



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sistema de colas en paralelo bajo una rutina de
balance de cargas local

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Samuel Toledo Trejo

TUTOR

Dr. Sergio Iván López Ortega

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Toledo
Trejo
Samuel
55 19 16 15 18
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
311014725
2. Datos del tutor
Dr.
Sergio Iván
López
Ortega
3. Datos del sinodal 1
Dra.
María Clara
Fittipaldi
4. Datos del sinodal 2
Dra.
Claudia Orquídea
López
Soto
5. Datos del sinodal 3
Act.
Edgar Gil
Hernández
Díaz
6. Datos del sinodal 4
Act.
Jorge
Calderón
Espinosa de los Monteros
7. Datos del trabajo escrito
Sistema de colas en paralelo bajo una rutina de balance de cargas local
67 p
2018

Índice general

Introducción	5
1. Procesos de Salto Puro y Colas M/M/1	7
1.1. Procesos de Salto Puro.	7
1.2. Tiempos de salto	10
1.3. Distribuciones Estacionarias.	13
1.4. Proceso de Poisson.	15
1.5. Problema Erlang.	18
1.6. Colas M/M/1.	19
2. Sistema del supermercado	23
2.1. Introducción.	23
2.2. Estabilidad del sistema.	24
2.2.1. Estabilidad con $d = 1$	24
2.2.2. Estabilidad del sistema con $d \geq 2$	26
2.3. Un sistema determinista.	34

2.3.1. Problema de epidemias: un ejemplo de un sistema determinista.	35
2.3.2. Proponiendo un sistema determinista adecuado.	37
2.3.3. Hallando un punto de equilibrio.	38
2.3.4. Estabilidad del punto de equilibrio.	39
2.3.5. Tiempo esperado en el sistema determinista.	43
2.4. Teorema de Kurtz.	46
2.4.1. Sistema aleatorio.	50
3. Simulación de resultados	53
3.1. Acoplamiento de los sistemas $d = 1$ y $d \geq 2$	53
3.2. Comparación del tiempo de espera	54
3.3. Tiempo de espera con respecto a n	55
Conclusión	59
A. Apéndice	61
A.1. Justificación del sistema determinista.	61
A.2. Desigualdad de Gronwall	63
A.3. Códigos de simulación	63
Bibliografía	67

Introducción

La presente tesis en su mayor parte fue una recopilación de resultados de diversos artículos y libros de texto entre los que destacan la tesis de doctorado de Michael David Mitzenmacher titulada “The Power of Two Choices in Randomized Load Balancing”, y las notas de Frank Kelly y Elena Yudovina de redes estocásticas.

El objetivo de esta tesis es mostrar que una buena estrategia de cargas para un sistema de colas en paralelo es valiosa en su rendimiento.

El primer capítulo es acerca de conceptos preliminares: Procesos de Salto Puro, el problema Erlang, y un recordatorio de las colas $M/M/1$.

El segundo capítulo es el punto central de la tesis. Su objetivo es presentar un modelo de un sistema de colas en paralelo llamado sistema del supermercado. Este es un modelo que se ha estudiado e ilustra bastante bien cómo una buena estrategia de cargas puede hacer gran diferencia en el rendimiento del sistema, desde el punto de vista del número de clientes en el sistema o el tiempo de espera promedio que un cliente pasa en dicho sistema. Este sistema es muy simple de describir, pero no es tan fácil de analizar, al menos en este nivel. Como veremos, este sistema puede entenderse como un Proceso de Salto Puro. Lo que haremos es proponer un sistema de ecuaciones diferenciales que aproxime el comportamiento del Proceso conforme el número de colas crece. Con ayuda del teorema de Kurtz encontramos una cota para el tiempo de espera promedio que un cliente pasa en el sistema del supermercado.

Por último, en el tercer capítulo se realizan simulaciones y se verifican algunos resultados. Primero se hace la comparación de rendimiento del sistema con dos diferentes estrategias de cargas para las colas, comparan-

do el número de clientes que hay en el sistema conforme el tiempo avanza. Después se simulan dos escenarios con diferentes estrategias de cargas para las colas comparando el tiempo de espera promedio en ambos. Finalmente se simulan varios escenarios en los que vemos la calidad de la aproximación del sistema del supermercado al sistema de ecuaciones diferenciales conforme el número de colas crece.

Capítulo 1

Procesos de Salto Puro y Colas M/M/1

1.1. Procesos de Salto Puro.

En esta sección abordaremos los conceptos básicos de los Procesos de Salto Puro. Muchos de estos conceptos serán necesarios para el siguiente capítulo, pues el sistema del supermercado se puede ver como un Proceso de Salto Puro.

Definición 1.1 (Procesos de Salto Puro.) *Sea E un conjunto numerable. El proceso $\{X(t) : \Omega \rightarrow E\}_{t \geq 0}$ es un Proceso de Salto Puro (PSP) si cumple la propiedad de Markov, es decir, si para toda $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$ se cumple que:*

$$\mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n), \quad (1.1)$$

para todo $x_0, \dots, x_n, x \in E$.

Observación 1.1 *La propiedad de Markov es equivalente a la siguiente propiedad:*

Dados $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(X_t = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n) \mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n) \quad (1.2)$$

para todo $x_0, \dots, x_n, x \in E$. Es decir, el pasado es independiente al futuro, dado el presente.

Demostración. Primero demostraremos que (1.1) implica (1.2).

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_t = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_t = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_n} = x_n) \frac{1}{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n)} \\ &= \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_n} = x_n) \cdot \\ & \quad \frac{\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_n} = x_n)}{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n)} \\ &= \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n) \mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n). \end{aligned}$$

Ahora, demostramos que (1.2) implica (1.1).

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_t = x, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0)}{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0)} \\ &= \mathbb{P}(X_t = x, X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n) \cdot \\ & \quad \frac{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n)}{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n) \mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n)}{\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} | X_{t_n} = x_n)} \\ &= \mathbb{P}(X_t = x | X_{t_n} = x_n). \end{aligned}$$

■

Notación: No haremos distinción entre $X(t)$ y X_t ni entre (X_t) y $\{X_t\}$.

Definimos a $p_{x,y}(s,t) := \mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x)$. Decimos que X es homogéneo en el tiempo si $p_{x,y}(s,t) = \mathbb{P}(X_{t-s} = y | X_0 = x) \quad \forall s, t \geq 0$. En este caso, denotamos a $p_{x,y}(0,t)$ por $p_{x,y}(t)$. La intuición de esto es que si un proceso es homogéneo en el tiempo, entonces, la probabilidad de transición de un estado a otro depende de los estados en sí y del tiempo que ha transcurrido el proceso sin moverse, sin importar en qué momento se encuentre.

Por otro lado, a cada Proceso de Salto Puro $\{X_t\}_{t \geq 0}$ lo asociamos a una matriz llamada generador infinitesimal de probabilidades.

Definición 1.2 (Generador infinitesimal de probabilidades) .

Sea $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un Proceso de Salto Puro con espacio de estados numerable E . Sea $Q = (q(i,j))_{i,j \in E}$ una matriz. Q es llamado el generador infinitesimal de probabilidades del proceso X si:

1. $q(i,j) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_{t+\delta} = j | X_t = i)}{\delta}$ con $i, j \in E, \quad i \neq j$,
2. $q(i,i) = - \sum_{k \in E \setminus \{i\}} q(i,k)$ para toda $i \in E$.

Notación: A los valores $-q(i,i)$ los representaremos con $q(i)$.

Es decir:

$$q(i) = \sum_{k \in E \setminus \{i\}} q(i,k), \quad i \in E.$$

Cabe señalar que un Proceso de Salto Puro está determinado por su generador infinitesimal y su distribución inicial.

La intuición detrás de esta matriz es la siguiente: fuera de la diagonal, tenemos los valores $(q(i,j))$ los cuales nos dicen con qué “fuerza” el proceso va del estado i al estado j . A los $q(i,j)$ los llamaremos tasas de salto del proceso.

A partir de ahora trabajaremos solamente con procesos de salto puro continuos por la derecha; es decir, dada una $\omega \in \Omega$, la función $X_t(\omega)$ es continua por la derecha en t .

1.2. Tiempos de salto y cadena de saltos de un proceso de Markov.

Un Proceso de Salto Puro es un proceso que salta de un estado a otro cada cierto tiempo aleatorio. Definimos J_0, J_1, \dots a las variables aleatorias que miden el tiempo en que salta el proceso, y a S_1, S_2, \dots los tiempos interarribo, es decir, los tiempos en los que permanece el proceso en un solo estado:

$$J_0 := 0, \quad J_{n+1} := \inf\{t > J_n : X_t \neq X_{J_n}\} \quad \forall n \geq 0,$$

donde $\inf \emptyset = \infty$, y para $n = 1, 2, \dots$

$$S_n := \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{si } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{si } J_{n-1} = \infty. \end{cases}$$

Notemos que la continuidad por la derecha del proceso implica que $S_n > 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$. Si $J_n = \infty$ para alguna n , definimos a $X_\infty := J_n$, y si $J_n < \infty \quad \forall n$, X_∞ estará indefinido. Además, definimos

$$\zeta := \sup\{J_n : n = 0, 1, \dots\} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

como el tiempo de explosión.

Definición 1.3 *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Decimos que X tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$) si:*

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t} 1_{(0, +\infty)}(t).$$

Resulta que en los Procesos de Salto Puro, las variables aleatorias S_1, S_2, \dots son independientes y tienen distribución exponencial, bajo el supuesto de que son finitas. Esto es debido principalmente a la propiedad de pérdida de memoria que caracteriza dicha distribución:

Proposición 1.1 (Pérdida de memoria) . *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua y positiva casi seguramente. Entonces, X tiene distribución exponencial si y sólo si cumple con la propiedad de pérdida de memoria, es decir,*

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s) \quad \forall s, t > 0.$$

Demostración. Demostraremos primero la ida. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ , y sean $s, t > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + s | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= \mathbb{P}(X > s). \end{aligned}$$

Ahora demostremos el regreso. Supongamos que X es una variable aleatoria arbitraria positiva casi seguramente que cumple la propiedad de pérdida de memoria, i.e.:

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s) \quad \forall s, t > 0.$$

Sea $g(t) = \mathbb{P}(X > t)$. Notemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$g\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$$

Entonces se cumple que

$$g(t + s) = g(t)g(s),$$

y

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n > 0.$$

Esto implica que existe $\lambda > 0$ tal que $g(1) = e^{-\lambda}$.

De igual forma, para enteros positivos p, q :

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

por lo que $g(r) = e^{-\lambda r}$ para r racional. Ahora queremos probar que para $t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = e^{-\lambda t}$. Sea $\varepsilon > 0$, y sean $s, r \in \mathbb{Q}^+$ tales que $r \leq t \leq s$ y $|e^{-\lambda r} - e^{-\lambda s}| < \varepsilon/2$. Notemos que por monotonía de g :

$$0 \leq g(s) \leq g(t) \leq g(r),$$

lo que implica que

$$0 \leq g(t) - g(s) \leq g(r) - g(s).$$

Asimismo

$$0 \leq e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s} \leq e^{-\lambda r} - e^{-\lambda s} = g(r) - g(s).$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} |g(t) - e^{-\lambda t}| &= |g(t) - e^{-\lambda s} + e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t}| \\ &\leq |g(t) - e^{-\lambda s}| + |e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t}| \\ &\leq |g(r) - e^{-\lambda s}| + |e^{-\lambda s} - e^{-\lambda r}| \\ &< 2\varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual probamos que para $t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = e^{-\lambda t}$. Para $t \leq 0$, por definición, $g(t) = 1 = e^{-\lambda t 1_{(0,+\infty)}(t)}$, por lo que $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. ■

El siguiente resultado es fundamental para los Procesos de Salto Puro:

Teorema 1.1 *Sea E un conjunto contable, y sea $(T_k)_{k \in E}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\text{Exp}(q(k))$, y $0 < q := \sum_{k \in E} q(k) < \infty$. Sea $T := \inf\{T_k : k \in E\}$. Entonces, $T = T_K$ donde K es una variable aleatoria con imagen en E , y además, T y K son independientes y $T \sim \text{Exp}(q)$, y $\mathbb{P}(K = k) = q(k)/q$.*

Demostración. Definimos a K como k si $T_k < T_j \quad \forall j \neq k$; en otro caso, K queda indefinida. De esta forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k, T > t) &= \mathbb{P}(T_k > t, T_k < T_j \quad \forall k \neq j) \\ &= \int_t^\infty q(k) e^{-q(k)s} \mathbb{P}(T_j > s \quad \forall j \neq k) ds \\ &= \int_t^\infty q(k) e^{-q(k)s} \prod_{j \neq k} e^{-q(j)s} ds \\ &= \int_t^\infty q(k) e^{-qs} ds = \frac{q(k)}{q} e^{-qt}. \end{aligned}$$

Así, la última igualdad nos dice que T y K son independientes con las distribuciones deseadas y $\mathbb{P}(K = k \text{ para alguna } k) = 1$. ■

Ahora definiremos la cadena de saltos asociada a un Proceso de Salto Puro:

Definición 1.4 (Cadena de Saltos) . Sea X un Proceso de Salto Puro. Definimos la cadena de saltos de ese proceso como la Cadena de Markov cuya matriz de transición está dada por:

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ q(i,j)/q(i) & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

donde $(q(i,j))_{i,j \in E}$ son las tasas de salto del proceso.

Cabe señalar que la definición anterior tiene su justificación en el Teorema 1.1 y a la distribución exponencial de los tiempos interarribo.

1.3. Distribuciones Estacionarias.

En esta sección nos referiremos a los Proceso de Salto Puro, o Cadenas de Markov, suponiendo que son homogéneos en el tiempo, y los primeros están definidos sobre el espacio paramétrico \mathbb{R} .

Definición 1.5 Sea $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un Proceso de Salto Puro con generador infinitesimal $Q = (q(i,j))_{i,j \in E}$, y sea $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$ un vector de probabilidades. Decimos que π es distribución estacionaria del proceso X si:

$$\pi Q = 0.$$

En el caso con las Cadenas de Markov, decimos que π es distribución estacionaria si

$$\pi P = \pi,$$

donde P es la matriz de transición de la cadena.

De lo anterior podemos obtener las siguientes ecuaciones que llamaremos ecuaciones de equilibrio global o general para los Procesos de Salto Puro y Cadenas de Markov respectivamente:

$$\pi(i) \sum_{j \in E \setminus \{i\}} q(i, j) = \sum_{j \in E \setminus \{i\}} \pi(j)q(j, i) \quad \forall i \in E, \quad (1.3)$$

$$\pi(i) = \sum_{j \in E} \pi(j)p(j, i), \quad \forall i \in E. \quad (1.4)$$

Cabe mencionar que si una Cadena de Markov o Proceso de Salto Puro X tiene distribución estacionaria π entonces esta es única.

Algunas propiedades de las distribuciones estacionarias son las siguientes:

1. Límite. Para toda $j \in E$, $\mathbb{P}(X_t = j) \rightarrow \pi(j)$, cuando $t \rightarrow \infty$.
2. Ergódico. Para toda $j \in E$, $\frac{1}{T} \int_0^T 1_{\{X_t=j\}} dt \rightarrow \pi(j)$, cuando $T \rightarrow \infty$.
3. Estacionario. Si $\mathbb{P}(X_0 = j) = \pi(j)$, para toda $j \in E$, entonces, $\mathbb{P}(X_t = j) = \pi(j)$, para toda $j \in E$, y para toda $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.6 Sea $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un Proceso de Salto Puro. Definimos el proceso invertido de X como $Y = \{Y_t = X_{-t}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Proposición 1.2 Sea $X = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un Proceso de Salto Puro estacionario con tasas de transición $(q(i, j))_{i, j \in E}$ y distribución estacionaria $(\pi(i))_{i \in E}$. Luego, el proceso invertido de X , $Y = \{Y(t) = X(-t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ tiene distribución estacionaria $(\pi(i))_{i \in E}$ y tasas de transición $(q'(i, j))_{i, j \in E}$ dadas por:

$$q'(i, j) = \frac{\pi(j)q(j, i)}{\pi(i)} \quad \forall i, j \in E.$$

Demostración. Sabemos que $(Y(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov. Así, sus tasas de transición se calculan aplicando el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y(t + \delta) = j | Y(t) = i) &= \frac{\mathbb{P}(Y(t) = i | Y(t + \delta) = j) \mathbb{P}(Y(t + \delta) = j)}{\mathbb{P}(Y(t) = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y(t) = i | Y(t + \delta) = j) \pi(j)}{\pi(i)} \\ &= \frac{(q(j, i)\delta + o(\delta)) \pi(j)}{\pi(i)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} q'(i, j) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{(q(j, i)\delta + o(\delta))\pi(j)}{\pi(i)} \\ &= \frac{\pi(j)q(j, i)}{\pi(i)}. \end{aligned}$$

Por otro lado $\mathbb{P}(Y(t) = i) = \mathbb{P}(X(-t) = i) = \pi(i) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall i \in E$, por lo que Y es estacionario y su distribución estacionaria es $(\pi(i))_{i \in E}$. ■

Definición 1.7 *Con las notaciones del teorema anterior, decimos que el proceso $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ es reversible si se cumplen las siguientes ecuaciones, llamadas ecuaciones de equilibrio local:*

$$q(i, j)\pi(i) = q(j, i)\pi(j) \tag{1.5}$$

Por la proposición anterior, pedir que se satisfagan las ecuaciones (1.5) es equivalente a pedir que las tasas del proceso X sean igual a las tasas de su proceso invertido, lo que implica que si un proceso es reversible, entonces, $X_t \sim X_{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, notemos que las ecuaciones de equilibrio local implican las ecuaciones de equilibrio global.

1.4. Proceso de Poisson.

Hablaremos ahora de un proceso importante que se utiliza cuando se quiere contar eventos que ocurren cada cierto tiempo aleatorio. Este es el proceso de Poisson.

Definición 1.8 (Proceso de Poisson) *Sea $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución exponencial de tasa λ . El proceso de Poisson de tasa λ es el proceso a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$ definido como:*

$$X_t = \max\{n \geq 1 : S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq t\},$$

donde $\max \emptyset = 0$.

Este proceso tiene distintas propiedades que lo caracterizan, por lo que podemos dar las siguientes definiciones alternativas, y aunque no se demostrará su equivalencia, se probará que este proceso cumple con la propiedad de Markov, y además es homogéneo en el tiempo.

Definición 1.9 (Notación o-pequeña.) Sean $f, g > 0$ funciones definidas para valores de t suficientemente grandes. Decimos que f es de orden más pequeño que g cuando $h \rightarrow \infty$, escrito como $f(t) = o(g(t))$ cuando $t \rightarrow \infty$, si ocurre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Definición 1.10 (Alternativa 2) Un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ es un proceso a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ y que cumple:

1. $X_0 = 0$,
2. tiene incrementos independientes y estacionarios,
3. para toda $t \geq 0$, cuando $h \searrow 0$
 - a) $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 1) = \lambda h + o(h)$,
 - b) $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h)$.

Definición 1.11 (Alternativa 3) Un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ es un proceso a tiempo continuo $X = \{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ y que cumple:

1. $X_0 = 0$,
2. tiene incrementos independientes,
3. $X_{t+s} - X_s \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, para cualesquiera $s \geq 0$, $t > 0$.

Proposición 1.3 Sea X un proceso de Poisson. Entonces X es un Proceso de Salto Puro homogéneo en el tiempo con tasas de transición $q(n, m) = \lambda$ si $m = n + 1$, y cero en otro caso.

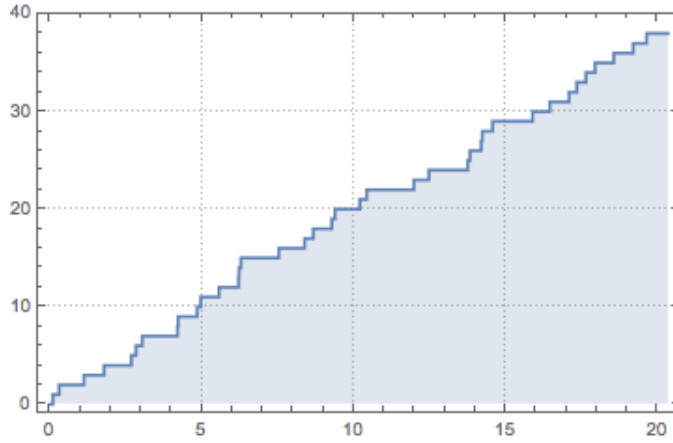


Figura 1.1: Simulación de un Proceso Poisson.

Demostración. Utilizaremos la Definición (1.11).

Notemos que por definición X tiene incrementos estacionarios, lo que implica la homogeneidad en el tiempo. Demostraremos que cumple la propiedad de Markov.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, y $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$. Utilizando la independencia de incrementos tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) \\
 = & \frac{\mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0)}{\mathbb{P}(X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0)} \\
 = & \frac{\mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = x_{n-1} - x_{n-2}, \dots, X_{t_0} = x_0)}{\mathbb{P}(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = x_{n-1} - x_{n-2}, \dots, X_{t_0} = x_0)} \\
 = & \frac{\mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}) \mathbb{P}(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_{t_0} = x_0)}{\mathbb{P}(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_{t_0} = x_0)} \\
 = & \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, para encontrar las tasas de transición, utilizamos

la distribución de los incrementos: Sean $t \geq 0$, $h > 0$ y $n \leq m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = m | X_t = n)}{h} &= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = m - n)}{h} \\ &= \frac{(\lambda h)^{m-n}}{(m-n)! h} e^{-\lambda h} \\ &= \frac{\lambda^{m-n} h^{m-n-1}}{(m-n)!} e^{-\lambda h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \mathbf{1}_{\{n+1\}}(m) \lambda. \end{aligned}$$

■

1.5. Problema Erlang.

A inicios del siglo XX, Agner Krarup Erlang trabajó para la compañía de teléfonos Copenhagen y se interesó en investigar cuantos circuitos paralelos se necesitaban en la red telefónica para proporcionar servicio.

Supongamos que las llamadas llegan a las operadoras como un proceso de Poisson de parámetro λ , que la red tiene C circuitos paralelos y mientras dura la llamada, ésta utiliza uno de dichos circuitos. Supongamos que la duración de la llamada se distribuye exponencial de parámetro μ , y entre llamadas diferentes, los tiempos de duración son independientes. Si una llamada llega y todos los circuitos C están ocupados, entonces, ésta simplemente se pierde.

Sea $X(t) = i$ el número de circuitos ocupados en la red. Por los supuestos anteriores, éste es un Proceso de Salto Puro con tasas

$$q(i, i+1) = \lambda \mathbf{1}_{\{0,1,\dots,C-1\}}(i), \quad q(i, i-1) = i\mu \mathbf{1}_{\{1,\dots,C\}}(i).$$

Resolvamos las ecuaciones de equilibrio local:

$$q(i-1, i)\pi(i-1) = q(i, i-1)\pi(i).$$

Para $i \in \{1, \dots, C\}$:

$$\begin{aligned} \pi(i) &= \pi(i-1) \frac{q(i-1, i)}{q(i, i-1)} \\ &= \pi(i-1) \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{i} \\ &\vdots \\ &= \pi(0) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}. \end{aligned}$$

Notemos, por otro lado, que $\sum_{i=0}^C \pi(i) = 1$. Así que:

$$\pi(0) = \left(\sum_{i=0}^C \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \right)^{-1},$$

por lo que

$$\pi(i) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=0}^C \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \right)^{-1}.$$

La cual es una distribución Poisson truncada con estados $\{0, 1, 2, \dots, C\}$.

La intuición detrás de esto es que, de forma estacionaria (o a largo plazo) el número de circuitos ocupados en la red es una variable aleatoria Poisson truncada con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots, C\}$.

1.6. Colas M/M/1.

En la vida cotidiana acostumbramos hacer fila para esperar nuestro turno: en el supermercado, en la comida rápida o en el banco. Existen diferentes modelos para describir el comportamiento de una cola. El siguiente es el que utilizaremos en el presente texto:

Definición 1.12 (Colas M/M/1) . C es una cola M/M/1 si los tiempos de llegada son exponenciales con parámetro λ , y los tiempos de servicio son también exponenciales con parámetro μ . Definimos además a $A := (A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ como el proceso que cuenta el número de llegadas a la cola, y a $B := (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ el proceso que cuenta el número de clientes atendidos.

El nombre $M/M/1$ es debido a la propiedad de pérdida de memoria (memoryless) de los tiempos de llegada y de salida, y a que sólo hay un servidor.

Sea $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ el proceso que cuenta el número de clientes en la cola. Notemos que éste es un Proceso de Salto Puro estacionario con tasas de transición:

$$q(i, i+1) = \lambda \mathbf{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(i), \quad q(i, i-1) = \mu \mathbf{1}_{\{1,2,3,\dots\}}(i).$$

Lo que haremos es resolver las ecuaciones de equilibrio local del proceso X :

$$\begin{aligned} \pi(i) &= \pi(i-1) \frac{q(i-1, i)}{q(i, i-1)} \\ &= \pi(i-1) \frac{\lambda}{\mu} \\ &\vdots \\ &= \pi(0) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

$$1 = \pi(0) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = \pi(0) \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

por lo que $\pi(0) = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$. Así

$$\pi(i) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

es decir, π es una distribución geométrica con parámetro $\frac{\lambda}{\mu}$.

De forma intuitiva, esto quiere decir que a largo plazo el número de clientes en un cola $M/M/1$ tiene distribución geométrica de parámetro $\frac{\lambda}{\mu}$.

Además, podemos observar que X es reversible, ya que se cumplen las ecuaciones de equilibrio local de dicho proceso.

Hemos encontrado la distribución estacionaria para una cola $M/M/1$. En el siguiente capítulo veremos un sistema de colas en paralelo no independientes entre sí -llamado sistema del supermercado-, y utilizaremos la distribución estacionaria de las colas $M/M/1$ para probar la estabilidad del sistema, es decir, que el número de clientes en el sistema permanece finito para cualquier tiempo.

Capítulo 2

Sistema del supermercado

2.1. Introducción.

En este capítulo hablaremos acerca del sistema de colas llamado sistema del supermercado. Este es un sistema de colas en paralelo, es decir, un conjunto de colas en el cual los clientes llegan y eligen formarse cualquiera de ellas siguiendo una estrategia determinada.

Supongamos que tenemos n colas. La llegada de los clientes al sistema será un proceso de Poisson con tasa λn con $0 < \lambda < 1$. La estrategia con la cual cada cliente que recién llega al sistema elegirá formarse en alguna de las colas es que cada uno de estos elegirá al azar d colas (con $d \in \{1, \dots, n\}$) y se incorporará a aquella de las d elegidas que tenga menos clientes en ese momento. Supondremos que el tiempo en que el cliente realiza esta acción es cero y que cada cola tendrá un tiempo de servicio exponencial de parámetro 1.

Este sistema lo estudiaremos en tres partes: primero estudiaremos la estabilidad (es decir, partiendo de un estado inicial adecuado, el número de clientes en el sistema permanece finito siempre) con $d = 1$ y utilizaremos este hecho para probar la estabilidad del sistema con $d \geq 2$. Después nos adentraremos a proponer un sistema de ecuaciones diferenciales, que llamaremos sistema determinista, que aproxime nuestro sistema (que llamaremos sistema aleatorio, pues así se comporta) conforme el número de colas $-n-$ crece. Por último, utilizaremos el teorema de Kurtz para medir

la aproximación del sistema determinista al sistema aleatorio, conforme el número de colas crece.

En las últimas dos partes será conveniente concentrarnos en el tiempo esperado en que un cliente pasa en el sistema, cuando ha transcurrido cierto tiempo o haya cierta estabilidad en el mismo (no necesariamente en su estado estacionario).

Utilizaremos la siguiente notación a lo largo de este capítulo:

$A = \{A(t) : t \geq 0\}$	Proceso que cuenta el número de llegadas al sistema.
$A_i = \{A_i(t) : t \geq 0\}$	Proceso que cuenta el número de llegadas a la cola i .
$m_i^d(t)$	Número de clientes en la cola i al tiempo t , donde d es el número de colas elegidas por los clientes.
$m^d(t)$	Vector de n entradas compuesto por los $m_i^d(t)$'s.
$\pi_i(t)$	Número de colas con al menos i -clientes.
$s_i^{(n)}(t)$	Fración de colas con al menos i clientes en el sistema con n colas. Es igual a $\pi_i(t)/n$.
$X_n(t)$	Vector de infinitas entradas compuesto por los $s_i^{(n)}(t)$'s.
$s_i(t)$	Función i -ésima solución del sistema determinista.
$X(t) \equiv s(t)$	Vector conformado por los $s_i(t)$'s.

Cuadro 2.1: Notación.

2.2. Estabilidad del sistema.

2.2.1. Estabilidad con $d = 1$.

Probaremos que cuando $d = 1$ el sistema del supermercado se puede ver como un sistema de n colas $M/M/1$ independientes.

Notemos que para $t > 0$, cada variable aleatoria $A(t)$ tiene distribución poisson de parámetro $n\lambda t$, es decir,

$$\mathbb{P}(A(t) = k) = \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t}.$$

Proposición 2.1 Para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $t > 0$, la distribución de $A_i(t)$ es

poisson de parámetro λt , es decir,

$$\mathbb{P}(A_i(t) = l) = \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t}.$$

Demostración. Por la fórmula de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(A_i(t) = l) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i(t) = l | A(t) = k) \mathbb{P}(A(t) = k).$$

Notemos que el número de clientes que llega a la cola i al tiempo t no puede ser mayor al número de clientes que llegan al sistema, por lo que el término derecho de la igualdad anterior se reduce a sumar desde $k = l$. Por otro lado, la probabilidad $\mathbb{P}(A_i(t) = l | A(t) = k)$, corresponde a la función de masa de una distribución binomial de parámetros $(k, \frac{1}{n})$ evaluada en l , ya que cada cliente que llega elige con probabilidad $\frac{1}{n}$ formarse en la cola i . De esta forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i(t) = l | A(t) = k) \mathbb{P}(A(t) = k) \\ &= \sum_{k=l}^{\infty} \binom{k}{l} \left(\frac{1}{n}\right)^l \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-l} \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-n\lambda t} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{k!}{(k-l)!} \frac{(n-1)^{k-l}}{n^k} \frac{n^k (\lambda t)^{k-l}}{k!} \\ &= \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-n\lambda t} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{((n-1)\lambda t)^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-n\lambda t} e^{(n-1)\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

■

De esta forma, el sistema del supermercado, con $d = 1$, se puede ver como un sistema de n colas $M/M/1$ independientes con tasa de arribo

λ y tasa de servicio 1. En el capítulo anterior vimos que la distribución estacionaria de una cola $M/M/1$ es geométrica con parámetro $(1 - \frac{\lambda}{\mu})$, donde μ es la tasa de servicio al cliente, que en nuestro caso es 1. De esta forma, si la configuración inicial es tal que el número de clientes en cada cola es finito, en equilibrio el número esperado de clientes en cada cola es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \mathbb{P}(m_1(\infty) = i) = \sum_{i=0}^{\infty} i(1 - \lambda)\lambda^i = \frac{1}{1 - \lambda} < \infty, \quad (2.1)$$

es decir, el sistema para $d = 1$ es estable; esto implica que con una configuración inicial adecuada, el número de clientes en cada cola siempre permanece finito, incluso en equilibrio.

En el caso en que $d \geq 2$, las cosas se complican. Esto es de esperarse debido a que en dicho sistema, conocer la longitud de un cola afecta la cantidad de clientes que hay en las otras colas.

2.2.2. Estabilidad del sistema con $d \geq 2$.

Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Con un estado inicial tal que el número de clientes en cada cola es finito, con $d \geq 2$ y $\lambda < 1$, el sistema del supermercado es estable; esto es, el número esperado de clientes en el sistema permanece finito para cualquier tiempo.*

Para probarlo, primero definamos algunos conceptos:

Definición 2.1 (Acoplamiento) . *Un acoplamiento de dos medidas de probabilidad \mathbb{P} y \mathbb{P}' en el mismo espacio (E, \mathcal{E}) es cualquier medida de probabilidad $\hat{\mathbb{P}}$ en el espacio producto $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ (donde $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ es la mínima σ -álgebra que contiene a $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$) cuyas marginales son \mathbb{P} y \mathbb{P}' , i.e.,*

$$\mathbb{P} = \hat{\mathbb{P}} \circ \pi^{-1}, \quad \mathbb{P}' = \hat{\mathbb{P}} \circ \pi'^{-1},$$

donde π es la proyección izquierda, y π' es la proyección derecha, definidas por:

$$\pi(x, x') = x \quad \pi'(x, x') = x', \quad (x, x') \in E \times E.$$

Esta definición, muy general, se puede aplicar a variables aleatorias, o procesos estocásticos. Lo que implica la definición es que un acoplamiento de dos procesos estocásticos es un proceso estocástico (de dos entradas) que relaciona a ambos, pero que de forma marginal este se comporta como cada uno de los originales. Esto lo utilizaremos más adelante.

Definición 2.2 (Mayorización) .

Decimos que un vector $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ mayoriza a otro vector $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, escrito como $v \succeq u$, si existen π, σ permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ tales que $v_{\pi(1)} \geq \dots \geq v_{\pi(n)}$ y $u_{\sigma(1)} \geq \dots \geq u_{\sigma(n)}$, y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{j=1}^i v_{\pi(j)} \geq \sum_{j=1}^i u_{\sigma(j)}.$$

Notemos que si un vector mayoriza a otro, entonces, la mayorización se mantiene bajo cualquier reordenamiento de dichos vectores.

Utilizaremos un argumento de mayorización para probar la estabilidad del sistema del supermercado haciendo un acoplamiento de los sistemas $m^d(t)$ y $m^1(t)$ con $d \geq 2$. Para esto, es necesario probar los siguientes lemas.

Lema 2.1 Sean u y $v \in \mathbb{Z}_+^n$, y $k_1, k_2, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}$. Definimos $k := \max\{k_i\}_{i=1}^d$. Si u y v son tales que $v_1 \geq \dots \geq v_n$, $u_1 \geq \dots \geq u_n$ y $v \succeq u$, entonces, $v + e_l \succeq u + e_k \quad \forall l \in \{k_1, \dots, k_d\}$.

Este lema está relacionado con la entrada de los clientes a los sistemas acoplados. Acoplaremos los sistemas $m^d(t)$ y $m^1(t)$ de tal manera que los clientes en ambos llegarán al mismo tiempo. La intención es probar que $m^1(t) \succeq m^d(t)$ para todo t . Cuando un cliente llega, el vector m^1 será modificado en base a que los clientes se formarán en colas elegidas al azar, y el vector m^d será modificado en base a que los clientes seguirán la estrategia del sistema del supermercado. Los números k_1, \dots, k_d representan las d colas elegidas por los clientes. Sumar uno a la entrada l -ésima del vector v representa agregar un cliente a una cola elegida al azar. Sumar uno a la entrada k -ésima del vector u representa agregar un cliente a la cola con menor número de clientes de las d elegidas.

Demostración. Definimos $S_j(x)$ como la suma de los j elementos de x más grandes, con $x \in \mathbb{Z}_+^n$. Por hipótesis $S_j(v) \geq S_j(u) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Notemos que

$$S_j(x) \leq S_j(x + e_i) \leq S_j(x) + 1, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 1 \leq i \leq n$$

Sean $j \in \{1, \dots, n\}$ y $l \in \{k_1, \dots, k_d\}$. Basta demostrar que $S_j(v + e_l) \geq S_j(u + e_k)$.

Si $S_j(v) > S_j(u)$, entonces,

$$S_j(v + e_l) \geq S_j(v) \geq S_j(u) + 1 \geq S_j(u + e_k).$$

Supongamos que $S_j(v) = S_j(u)$. Veamos los cuatro subcasos que se derivan:

Subcaso 1. $k, l \leq j$. Esto es, la sumas parciales abarcan al menos todas las entradas k'_i s de ambos vectores. Entonces,

$$S_j(v + e_l) = S_j(v) + 1 = S_j(u) + 1 = S_j(u + e_k). \quad (2.2)$$

Subcaso 2. $j < l \leq k$ y $u_j > u_k$. Tenemos que $u_j \geq u_k + 1$, lo que implica que $S_j(u + e_k) = S_j(u)$, por lo que

$$S_j(v + e_l) \geq S_j(v) = S_j(u) = S_j(u + e_k).$$

Subcaso 3. $j < l \leq k$ y $u_j = u_{j+1} = \dots = u_k$. Aquí $S_j(u + e_k) = S_j(u) + 1$. Por otro lado, notemos que debido a que $S_{j-1}(v) \geq S_{j-1}(u)$, $S_j(v) = S_j(u)$ y $S_{j+1}(v) \geq S_{j+1}(u)$, se tiene que

$$v_j \leq u_j, \quad u_{j+1} \leq v_{j+1}.$$

De esta forma:

$$v_j \geq v_{j+1} \geq u_{j+1} = u_j \geq v_j,$$

lo que implica que $v_j = u_j = v_{j+1} = u_{j+1}$. Entonces, $S_{j+1}(u) = S_{j+1}(v)$. Repitiendo el mismo argumento tenemos que

$$v_j = u_j = v_{j+1} = u_{j+1} = \dots = v_k = u_k.$$

En particular $v_j = v_l$, por lo que $S_j(v + e_l) = S_j(v) + 1$. Entonces,

$$S_j(v + e_l) = S_j(v) + 1 = S_j(u) + 1 = S_j(u + e_k).$$

Subcaso 4. $l \leq j \leq k$. Aquí, $S_j(v+e_l) = S_j(v)+1$. Si $j = k$, se sigue directamente que $S_j(u+e_k) = S_j(u)+1$, lo que implica la ecuación (2.2). Si $j < k$, los argumentos de los subcasos 2 y 3 nos sirven para ver que $S_j(u+e_k) = S_j(u) + 1$, lo cuál implica también la ecuación (2.2).

■

Lema 2.2 Sean u y $v \in \mathbb{Z}_+^n$, y $k \in \{1, \dots, n\}$. Si u y v son tales que $v_1 \geq \dots \geq v_n$ y $u_1 \geq \dots \geq u_n$, y $v \succeq u$, entonces,

1. $v \succeq u - e_k$.
2. Si $u_k = 0$ y $v_k > 0$, entonces, $v - e_k \succeq u$.
3. Si $u_k, v_k > 0$, entonces, $v - e_k \succeq u - e_k$.

Este lema está relacionado con la salida de los clientes en los sistemas acoplados. Al acoplar los sistemas $m^d(t)$ y $m^1(t)$, los clientes saldrán al mismo tiempo de ambos sistemas de la siguiente forma: cada tiempo exponencial se elegirá una cola; si en cada sistema dicha cola está vacía en ese momento, entonces, no pasa nada, de lo contrario, si en algún sistema la cola no está vacía, entonces un cliente saldrá de dicha cola. El número k es la cola elegida. Los incisos 1 y 2 son cuando en alguno de los sistemas la cola k está vacía, pero en el otro esta tiene al menos un cliente. El inciso 3 es cuando en los dos sistemas la cola k tiene al menos un cliente. En los tres incisos restar uno a la entrada k -ésima de un vector representa la salida de un cliente de la cola k .

Demostración. Definimos $S_j(x)$ como en la demostración del lema anterior. Por hipótesis $S_j(v) \geq S_j(u) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Notemos que

$$S_j(x) \geq S_j(x - e_i) \geq S_j(x) - 1, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.3)$$

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$.

1. Para la primera parte notemos que

$$S_j(v) \geq S_j(u) \geq S_j(u - e_k),$$

con lo que queda demostrado 1.

2. Para probar la segunda parte supongamos que $u_k = 0$ y que $v_k > 0$. Basta demostrar que $S_j(v - e_k) \geq S_j(u)$. Notemos que

$$S_n(v) \geq S_k(v) > S_{k-1}(v) \geq S_{k-1}(u) = S_k(u) = S_n(u), \quad (2.4)$$

lo que implica que $S_n(v) > S_n(u)$. Si $j = n$, entonces, $S_j(v) - 1 \geq S_j(u)$, por lo que

$$S_j(v - e_k) \geq S_j(v) - 1 \geq S_j(u).$$

Ahora supongamos que $j < n$. Si $S_j(v) > S_j(u)$, se sigue de (2.3) que $S_j(v - e_k) \geq S_j(v) - 1 \geq S_j(u)$. Supongamos que $S_j(v) = S_j(u)$. Veamos los subcasos que se derivan:

- a) $k > j$. De forma directa vemos que $S_j(v - e_k) = S_j(v) = S_j(u)$.
- b) $k \leq j$. Por hipótesis $u_k = 0$, lo que implica que $S_j(u) = S_k(u)$. Por (2.4) se tiene que $S_j(v) \geq S_k(v) > S_k(u) = S_j(u)$. Con esto, aunado a la ecuación (2.3), tenemos que $S_j(v - e_k) \geq S_j(v) - 1 \geq S_j(u)$.
3. Para la tercera parte supongamos que $v_k, u_k > 0$. Basta demostrar que $S_j(v - e_k) \geq S_j(u - e_k)$.

- a) Si $j = n$, se tiene que $S_j(u - e_k) = S_j(u) - 1$, por lo que

$$S_j(v - e_k) \geq S_j(v) - 1 \geq S_j(u) - 1 = S_j(u - e_k).$$

- b) Supongamos que $j < n$.

- 1) Si $S_j(v) > S_j(u)$, entonces,

$$S_j(v - e_k) \geq S_j(v) - 1 \geq S_j(u) \geq S_j(u - e_k).$$

- 2) Ahora supongamos que $S_j(v) = S_j(u)$. Veamos los subcasos que se derivan:

- i) $k > j$. Entonces,

$$S_j(v - e_k) = S_j(v) = S_j(u) = S_j(u - e_k).$$

- ii) $k \leq j$ y $u_k > u_{j+1}$. En este caso $u_k - 1 \geq u_{j+1}$, lo que implica que $S_j(u - e_k) = S_j(u) - 1$. Por lo que

$$S_j(v - e_k) \geq S_j(v) - 1 = S_j(u) - 1 = S_j(u - e_k).$$

- iii) $k \leq j$ y $u_k = u_{k+1} = \dots = u_j = u_{j+1}$. Aquí $S_j(u - e_k) = S_j(u)$. Por otro lado, notemos que debido a que $S_{j-1}(v) \geq S_{j-1}(u)$, $S_j(v) = S_j(u)$ y $S_{j+1}(v) \geq S_{j+1}(u)$, se tiene que

$$v_j \leq u_j, \quad u_{j+1} \leq v_{j+1}.$$

De esta forma:

$$v_j \geq v_{j+1} \geq u_{j+1} = u_j \geq v_j,$$

lo que implica que $v_j = u_j = v_{j+1} = u_{j+1}$. Esto implica que $S_{j-1}(u) = S_{j-1}(v)$, ya que si $S_{j-1}(u) < S_{j-1}(v)$, entonces, $S_j(u) < S_j(v)$ lo cuál es una contradicción. Repitiendo el mismo argumento tenemos que

$$v_{j+1} = u_{j+1} = v_j = u_j = v_{j-1} = u_{j-1} = \dots = v_k = u_k,$$

lo que implica que $S_j(v - e_k) = S_j(v)$. Entonces,

$$S_j(v - e_k) = S_j(v) = S_j(u) = S_j(u - e_k).$$

■

Lema 2.3 Para $d \geq 2$ y $\lambda < 1$, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, existe un acoplamiento para los sistemas m^d y m^1 tal que si inicialmente el número de clientes en cada cola es finito (es decir, $m_i^1(0), m_i^d(0) < \infty \forall i$), y $m^1(0) \succeq m^d(0)$, entonces,

$$m^1(t) \succeq m^d(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración.

Sean $(s_i)_{i=1}^{\infty} \sim \text{Exp}(n)$ y $(t_i)_{i=1}^{\infty} \sim \text{Exp}(\lambda n)$ independientes, con $s_0 = t_0 = 0$ c.s..

Definimos los procesos $(T_j := \sum_{i=0}^j t_i)_{j \in \mathbb{N}}$ y $(S_j := \sum_{i=0}^j s_i)_{j \in \mathbb{N}}$.

Definimos además, la variable aleatoria

$$b(t) := \max\{T_j, S_j < t : j \in \mathbb{N}\} \quad t > 0.$$

Sea $\Omega' := \{\omega \in \Omega : S_j \neq S_k, T_j \neq T_k, T_j \neq S_k \forall j, k \in \mathbb{N}\}$.
Notemos que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$.

Fijemos $\omega \in \Omega'$. De ahora en adelante cada variable aleatoria la consideraremos evaluada en ω .

Definimos el acoplamiento de m^1 y m^d con las siguientes reglas:

$m^1(0)$ y $m^d(0)$ serán las configuraciones iniciales de ambos sistemas, los cuáles, sin pérdida de generalidad, supondremos que están ordenados de mayor a menor, y estos cambiarán en los tiempos T_j y S_j .

1. En cada $T_j > 0, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
 - a) Elegimos $k_1, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}$ al azar.
 - b) $m^d(T_j)$ será un reordenamiento (de mayor a menor) de $m^d(b(T_j)) + e_k$, donde $k := \max\{k_i\}_{i=1}^d$ y e_k es el k -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n .
 - c) $m^1(T_j)$ será un reordenamiento (de mayor a menor) de $m^1(b(T_j)) + e_l$, donde l es elegido al azar de $\{k_1, \dots, k_d\}$.
2. En cada $S_j > 0, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
 - a) Elegimos $k \in \{1, \dots, n\}$ al azar.
 - b) Si $m_k^1(b(S_j)) = m_k^d(b(S_j)) = 0$, entonces, $m^1(S_j) := m^1(b(S_j))$ y $m^d(S_j) := m^d(b(S_j))$.
 - c) Si $m_k^1(b(S_j)) > 0$ y $m_k^d(b(S_j)) = 0$, entonces, $m^1(S_j)$ será reordenamiento (de mayor a menor) de $m^1(b(S_j)) - e_k$ y $m^d(S_j) := m^d(b(S_j))$.
 - d) Si $m_k^1(b(S_j)) = 0$ y $m_k^d(b(S_j)) > 0$, entonces, $m^1(S_j) := m^1(b(S_j))$ y $m^d(S_j)$ será reordenamiento (de mayor a menor) de $m^d(b(S_j)) - e_k$.
 - e) Si $m_k^1(b(S_j)) > 0$ y $m_k^d(b(S_j)) > 0$, entonces, $m^1(S_j)$ y $m^d(S_j)$ serán reordenamientos (de mayor a menor) de $m^1(b(S_j)) - e_k$ y $m^d(b(S_j)) - e_k$ respectivamente.

La regla 1(a) es referente a la elección al azar de cada cliente de las d colas; la regla 1(b) es equivalente a asignar a un cliente a la cola más corta de las d elegidas; la regla 1(c) es equivalente a asignar a un cliente

a una cola elegida al azar. Para las reglas 2(a)-2(e) se siguió el siguiente razonamiento: Cada cierto tiempo exponencial se elige una cola; si en cada sistema esta está vacía, entonces no pasa nada, de lo contrario, si en algún sistema la cola no está vacía, entonces un cliente saldrá de dicha cola.

Notemos que de forma marginal cada proceso m^1 y m^d son consistentes con su comportamiento original, según se describe al principio del capítulo. Esto es, en el sistema con $d = 1$ cuando llega un cliente, este es asignado a una cola elegida aleatoriamente, y en el sistema con $d \geq 2$, cuando llega un cliente, este es asignado a la cola más corta de d colas elegidas al azar. Por otro lado, el comportamiento de la dinámica de servicio de cada uno de los sistemas es también el original, por las propiedades de la misma distribución exponencial de los tiempos de servicio.

Demostraremos que $m^1(t) \succeq m^d(t) \quad \forall t \geq 0$ utilizando inducción sobre los tiempos de llegada y salida, es decir, $t = T_j$ y $t = S_j$ con $j \in \mathbb{N}$.

Primero probemos el resultado para $t = T_1$ y $t = S_1$.

Supongamos que $T_1 < S_1$. En este caso $b(T_1) = 0$. Supongamos que se eligen $k_1, k_2, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces, $m^d(T_1)$ será reordenamiento de mayor a menor de $m^d(0) + e_k$, donde $k = \max\{k_i\}_{i=1}^d$, y $m^1(T_1)$ será reordenamiento de $m^1(0) + e_l$, donde l es escogido al azar de $\{k_1, \dots, k_d\}$. Entonces, $m^d(T_1)$ y $m^1(T_1)$ están ordenados de mayor a menor. Utilizando el Lema (2.1) obtenemos que

$$m^1(T_1) \succeq m^d(T_1).$$

Ahora supongamos que $S_1 < T_1$. En este caso $b(S_1) = 0$. Supongamos que se elige $k \in \{1, \dots, n\}$. Aquí se derivan los subcasos 2(b) al 2(e), con m^1 y m^d evaluados en el tiempo $b(S_1) = 0$. Entonces, $m_{S_1}^d$ y $m_{S_1}^1$ están ordenados de mayor a menor. En el subcaso 2(b) es evidente el resultado. Para los subcasos 2(c) - 2(e) el Lema (2.2) prueba que

$$m^1(S_1) \succeq m^d(S_1).$$

La prueba del paso inductivo es exactamente la misma que para T_1 y S_1 , suponiendo el resultado para $b(T_i)$ y $b(S_i)$ respectivamente. ■

Ahora demostremos el teorema presentado al principio de esta subsección.

Demostración. [Teorema 2.1]

Por el Lema 2.3, aunado a la ecuación (2.1) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(m_i^d(t)) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(m_i^1(t)) < \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Más aún, suponiendo que los sistemas empiezan con una configuración con cargas idénticas en cada una de las colas, como la asignación de clientes es simétrica, las esperanzas de cada lado de la igualdad anterior son iguales, lo cual implica que

$$\mathbb{E}(m_i^d(t)) \leq \mathbb{E}(m_i^1(t)) < \infty \quad 1 \leq i \leq n \quad \forall t \geq 0.$$

Esto demuestra que el sistema del supermercado para $d \geq 2$ es estable. ■

2.3. Un sistema determinista.

En esta sección propondremos un sistema de ecuaciones diferenciales que aproxime al sistema del supermercado cuando el número de colas tiende a infinito. Hallaremos un punto de equilibrio para dicho sistema, estudiaremos su estabilidad, y encontraremos el “tiempo esperado” que un cliente pasa en dicho sistema, cuando ha transcurrido suficiente tiempo. Es extraño hablar del tiempo esperado en un sistema determinista, pero cabe señalar que dicho sistema representará el límite de una sucesión de sistemas aleatorios que serán Procesos de Salto Puro (debido a que los tiempos de servicio y llegada son exponenciales, lo cuál implica que el futuro del sistema no depende del pasado, sino sólo del presente).

En lo que resta de este capítulo trabajaremos con los vectores $X_n = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots)$ para el sistema aleatorio y $X = (s_1, s_2, \dots)$ para el sistema determinista; queremos que incluso en este sistema cada s_i represente

la fracción de colas con al menos i clientes. Notemos que $s_0^{(n)}(t) = 1$ siempre, y que $s_i^{(n)}$ es no creciente en i . Además, en un sistema vacío, $s_0^{(n)} = 1$ y $s_i^{(n)} = 0 \forall i \geq 1$.

Debido a que $s_i^{(n)}(t)$ es la probabilidad de elegir una cola con al menos i clientes al tiempo t , $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^{(n)}(t)$ es el número esperado de clientes en cada cola al tiempo t . Por lo que probamos en la sección 2.2, esta esperanza debe ser finita si el sistema inicia con una configuración tal que las cargas de las colas sean finitas. Además, si $s_i^{(n)}(t_0) = 0$ para algún $i > 0$ y para algún $t_0 > 0$, entonces, para toda $t \geq 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i^{(n)}(t) = 0$, esto es, si en algún momento existe $i \in \mathbb{N}$ tal que cada cola tiene carga no mayor a i , entonces, en todo tiempo va a existir un número $j \in \mathbb{N}$ tal que cada cola tiene carga no mayor a j .

Veamos un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales límite de una sucesión de Procesos de Salto Puro:

2.3.1. Problema de epidemias: un ejemplo de un sistema determinista.

Este es un ejemplo atribuido a Kurtz, donde se utiliza un modelo determinístico para analizar el comportamiento de una epidemia.

Supongamos que hay una población de N personas, donde X son susceptibles a infectarse, Y están infectados, y $N - X - Y$ son inmunes. Supongamos además que la tasa con la cual las personas susceptibles se infectan es proporcional a la cantidad de interacciones entre la gente infectada y la gente susceptible, y que la gente infectada se recupera y se vuelve inmune de forma independiente en una tasa fija.

Este problema se podría modelar con un Proceso de Salto Puro con espacio de estados $\{(X, Y) : X, Y \in \{1, \dots, N\}\}$ y tasas de salto

$$\begin{cases} q_{(X,Y),(X-1,Y+1)} = \lambda X \frac{Y}{N} = N \lambda \frac{X}{N} \frac{Y}{N} \\ q_{(X,Y),(X,Y-1)} = \mu Y = N \mu \frac{Y}{N} \end{cases}$$

donde λ y μ son constantes positivas.

Por otro lado, también podemos proponer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda xy \\ \frac{dy}{dt} = \lambda xy - \mu y \end{cases}$$

donde $x = \frac{X}{N}$ y $y = \frac{Y}{N}$.

Para ver la relación del sistema estocástico (Proceso de Salto Puro) con el determinista (de ecuaciones diferenciales) observemos lo siguiente: para h pequeña, los procesos $X = \{X_t : t \geq 0\}$ y $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$, se comportan como procesos de Poisson, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t+h} - X_t) &= (-1)\mathbb{P}(-(X_{t+h} - X_t) = 1) + o(h) \\ &= -(q_{(X_t, X_{t-1})}h + o(h)) \\ &= -\lambda X_t \frac{Y_t}{N} h + o(h) \\ &= -N\lambda \frac{X_t}{N} \frac{Y_t}{N} h + o(h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{t+h} - Y_t) &= (1)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 1) + (-1)\mathbb{P}(-(Y_{t+h} - Y_t) = 1) + o(h) \\ &= q_{(Y_t, Y_{t+1})}h - q_{(Y_t, Y_{t-1})}h + o(h) \\ &= (\lambda X_t \frac{Y_t}{N} - \mu Y_t)h + o(h) \\ &= \left(N\lambda \frac{X_t}{N} \frac{Y_t}{N} - N\mu \frac{Y_t}{N} \right) h + o(h). \end{aligned}$$

Dividiendo entre (Nh) tenemos casi el sistema determinista, por lo que este modela bien al sistema aleatorio en intervalos pequeños de tiempo.

po. Más aún, cuando N crece, esperamos que el sistema aleatorio converja al sistema determinista, pues la ley fuerte de los grandes números hace que todo se vuelva determinista. Más adelante formalizaremos este argumento.

2.3.2. Proponiendo un sistema determinista adecuado.

Modelaremos el sistema del supermercado con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales al cual llamaremos sistema determinista:

$$\begin{cases} \frac{ds_i}{dt} = \lambda(s_{i-1}^d - s_i^d) - (s_i - s_{i+1}) \\ s_0 = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

La intuición de este sistema es la siguiente: consideremos un sistema del supermercado con n colas. Entonces, el incremento de π_i en un intervalo de tiempo pequeño debe ser proporcional a la probabilidad de que llegue un cliente al sistema en dicho intervalo, esto es $n\lambda dt$, por la probabilidad de que al seleccionar las d colas, al menos una contenga exactamente $i - 1$ clientes, y las demás contengan más de $i - 1$ clientes. Se demuestra en la Sección A.1 del Apéndice que esta probabilidad es $s_{i-1}^d - s_i^d$. Por otro lado, el decremento de π_i en un intervalo de tiempo pequeño debe ser proporcional a la probabilidad de que salga una cliente del sistema, esto es ndt por la probabilidad de elegir una cola con exactamente i clientes, esto es $s_i - s_{i+1}$. Así, bajo lo mencionado anteriormente el sistema quedaría modelado por:

$$\begin{cases} \frac{d\pi_i}{dt} = n\lambda(s_{i-1}^d - s_i^d) - n(s_i - s_{i+1}) \\ \pi_0 = n, \end{cases}$$

y dividiendo entre n se obtiene el primer sistema. Esperaríamos que el comportamiento del sistema del supermercado se aproximara cada vez más al sistema de ecuaciones diferenciales mencionado, conforme $n \rightarrow \infty$. Esto es de esperarse, pues como se mencionó en el ejemplo de las epidemias, la ley fuerte de los grandes números actúa y hace todo determinista.

2.3.3. Hallando un punto de equilibrio.

Definición 2.3 (Punto de equilibrio) .

Sea $\dot{x} = X(x, t)$ con $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una ecuación diferencial. Decimos que la función constante x_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial si:

$$X(x_0, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cabe señalar que en este capítulo trabajaremos con ecuaciones diferenciales cuyas soluciones tienen su imagen en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y su dominio en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Lema 2.4 *El sistema determinista, con $d \geq 2$, tiene un único punto de equilibrio con $\sum_{i=1}^{\infty} s_i < \infty$ dado por*

$$s_i = \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}}.$$

Demostración. Para encontrar el punto de equilibrio $s = (s_1, s_2, \dots)$ supondremos que $\frac{ds_i}{dt} = 0 \forall i \geq 1$. Entonces, utilizando las ecuaciones del sistema determinista obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(s_{i-1}^d - s_i^d) - (s_i - s_{i+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(s_{i-1}^d - s_i^d) - \sum_{i=1}^{\infty} (s_i - s_{i+1}) \\ &= \lambda s_0^d - s_1 = \lambda - s_1. \end{aligned}$$

Aquí utilizamos que $\sum_{i=1}^{\infty} s_i < \infty$ para asegurar que la primera suma converge absolutamente, y así poder separar dicha suma. De aquí $s_1 = \lambda$. Demostraremos el resultado por inducción:

Para $i = 1$ es evidente el resultado. Supongamos que $s_i = \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=i+1}^{\infty} \lambda(s_{j-1}^d - s_j^d) - (s_j - s_{j+1}) = \sum_{j=i+1}^{\infty} \lambda(s_{j-1}^d - s_j^d) - \sum_{j=i+1}^{\infty} (s_j - s_{j+1}) \\ &= \lambda s_i^d - s_{i+1} = \lambda \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}} - s_{i+1} = \lambda^{\frac{d^{i+1}-1}{d-1}} - s_{i+1}, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene que $s_{i+1} = \lambda^{\frac{d^{i+1}-1}{d-1}}$. ■

Notemos que la condición $\sum_{i=1}^{\infty} s_i < \infty$ es necesaria cuando iniciamos con una configuración inicial adecuada, ya que esto significa que el sistema del supermercado, en equilibrio es estable. Cabe señalar que existen otros puntos de equilibrio del sistema (2.5) que no cumplen con esto, por ejemplo, $(1, 1, 1, \dots)$.

2.3.4. Estabilidad del punto de equilibrio.

En este apartado demostraremos que cualquier trayectoria del sistema determinista, llamémosla $s(t) = (s_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$, converge exponencialmente al punto fijo del lema anterior con una métrica apropiada. Denotaremos a $p = (p_i = \lambda^{\frac{d^i-1}{d-1}})_{i=1}^{\infty}$ y asumiremos que $d \geq 2$.

Definición 2.4 Una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge doblemente exponencial a cero si existen constantes positivas N , $\alpha < 1$, $\beta < 1$ y γ tal que para toda $i \geq N$, $x_i \leq \gamma \alpha^{\beta^i}$.

El siguiente teorema será importante más adelante, aunque por su tecnicidad se dejará sin prueba.

Teorema 2.2 Supongamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $s_j(0) = 0$, es decir, el número de clientes en las colas está acotado. Entonces, la sucesión $(s_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ decrece doblemente exponencial a cero para toda $t \geq 0$, donde las constantes asociadas son independientes de t . En particular, si el sistema inicia vacío, entonces, $s_i(t) \leq p_i \forall t \geq 0$.

Buscaremos una función positiva diferenciable que esté relacionada con la distancia de la trayectoria al punto de equilibrio, y demostraremos que es positiva, decreciente y que no sólo converge a cero, sino que lo hace de forma exponencial.

Definición 2.5 Decimos que una función $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ converge exponencialmente a cero, o simplemente converge exponencialmente, si $\Phi(0) < \infty$ y $\Phi(t) \leq c_0 e^{-\delta t}$ para alguna constante $\delta > 0$ y una constante c_0 que puede depender del estado al tiempo cero.

Notemos que una forma natural de proponer una función de distancia para nuestro sistema es tomando la distancia en L_1 de la trayectoria a nuestro punto fijo, es decir:

$$D(t) := \sum_{i=1}^{\infty} |s_i - p_i|.$$

Sin embargo, demostraremos el siguiente teorema que garantiza la convergencia exponencial en L_1 de cualquier trayectoria al punto de equilibrio, con una configuración inicial adecuada:

Teorema 2.3 *Sea $\Phi(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i |s_i - p_i|$, donde $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente donde $\omega_1 = 1$, y los demás términos serán determinados. Si $\Phi(0) < \infty$, entonces, Φ converge exponencialmente a cero. En particular, si existe j tal que $s_j(0) = 0$, entonces, Φ converge exponencialmente a cero.*

Demostración. Definimos $\varepsilon_i(t) := s_i(t) - p_i$.

Es suficiente mostrar que para alguna $\delta > 0$, se cumple que $\frac{d\Phi}{dt} \leq -\delta\Phi$. Sin embargo, podemos observar que la derivada de Φ no está definida en $t > 0$ cuando para alguna $i \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_i(t) = 0$. Más adelante trataremos con este problema. Por lo pronto nos restringiremos a suponer que $\forall i \in \mathbb{N}$ y $\forall t > 0$ $\varepsilon_i(t) \neq 0$.

Por simplicidad, omitiremos la dependencia de t de las funciones, y asumiremos $d = 2$. En el caso $d > 2$, la demostración es una adaptación de la presente.

Fijemos $i \in \mathbb{N}$.

Como $\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{ds_i}{dt}$, utilizando el las ecuaciones del sistema (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= \lambda(s_{i-1}^2 - s_i^2) - (s_i - s_{i+1}) \\ &= \lambda(\varepsilon_{i-1}^2 + p_{i-1}^2 + 2\varepsilon_{i-1}p_{i-1} - \varepsilon_i^2 - p_i^2 - 2\varepsilon_i p_i) - (\varepsilon_i + p_i - \varepsilon_{i+1} - p_{i+1}) \\ &= \lambda(2\varepsilon_{i-1}p_{i-1} + \varepsilon_{i-1}^2 - 2\varepsilon_i p_i - \varepsilon_i^2) + p_i - p_{i+1} - (\varepsilon_i + p_i - \varepsilon_{i+1} - p_{i+1}) \\ &= \lambda(2\varepsilon_{i-1}p_{i-1} + \varepsilon_{i-1}^2 - 2\varepsilon_i p_i - \varepsilon_i^2) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}). \end{aligned}$$

La tercera igualdad se debe a que $\lambda p_j^2 = p_{j+1}$ para toda j , debido a que p es el punto de equilibrio.

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\omega_i |\varepsilon_i|}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\varepsilon_i > 0} \frac{d\omega_i \varepsilon_i}{dt} - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\varepsilon_i < 0} \frac{d\omega_i \varepsilon_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\varepsilon_i > 0} \omega_i [\lambda(2\varepsilon_{i-1} p_{i-1} + \varepsilon_{i-1}^2 - 2\varepsilon_i p_i - \varepsilon_i^2) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})] - \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\varepsilon_i < 0} \omega_i [\lambda(2\varepsilon_{i-1} p_{i-1} + \varepsilon_{i-1}^2 - 2\varepsilon_i p_i - \varepsilon_i^2) - (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})]. \end{aligned}$$

Notemos que los términos que involucran a ε_1 son:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{1}_{\varepsilon_0 > 0} - \mathbf{1}_{\varepsilon_0 < 0}) \omega_0 \varepsilon_1 + (\mathbf{1}_{\varepsilon_1 > 0} - \mathbf{1}_{\varepsilon_1 < 0}) \omega_1 (-2\lambda \varepsilon_1 p_1 - \lambda \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1) \\ &\quad + (\mathbf{1}_{\varepsilon_2 > 0} - \mathbf{1}_{\varepsilon_2 < 0}) \omega_2 (2\lambda \varepsilon_1 p_1 + \lambda \varepsilon_1^2), \end{aligned}$$

por lo que podemos definir $\omega_0 = 0$, con lo cual no afectamos el valor de la función Φ . Por la ecuación anterior, tenemos que el término que involucra a ε_i en $\frac{d\Phi}{dt}$ es:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{1}_{\varepsilon_{i-1} > 0} - \mathbf{1}_{\varepsilon_{i-1} < 0}) \omega_{i-1} \varepsilon_i + (\mathbf{1}_{\varepsilon_i > 0} - \mathbf{1}_{\varepsilon_i < 0}) \omega_i (-2\lambda \varepsilon_i p_i - \lambda \varepsilon_i^2 - \varepsilon_i) \\ &\quad + (\mathbf{1}_{\varepsilon_{i+1} > 0} - \mathbf{1}_{\varepsilon_{i+1} < 0}) \omega_{i+1} (2\lambda \varepsilon_i p_i + \lambda \varepsilon_i^2), \end{aligned} \quad (1)$$

del cual podemos seleccionar las constantes $\omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1}$ tales que (1) sea a lo más $-\delta \omega_i |\varepsilon_i|$, para alguna constante $\delta > 0$. Es suficiente elegir las tales que:

$$(\omega_{i-1} - \omega_i) + (2\lambda \varepsilon_i p_i + \lambda \varepsilon_i^2)(\omega_{i+1} - \omega_i) \leq -\delta \omega_i. \quad (2)$$

En efecto: multiplicando (2) por $|\varepsilon_i|$,

$$\omega_{i-1} |\varepsilon_i| - \omega_i (2\lambda |\varepsilon_i| p_i + \lambda \varepsilon_i^2 + |\varepsilon_i|) + \omega_{i+1} (2\lambda |\varepsilon_i| p_i + \lambda \varepsilon_i^2) \leq -\delta \omega_i |\varepsilon_i|,$$

y el término de la izquierda es mayor o igual a (1).

Por otro lado, debido a que $\Phi(0) < \infty$ aunado a que $p_i < 1$, $s_0 = 1$ y la sucesión $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es no creciente en i , tenemos que $|\varepsilon_i| \leq 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Así, (2) es implicada por la siguiente desigualdad:

$$\omega_{i+1} \leq \omega_i + \frac{\omega_i(1-\delta) - \omega_{i-1}}{\lambda(2p_i + 1)}. \quad (3)$$

Ahora, de manera inductiva propondremos una sucesión ω_i creciente que satisfaga (3) (con $\omega_0 = 0$ y $\omega_1 = 1$):

Sea $i^* := \max\{i : \lambda(2p_i + 1) \geq \frac{1+\lambda}{2}\}$. Para $i \leq i^*$, definimos $\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{\omega_i(1-\delta) - \omega_{i-1}}{3}$. Entonces, para $\delta < 1 - \frac{\omega_{i^*}}{\omega_{i^*+1}}$, esta subsucesión es creciente.

Para $i \geq i^* + 1$, es decir, para i tal que $\lambda(2p_i + 1) < \frac{1+\lambda}{2} < 1$, definimos $\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{2\omega_i(1-\delta) - 2\omega_{i-1}}{1+\lambda}$. Esta subsucesión es creciente para δ suficientemente pequeña.

Por otro lado, $\omega_i \leq \omega_1((1+\lambda)/2)^{i-1}$, así que la condición $s_j(0) = 0$ para alguna j , es suficiente para garantizar que $\Phi(0) < \infty$, pues la serie generada por la sucesión $(\omega_i p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Comparando los términos que involucran a ε_i en Φ y $d\Phi/dt$, obtenemos que $d\Phi/dt \leq -\delta\Phi$. Así que $\Phi(t) \leq \Phi(0)e^{-\delta t}$, por lo que Φ converge exponencialmente.

Ahora cuando $\varepsilon_i(t) = 0$ para alguna $i \in \mathbb{N}$ y $t > 0$, tomamos la derivada direccional por la derecha de $|\varepsilon_i|$. La misma prueba se mantiene, sólo considerando que (1) es siempre menor o igual a $-\delta\omega_i|\varepsilon_i(t)|$. ■

Corolario 2.1 *Con las condiciones del teorema anterior, la función $D(t) = \sum_{i=1}^{\infty} |s_i(t) - p_i|$ converge exponencialmente a cero.*

Demostración. Como la función $\Phi(t) > D(t)$ debido a que la sucesión $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente, se obtiene el resultado. ■

Así, hemos demostrado que cualquier trayectoria $(s_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ solución del sistema determinista converge exponencialmente, con la métrica en L_1 , al punto de equilibrio π .

2.3.5. Tiempo esperado en el sistema determinista.

Teorema 2.4 *Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $s_j(0) = 0$, es decir, el número de clientes en las colas está acotado, el tiempo esperado que un cliente gasta en el sistema determinista del supermercado, para $d \geq 2$ converge a*

$$T_d(\lambda) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i-d}{d-1}},$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Más aún, este número es una cota superior al tiempo esperado en el sistema determinista para toda t , cuando el sistema es inicialmente vacío.

Demostración. Como se demuestra en la Sección A.1 del apéndice, si en el tiempo t llega un cliente, la probabilidad de que este se una a una cola con carga exacta $i-1$ es $s_{i-1}^d(t) - s_i^d$. Así, el tiempo esperado que gasta un cliente que llegó en el tiempo t al sistema es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i(s_{i-1}^d(t) - s_i(t)^d) &= s_0^d(t) - s_1^d(t) + 2(s_1^d(t) - s_2^d(t)) + \\ &\quad 3(s_2^d(t) - s_3^d(t)) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} s_i(t)^d, \end{aligned}$$

ya que el tiempo esperado de salida de un cliente que ocupa el lugar i -ésimo en una cola es i . Aquí se utiliza que la sucesión $(s_i(t))_{i=1}^{\infty}$ converge doblemente exponencial a cero, para toda $t \geq 0$, para asegurar que $\sum_{i=0}^{\infty} s_i(t)^d < \infty$, y así poder reordenar la suma. Cuando $t \rightarrow \infty$, por el Corolario 2.1, cualquier trayectoria del sistema converge de forma exponencial al punto de equilibrio p con la norma en L_1 . Por esto, para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que para toda $t \geq t_0$, $|s_i^d(t) - p_i^d| < \varepsilon/2^i$. Esto implica que el tiempo esperado que un cliente gasta en este sistema, cuando $t \rightarrow \infty$, es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i^d = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i-d}{d-1}}.$$

Además, utilizando el Teorema 2.2, si el sistema es inicialmente vacío, entonces, $s_i(t) \leq p_i$ para toda $t \geq 0$, por lo que $T_d(\lambda)$ es una cota superior. ■

Podemos observar que el tiempo esperado que un cliente pasa en el sistema del supermercado, para $d = 1$ está dado por

$$T_1(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(m_1(\infty) = i) = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\lambda)\lambda^i = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Teorema 2.5 Para $\lambda \in [0, 1)$ y $d \geq 2$, $T_d(\lambda) \leq c_d(\log T_1(\lambda))$ para c_d constante que depende sólo de d . Además,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \frac{T_d(\lambda)}{\log T_1(\lambda)} = \frac{1}{\log d}.$$

Este teorema nos dice que elegir $d \geq 2$ en el sistema del supermercado nos garantiza una mejora de orden exponencial en el tiempo esperado que los clientes pasan en él. Por otra parte, cuando $\lambda \rightarrow 1^-$, entonces, la elección de d sólo interviene en el tiempo de espera en orden de $\log d$.

Demostración. Probaremos la segunda afirmación del teorema. Sea $\lambda' = \lambda^{1/(d-1)}$. Entonces,

$$T_d(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i - d}{d-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda'^{d^i}}{\lambda^{d/(d-1)}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \frac{T_d(\lambda)}{\log T_1(\lambda)} &= \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda'^{d^i}}{-\log(1-\lambda)\lambda^{d/(d-1)}} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda'^{d^i}}{-\log(1-\lambda')} \frac{\log(1-\lambda')}{\log(1-\lambda)} \frac{1}{\lambda^{d/(d-1)}} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda'^{d^i}}{-\log(1-\lambda')}. \end{aligned}$$

Con el siguiente lema se sigue el resultado. ■

Lema 2.5 Para $\lambda \in (0, 1)$ definimos

$$F_d(\lambda) := \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{d^i}}{-\log(1-\lambda)}.$$

Entonces, $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} F_d(\lambda) = 1/\log d$.

Demostración. Mostraremos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda > 1 - \delta$,

$$\frac{1}{\log(d) + \varepsilon} \leq F_d(\lambda) \leq \frac{1}{\log(d) - \varepsilon}.$$

Probaremos la desigualdad de la izquierda. La otra desigualdad se prueba de forma semejante. Usaremos la siguiente identidad:

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 + \lambda^{d^i} + \lambda^{2d^i} + \dots + \lambda^{(d-1)d^i}) = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

De esta identidad se sigue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \log(1 + \lambda^{d^i} + \lambda^{2d^i} + \dots + \lambda^{(d-1)d^i}) = \log \frac{1}{1 - \lambda}. \quad (2.6)$$

Sean $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' = \varepsilon/2$, y

$$z := \sup[\{0\} \cup \{0 < x < 1 : f(x) > \log(d) + \varepsilon'\}],$$

$$\text{donde } f(x) := \frac{\log(1 + x + x^2 + \dots + x^{d-1})}{x}.$$

Notemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, y $f(1) = \log(d)$. Si existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) > \log(d) + \varepsilon'$, entonces, claramente $z < 1$; si $f(x) < \log(d) + \varepsilon'$ $\forall x \in (0, 1)$, entonces, $z = 0$. Fijemos λ . Afirmamos que existe una constante $c_{z,d}$ que depende de z y de d , e independiente de λ tal que

$$\sum_{i:\lambda^{d^i} \leq z} \log(1 + \lambda^{d^i} + \lambda^{2d^i} + \dots + \lambda^{(d-1)d^i}) \leq c_{z,d} + (\log(d) + \varepsilon') \sum_{i:\lambda^{d^i} \leq z} \lambda^{d^i},$$

esto debido a que si λ se acerca a 1 habrá menos términos en la suma de la izquierda, por lo cual no importa cuál sea λ , esta suma siempre estará acotada. Entonces, utilizando la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{i:\lambda^{d^i} \leq z} \log(1 + \lambda^{d^i} + \lambda^{2d^i} + \dots + \lambda^{(d-1)d^i}) + \sum_{i:\lambda^{d^i} > z} \log(1 + \lambda^{d^i} + \lambda^{2d^i} + \dots + \lambda^{(d-1)d^i}) &\leq \\ c_{z,d} + (\log(d) + \varepsilon') \sum_{i:\lambda^{d^i} \leq z} \lambda^{d^i} + (\log(d) + \varepsilon') \sum_{i:\lambda^{d^i} > z} \lambda^{d^i}. \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdad con la ecuación (2.6):

$$(\log(d) + \varepsilon') \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{d^i} \geq \log \frac{1}{1-\lambda},$$

o

$$F_d(\lambda) + \frac{c_{z,d}}{(\log(d) + \varepsilon')(\log \frac{1}{1-\lambda})} \geq \frac{1}{(\log(d) + \varepsilon')}.$$

Ahora, escogiendo $\delta > 0$ suficientemente pequeña tal que $\lambda > 1 - \delta$

y

$$\frac{1}{(\log(d) + \varepsilon')} - \frac{c_{z,d}}{(\log(d) + \varepsilon')(\log \frac{1}{1-\lambda})} \geq \frac{1}{(\log(d) + \varepsilon)},$$

obtenemos el resultado. ■

2.4. Teorema de Kurtz.

En esta subsección explicaremos conceptos básicos involucrados en el Teorema de Kurtz, y daremos su demostración. Este lo utilizaremos para demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Para cualquier $T > 0$ fijo y $d \geq 2$, el tiempo esperado que un cliente gasta en el sistema del supermercado, donde éste es inicialmente vacío durante el intervalo $[0, T]$, está acotado por*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i - d}{d-1}} + o(1),$$

donde $o(1)$ se entiende cuando $n \rightarrow \infty$ y puede depender de T .

Como hemos visto, el sistema del supermercado lo representamos como un proceso estocástico donde el espacio de estados es $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Además, hemos señalado que este proceso cumple la propiedad de Markov, y depende de una constante n que indica el número de colas en el sistema. Veremos algunos conceptos de familias de Procesos de Salto Puro dependientes de la densidad. Generalmente esta teoría se desarrolla con espacio de estados finito-dimensionales, pero nosotros lo extenderemos a espacio de estados con dimensión infinita.

Aquí $*$ representará a N o \mathbb{N} , donde $N \in \mathbb{N}$. Una familia de Procesos de Salto Puro dependiente de la densidad es una sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada X_n es un Proceso de Salto Puro definido sobre un espacio de estados $E_n := E \cap \{s = \frac{1}{n}k : k \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$, donde $E \subset \mathbb{R}^*$. Asumiremos que existen funciones no negativas $f_l(x)$, $l \in L \subset \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$. Las tasas de transición de x a y de cada proceso X_n están definidas como $q_{x,y}^{(n)} := n f_{n(y-x)}(x)$. Por otro lado, es conocido que $X_n(t)$ puede ser visto como la solución a la ecuación estocástica

$$X_n(t) = X_n(0) + \sum_{l \in L} \frac{1}{n} l Y_l \left(n \int_0^t f_l(X_n(s)) ds \right), \quad (2.7)$$

donde Y_l son procesos de Poisson independientes con $\mathbb{E}(Y_l(u)) = u$ y $X_n(0)$ es independiente de Y_l .

Definimos

$$F(x) := \sum_{l \in L} l f_l(x).$$

Consideremos un sistema del supermercado con n colas y $d \geq 2$. El espacio de estados de dicho sistema es $E_n = [0, 1]^{\mathbb{N}} \cap \{s^{(n)} = \frac{1}{n}m : m \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$, donde $s^{(n)}$ es el vector compuesto por los $s_i^{(n)}$'s que representan la fracción de colas que contienen a lo más i clientes, y la entrada i -ésima de m representa el número de colas con al menos i clientes. Observemos que en este caso $L = \{\pm e_i : i \in \mathbb{N}\}$, donde e_i representa al vector canónico de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; la tasa de transición del estado $s^{(n)}$ a $s^{(n)} + \frac{1}{n}e_i$, es $n f_{e_i}(k/n) = n \lambda (s_{i-1}^{(n)d} - s_i^{(n)d})$, y la tasa de transición del estado $s^{(n)}$ a $s^{(n)} - \frac{1}{n}e_i$ es $n f_{-e_i}(k/n) = n (s_i^{(n)} - s_{i+1}^{(n)})$.

La intuición detrás de las tasas de transición es la siguiente: el sistema del supermercado X_n cambia de estado con una tasa dependiente del estado actual del proceso. Este puede saltar de un estado $s^{(n)}$ a $s^{(n)} + \frac{1}{n}e_i$ (es decir, que en dicho intervalo llegue un cliente al sistema y este se coloque en una cola, de las d elegidas, con exactamente $i - 1$ clientes); la tasa de salto de define como

$$q_{s^{(n)}, s^{(n)} + \frac{1}{n}e_i}^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_n(t+h) = s^{(n)} + \frac{1}{n}e_i | X_n(t) = s^{(n)})}{h},$$

y la probabilidad del numerador es $hn \lambda (s_{i-1}^{(n)d} - s_i^{(n)d})$ (que se justifica en la Subsección 2.3.2), por lo que la tasa de salto de $s^{(n)}$ a $s^{(n)} + \frac{1}{n}e_i$ es

$n\lambda(s_{i-1}^{(n)d} - s_i^{(n)d})$. Por otro lado, el proceso puede saltar de $s^{(n)}$ a $s^{(n)} - \frac{1}{n}e_i$ (es decir, que salga un cliente del sistema de una cola con exactamente i clientes), y la probabilidad de que dicho evento ocurra en un intervalo de tiempo $(t, t+h]$ es $hn(s_i^{(n)} - s_{i+1}^{(n)})$, por lo que la tasa de salto de $s^{(n)}$ a $s^{(n)} - \frac{1}{n}e_i$ es $n(s_i^{(n)} - s_{i+1}^{(n)})$.

Notemos que $F(s) = (\lambda(s_{i-1}^d - s_i^d) - (s_i - s_{i+1}))_{i=1}^\infty$.

Considerando la ecuación (2.7) podemos obtener que

$$X_n(t) = X_n(0) + \sum_{l \in L} \frac{1}{n} l \hat{Y}_l \left(n \int_0^t f_l(X_n(s)) ds \right) + \int_0^t F(X_n(u)) du, \quad (2.8)$$

donde $\hat{Y}_l(x) := Y_l(x) - x$ son procesos de Poisson independientes centrados en su media.

Esperamos que los procesos X_n tiendan a satisfacer el siguiente sistema determinista conforme $n \rightarrow \infty$:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(X(u)) du, \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

donde $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(0)$; esto porque el valor de \hat{Y}_l tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ debido a la ley fuerte de los grandes números. Observemos que la ecuación (2.9) representa al mismo sistema 2.5, tomando $x_0 = X_n(0) = (1, 0, 0, \dots)$ en el caso cuando el sistema empieza vacío.

Ahora presentaremos el teorema de Kurtz:

Teorema 2.6 (T.G. Kurtz) . *Supongamos que tenemos una familia de Procesos de Salto Puro dependientes de la densidad, tal que $F(x)$ satisface la condición de Lipchitz, es decir, $\|F(x) - F(y)\|_{L_1} \leq M\|x - y\|_{L_1}$, para alguna constante $M > 0$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(0) = x_0$.*

Definimos el proceso determinista X como aquel que satisface

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(X(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Consideremos la trayectoria $\{X(u) : u \leq t\}$ para $t \geq 0$ fija, y supongamos que existe una vecindad de esta trayectoria K tal que

$$\sum_{l \in L} \|l\|_{L_1} \sup_{x \in K} f_l(x) < \infty, \quad (2.10)$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \leq t} \|X_n(u) - X(u)\|_{L_1} = 0 \text{ c.s.}$$

Demostración. Sea $u \leq t$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|X_n(u) - X(u)\|_{L_1} &= \left\| X_n(0) + \sum_{l \in L} \frac{1}{n} l \hat{Y}_l \left(n \int_0^u f_l(X_n(s)) ds \right) + \right. \\ &\quad \left. \int_0^u F(X_n(s)) ds - x_0 - \int_0^u F(X(s)) ds \right\|_{L_1} \\ &\leq \|X_n(0) - x_0\|_{L_1} + \left\| \sum_{l \in L} \frac{1}{n} l \hat{Y}_l \left(n \int_0^u f_l(X_n(s)) ds \right) \right\|_{L_1} + \\ &\quad \left\| \int_0^u F(X_n(s)) ds - \int_0^u F(X(s)) ds \right\|_{L_1} \\ &\leq \|X_n(0) - x_0\|_{L_1} + \left\| \sum_{l \in L} \frac{1}{n} l \hat{Y}_l \left(n \int_0^u f_l(X_n(s)) ds \right) \right\|_{L_1} + \\ &\quad M \int_0^u \|X_n(s) - X(s)\|_{L_1} ds. \end{aligned} \quad (1)$$

Definimos

$$L_n(t) := \sup_{u \leq t} \left\| \sum_{l \in L} \frac{1}{n} l \hat{Y}_l \left(n \int_0^u f_l(X_n(s)) ds \right) \right\|_{L_1},$$

y

$$\bar{f}_l := \sup_{x \in K} f_l(x).$$

Así,

$$\begin{aligned} L_n(t) &\leq \sum_{l \in L} \frac{1}{n} \|l\|_{L_1} \sup_{u \leq t} |\hat{Y}_l \left(n \int_0^u f_l(X_n(s)) ds \right)| \\ &\leq \sum_{l \in L} \frac{1}{n} \|l\|_{L_1} \sup_{u \leq t} |\hat{Y}_l(nu\bar{f})| \end{aligned} \quad (2)$$

$$\leq \sum_{l \in L} \frac{1}{n} \|l\|_{L_1} (Y_l(nt\bar{f}) + nt\bar{f}). \quad (3)$$

La primera desigualdad se mantiene término a término con la suma de la ecuación (2.8). Aplicando la ley fuerte de los grandes números

al proceso Y_l obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \in L} \frac{1}{n} \|l\|_{L_1} (Y_l(nt\bar{f}) + nt\bar{f}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \in L} (\|l\|_{L_1} \frac{Y_l(nt\bar{f})}{nt\bar{f}} t\bar{f} + \|l\|_{L_1} t\bar{f}) \\ &= \sum_{l \in L} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|l\|_{L_1} \frac{Y_l(nt\bar{f})}{nt\bar{f}} t\bar{f} + \|l\|_{L_1} t\bar{f}) \\ &= \sum_{l \in L} 2\|l\|_{L_1} t\bar{f}; \end{aligned}$$

puesto que hemos supuesto que $\sum_{l \in L} \|l\|_{L_1} \sup_{x \in K} f_l(x) < \infty$, no hay problema en intercambiar suma con límite en las igualdades anteriores. Por otro lado, debido a que desigualdad (3) es término a término con la suma (2), podemos también intercambiar suma con límite, obteniendo así que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(t) \leq \sum_{l \in L} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|l\|_{L_1} \sup_{u \leq t} |\hat{Y}_l(nu\bar{f})|.$$

Y el término de la derecha tiende a 0 casi seguramente.

Entonces, por la desigualdad (1), obtenemos que:

$$\|X_n(u) - X(u)\|_{L_1} \leq \|X_n(0) - x_0\|_{L_1} + L_n(t) + M \int_0^u \|X_n(s) - X(s)\|_{L_1} ds.$$

Utilizando la famosa desigualdad de Gronwall, enunciada en la Sección A.2 del Apéndice, obtenemos que

$$\|X_n(u) - X(u)\|_{L_1} \leq (\|X_n(0) - x_0\|_{L_1} + L_n(t)) e^{Mu},$$

con lo que se sigue el resultado. ■

Notemos que la condición $\|F(x) - F(y)\|_{L_1} \leq M\|x - y\|_{L_1}$ garantiza que el sistema determinista (2.5) tiene una única solución, dada una condición inicial, el cual es un resultado un poco más fuerte que el conocido para dimensiones finitas de sistemas de ecuaciones diferenciales.

2.4.1. Sistema aleatorio.

En este apartado nos encargaremos de presentar los resultados para el sistema aleatorio, es decir, el presentado al principio de esta sección.

Nos enfocaremos en encontrar una cota para la convergencia del tiempo esperado que un cliente pasa en el sistema en el supermercado echando mano de la convergencia del sistema aleatorio al determinista. Primero verifiquemos que el sistema del supermercado satisface la condición de Lipchitz:

Lema 2.6 *El sistema del supermercado satisface la condición de Lipschitz, es decir, la función $F(s) = (\lambda(s_{i-1}^d - s_i^d) - (s_i - s_{i+1}))_{i=1}^{\infty}$ satisface la condición de Lipschitz.*

Demostración. Sean $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ estados del sistema del supermercado tales que $\|x\|_{L_1}, \|y\|_{L_1} < \infty$, donde $\|x\|_{L_1} = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_{L_1} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda(x_{i-1}^d - x_i^d) - (x_i - x_{i+1}) \\ &\quad - \lambda(y_{i-1}^d - y_i^d) + (y_i - y_{i+1})| \\ &\leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i| + 2\lambda \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^d - y_i^d| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (2 + 2d\lambda) |x_i - y_i| = (2 + 2d\lambda) \|x - y\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad usamos que $\|x\|_{L_1}$ y $\|y\|_{L_1}$ son finitas, ya que esto asegura la convergencia absoluta de la primera suma. La tercera desigualdad se debe a la igualdad $|a^d - b^d| = |a - b| |a^{d-1} + a^{d-2}b + \dots + ab^{d-2} + b^{d-1}|$, y que $x_i, y_i \in [0, 1]$ para toda i . ■

Ahora, la hipótesis (2.10) del teorema de Kurtz es verificada por las hipótesis en el Teorema 2.3, el cual dice que el sistema del supermercado es estable. Esto aunado al lema anterior nos garantiza que el sistema del supermercado tenderá al sistema determinista (2.5) conforme $n \rightarrow \infty$. Ahora, lo que queremos es encontrar una cota para esta aproximación, pues nos interesa no el caso límite, sino el caso cuando n es finita. Demostremos el teorema presentado al principio de esta sección:

Teorema 2.7 *Para cualquier $T > 0$ fijo y $d \geq 2$, el tiempo esperado que un cliente gasta en el sistema del supermercado, donde éste es inicialmente*

vacío durante el intervalo $[0, T]$, está acotado por

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i-d}{d-1}} + o(1),$$

donde $o(1)$ se entiende cuando $n \rightarrow \infty$ y puede depender de T .

Demostración. Supongamos que iniciamos con un sistema del supermercado vacío, con $d \geq 2$. Por el Teorema 2.2 tenemos que $s_i(t) \leq p_i$ para toda $t \geq 0$. Sea $t \geq T$. Supongamos que una persona llega al tiempo $u \in [T, t]$ al sistema del supermercado. Entonces, el tiempo que gastará el cliente en el sistema, que se justifica en la prueba del Teorema 2.4, es:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (s_i^{(n)}(u))^d,$$

que utilizando el Teorema 2.4 satisface también las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (s_i^{(n)}(u))^d &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |(s_i^{(n)}(u))^d - s_i(u)^d| + \sum_{i=0}^{\infty} s_i(u)^d \\ &\leq d \sum_{i=0}^{\infty} |(s_i^{(n)}(u)) - s_i(u)| + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i-d}{d-1}} \\ &\leq d \sup_{u \leq t} \|X_n(u) - X(u)\|_{L_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i-d}{d-1}}, \end{aligned}$$

y el término de la izquierda es $o(1)$. ■

Por último, es importante señalar que el término $\sup_{u \leq t} \|X_n(u) - X(u)\|_{L_1}$ es $O(\log(n)/\sqrt{n})$, el cual es $o(1)$ conforme $n \rightarrow \infty$. Con esto podemos observar que la velocidad de convergencia de dicho término no es mucha, por lo que se necesitará una n algo grande (arriba de 50) para que la aproximación del tiempo promedio de espera sea aceptable.

Capítulo 3

Simulación de resultados

En este capítulo veremos la simulación de los resultados del capítulo anterior, distribuidos en tres secciones. En la primera se presentan las simulaciones del número de clientes en dos sistemas acoplados (el primero con $d = 1$ y el segundo con $d = 2$) conforme el tiempo transcurre. En la segunda sección simulamos el tiempo de espera promedio que el cliente pasa en el sistema con $d = 1$ y lo comparamos con el tiempo de espera promedio que un cliente pasa en el sistema con $d = 2$. Y en la tercera sección presentamos el comportamiento límite del tiempo de espera promedio que un cliente pasa en un sistema con $d = 2$ conforme el número de colas $-n-$ crece.

3.1. Acoplamiento de los sistemas $d = 1$ y $d \geq 2$.

Se simularon varios escenarios en los sistemas a un tiempo límite de 200 unidades, donde calculamos el número de clientes en los sistemas acoplados. En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 vemos las gráficas del número de clientes que están en los sistemas acoplados (el primero con $d = 1$ y el segundo con $d = 2$), conforme el tiempo transcurre.

Podemos observar que el número de clientes en los sistemas cambia drásticamente cuando cambiamos $d = 1$ por $d = 2$. Se ve de forma evidente que el número de clientes en el sistema con $d = 1$ acota el número de clientes en el sistema con $d \geq 2$.

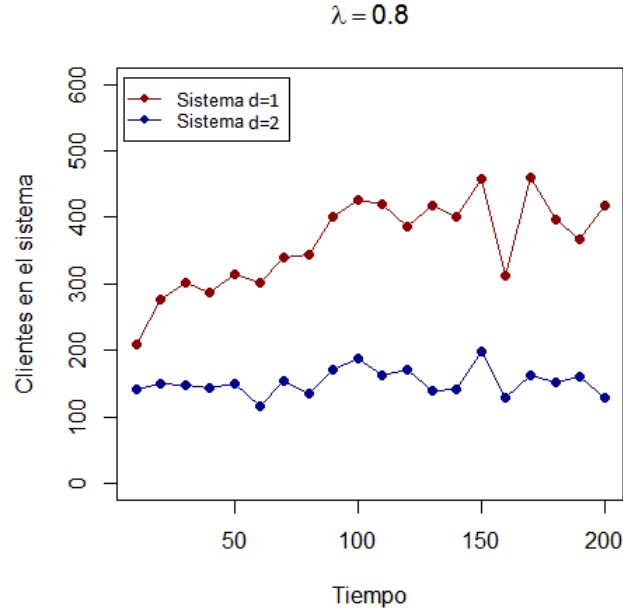


Figura 3.1: Número de clientes en los sistemas acoplados con $n = 100$ y $\lambda = 0.8$.

3.2. Comparación del tiempo de espera con respecto a la elección de d .

Se simuló un escenario de un sistema del supermercado con $d = 2$, y otro escenario con $d = 1$, y se comparó el tiempo de espera promedio de un cliente en un estado estacionario, es decir, simulamos los sistemas en un tiempo de calentamiento t y luego se calculó el número

$$\sum_{i=0}^{\infty} (s_i^{(n)}(t))^d,$$

al cual llamamos tiempo de espera promedio del sistema estacionario.

El primero fue un escenario con $d = 2$, $\lambda = 0.9$, tiempo de calentamiento $t = 10000$ y 50 colas, donde se encontró que el tiempo de espera de cada cliente es en promedio 2.2512 unidades. En el segundo escenario se utilizaron $d = 1$, y los demás parámetros iguales, y encontramos que el tiem-

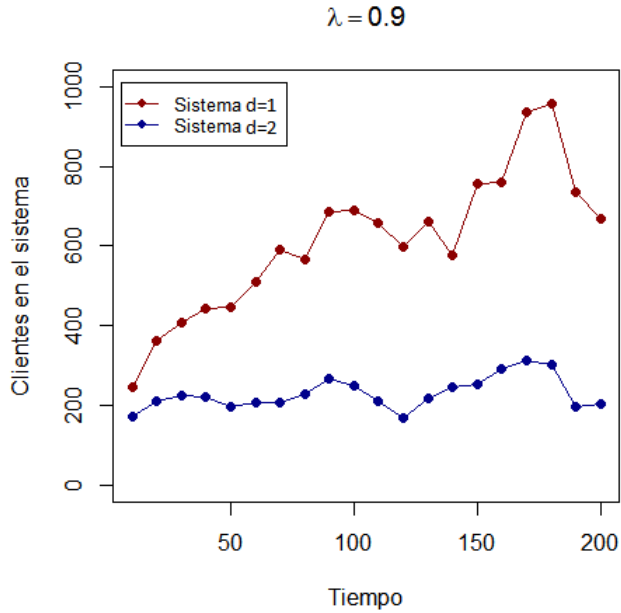


Figura 3.2: Número de clientes en los sistemas acoplados con $n = 100$ y $\lambda = 0.9$.

po de espera de cada cliente es en promedio 12.36 unidades. Estos datos nos muestran que el tiempo de espera de los clientes cambia significativamente cuando se utiliza una dinámica de cargas con $d \geq 2$.

3.3. Tiempo de espera con respecto a n .

Se simularon varios escenarios donde observamos el tiempo de espera que un cliente pasa en el sistema del supermercado cuando el tiempo que ha estado funcionando el sistema es grande, conforme n crece, para $\lambda = 0.8, 0.9, 0.99$, y lo comparamos con el tiempo esperado en el sistema determinista en equilibrio que está dado por $T_d(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\frac{d^i-d}{d-1}}$. Fijamos un tiempo $t = 1000$, y $d = 2$.

Para hacer esta simulación primero dejamos correr el sistema

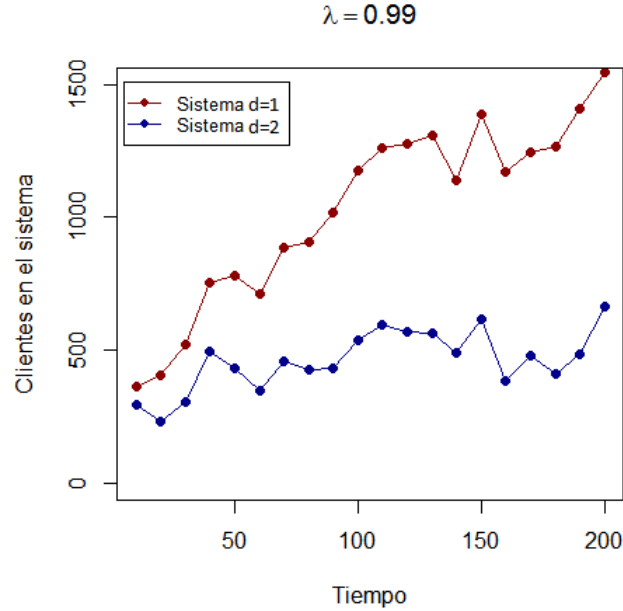


Figura 3.3: Número de clientes en los sistemas acoplados con $n = 100$ y $\lambda = 0.99$.

hasta que el tiempo sea grande ($t = 1000$) y luego calculamos el número:

$$esp := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} (s_i^{(n)}(1000))^d.$$

En el Cuadro 3.1 se tabulan el error absoluto (calculado como $|T_d(\lambda) - esp|$) y el error relativo (calculado como $|T_d(\lambda) - esp|/T_d(\lambda)$) de la aproximación del tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema del supermercado al tiempo promedio calculado con el sistema determinista.

La Figura 3.4 es la gráfica del tiempo de espera promedio de los sistemas del supermercado cuando ya ha transcurrido mucho tiempo desde el inicio. Cada pico es una simulación del tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema cuando ya transcurrieron 1000 unidades de tiempo y $d = 2$. Vemos en esta figura que conforme el número de colas en los sistemas crece, el tiempo promedio de espera va convergiendo al tiempo de espera calculado con el sistema determinista. Además, podemos observar también

que cuando λ es más próxima a 1, entonces, el tiempo promedio de espera es más inestable.

Por último cabe señalar que cuando n es pequeña realmente no hemos obtenido resultados, sino sólo la dominación del sistema con $d = 1$ sobre el sistema $d \geq 2$ con ayuda del acoplamiento. Como vimos en el último párrafo del capítulo anterior, el orden de convergencia de las sucesión X_n es $O(\log(n)/\sqrt{n})$. Realmente se necesita una n cada vez más grande conforme $\lambda \rightarrow 1^-$ (la cual es una cuestión técnica relacionada con la convergencia del término $L_n(t)$ en el contexto del teorema de Kurtz que no se trató). Esto se muestra más claramente en la gráfica anterior. De manera intuitiva esto se debe a que conforme la capacidad del sistema crece, entonces, hay menos estabilidad en el mismo.

n	$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.9$		$\lambda = 0.99$	
	Error abs.	Error rel. %	Error abs.	Error rel. %	Error abs.	Error rel. %
10	0.1226	6.2975	1.8859	72.1461	14.6580	269.8455
50	0.2094	10.7548	0.4879	18.6661	2.6352	48.5126
100	0.3366	17.2881	0.1232	4.7146	0.0594	1.0952
150	0.0681	3.5002	0.1856	7.1029	2.0243	37.2664
200	0.0099	0.5129	0.1121	4.2886	1.4450	26.6026
250	0.0463	2.3779	0.00005	0.0020	0.0988	1.8200
300	0.0465	2.3882	0.1965	7.5188	0.6618	12.1836
350	0.0077	0.3994	0.1290	4.9375	0.1490	2.7431
400	0.1768	9.0831	0.2366	9.0546	0.8046	14.8122
450	0.0887	4.5562	0.0050	0.1948	0.6134	11.2933
500	0.0414	2.1259	0.3057	11.6950	0.2334	4.2985

Cuadro 3.1: Error relativo y absoluto para el tiempo de espera promedio con respecto al tiempo de espera predicho.

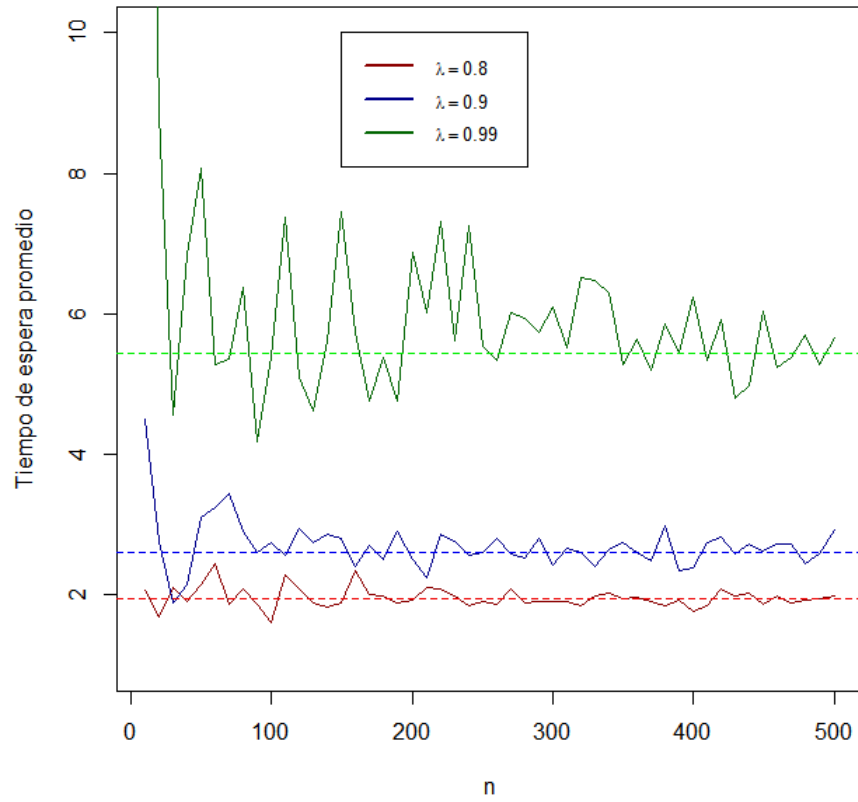


Figura 3.4: Convergencia del tiempo de espera promedio del sistema aleatorio cuando n crece. Las líneas punteadas representan el tiempo promedio del sistema determinista ($T_\lambda(d)$).

Conclusión

En esta tesis se mostró que una buena estrategia de cargas para un sistema de colas en paralelo es valiosa en su rendimiento. En particular hemos visto que cambiar $d = 1$ por $d \geq 2$ hace una diferencia importante; de hecho, cuando el número de colas es grande, el cambio de 1 a mayor que 1 en d hace una diferencia de orden exponencial en el tiempo de espera promedio. Además, en cuanto al acoplamiento que se hizo con los sistemas con $d = 1$ y $d \geq 2$, se pudo notar en las simulaciones que la diferencia del rendimiento es muy significativo. Pero esto es de esperarse, pues cuando $d = 1$ no se requiere información de las colas, por lo que la asignación de clientes, por así decirlo, no tiene control. Por otro lado, cuando $d \geq 2$, se requiere información de la carga de las colas, y en cierto sentido se empiezan a tomar decisiones basadas no en la aleatoriedad, sino en la optimización.

Un resultado que tuvimos es que cuando $\lambda \rightarrow 1^-$, en el sistema determinista la elección de $d \geq 2$ influye en el tiempo de espera promedio sólo en orden de $\log(d)$. Esto es, en el sistema del supermercado, cuando el número de colas es grande, la elección de $d \geq 2$ influye de la misma manera. Esto quiere decir que se requiere no demasiada información respecto a las colas para cambiar la eficiencia del sistema, pero tener mucha información no cambia demasiado el rendimiento del sistema.

Este es un sistema simple de describir y también sencillo en cuanto a los supuestos que se hacen, pero es potente, y puede ser el parteaguas para modelos más complejos (y apegados a la realidad) que efficienten el rendimiento de sistemas de colas.

Apéndice A

A.1. Justificación del sistema determinista.

Aquí probaremos que la probabilidad de elegir d colas tales que la más pequeña de ellas sea de carga exacta $i-1$ es $s_{i-1}^d - s_i^d$, con la notación definida en el capítulo 2.

Cabe señalar que para elegir d colas con dichas características es suficiente elegir al menos una cola de carga exacta $i-1$, y las demás colas con carga mayor o igual a i . Esto es:

$\mathbb{P}(s_i \text{ aumente en 1 cuando llega un cliente al sistema})$

$$= \sum_{k=1}^d \binom{d}{k} (s_{i-1} - s_i)^k (s_i)^{d-k}.$$

Probaremos que

$$\sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (s_{i-1} - s_i)^k (s_i)^{d-k} = s_{i-1}^d.$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (s_{i-1} - s_i)^k (s_i)^{d-k} \\
&= \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (s_{i-1})^j (-s_i)^{k-j} (s_i)^{d-k} \\
&= \sum_{j=0}^d \sum_{k=j}^d \binom{d}{j} \binom{d-j}{d-k} (s_{i-1})^j (-s_i)^{k-j} (s_i)^{d-k} \\
&= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} \sum_{k=0}^{d-j} \binom{d-j}{k} (s_{i-1})^{(d-j)-k} (-s_i)^j (s_i)^k \\
&= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} (-s_i)^j \sum_{k=0}^{d-j} \binom{d-j}{k} (s_{i-1})^{(d-j)-k} (s_i)^k \\
&= \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} (-s_i)^j (s_{i-1} + s_i)^{d-j} \\
&= (s_{i-1} + s_i - s_i)^d = s_{i-1}^d.
\end{aligned}$$

Así,

$\mathbb{P}(s_i \text{ aumente en } 1 \text{ cuando llega un cliente al sistema})$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^d \binom{d}{k} (s_{i-1} - s_i)^k (s_i)^{d-k} \\
&= \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (s_{i-1} - s_i)^k (s_i)^{d-k} - s_i^d = s_{i-1}^d - s_i^d.
\end{aligned}$$

A.2. Desigualdad de Gronwall

Enunciamos el teorema de la desigualdad de Gronwall, con la cual se concluye la demostración del teorema de Kurtz:

Teorema A.1 *Sea $f(t)$ una función acotada en $[0, T]$ tal que satisface $f(t) \leq \epsilon + \delta \int_0^t f(s) ds$, para $0 \leq t \leq T$, donde δ y ϵ son constantes positivas. Entonces, para $t \in [0, T]$ tenemos que*

$$f(t) \leq \epsilon e^{\delta t}.$$

A.3. Códigos de simulación

Las simulaciones se realizaron en R. La siguiente función recibe el número de colas n , $0 < \lambda < 1$, el tiempo límite t , y d ; devuelve dos vectores de n entradas donde cada una es el número de clientes en la cola i -ésima de los sistemas acoplados con $d = 1$ y $d \geq 2$.

```
sa<-function(n,lambda,t,d){

  #Tiempos de llegada:
  R = rexp(1,n*lambda)
  #Tiempos de salida
  S = rexp(1,n)

  #Vector del sistema d=1:
  X1 = numeric(n)
  #Vector del sistema d>=2:
  Xd = numeric(n)

  while(min(R,S)<=t){

    if(S>R){
      #Un cliente se incorpora al sistema d>=2:
      v<-seleccionarD(n,d)

      m = min(Xd[v])
```



```

k = min(which(Xd==m, arr.ind = TRUE))

Xd[k] <- Xd[k] + 1

#Un cliente se incorpora al sistema d=1:
l=v[floor(runif(1,1,d+1))]

X1[l] <- X1[l] + 1

R = R + rexp(1,n*lambda)
}

else if(R>S){
  k = floor(runif(1,1,n+1))

  if(X1[k]>0 && Xd[k]>0) {
    X1[k] <- X1[k]-1
    Xd[k] <- Xd[k]-1
  }
  else if(X1[k]>0 && Xd[k]==0){
    X1[k] <- X1[k]-1
  }
  else if(Xd[k]>0 && X1[k]==0){
    Xd[k] <- Xd[k]-1
  }

  S = S + rexp(1,n)
}

}

return(rbind(X1,Xd))
}

```

La siguiente función recibe el número de colas n , $0 < \lambda < 1$, d y L que es el límite de tiempo. Esta función calcula el vector $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ (cada π_i es el número de colas con al menos i clientes) para cada momento

en que entra o sale un cliente del sistema, y al final calcula el número

$$esp := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^d = \sum_{i=0}^{\infty} (s_i^{(n)}(L))^d,$$

que representa el tiempo de espera promedio que un cliente pasará en el sistema si este llegara al tiempo L .

```

tiempoEsperado<-function(n,lambd,d,L){

  #Tiempos de llegada:
  R = rexp(1,n*lambd)
  #Tiempos de salida
  S = rexp(1,n)
  #Vector del sistema:
  X = numeric(n)
  #Vector cuya entrada i-ésima indica el número
  #de colas con al menos i clientes.
  pi= numeric(0)

  while(min(R,S)<=L){

    if(S>R){
      v<-seleccionarD(n,d)

      minimo = min(X[v])

      k = min(which(X==minimo, arr.ind = TRUE))

      X[k] <- X[k] + 1

      #Actualizamos el vector pi:
      if(max(X)>length(pi)) {
        pi<-c(pi,0)
      }
      pi[X[k]]<-pi[X[k]]+1

      R = R + rexp(1,n*lambd)
    }
  }
}

```

```

    }

    else if(R>S){
      k = floor(runif(1,1,n+1))

      if(X[k]>0){
        X[k] <- X[k]-1
        #Aactualizamos al vector pi:
        pi[X[k]+1]<-pi[X[k]+1]-1
      }

      S = S + rexp(1,n)
    }
  }

  pi<-pi/n

  esp<-1

  for(i in 1:length(m)){
    esp<-esp+pi[i]^d
  }

  return(esp)
}

```

Las siguientes es una función auxiliar que devuelve un vector de d entradas compuesto por números aleatorios del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

```

seleccionarD<-function(n,d){
  v=numeric(d)
  v<- floor(runif(d,1,n+1))
  return(v)
}

```

Bibliografía

@PhdThesisM91, author = Mitzenmacher, Michael David, title = The Power of Two Choices in Randomized Load Balancing, school = Harvard University, year = 1991,

@UnpublishedK13, author = Frank Kelly and Elena Yudovina, title = Lecture Notes on Stochastic Networks, note = Lecture Notes, year = 2013,

@BookN97, title = Markov Chains, publisher = Cambridge series on statistical and probabilistic mathematics, year = 1997, author = J. R. Norris,

@ArticleY99, author = Yossi Azar, Andrei Z. Broder, Anna R. Karlin, and Eli Upfal, title = Balanced Allocations, journal = SIAM J. COMPUT. Vol. 29, No. 1, pp. 180 - 200, year = 1999,

@BookR13, title = Introducción a los procesos estocásticos, publisher = Las Prensas de Ciencias, year = 2013, author = Rincón, Luis,

@Commentjabref-meta: databaseType:bibtex;