UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SEUDOCOMPLEMENTOS Y SEUDOCOMPLEMENTOS FUERTES EN RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

LUIS FERNANDO GARCÍA MORA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. **2018**

1. Datos del alumno
   García
   Mora
   Luis Fernando
   56575445
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   311046814
2. Datos del tutor
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía
3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Manuel Gerardo
   Zorrilla
   Noriega
4. Datos del sinodal 2
   M. en C.
   Rodrigo
   Domínguez
   López
5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Bertha María
   Tomé
   Arreola
6. Datos de sinodal 4
   Dr.
   José
   Ríos
   Montes
7. Datos del trabajo escrito
   Seudocomplementos y seudocomplementos fuertes en retículas de clases de módulos
   91 p
   2018

Agradecimientos.

Al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, por su generoso e incondicional apoyo, por su tiempo, paciencia y motivación para la realización de este trabajo.

Al Dr. Manuel Gerardo Zorrilla Noriega , al M. en C. Rodrigo Domínguez López, a la Dra. Bertha María Tomé Arreola y al Dr. José Ríos Montes, por su tolerancia y por sus importantes aportaciones y correcciones a este documento.

A todos y cada uno de mis profesores de la Facultad de Ciencias, por compartir sus conocimientos y experiencia. Particularmente al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, a la Dra. María del Carmen Herendira Gomez Lavega y al M. en C. Luis Jesús Turcio Cuevas por sus conocimientos y la inspiración que me brindaron.

A mis padres y mi hermana, por creer en mi, por ser una motivación en mi vida y por forjar a la persona que soy.

A mi familia, por todo el amor, cariño y apoyo que me han dado a lo largo de mi vida.

A mis amigos Priska, Diego, Nadya, Shantal, Oscar, Diana, Leonardo y Saúl, por su apoyo, por tantos buenos momentos, por tolerarme en mis malos momentos y por formar parte fundamental de mi vida por tantos años.

A mis amigos y compañeros de la facultad Juan, Iván, Fajardo, Víctor y a cada uno de los oficinistas, por su compañía, por sus consejos, por tantas charlas y por darme la oportunidad de conocerlos.

A mi maestro Dennis Miranda, así como a Addy, Ytzel, Luis, Jesús y toda la familia DS Martial Arts por ser una segunda familia para mi.

Seudocomplementos y seudocomplementos fuertes en retículas de clases de módulos.

Luis Fernando García Mora

Índice general

Introducción.

En los últimos años ha sido de gran interés el estudio de ciertas retículas asociadas a un anillo, dada su utilidad para caracterizar algunos anillos importantes. Tal es el caso de la retícula de ideales del anillo que nos ayuda a determinar si un anillo es campo, debido a que un anillo conmutativo R es un campo si y sólo si la retícula de ideales de R tiene únicamente dos elementos.

Una retícula es un conjunto con un orden parcial, donde cualesquiera dos de sus elementos a y b tienen ínfimo y supremo (denotados por $a \wedge b, a \vee b$). Diremos que una retícula es acotada si tiene elemento mayor (1) y elemento menor (0), un ejemplo de retícula acotada es el conjunto de ideales izquierdos de un anillo ordenados por la contención.

Una gran retícula es una clase con un orden parcial, que satisface la definición de retícula salvo por la parte de ser un conjunto; un seudocomplemento de un elemento a de la retícula es un elemento b que es máximo en el conjunto de los elementos de la retícula que cumplen que el ínfimo de ellos con a es 0 y un seudocomplemento fuerte de a es el mayor en dicho conjunto. Un elemento de la retícula puede tener más de un seudocomplemento y en caso de tener seudocomplemento fuerte este es único.

En este trabajo se analizarán las retículas de clases de módulos determinadas por algunas propiedades de clausura, éstas nos pueden ofrecer información sobre el anillo en el que se está trabajando y, de manera inversa, el anillo puede darnos información sobre algunas de las retículas de clases de módulos asociadas a éste. Por ejemplo, un anillo es local izquierdo y semiartiniano izquierdo si y sólo si la retícula de clases cerradas bajo submódulos, productos directos, cápsulas inyectivas y extensiones consta de únicamente dos elementos.

Estudiaremos, en específico, los seudocomplementos fuertes en las grandes retículas de clases hereditarias ($L_{\{\leq\}}$), clases cohereditarias ($L_{\{\twoheadrightarrow\}}$) y la retícula de teorías de torsión hereditarias. A los seudocomplementos en $L_{\{\leq\}}$ y $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ se les conoce como clases naturales y clases conaturales respectivamente, además, éstos forman retículas ordenadas por contención que se les conoce como $R - nat$ y $R - conat$.

Para este trabajo consideraremos anillos con unidad, y le llamaremos módulos a los R-módulos izquierdos a menos que se especifique lo contrario. Además, $f : N \rightarrowtail M$ denotará un monomorfismo $f : N \to M$ y $g : N \twoheadrightarrow M$ denotará un epimorfismo $g : N \to M$.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo enunciaremos la teoría básica necesaria para este trabajo.

1.1. Retículas.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto. Una relación $\leq$ binaria en X es un orden parcial si :
1) $x \in X \Rightarrow x \leq x$, $\forall x \in X$ (reflexividad).
2) $x, z \in X$, $x \leq z$ y $z \leq x \Rightarrow x = z$ (antisimetría).
3) $x, w, z \in X$, $x \leq w$ y $w \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividad).

Definición 1.1.2. Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, a es ínfimo de $Y \subseteq X$ si:
1) $\forall b \in Y$, $a \leq b$.
2) $x \leq b$ $\forall b \in Y \Rightarrow x \leq a$.
Se dice que a es supremo de Y si :
1) $\forall b \in Y$, $b \leq a$.
2) $b \leq x$ $\forall b \in Y \Rightarrow a \leq x$.
Denotaremos como $a \wedge b$ al ínfimo de $\{a, b\} \subseteq L$ y $a \vee b$ al supremo de $\{a, b\} \subseteq L$, en caso de que estos existan.

Definición 1.1.3. Un conjunto parcialmente ordenado $(L,\leq)$ es una retícula si $\forall a, b \in L$, $\{a, b\}$ tiene supremo e ínfimo, es decir, existen $a \vee b$ y $a \wedge b$.
En el caso de que cualquier $C \subseteq L$ tenga supremo e ínfimo diremos que la retícula es completa.

Definición 1.1.4. Sean $(L,\leq)$ un orden parcial y $a \in L$.
1) a es el elemento menor de L si $a \leq x$ $\forall x \in L$.
2) a es elemento mayor de L si $x \leq a$ $\forall x \in L$.
3) a es un elemento mínimo de L si $\forall x \in L$, $x \leq a \Rightarrow x = a$.
4) a es un elemento máximo de L si $\forall x \in L$, $a \leq x \Rightarrow x = a$.

Notación 1.1.5. Denotaremos como 1 al elemento mayor de un orden parcial $(L,\leq)$ y 0 al elemento menor en caso de existir.

Definición 1.1.6. Una retícula (L,$\leq$) es acotada si tiene elemento mayor y menor.

Definición 1.1.7. Una gran retícula es una clase propia L con un orden parcial $\leq$ que cumple con las propiedades de ser retícula, salvo la parte de ser un conjunto.

Definición 1.1.8. Sea L una gran retícula con elemento menor 0.
Decimos que a es seudocomplemento de b si a es máximo en el conjunto $\{x \in L|x \wedge b = 0\}$. Decimos que a es seudocomplemento fuerte de b si a es el mayor elemento en $\{x \in L|x \wedge b = 0\}$.

Definición 1.1.9. Llamaremos esqueleto (fuerte) a la clase de los seudocomplementos (fuertes) de una gran retícula acotada L y lo denotaremos por $(S-)Skel(L)$.

Proposición 1.1.10. *Sea L una gran retícula con elemento menor 0, si a$\in$L tiene un seudocomplemento fuerte, este es único.*

Demostración. Sean b y b'$\in$ L seudocomplementos fuertes de a. Entonces a$\wedge$b=0=a$\wedge$b', así que b$\leq$b' y b'$\leq$ b por ser b y b' seudocomplementos fuertes $\therefore$ b=b' por ser $\leq$ un orden parcial.

□

Definición 1.1.11. Sea L una retícula acotada con elemento menor 0 y elemento mayor 1, decimos que a es complemento de b si a$\wedge$b=0 y a$\vee$b=1.

Definición 1.1.12. Una retícula L es distributiva si:
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ y $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para cualesquiera $a, b, c \in$ L.

Observación 1.1.13. *Diremos que una gran retícula L es (fuertemente) seudocomplementada si todo elemento de L tiene seudocomplemento (fuerte).*
Le diremos complementada si todo elemento en L tiene complemento y le diremos retícula de Boole si es distributiva y complementada.

1.2. Núcleos, conúcleos, producto fibrado y coproducto fibrado.

Definición 1.2.1. Sea $f : M \to N$ un morfismo.
1) Llamaremos a $\{x \in M|f(x) = 0\}$ el núcleo de f y lo denotaremos por $Ker(f)$.
2) Llamaremos a $\dfrac{N}{Im(f)}$ el conúcleo de f y lo denotaremos por $Coker(f)$.

Teorema 1.2.2. ***(Propiedad universal del núcleo)***. *Sea $f : N \to M$ un morfismo. Si $g : L \to N$ es un morfismo tal que $f \circ g = 0$, entonces existe un único morfismo $h : L \to Ker(f)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, "f"] & M \\ & & L \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

.

Teorema 1.2.3. ***(Propiedad universal del conúcleo)***. *Sea $f : N \to M$ un morfismo. Si $g : M \to L$ es un morfismo tal que $g \circ f = 0$, entonces existe un único morfismo $h : Coker(f) \to L$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & Coker(f) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h"] & 0 \\ & L & & \end{tikzcd} .$$

Definición 1.2.4. Sean $f : N \to M$ y $g : N \to L$ morfismos de módulos. El coproducto fibrado de f y g es un módulo P junto con $l : L \to P$ y $j : M \to P$ morfismos, tales que $l \circ g = j \circ f$ y si $h : M \to Q$ y $m : L \to Q$ son morfismos tales que $h \circ f = m \circ g$, entonces existe un único morfismo $k : P \to Q$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & Q \\ L \arrow[r, "l"'] \arrow[urr, "m"] & P \arrow[ur, dashed, "k"] & \\ N \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, "j"] \arrow[uur, "h"'] & \end{tikzcd} .$$

Observación 1.2.5. *Sean $f : N \to M$ y $g : N \to L$ morfismos de módulos. El coproducto fibrado de f y g es único salvo isomorfismo, es decir, si (P, l, j) y (P', l', j') son coproductos fibrados de f y g, entonces $P \cong P'$.*
Por otro lado si $\gamma : P \to P'$ es un isomorfismo y (P, l, j) es el coproducto fibrado de f y g, entonces $(P', \gamma l, \gamma j)$ es un coproducto fibrado de f y g.

Teorema 1.2.6. *Sean $f : N \to M$ y $g : N \to L$ morfismos de módulos.*
Si $T = \{(f(x), -g(x)) \in M \bigoplus L | x \in N\}$, entonces $\dfrac{M \bigoplus L}{T}$ junto con los morfismos $l : L \to \dfrac{M \bigoplus L}{T}$ y $j : M \to \dfrac{M \bigoplus L}{T}$ dados por $l(z) = (0, z) + T$ y $j(y) = (y, 0) + T$ es el coproducto fibrado de f y g.

Teorema 1.2.7. *Sean $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta y $g : N \to Q$ un morfismo. Las siguientes condiciones son equivalentes para $P \in R - mod$:*
1) P es el coproducto fibrado de f y g.
2) Existe un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f'"] & P \arrow[r, "h'"] & L \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[u, "g'"] & L \arrow[r] \arrow[u, equal, "Id_L"'] & 0 \end{tikzcd} .$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Al ser el coproducto fibrado único salvo isomorfismo, podemos considerar a P, $g' = j$ y $f' = l$ como en el Teorema 1.2.6. Ahora consideremos el morfismo $g' : P \to L$ dado

por $h'((a,b)+T) = h(b)$.
Si $l(a) = (a,0)+T = 0$, entonces $(a,0) = (g(e), -f(e))$ para algún $e \in N$, por lo que $f(e) = 0$, así que $e = 0$ ya que f es inyectiva. Entonces $g(e) = 0 = a$, por lo que l es inyectiva.
Ahora tenemos que $Im(f) \subseteq Ker(h')$ ya que $h'l = 0$. Demostraremos la otra contención. Si $(a,b)+T \in Ker(h')$, entonces $h(b) = 0$, por lo que existe $c \in N$ tal que $b = f(c)$, ya que $b \in Ker(h) = Im(f)$. Así que $(a,b)+T = (a, f(c))+T = (a+g(c), 0)+T \in Im(l)$.
Ahora, si $c \in L$, entonces $c = h(b)$ para algún $b \in M$. Así que $h'((0,b)+T) = c$, por lo que h' es un epimorfismo.
Además, $lg = jf$ y $h'j = h$, por lo que el siguiente diagrama es conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "l"] & P \arrow[r, "h'"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[u, "j"] & L \arrow[r] \arrow[u, equal, "Id_L"'] & 0
\end{tikzcd} .$$

2) $\Rightarrow$ 1)
Consideremos (A, l, j) el coproducto fibrado de f y g descrito en el Teorema 1.2.6. Por lo que probamos en 1) $\Rightarrow$ 2) existe un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "l"] & A \arrow[r, "h''"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[u, "j"] & L \arrow[r] \arrow[u, equal, "Id_L"'] & 0
\end{tikzcd} .$$

Además, por hipótesis, existe el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f'"] & P \arrow[r, "h'"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & M \arrow[r, "h"] \arrow[u, "g'"] & L \arrow[r] \arrow[u, equal, "Id_L"'] & 0
\end{tikzcd} .$$

Por otro lado, existe $\alpha : A \to P$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & P \\
Q \arrow[r, "l"'] \arrow[urr, "f'"] & A \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & \\
N \arrow[r, "f"] \arrow[u, "g"] & M \arrow[u, "j"] \arrow[uur, "g'"'] &
\end{tikzcd} .$$

De donde obtenemos que $hf = h'f'g = 0$, $h''l = h'\alpha l = h'f' = 0$ y $h''j = h = h'g' = h'\alpha j$, por lo que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
 & & P \\
Q \arrow[r, "l"'] \arrow[urr, "h'f'"] & A \arrow[ur, "h''"] & \\
N \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, "j"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & P \\
Q \arrow[r, "l"'] \arrow[urr, "h'f'"] & A \arrow[ur, "h'\alpha"] & \\
N \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, "j"'] \arrow[uur, "h"'] &
\end{tikzcd}.$$

Por lo que $h'\alpha = h''$, ya que (A, l, j) es el coproducto fibrado de f y g, entonces el siguiente diagrama es conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "l"] & A \arrow[r, "h''"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[u, equal, "Id_Q"] \arrow[r, "f'"] & P \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "h'"] & L \arrow[u, equal, "Id_L"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

$\therefore$ α es un isomorfismo, por lo que P es el coproducto fibrado de f y g.

$\square$

A partir de este momento nos referiremos como el coproducto fibrado de $f : N \to M$ y $g : N \to L$ únicamente al módulo de la terna de la definición 1.2.4.

Definición 1.2.8. Sean $f : M \to N$ y $g : L \to N$ morfismos de módulos. El producto fibrado de f y g es un módulo P junto con $l : P \to L$ y $j : P \to M$ morfismos tales que $g \circ l = f \circ j$ y si $h : Q \to M$ y $m : Q \to L$ son morfismos tales que $f \circ h = g \circ m$, entonces existe un único morfismo $k : Q \to P$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "g"'] & N \\
 & P \arrow[u, "l"] \arrow[r, "j"] & M \arrow[u, "f"] \\
Q \arrow[uur, "m"] \arrow[ur, dashed, "k"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Observación 1.2.9. *Sean $f : M \to N$ y $g : L \to N$ morfismos de módulos. El producto fibrado de f y g es único salvo isomorfismo, es decir, si (P, l, j) y (P', l', j') son productos fibrados de f y g, entonces $P \cong P'$.*
Por otro lado, si $\gamma : P' \to P$ es un isomorfismo y (P, l, j) es el producto fibrado de f y g, entonces $(P', l\gamma, j\gamma)$ es un producto fibrado de f y g.

Teorema 1.2.10. *Si $f : M \to N$ y $g : L \to N$ morfismos de módulos, entonces $P = \{(x, y) \in M \times L | f(x) = g(y)\}$ junto con los morfismos $l : P \to L$ y $j : P \to M$, las proyecciones canónicas de P a L y M respectivamente, es el producto fibrado de f y g.*

Teorema 1.2.11. *Sean $0 \longrightarrow Q \xrightarrow{h} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ sucesión exacta y $f : M \to N$ morfismo. Las siguientes condiciones son equivalentes para $P \in R-mod$:*

1) P es el producto fibrado de f y g.
2) Existe un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "h"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[u, equal, "Id_Q"] \arrow[r, "h'"] & P \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "g'"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Al ser el producto fibrado único salvo isomorfismo, podemos considerar a P, $f' = l$ y $g' = j$ como en el Teorema 1.2.10. Ahora consideremos el morfismo $h' : N \to P$ dado por $h'(x) = (0, h(x))$ que está bien definido ya que $gh(x) = 0 = f(0)$.
Si $h'(x) = (h(x), 0) = (0, 0)$, entonces $h(x) = 0$. Por lo que $x = 0$ ya que h es inyectiva $\therefore h'$ es inyectiva.
Ahora tenemos que $Im(h') \subseteq Ker(j)$ ya que $jh' = 0$. Demostraremos la otra contención. Si $j((a, b)) = 0$, entonces $a = 0$, por lo que $f(a) = 0 = g(b)$, entonces $b = h(c)$ para algún $c \in Q$, ya que $b \in Ker(g) = Im(h)$. Así que $h'(c) = (0, h(c)) = (a, b) \in Im(h')$.
Ahora, si $c \in M$, entonces $f(c) = g(x)$ para algún $x \in L$ ya que g es sobreyectiva. Así que $(c, x) \in P$ y $j((c, x)) = c$, por lo que j es un epimorfismo.
Además, $lh' = h$ y $fj = gl$, por lo que el siguiente diagrama es conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "h"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[u, equal, "Id_Q"] \arrow[r, "h'"] & P \arrow[u, "l"] \arrow[r, "j"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

2) $\Rightarrow$ 1)
Consideremos (A, l, j) el producto fibrado de f y g descrito en el Teorema 1.2.10. Por lo que probamos en 1) $\Rightarrow$ 2) existe un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "h"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[u, equal, "Id_Q"] \arrow[r, "h''"] & A \arrow[u, "l"] \arrow[r, "j"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

Además, por hipótesis, existe el diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "h"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[u, equal, "Id_Q"] \arrow[r, "h'"] & P \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "g'"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad .$$

Por otro lado, existe $\alpha : P \to A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "g"'] & N \\
 & A \arrow[u, "l"] \arrow[r, "j"] & M \arrow[u, "f"'] \\
P \arrow[uur, "f'"] \arrow[ur, dashed, "\alpha"] \arrow[urr, "g'"'] & &
\end{tikzcd} \quad .$$

De donde obtenemos que $gh = fg'h' = 0$, $jh'' = j\alpha h' = g'h' = 0$ y $h''l = h = f'h' = l\alpha h'$, por lo que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[r, "g"'] & N \\
& A \arrow[u, "l"] \arrow[r, "j"] & M \arrow[u, "f"'] \\
Q \arrow[uur, "h"] \arrow[ur, dashed, "h''"] \arrow[urr, "g'h'"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& L \arrow[r, "g"'] & N \\
& A \arrow[u, "l"] \arrow[r, "j"] & M \arrow[u, "f"'] \\
Q \arrow[uur, "h"] \arrow[ur, dashed, "\alpha h'"] \arrow[urr, "g'h'"'] & &
\end{tikzcd} .$$

por lo que $\alpha h' = h''$, ya que (A, l, j) es el producto fibrado de f y g, entonces el siguiente diagrama es conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "h''"] & A \arrow[r, "j"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[u, equal, "Id_Q"] \arrow[r, "h'"] & P \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g'"] & M \arrow[u, equal, "Id_M"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

$\therefore$ α es un isomorfismo, por lo que P es el producto fibrado de f y g.

□

A partir de este momento nos referiremos como el producto fibrado de los morfismos $f : M \to N$ y $g : L \to N$ únicamente al módulo que forma parte de la terna de la definición 1.2.8.

1.3. Módulos inyectivos.

Definición 1.3.1. Un R módulo E es inyectivo si cualquier diagrama de morfismos de R módulos

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

puede extenderse a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[ul, dashed, "h"']
\end{tikzcd} .$$

Es decir, $\exists h : B \longrightarrow E$ morfismo tal que $h \circ f$=g.

Teorema 1.3.2. *Son equivalentes para $E \in R-mod$:*
1) E es inyectivo.
2) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *se escinde.*
3) $Hom(\square, E)$ es un funtor exacto.

Lema 1.3.3. ***(Criterio de Baer)***. *Un R módulo E es inyectivo si y sólo si para cualquier I ideal izquierdo de R, se tiene que cualquier diagrama de morfismos de R módulos*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & R \end{tikzcd}$$

puede extenderse a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & R \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd} .$$

Es decir, $\exists h : R \longrightarrow E$ morfismo tal que $h \circ f = g$.

Teorema 1.3.4. $\prod\limits_{i \in I} E_i$ *es inyectivo si y sólo si E_i es inyectivo para toda $i \in I$.*

Teorema 1.3.5. *Todo módulo puede sumergirse en un módulo inyectivo, es decir, $\forall M \in R - mod$ existe un monomorfismo $i : M \to E$, con E módulo inyectivo.*

1.4. Monomorfismos esenciales y la cápsula inyectiva de un módulo.

Definición 1.4.1. $N \leq M$ es esencial en M si para cada $Q \neq 0$ submódulo de M se cumple que $N \cap Q \neq 0$.

Proposición 1.4.2. *Son equivalentes para $N \leq M$:*
1) N es esencial en M.
2) $\forall Q \leq M$, $N \cap Q = 0 \Rightarrow Q = 0$.

Teorema 1.4.3. *Sea $N \leq M$. El conjunto $\{N' \leq M \mid N \cap N' = 0\ \}$ tiene elemento máximo. Dicho elemento se llama seudocomplemento de N en M.*

Observación 1.4.4. *Si N' es el seudocomplemento de N en M, entonces $N \bigoplus N'$ es esencial en M.*

Definición 1.4.5. Se dice que un monomorfismo $f : N \to M$ es esencial si $Im(f) = f(N)$ es esencial en M.

Teorema 1.4.6. *Son equivalentes para un monomorfismo $f : N \to M$:*
1) f es un monomorfismo esencial.
2) $\forall\ g : M \to X$ morfismo , $g \circ f$ es monomorfismo $\Rightarrow$ g es monomorfismo.

Definición 1.4.7. Una extensión esencial de un módulo M es un módulo E que contiene a M de tal manera que la inclusión canónica de M en E es un monomorfismo esencial. Además, si la contención es propia decimos que E es un extensión esencial propia de M.

Teorema 1.4.8. *Un módulo E es inyectivo si y sólo si E no tiene extensiones esenciales propias.*

Teorema 1.4.9. *Las siguientes condiciones para un módulo E que contiene a un módulo M son equivalentes:*
1) E es una extensión esencial máxima de M.
2) E es una extensión esencial de M y E es inyectivo.
3) E es inyectivo y no hay inyectivo E' con $M \subseteq E' \subsetneq E$.

Definición 1.4.10. A un módulo que satisface cualquiera de las condiciones del Teorema 1.4.9 se le llama una cápsula inyectiva de M.

Teorema 1.4.11. *Todo módulo tiene una cápsula inyectiva y ésta es única salvo isomorfismo.*

Notación 1.4.12. Ahora ya podemos hablar de "la cápsula inyectiva"de $M \in R\!-\!mod$, la cual denotaremos por $E(M)$.

1.5. Módulos proyectivos.

Definición 1.5.1. Un R módulo P es proyectivo si cualquier diagrama de morfismos de R módulos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "g"] & \end{tikzcd}$$

puede extenderse a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "g"] \arrow[ul, dashed, "h"] & \end{tikzcd} .$$

Es decir, $\exists h : P \longrightarrow A$ morfismo tal que $f \circ h{=}g$.

Teorema 1.5.2. *Son equivalentes para* $P \in R - mod$*:*
1) P *es proyectivo.*
2) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *se escinde.*
3) $Hom(P, \Box)$ *es un funtor exacto.*

Teorema 1.5.3. P *es proyectivo si y sólo si existen* $M \in R - mod$ *y* X *conjunto tal que* $P \bigoplus M \cong R^{(X)}$*, es decir,* P *es sumando directo de un libre.*

Teorema 1.5.4. $\bigoplus\limits_{i \in I} P_i$ *es proyectivo si y sólo si* P_i *es proyectivo para toda* $i \in I$.

1.6. Epimorfismos superfluos y la cubierta proyectiva de un módulo.

Definición 1.6.1. Sea $N \leq M$. Se dice que N es superfluo en M si $\forall U \leq M$, $N + U = M \Rightarrow U = M$.

Definición 1.6.2. Un epimorfismo $g : M \to N$ es superfluo si $Ker(g)$ es superfluo en M.

Definición 1.6.3. La pareja ordenada (P, g) es una cubierta proyectiva de M si P es proyectivo y $g : P \to M$ epimorfismo superfluo.

A partir de este momento nos referiremos como una cubierta proyectiva de M únicamente al módulo que forma de la pareja ordenada de la definición 1.6.3.

Teorema 1.6.4. *Sea $M \in R-mod$. Si M tiene cubierta proyectiva, entonces esta es única salvo isomorfismos.*

Notación 1.6.5. Sea $M \in R-mod$, denotaremos por $P(M)$ a la cubierta proyectiva de M en caso de que esta exista.

1.7. Generadores y cogeneradores en R-mod.

Definición 1.7.1. $M \in R-mod$ es un generador (en $R-mod$) si cada R-módulo puede ser cubierto por una suma directa de copias de M, es decir, $\forall N \in R-mod$ existe X conjunto y $\pi : M^{(X)} \to N$ epimorfismo.

Teorema 1.7.2. *R es un generador.*

Definición 1.7.3. $M \in R-mod$ cogenera a $N \in R-mod$ si N se sumerge en un producto de copias de M, es decir, existe X conjunto y $i : N \to M^X$ monomorfismo.

Definición 1.7.4. $M \in R-mod$ es un cogenerador (en R-mod) si cada R-módulo se sumerge en un producto de copias de M, es decir, M cogenera a cualquier R-módulo.

Teorema 1.7.5. *Sea E un R-módulo inyectivo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) E es cogenerador.
2) $Hom(S, E) \neq 0$ para todo S módulo simple.
3) E cogenera a cualquier R-módulo simple.

Corolario 1.7.6. *Si A es un conjunto irredundante de R-módulos simples, entonces $\prod_{T \in A} E(T)$ es un cogenerador inyectivo.*

Teorema 1.7.7. *Sea A es un conjunto irredundante de R-módulos simples. Son equivalentes para $C \in R-mod$ inyectivo:*
1) C es un cogenerador.
2) Para todo $T \in R-mod$ simple, $E(T)$ es isomorfo a un sumando directo de C.
3) $\bigoplus_{T \in A} E(T)$ es isomorfo a un submódulo de C.

Corolario 1.7.8. *Si A es un conjunto irredundante de R-módulos simples, entonces $E(\bigoplus_{T \in A} T)$ es el cogenerador inyectivo menor.*

Capítulo 2

Grandes retículas de clases de R-módulos.

Después de haber establecido algunos de los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo, pasaremos a definir propiedades de clausura y las grandes retículas de clases de módulos que inducen. Además, veremos como generar en algunas grandes retículas de clases de módulos definidas mediante propiedades de clausura, es decir, tomaremos una clase de módulos ζ y P un conjunto de propiedades de clausura, para encontrar el menor elemento de la gran retícula asociada a P que contiene a ζ.

2.1. Clases definidas bajo propiedades de clausura.

Definición 2.1.1. Sea ζ una clase de R-módulos. Diremos que:
a) ζ es abstracta si es cerrada bajo isomorfismos; es decir, si N$\cong$M y M$\in \zeta$, entonces N$\in \zeta$.
b) ζ es hereditaria si es cerrada bajo submódulos; es decir, si $M \in \zeta$ y $\exists f : N \to M$ monomorfismo, entonces $N \in \zeta$.
c) ζ es cohereditaria si es cerrada bajo imágenes de morfismos; es decir, si N$\in \zeta$ y $\exists f : N \to M$ morfismo, entonces $Im(f) \in \zeta$.
d) ζ es cerrada bajo productos si $\prod\limits_{i \in I} M_i \in \zeta$, siempre que $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \zeta$.
e) ζ es cerrada bajo sumas directas si $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \zeta$, siempre que $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \zeta$.
f) ζ es cerrada bajo cápsulas inyectivas si $M \in \zeta$, entonces $E(M) \in \zeta$.
g) ζ es cerrada bajo extensiones si $N, L \in \zeta$ y $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta, entonces M $\in \zeta$.
h) ζ es cerrado bajo extensiones esenciales si $M \in \zeta$ y $\exists f : M \to N$ monomorfismo esencial, entonces $N \in \zeta$.
i)ζ es cerrada bajo epimorfismos superfluos si $L \in \zeta$ y $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta con $f(N) \ll M$, entonces $M \in \zeta$.

Definición 2.1.2. Denotaremos por:
a) $L_{\{\leq\}}$ la clase de todas las clases hereditarias.

b) $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ la clase de todas las clases cohereditarias.
c) $L_{\{\prod\}}$ la clase de todas las clases cerradas bajo productos.
d) $L_{\{\bigoplus\}}$ la clase de todas las clases cerradas bajo sumas directas.
e) $L_{\{E\}}$ la clase de todas las clases cerradas bajo tomar cápsulas inyectivas.
f) $L_{\{ext\}}$ la clase de todas las clases cerradas bajo extensiones .

En general, si A es un conjunto de propiedades de clausura, denotaremos por L_A la clase de todas clases cerradas bajo las propiedades de A.

Observación 2.1.3. *Es claro que* $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}=L_{\{\leq\}} \cap L_{\{E\}} \cap L_{\{\bigoplus\}}$. *En general si A es un conjunto de propiedades de clausura,* $L_A=\bigcap\limits_{p\in A} L_{\{p\}}$.

Observación 2.1.4. *Si* $A\subseteq \{\leq,\twoheadrightarrow,E,\prod,\bigoplus\}$, L_A *es una gran retícula cuyo orden está definido por* $\zeta \leq \zeta' \Leftrightarrow \zeta \subseteq \zeta'$, *el ínfimo es la intersección de clases, es decir,* $\zeta\wedge\zeta' = \zeta\cap\zeta'$ *y el supremo de* $\zeta,\zeta' \in L_A$ *como* $\zeta\vee\zeta' = \cap\{C|\zeta\cup\zeta' \subseteq C \text{ y } C \in L_A\}$ *que está bien definido ya que R-mod* $\in L_A$, $\forall A \subseteq \{\leq,\twoheadrightarrow,E,\prod,\bigoplus\}$.

Notación 2.1.5. Denotaremos $\zeta^{S-\perp_A}$ el seudocomplemento fuerte de ζ en L_A y $\zeta^{\perp_A}$ a un seudocomplemento en $L_{\{A\}}$ en caso de que estos existan.

2.2. Generación de clases en las retículas $L_{\{\leq,\Pi\}}$, $L_{\{\twoheadrightarrow,\Pi\}}$, $L_{\{\twoheadrightarrow,\leq\}}$, $L_{\{\leq,E,\Pi\}}$ y $L_{\{\leq,E,\oplus\}}$.

Notación 2.2.1. Sea A un conjunto de propiedades de clausura y ζ una clase de R módulos. Denotamos como $\xi_A(\zeta)$ a la menor clase de módulos que contiene a ζ y que es cerrada bajo las propiedades de A.

Notación 2.2.2. Sean A,A' conjuntos de propiedades de clausura y ζ una clase de R-módulos, entonces definiremos $\xi_A\xi_{A'}(\zeta) = \xi_A \circ \xi_{A'}(\zeta) = \xi_A(\xi_{A'}(\zeta))$.

Teorema 2.2.3. *Si* ζ *es una clase de R módulos, entonces:*
1) $\xi_{\{\leq\}}(\zeta)= \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\}$.
2) $\xi_{\{E\}}(\zeta)= \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\}$.
3) $\xi_{\{\twoheadrightarrow\}}(\zeta)= \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\}$.

Demostración. 1) Sea K $\in \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\}$, entonces existen $M \in \zeta$ y $f : K \to M$ tal que f es un monomorfismo.
Si N' $\in$ R-mod y $g : N' \rightarrowtail K$ un monomorfismo, entonces $fg : N' \rightarrowtail M$ es un monomorfismo con M $\in \zeta$.
$\therefore \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\} \in L_{\{\leq\}}$.
Si $M \in \zeta$, entonces $id_M : M \rightarrowtail M$ es monomorfismo, por lo que $M \in \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\} \therefore \zeta \subseteq \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\}$.
Ahora sea $\zeta' \in L_{\{\leq\}}$ tal que $\zeta \subseteq \zeta'$. Si $N \in \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\}$, entonces existen $M \in \zeta$ y $f : N \to M$ tal que f es monomorfismo, por lo que N $\in \zeta'$ ya que $\zeta' \in L_{\{\leq\}}$.

$\therefore \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\} \subseteq \zeta'$
$\therefore \xi_{\{\leq\}}(\zeta)= \{N|\exists f : N \rightarrowtail C, C \in \zeta\}$ por definición.

2)Si K $\in \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\}$, entonces K $\in \zeta$ o K $\in \{E(N)|N \in \zeta\}$.
Si K $\in \zeta$, entonces $E(K) \in \{E(N)|N \in \zeta\} \therefore E(K) \in \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\}$.
Si $K \in \{E(N)|N \in \zeta\}$, entonces $K = E(M)$ para algún M $\in \zeta$, por lo que K es inyectivo $\therefore$ K=E(K) $\therefore$ E(K)$\in \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\} \therefore \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\} \in L_{\{E\}}$.
Es claro que $\zeta \subseteq \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\}$, así que sólo bastaría demostrar que es la menor clase.
Sea $\zeta' \in L_{\{E\}}$ tal que $\zeta \subseteq \zeta'$.
Si $K \in \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\}$, entonces $K \in \zeta$ o $K \in \{E(N)|N \in \zeta\}$.
Si $K \in \zeta$, entonces $K \in \zeta'$ ya que $\zeta \subseteq \zeta'$; si K $\in \{E(N)|N \in \zeta\}$, entonces $K = E(M)$ para algún $M \in \zeta \therefore K = E(M) \in \zeta'$ ya que $\zeta' \in L_{\{E\}} \therefore \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\} \subseteq \zeta'$
$\therefore \xi_{\{E\}}(\zeta)= \zeta \cup \{E(N)|N \in \zeta\}$ por definición.

3)Si $N \in \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\}$, entonces $\exists g : C \twoheadrightarrow N$ epimorfismo con C $\in \zeta$; sea $h : N \to N'$ un epimorfismo, entonces $hg : C \to N'$ es epimorfismo, por lo que N' $\in \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\} \therefore \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Además, tenemos que $id_N : N \to N$ es un isomorfismo, en particular epimorfismo, $\forall N \in \zeta$, entonces N $\in \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\}$, $\forall N \in \zeta \therefore \zeta \subseteq \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\}$.
Sea $\zeta' \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta \subseteq \zeta'$.
Ahora si N $\in \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\}$, entonces $\exists g : C \twoheadrightarrow N$ epimorfismo con C $\in \zeta \subseteq \zeta'$, entonces N $\in \zeta'$ ya que $\zeta' \in L_{\{\twoheadrightarrow\}} \therefore \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\} \subseteq \zeta'$.
$\therefore \xi_{\{\twoheadrightarrow\}}(\zeta)= \{M|\exists f : C \twoheadrightarrow M, C \in \zeta\}$ por definición.

□

Teorema 2.2.4. *Si ζ es una clase de R módulos, entonces:*
1) $\xi_{\{\bigoplus\}}(\zeta)= \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$.
2) $\xi_{\{\prod\}}(\zeta)= \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$.

Demostración. 1)Sea $\{N_j\}_{j\in J} \subseteq \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$, entonces $N_j = \bigoplus_{i\in I_j} M_{i,j}$, $j \in J$ y $M_{i,j} \in \zeta\ \forall i \in I_j$.
Sean $I' = \bigcup_{j\in J} I_j$ y $A = \{(i, j) \in I \times J|i \in I_j\}$, entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i = \bigoplus_{(i,j)\in A} M_{i,j}$ y $\{M_{i,j}\}_{(i,j)\in A} \subseteq \zeta$.
$\therefore \bigoplus_{i\in I} N_i \in \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\} \therefore \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\} \in L_{\{\bigoplus\}}$.
Como $N = \bigoplus_{i\in I} N_i\ \forall N \in \zeta$, donde $I = \{1\}$ y $N_1 = N$, tenemos que $N \in \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}\ \forall N \in \zeta \therefore \zeta \subseteq \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$
Sea $\zeta' \in L_{\{\bigoplus\}}$ tal que $\zeta \subseteq \zeta'$.
Si $N \in \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$, entonces $N = \bigoplus_{i\in I} N_i, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta \subseteq \zeta'$, por lo que $N \in \zeta' \therefore \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\} \subseteq \zeta'$.

$\therefore\ \xi_{\{\oplus\}}(\zeta)= \{M|M = \bigoplus_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$ por definición.

2)Sea $\{N_j\}_{j\in J} \subseteq \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$, entonces $N_j = \prod_{i\in I_j} M_{i,j}$, $j \in J$ y $M_{i,j} \in \zeta\ \forall i \in I_j$.
Sean $I' = \bigcup_{j\in J} I_j$ y $A = \{(i,j) \in I \times J | i \in I_j\}$, entonces $\prod_{i\in I} N_i = \prod_{(i,j)\in A} M_{i,j}$ y $\{M_{i,j}\}_{(i,j)\in A} \subseteq \zeta$.
$\therefore \prod_{i\in I} N_i \in \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\} \therefore \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\} \in L_{\{\prod\}}$.
Como $N = \prod_{i\in I} N_i\ \forall N \in \zeta$, donde $I = \{1\}$ y $N_1 = N$, tenemos que $N \in \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}\ \forall N \in \zeta \therefore \zeta \subseteq \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$
Sea $\zeta' \in L_{\{\prod\}}$ tal que $\zeta \subseteq \zeta'$.
Si $N \in \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$, entonces $N = \prod_{i\in I} N_i, \{N_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta \subseteq \zeta'$, por lo que $N \in \zeta' \therefore \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\} \subseteq \zeta'$.
$\therefore\ \xi_{\{\prod\}}(\zeta)= \{M|M = \prod_{i\in I} M_i, \{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$, por definición.

□

Observación 2.2.5. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta) = \{M|\exists f : \prod_{i\in I} C_i \twoheadrightarrow M, p.a.\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$.*

Lema 2.2.6. *Si ζ es una clase de R módulos, entonces $\xi_{\{\twoheadrightarrow,\prod\}}(\zeta) = \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$.*

Demostración. Empezaremos demostrando que $\xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$ es cerrada bajo cocientes y productos.

$\twoheadrightarrow$) Sea $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$ y sea $f : M \to N$ un epimorfismo. Como $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$ existe un epimorfismo $g : \prod_{i\in I} C_i \twoheadrightarrow M$ con $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$, entonces $fg : \prod_{i\in I} C_i \to N$ es un epimorfismo $\therefore N \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta) \therefore \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta) \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

$\prod$) Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces para cada $M_i\ \exists f_i : \prod_{j\in J} C_{i,j} \twoheadrightarrow M_i$, de donde obtenemos el epimorfismo $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{(i,j)\in I\times J} C_{i,j} \twoheadrightarrow \prod_{i\in I} M_i \therefore \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta) \in L_{\{\twoheadrightarrow,\Pi\}}$.

Como $N = \prod_{i\in I} N_i$, donde $I = \{1\}$, $N_1 = N$ y $id : N \to N$ es un isomorfismo, en particular epimorfismo $\forall N \in \zeta$ tenemos que $\zeta \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$.
Ahora si $\zeta' \in L_{\{\twoheadrightarrow,\prod\}}$, $\zeta \subseteq \zeta'$ y si $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces $\exists h : \prod_{i\in I} C_i \to M$ epimorfismo con $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta \subseteq \zeta'$, entonces $\prod_{i\in I} C_i \in \zeta'$, entonces $M \in \zeta' \therefore \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta) \subseteq \zeta' \therefore \xi_{\{\twoheadrightarrow,\prod\}}(\zeta) = \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\prod}(\zeta)$ por definición.

□

Observación 2.2.7. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces* $\xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta) = \{M | \exists f : M \rightarrowtail \prod_{i\in I} C_i, p.a. \{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$.

Lema 2.2.8. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces* $\xi_{\{\leq,\prod\}}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$.

Demostración. Empezaremos demostrando que $\xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$ es cerrada bajo submódulos y productos.

$\leq$) Sea $M \in \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$ y $f : N \to M$ monomorfismo. Como $M \in \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$ existe $g : M \rightarrowtail \prod_{i\in I} C_i$ con $\{C_i\}_{i\in I}, \subseteq \zeta$, entonces $gf : N \to \prod_{i\in I} C_i$ es monomorfismo $\therefore N \in \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$.

$\prod$) Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces para cada M_i $\exists f_i : M_i \rightarrowtail \prod_{j\in J} C_{i,j}$ de donde obtenemos el monomorfismo
$\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} M_i \rightarrowtail \prod_{(i,j)\in I\times J} C_{i,j} \therefore \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta) \in L_{\{\leq,\Pi\}}$.

Como $N = \prod_{i\in I} N_i$, donde $I = \{1\}$, $N_1 = N$ y $id : N \to N$ es un isomorfismo, en particular monomorfismo $\forall N \in \zeta$ tenemos que $\zeta \subseteq \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$.
Ahora si $\zeta' \in L_{\{\leq,\prod\}}$, $\zeta \subseteq \zeta'$ y si $M \in \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces $\exists h : M \to \prod_{i\in I} C_i$ monomorfismo con $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta \subseteq \zeta'$, por lo que $\prod_{i\in I} C_i \in \zeta'$, entonces $M \in \zeta' \therefore \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta) \subseteq \zeta' \therefore \xi_{\{\leq,\prod\}}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{\prod}(\zeta)$ por definición.

□

Observación 2.2.9. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces* $\xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\prod}(\zeta)=\{M | \exists f : M \rightarrowtail E(\prod_{i\in I} C_i), p.a. \{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$.

Lema 2.2.10. *Sea ζ una clase de R-módulos, entonces* $\xi_{\{\leq,E,\prod\}}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\prod}(\zeta)$.

Demostración. Ya que todo módulo tiene cápsula inyectiva y se puede sumergir inyectivamente en ella, es claro que $\zeta \subseteq \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\prod}(\zeta)$. Ahora demostraremos que $\xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\prod}(\zeta)$ es cerrada bajo submódulos, productos y cápsulas inyectivas.

Sea $M \in \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces $\exists f : M \rightarrowtail E(\prod_{i\in I} C_i)$ para algún $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$.
$\leq$) Sea $g : N \to M$ monomorfismo, entonces $fg : N \to E(\prod_{i\in I} C_i)$ es monomorfismo $\therefore N \in \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\prod}(\zeta)$.
E) Sabemos que $\exists g : M \hookrightarrow E(M)$ morfismo esencial y $E(\prod_{i\in I} M_i)$ inyectivo, entonces $\exists h : E(M) \to E(\prod_{i\in I} C_i)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "g"] & E(\prod\limits_{i\in I} C_i) \\ E(M) \arrow[ur, dashed, "\exists h"] & \end{tikzcd} .$$

Entonces $f = hg$ con f monomorfismo y g monomorfismo esencial, entonces h es un monomorfismo, por el Teorema 1.4.6 $\therefore E(M) \in \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta)$.

$\prod$) Ahora sea $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces para cada $j \in J$, $\exists f_j : M_j \rightarrowtail E(\prod\limits_{i\in I} C_{i,j})$ con $C_{i,j} \in \zeta$ para todo $i \in I$, por lo que tenemos el monomorfismo inducido $\prod\limits_{j\in J} f_j$: $\prod\limits_{j\in J} M_j \rightarrowtail \prod\limits_{j\in J} E(\prod\limits_{i\in I} C_{i,j})$, pero $\prod\limits_{j\in J} E(\prod\limits_{i\in I} C_{i,j}) = E(\prod\limits_{(i,j)\in I\times J} C_{i,j}) \therefore \prod\limits_{j\in J} M_j \in \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta)$.
$\therefore \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta) \in L_{\{\leq,E,\Pi\}}$.

Sea $\zeta' \in L_{\{\leq,E,\Pi\}}$ tal que $\zeta \in \zeta'$ y $M \in \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta)$, entonces $\exists\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta \subseteq \zeta'$ y un monomorfismo $f : M \rightarrowtail E(\prod\limits_{i\in I} C_i)$, pero $\prod\limits_{i\in I} C_i \in \zeta'$, entonces $E(\prod\limits_{i\in I} C_i) \in \zeta'$, por lo que $M \in \zeta' \therefore \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta) \subseteq \zeta'$.
$\therefore \xi_{\{\leq,E,\prod\}}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\prod}(\zeta)$, por definición.

$\square$

Observación 2.2.11. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces*
1) $\xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta) = \{M | \exists f : N' \rightarrowtail N$ y $g : N' \twoheadrightarrow M$ tal que $N \in \zeta\}$.
2) $\xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) = \{M | \exists f : N \twoheadrightarrow N'$ y $g : M \rightarrowtail N$ tal que $N \in \zeta\}$.

Teorema 2.2.12. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces*
$\xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(\zeta)$.

Demostración. Sea $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta)$, entonces existe $f : N' \rightarrowtail N$ y $g : N' \twoheadrightarrow M$ tal que $N \in \zeta$. Tomando el coproducto fibrado P, tenemos que existen $j : M \to P$ y $h : N \to P$ morfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, two heads, "h"] & P \\ N' \arrow[u, tail, "f"] \arrow[r, two heads, "g"] & M \arrow[u, "j"] \end{tikzcd} .$$

De donde obtenemos que $M \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)$.

Sea $M \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)$, entonces existe $f : M \rightarrowtail N'$ y $g : N \twoheadrightarrow N'$ tal que $N \in \zeta$. Tomando el producto fibrado P, tenemos que existen $h : P \to M$ y $j : P \to N$ morfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, two heads, "h"] & N \arrow[d, two heads, "g"] \\ M \arrow[r, tail, "f"] & N' \end{tikzcd} .$$

De donde obtenemos que $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta)$.
$\therefore\ \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)$.

$\leq$) Sea $h : K \rightarrowtail M$ con $M \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)$, entonces existe $f : M \rightarrowtail N'$ y $g : N \twoheadrightarrow N'$ tal que $N \in \zeta$, entonces $fh : K \to N'$ es monomorfismo, $g : N \twoheadrightarrow N'$ y $N \in \zeta$ $\therefore$ $K \in \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta)$.

$\twoheadrightarrow$) Ahora sea $h : M \twoheadrightarrow K$ con $M \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) = \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta)$, entonces existe $f : N' \rightarrowtail N$ y $g : N' \twoheadrightarrow M$ tal que $N \in \zeta$, por lo que $hg : N' \twoheadrightarrow K$, $f : N' \rightarrowtail N$ y $N \in \zeta$ $\therefore$ $K \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) = \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta)$.
$\therefore\ \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) = \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta) \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.

Ahora sea $\Omega \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta \subseteq \Omega$. Si $M \in \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)$, entonces existe $f : N' \rightarrowtail N$ y $g : N' \twoheadrightarrow M$ tal que $N \in \zeta \subseteq \Omega$, entonces $N' \in \Omega$, ya que Ω es una clase hereditaria $\therefore$ $M \in \Omega$, puesto que Ω es una clase cohereditaria $\therefore$ $\xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) \subseteq \Omega$.
$\therefore\ \xi_{\twoheadrightarrow}\xi_{\leq}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(\zeta)$.

$\square$

Observación 2.2.13. *Si ζ es una clase de R-módulos, entonces* $\xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)=\{M | \exists f : M \rightarrowtail E(\bigoplus_{i\in I} C_i), p.a. \{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta\}$.

Lema 2.2.14. *Sea ζ una clase de R-módulos, entonces* $\xi_{\{\leq,E,\bigoplus\}}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)$.

Demostración. Ya que todo módulo tiene cápsula inyectiva y se puede sumergir inyectivamente en ella, es claro que $\zeta \subseteq \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)$. Ahora demostraremos que $\xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)$ es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas.
Sea $M \in \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)$, entonces $\exists f : M \rightarrowtail E(\bigoplus_{i\in I} C_i)$ para algún $\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$.
$\leq$) Sea $g : N \to M$ monomorfismo, entonces $fg : N \to E(\bigoplus_{i\in I} C_i)$ es monomorfismo $\therefore$ $N \in \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)$
E) Sabemos que $\exists g : M \hookrightarrow E(M)$ morfismo esencial y $E(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ inyectivo, entonces $\exists h : E(M) \to E(\bigoplus_{i\in I} C_i)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "g"'] & E(\bigoplus_{i\in I} C_i) \\ E(M) \arrow[ur, dashed, "\exists h"] & \end{tikzcd}.$$

Entonces $f = hg$ con f monomorfismo y g monomorfismo esencial, entonces h es monomorfismo, por el Teorema 1.4.6 $\therefore$ $E(M) \in \xi_{\leq}\xi_{E}\xi_{\bigoplus}(\zeta)$.

$\bigoplus$) Ahora sea $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\bigoplus}(\zeta)$, entonces para cada $j \in J$, $\exists f_j : M_j \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j})$ con $C_{i,j} \in \zeta$ para todo $i \in I$, por lo que tenemos el monomorfismo inducido $f = \bigoplus\limits_{j\in J} f_j : \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \rightarrowtail \bigoplus\limits_{j\in J} E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j})$. Por otro lado, si N_j es esencial en M_j, $\forall j$, entonces $\bigoplus\limits_{J} N_j$ es esencial en $\bigoplus\limits_{J} M_j$. Dado que $\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}$ es esencial en $E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j})$ $\forall j \in J$ tenemos que $\bigoplus\limits_{j\in J}(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j})$ es esencial en $\bigoplus\limits_{j\in J} E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j})$, con $E(\bigoplus\limits_{j\in J}(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}))$ inyectivo, por lo que existe $g : \bigoplus\limits_{j\in J} E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}) \to E(\bigoplus\limits_{j\in J}(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}))$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus\limits_{j\in J} M_j \arrow[d, tail, "f"] \\
\bigoplus\limits_{j\in J}(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}) \arrow[r, hook, "h"] \arrow[dr, hook, "l"'] & \bigoplus\limits_{j\in J} E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}) \arrow[d, dashed, "g"] \\
& E(\bigoplus\limits_{j\in J}(\bigoplus\limits_{i\in I} C_{i,j}))
\end{tikzcd} \quad .$$

Donde l, h son las inclusiones canónicas, por lo que son monomorfismos esenciales.
Entonces gh es monomorfismo y h es esencial, entonces g es un monomorfismo $\therefore$ $\bigoplus\limits_{j\in J} M_j \in \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\bigoplus}(\zeta)$.
$\therefore \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\bigoplus}(\zeta) \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.

Sea $\zeta' \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$ tal que $\zeta \in \zeta'$ y $M \in \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\bigoplus}(\zeta)$, entonces $\exists\{C_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta \subseteq \zeta'$ y un monomorfismo $f : M \rightarrowtail E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_i)$, pero $\bigoplus\limits_{i\in I} C_i \in \zeta'$, entonces $E(\bigoplus\limits_{i\in I} C_i) \in \zeta'$ por lo que $M \in \zeta'$ $\therefore \in \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\bigoplus}(\zeta) \subseteq \zeta'$.
$\therefore \xi_{\{\leq,E,\bigoplus\}}(\zeta) = \xi_{\leq}\xi_E\xi_{\bigoplus}(\zeta)$, por definición.

$\square$

Capítulo 3

Teorías de torsión y teorías de torsión hereditarias.

En este capítulo definiremos lo que es una teoría de torsión y lo que es una teoría de torsión hereditaria, daremos algunas de sus propiedades y caracterizaciones. Además, veremos que estas están íntimamente relacionadas a los prerradicales y radicales asociados a un anillo.

3.1. Teorías de torsión.

Definición 3.1.1. A una clase $\zeta \subseteq R-mod$ se le llama clase de pretorsión si $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus\}}$ y a sus elementos se les llamará módulos de pretorsión. Por otro lado, se le llama clase libre de pretorsión si $\zeta \in L_{\{\leq,\prod\}}$ y a sus elementos se les llamará módulos de libres de pretorsión.

Definición 3.1.2. Una teoría de torsión en $R-mod$ es una pareja ordenada $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ de clases de R-módulos tal que:
1) $\mathbb{T} = \{T \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall F \in \mathbb{L}\}$.
2) $\mathbb{L} = \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}\}$.

A la clase $\mathbb{T}$ de una teoría de torsión $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ se le llama clase de torsión y a los elementos de $\mathbb{T}$ se les llama módulos de torsión, por otra parte, $\mathbb{L}$ se llama clase libre de torsión y a sus elementos módulos libres de torsión.

Observación 3.1.3. *Por la Definición 3.1.2, las teorías de torsión están determinadas por su clase de torsión o su clase libre de torsión. Así que diremos que dos Teorías de torsión son iguales si sus clases de torsión son iguales o sus clases libres de torsión son iguales, es decir,* $(\mathbb{T},\mathbb{L})$=$(\mathbb{T}',\mathbb{L}')$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{T}=\mathbb{T}'$ *o* $\mathbb{L}=\mathbb{L}'$.

Lema 3.1.4. Son equivalentes para $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)$ y $(\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)$ teorías de torsión las siguientes condiciones:
1) $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$.
2) $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1$.

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $N \in \mathbb{L}_2$, entonces $Hom(M,N) = 0$ $\forall M \in \mathbb{T}_2$, entonces $Hom(M,N) = 0$ $\forall M \in \mathbb{T}_1$ ya que $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$ $\therefore$ $N \in \mathbb{L}_1$.
$\Leftarrow$)
Sea $M \in \mathbb{T}_1$, entonces $Hom(M,N) = 0$ $\forall N \in \mathbb{L}_1$, entonces $Hom(M,N) = 0$ $\forall N \in \mathbb{L}_2$ ya que $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1$ $\therefore$ $M \in \mathbb{T}_2$.

□

Definición 3.1.5. Para una clase $\zeta \subseteq R-mod$ definimos:
$\mathbb{L}_\zeta = \{F \in R-mod | Hom(C,F) = 0, \forall C \in \zeta\}$ y
$\mathbb{T}_\zeta = \{T \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall F \in \mathbb{L}_\zeta\}$.

Observación 3.1.6. *Es claro que $\zeta \subseteq \mathbb{T}_\zeta$, ya que si $M \in \zeta$ y $N \in \mathbb{L}_\zeta$, tenemos que $Hom(M,N) = 0$, por definición de $\mathbb{L}_\zeta$.*

Teorema 3.1.7. *Para una clase $\zeta \subseteq R-mod$, la pareja ordenada $(\mathbb{T}_\zeta, \mathbb{L}_\zeta)$ es una teoría de torsión y $\mathbb{T}_\zeta$ es la menor clase de torsión que contiene a ζ.*

Demostración. Sabemos ya que $\mathbb{T}_\zeta = \{T \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall F \in \mathbb{L}_\zeta\}$, así que bastaría ver que $\mathbb{L}_\zeta = \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}_\zeta\}$ para que $(\mathbb{T}_\zeta, \mathbb{L}_\zeta)$ sea teoría de torsión.
Sea $N \in \mathbb{L}_\zeta$ y $M \in \mathbb{T}_\zeta$, entonces $Hom(M,N) = 0$, por como se definió $\mathbb{T}_\zeta$ $\therefore$ $N \in \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}_\zeta\}$.
Ahora sea $N \in \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}_\zeta\}$, entonces $Hom(T,N) = 0$ $\forall T \in \mathbb{T}_\zeta$ y $\zeta \subseteq \mathbb{T}_\zeta$, entonces $Hom(T,N) = 0$ $\forall T \in \zeta$ $\therefore$ $N \in \mathbb{L}_\zeta$
$\therefore$ $\mathbb{L}_\zeta = \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}_\zeta\}$ $\therefore$ $(\mathbb{T}_\zeta, \mathbb{L}_\zeta)$ es teoría de torsión.
Ahora, sea $(\mathbb{T}', \mathbb{L}')$ es teoría de torsión tal que $\zeta \subseteq \mathbb{T}'$ y $N \in \mathbb{L}'$, entonces $\forall T \in \mathbb{T}'$ $Hom(T,N) = 0$, en particular $Hom(T,N) = 0$ $\forall T \in \zeta$ $\therefore$ $N \in \mathbb{L}_\zeta$ $\therefore$ $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}_\zeta$.

□

A $(\mathbb{T}_\zeta, \mathbb{L}_\zeta)$ la llamaremos teoría de torsión generada por ζ y la denotaremos por $\xi_{R-Tors}(\zeta)$.

Definición 3.1.8. De manera dual a la Definición 3.1.5, dada una clase ζ de R-módulos definimos:
$\mathbb{T}^\zeta = \{T \in R-mod | Hom(T,C) = 0, \forall C \in \zeta\}$ y
$\mathbb{L}^\zeta = \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}^\zeta\}$.

Observación 3.1.9. *Es claro que $\zeta \subseteq \mathbb{L}^\zeta$, ya que si $N \in \zeta$ y $M \in \mathbb{T}^\zeta$ tenemos que $Hom(M,N) = 0$, por definición de $\mathbb{T}^\zeta$.*

Teorema 3.1.10. *Para una clase $\zeta \subseteq R-mod$, la pareja ordenada $(\mathbb{T}^\zeta, \mathbb{L}^\zeta)$ es una teoría de torsión y $\mathbb{L}^\zeta$ es la menor clase libre de torsión que contiene a ζ.*

Demostración. Sabemos ya que $\mathbb{L}^\zeta = \{F \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}_\zeta\}$, así que bastaría ver que $\mathbb{T}^\zeta = \{T \in R-mod | Hom(T,F) = 0, \forall F \in \mathbb{L}^\zeta\}$ para que $(\mathbb{T}^\zeta, \mathbb{L}^\zeta)$ sea teoría de torsión.
Sea $M \in \mathbb{T}^\zeta$ y $N \in \mathbb{L}^\zeta$, entonces $Hom(M,N) = 0$, por como se definió $\mathbb{L}^\zeta$ $\therefore$ $M \in \{T \in$

$R-mod|Hom(T,F)=0, \forall F \in \mathbb{L}^{\zeta}\}$.
Ahora sea $M \in \{T \in R-mod|Hom(T,F)=0, \forall F \in \mathbb{L}^{\zeta}\}$, entonces $Hom(M,F)=0$ $\forall F \in \mathbb{L}^{\zeta}$ y $\zeta \subseteq \mathbb{L}^{\zeta}$, entonces $Hom(M,F)=0\ \forall F \in \zeta \therefore M \in \mathbb{T}^{\zeta}$
$\therefore \mathbb{T}^{\zeta}=\{T \in R-mod|Hom(T,F)=0, \forall F \in \mathbb{L}_{\zeta}\} \therefore (\mathbb{T}^{\zeta},\mathbb{L}^{\zeta})$ es teoría de torsión.
Ahora sea $(\mathbb{T}',\mathbb{L}')$ es teoría de torsión tal que $\zeta \subseteq \mathbb{L}'$ y $M \in \mathbb{T}'$, entonces $\forall F \in \mathbb{L}'$ $Hom(M,F)=0$, en particular $Hom(M,F)=0\ \forall F \in \zeta \therefore M \in \mathbb{T}^{\zeta} \therefore \mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}^{\zeta}$.

□

A $(\mathbb{T}^{\zeta},\mathbb{L}^{\zeta})$ la llamaremos teoría de torsión cogenerada por ζ.

Lema 3.1.11. Sea $\mathbb{T}$ una clase de pretorsión. Para un módulo M existe el mayor submódulo de pretorsión, es decir, $\{N \in R-mod|\ N \leq M \text{ y } N \in \mathbb{T}\}$ tiene elemento mayor.

Demostración. Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ la familia de submódulos de M que son módulos de pretorsión, es decir, $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}$, entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathbb{T}$, pues $\mathbb{T}$ es una clase cerrada bajo sumas directas. Consideremos ahora el epimorfismo $\pi : \bigoplus_{i\in I} N_i \to \sum_{i\in I} N_i$ que manda a cada elemento de $\bigoplus_{i\in I} N_i$ a la suma de sus entradas distintas de cero, entonces $\sum_{i\in I} N_i \in \mathbb{T}$, pues $\mathbb{T}$ es una clase cerrada bajo cocientes y $N_i \leq \sum_{i\in I} N_i \leq M\ \forall i \in I \therefore \sum_{i\in I} N_i$ es el mayor submódulo de M que es módulo de torsión.

□

Teorema 3.1.12. *Son equivalentes para* $\mathbb{T} \subseteq R-mod$*:*
1) $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión para alguna teoría de torsión* $(\mathbb{T},\mathbb{L})$.
2) $\mathbb{T} \in L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
$\twoheadrightarrow$) Sean $T \in \mathbb{T}$ y $f : T \to N$ epimorfismo. Si $F \in \mathbb{L}$ y $g \in Hom(N,F)$ tenemos que $gf : T \to F$, por lo que $gf \in Hom(T,F)=0$, entonces $gf=0$ y f es epimorfismo, por lo que $g=0$. Así que $Hom(N,F)=0$, entonces $N \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrada bajo cocientes.

$\bigoplus$) Sea $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{L}$. Tenemos que $Hom(\bigoplus_{i\in I} N_i,F) \cong \prod_{i\in I} Hom(N_i,F) \cong 0$ ya que $Hom(N_i,F)=0$ para toda $i \in I$. Así que $Hom(\bigoplus_{i\in I} N_i,F)=0$, entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrado bajo sumas directas.

ext) Sea $0 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} T_2 \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $T_1,T_2 \in \mathbb{T}$. Si $F \in \mathbb{L}$ y $h \in Hom(M,F)$, entonces $hf=0$ ya que $hf \in Hom(T_1,F)=0$, entonces, por la propiedad universal del conúcleo, existe $j : T_2 \to F$ morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & T_2 \arrow[r] \arrow[dl, "j"] & 0 \\
& & F & &
\end{tikzcd}$$

.

Además, $j \in Hom(T_2, F) = 0$, entonces $h = jg = 0$. Así que $Hom(M, F) = 0$, por lo que $M \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones.
$\therefore \mathbb{T} \in L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.

2) $\Rightarrow$ 1)
Consideremos $(\mathbb{T}', \mathbb{L})$ la teoría de torsión generada por $\mathbb{T}$, es decir,
$\mathbb{L} = \{F \in R-mod | Hom(C, F) = 0, \forall C \in \mathbb{T}\}$ y $\mathbb{T}' = \{T \in R-mod | Hom(T, F) = 0, \forall F \in \mathbb{L}\}$. Ya sabemos que $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}'$ así que bastaría ver que $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$ para demostrar 1).
Sea $T \in \mathbb{T}'$, entonces $Hom(T, F) = 0$ $\forall F \in \mathbb{L}$.
Como $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión, existe un submódulo mayor T' de T tal que $T' \in \mathbb{T}$, por el Lema 3.1.11.
Supongamos que existe $h : T_1 \to \dfrac{T}{T'}$ morfismo distinto de cero con $T_1 \in \mathbb{T}$, escribimos $h(T_1) = \dfrac{L}{T'}$ donde $T' \leq L \leq T$, además, sabemos que $h(T_1) \neq 0$ y que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo cocientes, por lo que $h(T_1) = \dfrac{L}{T'} \in \mathbb{T}$. Consideramos ahora la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow L \longrightarrow \frac{L}{T'} \longrightarrow 0 \qquad .$$

Sabemos que $\mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones, por lo que $L \in \mathbb{T}$. Como T' es el mayor con esta propiedad, entonces $L = T'$, lo que es una contradicción.
Entonces $Hom(T_1, \dfrac{T}{T'}) = 0 \therefore \dfrac{T}{T'} \in \mathbb{L}$.
Sabemos que $\dfrac{T}{T'} \in \mathbb{T}'$ ya que $\mathbb{T}'$ es cerrada bajo cocientes, entonces $\dfrac{T}{T'} \in \mathbb{T}' \cap \mathbb{L} = 0 \therefore$ $\dfrac{T}{T'} = 0$, por lo que $T = T' \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$.

$\square$

Observación 3.1.13. *Por los Teoremas 3.1.7 y 3.1.12, tenemos que si* $\zeta \subseteq R-mod$, *entonces* $\xi_{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext}(\zeta)$ *es la clase de torsión de* $\xi_{R-Tors}(\zeta)$.

Lema 3.1.14. Sea $\mathbb{L}$ una clase libre de pretorsión. Para un módulo M existe el menor submódulo N tal que $\dfrac{M}{N}$ es libre de pretorsión, es decir, $\{N \in R-mod | \ N \leq M$ y $\dfrac{M}{N} \in \mathbb{L}\}$ tiene elemento menor.

Demostración. Sea $\{N_i\}_{i \in I}$ la familia de submódulos de M tal que $\dfrac{M}{N_i}$ es módulo de pretorsión para toda $i \in I$, es decir, $\{\dfrac{M}{N_i}\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{L}$, entonces $\prod\limits_{i \in I} \dfrac{M}{N_i} \in \mathbb{L}$, pues $\mathbb{L}$ es una clase cerrada bajo productos. Consideremos ahora el morfismo $f : M \to \prod\limits_{i \in I} \dfrac{M}{N_i}$ dado por $f(x) = (x + N_i)_i$, entonces tenemos que $Ker(f) = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$, por lo que $\dfrac{M}{Ker(f)} = \dfrac{M}{\bigcap\limits_{i \in I} N_i}$ se sumerge en $\prod\limits_{i \in I} \dfrac{M}{N_i}$ mediante el morfismo $\overline{f} : \dfrac{M}{\bigcap\limits_{i \in I} N_i} \to \prod\limits_{i \in I} \dfrac{M}{N_i}$

dado por $\overline{f}(x + \bigcap\limits_{i\in I} N_i) = f(x)$, por lo que $\dfrac{M}{\bigcap\limits_{i\in I} N_i} \in \mathbb{L}$, pues $\mathbb{L}$ es una clase cerrada bajo submódulos y $\bigcap\limits_{i\in I} N_i \leq N_i \leq M \ \forall i \in I$.

$\therefore \bigcap\limits_{i\in I} N_i$ es el elemento menor de $\{N \in R-mod |\ N \leq M$ y $\dfrac{M}{N} \in \mathbb{L}\}$.

$\square$

Teorema 3.1.15. *Son equivalentes para* $\mathbb{L} \subseteq R - mod$*:*
1) $\mathbb{L}$ *es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión* $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$*.*
2) $\mathbb{L} \in L_{\{\leq, \prod, ext\}}$.

Demostración. 1)⇒2)
$\leq$) Sea $i : N \to F$ monomorfismo con $F \in \mathbb{L}$ y $T \in \mathbb{T}$. Si $g : T \to N$ es un morfismo, entonces $ig \in Hom(T, F) = 0$, por lo que $g = 0$. Entonces $Hom(T, N) = 0$, por lo que $N \in \mathbb{L} \therefore \mathbb{L}$ es cerrada bajo submódulos.

$\prod$) Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{L}$ y $T \in \mathbb{T}$. Tenemos que $\prod Hom(T, M_i) = 0$ ya que $Hom(T, M_i) = 0$ para toda $i \in I$ y sabemos que $Hom(T, \prod\limits_{i\in I} M_i) \cong \prod\limits_{i\in I} Hom(T, M_i)$, por lo que $Hom(T, \prod\limits_{i\in I} M_i) = 0$, entonces $\prod\limits_{i\in I} M_i \in \mathbb{L} \therefore \mathbb{L}$ es cerrado bajo productos.

ext) Sea $0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F_2 \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $F_1, F_2 \in \mathbb{L}$. Si $T \in \mathbb{T}$ y $h \in Hom(T, M)$, entonces $gh = 0$ ya que $gh \in Hom(T, F_2) = 0$, entonces, por la propiedad universal del núcleo, existe $j : T \to F_1$ morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & F_2 \arrow[r] & 0 \\
& & T \arrow[ul, "j"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Y $j \in Hom(T, F_1) = 0$, entonces $h = fj = 0$. Entonces $Hom(T, M) = 0$, por lo que $M \in \mathbb{L} \therefore \mathbb{L}$ es cerrada bajo extensiones.
$\therefore \mathbb{L} \in L_{\{\leq, \prod, ext\}}$.

2)⇒1)
Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{L}')$ la teoría de torsión cogenerada por $\mathbb{L}$, es decir, $\mathbb{T} = \{T \in R{-}mod | Hom(T, C) = 0, \forall C \in \mathbb{L}\}$ y $\mathbb{L}' = \{F \in R - mod | Hom(T, F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}\}$.
Sea $F \in \mathbb{L}'$, como $\mathbb{L}$ es una clase libre de pretorsión, existe C elemento menor en $\{N \in R{-}mod |\ N \leq F$ y $\dfrac{F}{N} \in \mathbb{L}\}$, por el Lema 3.1.14. Sea $F' \in \mathbb{L}$ y $f : C \to F'$ morfismo distinto de cero, por lo que $Ker(f)$ es un submódulo propio de C y $\dfrac{C}{Ker(f)} = f(C) \leq F'$, entonces $\dfrac{C}{Ker(f)} \in \mathbb{L}$, pues $\mathbb{L}$ es una clase cerrada bajo submódulos. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \frac{C}{Ker(f)} \longrightarrow \frac{F}{Ker(f)} \longrightarrow \frac{F}{C} \longrightarrow 0 \qquad .$$

Sabemos que $\dfrac{C}{Ker(f)}, \dfrac{F}{C} \in \mathbb{L}$, entonces $\dfrac{F}{Ker(f)} \in \mathbb{L}$, lo que contradice que C es el menor módulo en $\{N \in R-mod|\ N \leq F \text{ y } \dfrac{F}{N} \in \mathbb{L}\} \therefore Hom(C, F') = 0 \therefore C \in \mathbb{T}$.
Así que $C \in \mathbb{T} \cap \mathbb{L}'$, por lo que $C = 0 \therefore F \in \mathbb{L} \therefore \mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}$ y es claro que $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}' \therefore \mathbb{L} = \mathbb{L}'$.

□

Notación 3.1.16. Denotaremos $R - Tors$ a la clase de todas las Teorías de Torsión sobre el anillo R.

Observación 3.1.17. *Podemos ver que (R-Tors,$\leq$,$\wedge$,$\vee$,0,1) es una (gran)retícula completa, con*
1) $(\mathbb{T}_1, \mathbb{L}_1) \leq (\mathbb{T}_2, \mathbb{L}_2)$ *si y sólo si* $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$ *(equivalentemente,* $\mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1$*, por el Lema 3.1.4),*
2) $0 = (\{0\}, R - mod)$*,*
3) $1 = (R - mod, \{0\})$*,*
4) $\bigwedge_{i \in I} (\mathbb{T}_i, \mathbb{L}_i) = \xi_{R-Tors}(\bigcap_{i \in I} \mathbb{T}_i)$ *y*
5)$\bigvee_{i \in I} (\mathbb{T}_i, \mathbb{L}_i) = \xi_{R-Tors}(\bigcup_{i \in I} \mathbb{T}_i)$*.*

Teorema 3.1.18. *Existe un isomorfismo de retículas entre* $R - Tors$ *y* $L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.12, tenemos que si $(\mathbb{T}, \mathbb{L}) \in R - Tors$, entonces $\mathbb{T} \in L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$, por lo que la siguiente función está bien definida

$$f : R - Tors \longrightarrow L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$$

$$(\mathbb{T}, \mathbb{L}) \longmapsto \mathbb{T} \qquad .$$

Y $(\mathbb{T}_1, \mathbb{L}_1) \leq (\mathbb{T}_2, \mathbb{L}_2) \Leftrightarrow \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \Leftrightarrow f((\mathbb{T}_1, \mathbb{L}_1)) \subseteq f((\mathbb{T}_2, \mathbb{L}_2))$, por lo que f es un morfismo de órdenes parciales.
Si $\mathbb{T}' \in L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$, entonces $\mathbb{T}'$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión $(\mathbb{T}', \mathbb{L})$, por el Teorema 3.1.12, por lo que $\mathbb{T}' \in Im(f) \therefore f$ es sobre y es claramente inyectiva ya que toda teoría de torsión está determinada por cualquiera de sus componentes $\therefore f$ es un isomorfismo de retículas.

□

Teorema 3.1.19. *Existe un anti-isomorfismo de retículas entre* $R - Tors$ *y* $L_{\{\leq, \prod, ext\}}$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.15, tenemos que si $(\mathbb{T}, \mathbb{L}) \in R - Tors$, entonces $\mathbb{L} \in L_{\{\leq, \prod, ext\}}$, por lo que la siguiente función está bien definida

$$\begin{tikzcd} f : R - Tors \arrow[rr] & & L_{\{\leq,\prod,ext\}} \\ (\mathbb{T},\mathbb{L}) \arrow[rr, mapsto] & & \mathbb{L} \end{tikzcd} .$$

Si $\mathbb{L}' \in L_{\{\leq,\prod,ext\}}$, entonces $\mathbb{L}'$ es una clase libre de torsión para alguna teoría de torsión $(\mathbb{T},\mathbb{L}')$, por el Teorema 3.1.15, por lo que $\mathbb{L}' \in Im(f)$ $\therefore$ f es sobre y es claramente inyectiva $\therefore$ f es biyectiva.
Además, $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1) \leq (\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2) \Leftrightarrow \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1 \Leftrightarrow f((\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)) \subseteq f((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1))$, por lo que f es un anti-isomorfismo de retículas.

□

3.2. Radicales y prerradicales

Definición 3.2.1. Un prerradical r es un subfuntor de la identidad en $R - mod$. Es decir, $\{i_{r(M)}\}_{M \in R-mod} = i_r : r \hookrightarrow id_{R-mod}$ es una transformacion natural, donde $i_{r(M)}$ es la inclusión canónica de $r(M)$ a M. Explícitamente, para todo $f : N \to M$ morfismo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} r(N) \arrow[r, hook, "i_{r(N)}"] \arrow[d, "r(f)=f_{|r(M)}"'] & N \arrow[d, "f"] \\ r(M) \arrow[r, hook, "i_{r(M)}"] & M \end{tikzcd} .$$

Definición 3.2.2. Decimos que un prerradical r es un radical si $r(\dfrac{M}{r(M)}) = 0$, $\forall M \in R - mod$.

Lema 3.2.3. Sea r un prerradical y $\{M_i\}_{i\in I} \in R - mod$. Entonces r conmuta con $\bigoplus$, es decir, $r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i)$.

Demostración. Como r es un prerradical para toda $i \in I$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} r(M_i) \arrow[r, hook, "i_{r(M_i)}"] \arrow[d, "r(i_{M_i})=i_{|r(M_i)}"'] & M_i \arrow[d, "i_{M_i}"] \\ r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) \arrow[r, hook, "i_{r(\bigoplus_{i\in I} M_i)}"] \arrow[d, "r(\pi_{M_i})=\pi_{|r(M_i)}"'] & \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_{M_i}"] \\ r(M_i) \arrow[r, hook, "i_{r(M_i)}"] & M_i \end{tikzcd} .$$

Además, sabemos que $\pi_{M_i} \circ i_{M_i} = id_{M_i}$, entonces $r(\pi_{M_i} \circ i_{M_i}) = r(\pi_{M_i}) \circ r(i_{M_i}) = r(id_{M_i}) = id_{r(M_i)}$.
Por lo que $\bigoplus\limits_{i\in I} r(i_{M_i}) : \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i) \to r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i)$ y $\bigoplus\limits_{i\in I} r(\pi_{M_i}) : r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) \to \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i)$ son inversos la una de la otra $\therefore \bigoplus\limits_{i\in I} r(i_{M_i})$ es isomorfismo.
$\therefore r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i)$.

□

Observación 3.2.4. *En el Lema 3.2.3 usamos inclusiones y proyecciones para determinar el isomorfismo, asi que es fácil de ver que* $r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i)$.

Definición 3.2.5. Sea $R-pre$ la clase de los prerradicales en $R-mod$. Definimos en ella el siguiente orden parcial:
$r \leq s \Leftrightarrow r(M) \leq s(M), \forall M \in R-mod$.

Lema 3.2.6. Si $r \in R-pre$, entonces $\mathbb{T}_r = \{M \in R-mod | r(M) = M\}$ es una clase de pretorsión.

Demostración. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}_r$, entonces, por el Lema 3.2.3, $r(\bigoplus\limits_{i\in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} r(M_i) = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \therefore \mathbb{T}_r$ es cerrada bajo sumas directas.
Sea $M \in \mathbb{T}_r$ y $f : M \to N$ epimorfismo, entonces $N = f(M) = f(r(M)) \leq r(N) \leq N$ $\therefore N \in \mathbb{T}_r \therefore \mathbb{T}_r$ es cerrada bajo cocientes.
$\therefore \mathbb{T}_r \in L_{\{\bigoplus, \twoheadrightarrow\}}$.

□

Definición 3.2.7. $\mathbb{T}_r$ se llama la clase de pretorsión inducida por r.

Lema 3.2.8. Si $r \in R-pre$, entonces $\mathbb{L}_r = \{M \in R-mod | r(M) = 0\}$ es una clase libre de pretorsión.

Demostración. Sea $M \in \mathbb{L}_r$ y $f : N \to M$ monomorfismo, entonces $r(N) \cong f(r(N)) \leq r(M) = 0$, por lo que $r(N) = 0 \therefore N \in \mathbb{L}_r \therefore \mathbb{L}_r$ es cerrada bajo submódulos.
Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{L}_r$ y $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} M_i \to M_i$ la proyección canónica. Así que
$r(\pi_i) = \pi_{i|r(\prod\limits_{i\in I} M_i)} : r(\prod\limits_{i\in I} M_i) \to r(M_i)$ y $r(M_i) = 0$, por lo que $\pi_i(r(\prod\limits_{i\in I} M_i)) = 0$ para toda $i \in I \therefore r(\prod\limits_{i\in I} M_i)$=0 $\therefore \prod\limits_{i\in I} M_i \in \mathbb{L}_r \therefore \mathbb{L}_r$ es cerrada bajo productos.
$\therefore \mathbb{L} \in L_{\{\leq, \prod\}}$.

□

Definición 3.2.9. $\mathbb{L}_r$ se llama la clase libre de pretorsión inducida por r.

Definición 3.2.10. Para una clase ζ de pretorsión denotaremos por $r_\zeta(M)$ al mayor submódulo de M que esta en ζ, el cual existe por el Lema 3.1.11.

Proposición 3.2.11. *Si* $\zeta \in L_{\{\bigoplus \twoheadrightarrow\}}$, *entonces* $r_\zeta(\ )$ *es un prerradical.*

Demostración. Por definición, $r_\zeta(M) \leq M$. Además, si $f : M \to N$ es un morfismo tenemos que $f(r_\zeta(M)) \in \zeta$, ya que ζ es cerrada bajo cocientes, entonces $f(r_\zeta(M)) \leq r_\zeta(N) \therefore r_\zeta(\ )$ es un prerradical.

□

Definición 3.2.12. Diremos que un prerradical r es idempotente si $r \circ r = r$ y $R-pid$ denotará la clase de los prerradicales idempotentes.

Observación 3.2.13. *Tenemos que $r_\zeta(M) \in \zeta$, entonces $r_\zeta(r_\zeta(M)) = r_\zeta(M)$, por lo que $r_\zeta(\ )$ es un prerradical idempotente.*

Teorema 3.2.14. *$R - pid$ y $L_{\{\bigoplus, \twoheadrightarrow\}}$ son biyectables.*

Demostración. Tenemos la función

$$\begin{array}{rcl} f : L_{\{\bigoplus,\twoheadrightarrow\}} & \longrightarrow & R - pid \\ \zeta & \longmapsto & r_\zeta \end{array} .$$

y también la función

$$\begin{array}{rcl} g : R - pid & \longrightarrow & L_{\{\bigoplus,\twoheadrightarrow\}} \\ r & \longmapsto & \mathbb{T}_r \end{array} .$$

Veamos que son inversas entre sí. Sea $\zeta \in L_{\{\bigoplus,\twoheadrightarrow\}}$, entonces $g(f(\zeta)) = \mathbb{T}_{r_\zeta}$.
Si $M \in \zeta$, entonces $r_\zeta(M) = M$, por definición, por lo que $M \in \mathbb{T}_{r_\zeta} \therefore \zeta \subseteq \mathbb{T}_{r_\zeta}$.
Si $M \in \mathbb{T}_{r_\zeta}$, entonces $M = r_\zeta(M) \in \zeta \therefore \mathbb{T}_{r_\zeta} \subseteq \zeta \therefore \mathbb{T}_{r_\zeta} = \zeta$.
$\therefore g \circ f = id_{L_{\{\bigoplus,\twoheadrightarrow\}}}$.
Por otro lado, tenemos que si $r \in R-pid$ y $M \in R-mod$, entonces $r(r(M)) = r(M) \in \mathbb{T}_r$, por lo que $r(M) \leq r_{\mathbb{T}_r}(M)$, por definición. Además, como $r_{\mathbb{T}_r}(M) \in \mathbb{T}_r$ tenemos que $r(r_{\mathbb{T}_r}(M)) = r_{\mathbb{T}_r}(M) \leq M \therefore r_{\mathbb{T}_r}(M) \leq r(M) \therefore f(g(r)) = r_{\mathbb{T}_r} = r$.
$\therefore f \circ g = id_{R-pid} \therefore f$ es una biyección.

□

Proposición 3.2.15. *Sea r un radical en $R-mod$, entonces $r(M)$ es el menor elemento en el conjunto $\{N \leq M | \frac{M}{N} \in \mathbb{L}_r\}$.*

Demostración. Es claro que $r(M) \leq M$ y como r es un radical tenemos que $r(\frac{M}{r(M)}) = 0$, entonces $\frac{M}{r(M)} \in \mathbb{L}_r \therefore r(M) \in \{N \leq M | \frac{M}{N} \in \mathbb{L}_r\}$.
Sea N tal que $\frac{M}{N} \in \mathbb{L}_r$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & \frac{M}{N} \\ r(M) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\pi_{|r(M)}"'] & r(\frac{M}{N}) = 0 \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}.$$

De donde obtenemos que $r(M) \leq Ker(\pi) = N$.

□

Proposición 3.2.16. *Si r es un prerradical idempotente, entonces $\mathbb{L}_r$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Sean $M, L \in \mathbb{L}_r$ y $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta. Entonces $r(M) = r(L) = 0$, por lo que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\ & 0 = r(M) \arrow[u, hook, "i_{r(M)}"] \arrow[r, "f_{|r(M)}"] & r(N) \arrow[u, hook, "i_{r(N)}"] \arrow[r, "g_{|r(N)}"] & r(L) = 0 \arrow[u, hook, "i_{r(L)}"] & \end{tikzcd}.$$

Además, tenemos que $r(N) \leq Ker(g) = Im(f) \cong M$, por lo que $r(N) = r(r(N)) \leq r(Im(f)) \cong r(M) = 0$, entonces $r(N) = 0 \therefore N \in \mathbb{L}_r$.

□

Definición 3.2.17. Un funtor r es exacto izquierdo si para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$, se tiene que $0 \longrightarrow r(M) \xrightarrow{r(f)} r(N) \xrightarrow{r(g)} r(L)$ es exacta.

Lema 3.2.18. Son equivalentes para r un prerradical:
1) r es un funtor exacto izquierdo.
2) $N \leq M \Rightarrow r(N) = N \cap r(M)$.
3) r es idempotente y $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo submódulos.

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2)
Sea $N \leq M$, $L = \dfrac{M}{N}$ y $\pi : M \to L$ la proyección canónica. Como r es exacto izquierdo tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "\pi"] & L \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & r(N) \arrow[u, hook, "i_{r(N)}"] \arrow[r, "f_{|r(N)}"] & r(M) \arrow[u, hook, "i_{r(M)}"] \arrow[r, "\pi_{|r(M)}"] & r(L) \arrow[u, hook, "i_{r(L)}"] & \end{tikzcd}.$$

De donde obtenemos que $Ker(\pi_{|r(M)}) = N \cap r(M)$ y por otro lado, como el segundo renglón es exacto, tenemos que $Ker(\pi_{|r(M)}) = r(N) \therefore r(N) = N \cap r(M)$.
2)$\Rightarrow$ 3)

Sabemos que $r(M) \leq M$, entonces $r(r(M)) = r(M) \cap r(M) = r(M) \therefore r$ es idempotente.
Ahora sea $M \in \mathbb{T}_r$ y $N \leq M$, entonces $r(M) = M$ y $r(N) = N \cap r(M) = N \cap M = N$. $\therefore \mathbb{T}_r$ es cerrada bajo submódulos.
3)$\Rightarrow$ 2)
Sea $N \leq M$, entonces $r(N) \leq r(M)$ y sabemos que $r(N) \leq N$, por lo que $r(N) \leq N \cap r(M)$. Ademas, $r(M) \in \mathbb{T}_r$, por ser r idempotente, y $r(r(M) \cap N) = r(M) \cap N$ puesto que $r(M) \in \mathbb{T}_r$, $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo submódulos y $r(M) \cap N \leq r(M)$. Además, $r(M) \cap N \leq N$, por lo que $r(M) \cap N = r(r(M) \cap N) \leq r(N)$.
2)$\Rightarrow$1)
Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, como r es un funtor obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & r(N) \arrow[u, hook, "i_{r(N)}"] \arrow[r, "f_{|r(N)}"] & r(M) \arrow[u, hook, "i_{r(M)}"] \arrow[r, "g_{|r(M)}"] & r(L) \arrow[u, hook, "i_{r(L)}"] &
\end{tikzcd}.$$

De donde obtenemos que $Ker(f_{|r(N)}) \leq Ker(f) = 0$ y $Ker(g_{|r(M)}) = f(N) \cap r(M) = r(f(N))$, por lo que $0 \longrightarrow r(N) \xrightarrow{f_{|r(N)}} r(M) \xrightarrow{g_{|r(M)}} r(L)$ es exacta $\therefore r$ es exacto izquierdo.

$\square$

Lema 3.2.19. Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ una teoría de torsión, entonces $r_{\mathbb{T}}$ es un radical idempotente.

Demostración. Sabemos ya que $r_{\mathbb{T}}$ es un prerradical idempotente, así que solo falta ver que es un radical. Si $\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(M)} \leq \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}$ y $\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(M)} \in \mathbb{T}$, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow r_{\mathbb{T}}(M) \longrightarrow L \longrightarrow \frac{L}{r_{\mathbb{T}}(M)} \longrightarrow 0 \qquad .$$

Como $\mathbb{T}$ es cerrado bajo extensiones, tenemos que $L \in \mathbb{T}$. Por lo que $L \leq r_{\mathbb{T}}(M)$, por lo que $\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(M)} = 0$, entonces $\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} \in \mathbb{L}$. $\therefore r_{\mathbb{T}}(\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)})$, es decir, $r_{\mathbb{T}}$ es un radical.

$\square$

Lema 3.2.20. Si r es un radical idempotente, entonces $(\mathbb{T}_r, \mathbb{L}_r)$ es una teoría de torsión.

Demostración. Sean $N \in \mathbb{T}_r$, $M \in \mathbb{L}_r$ y $f : N \to M$ un morfismo, entonces $f(N) \in \mathbb{T}_r$ pues $\mathbb{T}_r$ es ser cerrada bajo cocientes. Además, $f(N) \in \mathbb{L}_r$ ya que $f(N) \leq M$ con $M \in \mathbb{L}_r$. Por lo tanto $f(M) = 0$, es decir, $f = 0$.
Notemos primero que como r es un radical, $r(\dfrac{N}{r(N)}) = 0$ para toda $N \in R - mod$, entonces $\dfrac{N}{r(N)} \in \mathbb{L}_r$ para toda $N \in R - mod$.
Ahora si $N \in R - mod$ es tal que $Hom(N, M) = 0$, $\forall M \in \mathbb{L}_r$, entonces

$Hom(N, \dfrac{N}{r(N)}) = 0$. Por lo que $\dfrac{N}{r(N)} = 0 \therefore r(N) = N \therefore N \in \mathbb{T}_r$.
Por otro lado, si $M \in R - mod$ es tal que $Hom(N, M) = 0$, $\forall N \in \mathbb{T}_r$, entonces $Hom(r(M), M) = 0$ ya que $r(r(M)) = r(M)$, por lo que $r(M) \in \mathbb{T}_r$. Así que $r(M) = 0$, entonces $M \cong \dfrac{M}{r(M)} \in \mathbb{L}_r$, entonces $M \in \mathbb{L}_r$.
$\therefore$ $(\mathbb{T}_r, \mathbb{L}_r)$ es una teoría de torsión.

$\square$

Observación 3.2.21. *Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ una teoría de torsión, entonces sabemos que $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión cerrada bajo extensiones, por lo que $\mathbb{T}_{r_\mathbb{T}} = \mathbb{T}$. Además, $(\mathbb{T}, \mathbb{L}_{r_\mathbb{T}})$=$(\mathbb{T}_{r_\mathbb{T}}, \mathbb{L}_{r_\mathbb{T}})$, es una teoría de torsión, por lo que $\mathbb{L}_{r_\mathbb{T}} = \mathbb{L}$.*

Teorema 3.2.22. *Existe una biyección entre $R-Tors$ y los radicales idempotentes en $R - mod$.*

Demostración. Sea $R-rid$ la clase de los radicales idempotentes en $R-mod$, entonces tenemos la función

$$\begin{aligned} f : R - Tors &\longrightarrow R - rid \\ (\mathbb{T}, \mathbb{L}) &\longmapsto r_\mathbb{T} \end{aligned} .$$

También tenemos la función

$$\begin{aligned} g : R - rid &\longrightarrow R - Tors \\ r &\longmapsto (\mathbb{T}_r, \mathbb{L}_r) \end{aligned} .$$

Por los Lemas 3.2.19 y 3.2.20, estas funciones están bien definidas. Veamos ahora que son inversas entre sí. Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{L}) \in R-Tors$, por el Teorema 3.2.14, tenemos que $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{r_\mathbb{T}}$ y las teorías de torsión están determinadas por cualquiera de sus partes (ya sea su parte libre de torsión o su parte de torsión), por lo que $g(f((\mathbb{T}, \mathbb{L}))) = (\mathbb{T}_{r_\mathbb{T}}, \mathbb{L}_{r_\mathbb{T}}) = (\mathbb{T}, \mathbb{L})$.
$\therefore g \circ f = id_{R-Tors}$.
Por otro lado, tenemos que si $r \in R - rid$, entonces r es un radical idempotente. Así que, por el Teorema 3.2.14, tenemos que $r_{\mathbb{T}_r} = r \therefore f(g(r)) = r_{\mathbb{T}_r} = r$.
$\therefore f \circ g = id_{R-rid} \therefore f$ es una biyección.

$\square$

3.3. Teorías de torsión hereditarias.

Teorema 3.3.1. *Son equivalentes para $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ teoría de torsión:*
1) $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos.
2) $\mathbb{L}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Sea $M \in \mathbb{L}$. Sabemos que $r_{\mathbb{T}}$ es un radical idempotente y $\mathbb{T}$=$\mathbb{T}_{r_{\mathbb{T}}}$ es cerrada bajo submódulos, por lo que se cumplen las condiciones del Lema 3.2.18. Entonces tenemos que $0 = r_{\mathbb{T}}(M) = r_{\mathbb{T}}(E(M)) \cup M$ y como M es esencial en $E(M)$, por lo que $r_{\mathbb{T}}(E(M)) = 0 \therefore E(M) \in \mathbb{L}$.
2) $\Rightarrow$ 1)
Sea $N \in \mathbb{T}$ y $L \leq N$. Como $E(\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)})$ es inyectivo, existe $f : N \to E(\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)})$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & N \arrow[ddl, dashed, "f"] \\
& \dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)} \arrow[d, "i'"] & \\
& E(\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)}) &
\end{tikzcd}.$$

Además, tenemos que $\mathbb{L}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas y $\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)} \in \mathbb{L}$, entonces $E(\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)}) \in \mathbb{L}$. Además, tenemos que $N \in \mathbb{T}$, entonces $f = 0$.
Por lo que tenemos $i' \circ \pi = f \circ i = 0$, entonces $\pi = 0$, por lo que $\dfrac{L}{r_{\mathbb{T}}(L)} = 0$.
$\therefore L = r_{\mathbb{T}}(L) \in \mathbb{L}$.

$\square$

Definición 3.3.2. Una teoría de torsión hereditaria en $R-mod$ es una pareja ordenada $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ de clases de R-módulos tal que:
1) $\mathbb{T} = \{T \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall F \in \mathbb{L}\}$.
2) $\mathbb{L} = \{F \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in \mathbb{T}\}$.

Proposición 3.3.3. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *es una teoría de torsión hereditaria, entonces* $\mathbb{T} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.

Demostración. $\leq$) Sean $T \in \mathbb{T}$ y $f : N \to T$ monomorfismo. Si $F \in \mathbb{L}$ y $g \in Hom(N, E(F))$, ya que $E(F)$ es inyectivo, existe $h : T \to E(F)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & T \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& E(F) &
\end{tikzcd}.$$

Además, $h \in Hom(T, E(F)) = 0$, entonces $h = 0$, por lo que $0 = h \circ f = g$.
Entonces $Hom(N, E(F)) = 0$, por lo que $N \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos.

$\twoheadrightarrow$) Sean $T \in \mathbb{T}$ y $f : T \to N$ epimorfismo. Si $F \in \mathbb{L}$ y $g \in Hom(N, E(F))$ tenemos que $gf : T \to E(F)$, por lo que $gf \in Hom(T, E(F)) = 0$, entonces $gf = 0$ y f es epimorfismo, por lo que $g = 0$. Entonces $Hom(N, E(F)) = 0$, por lo que $N \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrada bajo cocientes.

$\bigoplus$) Sea $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{L}$.
Tenemos que $Hom(\bigoplus\limits_{i\in I} N_i, E(F)) \cong \prod\limits_{i\in I} Hom(N_i, E(F)) \cong 0$ ya que $Hom(N_i, E(F)) = 0$ para toda $i \in I$. Entonces $Hom(\bigoplus\limits_{i\in I} N_i, E(F)) = 0$, por lo que $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrado bajo sumas directas.

ext) Sea $0 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} T_2 \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$. Si $F \in \mathbb{L}$ y $h \in Hom(M, E(F))$, entonces $hf = 0$ ya que $hf \in Hom(T_1, E(F)) = 0$, además, por la propiedad universal del conúcleo, existe $j : T_2 \to E(F)$ morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & T_2 \arrow[r] \arrow[dl, "j"] & 0 \\
& & E(F) & &
\end{tikzcd}.$$

Además, $j \in Hom(T_2, E(F)) = 0$, entonces $h = jg = 0$. Entonces $Hom(M, E(F)) = 0$, por lo que $M \in \mathbb{T} \therefore \mathbb{T}$ es cerrada bajo extensiones.
$\therefore \mathbb{T} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.

□

Teorema 3.3.4. *Son equivalentes:*
1) $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *es una teoría de torsión hereditaria.*
2) $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *es una teoría de torsión y* $\mathbb{T}$ *es cerrada bajo submódulos.*
3) $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *es una teoría de torsión y* $\mathbb{L}$ *es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. 1)⇒2)
Por la Proposición 3.3.3, sabemos que $\mathbb{T} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$, entonces, por el Teorema 3.1.12, existe $\mathbb{L}' \subseteq R - mod$ tal que $(\mathbb{T}, \mathbb{L}')$ es una teoría de torsión.
Como $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria y $(\mathbb{T}, \mathbb{L}')$ teoría de torsión tenemos que $\mathbb{L} = \{F \in R{-}mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in \mathbb{T}\}$ y $\mathbb{L}' = \{F \in R{-}mod | Hom(T, F) = 0, \forall T \in \mathbb{T}\}$.
Sea $M \in \mathbb{L}$, entonces $Hom(T, E(M)) = 0\ \forall T \in \mathbb{T}$, por lo que $E(M) \in \mathbb{L}'$. Entonces $M \in \mathbb{L}'$ ya que $\mathbb{L}'$ es cerrada bajo submódulos, por el Teorema 3.1.15, $\therefore \mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$.
Sea $M \in \mathbb{L}'$. Como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos entonces, por el Teorema 3.3.1, tenemos que $\mathbb{L}'$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, por lo que $E(M) \in \mathbb{L}'$. Entonces $Hom(T, E(M)) = 0\ \forall T \in \mathbb{T}$, por lo que $M \in \mathbb{L} \therefore \mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}$.
Entonces $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$, por lo que $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$=$(\mathbb{T}, \mathbb{L}')$ es una teoría de torsión y $\mathbb{T}$ es cerrado bajo submódulos, por la Proposición 3.3.3.
2)⇒ 3)

Se obtiene directamente del Teorema 3.3.1.
3)$\Rightarrow$ 1)
Sean $\mathbb{T}' = \{T \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall F \in \mathbb{L}\}$ y
$\mathbb{L}' = \{F \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in \mathbb{T}\}$. Bastaría demostrar que $\mathbb{T} = \mathbb{T}'$ y $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$.
Sea $M \in \mathbb{T}$ y $N \in \mathbb{L}$. Entonces $E(N) \in \mathbb{L}$, ya que $\mathbb{L}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, entonces $Hom(M, E(N)) = 0$, por lo que $M \in \mathbb{T}'$ y $N \in \mathbb{L}'$ $\therefore$ $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}'$ y $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$.
Sea $M \in \mathbb{T}'$ y $N \in \mathbb{L}$. Si $Hom(M, N) \neq 0$, entonces existe $f : M \to N$ morfismo distinto de cero. Además, tenemos $i : N \to E(N)$ la inclusión canónica de N en su cápsula inyectiva, que es un monomorfismo, por lo que $i \circ f : M \to E(N)$ es un morfismo no cero, entonces $Hom(M, E(N)) \neq 0$ lo que contradice que $M \in \mathbb{T}'$. Entonces $Hom(M, N) = 0$, por lo que $M \in \mathbb{T}$ $\therefore$ $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$.
Sea $M \in \mathbb{T}$ y $N \in \mathbb{L}'$. Si $Hom(M, N) \neq 0$, entonces existe $f : M \to N$ morfismo distinto de cero. Además, tenemos $i : N \to E(N)$ la inclusión canónica de N en su cápsula inyectiva, que es un monomorfismo, por lo que $i \circ f : M \to E(N)$ es un morfismo no cero, entonces $Hom(M, E(N)) \neq 0$ lo que contradice que $N \in \mathbb{L}'$. Entonces $Hom(M, N) = 0$, por lo que $N \in \mathbb{L}$ $\therefore$ $\mathbb{L}' \subseteq \mathbb{L}$.
Entonces $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$ y $\mathbb{T} = \mathbb{T}'$ $\therefore$ $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria.

□

Corolario 3.3.5. *Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *es una teoría de torsión hereditaria, entonces* $\mathbb{L} \in L_{\{E, \leq, \prod, ext\}}$.

Demostración. Si $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria, entonces, por el Teorema 3.3.4, sabemos que $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión y que $\mathbb{L}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Además, por el Teorema 3.1.15, tenemos que $\mathbb{L} \in L_{\{\leq, \prod, ext\}}$ $\therefore$ $\mathbb{L} \in L_{\{E, \leq, \prod, ext\}}$.
□

Por el Teorema 3.3.4, tenemos que toda teoría de torsión hereditaria es una teoría de torsión, entonces si $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria nos podemos referir a $\mathbb{T}$ como su parte de torsión hereditaria y a $\mathbb{L}$ como su parte libre de torsión hereditaria.

Definición 3.3.6. Para una clase $\zeta \subseteq R-mod$ definimos:
${}_{\zeta}\mathbb{L} = \{F \in R-mod | Hom(C, E(F)) = 0, \forall C \in \zeta\}$ y
${}_{\zeta}\mathbb{T} = \{T \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall F \in {}_{\zeta}\mathbb{L}\}$.

Observación 3.3.7. *Es claro que* $\zeta \subseteq {}_{\zeta}\mathbb{T}$*, ya que si* $M \in \zeta$ *y* $N \in {}_{\zeta}\mathbb{L}$ *tenemos que* $Hom(M, E(N)) = 0$ *por definición de* ${}_{\zeta}\mathbb{L}$.

Teorema 3.3.8. *Para una clase* $\zeta \subseteq R-mod$ *la pareja ordenada* $({}_{\zeta}\mathbb{T}, {}_{\zeta}\mathbb{L})$ *es una teoría de torsión hereditaria y* ${}_{\zeta}\mathbb{T}$ *es la menor clase de torsión hereditaria que contiene a* ζ.

Demostración. Sabemos ya que ${}_{\zeta}\mathbb{T} = \{T \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall F \in {}_{\zeta}\mathbb{L}\}$, así que bastaría ver que ${}_{\zeta}\mathbb{L} = \{F \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in {}_{\zeta}\mathbb{T}\}$ para que $({}_{\zeta}\mathbb{T}, {}_{\zeta}\mathbb{L})$ sea teoría de torsión hereditaria.
Sea $N \in {}_{\zeta}\mathbb{L}$ y $M \in {}_{\zeta}\mathbb{T}$, entonces $Hom(M, E(N)) = 0$, por como se definió ${}_{\zeta}\mathbb{T}$ $\therefore$ $N \in \{F \in R-mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in {}_{\zeta}\mathbb{T}\}$.

Ahora sea $N \in \{F \in R{-}mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in {}_\zeta\mathbb{T}\}$, entonces $Hom(T, E(N)) = 0$ $\forall T \in {}_\zeta\mathbb{T}$ y $\zeta \subseteq {}_\zeta\mathbb{T}$, entonces $Hom(T, E(N)) = 0$ $\forall T \in \zeta$ $\therefore$ $N \in {}_\zeta\mathbb{L}$
$\therefore$ ${}_\zeta\mathbb{L} = \{F \in R - mod | Hom(T, E(F)) = 0, \forall T \in {}_\zeta\mathbb{T}\}$ $\therefore$ $({}_\zeta\mathbb{T}, {}_\zeta\mathbb{L})$ es teoría de torsión hereditaria.
Ahora sea $(\mathbb{T}', \mathbb{L}')$ teoría de torsión hereditaria tal que $\zeta \subseteq \mathbb{T}'$ y $N \in \mathbb{L}'$, entonces $\forall T \in \mathbb{T}'$ $Hom(T, E(N)) = 0$, en particular $Hom(T, E(N)) = 0$ $\forall T \in \zeta$, por lo que $N \in {}_\zeta\mathbb{L}$ $\therefore$ $\mathbb{L}' \subseteq {}_\zeta\mathbb{L}$. Entonces, por el Lema 3.1.4 y el Teorema 3.3.4, tenemos que ${}_\zeta\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}'$.

□

A $({}_\zeta\mathbb{T}, {}_\zeta\mathbb{L})$ la llamaremos teoría de torsión hereditaria generada por ζ y la denotaremos por $\xi_{R-tors}(\zeta)$.

Teorema 3.3.9. *Son equivalentes para $\mathbb{T} \subseteq R - mod$:*
1) $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria para alguna teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$.
2) $\mathbb{T} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.

Demostración. 1)⇒2)
Es la Proposición 3.3.3.
2)⇒1)
Tenemos que si $\mathbb{T} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$, entonces, por el Teorema 3.1.12, $\mathbb{T}$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$. Entonces $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión y $\mathbb{T}$ es cerrada bajo submódulos, por lo que $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria.
$\therefore$ $\mathbb{T}$ es la parte de torsión de la teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$.

□

Observación 3.3.10. *Por los Teoremas 3.3.9 y 3.3.8, tenemos que si $\zeta \subseteq R - mod$, entonces $\xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext}(\zeta)$ es la clase de torsión de $\xi_{R-tors}(\zeta)$.*

Teorema 3.3.11. *Son equivalentes para $\mathbb{L} \subseteq R - mod$:*
1) $\mathbb{L}$ es una clase libre de torsión hereditaria para alguna teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$.
2) $\mathbb{L} \in L_{\{E, \leq, \prod, ext\}}$.

Demostración. 1)⇒2)
Es el Corolario 3.3.5.
2)⇒1)
Tenemos que si $\mathbb{L} \in L_{\{E, \leq, \prod, ext\}} \subseteq L_{\{\leq, \prod, ext\}}$, entonces, por Teorema 3.1.15, $\mathbb{L}$ es una clase de torsión para alguna teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$. Entonces $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión y $\mathbb{L}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, por lo que $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria.
$\therefore$ $\mathbb{L}$ es la parte libre de torsión de la teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$.

□

Notación 3.3.12. Denotaremos $R - tors$ a la clase de todas las Teorías de Torsión hereditarias sobre el anillo R.

Observación 3.3.13. *Sea* $\{(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)\}_{i\in I}\subseteq R-tors$. *Tenemos que si* $(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)\leq(\mathbb{T},\mathbb{L})$ *para toda* $i\in I$, *entonces* $\mathbb{L}\subseteq\mathbb{L}_i$ *para toda* $i\in I$, *por lo que* $\mathbb{L}\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{L}_i$. *Entonces si* $\tau=\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{L}_i$, *tenemos que,* $(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)=(\mathbb{T}^\tau,\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{L}_i)$, *por el Teorema 3.3.11. Además, tenemos que* $\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i\subseteq\mathbb{T}^\tau$, *entonces* $(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)\leq(\mathbb{T},\mathbb{L})$ *y* $(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)\leq(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)$.
$\therefore\ \xi_{R-Tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)$.

Proposición 3.3.14. *Si* $\{(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)\}_{i\in I}\subseteq R-tors$, *entonces:*
1) $\xi_{R-Tors}(\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)\in R-tors$.
2) $\xi_{R-Tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)\in R-tors$.

Demostración. 1) Por el Teorema 3.3.9, tenemos que, para toda $i\in I$, $\mathbb{T}_i\in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$, entonces $\tau'=\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i\in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$. Entonces, por el Teorema 3.3.9, existe $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ teoría de torsión hereditaria tal que $\mathbb{T}=\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i$, por lo que $(\mathbb{T}_{\tau'},\mathbb{L}_{\tau'})=(\mathbb{T},\mathbb{L})\ \therefore\ (\mathbb{T}_{\tau'},\mathbb{L}_{\tau'})\in R-tors$.
2)Por la Observación 3.3.13, tenemos que $\xi_{R-Tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)$ con $\tau=\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{L}_i$. Por el Teorema 3.3.11, tenemos que, para toda $i\in I$, $\mathbb{L}_i\in L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{L}_i\in L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$. Entonces, por el Teorema 3.3.11, existe $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ teoría de torsión hereditaria tal que $\mathbb{L}=\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{L}_i$, por lo que $(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)=(\mathbb{T},\mathbb{L})\ \therefore\ \xi_{R-Tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=(\mathbb{T}^\tau,\mathbb{L}^\tau)\in R-tors$.
□

Como consecuencia del Teorema 3.3.4 y la Proposición 3.3.14 tenemos que si $\{(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)\}_{i\in I}\subseteq R-tors$, entonces $\xi_{R-tors}(\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=\xi_{R-Tors}(\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)$ y $\xi_{R-tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=\xi_{R-Tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)$.

Observación 3.3.15. *Podemos ver que (R-tors,$\leq$,$\wedge$,$\vee$,0,1) es una retícula completa, con*
1) $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\leq(\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)$ *si y sólo si* $\mathbb{T}_1\subseteq\mathbb{T}_2$ *(equivalentemente* $\mathbb{L}_2\subseteq\mathbb{L}_1$, *por el Lema 3.1.4),*
2) $0=(\{0\},R-mod)$,
3) $1=(R-mod,\{0\})$,
4) $\bigwedge\limits_{i\in I}(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)=\xi_{R-tors}(\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=\xi_{R-Tors}(\bigcap\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)$ *y*
5)$\bigvee\limits_{i\in I}(\mathbb{T}_i,\mathbb{L}_i)=\xi_{R-tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)=\xi_{R-Tors}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathbb{T}_i)$.
Además, es fácil notar que es subretícula de $R-Tors$.

Lema 3.3.16. *Si* $\zeta\in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, *entonces* $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\zeta)=\{M\in R-mod|\ \forall f:M\twoheadrightarrow N$ *distinto de cero,* $\exists g:K\rightarrowtail N$ *con* $0\neq K\in\zeta\}$.

Demostración. Sea $A=\{M\in R-mod|\ \forall f:M\twoheadrightarrow N$ distinto de cero, $\exists g:K\rightarrowtail N$ con $0\neq K\in\zeta\}$, primero demostraremos que A es cerrada bajo submódulos, cocientes, sumas directas y extensiones.

$\leq$) Sea $M \in A$ y $f : N \to M$ monomorfismo. Sea $g : N \to X$ epimorfismo no cero. Sea P el coproducto fibrado de f y g, el cual nos induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, tail, "j"] & P \end{tikzcd}.$$

De ahí podemos observar que $j(X) \neq 0$ y $P \neq 0$, entonces existe $Y \lneq P$ tal que $j(X) \bigoplus Y$ es esencial en P, por lo que si consideramos $\pi : P \to \frac{P}{Y}$ la proyección canónica y $\psi = \pi \circ j$. Pr otro lado, $\pi \circ h$ es un epimorfismo no cero, por lo que existe $i : K \to \frac{P}{Y}$ monomorfismo con $0 \neq K \in A$, por lo que podemos extender el diagrama anterior al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, tail, "j"] \arrow[dr, "\psi"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ K \arrow[r, tail, "i"] & \frac{P}{Y} \end{tikzcd}.$$

Tenemos que $\psi(X)$ es esencial en $\frac{P}{Y} \neq 0$, además, ψ es un monomorfismo ya que $j(X) \cap Y = 0$.
Entonces, $0 \neq \psi(X) \cap K \leq K$, por lo que $K' = \psi(X) \cap K \in \zeta$. Entonces, $\psi^{-1}(K') \neq 0$ y $0 \neq K' \cong \psi^{-1}(K')$, ya que ψ es monomorfismo, entonces $\psi^{-1}(K') \in \zeta$, ya que ζ es clase abstracta $\therefore N \in A$.
$\therefore A$ es cerrado bajo submódulos.

$\twoheadrightarrow$) Sea $M \in A$ y $f : M \to N$ epimorfismo. Si $g : N \to X$ es un epimorfismo distinto de cero, entonces $g \circ f$ es epimorfismo distinto de cero, por lo que existe $h : K \to X$ monomorfismo con $0 \neq K \in \zeta \therefore N \in A$.
$\therefore A$ es cerrada bajo cocientes.

$\bigoplus$) Ahora sea $\{M_j\}_{j \in J} \subseteq A$ y $f : \bigoplus_{j \in J} M_j \to N$ epimorfismo distinto de cero, entonces existe $r \in J$ tal que $Im(f \circ i_r) \neq 0$. Consideramos $\psi : M_r \to Im(f \circ i_r)$ el morfismo resultante de correstringir a la imagen a $f \circ i_r$, tenemos que es un epimorfismo distinto de cero, entonces existe $g : K \to N$ monomorfismo con $0 \neq K \in \zeta$ ya que $M_r \in A \therefore \bigoplus_{j \in J} M_j \in A$.
$\therefore A$ es cerrada bajo sumas directas.

ext) Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $N, L \in A$, y sea h :

$M \to M'$ epimorfismo con $M \neq 0$.
Si $Im(h \circ f) \neq 0$ consideramos $\psi : N \to Im(h \circ f)$ el morfismo resultante de correstringir a la imagen a hf, tenemos que es un epimorfismo distinto de cero, entonces existe $g : K \to M'$ monomorfismo con $0 \neq K \in \zeta$ ya que $N \in A \therefore M \in A$.
Si $Im(hf) = 0$, entonces, por propiedad universal del conúcleo, existe $j : L \to M'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[dl, "j"] & 0 \\ & & M' & & \end{tikzcd}.$$

Entonces $jg = h$ y h es epimorfismo , entonces j es epimorfismo distinto de cero.
Entonces existe $g : K \to M'$ monomorfismo con $0 \neq K \in \zeta$ ya que $L \in A \therefore M \in A$.
$\therefore A$ es cerrada bajo extensiones.
$\therefore A \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.

Si $M \in \zeta$ y $f : M \to N$ es un epimorfismo distinto de cero, entonces $N \in \zeta$ ya que ζ es cerrada bajo cocientes y $Id_N : N \to N$ es un monomorfismo con $0 \neq N \in \zeta \therefore M \in A$.
$\therefore \zeta \subseteq A$.
Ahora sea $\mathbb{T} \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$ tal que $\zeta \in \mathbb{T}$ y $M \in A$.
Si $\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} \neq 0$, entonces $\pi : M \to \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}$ la proyección canonica es distinta de cero y $M \in A$, por lo que existe $h : K \to \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}$ monomorfismo con $0 \neq K \in \zeta \subseteq \mathbb{T}$. Entonces $K \cong h(K)$ y $r_{\mathbb{T}}(\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}) = 0$, por lo que $K = r_{\mathbb{T}}(K) \cong r_{\mathbb{T}}(h(K)) \leq r_{\mathbb{T}}(\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}) = 0$, lo que es una contradicción.
Entonces $\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} = 0$, por lo que $M = r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{T} \therefore A \subseteq \mathbb{T}$.
$\therefore A = \xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext}(\zeta)$.

□

Lema 3.3.17. $L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$ es una retícula distributiva.

Demostración. Primero notemos que si $A, B \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$, entonces $A \cup B \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$, por lo que $A \vee B = \xi_{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext}(A \cup B) = \{M \in R-mod | \ \forall f : M \twoheadrightarrow N$ distinto de cero, $\exists g : K \rightarrowtail N$ con $0 \neq K \in A \cup B\}$.
Ahora sea $A, B, C \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.
Sea $M \in A \wedge (B \vee C)$ y $f : M \to N$ epimorfismo distinto de cero, entonces existe $g : X \to N$ monomorfismo con $0 \neq X \in B \cup C$, entonces $X \in B$ o $X \in C$. Además, A es cerrado bajo submódulos y cocientes, por lo que $X \in A$, entonces $X \in A \wedge B$ o $X \in A \wedge C$, por lo que $X \in (A \wedge B) \cup (A \wedge C) \therefore M \in (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
Entonces $A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ y $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \subseteq A \wedge (B \vee C)$ siempre se da $\therefore A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \therefore L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$ es una retícula distributiva.

□

Teorema 3.3.18. *Existe un isomorfismo de retículas entre $R-tors$ y $L_{\{\leq, \twoheadrightarrow, \bigoplus, ext\}}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.9, tenemos que si $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in R-tors$, entonces $\mathbb{T} \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$, por lo que la siguiente función esta bien definida:

$$\begin{array}{rcl} f: R-tors & \longrightarrow & L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}} \\ (\mathbb{T},\mathbb{L}) & \longmapsto & \mathbb{T} \end{array} .$$

Además, $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1) \leq (\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2) \Leftrightarrow \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \Leftrightarrow f((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)) \subseteq f((\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2))$, por lo que f es un morfismo de órdenes parciales.
Si $\mathbb{T}' \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$, entonces $\mathbb{T}'$ es una clase de torsión hereditaria para alguna teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T}',\mathbb{L})$, por el Teorema 3.3.9, por lo que $\mathbb{T}' \in Im(f)$ $\therefore$ f es sobre y es claramente inyectiva ya que toda teoría de torsión está determinada por cualquiera de sus dos partes $\therefore$ f es un isomorfismo de retículas.

□

Corolario 3.3.19. *$R-tors$ es una retícula distributiva.*

Demostración. Sean $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1),(\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2),(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3) \in R-tors$.
Entonces consideremos f el isomorfismo de retículas definido en el Teorema 3.3.18, tenemos que $f((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge((\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)\vee(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3))) = \mathbb{T}_1\wedge(\mathbb{T}_2\vee\mathbb{T}_3)$ y $f(((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge(\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2))\vee((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3))) = (\mathbb{T}_1\wedge\mathbb{T}_2)\vee(\mathbb{T}_1\wedge\mathbb{T}_3)$.
Además, por el Lema 3.3.17, sabemos que $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ es distributiva, por lo que $\mathbb{T}_1\wedge(\mathbb{T}_2\vee\mathbb{T}_3) = (\mathbb{T}_1\wedge\mathbb{T}_2)\vee(\mathbb{T}_1\wedge\mathbb{T}_3)$, entonces $f((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge((\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)\vee(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3))) = f(((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge(\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2))\vee((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3)))$ y f es inyectiva, entonces $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge((\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)\vee(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3)) = ((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge(\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2))\vee((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1)\wedge(\mathbb{T}_3,\mathbb{L}_3))$.
$\therefore$ $R-tors$ es distributiva.

□

Teorema 3.3.20. *Existe un anti-isomorfismo de retículas entre $R-tors$ y $L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.11, tenemos que si $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in R-tors$ entonces $\mathbb{L} \in L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$, por lo que la siguiente función está bien definida

$$\begin{array}{rcl} f: R-tors & \longrightarrow & L_{\{E,\leq,\prod,ext\}} \\ (\mathbb{T},\mathbb{L}) & \longmapsto & \mathbb{L} \end{array} .$$

Si $\mathbb{L}' \in L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$, entonces $\mathbb{L}'$ es una clase libre de torsión hereditaria para alguna teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T},\mathbb{L}')$, por Teorema 3.3.11, por lo que $\mathbb{L}' \in Im(f)$ $\therefore$ f es sobre y es claramente inyectiva $\therefore$ f es biyectiva.
Además, $(\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1) \leq (\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2) \Leftrightarrow \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1 \Leftrightarrow f((\mathbb{T}_2,\mathbb{L}_2)) \subseteq f((\mathbb{T}_1,\mathbb{L}_1))$, por lo que f es un anti-isomorfismo de retículas.

□

Teorema 3.3.21. *Existe una biyección entre $R-tors$ y los radicales exactos izquierdos en $R-mod$.*

Demostración. Sea $R-rei$ la clase de los radicales exactos izquierdos en $R-mod$, entonces tenemos la función

$$\begin{array}{rcl} f: R-tors & \longrightarrow & R-rei \\ (\mathbb{T},\mathbb{L}) & \longmapsto & r_{\mathbb{T}} \end{array} .$$

También tenemos la función

$$\begin{array}{rcl} g: R-rei & \longrightarrow & R-tors \\ r & \longmapsto & (\mathbb{T}_r,\mathbb{L}_r) \end{array} .$$

Por los Lemas 3.2.19, 3.2.20 y 3.2.18, las funciones f y g están bien definidas. Veamos ahora que son inversas entre sí. Sea $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in R-tors$, entonces $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in R-Tors$, por el Teorema 3.3.4, y, por el Teorema 3.2.14, tenemos que $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{r_{\mathbb{T}}}$. Además, las teorías de torsión están determinadas por cualquiera de sus partes (ya sea su parte libre de torsión o su parte de torsión), por lo que $g(f((\mathbb{T},\mathbb{L}))) = (\mathbb{T}_{r_{\mathbb{T}}},\mathbb{L}_{r_{\mathbb{T}}}) = (\mathbb{T},\mathbb{L})$.
$\therefore g \circ f = id_{R-tors}$.
Por otro lado, tenemos que si $r \in R-rei$, entonces r es un radical exacto izquierdo, por lo que r es un radical idempotente, por el Teorema 3.2.18. Así que, por el Teorema 3.2.14, tenemos que $r_{\mathbb{T}_r} = r \therefore f(g(r)) = r_{\mathbb{T}_r} = r$.
$\therefore f \circ g = id_{R-rid} \therefore f$ es una biyección.

□

Proposición 3.3.22. *Si $\mathbb{T} \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$, entonces:*
$M \in \mathbb{T} \Leftrightarrow Rx \in \mathbb{T}$, $\forall x \in M$.

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $M \in \mathbb{T}$. Si $x \in M$, entonces $Rx \leq M$, por lo que $Rx \in \mathbb{T}$, pues $\mathbb{T}$ cerrada bajo submódulos.
$\Leftarrow$)
Por Teorema 3.3.9, sabemos que $\mathbb{T}$ es la clase de torsión hereditaria de una teoría de torsión hereditaria $(\mathbb{T},\mathbb{L})$. Sean $N \in \mathbb{L}$ y $M \in R-mod$ tal que para toda $x \in M$, $Rx \in \mathbb{T}$.
Sea $f : M \to E(N)$ un morfismo. Si $x \in M$, entonces tenemos la inclusión canónica $i : Rx \to M$, por lo que $f \circ i : Rx \to E(N)$ es el morfismo cero ya que $Rx \in \mathbb{T}$, entonces $f(x) = 0$.
Entonces $f = 0$, por lo que $Hom(M,E(N)) = 0 \therefore M \in \mathbb{T}$. □

En la Proposición 3.3.22 pudimos ver que toda clase de torsión hereditaria está determinada por los módulos cíclicos que contiene, más aún, como es una clase abstracta, está determinada por los cocientes del anillo que ésta contiene. Utilizaremos esto para ver que, mientras existen anillos para los que $R-Tors$ no es cardinable, $R-tors$ siempre es cardinable.

Teorema 3.3.23. *$R-tors$ es cardinable.*

Demostración. Consideremos la función

$$f: L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(R))$$

$$\zeta \longmapsto \{I \leq R | \frac{R}{I} \in \zeta\} \qquad .$$

Es claro que está bien definida, bastaria ver que es inyectiva. Supongamos que $f(\mathbb{T}) = f(\mathbb{T}')$, entonces $\{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \mathbb{T}\} = \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \mathbb{T}'\}$. Sea $M \in \mathbb{T}$, entonces $Rx \in \mathbb{T}$ $\forall x \in M$, por Proposición 3.3.22, y $Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$, por lo que $\frac{R}{(0:x)} \in \mathbb{T}$ $\forall x \in M$, entonces $\frac{R}{(0:x)} \in \mathbb{T}'$ $\forall x \in M$ por hipótesis, entonces $Rx \in \mathbb{T}'$ $\forall x \in M$, por lo que $M \in \mathbb{T}'$, por la Proposición 3.3.22 $\therefore \mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}'$.
Ahora sea $M \in \mathbb{T}'$, entonces $Rx \in \mathbb{T}'$ $\forall x \in M$, por la Proposición 3.3.22, y $Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$, por lo que $\frac{R}{(0:x)} \in \mathbb{T}'$ $\forall x \in M$, entonces $\frac{R}{(0:x)} \in \mathbb{T}$ $\forall x \in M$, por hipótesis, entonces $Rx \in \mathbb{T}$ $\forall x \in M$, por lo que $M \in \mathbb{T}$, por la Proposición 3.3.22 $\therefore \mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T} \therefore \mathbb{T} = \mathbb{T}'$.
Entonces f es inyectiva, por lo que $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ es cardinable y biyectable con $R-tors$, por el Teorema 3.3.18 $\therefore R-tors$ es cardinable.

□

Corolario 3.3.24. *$L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ y $R-rei$ son cardinables.*

Demostración. Directo del Teorema 3.3.23 y los Teoremas 3.3.18, 3.3.20 y 3.3.21.

□

Capítulo 4

Clases naturales.

Comenzaremos dando las definiciones de seudocomplemento y seudocomplemento fuerte, para después dar un teorema que nos ayudará a calcularlos en algunas grandes retículas.

Definición 4.0.1. Una retícula de clases de módulos L con elemento menor es fuertemente seudocomplementada (S-seudocomplementada) si todo elemento de L tiene seudocomplemento fuerte.

Observación 4.0.2. *Sea L_P una retícula de clases de módulos.*
Es claro que todo seudocomplemento fuerte es en particular un seudocomplemento y no solo eso, si una clase ζ tiene seudocomplemento fuerte $\zeta^{S-\perp_P}$, entonces tiene un único seudocomplemento que resulta ser $\zeta^{S-\perp_P}$.
De manera que en una retícula L_P S-seudocomplementada tendremos que $Skel(L_P) = S - Skel(L_P)$ y $\zeta^{S-\perp_P} = \zeta^{\perp_p}$.

Observación 4.0.3. *Si $a \in L$ con L una retícula S-seudocomplementada con elemento menor 0, entonces $a \wedge a^{\perp}$=0. $\therefore$ $a \leq (a^{\perp})^{\perp}$.*

Observación 4.0.4. *Si $a, b \in L$ con L una retícula S-seudocomplementada de R-módulos con elemento menor 0 y $a \leq b$, entonces $0 = b \wedge b^{\perp} \geq a \wedge b^{\perp}$, por lo que $a \wedge b^{\perp} = 0$ $\therefore b^{\perp} \leq a^{\perp}$.*

Teorema 4.0.5. *Sean L_Q y L_P retículas S-seudocomplementadas con P y Q conjuntos de propiedades de clausura. Si $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces $Skel(L_P) = Skel(L_Q)$.*

Demostración. Sea C$\in L_Q$, tomemos a $C^{\perp_Q} \in L_Q \subseteq L_P$, además, sabemos que $C^{\perp_Q} \wedge C = \{0\}$, entonces $C^{\perp_Q} \leq C^{\perp_P} \in Skel(L_p) \subseteq L_Q$. Como $C \wedge C^{\perp_P} = \{0\}$ y $C^{\perp_P} \in L_Q$ tenemos que $C^{\perp_P} \leq C^{\perp_Q}$, por lo que $C^{\perp_Q} = C^{\perp_P} \in Skel(L_P) \therefore Skel(L_Q) \subseteq Skel(L_P)$.
Ahora tomemos a $C^{\perp_P}$; veamos que es elemento de $Skel(L_Q)$.
Como L_Q y L_P son S-seudocomplementadas tenemos que $C^{\perp_P} \leq ((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P}$, además, tenemos que $C \leq (C^{\perp_P})^{\perp_P}$ implica que $((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P} \leq C^{\perp_P}$, de donde tenemos que $C^{\perp_P} = ((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P}$. De manera que sólo tendríamos que demostrar que $((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P} = ((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q}$. Así que sea $D \in L_Q$ tal que $D \wedge (C^{\perp_P})^{\perp_P} = \{0\}$; $L_Q \subseteq L_P$, entonces $D \leq ((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_P} = C^{\perp_P}$, por lo que $((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q} \leq C^{\perp_P}$.

Por otro lado, $C^{\perp_P} \in L_Q$ y $C^{\perp_p} \wedge (C^{\perp_P})^{\perp_P} = \{0\}$, entonces $C^{\perp_P} \leq ((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q}$, por lo que $C^{\perp_P} = ((C^{\perp_P})^{\perp_P})^{\perp_Q} \in Skel(L_Q) \therefore Skel(L_P) \subseteq Skel(L_Q)$.
$\therefore Skel(L_P) = Skel(L_Q)$

□

Teorema 4.0.6. *Sea L_P una retícula S-seudocomplementada y L_Q retícula acotada con P y Q conjuntos de propiedades de clausura . Si $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces L_Q es S-seudocomplementada.*

Demostración. Sea $C \in L_Q \subseteq L_P$. Entonces $C^{\perp_P} \in L_Q$, por hipótesis, y $C^{\perp_P} \wedge C = \{0\}$. Sea $A \in L_Q$ tal que $A \wedge C = \{0\}$, entonces $A \in L_P$ y $A \wedge C = \{0\} \therefore A \subseteq C^{\perp_P} \therefore C^{\perp_P}$ es seudocomplemento fuerte de C en $L_Q \therefore L_Q$ es S-seudocomplementada.

□

De los dos teoremas anteriores podemos darnos cuenta que basta con que L_P sea una retícula acotada para que la conclusión del Teorema 4.0.5 sea cierta, por lo que se deduce directamente el siguiente corolario de los dos teoremas anteriores.

Corolario 4.0.7. *Sean L_P una retícula S-seudocomplementadas y L_Q una retícula acotada con P y Q conjuntos de propiedades de clausura. Si $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces $Skel(L_P) = Skel(L_Q)$.*

Observación 4.0.8. *Para llegar al Corolario 4.0.7 no ocupamos en ningún momento que L_Q y L_P fueran conjuntos, por lo que el resultado es válido si L_Q y L_P son grandes retículas.*

4.1. Seudocomplementos en $L_{\{\leq\}}$ y retículas asociadas.

El principal objeto de estudio de este capítulo son las clases naturales que son clases cerradas bajo submódulos, cápsulas inyectivas y sumas directas; en esta sección demostraremos que estas resultan ser también los seudocomplementos de las clases hereditarias. Además, encontraremos los seudocomplementos de las grandes retículas $L_{\{\leq,E\}}$, $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, $L_{\{\leq,ext\}}$, $L_{\{\leq,\bigoplus\}}$ y $L_{\{\leq,\bigoplus,ext\}}$ utilizando el Corolario 4.0.7.

Proposición 4.1.1. *Sea $\zeta \in L_{\{\leq\}}$, entonces*
$\zeta^{\perp_\leq} = \zeta^{S-^{\perp_\leq}} = \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta \text{ y } f : K \to N \text{ monomorfismo} \Rightarrow \text{K=0}\ \}$.

Demostración. Sea $M \in \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : K \to N$ monomorfismo $\Rightarrow$ K=0$\}$. Sea $f : N \to M$ y $g : K \to N$ monomorfismos con $K \in \zeta$, entonces $fg : K \to M$ es un monomorfismo $\therefore K = 0$.
$\therefore \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : K \to N$ monomorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\} \in L_{\{\leq\}}$.
Sea N $\in \zeta \wedge \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : K \to N$ monomorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\}$, tenemos que $Id_N : N \to N$ es monomorfismo, entonces $N = 0$.
$\therefore \zeta \wedge \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : K \to N$ monomorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\} = \{0\}$.
Ahora sea $D \in L_{\{\leq\}}$ tal que $\zeta \wedge D = \{0\}$, sea $N \in \zeta$ y $f : N \to M$ monomorfismo con

$M \in D$, entonces $N \in D$ ya que D es una clase hereditaria.
$\therefore D \subseteq \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : K \to N$ monomorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\}$
$\therefore \zeta^{S-^{\perp_\leq}} = \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : K \to N$ monomorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\}$ y, por la Observación 4.0.2, $\zeta^{S-^{\perp_\leq}} = \zeta^{\perp_\leq}$.

□

Corolario 4.1.2. *$L_{\{\leq\}}$ es una gran retícula fuertemente seudocomplementada.*

Teorema 4.1.3. *Sea $\zeta \in L_{\{\leq\}}$, entonces $(\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es la clase de todos los módulos N tal que para cada $f : K \to N$ monomorfismo distinto de cero, $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y un monomorfismo $g : U \to K$.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.1, tenemos que

$$\begin{aligned}(\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} &= \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta^{\perp_\leq} \text{ y } f : K \to N \text{ monomorfismo} \Rightarrow \text{K=0 } \}\\ &= \{N \in R-Mod|\ f : K \to N \text{ monomorfismo distinto de cero} \Rightarrow K \notin \zeta^{\perp_\leq}\ \}.\end{aligned}$$

Además, tenemos que $K \notin \zeta^{\perp_\leq}$ si y sólo si $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y un monomorfismo $g : U \to K$ $\therefore (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \in R-Mod|$ para cada $f : K \to N$ monomorfismo distinto de cero, $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y un monomorfismo $g : U \to K\}$.

□

Teorema 4.1.4. *Si $\zeta \in L_{\{\leq\}}$, entonces $\zeta^{\perp_\leq} \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.*

Demostración. Sea $\zeta \in L_{\{\leq\}}$ y $N \in \zeta^{\perp_\leq}$.
Sean $f : M \to N$ y $g : L \to M$ monomorfismos con $L \in \zeta$, entonces $fg : L \to N$ es monomorfismo, pues es una composición de monomorfismos, por lo que $L = 0$, ya que $N \in \zeta^{\perp_\leq}$ $\therefore M \in \zeta^{\perp_\leq}$ $\therefore \zeta^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo submódulos.
Ahora sea $g : L \to E(N)$ monomorfismo con $L \in \zeta$, la inclusión $i : Im(g) \cap N \to N$ es un monomorfismo y $N \in \zeta^{\perp_\leq}$, entonces $Im(g) \cap N = 0$ y N es esencial en E(N). Entonces $Im(g) = 0$ y g monomorfismo, por lo que $L = 0$ $\therefore E(N) \in \zeta^{\perp_\leq}$ $\therefore \zeta^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.
Por último, sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta^{\perp_\leq}$ y $f : K \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ monomorfismo con $K \in \zeta$.
Si $K \neq 0$, sea $k \in K$ distinto de cero con $k = n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + ... + n_{\alpha_s}$ con el menor número posible de sumandos, donde $n_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$.
Como $k \neq 0$, entonces $0 \lneq s$ y como es la expresión con el menor número posible de sumandos, tenemos que los anuladores de los sumandos coinciden, es decir, $(0 : n_{\alpha_1}) = (0 : n_{\alpha_2}) = ... = (0 : n_{\alpha_s})$. Por lo que $(0 : n_{\alpha_i}) = (0 : k) \forall i, 1 \leq i \leq s$.
Entonces $Rk \cong \dfrac{R}{(0:k)} = \dfrac{R}{(0:n_{\alpha_1})} \cong Rn_{\alpha_1}$ y la inclusión $i : Rn_{\alpha_1} \to M_{\alpha_1}$ es monomorfismo con $M_{\alpha_1} \in \zeta^{\perp_\leq}$, por lo que $0 = Rn_{\alpha_1} \cong Rk$, lo cual es claramente una contradicción.
$\therefore K = 0 \therefore \bigoplus_{i\in I} M_i \in \zeta^{\perp_\leq}$ $\therefore \zeta^{\perp_\leq}$ es cerrada bajo sumas directas.
$\therefore \zeta^{\perp_\leq} \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.

□

Corolario 4.1.5. *Si $\zeta \in L_{\{\leq\}}$, entonces $(\zeta^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.*

Proposición 4.1.6. *Si $\zeta \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, entonces ζ es cerrado bajo extensiones esenciales, es decir, si $N \in \zeta$ y $f : N \to M$ es un monomorfismo esencial, entonces $M \in \zeta$.*

Demostración. Sea $\zeta \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$ y $f : N \to M$ es un monomorfismo esencial, donde $N \in \zeta$, entonces $E(M) = E(N) \in \zeta$ ya que ζ es cerrado bajo cápsulas inyectivas y tenemos la inclusión canónica de M en su cápsula inyectiva $i : M \to E(M)$ que es un monomorfismo. $\therefore M \in \zeta$ ya que $\zeta \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.

$\square$

Definición 4.1.7. Sea M un R-módulo, entonces diremos que $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia independiente de submódulos de M si $N_i \cap \sum\limits_{j\in I-\{i\}} N_j = 0$ y $N_i \leq M$ $\forall i \in I$.

Proposición 4.1.8. *Sea M un R-módulo y $\{N_i\}_{i\in I}$ familia de submódulos de M, entonces $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia independiente de submódulos de M $\Leftrightarrow$ $\{N_i\}_{i\in J}$ es una familia independiente de submódulos de M $\forall J \subseteq I$ finito.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $J \subseteq I$ finito, entonces tenemos que $N_i \cap \sum\limits_{j\in J-\{i\}} N_j \subseteq N_i \cap \sum\limits_{j\in I-\{i\}} N_j = 0$ $\forall i \in J$ $\therefore$ $N_i \cap \sum\limits_{j\in J-\{i\}} N_j = 0$ $\forall i \in J$.
$\Leftarrow$)
Sea $i \in I$. Si $x \in N_i \cap \sum\limits_{j\in I-\{i\}} N_j$, entonces $x = x_{n_1} + ... + x_{n_m}$ con $J = \{n_1, .., n_m, i\} \subseteq I$ y $x_{n_i} \in N_{n_i}$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Por lo que $x \in N_i \cap \sum\limits_{j\in J-\{i\}} N_j$ y J es finito, entonces $x \in \sum\limits_{j\in J-\{i\}} N_j = 0$. Por lo tanto $x = 0$, entonces $N_i \cap \sum\limits_{j\in I-\{i\}} N_j$ para toda $i \in I$.
$\therefore$ $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia independiente de submódulos de M.

$\square$

Proposición 4.1.9. *Sean $\zeta \in L_{\{\leq\}}$ y $M \in (\zeta^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$, entonces existe $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$ familia de submódulos de M tal que $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ es esencial en M.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.8, sabemos que la familia de familias independientes de submódulos de M contenidas en ζ es de carácter finito. Entonces, por el Lema de Tukey, existe $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$ familia independiente de submódulos de M máxima.
Ahora, sea $N' \leq M$ distinto de cero tal que $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \cap N' = 0$, entonces existe $K \leq N'$ tal que $K \in \zeta$. Así que $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \cap K = 0$ y $K \in \zeta$, entonces $\{N_i\}_{i\in I} \cup \{K\} \subseteq \zeta$ sería una familia independiente de submódulos de M contradiciendo que $\{N_i\}_{i\in I}$ sea máxima.
$\therefore$ $N' = 0$ $\therefore$ $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ es esencial en M.

$\square$

Proposición 4.1.10. *Si $\zeta \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, entonces $\zeta = (\zeta^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$.*

Demostración. Sea $N \in (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$. Por la Proposición 4.1.3, tenemos que cada submódulo no cero de N tiene un submódulo distinto de cero en ζ, ahora sea $\bigoplus_{i\in I} N_i = M \leq N$ donde $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de M pertenecientes a ζ como en la Proposición 4.1.9.
$\therefore M$ es esencial en N y $M \in \zeta$ pues ζ es cerrada bajo sumas directas. Por la Proposición 4.1.6, $N \in \zeta \therefore (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \subseteq \zeta$ y como $\zeta \subseteq (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, por la Observación 4.0.3 $\therefore$ $(\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \zeta$.

$\square$

Proposición 4.1.11. *Si $\zeta \in L_{\{\leq\}}$, entonces $\xi_{\{\leq,E,\bigoplus\}}(\zeta) = (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$.*

Demostración. Por las Observaciones 4.0.2 y 4.0.3, sabemos que $\zeta \subseteq (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.
Ahora sea $\Omega \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$ tal que $\zeta \subseteq \Omega$, entonces $\Omega^{\perp_\leq} \subseteq \zeta^{\perp_\leq}$, por la Observación 4.0.4.
Entonces $(\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \subseteq (\Omega^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ y $(\Omega^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \Omega$ ya que $\Omega \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \therefore (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \subseteq \Omega$
$\therefore \xi_{\{\leq,E,\bigoplus\}}(\zeta) = (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$.

$\square$

Corolario 4.1.12. *$Skel(L_{\{\leq\}}) = L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.*

Demostración. Sea $\Omega \in Skel(L_{\{\leq\}})$, entonces $\Omega = \zeta^{\perp_\leq} \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, por el Teorema 4.1.4.
Ahora sea $\Omega \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, entonces $\Omega = (\Omega^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \in Skel(L_{\{\leq\}})$, por la Proposición 4.1.10.
$\therefore Skel(L_{\{\leq\}}) = L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$.

$\square$

Teorema 4.1.13. *Si $\zeta \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, entonces ζ es cerrado bajo extensiones.*

Demostración. Sea $\Omega \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, entonces $\exists \zeta \in L_{\{\leq\}}$ tal que $\Omega = \zeta^{\perp_\leq}$.
Sean $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta con $N, L \in \zeta^{\perp_\leq}$ y $h : K \to L$ un monomorfismo con $K \in \zeta$. Sea $i : ker(gh) \to K$ la inclusión canónica, entonces $ghi : ker(gh) \to L$ es el morfismo cero y, por la propiedad universal del núcleo, $\exists j : ker(gh) \to N$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & K \arrow[u, "h"'] & & \\
 & & ker(gh) \arrow[u, "i"'] \arrow[uul, dashed, "\exists j"] & &
\end{tikzcd}.$$

Entonces fj es un monomorfismo ya que hi es un monomorfismo siendo una composición de monomorfismos $\therefore j$ es monomorfismo.
Como $K \in \zeta$ y $ker(gh) \leq K$, tenemos que $ker(gh) \in \zeta$, $j : ker(gh) \to N$ monomorfismo y $N \in \zeta^{\perp_\leq}$, entonces $ker(gh) = 0 \therefore gh$ es monomorfismo.
Ahora como $L \in \zeta^{\perp_\leq}$, $K \in \zeta$ y $gh : K \to L$ es un monomorfismo, entonces $K = 0$ $\therefore M \in \zeta^{\perp_\leq} = \Omega \therefore \Omega$ es cerrada bajo extensiones.

$\square$

Observación 4.1.14. *Por la Proposición 4.1.13, tenemos que si* $\zeta \in L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$*, entonces* ζ *es cerrado bajo extensiones, además de ser cerrada bajo submódulos, cápsulas inyectivas y sumas directas, entonces :*
1) $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$*.*
2) $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,E\}}$*.*
3) $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$*.*
4) $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,ext\}}$*.*
5) $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,\bigoplus\}}$*.*
6) $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,\bigoplus,ext\}}$*.*

Teorema 4.1.15. $L_{\{\leq\}}$*,* $L_{\{\leq,E\}}$*,* $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$*,* $L_{\{\leq,ext\}}$*,* $L_{\{\leq,\bigoplus\}}$ *y* $L_{\{\leq,\bigoplus,ext\}}$ *tienen como esqueleto a* $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$*.*

Demostración. Tenemos que :
1) $Skel(L_{\{\leq\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$.
2) $Skel(L_{\{\leq\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,E\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$.
3) $Skel(L_{\{\leq\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$.
4) $Skel(L_{\{\leq\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,ext\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$.
5) $Skel(L_{\{\leq\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$.
6) $Skel(L_{\{\leq\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,\bigoplus,ext\}} \subseteq L_{\{\leq\}}$.
Entonces, por el Corolario 4.1.2, $L_{\{\leq\}}$ es S-seudocomplementada y $L_{\{\leq\}}$, $L_{\{\leq,E\}}$, $L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, $L_{\{\leq,ext\}}$, $L_{\{\leq,\bigoplus\}}$ y $L_{\{\leq,\bigoplus,ext\}}$ son retículas acotadas con elemento menor $\{0\}$ y elemento mayor R-mod.
$\therefore$ $Skel(L_{\{\leq\}})$=$Skel(L_{\{\leq,E\}})$=$Skel(L_{\{\leq,E,\bigoplus\}})$=$Skel(L_{\{\leq,ext\}})$=$Skel(L_{\{\leq,\bigoplus\}})$ =$Skel(L_{\{\leq,\bigoplus,ext\}})$=$L_{\{\leq,E,\bigoplus\}}$, por el Corolario 4.0.7.

□

4.2. R-nat.

Llamaremos R-nat a el esqueleto de $L_{\{\leq\}}$, es decir, $Skel(L_{\{\leq\}})$=R-nat y, por el Corolario 4.1.12, podemos llamar clases naturales a los elementos de R-nat. En esta sección demostraremos que $R-nat$ junto con la contención es una retícula de Boole.

Observación 4.2.1. *Si* $\zeta \subseteq R-mod$ *tenemos que* $((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} = \{N \in R-Mod|$ *para cada* $f : K \to N$ *monomorfismo distinto de cero,* $\exists U \in \xi_{\leq}(\zeta)$ *distinto de cero y un monomorfismo* $g : U \to K\}$*, por lo que es claro que* $\zeta \subseteq ((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$*.*

Teorema 4.2.2. *Sea* $\zeta \subseteq R-mod$*, entonces* $\xi_{R-nat}(\zeta) = ((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$*.*

Demostración. Sea $\Omega \in R-nat$ tal que $\zeta \subseteq \Omega$, entonces $\xi_{\leq}(\zeta) \subseteq \Omega$ ya que $R-nat \subseteq L_{\{\leq\}}$.
Como $\Omega \in R-nat$ tenemos que $\Omega = \kappa^{\perp_{\leq}}$ para algún $\kappa \in L_{\{\leq\}}$, además, tenemos que $\xi_{\leq}(\zeta) \subseteq \kappa^{\perp_{\leq}} \Rightarrow (\kappa^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \subseteq \xi_{\leq}(\zeta)^{\perp_{\rightarrow}} \Rightarrow ((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \subseteq ((\kappa^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$ y $((\kappa^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} = \kappa^{\perp_{\leq}} = \Omega$, pues $L_{\{\leq\}}$ es fuertemente seudocomplementada, por lo que $((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \subseteq \Omega$ y $\zeta \subseteq ((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}} \in R-nat \therefore \xi_{R-nat}(\zeta) = ((\xi_{\leq}(\zeta))^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$.

□

Observación 4.2.3. *Podemos ver que (R-nat=$L_{\{\bigoplus,\leq,E\}}$,$\leq$,$\wedge$,$\vee$,0,1) es una retícula completa, con*
1) $\zeta_1 \leq \zeta_2 \Leftrightarrow \zeta_1 \subseteq \zeta_2$,
2) $0 = \{0\}$,
3) $1 =$*R-mod,*
4) $\bigwedge\limits_{i\in I} \zeta_i = \bigcap\limits_{i\in I} \zeta_i$ *y*
5) $\bigvee\limits_{i\in I} \zeta_i = \xi_{R-nat}(\bigcup\limits_{i\in I} \zeta_i)$

Proposición 4.2.4. *Si* $\{\zeta_i\}_{i\in I}$ *es una familia de clases naturales, entonces* $\bigvee\limits_{i\in I} \zeta_i$=$\{N \in R-mod | \forall M \rightarrowtail N \neq 0,\, \exists 0 \neq M' \rightarrowtail M$ *con* $M' \in \zeta_p$ *para algún* $p \in I\}$.

Demostración. Tenemos que
$\bigvee\limits_{i\in I} \zeta_i = \xi_{R-nat}(\bigcup\limits_{i\in I} \zeta_i) = ((\bigcup\limits_{i\in I} \zeta_i)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, por la Proposición 4.2.2, pero
$((\bigcup\limits_{i\in I} \zeta_i)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \{N \in R-mod | \forall M \rightarrowtail N \neq 0,\, \exists 0 \neq M' \rightarrowtail M$ con $M' \in \zeta_p$ para algún $p \in I\}$.

□

Observación 4.2.5. *Sabemos que* $R-nat = Skel(L_{\{\leq\}}) \subseteq L_{\{\leq\}}$ *y el orden es la restricción de el orden de* $L_{\{\leq\}}$ *a* $Skel(L_{\{\leq\}})$*, entonces los seudocomplementos en* $R-nat$ *serán los mismos que los de* $L_{\{\leq\}}$*, es decir,* $\zeta^{\perp_\leq} = \zeta^{\perp_{R-nat}}$, $\forall \zeta \in R-nat$.

Proposición 4.2.6. *Si* ζ, ζ' *y* κ *son clases naturales, entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

a)$\zeta \bigwedge \zeta' \leq \kappa$.

b)$\zeta \bigwedge \zeta' \bigwedge \kappa^{\perp_{R-nat}} = 0$.

Demostración. a)$\Rightarrow$b)
Sea $M \in \zeta \bigwedge \zeta' \bigwedge \kappa^{\perp_{R-nat}}$, entonces $M \in \kappa^{\perp_{R-nat}}$.
Por otro lado, $M \in \zeta \bigwedge \zeta' \leq \kappa$, por lo que $M \in \kappa^{\perp_{R-nat}} \bigcap \kappa \therefore M = 0$.
b)$\Rightarrow$a)
Sea $M \in \zeta \bigwedge \zeta'$ tal que $M \notin \kappa$, entonces existe $f : N \to M$ monomorfismo distinto de cero tal que $\forall g : N' \to N$ monomorfismo distinto de cero, $N' \notin \kappa \therefore N \in \zeta \bigwedge \zeta' \bigwedge \kappa^{\perp_{R-nat}} = 0$ lo que es una contradicción.
$\therefore \zeta \bigwedge \zeta' \leq \kappa$.

□

Notación 4.2.7. De lo anterior podemos ver que $\zeta' = (\zeta \bigwedge \kappa^{\perp_{R-nat}})^{\perp_{R-nat}}$ es máximo con la propiedad de $\zeta \bigwedge \zeta' \leq \kappa$, ya que es máxima con la propiedad de $\zeta \bigwedge \zeta' \bigwedge \kappa^{\perp_{R-nat}} = 0$.
Denotaremos por $\kappa \wr \zeta$ a $(\zeta \bigwedge \kappa^{\perp_{R-nat}})^{\perp_{R-nat}}$.

Teorema 4.2.8. *R-nat es una retícula de Boole completa.*

Demostración. Sea $\zeta \in R-nat$, sabemos ya que $\zeta \bigwedge \zeta^{\perp_{R-nat}} = 0$.
Ahora sea $M \notin \zeta \bigvee \zeta^{\perp_{R-nat}}$, entonces existe $f : N \to M$ monomorfismo distinto de cero tal que $\forall f : N' \to N$ monomorfismo no cero, $N' \notin \zeta \bigcup \zeta^{\perp_{R-nat}}$, ya que $\zeta \bigvee \zeta^{\perp_{R-nat}} = \xi_{R-nat}(\zeta \bigcup \zeta^{\perp_{R-nat}})$.
Pero $N \notin \zeta^{\perp_{R-nat}}$, entonces existe $h : K \to N$ monomorfismo distinto de cero, con $K \in \zeta$, lo que es claramente una contradicción.
$\therefore \zeta \bigvee \zeta^{\perp_{R-nat}} = R-mod = 1$.
$\therefore \zeta^{\perp_{R-nat}}$ es complemento de ζ en $R-nat$.
Sean Γ, ζ y Ω clases naturales y $\Lambda = (\Gamma \bigwedge \Omega) \bigvee (\zeta \bigwedge \Omega)$. Como $\Gamma \bigwedge \Omega \leq \Lambda$ y $\zeta \bigwedge \Omega \leq \Lambda$, tenemos que $\Gamma \leq \Lambda \wr \Omega$ y $\zeta \leq \Lambda \wr \Omega$, entonces $\Gamma \bigvee \zeta \leq (\Lambda \wr \Omega)$.
Por lo que tenemos que $\Omega \bigwedge (\Gamma \bigvee \zeta) \leq \Omega \bigwedge (\Lambda \wr \Omega) \leq \Lambda$, entonces $\Omega \bigwedge (\Gamma \bigvee \zeta) \leq \Lambda$ y la desigualdad $\Lambda \leq \Omega \bigwedge (\Gamma \bigvee \zeta)$ siempre se da.
$\therefore \Omega \bigwedge (\Gamma \bigvee \zeta) = \Lambda = (\Gamma \bigwedge \Omega) \bigvee (\zeta \bigwedge \Omega)$.
Por lo que $R-nat$ es una gran retícula de Boole y, por la Observación 4.2.3, es completa. □

Corolario 4.2.9. *$Skel(R-nat) = R-nat$.*

Demostración. Como $R-nat$ es una retícula de Boole, todo elemento tiene complemento y es complemento de su complemento, es decir, $\zeta = (\zeta^{\perp_{R-nat}})^{\perp_{R-nat}}$. □

Definición 4.2.10. Sea M un R-módulo, entonces diremos que $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq M$ es una familia independiente de elementos de M si $Rx_i \cap \sum_{j\in I-\{i\}} Rx_j = 0 \ \forall i \in I$.

Proposición 4.2.11. *Sea M un R-módulo y $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq M$, entonces $\{x_i\}_{i\in I}$ es una familia independiente de elementos de M $\Leftrightarrow$ $\{x_i\}_{i\in J}$ es una familia independiente de elementos de M $\forall J \subseteq I$ finito.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $J \subseteq I$ finito, entonces tenemos que $Rx_i \cap \sum_{j\in J-\{i\}} Rx_j \subseteq Rx_i \cap \sum_{j\in I-\{i\}} Rx_j = 0 \ \forall i \in J$
$\therefore Rx_i \cap \sum_{j\in J-\{i\}} Rx_j = 0 \ \forall i \in J$.
$\Leftarrow$)(por contrapuesta)
Sea $J \subseteq I$ finito tal que $\{x_i\}_{i\in J}$ no es una familia independiente de elementos de M, entonces existe $i \in J$ tal que $Rx_i \cap \sum_{j\in J-\{i\}} Rx_j \neq 0$, por lo que existe $x \neq 0$ tal que $x \in Rx_i \cap \sum_{j\in J-\{i\}} Rx_j \subseteq Rx_i \cap \sum_{j\in I-\{i\}} Rx_j = 0 \therefore \{x_i\}_{i\in I}$ no es una familia independiente de elementos de M. □

Proposición 4.2.12. *Sea M un R-módulo, entonces existe $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq M$ tal que $\bigoplus_{i\in I} Rx_i$ es esencial en M.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.11, sabemos que el ser una familia de familias independientes de elementos de M es de carácter finito, entonces, por el Lema de Tukey, existe $\{x_i\}_{i\in I}$ familia independiente máxima de elementos de M.
Ahora sea $N \leq M$ tal que $\bigoplus_{i\in I} Rx_i \cap N = 0$, supongamos que existe $x \in N$ distinto de cero, entonces $\bigoplus_{i\in I} Rx_i \cap Rx = 0$ así que $\{x_i\}_{i\in I} \cup \{x\}$ sería una familia independiente de elementos de M lo que contradice que $\{x_i\}_{i\in I}$ sea máxima.
$\therefore N = 0$, así que $\bigoplus_{i\in I} Rx_i$ es esencial en M.

□

Proposición 4.2.13. *Si* $\zeta \in R - nat$, *entonces:*
$M \in \zeta \Leftrightarrow Rx \in \zeta$, $\forall x \in M$.

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $M \in \zeta \Leftrightarrow$ y $x \in M$, entonces $Rx \leq M$ y $\zeta \in R - nat = L_{\{\leq, \bigoplus, E\}} \therefore Rx \in \zeta$.
$\Leftarrow$)
Sea $M \in R - mod$ tal que $Rx \in \zeta \forall x \in M$.
Consideremos $\{x_i\}_{i\in I}$ la máxima familia de elementos independientes de M, entonces $\bigoplus_{i\in I} Rx_i$ es esencial en M, como pudimos ver en la Proposición 4.2.12, y $\bigoplus_{i\in I} Rx_i \in \zeta$, pues ζ es una clase natural $\therefore M \in \zeta$, por la Proposición 4.1.6.

□

Proposición 4.2.14. *Sea* $\zeta, \zeta' \in R - nat$, *entonces*
$\{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \zeta\} = \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \zeta'\} \Leftrightarrow \zeta = \zeta'$.

Demostración. $\Leftarrow$)
Es claro que si $\zeta = \zeta'$, entonces
$I \in \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \zeta\} \Leftrightarrow \frac{R}{I} \in \zeta \Leftrightarrow \frac{R}{I} \in \zeta' \Leftrightarrow I \in \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \zeta\}$.
$\therefore \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \zeta\} = \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \zeta'\}$.
$\Rightarrow$)
Sea $M \in \zeta$, entonces $Rx \in \zeta\ \forall x \in M$, por proposición 4.2.13, y $Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$, por lo que $\frac{R}{(0:x)} \in \zeta\ \forall x \in M$, entonces $\frac{R}{(0:x)} \in \zeta'\ \forall x \in M$, por hipótesis, entonces $Rx \in \zeta'$ $\forall x \in M \therefore M \in \zeta'$, por la Proposición 4.2.13 $\therefore \zeta \subseteq \zeta'$.
Ahora sea $M \in \zeta'$, entonces $Rx \in \zeta'\ \forall x \in M$, por proporción 4.2.13, y $Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$, por lo que $\frac{R}{(0:x)} \in \zeta'\ \forall x \in M$, entonces $\frac{R}{(0:x)} \in \zeta\ \forall x \in M$, por hipótesis, entonces $Rx \in \zeta\ \forall x \in M \therefore M \in \zeta$, por la Proposición 4.2.13 $\therefore \zeta' \subseteq \zeta \therefore \zeta = \zeta'$.

□

Teorema 4.2.15. $R - nat$ *es cardinable.*

Demostración. Consideremos la función

$$f : R - nat \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(R))$$

$$\zeta \longmapsto \{I \leq R | \frac{R}{I} \in \zeta\} \qquad .$$

es claro que está bien definida y, por la Proposición 4.2.14, es inyectiva
$\therefore R - nat$ es cardinable.

$\square$

Observación 4.2.16. *De lo anterior tenemos que la cardinalidad de R-nat es menor o igual que la de la potencia de la potencia de R, es decir, $|R - nat| \leq 2^{2^{|R|}}$ y en caso de que R sea un anillo finito $R - nat$ también será finita.*

4.3. Anillos semiartinianos caracterizados mediante sus clases naturales.

Habiendo ya descrito las clases naturales, daremos una caracterización de los anillos semiartinianos mediante las propiedades de clausura de sus clases naturales.

Definición 4.3.1. Un anillo R es semiartiniano izquierdo si para todo I ideal izquierdo propio de R existe S submódulo simple de $\frac{R}{I}$.

Observación 4.3.2. *R es semiartiniano izquierdo si y solo si todo módulo distinto de cero tiene un soclo no cero.*

Observación 4.3.3. *Sabemos que todo simple es isomorfo a un cociente del anillo entre un submódulo máximo, de manera que $\{\frac{R}{I} | I \leq R$ máximo$\}$ contiene una copia de cada módulo simple.*

Definición 4.3.4. Sea $R - simp \subseteq \{\frac{R}{I} | I \leq R \text{ máximo}\}$ un conjunto irredundante de representantes de módulos simples, es decir, si $N, M \in R - simp$, entonces $N \ncong M$, y si S es un módulo simple, entonces $S \cong N$ para algún $N \in R - simp$.

Observación 4.3.5. *Es fácil notar que $\xi_{\leq}(R - simp)$, la clase hereditaria generada por $R - simp$, es la clase de todos los módulos simples y el cero.*

Proposición 4.3.6. *Si $\zeta \in R - nat$ y R es semiartiniano, entonces:*
$M \in \zeta \Leftrightarrow S \in \zeta, \forall S \leq M$ simple.

Demostración. $\Rightarrow$)
Sabemos que ζ es cerrada bajo submódulos, así que si $M \in \zeta$, entonces $N \in \zeta$ para todo $N \leq M$, en particular si N es simple.
$\Leftarrow$)
Sea $0 \neq N \leq M$, entonces existe $0 \neq x \in N$, entonces $(0 : x) \neq R$, por lo que $\exists$ $S \leq \dfrac{R}{(0:x)}$ simple.
Entonces tenemos la inclusión $i : S \to N$ que es un monomorfismo y $S \in \zeta$, por hipótesis $\therefore M \in (\zeta^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} = \zeta$ ya que $\zeta \in R-nat$.

$\square$

Teorema 4.3.7. *R semiartiniano $\Leftrightarrow L_{\{\leq,\bigoplus,E\}} = L_{\{\leq,\prod,E\}}$.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Es claro que $L_{\{\leq,\prod,E\}} \subseteq L_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$, pues la suma directa es un submódulo del producto, entonces bastaría demostrar la otra contención.
Sea $\zeta \in L_{\{\leq,\bigoplus,E\}}$, $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$ y S submódulo simple de $\prod_{i\in I} M_i$, entonces tenemos la inclusion $f : S \to \prod_{i\in I} M_i$ que es un monomorfismo, entonces $f(S) \cong S \neq 0$, por lo que $\exists j \in I$ tal que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi_j"] & M_j \\ S \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\pi_j f \neq 0"'] & \end{tikzcd}$$

donde π_j es la proyección natural de $\prod_{i\in I} M_i$ a M_j.
Además, S es simple, por lo que $\pi_j f$ es monomorfismo y $M_j \in \zeta$, entonces $S \in \zeta$ $\therefore$ $\prod_{i\in I} M_i \in \zeta \therefore \zeta \in L_{\{\leq,\prod,E\}}$.
$\therefore L_{\{\leq,\bigoplus,E\}} = L_{\{\leq,\prod,E\}}$.
$\Leftarrow$)
Sea $M \in R-mod$, sabemos que $\bigoplus_{S\in R-simp} E(S)$ cogenera a $R-mod$, entonces existe $i : M \to \prod_{i\in I} M_i$ monomorfismo con $M_i = \bigoplus_{S\in R-simp} E(S) \forall i \in I$.
Tenemos que $E(S) \in (\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ para cualquier $S \in R-simp$, pues $(\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas, por lo que $\bigoplus_{S\in R-simp} E(S) \in (\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, pues $(\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es una clase cerrada bajo sumas directas.
Además, $(\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq} \in R-nat = L_{\{\leq,\bigoplus,E\}} = L_{\{\leq,\prod,E\}}$, por lo que $\prod_{i\in I} M_i \in (\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, pues $(\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es una clase cerrada bajo productos $\therefore M \in (\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$, pues $(\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$ es una clase cerrada bajo submódulos $\therefore R-mod = (\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_\leq})^{\perp_\leq}$.
Sea $M \in R-mod$, si $M \neq 0$ no tiene submódulos propios distintos de cero, M tendría que ser simple, por lo que tendría soclo distinto de cero.
Por otro lado, si $\exists N \leq M$ distinto de cero, entonces existe $S \leq N$ distinto de cero tal

que $S \in \xi_{\leq}(R-simp)$, ya que $M \in R-mod = (\xi_{\leq}(R-simp)^{\perp_{\leq}})^{\perp_{\leq}}$, por lo que S es un submódulo simple de M, ya que M es distinto de cero $\therefore$ el soclo de M es distinto de cero.
$\therefore$ M tiene soclo no trivial $\forall M \in R-mod$ distinto de cero $\therefore$ R es semiartiniano.

$\square$

Capítulo 5

Clases conaturales.

5.1. Seudocomplementos en $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y retículas asociadas.

En esta sección calcularemos los seudocomplementos de la gran retícula de clases cohereditarias y usaremos el Corolario 4.0.7 para calcular también los seudocomplementos en la gran retícula $L_{\{\twoheadrightarrow,ext\}}$.

Definición 5.1.1. Llamaremos $R-conat$ al esqueleto de $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y llamaremos clases conaturales a los elementos de $R-conat$.

Proposición 5.1.2. *Sea $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces*
$\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \zeta^{S-\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta\ y\ f : N \to K\ epimorfismo \Rightarrow K = 0\}$.

Demostración. Sea $M \in\ \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K = 0\}$
Sea $f : M \to N$ y $g : N \to K$ epimorfismos con $K \in \zeta$, entonces $gf : M \to K$ es un epimorfismo $\therefore K = 0$.
$\therefore \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K = 0\} \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Sea N $\in \zeta \wedge \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K = 0\}$, tenemos que $Id_N : N \to N$ es epimorfismo, entonces $N = 0$
$\therefore \zeta \wedge \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K = 0\} = \{0\}$.
Ahora, sea $D \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta \wedge D = \{0\}$, sea $N \in \zeta$ y $f : M \to N$ epimorfismo con $M \in D$, entonces $N \in D$ ya que D es una clase cohereditaria.
$\therefore D \subseteq \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\}$.
$\therefore \zeta^{S-\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow$ K=0 $\}$ y, por la Observación 4.0.2, $\zeta^{S-\perp_{\twoheadrightarrow}} = \zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

$\square$

Corolario 5.1.3. *$L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es una gran retícula fuertemente seudocomplementada.*

Teorema 5.1.4. *Sea $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces $(\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ es la clase de los todos los módulos N tal que para cada $f : N \to K$ epimorfismo distinto de cero, $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y $g : K \to U$ epimorfismo.*

Demostración. Por la Proposición 5.1.2, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} &= \{N \in R-Mod|\ K \in \zeta^{\perp\twoheadrightarrow} \text{ y } f : N \to K \text{ epimorfismo} \Rightarrow \text{K=0 } \} \\
&= \{N \in R-Mod|\ f : N \to K \text{ epimorfismo distinto de cero} \Rightarrow K \notin \zeta^{\perp\twoheadrightarrow} \ \}.
\end{aligned}
$$

Además, tenemos que $K \notin \zeta^{\perp\twoheadrightarrow}$ si y solo si $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y un epimorfismo $g : K \to U$ $\therefore$ $(\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} = \{N \in R-Mod|$ para cada $f : N \to K$ epimorfismo distinto de cero, $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y $g : K \to U$ epimorfismo $\}$.

□

Definición 5.1.5. Una clase de módulos ζ satisface la condición (CN) si :
$M \in \zeta$ si y solo si para cada cociente $N \neq 0$ de M existe $L \neq 0$ cociente de N tal que es cociente de un elemento de ζ.

Teorema 5.1.6. *Sea $\zeta \subseteq$R-mod. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $\zeta \in R-conat$.

2) ζ satisface (CN).

3) $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $\zeta = (\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$.

Demostración. 1)⇒2)
Sea ζ una clase conatural, entonces $\zeta = \kappa^{\perp\twoheadrightarrow}$ para algún $\kappa \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, así que $\zeta = \{N \in R-Mod|\ K \in \kappa$ y $f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K = 0\} = \{N \in R-Mod|$ $0 \neq f : N \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K \notin \kappa\}$, por la Proposición 5.1.2.
Sea $g : M' \to M$ epimorfismo no cero y supongamos que $M' \in \zeta$, entonces, por hipótesis, existe $A \in \zeta$, $X \neq 0$ cociente de M, y $f : A \twoheadrightarrow X$ $\therefore$ $X \notin \kappa$ ya que $A \in \zeta$. Pero $M' \in \kappa \Rightarrow X \in \kappa$, ya que κ es cerrada bajo imágenes de morfismos y g es epimorfismo, de manera que es una contradicción.
$\therefore$ $M' \notin \kappa$ y $M \in \zeta$.

2)⇒3)
Sea $C \in \zeta$ y $g : C \to B$ epimorfismo. Sea $f : B \to N$ epimorfismo distinto de cero, entonces $fg : C \to N$ es un epimorfismo distinto de cero, por lo que existe $A \in \zeta$, $X \neq 0$ cociente de N y $f : A \twoheadrightarrow X$ ya que ζ satisface (CN) $\therefore$ $B \in \zeta$ $\therefore$ $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Ahora, por la Observación 4.0.4, tenemos que $\zeta \subseteq (\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$. Sea $N \in (\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$, entonces, por el Teorema 5.1.4, para cada $f : N \to K$ epimorfismo distinto de cero, $\exists U \in \zeta$ distinto de cero y $g : K \to U$ epimorfismo, entonces $N \in \zeta$ ya que ζ satisface (CN) $\therefore$ $(\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} \subseteq \zeta$ $\therefore$ $\zeta = (\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow}$.

3)⇒1)
Es claro ya que $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}} \Rightarrow \zeta = (\zeta^{\perp\twoheadrightarrow})^{\perp\twoheadrightarrow} \in Skel(L_{\{\twoheadrightarrow\}})$= R-conat.

□

Teorema 5.1.7. *Sea ζ una clase conatural, entonces ζ es cerrada bajo :*
1) Imágenes de morfismos.

2) Extensiones.
3) Epimorfismos superfluos.

Demostración. 1) Es claro, ya que R-conat$=Skel(L_{\{\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces toda clase natural es también una clase cohereditaria, es decir, cerrada bajo imágenes de morfismos.

2) Como ζ es una clase conatural existe $\kappa \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta = \kappa^{\perp\twoheadrightarrow}$.
Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $N, L \in \zeta$ y sea $h : M \to M'$ epimorfismo con $M' \in \kappa$.
Tomemos $\pi : M' \to \dfrac{M'}{Im(hf)} = Coker(hf)$ el epimorfismo natural al conúcleo de hf, entonces $\pi hf = 0$ y, por la propiedad del conúcleo, existe $j : L \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[ddl, "j"] & 0 \\
 & & M' \arrow[d, "\pi"] & & \\
 & & \dfrac{M'}{Im(hf)} & &
\end{tikzcd}.$$

Entonces $jg = \pi h$ y πh es epimorfismo, ya que es una composición de epimorfismos, entonces jg es epimorfismo, por lo que j es epimorfismo.
Además, tenemos que $\pi : M' \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ es epimorfismo con $M' \in \kappa$, entonces $\dfrac{M'}{Im(hf)} \in \kappa$, pues κ una clase cohereditaria, por lo que $\dfrac{M'}{Im(hf)} = 0$ ya que $j : L \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ es epimorfismo, $L \in \zeta = \kappa^{\perp\twoheadrightarrow}$ y $\dfrac{M'}{Im(hf)} \in \kappa \therefore hf$ es epimorfismo.
Pero también tenemos que $M' \in \kappa$, $hf : N \to M'$ epimorfismo y $N \in \zeta = \kappa^{\perp\twoheadrightarrow} \therefore M' = 0 \therefore M \in \kappa^{\perp\twoheadrightarrow} = \zeta$.

3)Como ζ es una clase conatural existe $\kappa \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta = \kappa^{\perp\twoheadrightarrow}$.
Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $L \in \zeta$ y $Im(f) \ll M$.
Sea $h : M \to M'$ epimorfismo con $M' \in \kappa$.
Tomemos $\pi : M' \to \dfrac{M'}{Im(hf)} = Coker(hf)$ el epimorfismo natural al conúcleo de hf, entonces $\pi hf = 0$ y, por la propiedad del conúcleo, existe $j : L \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[ldd, "j"] & 0 \\ & & M' \arrow[d, "\pi"] & & \\ & & \dfrac{M'}{Im(hf)} & & \end{tikzcd}.$$

Entonces $j \circ g = \pi \circ h$ y $\pi \circ h$ es epimorfismo, ya que es una composición de epimorfismos, entonces $j \circ g$ es epimorfismo, por lo que j es epimorfismo.
Además, tenemos que $\pi : M' \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ es epimorfismo con $M' \in \kappa$, entonces $\dfrac{M'}{Im(hf)} \in \kappa$, pues κ es una clase cohereditaria, por lo que $\dfrac{M'}{Im(hf)} = 0$ ya que $j : L \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ es epimorfismo, $L \in \zeta = \kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ y $\dfrac{M'}{Im(hf)} \in \kappa \therefore hf$ es epimorfismo.
Tenemos que $ker(h)$ y $Im(f)$ son submódulos de M, entonces $ker(h) + Im(f) \subseteq M$.
Sea $m \in M$, como hf es epimorfismo $\exists n \in N$ tal que $hf(n) = h(m) \in M'$, entonces $m - f(n) \in ker(h)$ y $m = (m - f(n)) + f(n)$, por lo que $M \subseteq ker(h) + Im(f)$, entonces $ker(h) + Im(f) = M$ y $Im(f) \ll M \therefore ker(h) = M \therefore h$ es el morfismo cero.
Entonces $M' = 0 \therefore M \in \kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \zeta$, por la Proposición 5.1.2.

□

Corolario 5.1.8. *R-conat$\subseteq L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}$.*

Teorema 5.1.9. *$L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}$ tienen como esqueleto a R-conat, es decir, $Skel(L_{\{\twoheadrightarrow\}}) = Skel(L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}})$=R-conat.*

Demostración. Por el Corolario 5.1.8, tenemos que R-conat$\subseteq L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}}$.
Entonces R-conat$=Skel(L_{\{\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es S-seudocomplementada
$\therefore$ R-conat$=Skel(L_{\{\twoheadrightarrow\}}) = Skel(L_{\{\twoheadrightarrow, ext\}})$, por el Corolario 4.0.7.

□

5.2. R-conat.

En esta sección demostraremos que $R - conat$, junto con la contención, es una retícula de Boole.

Lema 5.2.1. *Sea $\{\zeta_i\}_{i \in I}$ una colección de clases conaturales, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} \zeta_i$ es una clase conatural.*

Demostración. Sea $M \in$R-mod tal que para cualquier $f : M \to N$ epimorfismo distinto de cero, existen $K \neq 0$ cociente de N, $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \zeta_i$ y $g : A \to K$ epimorfismo.
Además, tenemos que si $A \in \bigcap\limits_{i \in I} \zeta_i$, entonces $A \in \zeta_i$ para cualquier $i \in I$, asi que en

particular para cualquier $f : M \to N$ epimorfismo distinto de cero, existen $A \in \zeta_i$(para cada $i \in I$), $K \neq 0$ cociente de N y $g : A \to K$ epimorfismo. Ya que ζ_i es una clase conatural satisface (CN), por el Teorema 5.1.6, entonces $M \in \zeta_i$ para cualquier $i \in I$ $\therefore$ $M \in \bigcap_{i\in I} \zeta_i$.

Entonces $\bigcap_{i\in I} \zeta_i$ satisface (CN) $\therefore$ $\bigcap_{i\in I} \zeta_i$ $\in$R-conat, por el Teorema 5.1.6.

□

Notación 5.2.2. Denotaremos por $\xi_{R-conat}(\zeta)$ a la clase conatural generada por ζ.

Proposición 5.2.3. *Si* $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, *entonces* $(\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$=$\xi_{R-conat}(\zeta)$.

Demostración. Sabemos, por Observacion 4.0.3, que $\zeta \subseteq (\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ $\in$R-conat.
Sea κ $\in$R-conat tal que $\zeta \subseteq \kappa$. Por Observación 4.0.4, tenemos que $(\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq (\kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ y, por el Teorema 5.1.6, tenemos que $(\kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \kappa$, entonces $(\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \kappa$ $\therefore$ $(\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$=$\xi_{R-conat}(\zeta)$.

□

Observación 5.2.4. *Podemos ver que (R-conat,$\leq$,$\wedge$,$\vee$,0,1) es una retícula completa, con*
1) $\zeta_1 \leq \zeta_2 \Leftrightarrow \zeta_1 \subseteq \zeta_2$,
2) $0 = \{0\}$,
3) $1 =$*R-mod,*
4) $\bigwedge_{i\in I}^{R-conat} \zeta_i = \bigcap_{i\in I} \zeta_i$ *y*
5) $\bigvee_{i\in I}^{R-conat} \zeta_i = \xi_{R-conat}(\bigcup_{i\in I} \zeta_i)$

Proposición 5.2.5. *Si* $\{\zeta_i\}_{i\in I}$ *es una familia de clases conaturales, entonces*
$\bigvee_{i\in I}^{R-conat} \zeta_i$=$\{N \in R-mod | \forall N \twoheadrightarrow M \neq 0$, $\exists M \twoheadrightarrow M' \neq 0$ *con* $M' \in \zeta_p$ *para algún* $p \in I\}$.

Demostración. Tenemos que
$\bigvee_{i\in I}^{R-conat} \zeta_i = \xi_{R-conat}(\bigcup_{i\in I} \zeta_i) = ((\bigcup_{i\in I} \zeta_i)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, por la Proposición 5.2.3, pero
$((\bigcup_{i\in I} \zeta_i)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{N \in R - mod | \forall N \twoheadrightarrow M \neq 0$, $\exists M \twoheadrightarrow M' \neq 0$ con $M' \in \zeta_p$ para algún $p \in I\}$.

□

Observación 5.2.6. *Sabemos que* $R - conat = Skel(L_{\{\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ *y el orden en* $R - conat$ *es la restricción del orden en* $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, *entonces los seudocomplementos en* $R-conat$ *serán los mismos que los de* $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, *es decir,* $\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \zeta^{\perp_{R-conat}}$, $\forall \zeta \in R-conat$.

Proposición 5.2.7. *Si* ζ, ζ' *y* κ *son clases conaturales, entonces las siguientes propiedades son equivalentes*

a) $\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \leq \kappa$.

b) $\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \overset{R-conat}{\bigwedge} \kappa^{\perp_R-conat} = 0$.

Demostración. a)⇒b)
Sea $M \in \zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \overset{R-conat}{\bigwedge} \kappa^{\perp_R-conat}$, entonces $M \in \kappa^{\perp_R-conat}$.
Por otro lado, $M \in \zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \leq \kappa$, por lo que $M \in \kappa^{\perp_R-conat} \bigcap \kappa \therefore M = 0$.
b)⇒a)
Sea $M \in \zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta'$ tal que $M \notin \kappa$, entonces existe $f : M \to N$ epimorfismo distinto de cero tal que $\forall g : N \to N'$ epimorfismo distinto de cero, $N' \notin \kappa \therefore$ $N \in \zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \overset{R-conat}{\bigwedge} \kappa^{\perp_R-conat} = 0$, lo que es una contradicción.
$\therefore \zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \leq \kappa$.

□

Notación 5.2.8. De lo anterior podemos ver que $\zeta' = (\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \kappa^{\perp_R-conat})^{\perp_R-conat}$ es máximo con la propiedad de $\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \leq \kappa$, ya que es máxima con la propiedad de $\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta' \overset{R-conat}{\bigwedge} \kappa^{\perp_R-conat} = 0$.
Denotaremos por $\kappa : \zeta$ a $(\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \kappa^{\perp_R-conat})^{\perp_R-conat}$.

Teorema 5.2.9. *R-conat es una retícula de Boole completa.*

Demostración. Sea $\zeta \in R-conat$, sabemos ya que $\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \zeta^{\perp_R-conat} = 0$.
Ahora sea $M \notin \zeta \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta^{\perp_R-conat}$, entonces existe $f : M \to N$ epimorfismo distinto de cero tal que para todo $g : N \to N'$ distinto de cero, $N' \notin \zeta \bigcup \zeta^{\perp_R-conat}$, ya que $\zeta \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta^{\perp_R-conat} = \xi_{R-conat}(\zeta \bigcup \zeta^{\perp_R-conat})$.
Pero $N \notin \zeta^{\perp_R-conat}$, entonces existe $h : N \to K$ epimorfismo distinto de cero, con $K \in \zeta$, lo que es claramente una contradicción.
$\therefore \zeta \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta^{\perp_R-conat} = R-mod = 1$.
$\therefore \zeta^{\perp_R-conat}$ es complemento de ζ en $R-conat$.
Sean Γ, ζ y Ω clases conaturales y $\Lambda = (\Gamma \overset{R-conat}{\bigwedge} \Omega) \overset{R-conat}{\bigvee} (\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \Omega)$. Como $\Gamma \overset{R-conat}{\bigwedge} \Omega \leq \Lambda$ y $\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \Omega \leq \Lambda$, tenemos que $\Gamma \leq \Lambda : \Omega$ y $\zeta \leq \Lambda : \Omega$, entonces $\Gamma \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta \leq (\Lambda : \Omega)$.
Por lo que tenemos que $\Omega \overset{R-conat}{\bigwedge} (\Gamma \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta) \leq \Omega \overset{R-conat}{\bigwedge} (\Lambda : \Omega) \leq \Lambda$, entonces $\Omega \overset{R-conat}{\bigwedge} (\Gamma \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta) \leq \Lambda$ y la desigualdad $\Lambda \leq \Omega \overset{R-conat}{\bigwedge} (\Gamma \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta)$ siempre se da.
$\therefore \Omega \overset{R-conat}{\bigwedge} (\Gamma \overset{R-conat}{\bigvee} \zeta) = \Lambda = (\Gamma \overset{R-conat}{\bigwedge} \Omega) \overset{R-conat}{\bigvee} (\zeta \overset{R-conat}{\bigwedge} \Omega)$.
Por lo que $R-conat$ es una retícula de Boole y, por la Observación 5.2.4, es completa.

□

Corolario 5.2.10. *$Skel(R - conat) = R - conat$.*

Demostración. Como $R - conat$ es una Retícula de Boole, todo elemento tiene complemento y es complemento de su complemento, es decir, $\zeta = (\zeta^{\perp_{R-conat}})^{\perp_{R-conat}}$. ☐

Observación 5.2.11. *Si $\zeta \subseteq R - mod$ tenemos que $(\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{N \in R - Mod|$ para cada $f : N \to K$ epimorfismo distinto de cero, $\exists U \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)$ distinto de cero y $g : K \to U$ epimorfismo $\}$, por lo que es claro que $\zeta \subseteq (\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.*

Teorema 5.2.12. *Sea $\zeta \subseteq R - mod$, entonces $\xi_{R-conat}(\zeta) = (\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.*

Demostración. Sea $\Omega \in R - conat$ tal que $\zeta \subseteq \Omega$, entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) \subseteq \Omega$ ya que $R - conat \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Como $\Omega \in R - conat$ tenemos que $\Omega = \kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ para algún $\kappa \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, además, tenemos que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta) \subseteq \kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \Rightarrow (\kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \Rightarrow (\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq ((\kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$ y $((\kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \kappa^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \Omega$, pues $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es fuertemente seudocomplementada, por lo que $(\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \Omega$ y $\zeta \subseteq (\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \in R - conat \therefore \xi_{R-conat}(\zeta) = (\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.
☐

Definición 5.2.13. Un módulo M es cocíclico si existe x distinto de cero tal que $f : M \to N$ es monomorfismo si y sólo si $x \notin Nuc(f)$.

Proposición 5.2.14. *Sea S es simple, entonces $E(S)$ es cocíclico.*

Demostración. Sea $0 \neq x \in S$ y $f : E(S) \to N$ un morfismo tal que $x \notin Nuc(f)$.
Si $Nuc(f) \neq 0$, entonces $S \cap Nuc(f) \neq 0$, ya que S esencial en $E(S)$, por lo que $S \leq Nuc(f)$, entonces $x \in Nuc(f)$, lo que es una contradicción.
$\therefore Nuc(f) = 0 \therefore f$ es monomorfismo.
Por otro lado, si f es monomorfismo, entonces $x \notin Nuc(f) = 0$.
☐

Proposición 5.2.15. *Si S es simple y $S \leq U \leq E(S)$, entonces U es cocíclico.*

Demostración. Sea $0 \neq x \in S$ y $f : U \to N$ morfismo tal que $x \notin Nuc(f)$.
Si $Nuc(f) \neq 0$, entonces $S \cap Nuc(f) \neq 0$, pues S es esencial en U ya que S es esencial en $E(S)$, por lo que $S \leq Nuc(f)$, entonces $x \in Nuc(f)$, lo que es una contradicción.
$\therefore Nuc(f) = 0 \therefore f$ es monomorfismo.
Por otro lado, si f es monomorfismo, entonces $x \notin Nuc(f) = 0$.
☐

Observación 5.2.16. *Lo anteriormente demostrado nos dice también que cualquier extension esencial de un simple es cocíclica.*

Teorema 5.2.17. *Si U es cocíclico, entonces existe $S \leq U$ simple esencial en U.*

Demostración. Sea $x \in U$ elemento distingido del cocíclico U, como Rx es un cociente de R, existe un cociente simple S de Rx y, como $E(S)$ es inyectivo, existe $f : U \to E(S)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ Rx \arrow[ur, hook] \arrow[r, two heads, "g"] & S \arrow[r, hook, "h"] & E(S) \end{tikzcd}.$$

Ahora, $f(x) = 0 \Rightarrow h(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) \in Nuc(h) = 0$, pues h es un monomorfismo, entonces $g(x) = 0$, por lo que $g(Rx) = Rg(x) = 0$, lo que implica que $g = 0$, lo que es una contradicción porque S es simple $\therefore f(x) \neq 0 \therefore x \notin Nuc(f)$. Por lo que f es monomorfismo, pues U es un cocíclico.

Además, por la conmutatividad del diagrama, tenemos que $S \subsetneq Im(f)$ y f es monomorfismo, por lo que $Imf \cong U$, así que podemos ver a S como submódulo de U, entonces $S \leq U \leq E(S)$, además, S es esencial en $E(S)$, por lo que es esencial en U.

□

Teorema 5.2.18. *Todo módulo no cero tiene un cociente cocíclico.*

Demostración. Sea $0 \neq M \in R-mod$, entonces existe $0 \neq x \in M$, por lo que $0 \neq Rx$ y $Rx \cong \dfrac{R}{(x:0)}$, entonces existe S cociente simple de Rx.

Además, $E(S)$ es inyectivo, por lo que existe $f : M \to E(S)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ Rx \arrow[ur, hook] \arrow[r, two heads] & S \arrow[r, hook] & E(S) \end{tikzcd}.$$

De aquí tenemos que $S \leq Im(f) \leq E(S)$ y, por la Proposición 5.2.15, $Im(f)$ es cocíclico y si f' es la correstricción de f a su imagen tenemos que $f' : M \to Im(f)$ es epimorfismo, por lo que $Im(f)$ es un cociente cocíclico de M.

□

Proposición 5.2.19. *Si $\zeta \in R-conat$, entonces:*
$M \in \zeta \Leftrightarrow U \in \zeta, \forall\, U$ cociente cocíclico de M.

Demostración. $\Rightarrow$)
Sea $M \in \zeta$ y $f : M \to L$ epimorfismo con L cocíclico.
Por el Teorema 5.1.6, $\zeta \in R-conat \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, por lo que ζ es cerrada bajo cocientes $\therefore L \in \zeta$.

$\Leftarrow$)
Sea $M \in \zeta$ y $f : M \to L$ epimorfismo con $L \neq 0$, entonces, como todo módulo tiene un cociente cocíclico, por el Teorema 5.2.18, $\exists g : L \to N$ epimorfismo con N cocíclico($N \neq 0$), por lo que $N \in \zeta \therefore M \in \zeta$
. □

Teorema 5.2.20. *Si $\zeta \in R-conat$, entonces $\zeta = \xi_{R-conat}(\{M \in \zeta | M$ es cocíclico $\})$.*

Demostración. Tenemos que $\{M \in \zeta | M$ es cocíclico $\} \subseteq \zeta$ y $\zeta \in R-conat$, entonces $\xi_{R-conat}(\{M \in \zeta | M$ es cocíclico $\}) \subseteq \zeta$.

Ahora, sea $M \in \zeta$ y $f : M \to N$ epimorfismo distinto de cero, entonces $0 \neq N$, por lo que existe $g : N \to U$ epimorfismo con U cocíclico.
Tenemos que gf es epimorfismo, por lo que $U \in \zeta$ es cocíclico $\therefore M \in \xi_{R-conat}(\{M \in \zeta | M \text{ es cocíclico }\}) \therefore \zeta \subseteq \xi_{R-conat}(\{M \in \zeta | M \text{ es cocíclico }\})$
$\therefore \zeta = \xi_{R-conat}(\{M \in \zeta | M \text{ es cocíclico }\})$.

□

Observación 5.2.21. *Por el Teorema 5.2.17, tenemos que cualquier cocíclico U existe $f : U \to E(S)$ monomorfismo con S simple, además, $S \cong S' \Rightarrow E(S) \cong E(S')$, entonces $\{M \in R-mod | \exists f : M \to E(S) \text{ monomorfismo, con } S \in R-simp\}$ es una familia de módulos que contiene una copia de cada cocíclico.*

Teorema 5.2.22. *$R-conat$ es cardinable.*

Demostración. Tenemos que $E(S)$ se sumerge en $\bigoplus\limits_{S \in R-simp} E(S)$ y, por la Observación 5.2.21, $\{M \in R-mod | \exists f : M \to E(S) \text{ monomorfismo, con } S \in R-simp\}$ es una familia de módulos que contiene una copia de cada cocíclico, por lo que $\{M \in R-mod | \exists f : M \to \bigoplus\limits_{S \in R-simp} E(S) \text{ monomorfismo }\}$ es una familia de módulos que contiene una copia de cada cocíclico.
Además, sabemos que una clase conatural está determinada por los cocíclos que contiene, por el Teorema 5.2.20, por lo que

$$\begin{aligned} f : R-conat &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigoplus_{S \in R-simp} E(S))) \\ \zeta &\longmapsto \{M \leq \bigoplus_{S \in R-simp} E(S) | M \in \zeta\} \end{aligned}$$

es inyectiva y $\bigoplus\limits_{S \in R-simp} E(S)$ es conjunto, por lo que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigoplus\limits_{S \in R-simp} E(S)))$ es conjunto $\therefore R-conat$ es cardinable.

□

5.3. Anillos MAX caracterizados mediante sus clases conaturales.

Habiendo ya descrito las clases conaturales, daremos una caracterización de los anillos MAX izquierdos mediante las propiedades de clausura de sus clases conaturales.

Definición 5.3.1. Un módulo M es coatómico si todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo.

Observación 5.3.2. *R es coatómico como R-módulo ya que todo ideal de R está contenido en un ideal máximo.*

Observación 5.3.3. *M es coatómico si y solo si todo cociente no cero de M tiene un cociente simple.*

Definición 5.3.4. R es MAX si todo $M \in R-mod$ es coatómico.

Observación 5.3.5. *R es MAX si y solo si todo módulo no cero tiene un cociente simple.*

Proposición 5.3.6. *Si R es MAX y $\zeta \in R-conat$, entonces:*
$M \in \zeta \Leftrightarrow S \in \zeta$, $\forall S$ cociente simple de M.

Demostración. $\Rightarrow)$
Sabemos que $R-conat \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$, entonces ζ es cerrada bajo cocientes, por lo que si $M \in \zeta$ todo cociente de M está en ζ, en particular los cocientes simples.
$\Leftarrow)$
Sea $f : M \to N$ epimorfismo con $N \neq 0$, entonces existe $g : N \to S$ epimorfimo con S simple, ya que R es MAX, además, por hipótesis, $S \in \zeta \therefore M \in \zeta = (\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

□

Teorema 5.3.7. *R es MAX $\Leftrightarrow \zeta$ es cerrada bajo sumas directas,$\forall \zeta \in R-conat$.*

Demostración. $\Rightarrow)$

Sea $\zeta \in R-conat$, $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta$ y S cociente simple de $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, entonces tenemos el epimorfismo $\pi : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \to S$ y S es simple, por lo que $S \neq 0$, entonces $\exists j \in I$ tal que tenemos el siguiente diagrama conmutativo, con $\underline{i}_j$ es la inclusión natural de M_j a $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi"] & S \\ M_j \arrow[u, "\underline{i}_j"] \arrow[ur, "\pi\underline{i}_j \neq 0"'] & \end{tikzcd}.$$

Además, S es simple, por lo que $\pi\underline{i}_j$ es epimorfismo y $M_j \in \zeta$, entonces $S \in \zeta \therefore \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \zeta \therefore \zeta$ es cerrada bajo sumas directas.
$\therefore \zeta$ es cerrada bajo sumas directas,$\forall \zeta \in R-conat$.
$\Leftarrow)$
Observemos que si S es simple, entonces cualquier cociente de S es isomorfo a S o isomorfo a 0, ya que todo morfismo que parte de un simple es monomorfismo o el morfismo 0, de manera que $R-Simp \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
Además tenemos que $(R-Simp^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} = \{N \in R-Mod|$ para cada $f : N \to K$ epimorfismo distinto de cero, $\exists U \in R-Simp$ distinto de cero y $g : K \to U$ epimorfismo $\} \in R-conat$ que, por la Observación 5.3.3, es la clase de todos los módulos coatómicos.
Sea $M \in R-mod$, entonces existe I conjunto y un epimorfismo $\pi : \bigoplus\limits_{i\in I} N_i \to M$

con $N_i = R$ para toda $i \in I$, además, sabemos que R es coatómico como módulo, por lo que $R \in (R - Simp^{\perp \twoheadrightarrow})^{\perp \twoheadrightarrow}$ que es una clase conatural y, por hipótesis, $\bigoplus_{i \in I} N_i \in (R - Simp^{\perp \twoheadrightarrow})^{\perp \twoheadrightarrow} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ $\therefore$ $M \in (R - Simp^{\perp \twoheadrightarrow})^{\perp \twoheadrightarrow}$ $\therefore$ M es coatómico $\therefore$ R es MAX.

$\square$

5.4. Clases conaturales asociadas a un anillo perfecto izquierdo.

En general, las clases conaturales no están determinadas por propiedades de clausura, sin embargo, en esta sección demostraremos que cuando el anillo es perfecto, las clases conaturales si están determinadas por propiedades de clausura.

Definición 5.4.1. Un anillo R es perfecto izquierdo si todo R-módulo tiene cubierta proyectiva.

Teorema 5.4.2. *Si R es perfecto izquierdo, entonces R es MAX.*

Demostración. Sea M un R-módulo izquierdo distinto de cero y $P(M)$ su cubierta proyectiva. Entonces existe $g : P(M) \to M$ epimorfismo con $Ker(g)$ superfluo en $P(M)$, por lo que $M \cong \dfrac{P(M)}{Ker(g)}$. Como $P(M)$ es proyectivo tiene un submódulo máximo L, además, $Ker(g)$ es superfluo en $P(M)$, por lo que $Ker(g) \leq L$.
$\therefore$ $\dfrac{L}{Ker(g)}$ es un submódulo máximo en $\dfrac{P(M)}{Ker(g)} \cong M$.

$\square$

Proposición 5.4.3. *Si R es perfecto izquierdo, entonces $L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, P\}} = L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext, P\}}$.*

Demostración. Es claro que toda clase cerrada bajo cocientes, sumas directas, extensiones y cubiertas proyectivas , es en particular cerrada bajo cocientes, sumas directas y cubiertas proyectivas, por lo que $L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, ext, P\}} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, P\}}$.

Ahora, sea $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow, \bigoplus, P\}}$. Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $N, L \in \zeta$. Como R es perfecto izquierdo, existe $P(L)$ cubierta proyectiva de L y $\pi : P(L) \to L$ epimorfismo superfluo. Sea P el producto fibrado de g y π, este nos induce el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f'"] \arrow[u, equal, "Id_N"] & P \arrow[r, "h"] \arrow[u, "j"] & P(L) \arrow[r] \arrow[u, two heads, "\pi"] & 0
\end{tikzcd} .$$

Tenemos que Id_N y π son epimorfismos, entonces j también lo es. Por otro lado, tenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} P \xrightarrow{h} P(L) \longrightarrow 0$ con $P(L)$ proyectivo, por lo que la sucesión se escinde, entonces $P \cong N \bigoplus P(L)$.

Además, sabemos que ζ es cerrada bajo cubiertas proyectivas y sumas directas, por lo que $N \bigoplus P(L) \in \zeta$, entonces como ζ es cerrada bajo cocientes $P \in \zeta$ y $j : P \to M$ es epimorfismo $\therefore M \in \zeta$.
Entonces $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext,P\}} \therefore L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,P\}} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext,P\}}$.
$\therefore L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,P\}} = L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext,P\}}$.

$\square$

Teorema 5.4.4. *Si R es un anillo perfecto izquierdo, entonces son equivalentes:*
1) $\zeta \in R-conat$.
2) ζ es cerrada bajo cocientes, sumas directas y cubiertas proyectivas ($\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext,P\}}$).

Demostración. 1)$\Rightarrow$2)
Por el Teorema 5.4.2, tenemos que R es MAX, por lo tanto ζ es cerrada bajo sumas directas, por el Teorema 5.3.7, además, puesto que una clase conatural es cerrada bajo cocientes. Por otro lado, ζ es cerrada bajo epimorfismos superfluos, por lo que ζ es cerrada bajo cubiertas proyectivas.
2)$\Rightarrow$1)
Si $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,P\}}$, entonces $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext,P\}} \subseteq L_{\{\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$, por la Proposición 5.4.3, por lo que existe $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ teoría de torsión tal que $\mathbb{T} = \zeta$, por el Teorema 3.1.12.
Para demostrar que ζ es una clase conatural bastaría demostrar que $\zeta = \xi_{R-conat}(\zeta) = (\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$, y ya sabemos que $\zeta \subseteq (\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.
Sea $M \in (\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$. Si $r_{\mathbb{T}}(M) \neq M$, entonces $\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} \neq 0$, por lo que existe $f : \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} \to N$ epimorfismo con $0 \neq N \in \mathbb{T}$. N tiene cubierta proyectiva ya que R es perfecto, consideremos $\pi : P(N) \to N$ el epimorfismo de la cubierta proyectiva de N en N, como $P(N)$ es proyectivo, existe $g : P(N) \to \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & P(N) \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ M \arrow[r, "\pi'"] & \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Ya que $\zeta = \mathbb{T}$ es cerrada bajo cubiertas proyectivas tenemos que $P(N) \in \mathbb{T}$ y $\dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)} \in \mathbb{L}$, entonces $Hom(P(N), \dfrac{M}{r_{\mathbb{T}}(M)}) = 0$, por lo que $g = 0$. Entonces $\pi = f \circ g = 0$, lo que es contradictorio a que $N \neq 0$. Entonces $r_{\mathbb{T}}(M) = M$, por lo que $M \in \mathbb{T} = \zeta$, entonces $(\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \subseteq \zeta$.
Entonces $\zeta = (\zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}})^{\perp_{\twoheadrightarrow}} \therefore \zeta$ es una clase conatural.

$\square$

Capítulo 6

Seudocomplementos en R-tors.

En este capítulo calcularemos seudocomplemestos en las retículas de teorías de torsión hereditarias, para ello tomaremos en cuenta que esta es isomorfa a $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$.

6.1. Seudocomplementos en $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ y retículas asociadas.

Proposición 6.1.1. *Sea $\zeta \subseteq R - mod$, entonces* $\{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : N \to M$ *epimorfismo y* $g : K \to M$ *monomorfismo* $\Rightarrow K = 0\}$=$\{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : M \to N$ *monomorfismo y* $g : M \to K$ *epimorfismo* $\Rightarrow K = 0\}$.

Demostración. Sea $A = \{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : N \to M$ epimorfismo y $g : K \to M$ monomorfismo $\Rightarrow K = 0\}$ y $B = \{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : M \to N$ monomorfismo y $g : M \to K$ epimorfismo $\Rightarrow K = 0\}$.

Sea $M \in A$. Sean $K \in \zeta$, $f : N \to M$ monomorfismo y $g : N \to K$ epimorfismo. Tomando el coproducto fibrado P, tenemos que existen $h : M \to P$ y $j : K \to P$ morfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "h"] & P \\ N \arrow[u, tail, "f"] \arrow[r, two heads, "g"] & K \arrow[u, tail, "j"'] \end{tikzcd} .$$

Entonces $h : M \to P$ es epimorfismo y $j : K \to P$ monomorfismo, además, $K \in \zeta$, por lo que $K = 0$, entonces $M \in B \therefore A \subseteq B$.

Sea $M \in B$. Sean $K \in \zeta$, $f : M \to N$ epimorfismo y $g : K \to N$ monomorfismo. Tomando el producto fibrado P, tenemos que existen $h : P \to M$ y $j : P \to K$ morfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "i"] & M \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, tail, "g"] & N \end{tikzcd} .$$

Entonces $h : P \to M$ monomorfismo y $j : P \to K$ epimorfismo, además, $K \in \zeta$, por lo que $K = 0$, entonces $M \in A \therefore B \subseteq A$.
$\therefore A = B$.

□

Proposición 6.1.2. *Sea $\zeta \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$, entonces*
$\zeta^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}} = \zeta^{S-^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}} = \{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : N \to M$ *epimorfismo y* $g : K \to M$ *monomorfismo* $\Rightarrow K = 0\}$.

Demostración. Sea $A = \{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : N \to M$ epimorfismo y $g : K \to M$ monomorfismo $\Rightarrow K = 0\}$.
Sean $M \in A$ y $f : M \to N$ epimorfismo. Si $g : N \to L$ es un epimorfismos y $h : K \to L$ es un monomorfismo con $K \in \zeta$, entonces $gf : M \to L$ es un epimorfismo y $h : K \to L$ es monomorfismo, por lo que $K = 0$.
Entonces $N \in A \therefore A$ es cerrada bajo cocientes.
Sean $M \in A$ y $f : N \to M$ monomorfismo. Si $g : L \to N$ es un monomorfismo y $h : L \to K$ es un epimorfismo con $K \in \zeta$, entonces $fg : L \to M$ es un monomorfismo y $h : L \to K$ es epimorfismo, por lo que $K = 0$, por la Proposición 6.1.1.
Entonces, por la Proposición 6.1.1, $N \in A \therefore A$ es cerrada bajo submódulos.
$\therefore A \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$.
Sea $N \in A$, tenemos que $Id_N : N \to N$ es epimorfismo y monomorfismo, entonces $N = 0$
$\therefore \zeta \wedge A = \{0\}$.
Ahora sea $D \in L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta \wedge D = \{0\}$. Sea $M \in D$, $f : M \to N$ epimorfismo y $h : K \to N$ monomorfismo con $K \in \zeta$, entonces $N \in D$ ya que D es cerrada bajo cocientes, por lo que $K \in D$ ya que D es cerrada bajo submódulos. Entonces $K \in \zeta \wedge D = \{0\}$, por lo que $N = 0$.
$\therefore D \subseteq A$.
$\therefore \zeta^{S-^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}} = \{N \in R - Mod|\ K \in \zeta,\ f : N \to M$ epimorfismo y $g : K \to M$ monomorfismo $\Rightarrow K = 0\}$ y, por la Observación 4.0.2, $\zeta^{S-^{\perp_{\twoheadrightarrow}}} = \zeta^{\perp_{\twoheadrightarrow}}$.

□

Corolario 6.1.3. *$L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}}$ es una gran retícula fuertemente seudocomplementada.*

Proposición 6.1.4. *Si $\zeta \in Skel(L_{\{\leq, \twoheadrightarrow\}})$, entonces ζ es cerrada bajo :*
1) Imágenes de morfismos.
2) Submódulos.
3) Extensiones.
4) Sumas directas.

Demostración. 1),2) Es claro, ya que $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, por lo que si $\zeta \in Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})$, entonces $\zeta \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, es decir, cerrada bajo imágenes de morfismos (cocientes) y submódulos.

3) Como $\zeta \in Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})$ existe $\kappa \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\zeta = \kappa^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$.
Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ sucesión exacta con $N, L \in \zeta$, y sea $h : M \to M'$ un epimorfismo y $l : K \to M$ es un monomorfismo con $K \in \zeta$.
Tomemos $\pi : M' \to \dfrac{M'}{Im(hf)} = Coker(hf)$ el epimorfismo natural al conúcleo de hf, entonces $\pi hf = 0$ y, por la propiedad del conúcleo, existe $j : L \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[ddl, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "l"] & M' \arrow[d, "\pi"] & & \\
& & \dfrac{M'}{Im(hf)} & &
\end{tikzcd}.$$

Entonces $j \circ g = \pi \circ h$ y $\pi \circ h$ es epimorfismo, pues es una composición de epimorfismos, entonces $j \circ g$ es epimorfismo, por lo que j es epimorfismo.
Además, tenemos que $\pi(l(K)) \cong \dfrac{K}{Ker(\pi l)}$ y $K \in \kappa$, entonces $\pi(l(K)) \in \kappa$, pues κ es una clase cerrada bajo cocientes. Entonces tenemos $j : L \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ epimorfismo y $i : \pi(l(K)) \to \dfrac{M'}{Im(hf)}$ el monomorfismo inclusión con $\pi(l(K)) \in \kappa$ y $L \in \zeta$, por lo que $\pi(l(K)) = 0 \therefore l(K) \subseteq Ker(\pi) = Im(hf)$.
Por lo que podemos considerar el epimorfismo $h' : N \to Im(hf)$ dado por $h'(x) = hf(x)$ para toda $x \in N$ y el monomorfismo $f' : K \to Im(hf)$ dado por $f'(x) = l(x)$. Así, tenemos que $K \in \kappa$, $h' : N \to Im(hf)$ es un epimorfismo, $f' : K \to Im(hf)$ es un monomorfismo y $N \in \zeta = \kappa^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, entonces $K = 0 \therefore M \in \kappa^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}} = \zeta$.
$\therefore \zeta$ es cerrada bajo extensiones.

4)Por último, sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \zeta = \kappa^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, con $\kappa \in L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$. Sea $f : L \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ monomorfismo y $g : L \to K$ epimorfismo con $K \in \kappa$.
Si $K \neq 0$, sea $k \in K$ distinto de cero con $k = g(x) = g(n_{\alpha_1}) + g(n_{\alpha_2}) + ... + g(n_{\alpha_s})$ la expresión con $x \in L$ con el menor número posible de sumandos, donde $n_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$.
Como $k \neq 0$, entonces $0 \lneq s$ y, como esta es la expresión con el menor número posible de sumandos, tenemos que los anuladores de los sumandos coinciden, es decir, $(0 : g(n_{\alpha_1})) = (0 : g(n_{\alpha_2})) = ... = (0 : g(n_{\alpha_s}))$. Entonces $(0 : g(n_{\alpha_i})) = (0 : k) \forall i, 1 \leq i \leq s$.
Entonces $Rk \cong \dfrac{R}{(0:k)} = \dfrac{R}{(0 : g(n_{\alpha_1}))} \cong Rg(n_{\alpha_1})$ y la inclusión $i : Rn_{\alpha_1} \to M_{\alpha_1}$ es

monomorfismo y $g_{|Rn_{\alpha_1}} : Rn_{\alpha_1} \to Rg(n_{\alpha_1})$ es epimorfismo con $M_{\alpha_1} \in \kappa^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow}}$, por lo que $0 = Rg(n_{\alpha_1}) \cong Rk$, lo cual es claramente una contradicción.
$\therefore K = 0 \therefore \bigoplus_{i\in I} M_i \in \zeta \therefore \zeta$ es cerrada bajo sumas directas.

$\square$

Observación 6.1.5. *Por la Proposición 6.1.4, tenemos que si $\zeta \in Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})$, entonces ζ es cerrado bajo extensiones, sumas directas, submódulos y cocientes, entonces:*
1) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.
2) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$.
3) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus\}}$.
4) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$.

Teorema 6.1.6. *$L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus\}}$ y $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ tienen el mismo esqueleto ($Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})$).*

Demostración. Tenemos que :
1) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}} \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.
2) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}} \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.
3) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus\}} \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.
4) $Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}) \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}} \subseteq L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$.
Además, por el Corolario 6.1.3, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$ es S-seudocomplementada y $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}}$, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}}$, $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus\}}$ y $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ son retículas acotadas con elemento menor $\{0\}$ y mayor R-mod.
$\therefore Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow\}})$=$Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,ext\}})$=$Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus\}})$=$Skel(L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}})$, por el Corolario 4.0.7. $\square$

Observación 6.1.7. *Por el Teorema 3.3.18, existe un isomorfismo de retículas $f : R-tors \to L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ y, por el Teorema 6.1.6, tenemos que $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ es fuertemente seudocomplementada, por lo que $R-tors$ es fuertemente seudocomplementada. Además, si $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in R-tors$, entonces*
$f((\mathbb{T},\mathbb{L})\wedge f^{-1}(\mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}})) = f((\mathbb{T},\mathbb{L}))\wedge f(f^{-1}(\mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}})) = \mathbb{T}\cap\mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}} = \{0\}$, por lo que $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \wedge f^{-1}(\mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}}) = (0, R-mod)$.
Por oto lado, si $(\mathbb{T},\mathbb{L})\wedge(\mathbb{T}',\mathbb{L}') = (0, R-mod)$, entonces $f((\mathbb{T},\mathbb{L})\wedge(\mathbb{T}',\mathbb{L}')) = \mathbb{T}\cap\mathbb{T}' = \{0\}$, por lo que $\mathbb{T}' \leq \mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}}$. Entonces $(\mathbb{T}',\mathbb{L}') = f^{-1}(\mathbb{T}') \leq f^{-1}(\mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}})$, por lo que $(\mathbb{T},\mathbb{L})^{\perp_{R-tors}} = f^{-1}(\mathbb{T}^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}})$.

6.2. Anillos semiartinianos caracterizados mediante R-tors.

Habiendo ya descrito el esqueleto de las Teorías de torsión hereditarias, daremos una caracterización de los anillos semiartinianos mediante la estructura de retícula de R-tors.

Observación 6.2.1. *Tenemos que cualquier submódulo o cociente de un simple es un simple o el módulo cero, por lo que $\xi_{\leq}(R-simp) = \xi_{\twoheadrightarrow}(R-simp)$ y como consecuencia $\xi_{\leq}(R-simp) = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(R-simp)$, que son la clase de todos los módulos simples.*

Teorema 6.2.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) R es semiartiniano.
2) $L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$ es de Boole.
3) $R-tors$ es de Boole.
4) $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ es de Boole.

Demostración. 1)⇒2)
Tenemos que R es un anillo semiartiniano, entonces, $R-nat = L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$, por el Teorema 4.3.7. Además, por el Teorema 4.2.8, $R-nat$ es una retícula de Boole $\therefore$ $L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$ es de Boole.

2)⇒3)
Sabemos que $R-tors$ es distributiva, bastaría demostrar que es complementada. Por el Teorema 3.3.20, sabemos que existe $f: R-tors \to L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$ anti-isomorfismo de retículas. Si $(\mathbb{T},\mathbb{L}) \in R-tors$, entonces existe $\mathbb{L}' \in L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$ tal que $\mathbb{L}\cap\mathbb{L}' = \{0\}$ y $\mathbb{L}\cup\mathbb{L}' = R-mod$, pues $L_{\{E,\leq,\prod,ext\}}$ es una retícula de Boole. Entonces $(\mathbb{T},\mathbb{L})\vee f^{-1}(\mathbb{L}') = f^{-1}(\{0\}) = (R-mod,\{0\})$ y $(\mathbb{T},\mathbb{L})\wedge f^{-1}(\mathbb{L}') = f^{-1}(R-mod) = (\{0\},R-mod)$, por lo que $f^{-1}(\mathbb{L}')$ es complemento de $(\mathbb{T},\mathbb{L})$.
Entonces $R-tors$ es complementada $\therefore$ $R-tors$ es de Boole.

3)⇒4)
Por el Teorema 3.3.18, tenemos que $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ y $R-tors$ son isomorfas como retículas y $R-tors$ es de Boole $\therefore$ $L_{\{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext\}}$ es de Boole.

4)⇒1)
Sea $\mathcal{S} = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(R-simp)$. Entonces para $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathbf{S})$, tenemos que
$\mathbb{T} = \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathbf{S})^{\perp_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}}$ es un complemento, es decir, $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathcal{S})\cap\mathbb{T} = \{0\}$ y $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathcal{S})\vee\mathbb{T} = R-mod$.
Si $\mathbb{T} \neq \{0\}$, entonces existe $M \in \mathbb{T}$ distinto de cero, por lo que existe $0 \neq x \in M$. Además, sabemos que $0 \neq Rx \cong \dfrac{R}{(0:x)}$ y R es un módulo coátomico, por lo que existe $\pi: Rx \to S$ epimorfismo con S simple. Tomando el coproducto fibrado P, tenemos que existen $h: M \to P$ y $j: S \to P$ morfismos que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "h"] & P \\
Rx \arrow[u, "i"] \arrow[r, two heads, "f"] & S \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}.$$

Entonces $h: M \to P$ es epimorfismo y $j: S \to P$ monomorfismo, además, $S \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow}(R-simp)$ y $M \in \mathbb{T}$, lo que es una contradicción.
Entonces $\mathbb{T}$ tiene ser $\{0\}$, por lo que $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathcal{S}) = R-mod$ $\therefore$ $R \in \xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathcal{S}) = R-mod$.
Por otro lado, por el Lema 3.3.16, tenemos que $\xi_{\leq,\twoheadrightarrow,\bigoplus,ext}(\mathcal{S}) = \{M \in R-mod |$ $\forall f: M \twoheadrightarrow N$ distinto de cero, $\exists g: K \rightarrowtail N$ con $0 \neq K \in \mathcal{S}\}$, entonces
$R \in \{M \in R-mod |\ \forall f: M \twoheadrightarrow N$ distinto de cero, $\exists g: K \rightarrowtail N$ con $0 \neq K \in \mathcal{S}\}$.

$\therefore R$ es semiartiniano. $\square$

Capítulo 7

Átomos.

Ya descritas la retícula de clases naturales y la retícula de clases conaturales, describiremos a sus átomos así como los átomos de la gran retícula de clases hereditarias y los de la gran retícula de clases cohereditarias.

7.1. Átomos en $L_{\{\leq\}}$ y R-nat.

Definición 7.1.1. Un módulo M es comprimible si para todo $f : N \to M$ monomorfismo distinto de cero existe $g : M \to N$ monomorfismo.

Observación 7.1.2. *Un módulo M es comprimible si y solo si para todo $0 \neq N \leq M$ existe $g : M \to N$ monomorfismo.*

Proposición 7.1.3. *Si $\zeta \in L_{\{\leq\}}$ es un átomo, entonces $\zeta = \xi_{\leq}(\{M\})\ \forall\ 0 \neq M \in \zeta$.*

Demostración. Sea $M \in \zeta$ distinto de cero. Entonces $\{M\} \subseteq \zeta$, por lo que
$\{0\} \neq \xi_{\leq}(\{M\}) \subseteq \xi_{\leq}(\zeta) = \zeta$ y ζ es un átomo, entonces $\zeta = \xi_{\leq}(\{M\})$.
$\therefore\ \zeta = \xi_{\leq}(\{M\})$ para todo $0 \neq M \in \zeta$.

□

Teorema 7.1.4. *Si $0 \neq M \in R - mod$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) $\xi_{\leq}(\{M\})$ es un átomo en $L_{\{\leq\}}$.
2) M es comprimible.
3) Para cada $0 \neq N \leq M$ se tiene que $\xi_{\leq}(\{M\}) = \xi_{\leq}(\{N\})$.

Demostración. 1)⇒ 2)
Si $0 \neq N \leq M$, entonces $\{0\} \neq \xi_{\leq}(\{N\}) \subseteq \xi_{\leq}(\{M\})$, por lo que $\xi_{\leq}(\{N\}) = \xi_{\leq}(\{M\})$.
Entonces $M \in \xi_{\leq}(\{N\})$, por lo que existe $g : M \to N$ monomorfismo.
$\therefore\ M$ es comprimible, por la Observación 7.1.2.

2)⇒ 3)
Si $0 \neq N \leq M$, entonces $N \in \xi_{\leq}(\{M\})$ y la inclusión es un monomorfismo, entonces $\xi_{\leq}(\{N\}) \subseteq \xi_{\leq}(\{M\})$.

Por otro lado, M es comprimible, por lo que existe $g : M \to N$ monomorfismo, entonces $M \in \xi_{\leq}(\{N\})$, por lo que $\xi_{\leq}(\{M\}) \subseteq \xi_{\leq}(\{N\})$
$\therefore \xi_{\leq}(\{M\}) = \xi_{\leq}(\{N\})$.

3)$\Rightarrow$ 1)
Sea $\zeta \in L_{\{\leq\}}$ tal que $\{0\} \neq \zeta \subseteq \xi_{\leq}(\{M\})$. Entonces existe $0 \neq N \in \zeta$, entonces $N \in \xi_{\leq}(\{M\})$, por lo que $N \cong N'$ para algún submódulo $0 \neq N'$ de M. Entonces $\xi_{\leq}(\{N'\}) = \xi_{\leq}(\{N\})$ y, por hipótesis, $\xi_{\leq}(\{M\}) = \xi_{\leq}(\{N'\})$, por lo que
$\xi_{\leq}(\{M\}) = \xi_{\leq}(\{N\}) \subseteq \zeta \subseteq \xi_{\leq}(\{M\})$, entonces $\zeta = \xi_{\leq}(\{M\})$.
$\therefore \xi_{\leq}(\{M\})$ es un átomo en $L_{\{\leq\}}$.

□

Proposición 7.1.5. *Si $\zeta \in R-nat$ es un átomo, entonces $\zeta = \xi_{R-nat}(\{M\})$ $\forall$ $0 \neq M \in \zeta$.*

La prueba de esto es totalmente análoga a la de la Proposición 7.1.3.

Teorema 7.1.6. *Sea $0 \neq M \in R-mod$. Entonces $\xi_{R-nat}(\{M\})$ es un átomo en $R-nat$ si y solo si $\xi_{R-nat}(\{M\}) = \xi_{R-nat}(\{N\})$ para todo submódulo propio no cero N de M.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Si $0 \neq N \leq M$, entonces $\{0\} \neq \xi_{R-nat}(\{N\}) \subseteq \xi_{R-nat}(\{M\})$, por lo que $\xi_{R-nat}(\{N\}) = \xi_{R-nat}(\{M\})$.
$\Leftarrow$)
Sea $\zeta \in L_{\{R-nat\}}$ tal que $\{0\} \neq \zeta \subseteq \xi_{R-nat}(\{M\})$. Entonces existe $0 \neq N \in \zeta$, entonces $N \in \xi_{R-nat}(\{M\})$ y $Id_N : N \to N$ es un monomorfismo, por lo que existe $f : K \to N$ monomorfismo distinto de cero con $K \in \xi_{\leq}(\{M\})$, entonces $K \cong N'$ para algún submódulo $0 \neq N'$ de M. Entonces $\xi_{R-nat}(\{N'\}) = \xi_{R-nat}(\{K\})$ y, por hipótesis, $\xi_{R-nat}(\{M\}) = \xi_{R-nat}(\{N'\})$, por lo que
$\xi_{R-nat}(\{M\}) = \xi_{R-nat}(\{N'\}) = \xi_{R-nat}(\{K\}) \subseteq \xi_{R-nat}(\{N\}) \subseteq \zeta \subseteq \xi_{R-nat}(\{M\})$.
Entonces $\zeta = \xi_{R-nat}(\{M\})$ $\therefore$ $\xi_{R-nat}(\{M\})$ es un átomo en $R-nat$.

□

Definición 7.1.7. Un módulo M es uniforme si cualquiera de sus submódulos no nulos es esencial en M.

Proposición 7.1.8. *Si M es uniforme, entonces $\xi_{R-nat}(M)$ es un átomo de $R-nat$.*

Demostración. Sea $0 \neq N \lneq M$, es claro que $\xi_{R-nat}(N) \subseteq \xi_{R-nat}(M)$. Ya que M es uniforme N es esencial en M, por lo que la inclusión canónica $i : N \to M$ es un monomorfismo esencial, entonces, por el Teorema 4.1.6, $\xi_{R-nat}(N)$ es cerrada bajo extensiones esenciales, por lo que $M \in \xi_{R-nat}(N)$.
Entonces $\xi_{R-nat}(M) \subseteq \xi_{R-nat}(N)$, por lo que $\xi_{R-nat}(M) = \xi_{R-nat}(N)$.
$\therefore$ $\xi_{R-nat}(M)$ es átomo, por el Teorema 7.1.6.

□

Corolario 7.1.9. *Si S es simple, entonces $\xi_{R-nat}(S)$ es un átomo de $R-nat$.*

Observación 7.1.10. *En $R=\mathbb{Z}$ tenemos que $\mathbb{Z}_p$ es simple si p es primo, entonces, por el Corolario 7.1.9, tenemos que $\xi_{R-nat}(\mathbb{Z}_p)$ es un átomo de $R-nat$. Además, es claro que $\mathbb{Z}$ es uniforme, entonces, por la Proposición 7.1.8, tenemos que $\xi_{R-nat}(\mathbb{Z})$ es un átomo de $R-nat$.*

Ejemplo 7.1.11. Si $R=\mathbb{Z}$, entonces $M\in\mathbb{Z}-mod$ es un grupo abeliano y si tiene un elemento de orden finito, entonces tiene un elemento no cero de orden p con p primo, por lo que existe $f:\mathbb{Z}_p\to M$ monomorfismo. Por otro lado, si $M\neq 0$ es libre de torsión, entonces existe $0\neq x\in M$ tal que $\mathbb{Z}x\cong\mathbb{Z}$, por lo que existe $g:\mathbb{Z}\to M$ monomorfismo.
Si $\zeta\neq\{0\}$ es una clase natural que tiene como elementos módulos que no son libres de torsión y $0\neq M\in\zeta$, entonces M tiene un elemento distinto de cero de orden finito, por lo que existe p primo tal que $0\leq\{M|\ M$ es un p grupo $\}=\xi_{R-nat}(\mathbb{Z}_p)\leq\zeta$.
Por otro lado, si $\zeta\neq\{0\}$ tiene como elementos puros grupos abelianos libres de torsión y $0\neq M\in\zeta$, entonces $\mathbb{Z}\in\xi_{R-nat}(M)$, por lo que $0\leq\xi_{R-nat}(\mathbb{Z})\leq\xi_{R-nat}(M)\leq\zeta$.
Así que $\mathbb{Z}-nat$ es atómica donde $\{\xi_{R-nat}(\mathbb{Z}_p)|\ p$ es primo $\}\cup\{\xi_{R-nat}(\mathbb{Z})\}$ es el conjunto de átomos en $\mathbb{Z}-nat$. Además, como $\mathbb{Z}-nat$ es una retícula de Boole, es también coátomica.

Ejemplo 7.1.12. Si R es un anillo semiartiniano, entonces toda clase natural no trivial está generada por módulos simples, por lo que $R-nat$ es una retícula atómica y, si Q es un conjunto completo irredundante de módulos simples, entonces
$\{\xi_{R-nat}(S)|\ S\in Q\ \}$ es el conjunto de átomos en $R-nat$.

7.2. Átomos en $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ y R-conat.

Definición 7.2.1. Un módulo M es cocomprimible si para todo $f:M\to N$ epimorfismo distinto de cero existe $g:N\to M$ epimorfismo.

Observación 7.2.2. *Un módulo M es cocomprimible si y sólo si para todo $N\lneq M$ existe $g:\dfrac{M}{N}\to M$ epimorfismo.*

Proposición 7.2.3. *Si $\zeta\in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es un átomo, entonces $\zeta=\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})\ \forall\ 0\neq M\in\zeta$.*

Demostración. Sea $M\in\zeta$ distinto de cero. Entonces $\{M\}\subseteq\zeta$, por lo que $\{0\}\neq\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})\subseteq\xi_{\twoheadrightarrow}(\zeta)=\zeta$ y ζ es un átomo, entonces $\zeta=\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$.
$\therefore\ \zeta=\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$ para todo $0\neq M\in\zeta$.

□

Teorema 7.2.4. *Si $0\neq M\in R-mod$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
1) $\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$ es un átomo en $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.
2) M es cocomprimible.
3) Para cada $N\lneq M$ se tiene que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})=\xi_{\twoheadrightarrow}(\{\dfrac{M}{N}\})$.

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2)
Si $N \lneq M$, entonces $\{0\} \neq \xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\}) \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$, por lo que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$.
Entonces $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\})$, por lo que existe $g : \frac{M}{N} \to M$ epimorfismo.
$\therefore$ M es cocomprimible, por la Observación 7.2.2.

2)$\Rightarrow$ 3)
Si $N \lneq M$, entonces $\frac{M}{N} \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$ y la proyección canónica es un epimorfismo, entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\}) \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$.
Por otro lado, M es cocomprimible, por lo que existe $g : \frac{M}{N} \to M$ epimorfismo, entonces $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\})$, por lo que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\}) \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\})$
$\therefore \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N}\})$.

3)$\Rightarrow$ 1)
Sea $\zeta \in L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ tal que $\{0\} \neq \zeta \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$. Entonces existe $0 \neq N \in \zeta$, entonces $N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$, por lo que $N \cong \frac{M}{N'}$ para algún submódulo propio N' de M. Entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\frac{M}{N'}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\{N\})$ y, por hipótesis, $\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\{\frac{M}{N'}\})$, por lo que
$\xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\{N\}) \subseteq \zeta \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$, entonces $\zeta = \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$.
$\therefore \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$ es un átomo en $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$.

□

Proposición 7.2.5. *Si $\zeta \in R - conat$ es un átomo, entonces $\zeta = \xi_{R-conat}(\{M\})$ $\forall\ 0 \neq M \in \zeta$.*

La prueba de esto es análoga a la de la Proposición 7.2.3.

Teorema 7.2.6. *Sea $0 \neq M \in R - mod$. Entonces $\xi_{R-conat}(\{M\})$ es un átomo en $R - conat$ si y solo si $\xi_{R-conat}(\{M\}) = \xi_{R-conat}(\{\frac{M}{N}\})$ para todo submódulo propio N de M.*

Demostración. $\Rightarrow$)
Si $N \lneq M$, entonces $\{0\} \neq \xi_{R-conat}(\{\frac{M}{N}\}) \subseteq \xi_{R-conat}(\{M\})$, por lo que $\xi_{R-conat}(\{\frac{M}{N}\}) = \xi_{R-conat}(\{M\})$.
$\Leftarrow$)
Sea $\zeta \in R - conat$ tal que $\{0\} \neq \zeta \subseteq \xi_{R-conat}(\{M\})$. Entonces existe $0 \neq N \in \zeta$, así que $N \in \xi_{R-conat}(\{M\})$ y como $Id_N : N \to N$ es un epimorfismo, entonces existe $f : N \to K$ epimorfismo distinto de cero con $K \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\{M\})$, entonces $K \cong \frac{M}{N'}$ para

algún submódulo propio N' de M. Entonces $\xi_{R-conat}(\{\frac{M}{N'}\}) = \xi_{R-conat}(\{K\})$ y, por hipótesis, $\xi_{R-conat}(\{M\}) = \xi_{R-conat}(\{\frac{M}{N'}\})$, por lo que
$\xi_{R-conat}(\{M\}) = \xi_{R-conat}(\{\frac{M}{N'}\}) = \xi_{R-conat}(\{K\}) \subseteq \xi_{R-conat}(\{N\}) \subseteq \zeta \subseteq \xi_{R-conat}(\{M\})$.
Entonces $\zeta = \xi_{R-conat}(\{M\}) \therefore \xi_{R-conat}(\{M\})$ es un átomo en $R-conat$.

$\square$

Definición 7.2.7. Un módulo M es hueco si cualquiera de sus submódulos propios es superfluo en M.

Proposición 7.2.8. *Si M es hueco, entonces $\xi_{R-conat}(M)$ es un átomo de $R-conat$.*

Demostración. Sea $N \lneq M$, es claro que $\xi_{R-conat}(\frac{M}{N}) \subseteq \xi_{R-conat}(M)$. Como M es hueco, entonces N es superfluo en M, por lo que la proyección canónica $\pi : M \to \frac{M}{N}$ es un epimorfismo superfluo. Por el Teorema 5.1.7, $\xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$ es cerrada bajo epimorfismos superfluos, por lo que $M \in \xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$.
Entonces $\xi_{R-conat}(M) \subseteq \xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$, por lo que $\xi_{R-conat}(M) = \xi_{R-conat}(\frac{M}{N})$.
$\therefore \xi_{R-conat}(M)$ es átomo, por el Teorema 7.2.6.

$\square$

Corolario 7.2.9. *Si S es simple, entonces $\xi_{R-conat}(S)$ es un átomo de $R-conat$.*

Observación 7.2.10. *En $R = \mathbb{Z}$ tenemos que $\mathbb{Z}_p$ es simple si p es primo, entonces, por el Corolario 7.2.9, tenemos que $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p)$ es un átomo de $R-conat$. Además, es claro que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es hueco para todo p primo ya que sus submódulos están encadenados, entonces, por la Proposición 7.2.8, tenemos que $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ es un átomo de $R-conat$.*

Ejemplo 7.2.11. Si $R = \mathbb{Z}$, entonces $M \in \mathbb{Z}-mod$ es un grupo abeliano y si tiene algún submódulo máximo, entonces M tiene un cociente simple isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ para algún p primo, por lo que existe $\pi : M \to \mathbb{Z}_p$ epimorfismo. Por otro lado, si M no tiene máximos, entonces M es divisible, por lo que $M \cong \bigoplus_{p\in P}(\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)}) \bigoplus \mathbb{Q}^{(Y)}$ donde P es el conjunto de los números primos, Y y X_p son conjuntos para todo $p \in P$, entonces existe $p \in P$ tal que M tiene como cociente a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.
Si $\zeta \neq \{0\}$ es una clase conatural que tiene como elementos módulos que tienen máximos, entonces existe p primo tal que $0 \leq \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) \leq \zeta$.
Por otro lado, si todos los elementos de $\zeta \neq \{0\}$ son módulos que no tienen máximos, entonces todos sus elementos son módulos divisibles, por lo que existe p primo tal que $0 \leq \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \leq \zeta$.
Así que $\mathbb{Z}-conat$ es atómica donde $\{\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) |\ p$ es primo $\} \cup \{\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) |\ p$ es primo $\}$ es el conjunto de átomos en $\mathbb{Z}-conat$. Además, como $\mathbb{Z}-conat$ es una retícula de Boole, es también coátomica.

Observación 7.2.12. *Sean $p \in \mathbb{Z}$ un número primo.*
Es claro que $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{r}{q} \in \mathbb{Q} |$ p no divide a q $\}$ es un dominio de ideales principales, donde los ideales son generados por algún $a \in \mathbb{Z}$.
Sea I es ideal $\mathbb{Z}_{(p)}$ y $a \in I$. Si p no divide a a, entonces a tiene inverso en $\mathbb{Z}_{(p)}$, por lo que $1 \in I$, lo que implica que $I = \mathbb{Z}_{(p)}$.
Por otro lado si p divide a a, entonces $I \subseteq \langle p \rangle$ y, como ningún múltiplo de p tiene inverso $\langle p \rangle \neq \mathbb{Z}_{(p)}$ y p es primo, por lo que $\langle p \rangle$ es el único ideal máximo en $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Ejemplo 7.2.13. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo.
Si consideramos el anillo $R = \mathbb{Z}_{(p)}$, entonces R tiene un único ideal máximo $I_M = \langle p \rangle$, por la Observación 7.2.12, por lo que el único módulo simple salvo isomorfismo es $\frac{R}{I_M}$ que es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

Ahora es claro que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es hueco en $R-mod$, ya que es hueco como $\mathbb{Z}$-módulo, y $\mathbb{Z}_p$ es simple, entonces $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p)$ y $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ son átomos para $R-conat$.

Además, podemos verificar que $R-conat$ tiene unicamente 4 elementos. Sea $M \in R-mod$ y $f: M \to N$ epimorfismo no cero. Si N tiene un submódulo máximo, entonces N tiene un cociente simple isomorfo a $\mathbb{Z}_p$, por lo que existe $g: N \to \mathbb{Z}_p$ epimorfismo con $\mathbb{Z}_p \in \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) \cup \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$.
Si N no tiene submódulos máximos, entonces N es divisible y para cualquier q primo distinto de p, N no tiene elementos de orden q, por lo que $N \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)} \bigoplus \mathbb{Q}^{(Y)}$ donde Y y X_p son conjuntos. Entonces existe $g: N \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ epimorfismo con $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) \cup \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$. Entonces $M \in \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) \vee \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$, por lo que $R-mod = \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) \vee \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$.
$\therefore R-conat = \{\{0\}, \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p), \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}), R-mod\}$.
Notemos que $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ es la clase de los grupos divisibles que son R-módulos y $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p)$ es la clase de los R-módulos coatómicos.

Ejemplo 7.2.14. Sea R es un anillo MAX.
Sabemos que toda clase conatural en R esta generada por módulos simples, por lo que $R-conat$ es una retícula atómica y, si Q es un conjunto completo irredundante de módulos simples, entonces $\{\xi_{R-conat}(S) | \ S \in Q\}$ es el conjunto de átomos en $R-conat$.

Observación 7.2.15. *Sea $Q \subseteq \mathbb{Z}$ un conjunto de números primos.*
Es claro que $\mathbb{Z}_{(Q)} = \{\frac{r}{q} \in \mathbb{Q} | \ \forall p \in Q$, p no divide a q $\}$ es un dominio de ideales principales, donde los ideales son generados por algún $a \in \mathbb{Z}$.
Sea I es ideal $\mathbb{Z}_{(Q)}$ y $a \in I$. Si para todo $p \in Q$, p no divide a a, entonces a tiene inverso en $\mathbb{Z}_{(Q)}$, por lo que $1 \in I$, lo que implica que $I = \mathbb{Z}_{(Q)}$.
Por otro lado si algún $p \in Q$ divide a a, entonces $I \subseteq \langle p \rangle$ y, como ningún múltiplo de p tiene inverso $\langle p \rangle \neq \mathbb{Z}_{(Q)}$ y p es primo, por lo que $\langle p \rangle$ es máximo en $\mathbb{Z}_{(Q)}$. Así que $\{I_p = \langle p \rangle | p \in Q\}$ es el conjunto de todos los ideales máximos de $\mathbb{Z}_{(Q)}$.

Ejemplo 7.2.16. Sea $Q \subseteq \mathbb{Z}$ un conjunto de números primos.
Si consideramos el anillo $R = \mathbb{Z}_{(Q)}$, entonces, por la Observación 7.2.15,

$\{I_p = \langle p\rangle | p \in Q\}$ es el conjunto de todos los ideales máximos de R, por lo que todo módulo simple es isomorfo a $\dfrac{R}{I_p}$ para algún $p \in Q$, que a su vez es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Entonces $\{\mathbb{Z}_p | p \in Q\}$ es un conjunto irredundante completo de módulos simples en R.

Ahora si $p \in Q$ es claro que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es hueco en $R-mod$, ya que es hueco como $\mathbb{Z}$-módulo, y $\mathbb{Z}_p$ es simple, entonces $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p)$ y $\xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ son átomos para $R-conat$.

Además, podemos verificar que $R-conat$ es atómica. Si $\zeta \neq \{0\}$ es una clase conatural que tiene como elementos módulos que tienen máximos y $M \in \zeta$, entonces existe $p \in Q$ tal que $\mathbb{Z}_p$ es cociente de M, por lo que $0 \leq \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_p) \leq \zeta$.
Por otro lado, si todos los elementos de $\zeta \neq \{0\}$ son módulos que no tienen máximos y $0 \neq M \in \zeta$, entonces M es divisibles. Además, si q no pertenece a Q, entonces M no tiene elementos de orden q, $M \cong (\bigoplus_{p\in Q}(\mathbb{Z}_{p^\infty}^{(X_p)})) \bigoplus \mathbb{Q}^{(Y)}$ donde Y y X_p son conjuntos para todo $p \in Q$, por lo que existe $p \in Q$ tal que $0 \leq \xi_{R-conat}(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \leq \zeta$.
Así que $R-conat$ es atómica, donde $A = \{\xi_{R-conat}(M) |\ M \in \mho\ \}$ es el conjunto de átomos en $R-conat$, con $\mho = \{\mathbb{Z}_p |\ p \in Q\ \} \cup \{\ \mathbb{Z}_{p^\infty} |\ p \in Q\ \}$. Además, es claro si $\zeta \in R-conat$, entonces $\zeta = \xi_{R-conat}(B)$ con $B \subseteq \mho$. Por lo que si Q es finito, entonces $\mho = \{\mathbb{Z}_p |\ p \in Q\ \} \cup \{\ \mathbb{Z}_{p^\infty} |\ p \in Q\ \}$ es finito y $R-conat$ es finita de cardinalidad $2^{|\mho|} = 2^{2|\mho|}$.

Bibliografía

[1] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, Inc., New York, 1979.

[2] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] F. Kasch, *Modules and rings*, Academic Press, 1982.

[4] J.Dauns y Y. Zhou, *Classes of modules*, Chapman Hall/CRC, 2006.

[5] J.Dauns, *Natural Classes and Torsion Theories* , J. Algebra Appl.2, 2003.

[6] A. Alvarado García, H. Rincón Mejía, J. Ríos Montes , *On the lattices of natural and conatural classes in R-Mod* , Comm. in Algebra 29(2) (2001).

[7] A. Alvarado García, C. Cejudo Castilla, H. Rincón Mejía, F. Vilchis Montalvo , *Pseudocomplements and strong pseudocomplements in lattices of module classes*, Journal of Algebra and its aplications vol. 17 No.1 (2017).

[8] M. Sandoval Miranda, *Un estudio de las operaciones y relaciones entre retículas asociadas a un anillo* . Tesis para obterner el grado de Doctora en Ciencias, UNAM 2016.

[9] M. Zorrilla Noriega, *Estudio de algunas grandes retículas de clases cohereditarias de módulos* . Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, UNAM 2015.

[10] E. Márquez Hernández, *Grandes retículas asociadas a un anillo y el caso de los enteros* . Tesis para obtener el titulo de Matemático, UNAM 2017.

[11] G. López Cafaggi, *Teorías de torsión y clases naturales* . Tesis para obtener el titulo de Matemático, UNAM 2010.