UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Cohomología de Esquemas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Alejandro Martínez Méndez

TUTOR(A)

Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2018

Datos del Jurado

1. Datos del alumno:
   Apellido paterno: Martínez
   Apellido materno: Méndez
   Nombre(s): Alejandro
   Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México

   Facultad: Ciencias
   Carrera: Matemáticas
   Número de cuenta: 413054702

2. Datos del tutor:
   Grado: Dr
   Nombre(s): Enrique Javier
   Apellido paterno: Elizondo
   Apellido materno: Huerta

3. Datos del sinodal 1:
   Grado: Dr
   Nombre(s): Pedro Luis
   Apellido paterno: del Ángel
   Apellido materno: Rodríguez

4. Datos del sinodal 2:
   Grado: Dr
   Nombre(s): Felipe de Jesús
   Apellido paterno: Zaldivar
   Apellido materno: Cruz

5. Datos del sinodal 3:
   Grado: Mat.
   Nombre(s): Lilia Montserrat
   Apellido paterno: Vite
   Apellido materno: Escobedo

6. Datos del sinodal 4:
   Grado: Dr
   Nombre(s): Jawad
   Apellido paterno: Snoussi

7. Datos de la tesis:

Título: Cohomología de Esquemas

Número de páginas:
Año: 2018

Dedicado a

Mi mamá y a mis hermanos

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda la Banda del Prometeo, matemáticos, físicos y hasta actuarios. Gracias por enseñarme que tan aburridas pueden ser las clases.

Tlaca, Checo, Itzel, Andrés, Denisse, Zyanya, Chinney, gracias por abrirme las puertas de sus casas y darme un lugar donde dormir y su amistad incondicional siempre, especialmente cuando los tiempos estuvieron difíciles.

Sergio, gracias por ser una persona con su alma intrínsicamente ligada a las matemáticas. Tenerte como amigo siempre me ha motivado a ser mejor. Las incontables pláticas que tuvimos en las incontables comidas siempre fueron excelentes (y creo que pesaría unos 10 kilos menos si no te hubiera conocido).

A los abuelitos, grecias por siempre escucharme y platicar conmigo de todo, de su juventud, de sus vidas, de la mía y de mis goles. Abuelito, los viajes contigo fueron increíbles, tus miles de historias las podría escuchar cientas de veces. Abuelita, gracias por ser una de las personas con el mejor sentido del humor que conozco. Ustedes son como quisiera ser cuando sea grande.

Gracias a la (otra pero a la vez la misma) Familia Martínez Méndez, por su apoyo y por todos los buenos momentos y las risas que tuvimos.

Gracias Tía Vero, por ser como una hermana mayor para mi.

A la Familia Fabila Méndez, gracias por cuidar de mi como un hijo por cuatro años y medio, así fue como me sentí con ustedes. Como otro hijo de la familia. Sin ustedes no podría estar en donde estoy ahorita.

Agradezco también a los animalitos que también son parte de la familia y que le dan una felicidad inmensa a mi vida. Brumby y Bisho que son Pinky y Cerebro ni más ni menos. Mejores y más divertidos no podrían ser. También a Blake con sus ojos de menso, el monstruoso Sirius y los pequeños Totó y Mauricio Catalino.

Y por supuesto, la traviesa Kiara, el sabio y elegante Jack y mi enorme perrotón Argos el Terrible. Aunque ya no están, siempre están en mi corazón.

Quiero agradecer a Javier mi asesor por apoyarme y ayudarme a introducirme en esta área tan vasta. Pedro Luis, gracias por invitarme a trabajar contigo y dedicarme tanto tiempo. El tiempo en Guanajuato fue el tiempo más productivo que tuve en mucho tiempo. Gracias Monse, por introducirme a esta área con tus clases. También agradezco a mis otros sinodales, Jawad y Felipe, por leerme. Quisiera también agradecer a la Olimpiada de Matemáticas, a Isabel Hubard y a todos los involucrados en ella. Es una de las razones fuertes por las que decidí estudiar matemáticas y si puedo ayudar aunque sea un poco a que un solo niño se enamore de las matemáticas como yo lo hice, entonces es una victoria.

También quiero agradecer al proyecto Fordecyt 265667 que me apoyó para concluir la tesis.

Finalmente quiero agradecer a las cuatro personas más importantes en mi vida

Axel, mi querido hermanito, gracias por ser un niño con un alma tan sencilla y noble. Dedícate lo suficiente a lo que sea que quieras y lo obtendrás. A mi hermana también conocida como Yadira, eres mi mejor amiga de toda la vida. Tu eres la persona que más me entiende en todos los sentidos, incluyendo nuestra marca registrada de spanglish. You're mah bro, mah peep and mah homie. All day, every day. A mi papá, gracias ayudarme a introducirme al mundo de las matemáticas desde que era niño, por enseñarme disciplina y a nunca rendirme. Todo lo que me enseñaste me ha ayudado a ser un hombre.

Y por último, a mi guía, mi consejera, la mejor y más sabia persona que conozco: Gracias, querida Mother. Eres mi ejemplo a seguir, la persona de quien estoy más orgulloso y la persona cuyo reconocimiento es el que más vale para mi. This one is for you.

Índice General

Introducción

Este texto se trata de esquemas que son la generalización y abstracción del concepto de variedad algebraica. El objetivo de este texto es definir que son estos, definir sus propiedades y como se trabajan y finalmente definir que es la cohomología de estos y como calcularla usando la cohomología de Cech.

En el primer capítulo (enumerado como el capítulo 0, los siguientes capítulos siguen esta enumeración) se definen gavillas, esquemas y todas las propiedades necesarias para que puedan ser entendidos y trabajados en el resto del texto.

En el segundo capítulo se definen los funtores derivados que surgen a partir de sucesiones exactas de objetos en categorías abelianas. Estos son esenciales para definir la cohomología.

En el tercer capítulo se definen precisamente cuáles son los grupos de cohomología de un esquema, y se exponen propiedades de estos.

El cuarto capítulo trata de una clase muy particular de esquemas, los que son afines y noetherianos. Se presenta como se comporta la cohomología en estos, además de que se habla un poco acerca de la maquinaria algebraica detrás de anillos graduados y noetherianos.

Por último, en el quinto capítulo se construye la cohomología de Cech, que es un tipo de cohomología que es más computable que la usual. Finalmente se prueba que coincide con la cohomología usual para cierta clase de espacios.

0. Definiciones

Un esquema consta de un espacio topológico X , junto con un funtor contravariante llamado una 'gavilla', que puede ser cubierto por abiertos homeomorfos a 'esquemas afines', estos últimos son los espectros de primos de anillos con la topología de Zariski. La gavilla además se condiciona a ser 'bien portada' en los abiertos afines de esta cubierta, para que se puedan hacer afirmaciones locales acerca del esquema.

Entonces un esquema no solo contiene información geométrica, sino información algebraica derivada de la gavilla que se le asigna y de su cubierta de esquemas afines.

Sin embargo, no son espacios simples de trabajar y es necesario definir muchas cosas acerca de ellos para poder hacerlo.

Este capítulo no contendrá demostraciones, ya que su objetivo solamente es definir los espacios sobre los cuales se trabaja.

Nota: De ahora en adelante todo anillo que se considerará será conmutativo y con uno.

Definición 0.1 Sea X un espacio topológico; una *pregavilla* $\mathfrak{F}'$ *de grupos abelianos sobre* X consiste en lo siguiente:

i) Para cada $U \subseteq X$ abierto, un grupo $\mathfrak{F}'(U)$

ii) Para cada contención $V \subseteq U$ de abiertos un morfismo $\rho_{uv} : \mathfrak{F}'(U) \to \mathfrak{F}'(V)$ con las condiciones:

a) $\rho_{uu} = Id_U$

b) Si $W \subseteq V \subseteq U$ entonces $\rho_{vw} \circ \rho_{uv} = \rho_{uw}$

Los morfismos ρ son llamados *restricciones* y si $s \in \mathfrak{F}(U)$ entonces se puede denotar la restricción de s a $V \subseteq U$ como $\rho_{uv}(s) = s \mid_V$

Ejemplo: Sea X un espacio topológico; la *pregavilla constante* $\mathfrak{A}$ *sobre* A *de* X (A un grupo) se define estableciendo $\mathfrak{A}(U) = A$ para todo abierto $U \subseteq X$.

Se puede definir una pregavilla de la misma manera sobre otra categoría (Usualmente se define sobre alguna categoría abeliana) pero por lo general al hablar de una 'gavilla' se refiere a una gavilla de grupos abelianos aún con estructura adicional que pueda tener (Por ejemplo, un anillo es un grupo). En particular, la pregavilla constante también se puede definir sobre otra categoría abeliana.

Definición 0.2 Sea $U \subseteq X$ y $\mathfrak{F}$ una pregavilla; un elemento de $\mathfrak{F}(U)$ es llamado una *sección de* $\mathfrak{F}$ *sobre* U. Una sección de $\mathfrak{F}(X)$ es llamada una *sección global.*

También se denota $\mathfrak{F}(U)$ como $\Gamma(U, \mathfrak{F})$. Se dice que $\Gamma(X, \mathfrak{F})$ es el *funtor de secciones globales.*

En los siguientes capítulos se usará la segunda notación si así lo conviene.

Una característica de un esquema es que pueden ser descritos usando información local. Sin embargo, una pregavilla no necesariamente hace eso, por lo que se tiene que definir un tipo de pregavilla que si aporta información de este tipo.

Definición 0.3 Una *gavilla* $\mathfrak{F}$ es una pregavilla con las siguientes condiciones adicionales:

Sea $U \subseteq X$ un abierto y $\{V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U.

c) Sean $s, s' \in \mathfrak{F}(U)$ tales que $s\,|_{V_i} = s'\,|_{V_i}$ para toda $i \in I$. Entonces se tiene que $s = s'$.

d) Si se tienen elementos $s_i \in \mathfrak{F}(V_i)$ para todo $i \in I$ tales que para todo $i, j \in I$ $s_i\,|_{V_i \cap V_j} = s_j\,|_{V_i \cap V_j}$ entonces existe un único elemento $s \in \mathfrak{F}(U)$ tal que $s\,|_{V_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

Ejemplo: Sea X un una variedad (algebraica, en sentido clásico) sobre un anillo k. Definimos $\mathcal{O}_X$, la *gavilla de funciones regulares sobre* X o *gavilla estructural de* X como sigue:

Para todo $U \subseteq X$ sea $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to k \text{ tal que } f \text{ es regular en } U\}$. Claramente es pregavilla. Por definición, una función localmente regular es regular y si es localmente cero, es cero por lo que es una gavilla. Por lo tanto, $\mathcal{O}_X$ es una gavilla. una variedad (algebraica, en sentido clásico) sobre un anillo k.

La definición de $\mathcal{O}_X$ se puede extender a cualquier espacio topológico: Sea $\mathcal{O}_X(X)$ un anillo. Entonces $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathcal{O}_X(X) \text{ tal que } f \text{ es regular en } U\}$.

Ejemplo: No toda pregavilla es una gavilla. Por ejemplo, consideremos la pregavilla $\mathfrak{F}$ sobre $X = \{p, q\}$(con la topología discreta) como $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{F}(\{p\}) =$

$\mathfrak{F}(\{q\}) = \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{F}(\emptyset) = 0$ con los morfismos naturales de identidad. Supongamos que $\mathfrak{F}$ es gavilla. Entonces ya que la restricción de $s \in \mathfrak{F}(\{p\})$, $s' \in \mathfrak{F}(q)$, $s \neq s'$, a $\mathfrak{F}(\emptyset)$ tienen como imagen al mismo elemento entonces deben provenir del mismo elemento r en $\mathfrak{F}(X)$, es decir $\rho_1(r) = s$ y $\rho_2(r) = s'$. Pero como las restricciones son la identidad, entonces $s = \rho_1(r) = \rho_2(r) = s'$, lo cual es una contradicción.

Definición 0.4 Sea X un espacio topológico, $\mathfrak{F}$ una gavilla y $p \in X$. Sean también $\mathfrak{F}_{p,X} = \{(U, s)$ con $p \in U \subseteq X$ abierto y $s \in \mathfrak{F}(U)\}/\sim$ donde $(U, s) \sim (V, t)$ si y solo si existe $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $s\,|_w = t\,|_w$.

Se dice que $\mathfrak{F}_{p,X}$ (también denotado simplemente $\mathfrak{F}_p$) es el *anillo de gérmenes de $\mathfrak{F}$ en p.*

Ejemplo: Sea X una variedad algebraica (en sentido clásico), $\mathcal{O}$ la gavilla de funciones regulares de X y $p \in X$; entonces $\mathcal{O}_p$ es el *anillo local de p en X* y su ideal maximal $\mathfrak{m}$ es el ideal de gérmenes que se hacen cero en p.

Definición 0.5 Sea X un espacio topológico, $x \in X$ un punto y $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X; se define el *tallo de $\mathfrak{F}$ sobre x, $\mathfrak{F}_x$,* como el límite directo de $\mathfrak{F}(U)$ tomado sobre los abiertos $U \subseteq X$ que contienen a x con los morfismos de restricción ρ.

Es decir, por la definición de límite directo, los elementos de $\mathfrak{F}_x$ se pueden ver como los gérmenes de los elementos de $\mathfrak{F}$ en el punto x.

Ejemplo: Si $X = (Spec(A), \mathcal{O}_X)$ (ver **0.11**) entonces los tallos $\mathcal{O}_{x,X}$ en un punto $x = \mathfrak{p} \in Spec(A)$ son de la forma $A_{\mathfrak{p}}$, es decir A localizado en $\mathfrak{p}$ (ver **0.12**)

Definición 0.6 Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son (pre)gavillas sobre X, un *morfismo $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ de (pre)gavillas* consiste en un morfismo de grupos abelianos $\varphi(U) : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{G}(U)$ para todo $U \subseteq X$ abierto tal que si $V \subseteq U$ es abierto entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(U) & \stackrel{\varphi(U)}{\longrightarrow} & \mathfrak{G}(U) \\ \rho\downarrow & & \rho\downarrow \\ \mathfrak{F}(V) & \stackrel{\varphi(V)}{\longrightarrow} & \mathfrak{G}(V) \end{array}$$

conmuta (es decir, es un morfismo natural).

Ejemplo: Sean X un espacio topológico, $\mathfrak{G} = \mathcal{O}_X$ la gavilla estructural de X y sea $\mathfrak{F}_{\mathcal{O}_X}$ la gavilla constante sobre $\mathcal{O}_X(X)$.

Entonces se tiene el morfismo de gavillas natural $\varphi : \mathfrak{F}_{\mathcal{O}_X} \to \mathcal{O}_X$ que claramente hace que el diagrama anterior conmute.

Como ya se mencionó, no toda pregavilla es una gavilla. Sin embargo, a cada pregavilla se le puede asignar una gavilla que es isomorfa en tallos a ella y se hace de la siguiente manera:

Definición-Proposición 0.7 Dada una pregavilla $\mathfrak{F}$ existe una gavilla $\bar{\mathfrak{F}}$ y un morfismo $\theta : \mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ tal que para toda gavilla $\mathfrak{G}$ y todo morfismo $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ existe un único morfismo $\psi : \bar{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{G}$ tal que $\varphi = \psi\theta$. Se construye de la siguiente manera:

Sea $\bar{\mathfrak{F}}(U) = \{s : U \to \cup_{p\in U}\mathfrak{F}_p\}$ tales que

i) Para toda $p \in U$ se tiene que $s(p) \in \mathfrak{F}_p$ y

ii) Para todo $p \in U$ existe una vecindad $p \in V \subseteq U$ y un elemento $t \in \mathfrak{F}(V)$ tal que para todo $q \in V$ se tiene que el germen t_q de t en q es igual que $s(q)$

La pareja $(\bar{\mathfrak{F}}, \theta)$ es única bajo isomorfismo y $\bar{\mathfrak{F}}$ es llamada la *gavilla asociada a* $\mathfrak{F}$ o la *gavillización de* $\mathfrak{F}$

Ejemplo: La gavillización de la pregavilla constante $\mathfrak{A}$ (sobre un anillo A) se llama la *gavilla constante* y se define como $\bar{\mathfrak{A}}(U) = \{f : U \to A \text{ con } f \text{ continua}\}$ (con la topología discreta en A). Entonces $\bar{\mathfrak{A}}(\emptyset) = 0$, para todo abierto conexo $\emptyset \neq U \subseteq X$ se tiene que $\bar{\mathfrak{A}}(U) = A$ y si $U = \sqcup_{i\in I}U_i$ es un abierto con U_i ajenos entre si, entonces $\bar{\mathfrak{A}}(U) = \oplus_{i\in I}A$.

Entonces en el segundo ejemplo de **0.3**, la gavillización de $\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}}$ sobre X es $\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}}(\emptyset) = 0$, $\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}}(\{p\}) = \mathfrak{A}_{\mathbb{Z}}(\{q\}) = \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Definición 0.8 Una gavilla $\mathfrak{G}$ es s*ubgavilla* de una gavilla $\mathfrak{F}$ si para todo $U \subseteq X$,$\mathfrak{G}(U)$ es subgrupo de $\mathfrak{F}(U)$ y las restricciones de $\mathfrak{G}$ son inducidas por las de $\mathfrak{F}$.

Ejemplo: Sea $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ un morfismo de gavillas; entonces $ker(f)$ es subgavilla de $\mathfrak{F}$ donde $ker(f)$ es la gavilla dada por $U \mapsto ker(f(U))$ para todo $U \subseteq X$.

Al principio se dijo que un esquema es un espacio topológico junto con una gavilla (con otras condiciones además). Entonces se quisiera que dadas parejas $\tilde{X} = (X, \mathfrak{F})$ y $\tilde{Y}$=$(Y, \mathfrak{G})$ constando de un espacio topológico y una gavilla, el morfismo de espacios topológicos $f : X \to Y$ indujera un morfismo de gavillas también para que se pueda definir un morfismo $\tilde{X} \to \tilde{Y}$.

Definición 0.9 Sea $f : X \to Y$ un morfismo continuo de espacios topológicos y $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X, se define la *gavilla de imagen directa $f_*\mathfrak{F}$ sobre Y* como $(f_*\mathfrak{F})(V) = \mathfrak{F}(f^{-1}(V))$ para todo abierto $V \subseteq Y$.

Definición 0.10 Sea X un espacio topológico con una gavilla $\mathfrak{F}$ y sea $U \subseteq X$; definimos a la gavilla sobre U siguiente, denotada como $\mathfrak{F}\mid_U$: $\mathfrak{F}\mid_U (V) = \mathfrak{F}(V)$ para todo $V \subseteq U$. A esta gavilla se le llama la *restricción de $\mathfrak{F}$ a U.*

Una clase de espacios muy importante es la de esquemas afines, que son espacios homeomorfos a los espectros de primos de anillos. El espectro de un anillo tiene una topología natural, esta está dada asignando a un anillo la topología de Zariski. Sin embargo no solo es esto, se le asigna a cada espectro una gavilla de anillos que es compatible con esta topología. Entonces dado un anillo, su espectro se define como sigue:

Definición 0.11 Sea A un anillo; se define $Spec(A) = \{\mathfrak{p} \subset A|\ \mathfrak{p}$ es ideal primo de $A\}$.

Para todo conjunto $a \subseteq A$ consideremos el conjunto $V(a) = \{\mathfrak{p} \in Spec(A)|a \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Los conjuntos de esta forma cumplen los axiomas de cerrados (el abierto asociado a $V(a)$, que es su complemento, se le llama $D(a)$) por lo que determinan una topología sobre $Spec(A)$ llamada la *topología de Zariski.*

Además se define una gavilla de anillos $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ sobre $Spec(A)$ como sigue:

Para todo $\mathfrak{p} \subseteq A$ sea $A_\mathfrak{p}$ la localización de A en $\mathfrak{p}$. Para $U \subseteq Spec(A)$ abierto se define $\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)$ como el conjunto de funciones $s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$ tales que $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$ y tal que s es localmente un cociente de elementos de A (es decir, definimos la *gavilla estructural* de $Spec(A)$)

El *espectro de A* es la pareja $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$, usualmente denotada solamente por $Spec(A)$

Ejemplo: Dado un campo k se tiene que $Spec(k)$ es un espacio con un solo punto que corresponde al ideal $\{0\}$ y $\mathcal{O}(\{0\}) = k$

Proposición 0.12 Sea A un anillo y $X = (Spec(A), \mathcal{O})$ su espectro, entonces se cumple lo siguiente:

i) Para todo $\mathfrak{p} \in A$, se tiene que $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$

ii) Para todo $f \in A$, se tiene que $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$. Los abiertos $D(f)$ forman una base de $Spec(A)$

iii) $\mathcal{O}(Spec(A)) = A$

Demostración: Hartshorne (1977) (II, 2.2).

Definición 0.13 Un *espacio anillado* es una pareja $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de anillos.

Un *morfismo de espacios anillados de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es una pareja $(f, f^{\#})$ donde $f : X \to Y$ es una función continua y $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo de gavillas.

Un *espacio localmente anillado* es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que para todo punto $p \in X$ el tallo $\mathcal{O}_{X,p}$ en el punto p es un anillo local.

Un *morfismo de espacios localmente anillados* es un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#})$ tal que para todo punto $p \in X$ el morfismo inducido $f_p^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to f_*\mathcal{O}_{X,p}$ es morfismo local de anillos locales, es decir, si m es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,p}$ y m' es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{Y,f(p)}$ entonces $(f_p^{\#})^{-1}(m) = m'$.

Usualmente un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#})$ simplemente se denota por f .

Ejemplo: $Spec(A)$ es un espacio localmente anillado para todo anillo A. Además, un morfismo de anillos $f : A \to B$ induce un morfismo $(F, F^{\#}) : (Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)}) \to (Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ de espacios localmente anillados. Esto sucede ya que por ser f morfismo de anillos, entonces si $\mathfrak{q} \subseteq B$ es un primo entonces $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \subseteq A$ para algún primo $\mathfrak{p}$. Entonces el morfismo de espacios topológicos $F : Spec(B) \to Spec(A)$ está bien definido tomando $F(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Además se tiene que $F^{\#} : \mathcal{O}_{Spec(B)} \to \mathcal{O}_{Spec(A)}$ simplemente es el morfismo que, definido en la cubierta abierta $\{D(g)\}_{g \in B}$ de $Spec(B)$, es $F^{\#}(\mathcal{O}_{Spec(B)}(D(g)) = \mathcal{O}_{Spec(A)}(f^{-1}(D(g))$ por definición (un morfismo de gavillas definido en una base define uno sobre su espacio subyacente, como resultado de la definición de gavilla y su comportamiento localmente)

Definición 0.14 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, una subgavilla $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_X$ es una *gavilla de ideales* si para todo abierto $U \subseteq X$ las secciones de $\mathfrak{I}(U)$ forman un ideal de $\mathcal{O}_X(U)$.

La *gavilla cociente* ${}^{\mathcal{O}_X}/_{\mathfrak{I}}$ es la gavilla asociada a la pregavilla definida por $U \mapsto {}^{\mathcal{O}_X(U)}/_{\mathfrak{I}(U)}$ para todo $U \subseteq X$.

Ejemplo: Ver ejemplo **0.18**.

Teniendo estas definiciones ya (por fin) se pueden definir esquemas que son los espacios con los cuales se trabajará.

Definición 0.15 Un *esquema afín* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorfo al espectro de algún anillo A.

Un *esquema* es un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que para todo U_i se tiene que $(U_i, \mathcal{O}_{X|_{U_i}})$ es un esquema afín. X es llamado el *espacio subyacente* y $\mathcal{O}_X$ su *gavilla estructural*. Usualmente $(X, \mathcal{O}_X)$ se denota solamente por X y el espacio subyacente por $sp(X)$ ó $\bar{X}$ (no siempre es necesario denotar así al espacio subyacente, si el contexto es claro se pude poner solamente X)

Ejemplo: Sea $X = \{p, q_1, q_2\}$ con abiertos $X_1 = \{p, q_1\}$, $X_2 = \{p, q_2\}$ ($X, \emptyset, \{p\}$ son también abiertos), sea $\mathcal{O}_X$ la gavilla definida por $\mathcal{O}_X(X) = K[x]_{(x)} = \mathcal{O}_X(X_1) = \mathcal{O}_X(X_2)$ y $\mathcal{O}_X(\{p\}) = K(x)$. Los morfismos de restricción son $\mathcal{O}(X) \stackrel{id}{\to} \mathcal{O}(X_1)$, $\mathcal{O}(X) \stackrel{id}{\to} \mathcal{O}(X_2)$ y $\mathcal{O}(X_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(\{p\})$, $\mathcal{O}(X_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(\{p\})$ son inclusiones. Claramente, $\mathcal{O}_X$ es gavilla. X es un esquema ya que $X_1 \cup X_2$ lo cubren y $(X_1, \mathcal{O}_{X|X_1}) \cong (X_2, \mathcal{O}_{X|X_1}) \cong Spec(K[x]_{(x)})$. Sin embargo, si $(X, \mathcal{O}_X)$ fuera afín, $(X, \mathcal{O}_X) \cong Spec(K[x]_{(x)})$ ya que $\mathcal{O}_X(X) = K[x]_{(x)}$. Pero $Spec(K[x]_{(x)})$ es local, por lo que tiene solamente dos puntos, pero $(X, \mathcal{O}_X)$ tiene tres, por lo que no puede ser afín.

Definición 0.16 Un esquema X es *localmente noetheriano* si existe una cubierta abierta de esquemas afines $\{Spec(A_i)\}_{i\in I}$ de X tal que A_i es noetheriano para todo $i \in I$.

X es *noetheriano* si es localmente noetheriano y cuasicompacto.

Ejemplo: $Spec(k)$ donde k es un campo es un esquema noetheriano.

Dado un esquema X, y un abierto (cerrado) $i : \bar{Y} \hookrightarrow \bar{X}$ contenido en su espacio topológico subyacente quisiéramos que Y sea un equema también, con su gavilla estructural inducida por i y por $\mathcal{O}_X$. Sin embargo en general, dados esquemas como los anteriores, **no** se puede definir una inclusión de esquemas como si fueran espacios topológicos, para esto se necesita el concepto de *inmersión*.

Definición 0.17 Un *subesquema abierto* de un esquema X es un esquema U tal que su espacio subyacente es isomorfo a un abierto de $\bar{X}$ y cuya gavilla estructural $\mathcal{O}_U$ es isomorfa a la restricción $\mathcal{O}_{X|_U}$ de $\mathcal{O}_X$.

Una *inmersión abierta* es un morfismo $f : X \to Y$ de esquemas que induce un isomorfismo de $\bar{X}$ con un subconjunto abierto de $\bar{Y}$ y tal que el morfismo de gavillas $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ induce un isomorfismo $\mathcal{O}_{Y|_X} \cong f_*\mathcal{O}_X$

Ejemplo: Sea X un esquema. Entonces por definición, existe una cubierta abierta $\{X_i\}_{i\in I}$ de X, $X_i = Spec(A_i)$ para algún anillo A_i para todo $i \in I$. Entonces para todo $i \in I$, $Spec(A_i) \hookrightarrow X$ es una inmersión abierta

Definición 0.18 Un *subesquema cerrado* de un esquema X es un esquema Z tal que $\bar{Z}$ es un cerrado de $\bar{X}$ y la gavilla $\mathcal{O}_Z$ es isomorfa a ${}^{\mathcal{O}_X}/_{\mathfrak{I}}$ para una gavilla de ideales $\mathfrak{I}$.

Una *inmersión cerrada* es un morfismo $f : Z \to Y$ de esquemas que induce un isomorfismo de $\bar{Z}$ con un cerrado de $\bar{Y}$ y tal que el morfismo de gavillas $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es suprayectivo.

Ejemplo: Sea A un anillo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal primo. Sea $X = Spec(A)$ y $Y = Spec({}^{A}/_{\mathfrak{a}})$.

Entonces el morfismo $A \mapsto {}^{A}/_{\mathfrak{a}}$ induce un morfismo de esquemas $f : X \to Y$. Es un homeomorfismo de Y con el conjunto cerrado $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$ y es suprayectivo porque es suprayectivo en los tallos (que son localizaciones de A y ${}^{A}/_{\mathfrak{a}}$). Ver **1.2.**

Entonces f es una inmersión cerrada y $f(Y)$ es un subesquema cerrado de X.

Proposición 0.19 Si $X = Spec(A)$ es un esquema afín y $\varphi : Y \to X$ es una inmersión cerrada, entonces Y es un esquema afín. Además, si $Y = Spec(B)$ entonces el morfismo de anillos $\phi : A \to B$ inducido por φ es suprayectivo.

Demostración: Shafarevich (1977) (V, 3.3).

Los esquemas como espacios topológicos **no** son Haussdorff, ya que sus abiertos por lo general son 'demasiado grandes'. Sin embargo, una caracterización de un espacio Haussdorff X es que su diagonal $\Delta : X \to X \times X$ es un cerrado de $X \times X$.

Definición 0.20 Sea S un esquema fijo. Un *esquema sobre* S es un esquema X junto con un morfismo $X \to S$. Dados dos esquemas X e Y sobre S , un $S-$*morfismo* es un morfismo $X \to Y$ compatible con los morfismos a S dados.

Ejemplo: Sea A un anillo. Entonces se tiene que el morfismo inducido por $j : A[x,y] \to A[x]$ que manda $y \mapsto 0$, $i : Spec(A[x]) \hookrightarrow Spec(A[x,y])$ es un $Spec(A)-$morfismo.

Definición 0.20 Sea S un esquema fijo y sean X e Y esquemas sobre S. El *producto fibrado de X e Y sobre S*, denotado $X \times_S Y$ es un esquema junto con morfismos (llamados *proyecciones*) $\rho_1 : X \times_S Y \to X$, $\rho_2 : X \times_S Y \to Y$ tales que forman un diagrama conmutativo con los morfismos $X \to S$ e $Y \to S$, además de que dado cualquier esquema Z y morfismos $f_X : Z \to X$ y $f_Y : Z \to Y$ que forman un diagrama conmutativo entonces existe un único morfismo $\theta : Z \dashrightarrow X \times_S Y$ tales que $f_X = \rho_1\theta$y $f_Y = \rho_2\theta$.

Si $S = Spec(\mathbb{Z})$ entonces $X \times_{Spec(\mathbb{Z})} Y$ se denota simplemente por $X \times Y$ y solamente se llama el *producto fibrado de X y Y.*

Notemos que si X y Y son afines, entonces $X \times Y$ también lo es.

Ejemplo: Sean $\mathbb{A}^n_A = Spec(A[x_1, ..., x_n])$ y $\mathbb{A}^m_A = Spec(A[x_1, ..., x_m])$ espacios afines sobre un anillo A. Entonces, ya que $k[x_1, ..., x_n] \otimes_A k[x_1, ..., x_m] \cong k[x_1, ..., x_{n+m}]$, se tiene que $\mathbb{A}^n_A \times_{Spec(A)} \mathbb{A}^m_A \cong \mathbb{A}^{n+m}_A$.

Definición 0.22 Sea $f : X \to Y$ un morfismo de esquemas. El *morfismo diagonal* es el morfismo único $\Delta : X \to X \times_Y X$ tal que si $\rho_1, \rho_2 : X \times_Y X \to X$ son las proyecciones entonces $\rho_1\Delta = \rho_2\Delta = Id_X$.

Se dice que *f es separado* o, de manera equivalente, *X es separado sobre Y* si el morfismo diagonal Δ es una inmersión cerrada. Si $Y = Spec(\mathbb{Z})$ entonces simplemente se dice que X es *separado.*

Ejemplo: Todo morfismo de esquemas afines $f : X \to Y$ es separado por lo siguiente: si $X = Spec(A)$ y $Y = Spec(B)$ entonces A es una $B-$álgebra y $X \times_Y X = Spec(A \otimes_B A)$ que es afín. Además, Δ proviene del morfismo diagonal $\Delta_A : A \otimes_B A \to A$ dado por $a \otimes a' \mapsto aa'$ que es suprayectivo. Por lo tanto, $\Delta(X)$ es una inmersión cerrada.

Ejemplo: Sean X_1 y X_2 esquemas con $U_1 \subseteq X_1$y $U_2 \subseteq X_2$ abiertos y sea $\varphi : (U_1, \mathcal{O}_{X|U_1}) \to (U_2, \mathcal{O}_{X|U_2})$ un isomorfismo de espacios localmente anillados. Entonces definimos $X = {}^{X_1 \sqcup X_2}/_{\sim}$ donde $x_1 \sim \varphi(x_1)$ para todo $x_1 \in U_1$. X tiene la topología cociente inducida, es decir si $i_j : X_j \hookrightarrow X$ $j = 1, 2$ son las inclusiones canónicas, entonces $V \subseteq X$ es abierto si y solo si $i_1^{-1}(V)$ y $i_2^{-1}(V)$ son abiertos en X_1 y X_2 respectivamente. Su gavilla estructural, $\mathcal{O}_X$, es la siguiente: Para todo abierto $V \subseteq X$ se tiene que $\mathcal{O}_X(V) = \{< s_1, s_2 >| \ s_1 \in$

$\mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)), s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V))$ y tal que $\varphi(s_1 \mid_{i_1^{-1}(V)\cap U_1}) = \varphi(s_2 \mid_{i_2^{-1}(V)\cap U_2})\}$ Se dice que X_1 *y* X_2 *se pegan a través de* φ*.*

Ahora, sea k un campo, sean $X_1 = X_2 = \mathbb{A}_k^1$, $U_1 = U_2 = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ y $\varphi : U_1 \overset{id}{\to} U_2$ y $X = {}^{X_1 \sqcup X_2}/_{\sim}$ como arriba. A X se le llama la *recta afín con doble origen.*

Entonces $X \times_k X$ es el plano afín con ejes dobles y cuatro orígenes. Sin embargo, $\Delta(X)$ es la diagonal usual en el plano afín con doble origen y su cerradura contiene los 4 orígenes.

Por lo tanto X no es separado y podemos afirmar que no todos los esquemas lo son.

Definición 0.23 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado; una *gavilla de* $\mathcal{O}_X-$*módulos* (tambien conocida como simplemente un $\mathcal{O}_X-$*módulo*) es una gavilla $\mathfrak{F}$ sobre X tal que para todo abierto $U \subseteq X$ el grupo $\mathfrak{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)-$módulo y tal que si $V \subseteq U$ es otro abierto entonces la restricción $\mathfrak{F}(V) \to \mathfrak{F}(U)$ es compatible con el morfismo $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U)$.

Todas las definiciones dadas para gavillas de grupos son las mismas para gavillas de O_X-módulos.

Ejemplo: Ver **0.24**

Definición 0.24 Sea A un anillo y M un $A-$módulo; se define a la *gavilla asociada a* M *sobre* $Spec(A)$, denotada como $\widetilde{M}$ como sigue:

Para todo primo $p \subseteq A$ sea M_p la localización de M en p. Para todo abierto $U \subseteq Spec(A)$ se define el grupo $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de funciones $s : U \to \prod_{p\in U} M_p$ tales que para todo $p \in U$ se tiene que $s(p) \in M_p$ y tal que s es localmente una fracción

Ejemplo: Si $X = Spec(A)$ entonces se tiene que su gavilla estructural es $\widetilde{A}$

Definición 0.25 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado; decimos que una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos es *cuasicoherente* si X tiene una cubierta abierta afín $\{U_i = Spec(A_i)\}_{i\in I}$ tal que para todo $i \in I$ existe un A_i-módulo, M_i tal que $\mathfrak{F}(U_i) = \bar{M}_i$.

$\mathfrak{F}$ es *coherente* si además todo M_i es un A_i-módulo finitamente generado.

Ejemplo: Para todo esquema X, la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ es coherente.

Ejemplo: Sean X un esquema, $\mathfrak{F}$ cuasicoherente y U un subesquema de X con $i : U \hookrightarrow X$ la inclusión. Entonces $i_*\mathfrak{F}$ es cuasicoherente.

Ejemplo: Sea U un subesquema abierto de X y sea $i : U \hookrightarrow X$ la inclusión y sea $i(\mathcal{O}_U)$ la gavilla sobre X llamada la *extensión por cero de* $\mathcal{O}_U$ definida para un abierto $V \subseteq X$ como $V \mapsto \mathcal{O}_U(V)$ si $V \subseteq U$ o $V \mapsto 0$ en cualquier otro caso. $i(\mathcal{O}_U)$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos.

Supongamos que X es *entero* (es decir, si $\mathcal{U} = \{U_i = Spec(A_i)\}$ es una cubierta de X entonces A_i es dominio entero para todo i). Tomemos $V = Spec(A) \subseteq X$ no contenido en U pero tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces $i(\mathcal{O}_U(V))$ no tiene secciones sobre V pero no es la gavilla cero. Por lo tanto, $i(\mathcal{O}_U)$ no puede ser cuasicoherente.

1. Funtores Derivados

En general, dada una sucesión exacta $A^{\bullet} = 0 \to A^0 \to A^1 \to ...\ \{A^i\} \subseteq \mathfrak{A}$ y un funtor $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ la sucesión $FA^{\bullet} = 0 \to FA^0 \to FA^1 \to ...$ no tiene que ser exacta. Entonces una manera de medir 'que tan exacta' es $FA^{\bullet}$ es usando *funtores derivados.*

Dado un objeto $A \in \mathfrak{A}$ en una categoría abeliana, se quisiera dar una sucesión exacta $0 \to A \to B^0 \to B^1 \to ...$ tal que los funtores $Hom(-, B^i)$ sean exactos para toda i, para que se preserven propiedades de la sucesión original. Aquí es donde se introduce el concepto de *objeto inyectivo* que son precisamentelos objetos de $\mathfrak{A}$ que tienen esta propiedad y el de *resolución inyectiva de* A, que es una sucesión creada a partir de el objeto A que tiene la propiedad importante de que dadas dos resoluciones inyectivas del mismo objeto, los funtores derivados de estas resoluciones son los mismos.

Definición 1.1

Una *categoría abeliana* $\mathfrak{A}$ es una categoría tal que si A y B son objetos de $\mathfrak{A}$ entonces $Hom(A, B) \in \mathfrak{Ab}$ (i.e. $Hom(A, B)$ es un grupo abeliano), todo morfismo tiene núcleo y conúcleo, todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo, todo epimorfismo es conúcleo de su núcleo, todo morfismo puede ser factorizado como un epimorfismo seguido de un monomorfismo y existen sumas directas finitas.

Ejemplo: Las siguientes categorías son abelianas:

- $\mathfrak{Ab}$, la categoría de grupos abelianos
- $\mathfrak{Mod}(A)$, la categoría de módulos sobre un anillo A
- $\mathfrak{Ab}(X)$, la categoría de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico fijo X
- $\mathfrak{Mod}(X)$, la categoría de gavillas de $\mathcal{O}_X-$módulos sobre un espacio anillado fijo X
- $\mathfrak{Qco}(X)$, la categoría de gavillas cuasicoherentes de $\mathcal{O}_X-$módulos sobre un esquema X

Definición 1.2 Un *complejo* $\mathcal{A}^\bullet$en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ es una colección $(A^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $A^i \in \mathfrak{A}$; y $d^i : A^i \to A^{i+1}$ son morfismos tales que $d^{i+1} \circ d^i \equiv 0$ (es decir, $Im(d^i) \subseteq ker(d^{i+1})$) para todo $i \in \mathbb{Z}$. Si para algún índice no está definido un objeto, se asume que este es cero.

Los morfismos d^i son llamados *morfismos cofrontera.*

A un complejo se le dice *sucesión exacta* si para todo i, $Im(d^i) = ker(d^{i+1})$ y es una *sucesión exacta corta* si es una sucesión exacta de la forma $0 \to A \to B \to C \to 0$

A veces se omite el índice de d^i al hablar de los morfismos en el complejo y simplemente todos se denotan con d (cuando el índice se deduce fácilmente en el contexto).

Ejemplo: Sea $A \in \mathfrak{A}$ un objeto en una categoría abeliana, entonces la siguiente sucesión trivial es una sucesión exacta:

$$0 \hookrightarrow A \to A \to 0 \to 0 \to ...$$

Ejemplo: Sean $A, B \in \mathfrak{A}$ objetos en una categoría abeliana tales que
$i : A \to B$ es inyectiva. Entonces la siguiente sucesión es una sucesión exacta corta:

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \to {}^{B}/_{Im(i)} \to 0$$

Ejemplo: Sean X, Y y Z esquemas; entonces tenemos que el morfismo de esquemas $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Z \to 0$ es exacta si y solo si la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{Z,z}$ inducida en los tallos lo es.

Definición 1.3 Un *morfismo de complejos* $f : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$es una colección de morfismos $f^i : A^i \to B^i$ tales que conmutan con los morfismos cofrontera.

El núcleo (conúcleo) de un morfismo de complejos f es el complejo formado por los núcleos (conúcleos respectivamente) de los morfismos f^i, análogamente la imagen de f es el complejo formado por las imágenes de los morfismos f^i.

Al igual que con los morfismos cofrontera, a veces se omite el índice si está claro en el contexto.

Definición 1.4 El *i-ésimo objeto de cohomología* de un complejo $\mathcal{A}^\bullet$ se define como $h^i(\mathcal{A}^\bullet) = {}^{ker(d^i)}/_{Im(d^{i-1})}$. Además, un morfismo de complejos $f : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ induce morfismos naturales $h^i f : h^i(\mathcal{A}^\bullet) \to h^i(\mathcal{B}^\bullet)$ de la siguiente manera: Si

$a \in ker(d^i) \subseteq A^i$, $f(a) = b \in ker(d^i) \subseteq B^i$ y $\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor$ son las clases de a y b en $h^i(A^\bullet), h^i(B^\bullet)$, respectivamente, entonces por la conmutatividad del diagrama $(h^i f)(\lfloor a \rfloor) = \lfloor b \rfloor$.

Definición 1.5 Dos morfismos de complejos $f, g : \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ son *homótopos* *($f \sim g$)* si existe una colección de morfismos $k = \{k^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $k^i : \mathcal{A}^i \to \mathcal{B}^{i-1}$ tales que $f_i - g_i = d^{i-1}k^i + k^{i+1}d^i$. k es llamado un *operador de homotopía*

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & \overset{d}{\to} & A^{i-1} & \overset{d^{i-1}}{\to} & A^i & \overset{d^i}{\to} & A^{i+1} & \overset{d}{\to} & ... \\
 & & \downarrow & \overset{k^i}{\swarrow} & f^i \downdownarrows g^i & \overset{k^{i+1}}{\swarrow} & \downarrow & & \\
... & \overset{d}{\to} & B^{i-1} & \overset{d^{i-1}}{\to} & B^i & \overset{d^i}{\to} & B^{i+1} & \overset{d}{\to} & ...
\end{array}$$

Se dice que dos complejos $A^\bullet$ y $B^\bullet$ son *homotópicamente equivalentes* si existen morfismos $\alpha : A^\bullet \to B^\bullet$ y $\beta : B^\bullet \to A^\bullet$ tales que $\alpha\beta \sim Id_{B^\bullet}$ y $\beta\alpha \sim Id_{A^\bullet}$.

Ejemplo: Sea A un objeto. Consideremos el siguiente diagrama, donde $k_1 = id$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \overset{a_0}{\to} & A & \overset{id}{\to} & A & \overset{a_2}{\to} & 0 \\
\downarrow & \overset{k_0}{\swarrow} & id\downarrow & \overset{k_1}{\swarrow} & id\downarrow & \overset{k_2}{\swarrow} & \downarrow \\
0 & \overset{b_0}{\to} & A & \overset{id}{\to} & A & \overset{b_2}{\to} & 0
\end{array}$$

Consideremos también el mismo diagrama pero tal que todos los morfismos verticales son el morfismo cero. Entonces tenemos a los dos morfismos de complejos $f = \{f_i = id\}$ y $g = \{g_i = 0\}$ y tenemos que lo siguiente sucede para $\alpha \in A$

$(b_0k_0 + k_1 id)(\alpha) = (\alpha) = (id - 0)(\alpha)$ y $((id)k_1 + k_2a_2)(\alpha) = \alpha$ por lo que $f \sim g$.

Proposición 1.6 Si $f \sim g$, entonces f y g inducen el mismo morfismo $h^i(\mathcal{A}^\bullet) \to h^i(\mathcal{B}^\bullet)$ de objetos de cohomología para todo i.

Demostración: Supongamos que $f \sim g$ y sea $z \in ker(d)$. Entonces $(f^i - g^i)(z) = (d^{i-1}k^i)(z) + (k^{i+1}d^i)(z) = (d^{i-1}k^i)(z)$, es decir $f^i(z) = g^i(z) + (d^{i-1}k^i)(z)$.

Pero entonces por la definición de los objetos de cohomología se tiene que, ya que $(d^{i-1}k^i)(z) \in Im(d^{i-1})$, $(h^i f)(z) = (h^i g)(z)$ que es lo que se quería probar.

Dada una sucesión exacta corta de complejos, una de las propiedades más importantes de los objetos de cohomología es que permiten crear sucesiones largas de estos, como se verá a continuación:

Proposición 1.7 Si se tiene una sucesión exacta corta de complejos $0 \to \mathcal{A}^\bullet \xrightarrow{f} \mathcal{B}^\bullet \xrightarrow{g} \mathcal{C}^\bullet \to 0$ entonces existen morfismos naturales $\partial^i : h^i(\mathcal{C}^\bullet) \to h^{i+1}(\mathcal{A}^\bullet)$ tales que la sucesión

$$S = ... \to h^i(\mathcal{B}^\bullet) \xrightarrow{h^i(g)} h^i(\mathcal{C}^\bullet) \xrightarrow{\partial^i} h^{i+1}(\mathcal{A}^\bullet) \xrightarrow{h^{i+1}(f)} h^{i+1}(\mathcal{B}^\bullet) \to ...$$

es exacta.

Demostración:

Primero, notemos que el siguiente diagrama conmuta por la definición de morfismo de complejos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A^i & \xrightarrow{f} & \underset{b}{B^i} & \xrightarrow{g} & \underset{c}{C^i} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \underset{a}{A^{i+1}} & \xrightarrow{f} & \underset{d(b)}{B^{i+1}} & \xrightarrow{g} & C^{i+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \underset{d(a)}{A^{i+2}} & \xrightarrow{f} & B^{i+2} & \xrightarrow{g} & C^{i+2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Los morfismos $h^i(f)$ y $h^i(g)$ son los inducidos naturalmente por f y g.

Los morfismos ∂^i son definidos de la siguiente manera:

Sea $\gamma \in h^i(\mathcal{C}^\bullet) \subseteq C^i/Im(d)$ tal que proviene de $c \in ker(d) \subseteq C^i$. Ya que g es suprayectiva, $\exists b \in B^i$ tal que $g(b) = c$. Entonces $g(d(b)) = d(g(b)) = d(c) = 0$ (ya que los morfismos cofrontera conmutan con g y $c \in ker(d)$) por lo que $d(b) \in ker(g)$. Ya que $Im(f) = Ker(g)$ entonces existe $a \in A^{i+1}$ tal que $d(b) = f(a)$. Además se tiene que $f(d(a)) = d(f(a)) = d(d(b)) = 0$. Pero ya que f es inyectivo, $d(a) = 0 \therefore a \in Ker(d)$. A la clase correspondiente de a en $h^{n+1}(\mathcal{A}^\bullet)$ se le llama $\partial^i(\gamma)$.

Es fácil ver ahora que $\{\partial^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ hace que S sea exacta por la definición de los morfismos ∂^i, f^i y g^i.

Definición 1.8 Un funtor covariante (contravariante) $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ entre categorías abelianas es *aditivo* si para cualesquiera dos objetos $A, A' \in \mathfrak{A}$ la función inducida $Hom(A, A') \to Hom(FA, FA')$ $(Hom(A, A') \to Hom(FA', FA))$ es un morfismo de grupos.

Ejemplo: Consideremos el funtor $F : {}^{Vect}/_{k} \to {}^{Vect}/_{k}$ de la categoría de espacios vectoriales sobre un campo k en sí misma tal que $V \mapsto V^* = Hom(V, k)$. Entonces F es aditivo ya que un morfismo de espacios vectoriales $V \mapsto W$ induce un morfismo $Hom(W, k) \mapsto Hom(V, k)$.

Definición 1.9 Sea $A \in \mathfrak{A}$ un objeto fijo. Definimos el funtor covariante $Hom(A, \cdot)$ como el que manda $B \mapsto Hom(A, B)$ para todo $B \in \mathfrak{A}$. De manera análoga se define el funtor contravariante $Hom(\cdot, A)$.

Definición 1.10 Un funtor aditivo F definido como arriba es *exacto por la izquierda (derecha)* si para toda sucesión exacta corta de objetos en $\mathfrak{A}$, $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, se tiene que $0 \to FA' \to FA \to FA''$ $(FA' \to FA \to FA'' \to 0$, respectivamente) es exacta en $\mathfrak{B}$. Si $0 \to FA' \to FA \to FA'' \to 0$ es exacta por ambos lados, se dice que el funtor es *exacto.* (Si solo $FA' \to FA \to FA''$ es exacta, entonces F es *exacto por en medio*).

Ejemplo: El funtor $Hom(A, \cdot)$ es exacto izquierdo, así como el funtor de secciones globales $\Gamma(X, -)$

Definición 1.11 Se dice que un objeto $I \in \mathfrak{A}$ es *inyectivo* si el funtor $Hom(-, I)$ es exacto.

Definición 1.12 La *resolución inyectiva* de un objeto $A \in \mathfrak{A}$ es un complejo $\mathcal{I}^\bullet$definido para $i \geq 0$ junto con un morfismo $\varepsilon : A \to I^0$ tal que I^i es un objeto inyectivo de $\mathfrak{A}$ para todo $i \geq 0$ y tal que la sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I \xrightarrow{d^1} ...$ es exacta.

Definición 1.13 Si todo objeto en una categoría $\mathfrak{A}$ es un subobjeto de un objeto inyectivo, entonces se dice que $\mathfrak{A}$ tiene *suficientes inyectivos.* Notemos que si $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces todo objeto tiene una resolución inyectiva (con ε la inclusión, ε el morfismo de la definición anterior).

Lema 1.14 Dos resoluciones inyectivas cualesquiera de un objeto A son homotopicamente equivalentes.

Demostración: Hilton y Stammbach (1971) (IV, 4.3).

Definicion 1.15 Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ categorias abelianas, $\mathfrak{A}$ con suficientes inyectivos y $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante exacto izquierdo. Se construyen los *funtores derivados derechos* R^iF, $i \geq 0$ de la siguiente manera: Para todo objeto $A \in \mathfrak{A}$ se escoge una resolucion inyectiva $\mathcal{I}^\bullet = 0 \to I^0 \overset{d^0}{\to} I^1 \overset{d^1}{\to} ...$ de A. Se define entonces $R^iF(A) = h^i(F(\mathcal{I}^\bullet))$.

Notemos que los funtores derivados son independientes de la eleccion de la resolucion inyectiva de A, debido a la proposicion **1.6** y el lema anterior. Esto nos permitirá afirmar más adelante que los funtores de cohomología, que son funtores derivados de un funtor particular no dependen de la elección de resoluciones, por lo que son únicos a cada objeto A y pueden caracterizarlo.

TEOREMA 1.16 Sea $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un funtor covariante exacto izquierdo a otra categoría abeliana $\mathfrak{B}$. Entonces:

a) Para todo $i \geq 0$, R^iF es un funtor aditivo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.

b) Existe un isomorfismo natural $F \cong R^0F$

c) Para toda sucesión exacta corta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ y todo $i \geq 0$ existe un mofismo natural $\partial^i : R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$ tal que se obtiene una sucesión larga $... \to R^iF(A) \to R^iF(A'') \overset{\partial^i}{\to} R^{i+1}F(A') \to R^{i+1}F(A) \to ...$

d) Dado un morfismo g de la sucesión corta anterior a otra $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \overset{\partial^i}{\to} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow h(g) & & \downarrow h(g) \\ R^iF(B'') & \overset{\partial'^i}{\to} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

conmuta

e) Para todo objeto inyectivo $I \in \mathfrak{A}$ y para todo $i > 0$ se tiene que $R^iF(I) = 0$

Demostración:

a) Es claro por la definición de funtor derivado

b) Sean $A \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{I}^\bullet = 0 \to I^0 \overset{d^0}{\to} I^1 \overset{d^1}{\to} ...$ una resolución inyectiva de A. Entonces ya que $0 \to A \overset{\epsilon}{\to} I^0 \overset{d^0}{\to} I^1$ es exacta $0 \to FA \to FI^0 \to FI^1$ lo es también, por ser F exacto izquierdo. Entonces se tiene que $R^0F(A) = ker(F(d^0)) = FA$ por lo que $R^0F \cong F$.

c) Es la proposición **1.7**

d) Tenemos, por construcción que si $\alpha" \in R^iF(A")$ proviene de $a" \in A"$ y $\beta" \in R^iF(B")$ proviene de $G(a) \in B"$ entonces $h(G)(\alpha") = \beta"$. Análogamente si $\alpha' \in R^iF(A')$ proveninete de a' y $\beta' \in R^iF(B')$ proviene de $G(a')$ entonces $h(G)(\alpha') = \beta'$. Entonces por como se definieron los morfismos cofrontera tenemos que si $\partial^i(\alpha") = \alpha'$ entonces $\partial'^i(\beta") = \beta'$ por lo que el cuadrado conmuta.

e) Ya que los funtores derivados son independientes de la resolución de A, se puede tomar la resolución $\mathcal{I}^\bullet = 0 \to A \to 0 \to 0 \to ...$

Definición 1.17 Sea $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ como en el teorema. Un objeto $J \in \mathfrak{A}$ es *acíclico para* F si $R^iF(J) = 0$ para todo $i > 0$

Estos objetos acíclicos nos permiten en ocasiones calcular con más facilidad los funtores derivados, debido a la siguiente propiedad:

Proposición 1.18 Sea $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ como en **1.16** y $A \in \mathfrak{A}$. Supongamos que existe una sucesión de la forma $\mathcal{J}^\bullet = 0 \to A \to J^0 \to J^1 \to ...$ donde J^i es acíclico para F para todo $i \geq 0$ (se dice que $\mathcal{J}^\bullet$es una *resolución acíclica de* A). Entonces para todo $i \geq 0$ existe un isomorfismo natural $R^iF(A) = h^i(F\mathcal{J}^\bullet)$

Demostración: Sea $J^\bullet = 0 \to A \xrightarrow{\epsilon} J^0 \xrightarrow{d^0} J^1 \xrightarrow{d^1} ...$; entonces, por la definición de sucesión exacta, se tienen las siguientes sucesiones cortas:

$0 \to A \to J^0 \to ker(d^1) \to 0$

$0 \to ker(d^1) \to J^1 \to ker(d^2) \to 0$

...

$0 \to ker(d^i) \to J^i \to ker(d^{i+1}) \to 0$

...

Por **1.16**, de cada una de las sucesiones anteriores se puede obtener una sucesión larga y resulta el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & R^0FA \arrow[r] & R^0FJ^0 \arrow[r] & R^0F(ker(d^1)) \arrow[r] \arrow[d] & R^1FA \arrow[r] & 0 \arrow[r] & R^1F(ker(d^1)) \arrow[r] & ... \\
 & & & R^0FJ^1 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & 0 \arrow[r] & R^0F(ker(d^2)) \arrow[r] \arrow[d] & R^0FJ^2 \arrow[r] & R^0F(ker(d^3)) \arrow[r] \arrow[d] & ... & \\
 & & & R^1F(ker(d^1)) \arrow[d] & & R^0FJ^3 \arrow[d] & & \\
 & & & 0 \arrow[d] & & R^0F(ker(d^4)) \arrow[d] & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

Notemos que $R^iFJ^k = 0$ para todo $i \geq 1$ por definición. También, por **1.16** tenemos que $R^0FJ^i \cong FJ^i$ para todo $i \geq 0$. También notemos que $h^0(FJ^\bullet) = FA \cong R^0FA$. Esto se puede probar de manera análoga a **1.16.b.**

Por definición de sucesión exacta, tenemos que $R^0F(ker(d^1) \to R^1FA$ es suprayectiva y ya que $im(R^0FJ^0 \to R^0F(ker(d^1))) = ker(R^0F(ker(d^1)) \to R^1FA)$ entonces

$$R^1FA \cong \frac{R^0F(ker(d^1))}{im(R^0FJ^0 \to R^0F(ker(d^1)))}$$

.

Ya que $R^0F(ker(d^1)) \to R^0FJ^1$ es inyectiva entonces existe un morfismo natural $R^0FJ^0 \to R^0FJ^1$ y un isomorfismo $im(R^0FJ^0 \to R^0F(ker(d^1))) \cong im(R^0FJ^0 \to R^0FJ^1)$. Además, por la misma razón, se tiene que $R^0F(ker(d^1)) \cong im(R^0F(ker(d^1)) \to R^0FJ^1) = ker(R^0FJ^1 \to R^0F(ker(d^2))$ y por lo tanto

$$R^1FA \cong \frac{ker(R^0FJ^1 \to R^0F(ker(d^2)))}{im(R^0FJ^0 \to R^0J^1)}$$

.

Por último, ya que $R^0F(ker(d^2)) \to R^0FJ^2$ es inyectiva entonces existe un morfismo natural $R^0FJ^1 \to R^0FJ^2$ y $ker(R^0FJ^1 \to R^0FJ^2)$ por lo que

$$R^1FA \cong \frac{ker(R^0FJ^1 \to R^0FJ^2)}{im(R^0FJ^0 \to R^0J^1)} \cong \frac{ker(FJ^1 \to FJ^2)}{im(FJ^0 \to FJ^1)} = h^1(FJ^\bullet)$$

Análogamente, se puede concluir para todo $i > 1$ lo mismo.

Definición 1.19 Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ categorías abelianas. Un *$\partial-funtor$ (covariante) de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$* es una colección de funtores $T = \{T^i\}_{i\geq 0}$ junto con morfismos $\{\partial^i\}_{i\geq 0}$, $\partial^i : T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$ para toda sucesión corta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ en $\mathfrak{A}$ tal que

1. Para toda sucesión corta como la anterior existe una sucesión larga $0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \overset{\partial^0}{\to} T^1(A') \to ... \to T^i(A') \overset{\partial^i}{\to} T^{i+1}(A'') \to ...$

2. Para todo morfismo de una sucesión corta como la definida a otra sucesión corta $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ en $\mathcal{A}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \overset{\partial^i}{\to} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \overset{\partial^i}{\to} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

conmuta para toda $i \geq 0$

Definición 1.20 Un $\partial - funtor$ T es *universal* si dado otro $\partial - funtor$ T' y un morfismo de funtores $f^0 : T^0 \to T'^0$ existe una sucesion unica de morfismos $\{f^i\}_{i\geq 0}$, $f^i : T^i \to T'^i$, comenzando con el f^0 dado que conmutan con los ∂^i de cada sucesion exacta corta. Notemos que por esta definición, si T,T' son universales entonces $T \cong T'$ (es decir, $T^i \cong T'^i$ para todo $i \geq 0$).

Definicion 1.21 Un funtor aditivo $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ es *borrable* si para todo objeto $A \in \mathfrak{B}$ existe un monomorfismo $u : A \to M$ para algun M tal que $F(u) = 0$. Si para ese funtor se tiene que para todo objeto $A \in \mathfrak{A}$ existe un epimosrfismo $u : P \to A$ para algún P, entonces ese funtor es *coborrable*

TEOREMA 1.22 Sea $T = \{T^i\}_{i\geq 0}$ un $\partial-$funtor covariante de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$. Si T^i es borrable para todo $i > 0$ entonces T es universal.

Demostración: Grothendieck (1957). (II, 2.2.1)

Corolario 1.23 Sea $\mathfrak{A}$ con suficientes inyectivos. Entonces para todo funtor exacto izquierdo $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ los funtores derivados derechos $RF = \{R^iF\}_{i\geq 0}$

forman un $\partial-$funtor universal con $F \cong R^0F$. Por otro lado, si T es otro $\partial-$funtor universal, entonces T^0 es exacto izquierdo y ademas, $T^i \cong R^iT^0$ para todo $i \geq 0$.

Demostracion: Ya que F es exacto izquierdo, entonces RF es un $\partial-$funtor por 1.16. Además, ya que $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos, entonces para todo $A \in \mathfrak{A}$ existe $u : A \hookrightarrow I$ para I inyectivo. Entonces, por 1.16e, se tiene que $R^iF(u) = 0$ por lo que se tiene que R^iF es borrable. Entonces por 1.22, RF es un $\partial-$funtor universal (con $F \cong R^0F$ por 1.16b).

Por la definición de $\partial-$funtor se tiene que T^0 es exacto izquierdo. Ya que $\mathfrak{A}$ tiene suficientes inyectivos entonces existen los funtores derivados $RT^0 = \{R^iT^0\}_{i\geq 0}$ con $R^0T^0 \cong T^0$ por 1.16b. Además RT^0 es universal por lo anterior y además, se tiene por la definición de universal que $R^iT^0 \cong T^i$

2. Cohomología de Esquemas

Ya que tenemos definidos los funtores derivados y sus propiedades podemos definir los *funtores de cohomología* que son los funtores derivados derechos de los funtores de secciones globales de una gavilla de O_X-módulos.

Sin embargo, para poder construir esos funtores necesitamos asegurar primero que efectivamente se pueden definir en la categoría de gavillas de módulos de un anillo dado, es decir, todo objeto ahí tiene una resolución inyectiva. No solo eso, dado un espacio topológico X, los funtores de secciones globales están definidos de $\mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$, y en general, O_X-módulos inyectivos no son grupos abelianos inyectivos, por lo que se necesitan sucesiones que tienen los mismos funtores derivados que las inyectivas para poder obtenerlos ahí.

Lema 2.1 Sean A un anillo, M un $A-$módulo y G un grupo abeliano; entonces, considerando a $Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ como un $A-$módulo, tenemos el isomorfismo de grupos

$$Hom_A(M, Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M, G)$$

Además, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo.

Demostración: Hilton y Stammbach (1971) (I, 8.1 y 8.2).

Lema 2.2 Sea A un $\mathbb{Z}-$módulo y $A_Q^* = Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Entonces $I(A) = \bigoplus_{A_Q^*} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}-$módulo inyectivo y el morfismo $ev : A \to I(A)$ tal que $a \mapsto (a_f)_{f \in A_Q^*}$, donde $a_f = f(a)$, es inyectivo.

Demostración: Basta observar que para todo $0 \neq a \in A$ existe $\psi^* : A \to A_Q^*$ tal que $\psi^*(a) \neq 0$ ya que si este es el caso, la preimagen de $0 \in I(A)$ es $0 \in A$

Tomemos $0 \neq a \in A$ y sea $\psi :< a >\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un morfismo no trivial. Entonces afirmamos que ψ existe por lo siguiente:

i) Si $< a >\cong \mathbb{Z}$ entonces basta que $\psi(a) \neq 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

ii) Si $< a >\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entonces basta que $\psi(a) = i/n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para algún $0 < i \leq n-1$

Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & <a> & \to & A \\ & & \psi\downarrow & \overset{\psi^*}{\swarrow} & \\ & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

conmuta y $\psi^* \in A^*_Q$ con $\psi(a) = \psi^*(a)$ y es claramente inyectivo.

Proposición 2.3 Si A es un anillo entonces todo A-módulo es isomorfo a un submódulo de un A-módulo inyectivo.

Demostración: Sean A un anillo y M un $A-$módulo y notemos primero que $A^* = Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un $A-$módulo inyectivo por la exactitud del funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Entonces $I(M) = \bigoplus_{Hom_A(M,A^*)} A^*$ es un $A-$módulo inyectivo.

Basta probar entonces que el morfismo $ev : M \to I(M)$ es inyectivo y para esto basta probar (análogamente al lema anterior) que para todo $0 \neq m \in M$ existe $\psi : M \to A^*$ tal que $\psi(m) \neq 0$.

Sea $m \in M$ y sea $\tilde{\psi} : mM \to A^*$, entonces $\tilde{\psi} \in Hom_A(mM, A^*)$. Pero por **2.1** $Hom_A(mA, A^*) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(A/ann(m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ por lo que se puede aplicar directamente **2.2.**

Proposición 2.4 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Entonces la categoría $\mathfrak{Mod}(X)$ de gavillas de $\mathcal{O}_X-$módulos tiene suficientes inyectivos.

Demostración: Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos. Entonces tenemos que para todo $x \in X$, $\mathfrak{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{x,X}-$módulo. Por la proposición **2.3**, existe una inclusión $i_x : \mathfrak{F}_x \to \mathfrak{I}_x$ de $\mathfrak{F}_x$ en un $\mathcal{O}_{x,X}-$módulo inyectivo.

Además, para todo $x \in X$ sea $j_x : \{x\} \to X$ la inclusión de x (como espacio topológico de un solo punto) en X.

Consideremos la gavilla $\mathfrak{J} = \prod_{x\in X} j_*(\mathfrak{I}_x)$ considerando $\mathfrak{I}_x$ como gavilla sobre x y $j_*(\mathfrak{I}_x)$ la imagen directa de $\mathfrak{I}_x$. Para toda gavilla $\mathfrak{G}$ de $\mathcal{O}_X-$módulos se tiene que $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{G}, \mathfrak{J}) = Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{G}, \prod_{x\in X} j_*(\mathfrak{I}_x)) = \prod_{x\in X} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{G}, j_*(\mathfrak{I}_x))$. Por otro lado, para todo $x \in X$, $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{G}, j_*(\mathfrak{I}_x)) \cong Hom_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathfrak{G}_x, \mathfrak{I}_x)$. Por lo tanto, $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{G}, \mathfrak{J}) \cong \prod_{x\in X} Hom_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathfrak{G}_x, \mathfrak{I}_x)$. Entonces existe un morfismo natural $\mathfrak{F} \to \mathfrak{J}$ dado por los morfismos en los tallos $\mathfrak{F}_x \to \mathfrak{I}_x$ y este claramente es inyectivo. Por último, el funtor $Hom_{O_X}(-, \mathfrak{J})$ es el producto directo de los funtores $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_x$ (que es exacto) seguido por el funtor $Hom_{\mathcal{O}_{x,X}}(-, \mathfrak{I}_x)$ que es exacto también ya que $\mathfrak{I}_x$ es inyectivo. Por lo tanto $\mathfrak{J}$ es inyectivo.

Corolario 2.5 Si X es un espacio topológico entonces la categoría $\mathfrak{Ab}(X)$ de gavillas de grupos abelianos sobre X tiene suficientes inyectivos.

Demostración: Sea O_X la gavilla constante $\mathbb{Z}$. Entonces (X, O_X) es un espacio anillado y $\mathfrak{Mod}(X) = \mathfrak{Ab}(X)$.

Definición 2.6 Sea X un espacio topológico. Sea $\Gamma(X, -)$ el funtor de secciones globales de $\mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$. Se definen los *funtores de cohomología* $H^i(X, -)$ como los funtores derivados derechos de $\Gamma(X, -)$ (es decir, $H^i(X, -) = R^i\Gamma(X, -)$). Para una gavilla $\mathfrak{F}$ los *grupos de cohomología de* $\mathfrak{F}$ se definen como los grupos $H^i(X, \mathfrak{F})$.

La cohomología se toma considerando a $\mathfrak{F}$ como una gavilla de grupos abelianos sobre X sin importar que estructura adicional se puede tener (por ejemplo, que $\mathfrak{F}$ sea una gavilla de anillos).

Como se dijo al principio, para calcular cohomología en gavillas de O_X-módulos se necesitan sucesiones que dan los mismos funtores derivados que las sucesiones inyectivas. Estas son las *resoluciones* fláccidas que se definen a continuación:

Definición 2.7 Una gavilla sobre X es fláccida si para cualquier inclusión de abiertos de X, $U \subseteq V$, el morfismo $\mathfrak{F}(V) \to \mathfrak{F}(U)$ es suprayectivo.

Definición 2.8 Una *resolución fláccida* de un objeto A es un morfismo ε y una colección de objetos fláccidos $\{F^i\}_{i \geq 0}$ tal que $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} F^0 \to F^1 \to ...$ es exacta.

Lema 2.9 Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado entonces todo $\mathcal{O}_X-$módulo inyectivo es fláccido.

Demostración: Para todo subconjunto $U \subseteq X$ sea $\mathcal{O}_U = j(\mathcal{O}_{X|_U})$ la restricción de $\mathcal{O}_X$ a U extendida por cero fuera de U. Sea $\mathfrak{J}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo inyectivo y sean $V \subseteq U \subseteq X$ abiertos de X; entonces se tiene la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_U$ y ya que $\mathfrak{J}$ es inyectivo, se tiene que $Hom(\mathcal{O}_U, \mathfrak{J}) \to Hom(\mathcal{O}_V, \mathfrak{J}) \to 0$ es exacta. Pero por definición, $Hom(\mathcal{O}_U, \mathfrak{J}) = \mathfrak{J}(U)$ y $Hom(\mathcal{O}_V, \mathfrak{J}) = \mathfrak{J}(V)$ por lo que $\mathfrak{J}$ es fláccido.

Lema 2.10 Sea $0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{J} \to \mathfrak{G} \to 0$ una sucesión exacta de gavillas tal que $\mathfrak{F}$ es fláccida. Entonces para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $0 \to \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{J}(U) \to \mathfrak{G}(U) \to 0$ es exacta.

Demostracion Sea $0 \to \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{G} \to 0$ una sucesión exacta de gavillas y consideremos un abierto $U \subseteq X$. Notemos primero que por la exactitud izquierda del funtor $\Gamma(U,-)$ tenemos que $0 \to \mathfrak{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I}(U) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{G}(U)$ es exacta.

Tomemos una sección $s \in \mathfrak{G}(U)$ y consideremos las parejas (V,t) tales que $V \subseteq U$ y $t \in \mathfrak{I}(V)$ tal que $\beta(t) = s\mid_V$. El conjunto de estas parejas, llamémoslo $\mathcal{U}_V$, es no vacío ya que la sucesión exacta inducida en los tallos garantiza que para todo $x \in U$ y $s_x \in \mathfrak{G}(U)$ existe $t_x \in \mathfrak{I}_x$ tal que $\beta_x(t_x) = s_x$ y ya que la pareja (U,s) es un representante de algún elemento en $\mathfrak{G}_x$ (y t_x tiene un representante de la forma (U,t)), podemos concluir la afirmación.

Entonces $\mathcal{U}_V$ es parcialmente ordenado con el siguiente orden: $(V,t) \le (V',t')$ si y solo si $V \subseteq V'$ y $t'\mid_V = t$. Además, para todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{U}_V$, $\mathcal{U}_i = \{(V_i,t_i)\}$, se tiene que si $V_I = \cup V_i$ entonces por ser $\mathfrak{I}$ gavilla existe $t_I \in \mathfrak{I}(V_I)$ único tal que $t_I\mid_{V_i} = t_i$ para todo i. Entonces por el lema de Zorn existe (V_M, t_M) maximal en $\mathcal{U}_V$ y basta probar que $V_M = U$.

Sea $x \in U$, entonces existen $x \in W \subseteq U$ y $t' \in \mathfrak{I}(W)$ tales que $\beta(t') = s\mid_W \in \mathfrak{G}(U)$. Entonces la imagen de $q = t\mid_{W\cap V_M} - t'\mid_{W\cap V_M}$ en $\mathfrak{G}(W\cap V_M)$ es 0, por lo que existe $r' \in \mathfrak{F}(W \cap V_M)$ tal que $\alpha(r') = q$. Entonces, ya que $\mathfrak{F}$ es fláccida, existe $r \in \mathfrak{F}(W)$ tal que $r\mid_{W\cap V_M} = r'$.

Sea ahora $t" = t' - \alpha(r)$. Entonces $\beta(t") = s\mid_W$ y $t\mid_{W\cap V_M} = t"\mid_{W\cap V_M}$ y por la propiedad de gavilla de $\mathfrak{I}$ existe $t^* \in W \cup V_M$ tal que $t^*\mid_{V_M} = t$ y $t\mid_{W\cap V_M}$. Pero V_M es maximal, por lo que $W \cup V_M = V_M$ y $x \in V_M$ es decir, $U = V_M$.

Lema 2.11 Si $0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{G} \to 0$ es una sucesión exacta tal que $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{I}$ son fláccidas entonces $\mathfrak{G}$ también lo es.

Demostración: Sean $V \subseteq U \subseteq X$ abiertos. Entonces por **2.10** se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{array}{ccccc}
\underset{u_I}{\mathfrak{I}(U)} & \xrightarrow{\beta} & \underset{u_G}{\mathfrak{G}(U)} & \to & 0 \\
i\downarrow & & g\downarrow & & \\
\underset{v_I}{\mathfrak{I}(V)} & \xrightarrow{\beta} & \underset{v_G}{\mathfrak{G}(V)} & \to & 0 \\
\downarrow & & & & \\
0 & & & &
\end{array}
$$

Sea $v_G \in \mathfrak{G}(V)$. Entonces ya que β es suprayectiva existe $v_I \in \mathfrak{I}(V)$ tal que $v_G = \beta(v_I)$. Además, ya que i es suprayectiva existe $u_I \in \mathfrak{I}(U)$ tal que $i(u_I) =$

v_I. Sea $u_G = \beta(u_I)$. Ya que el diagrama conmuta se tiene que $\beta(i(u_I)) = g(\beta(u_I) = g(u_G) = v_G$ por lo que g es suprayectiva. Por lo tanto $\mathfrak{G}$ es fláccida.

Proposición 2.12 Si $\mathfrak{F}$ es una gavilla fláccida sobre un espacio topológico X entonces $H^i(X, \mathfrak{F}) = 0$ para todo $i > 0$.

Demostración: Podemos encajar a $\mathfrak{F}$ en un objeto inyectivo $\mathfrak{I} \in \mathfrak{Ab}(X)$, que por **2.9** es fláccido, y sea $\mathfrak{G}$ la gavilla cociente. Entonces se tiene la sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{I} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{G} \to 0$$

y tenemos que por **2.11** $\mathfrak{G}$ es fláccida.

Por otro lado, se tiene la sucesión exacta por **2.10**

$$0 \to \mathit{\Gamma}(X, \mathfrak{F}) \to \mathit{\Gamma}(X, \mathfrak{I}) \to \mathit{\Gamma}(X, \mathfrak{G}) \to 0$$

Ya que $\mathfrak{I}$ es inyectivo entonces se tiene que $H^i(X, \mathfrak{I}) = 0$ para todo $i > 0$. Entonces de la sucesión larga de cohomología se tiene que $H^1(X, \mathfrak{F}) = 0$ y, ya que la sucesión se ve de la forma

$$... \to 0 = H^i(X, \mathfrak{I}) \to H^i(X, \mathfrak{G}) \to H^{i+1}(X, \mathfrak{F}) \to \overset{\delta^i}{0} = H^{i+1}(X, \mathfrak{I}) \to ...$$

que $H^i(X, \mathfrak{G}) \cong H^{i+1}(X, \mathfrak{F})$ para todo $i \geq 1$.

Pero $\mathfrak{G}$ también es fláccida por lo que por inducción sobre i se obtiene el resultado.

Tenemos entonces que gavillas fláccidas son acíclicas para el funtor $\Gamma(X, -)$ de secciones globales. Por lo tanto, se pueden usar resoluciones fláccidas para calcular cohomología.

En general, los $\mathcal{O}_X-$módulos inyectivos **no** son grupos abelianos inyectivos. Entonces falta ver que los funtores de cohomología se pueden calcular usando resoluciones inyectivas de estos.

Proposición 2.13 Sea (X, O_X) un espacio anillado. Entonces los funtores derivados del funtor $\Gamma(X, -)$ de $\mathfrak{Mod}(X)$ a $\mathfrak{Ab}$ coinciden con los funtores de cohomología $H^i(X, -)$

Demostración: Tenemos que $\Gamma(X,-)$ es un funtor de $\mathfrak{Mod}(X)$ a $\mathfrak{Ab}$ por lo que los funtores derivados se calculan tomando resoluciones inyectivas en $\mathfrak{Mod}(X)$. Pero por **2.9** tenemos que todo inyectivo es fláccido y por **2.12** todos los fláccidos son acíclicos por lo que por **1.18** estas resoluciones nos dan los funtores de cohomología normales.

Lema 2.14 Sea Y un subconjunto cerrado de X, sea $\mathfrak{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre Y y sea $j : Y \hookrightarrow X$ la inclusión. Entonces $H^i(Y,\mathfrak{F}) = H^i(X, j_*\mathfrak{F})$ donde $j_*\mathfrak{F}$ es la extensión por cero fuera de Y.

Demostración: Si $\mathcal{J}^\bullet$ es una resolución fláccida de $\mathfrak{F}$ en Y entonces $j_*\mathcal{J}^\bullet$ es una resolución fláccida de $j_*\mathfrak{F}$ en X, ya que por definición, si $\mathcal{F}$ es fláccido, $j_*\mathcal{F}$ lo es también. Entonces $\Gamma(Y,\mathcal{J}^i) = \Gamma(X, j_*\mathcal{J}^i)$ para todo i. Por lo tanto, tienen los mismo grupos de cohomología.

El siguiente teorema no se probará, ya que no es necesario para lo siguiente y el contenido de la demostración está afuera del contenido de la tesis. Sin embargo es un teorema importante e interesante que vale la pena citar.

Teorema 2.15 (de Grothendieck) Sea X un espacio topológico noetheriano de dimensión n. Entonces para toda gavilla $\mathfrak{F}$ de grupos abelianos sobre X y para todo $i > n$ se tiene que $H^i(X,\mathfrak{F}) = 0$.

Demostración Hartshorne (1977) (III, 2.7)

3. Cohomología de Esquemas Afines Noetherianos

Una clase de esquemas son los esquemas noetherianos, que son aquellos que son cuasicompactos con una cubierta afín tal que cada abierto de esta es isomorfo al espectro de un anillo noetheriano. Por supuesto, los esquemas más simples de este tipo son los afines y el teorema de Serre (que es el último de este capítulo) describe los grupos de cohomología de estos en gavillas cuasicoherentes.

En general, los anillos noetherianos son 'interesantes' por lo que han sido muy estudiados (así como las estructuras que pueden ser derivadas de estos), por lo que los primeros nueve puntos describirán parte de la maquinaria algebraica asociada no solo a estos, sino a cadenas de contenciones de módulos llamadas *filtraciones.*

Definición 3.1 Sea A un anillo y M un $A-$módulo. Decimos que $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ es una *filtración* de M donde M_i es un submodulo de M para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ y se denota (M_n).

Es *estable* si para todo n suficientemente grande se tiene que $M_n = M_{n+1}$.

Sea $\alpha \subseteq A$ un ideal. Una filtración (M_n) es una $\alpha-$*filtración* si para todo n se tiene que $\alpha M_n \subseteq M_{n+1}$ (y es *estable* si para todo m suficientemente grande $\alpha M_m = M_{m+1}$).

Dos filtraciones, (M_n) y (M'_n) de M tienen *diferencia acotada* si existe un entero n_0 tal que $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ y $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$ para todo $n \geq 0$.

Definición 3.2 Sea A un anillo y $\alpha \subseteq A$ un ideal. Entonces definimos el anillo graduado $A_\alpha = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \alpha^n$. Si M es un $A-$módulo y (M_n) es una $\alpha-$filtración de M entonces definimos $M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ que es un $A_\alpha-$módulo graduado.

Lema 3.3 Si (M_n), (M'_n) son $\alpha-$filtraciones estables entonces tienen diferencia acotada.

Demostración Por ser (M'_n) estable, existe n tal que $M'_n = \alpha^n M$. Ya que $\alpha M_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n tenemos que $\alpha^n M \subseteq M_n$. Además para un n_0 se tiene que $\alpha M_n = M_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$ por lo que $M_{n+n_0} = \alpha^n M_{n_0} \subseteq \alpha^n M$. Análogamente se obtiene la otra contención.

Lema 3.4 Sea A un anillo noetheriano, M un $A-$módulo finitamente generado y (M_n) una $\alpha-$filtración de M. Entonces es equivalente:

i) M^* es un $A_\alpha-$módulo finitamente generado
ii) La filtración (M_n) es una $\alpha-$filtración estable

Demostración Ya que todo M_n es finitamente generado entonces $Q_n = \bigoplus_{r=0}^{n} M_r$ lo es también, pero en general Q_n no es un $A_\alpha-$módulo. Sin embargo, genera a

$$M_n^* = M_0 \bigoplus ... \bigoplus M_n \bigoplus \alpha M_n \bigoplus ... \bigoplus \alpha^r M_n \bigoplus ...$$

y este es un $A_\alpha - \textit{módulo}$ finitamente generado ya que Q_n es un $A-$módulo finitamente generado. Entonces los M_n^* forman una cadena ascendente y $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n^* = M^*$. Ya que A_α es noetheriano entonces M^* es un $A_\alpha-$módulo finitamente generado $\Leftrightarrow$ La cadena se detiene $\Leftrightarrow M^* = M_{n_0}^*$ para algún $n_0 \Leftrightarrow M_{n_0+r} = \alpha^r M_{n_0}$ para todo $r \geq 0 \Leftrightarrow$ la filtración es estable.

Proposición 3.5 (Artin-Rees) Sea A un anillo noetheriano, $\alpha \subseteq A$ un ideal, M un $A-$módulo finitamente generado y (M_n) una $\alpha-$filtración estable. Entonces si M' es un submódulo de M se tiene que $(M' \cap M_n)$ es una $\alpha-$filtración estable de M'.

Demostración Tenemos que $\alpha(M' \cap M_n) = \alpha M' \cap \alpha M_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto $(M' \cap M_n)$ define un A^*-módulo graduado que es submódulo de M^* y este es finitamente generado por ser A^* noetheriano. Entonces aplicando el lema anterior, se tiene que $(M' \cap M_n)$ es una $\alpha-$filtración estable.

Proposición 3.6 (Teorema de Krull) Sea A un anillo noetheriano, sean $M \subseteq N$ A-módulos finitamente generados y α un ideal de A. Entonces las filtraciones $(\alpha^n M)$ y $(\alpha^n N) \cap M$ tienen diferencia acotada.

Demostración: Se sigue inmediatamente de aplicar el lema **3.5** seguido por el lema **3.3**

Definición 3.7 Sea α un ideal de un anillo A y M un A-módulo. Definimos el submódulo $\Gamma_\alpha(M) = \{m \in M \mid \alpha^n m = 0 \text{ para algún } n > 0\}$.

Lema 3.8 Sea A un anillo noetheriano, α un ideal de A y sea I un A-módulo inyectivo. Entonces el submódulo $J = \Gamma_\alpha(I)$ también es un A-módulo inyectivo.

Demostración: Se sabe que para mostrar que J es inyectivo, basta probar que para todo ideal $\beta \subseteq A$ y para todo morfismo $\varphi : \beta \to J$ existe un morfismo $\psi : A \to J$ que extiende a φ.

Sea entonces $\beta \subseteq A$ un ideal de A. Ya que A es noetheriano, entonces β es finitamente generado. También se sabe que todo elemento de J es anulado por un elemento de α por lo que existe un $n > 0$ tal que $\alpha^n \varphi(\beta) = \varphi(\alpha^n \beta) = 0$ Entonces aplicando la proposición anterior a la inclusión $\beta \subseteq A$ tenemos que existe n_0 tal que $\beta \cap \alpha^{n+n_0} \subseteq \alpha^n \beta$. Entonces se tiene que $\varphi(\beta \cap \alpha^{n+n_0}) = 0$ por lo que φ se factoriza a través de $\beta_0 = {}^{\beta}/_{\beta \cap \alpha^{n+n_0}}$. Por lo tanto se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{p} & {}^{A}/_{\alpha^{n+n_o}} = A' & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\beta & \xrightarrow{q} & \beta_0 & \xrightarrow{q'} & J & \overset{i}{\hookrightarrow} & I
\end{array}$$

donde p, q son las proyecciones naturales y $\varphi = q'q$. Ya que I es inyectivo entonces iq' se extiende a un morfismo $\psi' : A' \to I$. Pero la imagen de ψ' es anulada por α^{n+n_0}, por definición de A', por lo que está contenida en J. Entonces el morfismo buscado que extiende a φ es $\psi = p\psi'$.

Lema 3.9 Sea I un módulo inyectivo sobre un anillo noetheriano A. Entonces para todo $f \in A$ el morfismo natural $\varphi_f : I \to I_f$, donde I_f es la localización, es suprayectivo.

Demostración: Para todo $i > 0$ sea b^i el anulador de f^i. Entonces se tiene que $b^1 \subseteq b^2 \subseteq ...$ pero ya que A es noetheriano, existe $r > 0$ tal que $b^r = b^{r+1} = ...$

Ahora sea $x \in I_f$. Entonces, por definición, existe $y \in I$ tal que $x = {}^{\varphi_f(y)}/_{f^n}$ para algún $n \geq 0$. Se define el morfismo de $A-$módulos ϕ_y del ideal $< f^{n+r} >$ de A a I mandando $f^{n+r} \longmapsto f^r y$. Esto es posible ya que el anulador de f^{n+r} es b^ry este anula a $f^r y$. Ya que I es inyectivo, entonces ϕ_y se extiende a un morfismo de $A-$módulos $\psi : A \to I$. Sea$z = \psi(1) = yf^{-n}$. Entonces $f^{n+r} z = f^r y \Rightarrow z = \frac{y}{f^n}$ y se tiene que $\varphi_f(z) = {}^{\varphi_f(y)}/_{f^n} = x$. Por lo tanto, φ_f es suprayectivo.

Definiciòn 3.10 Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X y $s \in \mathfrak{F}(U)$ una sección sobre un abierto $U \subseteq X$.

El *soporte de s,* denotado como $Supp(s)$, se define como $\{p \in U \mid s_p \neq 0\}$ donde s_p es el germen de s en el tallo $\mathfrak{F}_p$. Sea $Z \subseteq X$ un cerrado de X y sea

$\Gamma_Z(X,\mathfrak{F})$ el subgrupo de secciones globales tales que su soporte está contenido en Z, llamamos este subgrupo *el grupo de secciones con soporte en Z*

Se define el *soporte de* $\mathfrak{F}$ como $Supp(\mathfrak{F}) = \{p \in X \mid \mathfrak{F}_p \neq 0\}$.

Proposición 3.11 Sea I un módulo inyectivo sobre un anillo noetheriano A. Entonces la gavilla $\tilde{I}$ sobre $X = Spec(A)$ es fláccida

Demostración: Se aplicará inducción noetheriana sobre el conjunto $Y = Supp(\tilde{I})$.

Si $Y = \{p\}$ es un solo punto entonces $\tilde{I}$ es la gavilla rascacielos que es claramente fláccida.

Para el caso general, es suficiente mostrar que para todo $U \subseteq X$ se tiene que $\Gamma(X,\tilde{I}) \to \Gamma(U,\tilde{I})$ es suprayectiva.

Si $Y \cap U = \emptyset$ entonces no hay nada que demostrar. Si $Y \cap U \neq \emptyset$ entonces existe $f \in A$ tal que el abierto $X_f = D(f)$ está contenido en U y $X_f \cap Y \neq \emptyset$. Sea $Z = X - X_f$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(X,\tilde{I}) & \to & \Gamma(U,\tilde{I}) & \to & \Gamma(X_f,\tilde{I}) \\ i\uparrow & & j\uparrow & & \\ \Gamma_Z(X,\tilde{I}) & \to & \Gamma_Z(U,\tilde{I}) & & \end{array}$$

donde Γ_Z son las secciones con soporte en Z e i, j son inclusiones.

Sea $s \in \Gamma(U,\tilde{I})$ una sección y sea $s' \in \Gamma(X_f,\tilde{I})$ su imagen. Sin embargo, $\Gamma(X_f,\tilde{I}) = I_f$ por lo que, por 3.9, existe $t \in \Gamma(X,\tilde{I}) = I$ cuya restricción es s'. Sea t' la restricción de t a $\Gamma(U,\tilde{I})$. Entonces $s - t'$ se va a cero en $\Gamma(X_f,\tilde{I})$ por lo que tiene soporte en Z.

Entonces para concluir es suficiente mostrar que $\Gamma_Z(X,\tilde{I}) \to \Gamma_Z(U,\tilde{I})$ es suprayectiva.

Sea $J = \Gamma_Z(X,\tilde{I})$. Si $\mathfrak{a} =< f >$ entonces $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$, por lo que por 3.8 se tiene que J es un $A-$módulo injectivo.

Además, el soporte de $\tilde{J}$ está contenido en $Y \cap Z \subsetneq Y$. Por lo tanto, por hipótesis $\tilde{J}$ es fláccida y ya que $\Gamma(U,\tilde{J}) = \Gamma_Z(U,\tilde{I})$ se concluye que $\Gamma_Z(X,\tilde{I}) \to \Gamma(U,\tilde{I})$ es suprayectiva.

Teorema 3.12 Sea $X = Spec(A)$ el espectro de un anillo noetheriano A. Entonces para toda gavilla cuasicoherente $\mathfrak{F}$ y para todo $i > 0$ se tiene que $H^i(X,\mathfrak{F}) = 0$.

Demostración: Dado $\mathfrak{F}$, sea $M = \Gamma(X,\mathfrak{F})$.Tomamos una resolución inyectiva $0 \to M \to I^\bullet$ de M en la categoría de $A-$módulos. Entonces se tiene naturalmente una sucesión exacta de gavillas $0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^{\bullet}$. Entonces tenemos que $\mathfrak{F} = \tilde{M}$ y, por la proposición anterior, sabemos que todo $\tilde{I}^i$ es fláccida por lo que podemos usar esta sucesión para calcular cohomología.

Aplicando el funtor Γ se recupera la sucesión original $0 \to M \to I^{\bullet}$.

Por lo tanto, $H^0(X, \mathfrak{F}) = M$ y $H^i(X, \mathfrak{F}) = 0$ para todo $i > 0$, como se quería.

Corolario 3.13 Sea X un esquema noetheriano y $\mathfrak{F}$ una gavilla cuasicoherente sobre X. Entonces $\mathfrak{F}$ puede ser encajada en una gavilla fláccida cuasicoherente $\mathfrak{G}$.

Demostración: Consideremos una cubierta abierta finita $\{U_i = Spec(A_i)\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ de X con las inclusiones $j_i : U_i \hookrightarrow X$ y sea $\widetilde{M_i} = \mathfrak{F}|_{U_i}$ para cada i. Entonces por **2.3** podemos encajar a cada M_i en un A_i-módulo inyectivo I_i.

Consideremos ahora $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \{1,\dots,n\}} j_*(\tilde{I}_i)$. Para toda i, $\tilde{I}_i$ es fláccida y cuasicoherente sobre U_i, por lo que $j_*(\tilde{I}_i)$ es fláccida y cuasicoherente sobre X.

Finalmente $\mathfrak{G}$ es fláccida y cuasicoherente sobre X por ser suma directa de estos.

Ahora se procederá a probar el Teorema de Serre para esquemas afines noetherianos. Sin embargo se necesitan un par de lemas primero, el segundo es un criterio muy útil para caracterizar si un esquema noetheriano es afín.

Lema 3.14 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema e $Y = Spec(R)$ un esquema afín. Entonces el morfismo natural

$$Hom(X, Y) \longleftrightarrow Hom(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

$$(f, f^{\#}) \leftrightarrow f^{\#}_Y$$

es una biyección, donde $f^{\#}_Y$ es el morfismo de anillos inducido en secciones globales.

Demostración: Gortz (2010). (III, 3.4)

Lema 3.15 (Criterio de afinidad para esquemas noetherianos) Sea X un esquema noetheriano. X es afín si y solo si existe una colección finita $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, O_X)$ tal que X_{f_i} es afín para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $1 \in < f_1, \dots, f_n >$.

Demostración:

$\Rightarrow$Es claro al ser X un esquema afín noetheriano

$\Leftarrow$ Llamemos $A = \Gamma(X, O_X)$. Sea $Y = Spec(A)$. Tenemos que $\{X_{f_i}\}_{i\in\{1,...,n\}}$ es una cubierta abierta afín de X ya que $1 \in < f_1, ..., f_n >$. Notemos que por ser X noetheriano, $\Gamma(X_{f_i}, O_{X_{f_i}}) = A_{f_i}$. Entonces por el lema anterior, existe una biyección natural

$$Hom(X, Y) \leftrightarrow Hom(A, A)$$

y (Como $\{D_{f_i}\}_{i\in\{1,...,n\}}$ es cubierta abierta de Y) entonces el morfismo natural $g \in Hom(X, Y)$ asociado a Id_A es tal que $g(X_{f_i}) = D_{f_i}$.

Consideremos ahora $g_i : X_{f_i} \to D_{f_i}$ la restricción de g.

g_i genera un morfismo de secciones globales, pero ya que $\Gamma(X_{f_i}, O_{X_{f_i}}) = A_{f_i} = \Gamma(D_{f_i}, O_{D_{f_i}})$ este es un isomorfismo. Entonces, por ser X_{f_i} afín, g_i es un isomorfismo de esquemas.

Por último, ya que X esquema y $\{X_{f_i}\}_{i\in\{1,...,n\}}$ es una cubierta afín, se tiene que g es un isomorfismo de esquemas.

Teorema 3.16 (de Serre) Sea X un esquema noetheriano. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. X es afín
2. $H^i(X, \mathfrak{F}) = 0$ para toda $\mathfrak{F}$ cuasicoherente e $i > 0$
3. $H^1(X, \mathfrak{I}) = 0$ para toda gavilla de ideales coherente $\mathfrak{I}$

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$ ya se probó.

$2 \Rightarrow 3$ es trivial ya que una gavilla coherente es cuasicoherente.

Por lo tanto solo falta probar $3 \Rightarrow 1$, para esto se usará el lema anterior.

Primero se encontrará una cubierta afín de X de la forma $\{X_f\}$ con $f \in A = \Gamma(X, O_X)$

Sea $\{P\} \subseteq U \subseteq X$ un punto cerrado contenido en U una vecindad abierta afín y sea $Y = X - U$.

Consideremos ${}^{\mathfrak{I}_{Y\cup\{P\}}}/_{\mathfrak{I}_Y} = K$. Si $Q \in \mathfrak{I}_Y \subset \mathfrak{I}_{Y\cup\{P\}}$ entonces la imagen de Q en K es identicamente 0. Por otro lado, la imagen de P es ${}^{O_P}/_{m_P} \cong \kappa(P)$ por lo que K es la gavilla rascacielos $\kappa(P)$ en P.

Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathfrak{I}_{Y\cup\{P\}} \to \mathfrak{I}_Y \to \kappa(P) \to 0$$

Por lo tanto, por la sucesión de cohomología se tiene lo siguiente también

$$\Gamma(X, \mathfrak{I}_Y) \to \Gamma(X, \kappa(P)) \to H^1(X, \mathfrak{I}_{Y\cup\{P\}}) = 0$$

la última igualdad dada por la hipótesis 3.

Entonces existe $f \in \Gamma(X, \mathfrak{I}_P)$ cuya imagen en $\kappa(P)$ es 1, es decir $f_P \equiv 1(mod\ m_P)$. Entonces tenemos que $P \in X_f \subseteq U$. Además $X_f = U_{\bar{f}}$ donde $\bar{f}$ es la imagen de f en $\Gamma(U, O_U)$ por lo que X_f es afín.

Por lo tanto, todo punto cerrado de X se encuentra en un abierto afín de la forma X_f, $f \in A$. Además, por ser X noetheriano es cuasicompacto por lo que X tiene una cubierta de la forma $\{X_{f_i}\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ con $f_1, ..., f_n \in A$.

Por último, ya que $\{X_{f_i}\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ es una cubierta de X entonces $1 \in < f_1, ..., f_n >$ y, por el lema, se concluye que X es afín.

4. Cohomología de Cech

El teorema de Serre de la sección pasada describe los grupos de cohomología de una clase muy particular de esquemas noetherianos, los afines. Pero quisiéramos calcular los grupos de cohomología de esquemas noetherianos con gavillas cuasicoherentes.

Para esto, se definen los *complejos de Cech* asociados a una gavilla y se prueba finalmente que para estos esquemas, los grupos de cohomología coinciden con los funtores derivados de estos complejos, llamados *grupos de cohomología de Cech.*

Definición 4.1 Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de X y fijemos un buen ordenamiento de I. Para todo conjunto finito de índices $i_0 < i_1 < ... < i_p \in I$ sea $U_{i_0,...,i_p} = \bigcap_{n=0}^{p} U_{i_n}$.

Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla de grupos abelianos. Se define un complejo de grupos abelianos $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ como sigue:

Para todo $p \geq 0$ sea

$$C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) = \prod_{i_0<i_1...<i_p} \mathfrak{F}(U_{i_0,...,i_p})$$

Entonces un elemento $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ es determinado al dar un elemento $\alpha_{i_0,...,i_p} \in U_{i_0,...,i_p}$ para toda $p+1-$ada de índices $i_0, ..., i_p$.

Se define el morfismo cofrontera $d : C^p \to C^{p+1}$ de la siguiente manera

$$(d\alpha)_{i_0,...,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0,...,\hat{\imath}_k,...,i_{p+1}}|_{U_{i_0,...,i_{p+1}}}$$

donde el índice $\hat{\imath}_k$ es omitido.

Ya que $\alpha_{i_0,..,\hat{\imath}_k,...,i_p} \in \mathfrak{F}(U_{i_0,...,\hat{\imath}_k,...,i_{p+1}})$ entonces restringido a $U_{i_0,...,i_{p+1}}$ se obtiene un elemento de $\mathfrak{F}(U_{i_0,..,i_{p+1}})$.

Lema 4.2 Para el morfismo d definido anteriormente se tiene que $d^2 \equiv 0$.

Demostración: Por definición, se tiene que

$$(dd\alpha)_{i_0,...,i_{p+2}} = \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k (d\alpha)_{i_0,...,\hat{\imath}_k,...,i_{p+2}}|_{U_{i_0,...,i_{p+2}}} =$$

$$\sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k(\sum_{l=0,l\neq k}^{p+2}(-1)^l\alpha_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_k,\ldots,\hat{\imath}_l,\ldots,i_{p+2}})|_{U_{i_0,\ldots,i_{p+2}}})$$

Entonces el término $\alpha_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_k,\ldots,\hat{\imath}_l,\ldots,i_{p+2}}$ aparece exactamente dos veces en la suma, suponiendo sin pérdida de generalidad que $k < l$. Sin embargo, una vez aparece con signo $l + k$ (cuando aparece como término de $d\alpha_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_l,\ldots,i_{p+2}}$)y la otra con signo $k + (l - 1)$ (cuando aparece como término de $d\alpha_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_k,\ldots,i_{p+2}}$ por lo que $\alpha_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_k,\ldots,\hat{\imath}_l,\ldots,i_{p+2}}$ se anula.

Por lo tanto se puede concluir que, efectivamente, $C^\bullet(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ es un complejo. El complejo $C^\bullet(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ se llama *el complejo de Cech asociado a $\mathfrak{F}$ y a la familia $\mathcal{U}$.*

Definición 4.3 Sea X un espacio topológico, $\mathfrak{F}$ una gavilla de grupos de X y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Se define el *$p-$ésimo grupo de cohomología de Cech de $\mathcal{F}$ con respecto a $\mathcal{U}$* como

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathfrak{F}) := h^p(C^\bullet(\mathcal{U},\mathfrak{F}))$$

Lema 4.4 Para todo $X,\mathcal{U},\mathfrak{F}$ como en **4.1** se tiene que $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathfrak{F}) \cong \Gamma(X,\mathfrak{F})$

Demostración: Se tiene que $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathfrak{F}) = ker(d : C^0(\mathcal{U},\mathfrak{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathfrak{F}))$. Además $\alpha \in C^0$ está dado por $\{\alpha_i \in \mathfrak{F}(U_i)\}_{i\in I}$.

Entonces para todo $i < j \in I$ se tiene que $(d\alpha)_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$. Entonces $d\alpha = 0 \iff (d\alpha)_{ij} = 0\ \forall i,j \in I \iff$ las restricciones de a_i, a_j a $U_i \cap U_j$ coinciden y esto sucede ya que $\mathfrak{F}$ es gavilla.

Entonces por los axiomas de gavilla tenemos que $ker(d) = \Gamma(X,\mathfrak{F})$

Como se podrá notar, en la definición **4.1** los complejos de Cêch están definidos para los grupos abelianos $\mathfrak{F}(U_{i_0,\ldots,i_p})$, pero también se puede definir para las gavillas asociadas a la inclusión, $i_*(\mathfrak{F}\mid_{U_{i_0,\ldots,i_p}})$, un complejo de Cèch de gavillas como sigue:

Definición 4.5 Se define la versión 'gavillizada' de cohomología de Cech como sigue:

Para todo abierto $V \subseteq X$ sea $i : V \hookrightarrow X$ la inclusión. Dados $X,\mathcal{U},\mathfrak{F}$ como en **4.1** se define el complejo $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ como sigue:

Para todo $p \geq 0$ sea

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) = \prod_{i_0 < ... < i_p} i_*(\mathfrak{F}|_{U_{i_0,...,i_p}})$$

y se define

$$d : \mathcal{C}^p \to \mathcal{C}^{p+1}$$

como en **4.1.**

Notemos además que para todo $p \geq 0$ se tiene que

$$\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F})) = \Gamma(X, \prod_{i_0 < ... < i_p} i_*(\mathfrak{F}|_{U_{i_0,...,i_p}})) = \prod_{i_0 < ... < i_p} \Gamma(X, i_*(\mathfrak{F}|_{U_{i_0 ...,i_p}}))$$

$$= \prod_{i_0 < ... < i_p} \mathfrak{F}(U_{i_0 < ... < i_p}) = C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$$

Lema 4.6 Para toda gavilla de grupos abelianos $\mathfrak{F}$ sobre X el complejo $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ es una resolución de $\mathfrak{F}$, es decir, existe $\varepsilon : \mathfrak{F} \to \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow ...$$

es exacta.

Demostración: Se define $\varepsilon : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ como el producto de los morfismos $\mathfrak{F} \to f_*(\mathfrak{F}|_{U_i})$ para todo $i \in I$. Entonces

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$$

es exacta por los axiomas de gavilla (y claramente ε es inyectivo).

Para probar la exactitud para $p \geq 1$ basta con probar la exactitud en los tallos.

Sea $x \in U_j \subseteq X$, U_j abierto. Para todo $p \geq 1$ se define el morfismo $k : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \to \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ de la siguiente manera:

Dado $\alpha_x \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F})_x$ tenemos que es representado por una sección $\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}))$ de una vecindad $V \subseteq U_j$.

Para toda $p-$ada $i_0 < ... < i_{p-1}$ se define

$$(k\alpha)_{i_0,...,i_{p-1}} = \alpha_{j,i_0,...,i_{p-1}}$$

Este morfismo tiene sentido ya que $V \cap U_{i_0,...,i_{p-1}} = V \cap U_{j,i_0,...,i_{p-1}}$. Tomando el tallo de $k\alpha$ en x se obtiene el morfismo k.

Ahora veamos que $(dk + kd)(\alpha) = \alpha = \alpha - 0$. Con esto tenemos que k es un operador de homotopía y tenemos que $Id_{\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathfrak{F})} \sim 0$ por lo que $h^p(\mathcal{C}^\bullet_x) = 0$ para todo $p \geq 1$.

Efectivamente, tenemos que

$$(kd)(\alpha) = (d\alpha)_{j,i_0,...,i_p} = \alpha - \sum_{k=j}^{p}(-1)^k \alpha_{j,i_0,...,i_p} =$$

$$\alpha - (dk)(\alpha)$$

Lema 4.7 Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta y $\mathfrak{F}$ una gavilla fláccida de grupos abelianos sobre X. Entonces $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ es fláccido para todo $p \geq 0$.

Demostración: Primero notemos que si f es continua, $V \subseteq V' \subseteq Y$ entonces $f_*\mathfrak{F}(V) = \mathfrak{F}(f^{-1}(V)) \subseteq \mathfrak{F}(f^{-1}(V') = f_*\mathfrak{F}(V') \subseteq X$ por la continuidad de f y ya que $\mathfrak{F}$ es fláccida sobre X se tiene que el morfismo $\mathfrak{F}(f^{-1}(V')) \longrightarrow \mathfrak{F}(f^{-1}(V))$ es suprayectivo por lo que $f_*\mathfrak{F}$ es fláccida.

Además, para todo $i_0, ..., i_p \in I$ se tiene que $\mathfrak{F}|_{U_{i_0,...,i_p}}$ es fláccida por ser la gavilla asociada al morfismo $i : U_{i_0,...,i_p} \hookrightarrow X$ (Y aplicando lo anterior).

Por último, notemos que por definición de producto y de fláccido, entonces el producto de gavillas fláccidas es fláccido.

Entonces por definición de $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ se tiene lo que se quería.

Proposición 4.8 Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta y $\mathcal{F}$ una gavilla fláccida de grupos abelianos sobre X; entonces para todo $p > 0$ se tiene que $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathfrak{F}) = 0$.

Demostración: Consideremos la sucesión $0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ como en el lema **4.5**. Por el lema **4.6** tenemos que $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ es fláccido. Entonces por **2.12** se puede usar esta resolución para calcular los grupos de cohomología (usuales) de $\mathfrak{F}$. Pero $\mathfrak{F}$ es fláccida por lo que $H^p(X,\mathfrak{F}) = 0$ para todo $p > 0$. Por otro lado, por definición, el complejo $C^\bullet(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ se usa para calcular los grupos de homología de Cech por lo que estos coinciden con los usuales y se tiene lo que se quería.

Finalmente, se concluye lo que se quería, pero primero se necesita del siguiente lema:

Lema 4.9 Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta; entonces para todo $p \geq 0$ existe un morfismo natural funtorial

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathfrak{F})$$

Demostración: Sea $0 \to \mathfrak{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva de $\mathfrak{F}$ y sea $0 \to \mathfrak{F} \to \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$ como en **4.5**, entonces se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{F} & \stackrel{\varepsilon}{\to} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) & \stackrel{d}{\to} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) & \stackrel{d}{\to} & ... \\ & & \downarrow & & & & & & \\ 0 & \to & \mathfrak{F} & \stackrel{\varepsilon'}{\to} & \mathcal{I}^0 & \stackrel{d'}{\to} & \mathcal{I}^1 & \stackrel{d'}{\to} & ... \end{array}$$

donde $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ es la identidad.

Además, por definición de objeto inyectivo se tiene que existe un morfismo δ_0 tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \stackrel{\varepsilon}{\to} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \\ & \stackrel{\varepsilon'}{\searrow} & \downarrow \\ & & \mathcal{I}^0 \end{array}$$

Entonces el primer cuadrado de la sucesión anterior

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{F} & \to & \mathcal{I}^0 \end{array}$$

conmuta. Entonces se tiene que, inductivamente, existen morfismos $\delta_i = d\delta_{i-1}$ para todo $i > 0$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{F} & \stackrel{\varepsilon}{\to} & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) & \stackrel{d}{\to} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) & \stackrel{d}{\to} & ... \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathfrak{F} & \stackrel{\varepsilon'}{\to} & \mathcal{I}^0 & \stackrel{d'}{\to} & \mathcal{I}^1 & \stackrel{d'}{\to} & ... \end{array}$$

conmuta ya que $\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva. Entonces tomando grupos de cohomología se obtiene lo que se quería.

Lema 4.10 Sea X un esquema separado. Entonces si $U, V \subseteq X$ son abiertos afines se tiene que $U \cap V$ es afín.

Demostración: Si U y V son afines, entonces $U \times V$ también lo es. Tenemos que $U \cap V = \Delta^{-1}(U \times V)$, donde Δ es el morfismo diagonal definido en **0.22**. Ya que X es separado se tiene que Δ es una inmersión cerrada, por lo que $U \cap V$ es un subesquema cerrado de X, entonces por **0.19** se tiene que es afín.

Teorema 4.11 Sea X un esquema noetheriano separado, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta afín de X y sea $\mathfrak{F}$ una gavilla cuasicoherente sobre X. Entonces para todo $p \geq 0$ los morfismos naturales del lema **4.9** son isomorfismos y

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \cong H^p(X, \mathfrak{F})$$

Demostración: Por **4.4**, se tiene el isomorfismo para $p = 0$.

Para $p > 0$ se tiene por **3.13** que $\mathfrak{F}$ puede ser encajada en una gavilla fláccida cuasicoherente $\mathfrak{G}$. Entonces se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{R} = {}^{\mathfrak{G}}/_{\mathfrak{F}} \longrightarrow 0$$

donde $\mathfrak{R}$ es la gavilla cociente. Entonces por el lema anterior tenemos que para todo $i_0 < ... < i_p$ el abierto $U_{i_0,\ldots,i_p}$ es afín.. Ya que $\mathfrak{F}$ es cuasicoherente, entonces por **2.10** se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \longrightarrow \mathfrak{G}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \longrightarrow \mathfrak{R}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \longrightarrow 0$$

es exacta y, además, tomando los productos, se tiene que la sucesión de complejos de Cech

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{G}) \longrightarrow \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{R}) \longrightarrow 0$$

también lo es. Por lo tanto obtenemos una sucesión larga de grupos de cohomología de Cech y por **4.8** tenemos que la sucesión larga de cohomología de Cech se puede ver de la forma

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{G}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathfrak{R}) \xrightarrow{\check{d}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

y

$$0 \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathfrak{R}) \longrightarrow \check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathfrak{F}) \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

para $p \geq 1$.

Por (2) tenemos que $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathfrak{R}) \cong \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathfrak{F})$ para todo $p \geq 1$

Además, por la sucesión larga de cohomología usual y por **2.12** tenemos que, análogamente

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathfrak{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathfrak{R}) \xrightarrow{d} H^1(X,\mathfrak{F}) \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

y

$$0 \longrightarrow H^p(X,\mathfrak{R}) \longrightarrow H^{p+1}(X,\mathfrak{F}) \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

para $p \geq 1$ y por (4) tenemos que $H^p(X,\mathfrak{R}) \cong H^{p+1}(X,\mathfrak{F})$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^0(\mathcal{U},\mathfrak{R})/Im(\check{d}) & \xrightarrow{\cong} & \check{H}^1(\mathcal{U},\mathfrak{F}) \\ \cong\downarrow & & \downarrow f \\ H^0(X,\mathfrak{R})/Im(d) & \xrightarrow{\cong} & H^1(X,\mathfrak{F}) \end{array}$$

por lo que f es un isomorfismo.

Por último, $\mathfrak{R}$ es cuasicoherente por lo que el resultado se obtiene por inducción sobre p.

Bibliografía

Atiyah, M.F. y **MacDonald, I.G.** (1969) *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading.

Danilov, V.I. (1996) *Cohomology of Algebraic Varieties.* En**: Shafarevich, I.R.** (ed) (1996) *Algebraic Geometry II,* Encyclopaedia of Natural Sciences No. 35, Springer-Verlag, New York. p. 1-126.

Eisenbud, D. (1995) *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics No. 150, Springer Verlag, New York.

Eisenbud, D. y **Harris, J.** (2000) *The Geometry of Schemes.* Graduate Texts in Mathematics No. 197, Springer-Verlag, New York.

Gortz, U. y **Wedhorn, T.** (2010) *Algebraic Geometry 1.* Vieweg + Teubner Verlag, Alemania.

Grillet, P.A. (2007) *Abstract Algebra. Second Edition.* Graduate Texts in Mathematics No. 242. Springer-Verlag, New York.

Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math, J (9).* p. 119-221.

Hartshorne, R. (1977) *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics No. 52, Springer-Verlag, New York.

Hilton, P.J. y **Stammbach U.** (1971) *A Course in Homological Algebra.* Graduate Texts in Mathematics No. 4. Springer-Verlag, New York.

Shafarevich, I.R. (1977) *Basic Algebraic Geometry II.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Stacks Project Authors (2017) *Cohomology of Sheaves.* En: **Stacks Project Authors** (2017) *Stacks Project.* http://stacks.math.columbia.edu. p. 1 570-1 665