = X \setminus U$, tenemos que $U \subset G$.

IV. U es abierto pues C es cerrado.

De I, II, III y IV concluimos que X es colocalmente conexo (y entonces semilocalmente conexo) en x.

□

Lema 3.19. Sea X un dendroide. Para cada $a \in X$ se tiene que

$$X_s^e \cup \{a\} = (X^e \cap \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})) \cup \{a\}.$$

Demostración. Primero tomemos $x \in X_s^e \cup \{a\}$.

Caso 1: $x = a$.
En este caso $x \in \{a\}$ y por tanto $x \in (X^e \cap \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})) \cup \{a\}$.

Caso 2: $x \neq a$.
En este caso $x \in X_s^e$, es decir, x es un punto extremo de X y X es semilocalmente conexo en x. Por el Lema 3.17 tenemos que $\alpha_1(x) = 0$, es decir, $\sup\{\alpha_{1b}(x) \mid b \in X\} = 0$. Por tanto $x \in \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})$ para la a dada. Por tanto $x \in (X^e \cap \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})) \cup \{a\}$.

Ahora, sean $a \in X$ fija y $x \in (X_s^e \cap \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})) \cup \{a\}$.

Caso 1: $x = a$.
En este caso $x \in \{a\}$ y por tanto $x \in X_s^e \cup \{a\}$.

Caso 2: $x \neq a$.
En este caso, $x \in X^e \cap \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})$. Quisiéramos probar que X es semilocalmente conexo en x. Para esto, basta probar que para cada vecindad G de x existe otra vecindad $V \subset G$ de x tal que $X \setminus G$ está contenido en una cantidad finita de componentes de $X \setminus V$. Sea G una vecindad arbitraria de x y supongamos que esto no ocurre. Sea G_1 una vecindad de x tal que $G_1 \subset G$. Si existe una vecindad V de x tal que $V \subset G_1$ y $X \setminus G_1$ está contenido en un número finito de componentes de $X \setminus V$, como $X \setminus G \subset X \setminus G_1$, tenemos que $X \setminus G$ también lo cumple, y tenemos un absurdo. Esto muestra que cualquier vecindad G_1 de x tal que $G_1 \subset G$ tiene la misma propiedad que le pedimos a G. Por tanto, podemos suponer que $a \notin G$. Elegimos una sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecindades de x tales que $\mathrm{Cl}(V_1) \subset G$, $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ y

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diám}(V_n) = 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n la componente de $X \setminus V_n$ que tiene a a. Por lo que supusimos, existe una componente D_n de $X \setminus V_n$ tal que $C_n \cap D_n = \emptyset$ y $(X \setminus G) \cap D_n \neq \emptyset$. Sea $b_n \in D_n \cap (X \setminus G)$ y consideremos el arco ab_n. Si $ab_n \subset X \setminus V_n$, entonces $ab_n \subset C_n$, lo cual es imposible. Entonces $ab_n \cap V_n \neq \emptyset$. Sea $c_n \in V_n \cap ab_n$ y consideremos el arco c_nb_n (subarco de ab_n). Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = x,$$

y como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que existe $A \in C(X)$ tal que

$$A = \lim_{n\to\infty} c_nb_n.$$

Entonces $x \in A$ y $A \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$, así que A es no degenerado.
Afirmamos que $A \cap ax = \{x\}$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $y \neq x$ tal que $y \in A \cap ax$ y sean U y V vecindades de x y y, respectivamente. Como $y \in A$ y

$$A = \lim_{n\to\infty} c_nb_n,$$

existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $c_nb_n \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq N_1$, también existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \in U$, para todo $n \geq N_2$. Por último veamos que existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $ac_n \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq N_3$. De no ocurrir esto, podemos elegir una subsucesión $\{ac_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{ac_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $ac_{n_k} \subset X \setminus V$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y, por la compacidad de $C(X)$, podemos suponer que existe $B \in C(X)$ tal que

$$B = \lim_{n\to\infty} ac_n.$$

Entonces $B \subset X \setminus V$. De modo que $a \in B$ y $x \in B$, por tanto $ax \subset B$ y como $y \in ax$, se tiene que $y \in B \subset X \setminus V$, entonces $y \in (X \setminus V) \cap V$, una contradicción. De todo lo anterior concluimos que $ab_n \in (V, U, V)$ para todo $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Por lo tanto $y \in A_1(x, a)$ y entonces $\alpha_{1a}(x) > 0$ para la a dada, pero $x \in \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})$, lo que es un absurdo. Por lo tanto X es semilocalmente conexo en x.

Concluimos que $X_s^e \cup \{a\} = (X^e \cap \alpha_{1a}^{-1}(\{0\})) \cup \{a\}$. □

Lema 3.20. Sean X un dendroide y x y y dos puntos de X. Sea pq un arco maximal que contiene a xy. Entonces $\{p, q\} \subset X^e$.

Demostración. Supongamos que $p \notin X^e$. Entonces existen $u, v \in X$ tales que $p \in uv \setminus \{u, v\}$. Como X es un dendroide, el conjunto $J = uv \cap pq$ es un subarco tanto de pq como de uv. Ya que p es extremo de pq, tenemos que $J = wp$ para alguna $w \in pq$. De manera que $wp \subset uv$. Podemos suponer que $u \leq w \leq p < v$ (en el orden de uv). Entonces

$$qp \cap pv = qp \cap pv \cap uv = J \cap pv = wp \cap pv = \{p\}.$$

Por lo que $qp \cap pv = \{p\}$. Por lo tanto $qp \cup pv$ es un arco que contiene propiamente a qp (pues tiene a v y $v \notin qp$). Esto es absurdo. Por tanto $p \in X^e$. Como p y q tienen papeles simétricos, concluimos que $\{p, q\} \subset X^e$. □

Lema 3.21. Sean X un dendroide y $Y \subset X$. Si Y es arco conexo y $X^e \subset Y \subset X$, entonces $Y = X$.

Demostración. Sean $x \in X$ y p y q elementos de X^e tales que $x \in pq$. Entonces $\{p, q\} \subset X^e \subset Y$. Como Y es arco conexo, entonces $pq \subset Y$. Por tanto $x \in Y$ y así concluimos que $X = Y$. $\square$

Lema 3.22. Sean X un dendroide y $a \in X$. Entonces para todo abierto no vacío G de X existe un punto $x^* \in X_s^e$ tal que $ax^* \in \langle G \rangle$.

Demostración. Sea $E_0 = \{x \in X^e \setminus \{a\} \mid ax \in \langle G \rangle\}$. Primero veremos que $E_0 \neq \emptyset$. Para esto, notemos que como $G \neq \emptyset$, entonces $\{x \in X \mid ax \in \langle G \rangle\} \neq \emptyset$. Sea $y \in \{x \in X \mid ax \in \langle G \rangle\}$ y consideremos el arco ay. Por el Lema 1.27 sabemos que existe un arco pq de X tal que $ay \subset pq$ y no existe un arco en X que contenga propiamente a pq. Por el Lema 3.20, $\{p, q\} \subset X^e$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p \leq a < y \leq q$. Como $ay \in \langle G \rangle$, entonces $aq \in \langle G \rangle$, es decir, $q \in \{x \in X^e \setminus \{a\} \mid ax \in \langle G \rangle\}$. Por lo tanto $E_0 \neq \emptyset$.

Analicemos dos casos:

Caso 1: $\alpha_{1a}(x) = 0$ para alguna $x \in E_0$.
Por el Lema 3.19, como $x \in (\alpha_{1a}^{-1}(\{0\}) \cap (X^e \setminus \{a\}) = (\alpha_{1a}^{-1}(\{0\}) \cap X^e) \setminus \{a\}$, entonces $x \in X_s^e \setminus \{a\}$, y por tanto X es semilocalmente conexo en x; y como $x \in E_0$, entonces $ax \in \langle G \rangle$. Así queda terminado este caso.

Caso 2: $\alpha_{1a}(x) > 0$ para toda $x \in E_0$.
Dada $x \in E_0$, $\alpha_{1a}(x) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid A_1(x, a) \subset B_\epsilon(x)\} \leq \text{diám}(X) + 1$. Entonces, para toda $x \in E_0$, $\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\}$ está acotado superiormente. Además, como $\alpha_{1a}(x) > 0$, tenemos que $\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\} > 0$. Sea $x_0 \in E_0$ tal que

$$\alpha_{1a}(x_0) > \frac{1}{2} \sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\}.$$

Ya vimos que $A_1(x_0, a)$ es un subarco de ax_0 y por tanto $A_1(x_0, a)$ es compacto. Veamos que existe $\hat{x_0} \in A_1(x_0, a) \setminus \{x_0\}$ tal que $\alpha_{1a}(x_0) = d(x_0, \hat{x_0})$. Sea $\beta = \sup\{d(z, x_0) \mid z \in A_1(x_0, a)\}$. Como $A_1(x_0, a)$ es compacto y la función

$$d_{x_0} : X \to \mathbb{R} \text{ dada por}$$

$$d(z) = d(x_0, z)$$

es continua, existe $z_0 \in A_1(x_0, a)$ tal que $d(x_0, z_0) = \beta$. Probaremos que $\beta = \alpha_{1a}(x_0)$.

($\leq$) Sea $\epsilon > 0$ tal que $A_1(x_0, a) \subset B_\epsilon(x_0)$. Como $z_0 \in A_1(x_0, a)$, entonces $z_0 \in B_\epsilon(x_0)$, es decir, $d(z_0, x_0) < \epsilon$. Por tanto β es cota inferior de $\{\epsilon > 0 \mid A_1(x_0, a) \subset B_\epsilon(x_0)\}$, entonces $\beta \leq \alpha_{1a}(x_0)$.

($\geq$) Supongamos que $\beta < \alpha_{1a}(x_0)$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\beta < r < \alpha_{1a}(x_0)$, entonces, para toda $z \in A_1(x_0, a)$ se tiene que $d(x_0, z) \leq d(x_0, z_0) = \beta < r$. Entonces $A_1(x_0, a) \subset B_r(x_0)$, así que $\alpha_{1a}(x_0) \leq r$, una contradicción. Por tanto debe ocurrir que $\beta = \alpha_{1a}(x_0)$.

Ya que z_0x_0 es un arco, $d(x_0, x_0) = 0$ y $d(x_0, z_0) = \beta > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\}$, la continuidad de la función distacia implica que existe $\hat{x_0} \in z_0x_0$ tal que $\frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\} < d(x_0, \hat{x_0}) < \alpha_{1a}(x_0)$. Notemos que $\hat{x_0} \notin \{z_0, x_0\}$. Ya que $\hat{x_0} \in z_0x_0 \subset A_1(x_0, a) \subset ax_0$, tenemos que $\hat{x_0} \notin \{a, x_0\}$.

Tomemos vecindades U_0 y V_0 de x_0 y $\hat{x_0}$, respectivamente, que satisfagan lo siguiente:

1. $a \notin U_0 \cup V_0$. Esto se puede hacer ya que $a \notin \{x_0, \hat{x_0}\}$.

2. $d(U_0, V_0) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\}$. Antes elegimos x_0 de forma que $d(x_0, \hat{x_0}) = \alpha_{1a}(x_0) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_0\}$, entonces $d(x_0, \hat{x_0}) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a} \mid x \in E_0\}$. Por tanto podemos tomar U_0 y V_0 que también cumplan esta desigualdad, y

3. Para toda $z \in X$, si $az \in (U_0)$, entonces $az \in (G)$. (3.22.1)
   Esto lo podemos hacer porque $ax_0 \in (G)$ y por el Lema 3.9 tomando $n = 1$ y $G = U_1$.

Sea $E_1 = P(U_0) \cap \{x \in X \mid ax \in (V_0, U_0, V_0)\} \cap X^e$. Recordemos que $P(U_0) = \{x \in X \mid$ existe una vecindad V de x tal que $a \notin V$ y $C_{U_0} \subset \mathrm{int}(C_V)\}$, donde C_{U_0} es la componente de $X \setminus U_0$ que tiene a a y C_V es la componente de $X \setminus V$ que tiene a a. Como $\hat{x_0} \in A_1(x_0, a)$ y $\mathrm{Cl}(U_0) \cap \mathrm{Cl}(V_0) = \emptyset$, por el Lema 3.16, podemos tomar un punto $y \in P(U_0)$ tal que $ay \in (V_0, U_0, V_0)$. Por el Lema 1.27, existe $x \in X^e$ tal que ay es un subarco de ax. Por el Lema 3.8, como $a \notin U_0$, $x \in P(U_0)$. Por tanto $x \in E_1$. Hemos visto que $E_1 \neq \emptyset$.
Para cada $u \in E_1$, por (3.22.1), $au \in (G)$, y como $au \in (V_0, U_0, V_0)$, tenemos que $u \neq a$. Si existe $u \in E_1$ tal que $\alpha_{1a}(u) = 0$, razonando como en el Caso 1, obtenemos que X es semilocalmente conexo en u y terminaríamos la prueba. Por tanto podemos suponer que $\alpha_{1a}(x) > 0$ para toda $x \in E_1$.

Sea $x_1 \in E_1$ tal que

$$\alpha_{1a}(x_1) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_1\}.$$

Como antes, existe $\hat{x_1} \in A_1(x_1, a) \setminus \{x_1\}$ tal que

$$\alpha_{1a}(x_1) > d(x_1, \hat{x_1}) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_1\}.$$

Tomemos vecindades U_1 y V_1 de x_1 y $\hat{x_1}$, respectivamente, tales que:

1. $a \notin U_1 \cup V_1$,

2. $d(U_1, V_1) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_1\}$,

3. $C_{U_0} \subset \operatorname{int}(C_{U_1})$. Esto lo podemos hacer ya que $x_1 \in E_1 \subset P(U_0)$, y

4. Para cada $z \in X$, si $az \in (U_1)$, entonces $az \in (V_0, U_0, V_0)$. Esto lo podemos conseguir pues $ax_1 \in (V_0, U_0, V_0)$ y podemos aplicar el Lema 3.9.

Repitiendo este proceso para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos construir

$$E_n = P(U_{n-1}) \cap \{x \in X \mid ax \in (V_{n-1}, U_{n-1}, V_{n-1})\} \cap X^e, \tag{3.22.2}$$

donde U_{n-1} es una vecindad de x_{n-1} tal que $a \notin U_{n-1}$, y V_{n-1} es una vecindad de $\hat{x}_{n-1}$. (3.22.3)

Como antes, podemos tomar $x_n \in E_n$ tal que $\alpha_{1a}(x_n) > 0$ y $\hat{x_n} \in A_1(x_n, a) \setminus \{x_n, a\}$ tales que $\alpha_{1a}(x_n) > d(x_n, \hat{x_n}) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_n\}$. Por último podemos dar vecindades U_n y V_n de x_n y $\hat{x_n}$, respectivamente, tales que:

1. $a \notin U_n \cup V_n$,

2. $d(U_n, V_n) > \frac{1}{2}\sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_n\}$, (3.22.4)

3. $C_{U_{n-1}} \subset \operatorname{int}(C_{U_n})$, y (3.22.5)

4. Para cada $z \in X$, si $az \in (U_n)$, entonces $az \in (V_{n-1}, U_{n-1}, V_{n-1})$. (3.22.6)

Sea $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_{U_n}$. (3.22.7)

Claramente $a \in C$. Además,

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_{U_n} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int}(C_{U_{n+1}}) \subset C.$$

Entonces C es abierto. Dados dos elementos w_1 y w_2 de C, ocurre una de las siguientes dos cosas:

- Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que w_1 y w_2 son elementos de C_{U_m}, o
- $w_1 \in C_{U_k}$ y $w_2 \in C_{U_l}$ para algunas $k \neq l$.

En el primer caso, como X es un dendroide y C_{U_m} es un subcontinuo de X, $w_1w_2 \subset C_{U_m}$. En el segundo caso tenemos que $\{w_1, w_2\} \subset C_{U_{\text{máx}\{k,l\}}}$, y con el mismo argumento concluimos que $w_1w_2 \subset C_{U_{\text{máx}\{k,l\}}}$. Por tanto C es arco conexo.

Hasta ahora tenemos entonces que $a \in C$, C es abierto y C es arco conexo. (3.22.8)

Probaremos ahora que $X \neq C$. Supongamos por el contrario que $X = C$, entonces C es compacto. Además,

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int}(C_{U_n}).$$

Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$C \subset \operatorname{int}(C_{U_2}) \cup \ldots \cup \operatorname{int}(C_{U_{m+1}}) = \operatorname{int}(C_{U_{m+1}}) \subset C_{U_{m+1}} \subset C.$$

Entonces $C_{U_{m+1}} = C = X$ y por tanto $U_{m+1} = \emptyset$, una contradicción. Con esto concluimos que $X \neq C$.

Ahora supongamos que $X^e \subset C$. Como C es arco conexo, aplicando el Lema 3.21 tenemos que $X = C$, contradiciendo lo que acabamos de probar.

Por tanto existe $x^* \in X^e \setminus C$. (3.22.9)

Probaremos que $ax^* \in (U_n)$ para toda $n \geq 0$. Supongamos que esto no ocurre, entonces $ax^* \subset C_{U_n}$, pero $C_{U_n} \subset C$. Entonces $ax^* \subset C$. Esto implica que $x^* \in C$, contradiciendo (3.22.9).

Por lo tanto $ax^* \in (U_n)$ para toda $n \geq 0$. (3.22.10)

De las propiedades (3.22.6) y (3.22.10) obtenemos que, para toda $n \geq 1$,

$ax^* \in (V_{n-1}, U_{n-1}, V_{n-1})$. (3.22.11)

Sea $n \geq 1$. Veamos que $x^* \in P(U_{n-1})$. Como $x^* \notin C$, entonces $x^* \notin C_{U_n}$. Por tanto podemos encontrar una vecindad W de x^* tal que $W \cap C_{U_n} = \emptyset$. Sea C_W la componente de $X \setminus W$ que tiene a a. Ya que $C_{U_n} \subset X \setminus W$, entonces $C_{U_n} \subset C_W$. Además, por (3.22.5), tenemos que $C_{U_{n-1}} \subset \operatorname{int}(C_{U_n})$. Entonces $C_{U_{n-1}} \subset \operatorname{int}(C_{U_n}) \subset C_{U_n} \subset C_W$. Por lo anterior tenemos que W es una vecindad de x^* tal que $a \notin W$ y $C_{U_{n-1}} \subset \operatorname{int}(C_W)$.

Por tanto $x^* \in P(U_{n-1})$ para toda $n \geq 1$. (3.22.12)

Por (3.22.11) y (3.22.12), tenemos que, para toda $n \geq 1$,

$$x^* \in P(U_{n-1}) \cap \{x \in X \mid ax \in (V_{n-1}, U_{n-1}, V_{n-1})\} \cap X^e = E_n.$$

Recordemos que U_n y V_n son tales que

$$d(U_n, V_n) > \frac{1}{2} \sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_n\}, \text{ y}$$

$$\frac{1}{2} \sup\{\alpha_{1a}(x) \mid x \in E_n\} \geq \frac{1}{2} \alpha_{1a}(x^*).$$

Entonces, para toda $n \geq 1$ se tiene que $\alpha_{1a}(x^*) \leq 2d(U_n, V_n)$. (3.22.13)

Para cada $n \geq 0$, sea aw_n la componente de $ax^* \setminus U_n$ que tiene a a. Probaremos que $w_n \neq x^*$. Por definición, $aw_n \notin (U_n)$, y por (3.22.10), sabemos que $ax^* \in (U_n)$ para toda $n \geq 0$. Por tanto $w_n \neq x^*$. Ahora mostraremos que $w_n \in \mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U_n)$. Supongamos que esto no ocurre, entonces $w_n \in X \setminus \mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U_n)$, éste es un conjunto abierto. Por tanto existe una vecindad M de w_n tal que $M \cap \mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U_n) = \emptyset$. Como M es abierto en X, podemos encontrar un intervalo en ax^* que tenga a w_n y que no interseque a $\mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U)$. Entonces existe $y \in M$ tal que $w_n y \cap \mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U) = \emptyset$ y $a \leq w_n < y$. Entonces ay es conexo y $aw_n \subsetneq ay \subset ax^* \setminus U_n$. Una contradicción ya que aw_n es una componente. Por lo tanto $w_n \in \mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U_n)$. Además, recordemos que aw_n es la componente de $ax^* \setminus U_n$ que tiene a a, y C_{U_n} es la componente de $X \setminus U_n$ que tiene a a.

Entonces $aw_n \subset C_{U_n}$. (3.22.14)

Por (3.22.4) tenemos que $\mathrm{Cl}(U_n) \cap \mathrm{Cl}(V_n) = \emptyset$. Por (3.22.5) se cumple que $\mathrm{Cl}(U_{n+1}) \cap C_{U_n} = \emptyset$.
Demostraremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in U_n \cap ax^*$ tal que:

1. $a \leq w_n < u_n < x^*$,
2. $au_n \cap U_{n+1} = \emptyset$, y (3.22.15)
3. $w_n u_n \cap V_n = \emptyset$. (3.22.16)

Ya vimos que $w_n < x^*$, $w_n \in \mathrm{Cl}(w_n x^* \cap U_n)$, $w_n \in C_{U_n}$ y $\mathrm{Cl}(U_n) \cap \mathrm{Cl}(V_n) = \emptyset$. De manera que $w_n \notin \mathrm{Cl}(U_{n+1}) \cup \mathrm{Cl}(V_n)$. Entonces existe $z \in w_n x^*$ tal que $w_n < z < x^*$ y $w_n z \cap (\mathrm{Cl}(U_{n+1} \cup \mathrm{Cl}(V_n)) = \emptyset$. Ya que $X \setminus zx^*$ es un abierto de X que tiene a w_n, tenemos que $(X \setminus zx^*) \cap (w_n x^* \cap U_n) \neq \emptyset$. Sea u_n un punto de esta intersección. Entonces $w_n < u_n < z < x^*$. De modo que $w_n u_n \cap (\mathrm{Cl}(U_{n+1}) \cup \mathrm{Cl}(V_n)) = \emptyset$.

Por (3.22.15), tenemos que $u_n \leq w_{n+1}$, así que $a < u_0 < u_1 < \cdots < x^*$. (3.22.17)

Probaremos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \cap V_n \neq \emptyset$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n u_{n+1} \cap V_n = \emptyset$. Por (3.22.6), tenemos que para toda $z \in X$, si $az \in (U_{n+1})$, entonces $az \in (V_n, U_n, V_n)$. Claramente $au_{n+1} \in (U_{n+1})$, por tanto, existen puntos p, q y r en au_{n+1} tales que $\{p, r\} \subset V_n$, $q \in U_n$, y $a < p < q < r \leq u_{n+1}$. Como $a < u_0 < u_1 < \cdots < x^*$, entonces $au_{n+1} = au_n \cup u_n u_{n+1}$. Estamos suponiendo que $u_n u_{n+1} \cap V_n = \emptyset$, y $r \in V_n \cap au_{n+1}$. Entonces $r \in au_n$. Por otro lado $au_n = aw_n \cup w_n u_n$, y como $w_n u_n \cap V_n = \emptyset$, entonces por (3.22.16) tenemos que $r \in aw_n$. Por (3.22.14), $aw_n \subset C_{U_n}$. Entonces $r \in C_{U_n}$, y como

$a \in C_{U_n}$, entonces $ar \subset C_{U_n}$. Por tanto $q \in C_{U_n} \cap U_n$, un absurdo.

Concluimos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \cap V_n \neq \emptyset$. (3.22.18)

Ahora, por (3.22.17) y (3.22.18), se tiene que $ax^* \in (U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots)_\infty$. Entonces, por el Lema 3.11 ocurre que

$$\lim_{n\to\infty} d(U_n, V_n) = 0.$$

Por (3.22.13) concluimos que $\alpha_{1a}(x^*) = 0$. Como $a \in C$ y $x^* \notin C$, entonces $a \neq x^*$. Como $a < u_0 < x^*$, $ax^* \in (U_0)$. Por (3.22.1), $ax^* \in (G)$.
Por lo tanto x^* es tal que $x^* \in X_s^e$ y $ax^* \in (G)$. Esto concluye la prueba. □

Teorema 3.23. Sea X un dendroide. El subconjunto arco conexo más pequeño que contiene a X_s^e es un conjunto denso en X.

Demostración. Sabemos por el Lema 3.22 que $X_s^e \neq \emptyset$. Fijamos $a \in X_s^e$. Sea

$$M_0 = \bigcup_{z\in X_s^e} az.$$

Claramente M_0 es arco conexo y contiene a X_s^e. Cualquier conjunto arco conexo M que contiene a X_s^e, debe contener a todos los arcos de la forma az, con $z \in X_s^e$. Por tanto $M_0 \subset M$. Hemos mostrado que M_0 es el conjunto más pequeño arco conexo que contiene a X_s^e. Falta ver que

$$\mathrm{Cl}(M_0) = X.$$

Sea $x \in X$ y sea G una vecindad de x. Como $a \in M_0$, podemos suponer que $a \notin G$. Por el Lema 3.22, existe un punto $x^* \in X_s^e$ tal que $ax^* \in (G)$. Por lo tanto $G \cap \left(\bigcup_{z\in X_s^e} az\right) \neq \emptyset$. Y por tanto

$$\mathrm{Cl}\Big(\bigcup_{z\in X_s^e} az\Big) = X.$$

Observemos que lo anterior y el Teorema 3.4 implican que el conjunto arco conexo más pequeño que contiene a los puntos donde X es colocalmente conexo, es denso en X. □

Bibliografía

[1] Bondy, J. A. y Murty, U. S. R., *Graph theory with applications*, Butler & Tanner Ltd., Frome, 1976.

[2] Borsuk, K., *A theorem on fixed points*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, **2**, (1954), no. 1, 17-20.

[3] Cauty, R., *Sur l'approximation interne des dendroides par des arbres* (2007). Recuperado el 19 de febrero, 2018 de `http://web.mst.edu/~continua/dendroides.pdf`.

[4] Charatonik, J. J., *The Works of Bronisław Knaster (1893–1980) in Continuum Theory*, Handbook of the History of General Topology, Vol. 1, (C.E. Aull y R. Lowen, ed.), Springer Science and Business Media, 2013.

[5] Charatonik, J. J. y Eberhart, C., *On smooth dendroids*, Fundamenta Mathematicae, **67** (1970), 297-322.

[6] Cook, H., *Tree-likeness of dendroids and λ-dendroids*, Fundamenta Mathematicae, **68** (1970), no. 1, 19-22.

[7] Dolecki, S. y Mynard, F., *Convergence foundations of topology*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2016.

[8] Escobedo, R., Macías, S. y Méndez, H., *Invitación a la teoría de continuos y sus hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas; Textos, vol. 31, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

[9] Fugate, J. B., *Retracting fans onto finite fans*, Fundamenta Mathematicae, **71** (1971), no. 2, 113-125.

[10] Fugate, J. B., *Small retractions of smooth dendroids onto trees*, Fundamenta Mathematicae, **71** (1971), no. 3, 255-262.

[11] Hocking, J. G. y Young, G. S., *Topology*, Addison Wesley, Massachusetts, 1961.

[12] Illanes, A., *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Textos, vol. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[13] Kelley, J. L., *General topology*, Ishi Press International, New York, 2008.

[14] Knaster, B., *Problèmes*, Colloquium Mathematicum, **8**, (1961), no. 1, 139.

[15] Krasinkiewicz, J. y Minc, P., *Dendroids and their endpoints*, Fundamenta Mathematicae, **99**, (1978), 227-244.

[16] Martínez de la Vega, V., *El espacio de continuos con la topología producto*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1998.

[17] Martínez de la Vega, V. y Martínez, J. M., *Open problems on dendroids*, Open Problems in Topology II, (E. M. Pearl, ed.) Elsevier, Amsterdam, 2011.

[18] Munkres, J. R., *Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[19] Nadler, Jr., S. B., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York y Basel, 1992.

[20] Willard, S., *General Topology*, Dover Publications, New York, 1970.