



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SIMETRÍAS DE SABOR Y FENOMENOLOGÍA
DE PARTÍCULAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

Mario Ramos Hamud



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:

Mario
Ramos
Hamud
2223843475
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
414057287

2. Datos del tutor:

Dr
Saúl Noé
Ramos
Sánchez

3. Datos de sinodal 1:

Dra
Myriam
Mondragón
Ceballos

4. Datos de sinodal 2:

Dr
Juan Carlos
D'Olivo
Saez

5. Datos del sinodal 3:

Dr
Ángel
Sánchez
Cecilio

6. Datos del sinodal 4:

Dr
Alexis Armando
Aguilar
Arévalo

7. Datos del trabajo escrito:

Simetrías de sabor y fenomenología de partículas
65p
2018

Dedicatoria

Es un honor poder dedicar esta tesis a mis padres, Alicia Hamud Espinosa y Mario Ramos García, quienes siempre han sido una fuente de apoyo incondicional y han forjado en mí los valores de la responsabilidad y la perseverancia. Ellos han sido mi mayor ejemplo a seguir y me han ayudado a cumplir todas las metas que me he propuesto.

Por otro lado, quisiera que este trabajo sea una motivación para mi sobrina Abril Yazmín Luna Ramos, en quien tengo puestas mis esperanzas y quien ha llenado mi vida de alegrías e inocencia.

Agradecimientos

La educación es el desarrollo en el hombre de toda la perfección de que su naturaleza es capaz.

-Immanuel Kant.

En primer lugar, quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Saúl Noé Ramos-Sánchez, por haberme brindado todo su apoyo para la realización de este trabajo. Agradezco sus continuas sesiones de preguntas que me permitieron fortalecer mi conocimiento y por ser un ejemplo de la dedicación y pasión que un profesional, y en particular, un físico debe tener.

A mis padres, por haberme apoyado a lo largo de todos estos años y por alentarme a tratar de superarme. Además, a mi tía Magali, quien fue un gran apoyo durante la licenciatura.

A Evelyn, porque aún conociendo todos mis demonios, siempre estuvo conmigo para apoyarme cuando lo necesitaba.

A todos los profesores con los que tuve el placer de tomar clases durante la carrera, pues ellos me inspiraron fuertemente para tratar de conseguir grandes cosas y de quienes aprendí valiosas lecciones.

A mis amigos de la licenciatura, José Antonio y Eduardo, con quienes compartí grandes experiencias a lo largo de la carrera y quienes fueron un gran apoyo.

Finalmente, esta investigación fue realizada con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN100217 “Altas energías y cuerdas tras el hallazgo del Higgs.” Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida. Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto CONACyT F-252167.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. Aspectos Fundamentales de Teoría de Grupos	5
2.1. Grupos finitos	5
2.2. Representaciones de grupos	6
2.3. Grupos no-abelianos importantes	8
2.4. Grupo S_3	11
2.4.1. Clases de conjugación	12
2.4.2. Caracteres y representaciones irreducibles	12
2.4.3. Construcción de las representaciones	14
2.4.4. Producto tensorial	15
3. Una extensión mínima del modelo estándar	17
3.1. Lagrangiano de Yukawa	17
3.2. Cálculo de las matrices de masa	19
3.2.1. Matriz de masa para los quarks tipo down	19
3.2.2. Matriz de masa para los quarks tipo up	23
3.2.3. Matriz de masa para los leptones	27
4. Fenomenología de partículas	29
4.1. Matrices de mezcla	29
4.2. Reparametrización de la matriz de masa de leptones cargados	30
4.2.1. Matriz biunitaria de los leptones cargados	35
4.3. Reparametrización de la matriz de masa de los neutrinos de Majorana	38
4.3.1. Espinores de Dirac	38
4.3.2. Espinores de Majorana	39

4.3.3. Mecanismo de see-saw	39
4.4. Matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata	43
5. Predicciones teóricas vs resultados experimentales	45
5.1. Oscilaciones de neutrinos	45
5.2. Particle Data Group	46
5.3. Comparación de los resultados teóricos con experimentales	49
6. Conclusiones	53
A. Cálculo de los h.c. de la densidad lagrangiana de Yukawa	55
A.1. Quarks tipo <i>down</i>	55
A.2. Quarks tipo <i>up</i>	58
B. Relación entre raíces y coeficientes de una ecuación cúbica	61

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, el modelo estándar es la teoría más completa y consistente para describir a las partículas elementales. En este modelo, las partículas elementales se agrupan en tres generaciones o *sabores* de quarks y leptones. Las interacciones de norma entre ellos se establecen mediante campos vectoriales conocidos como bosones de norma, condicionados por el grupo de simetrías $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [1]. Mientras este grupo de simetrías sea preservado, todos los bosones de norma están desprovistos de masa debido a que los términos cuadráticos (de masa) están prohibidos por las simetrías y, consecuentemente, las interacciones son de alcance infinito. De igual forma, los quarks y leptones son no masivos en el modelo estándar.

Por otro lado, desde los primeros estudios de física nuclear, es sabido que, especialmente, las interacciones débiles sólo ocurren dentro de los núcleos atómicos, razón por la que resulta indispensable introducir un mecanismo que provea de masa a tres de los cuatro bosones de norma contenidos en la llamada teoría electrodébil, la cual corresponde al sector con simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ del modelo estándar. Asimismo, es necesario explicar por qué tanto quarks como leptones poseen masa. Dado que la ausencia de masa en el modelo estándar tiene su origen en las simetrías de norma, es preciso que la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sea rota, pero de tal forma que las interacciones entre las partículas sigan siendo regidas por la simetría. A este tipo de rompimiento se le conoce como *rompimiento espontáneo*; cuando ocurre, la acción continúa siendo simétrica, pero el vacío de la teoría deja de serlo [2].

En el modelo estándar, el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil ocurre a través del llamado *mecanismo de Higgs*, que requiere introducir un campo escalar (de Lorentz) llamado campo de Higgs, el cual debe ser un singulete de $SU(3)_C$, un doblete de $SU(2)_L$ y debe poseer carga no trivial bajo $U(1)_Y$. Para obtener el rompimiento espontáneo de la simetría es necesario que la dinámica del campo de Higgs sea determinada por un potencial no trivial y acotado por abajo, cuyo mínimo ocurra para valores esperados del campo distintos de cero. Debido a que el campo de Higgs está cargado bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y posee un valor esperado no trivial en el vacío,

esa simetría está rota en el vacío. La consecuencia inmediata del rompimiento de simetría es que combinaciones lineales de los bosones de norma adquieren masas no nulas. Adicionalmente, se introducen los llamados *acoplamientos de Yukawa* que establecen las interacciones entre los fermiones (leptones y quarks) y el campo de Higgs. En el vacío, donde el Higgs tiene un valor de expectación (y nosotros vivimos), estas interacciones proveen de un término de masa para los fermiones. De esta forma, todos los quarks y los leptones cargados adquieren sus masas.

En la versión original de Glashow, Salam y Weinberg del modelo estándar, no existen acoplamientos de Yukawa para los neutrinos, razón por la que estos fueron considerados hasta hace veinte años como partículas no masivas. Sin embargo, el descubrimiento de las masas y mezclas de neutrinos en los experimentos de oscilaciones de neutrinos [3] ha sido una gran motivación para ir en busca de física más allá del modelo estándar. Experimentos recientes sobre las oscilaciones de neutrinos llevan a una nueva era en la determinación precisa de los ángulos de mezcla y diferencias de masas al cuadrado [4–7]. Además, el hecho de que el modelo estándar sea incapaz de aportar explicaciones satisfactorias sobre el origen de la existencia de tres sabores de fermiones, la gran diferencia entre los ángulos de mezcla de quarks y leptones, y la gran cantidad de parámetros libres ha llevado a intentos de teorías más fundamentales en las cuales el modelo estándar sea el límite a bajas energías [8–10]. Esta área de investigación en la que se proponen extensiones del modelo estándar para resolver estas preguntas es frecuentemente llamada *física del sabor*.

En estos modelos se suele tratar de aportar una explicación de las jerarquías entre las masas de las partículas elementales, de la cantidad de violación de CP observada experimentalmente y necesaria para la generación de la asimetría bariónica del universo, y de la estructura de la matriz de mezcla de quarks CKM [11]. Uno de los objetivos particulares de los modelos es predecir los ángulos de mezcla de quarks y leptones de manera precisa. Las simetrías discretas y no Abelianas y algunas veces complementadas con dobletes de Higgs extra, suelen usarse para la física de sabor, i.e., en la construcción de estos modelos para determinar los valores de las masas de quarks y leptones así como sus ángulos de mezcla al suponer simetrías de sabor discretas y no Abelianas de quarks y leptones. Particularmente, la mezcla de leptones ha sido discutida detalladamente utilizando simetrías de sabor discretas y no Abelianas [12]. Las simetrías más comunes en las teorías de sabor son A_4 , Q_6 y S_3 , entre otras [13–16].

Resumen del contenido

Lo anterior ha llevado a proponer en el presente trabajo una extensión mínima del modelo estándar, donde además del campo escalar de Higgs usual, H_S , se añade un campo de Higgs que se comporta también como doblete de la simetría discreta S_3 , H_D . Asimismo, se exige que los campos de materia del modelo estándar se transformen no trivialmente bajo esa simetría, de forma tal que la acción del modelo sea simétrica bajo S_3 . La introducción de la simetría de sabor S_3 no sólo

incrementa el número de campos de Higgs, sino que modifica algunos aspectos de la fenomenología. Con base en esa propuesta, en este trabajo se ha realizado un estudio de la fenomenología del sector de quarks y leptones, haciendo especial énfasis en la física de neutrinos que corresponde al sector menos entendido del modelo estándar.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se ha desarrollado un estudio intensivo y detallado sobre los fundamentos de la teoría de grupos necesarios para poder implementar las simetrías de sabor en el modelo estándar. Además, se discuten brevemente los principales grupos de sabor utilizados en la construcción de modelos de sabor. En particular, para el grupo permutacional de sabor S_3 , se estudian detalladamente las clases de conjugación, la construcción de representaciones, las representaciones irreducibles y su producto tensorial, todo lo cual es de crucial importancia para construir la acción del modelo de partículas elementales propuesto.

En el capítulo 3, utilizando los resultados obtenidos para los productos tensoriales entre las representaciones irreducibles de la simetría de sabor S_3 , se introduce esta al modelo estándar, añadiendo además dos dobletes de Higgs y considerando tres neutrinos derechos de Majorana relacionados con los izquierdos mediante acoplamientos de Yukawa, lo cual da lugar a un *mecanismo de see-saw* [17], responsable de las masas observadas de los neutrinos *izquierdos*. A partir de estas estructuras, se calculan las matrices de masa para el sector de quarks y leptones, mostrando en todo detalle los pasos que permiten llegar a los resultados obtenidos previamente en la literatura [16, 18–22].

En el capítulo 4 se presenta una breve introducción a las matrices de mezcla CKM y PMNS. Además, se le impone al sector leptónico la simetría cíclica Z_2 con la intención de reducir la cantidad de parámetros libres de la teoría. Posteriormente, se reparametriza a la matriz de masa de los leptones cargados, esto en términos de las masas de estos mismos leptones. De esta manera, se consigue un resultado distinto a [16, 18–22] para los elementos de matriz $|\tilde{m}_{4,5}^e|$. Asimismo, se reparametriza la matriz de masa de los neutrinos de Majorana suponiendo válido el mecanismo de see-saw. Finalmente, se calcula la matriz de mezcla de neutrinos PMNS, reproduciendo los resultados de la literatura antes mencionada.

En el capítulo 5 se presenta la reparametrización del Particle Data Group para la matriz PMNS [23, p. 246-249], y con ello, se compara con la obtenida teóricamente en el capítulo anterior. De esta manera, se consigue obtener expresiones para los ángulos de mezcla de neutrinos reactor, atmosférico y solar que permiten obtener un valor para cada una de las masas de los neutrinos y por tanto, para la suma de las masas de los neutrinos. Estos resultados han sido cuidadosamente revisados y difieren con los obtenidos en [16, 18–22], por tanto, representan correcciones importantes para dichas publicaciones que podrían conducir a un artículo a publicar próximamente.

Capítulo 2

Aspectos Fundamentales de Teoría de Grupos

2.1. Grupos finitos

Definición 2.1. Un **grupo** $\{G, \cdot\}$, es un conjunto G dotado con una operación (\cdot) que además cumple las siguientes propiedades. Sean $g_1, g_2 \in G$, entonces:

1. $g_3 = g_1 \cdot g_2 \in G$ (Cerradura)
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ (Asociatividad)
3. Existe un *elemento identidad* e , tal que, para todo $g \in G$, $e \cdot g = g \cdot e = g$
4. Para todo $g \in G$, existe un *elemento inverso* g^{-1} , tal que, $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$

N.B. Por comodidad puede omitirse el símbolo de la operación teniendo en mente que los elementos del grupo se relacionan a través de ella. También, es común referirse al grupo simplemente como G , por lo que a partir de ahora se trabajará con esta convención.

Es conveniente establecer el **orden** de un grupo, esto es, la cantidad de elementos en G , donde obviamente, el orden de un grupo finito es finito. Sean $g_1, g_2 \in G$, si se cumple que $g_1 g_2 = g_2 g_1$, i.e., los elementos del grupo conmutan entre sí, entonces se dice que el grupo es **abeliano**, de lo contrario, si no se satisface dicha propiedad de conmutación el grupo es **no abeliano**. Un ejemplo de grupo finito y abeliano es el grupo cíclico \mathbb{Z}_n , formado por $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, donde $a^n = e$. Geométricamente, se puede ver a su generador como rotaciones discretas de $2\pi/n$. En el presente trabajo se hará un énfasis a los grupos finitos discretos y no-abelianos.

Definición 2.2. Sea H un subconjunto de un grupo G , si H es también un grupo, entonces llamamos a H un **subgrupo** de G .

Es menester mencionar que el *Teorema de Lagrange* establece que el orden del subgrupo H debe ser un divisor del orden de G .

Definición 2.3. Sea N un subgrupo de G , si se cumple que $g^{-1}Ng = N$ para todo $g \in G$, el subgrupo N se llama **subgrupo normal** o un **subgrupo invariante**.

Nótese que el subgrupo H y el grupo normal N del grupo G cumplen que $HN = NH$, lo que es también un subgrupo de G por la definición (2.2). Aquí se está usando la notación:

$$HN := \{h_i n_j : h_i \in H, n_j \in N\},$$

y análogamente para NH .

Definición 2.4. Sea $a^h = e$, donde $a, e \in G$, el número h corresponde al **orden del elemento** a .

N.B. Los elementos $\{e, a, a^2, \dots, a^{h-1}\}$ constituyen el subgrupo finito y abeliano de orden h , Z_h .

Definición 2.5. Sea $g \in G$, los elementos $g^{-1}ag$ se llaman **elementos conjugados** al elemento a . El conjunto de todos los elementos conjugados a un elemento a de G , i.e. $\{g^{-1}ag, \forall g \in G\}$ se llama una **clase de conjugación**.

Teorema 2.6. Todos los elementos de una clase de conjugación tienen el mismo orden [15].

Demostración. A partir de la definición (2.5):

$$(gag^{-1})^h = ga(g^{-1}g)a(g^{-1}g) \cdots ag^{-1} = ga^h g^{-1} = geg^{-1} = e.$$

□

2.2. Representaciones de grupos

Definición 2.7. Una **representación de un grupo**, G , es un mapeo, D , de los elementos de G en un conjunto de operadores lineales con las siguientes propiedades:

1. $D(e) = 1$, donde $e \in G$ es el elemento identidad del grupo y 1 es el operador identidad del espacio en el cual los operadores lineales actúan.
2. $D(a)D(b) = D(ab)$, donde $a, b \in G$. En otras palabras, la ley de multiplicación es mapeada a una multiplicación natural del espacio en el cual los operadores lineales actúan (esta propiedad nos dice que el mapeo D es un homomorfismo) [24].

El espacio vectorial v_j , en el cual actúa la representación, i.e., $D(g)_{ij}v_j$, donde, $(j = 1, \dots, n)$, se llama el **espacio de representación**. La dimensión del espacio sobre la que actúa la representación es conocida como la **dimensión de la representación**. Una representación es **unitaria** si para toda $D(g)$ se cumple que $D(g)^\dagger = D(g)^{-1}$.

Ya que las representaciones viven en espacios lineales, se está en la libertad de escoger la forma de la representación que se crea más conveniente aplicando sobre ésta una transformación lineal. Mientras la transformación sea invertible, la nueva forma de la representación será tan buena como la original. Tal transformación produce una *transformación de similitud* en los operadores lineales. De esta forma siempre se puede construir una nueva representación con la transformación:

$$D(g) \rightarrow D'(g) = S^{-1}D(g)S. \quad (2.1)$$

Por otro lado, se dirá que una representación es **reducible** si tiene un subespacio invariante, i.e., la acción de cualquier $D(g)$ en cualquier vector en el subespacio, aún está en el subespacio. Una representación **irreducible** es aquella no reducible. Finalmente, una representación es **completamente reducible** si $D(g)$ para todo $g \in G$ está escrita como una matriz diagonal por bloques, i.e:

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & D_r(g) \end{pmatrix},$$

donde cada $D_\alpha(g)$ con $\alpha = 1, \dots, r$ es irreducible. Por tanto, una representación reducible es la suma directa de $D_\alpha(g)$,

$$\sum_{\alpha=1}^r \oplus D_\alpha(g).$$

N.B. Se puede demostrar que toda representación reducible de un grupo finito es completamente reducible, más aún, se puede probar también que toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria.

Definición 2.8. *El caracter $\xi_D(g)$ de una representación $D(g)$ es la traza de la matriz de la representación, es decir*

$$\xi_D(g) = \text{tr } D(g) = \sum_{i=1}^{d_\alpha} D(g)_{ii} \quad ,$$

donde d_α es la dimensión de D_α .

Teorema 2.9. *Todos los elementos conjugados al elemento “a” tienen el mismo caracter.*

Demostración. Utilizando la segunda parte de la definición (2.7) y la propiedad de la traza se tiene que

$$\text{tr } D(g^{-1}ag) = \text{tr } (D(g^{-1})D(a)D(g)) = \text{tr } D(g^{-1}) \text{tr } D(g) \text{tr } D(a) = \text{tr } D(a).$$

□

Nótese que el teorema anterior muestra que el caracter es una cantidad constante en la clase de conjugación.

A continuación se hace mención de cuatro relaciones de suma relevancia para determinar el caracter. Primeramente, se tiene la siguiente relación de ortogonalidad para el caracter

$$\sum_{g \in G} \xi_{D_\alpha}(g)^* \xi_{D_\beta}(g) = N_G \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.2)$$

donde N_G representa el orden del grupo G . De aquí, se puede concluir que el caracter de diferentes representaciones irreducibles son ortogonales y diferentes entre si. Así, véase que las clases de conjugación cumplen también una relación de ortogonalidad dada por

$$\sum_{\alpha} \xi_{D_\alpha}(g_i)^* \xi_{D_\alpha}(g_j) = \frac{N_G}{n_i} \delta_{C_i C_j} \quad , \quad (2.3)$$

donde C_i denota la clase de conjugación del elemento g_i , mientras que n_i hace referencia al número de elementos en la clase de conjugación C_i . Por otro lado, supóngase que se tienen m_n representaciones n -dimensionales irreducibles. Claramente el caracter de la clase de conjugación $C_1 = \{e\}$, es $\xi_{D_\alpha}(C_1) = n$ para dicha representación n -dimensional. De esta manera, la relación (2.3) implica

$$\sum_{\alpha} [\xi_{\alpha}(C_1)]^2 = \sum_n m_n n^2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + \dots = N_G \quad , \quad (2.4)$$

donde $m_n \geq 0$. Finalmente, el número de representaciones irreducibles m_n , satisface que

$$\sum_n m_n = \text{el número de clases de conjugación}, \quad (2.5)$$

es decir, el número de representaciones irreducibles es igual al número de clases de conjugación.

2.3. Grupos no-abelianos importantes

A continuación se presentan algunos grupos no-abelianos que son de relevancia en la construcción de distintos modelos en simetrías de sabor y que de hecho, algunos surgen como resultado en la teoría de supercuerdas [15].

- **Grupo A_n**

Este grupo de orden $n!/2$ está conformado por todas las permutaciones pares que hay en el grupo S_n (el grupo de todas las posibles permutaciones de n objetos de un conjunto). Es decir, los elementos de S_n que realizan permutaciones pares a los elementos de conjunto $\{x_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ son los elementos de A_n . Por ejemplo, en la siguiente sección se verá que los elementos del grupo S_3 son:

$$\begin{aligned} e &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) \\ a_1 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3) \\ a_2 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1) \\ a_3 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2) \\ a_4 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2) \\ a_5 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1) \end{aligned}$$

de los cuales $\{e, a_4, a_5\}$ conforman los elementos de A_3 .

- **Grupo Q_n**

También conocido como el grupo diedral binario, Q_n , con n par, consiste de los elementos, $a^m b^k$ con $m = 1, \dots, n$ y $k = 1, 2$, donde los generadores a y b satisfacen que

$$a^n = e, \quad b^2 = a^{n/2}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

El orden de Q_n es igual a $2n$.

- **Grupo $\Sigma(2n^2)$**

Este grupo es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}'_n) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Se denotan los generadores de los grupos \mathbb{Z}_n y \mathbb{Z}'_n como a y a' , respectivamente, y el generador de \mathbb{Z}_2 es escrito como b . Estos cumplen que

$$\begin{aligned} a^n &= a'^n = b^2 = e, \\ aa' &= a'a, \quad bab = a', \end{aligned}$$

donde e es la identidad del grupo. De esta forma, todos los elementos de $\Sigma(2n^2)$ pueden ser escritos como

$$g = b^k a^i a'^j,$$

donde $k = 1, 2$ y $i, j = 1, \dots, n$.

■ **Grupo $\Sigma(3n^3)$**

Este grupo discreto está definido como el álgebra cerrada de 3 simetrías abelianas; $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}'_n, \mathbb{Z}''_n$ y el grupo cíclico \mathbb{Z}_3 . Esto es, si se denotan los generadores de $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}'_n, \mathbb{Z}''_n$ como a, a', a'' y el generador de \mathbb{Z}_3 como b , los elementos del grupo $\Sigma(3n^3)$ pueden ser escritos como

$$g = b^k a^i a'^j a''^l,$$

donde $k = 1, 2$ y $i, j, l = 1, \dots, n$.

Estos generadores cumplen con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} a^n &= a'^n = a''^n = b^3 = e, \\ aa' &= a'a, \quad aa'' = a''a, \quad a'a'' = a''a', \\ b^2ab &= a'', \quad b^2a'b = a, \quad b^2a''b = a'. \end{aligned}$$

■ **Grupo $\Delta(3n^2)$**

Este grupo es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}'_n) \rtimes \mathbb{Z}_3$. Si se considera que los generadores de \mathbb{Z}_n y \mathbb{Z}'_n son a y a' , respectivamente, y el generador de \mathbb{Z}_3 es b , se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} a^n &= a'^n = b^3 = e, \quad a'a = aa', \\ bab^{-1} &= a^{-1}(a'^{-1}), \quad ba'b^{-1} = a. \end{aligned}$$

De esta forma, todos los elementos del grupo $\Delta(3n^2)$ pueden ser escritos como

$$g = b^k a^i a'^j,$$

donde $k = 1, 2$ y $i, j = 1, \dots, n$.

■ **Grupo $\Delta(6n^2)$**

El grupo discreto $\Delta(6n^2)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}'_n) \rtimes S_3$. El orden del grupo es $6n^2$. Si se nombran a los generadores de $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}'_n, a$ y a' respectivamente, mientras que a los generadores de $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}'_2$ (cuyo producto semidirecto es isomorfo a S_3), b y c respectivamente, se debe de satisfacer:

$$\begin{aligned} a^n &= a'^n = b^3 = c^2 = e, \\ aa' &= a'a, \\ bab^{-1} &= a^{-1}a'^{-1}, \quad ba'b^{-1} = a, \\ cac^{-1} &= a'^{-1}, \quad ca'c^{-1} = a^{-1}. \end{aligned}$$

De esta forma, todos los elementos del grupo pueden ser escritos como

$$g = b^k c^l a^i a'^j,$$

donde $k = 1, 2, 3, l = 1, 2$ y $i, j = 1, \dots, n$.

2.4. Grupo S_3

En general, el grupo simétrico de grado n , S_n , puede ser visto como el grupo de todas las posibles permutaciones de n objetos de un conjunto $\{x_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, bajo la acción de un elemento del grupo, de tal forma que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}),$$

donde x_{i_k} es la imagen de x_i bajo la aplicación de un elemento del grupo S_n , el cual debe ser biyectivo y actuar sobre el mismo grupo. Si el conjunto sobre el que actúa este grupo tiene n elementos, entonces S_n tiene $n!$ elementos. Si ahora se toma el caso donde $n = 3$, el grupo estaría conformado de todas las aplicaciones biyectivas del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ sobre si mismo, a saber

$$\begin{aligned} e &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3) \\ a_1 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3) \\ a_2 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_2, x_1) \\ a_3 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2) \\ a_4 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2) \\ a_5 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1), \end{aligned}$$

Además, es fácil notar que la operación de multiplicación de este grupo forma una álgebra cerrada, e.g:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_3, x_1) : a_5 \\ a_2 a_1 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_1, x_2) : a_4 \\ a_4 a_2 &: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_3, x_2) : a_3, \end{aligned}$$

y si ahora se consideran las siguientes aplicaciones

$$\varphi := a_1 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 \\ x_2 \rightarrow x_1 \\ x_3 \rightarrow x_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \psi := a_2 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_3 \\ x_2 \rightarrow x_2 \\ x_3 \rightarrow x_1 \end{cases},$$

es posible construir los siguientes elementos del grupo como:

$$\varphi\psi = a_5 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 \\ x_2 \rightarrow x_3 \\ x_3 \rightarrow x_1 \end{cases}, \quad \psi\varphi = a_4 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_3 \\ x_2 \rightarrow x_1 \\ x_3 \rightarrow x_2 \end{cases}, \quad \psi\varphi\psi = a_3 : \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 \\ x_2 \rightarrow x_3 \\ x_3 \rightarrow x_2 \end{cases},$$

y junto con el elemento identidad, se pueden escribir los seis elementos del grupo como: $\{e, \varphi, \psi, \varphi\psi, \psi\varphi, \psi\varphi\psi\}$. Finalmente, geoméricamente se puede pensar a S_3 como la simetría de un triángulo equilátero, lo cual se puede apreciar en la figura 2.1.

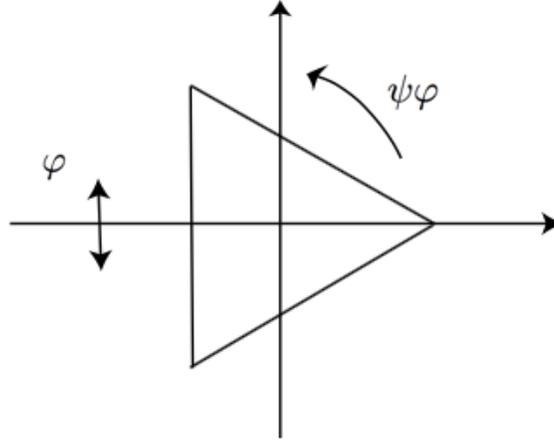


Figura 2.1: Simetría S_3 de un triángulo equilátero. La aplicación φ corresponde a una reflexión y la aplicación $\psi\varphi$ corresponde a una rotación de $2\pi/3$.

2.4.1. Clases de conjugación

Los elementos del grupo pueden ser clasificados en tres clases de conjugación, C_i , donde el subíndice i , se refiere al número de elementos en cada clase de conjugación, a saber

$$C_1 : \{e\}, \quad C_2 : \{\varphi\psi, \psi\varphi\}, \quad C_3 : \{\varphi, \psi, \psi\varphi\psi\}, \quad (2.6)$$

donde sus elementos tienen el siguiente orden:

$$(\varphi\psi)^3 = (\psi\varphi)^3 = e, \quad \varphi^2 = \psi^2 = (\psi\varphi\psi)^2 = e. \quad (2.7)$$

2.4.2. Caracteres y representaciones irreducibles

Primeramente, al hacer uso de la ecuación (2.5), y considerando el hecho de que existen tres clases de conjugación (2.6), se tiene que

$$\sum_n m_n = m_1 + m_2 + \dots = 3, \quad (2.8)$$

i.e., existen tres representaciones irreducibles para dicho grupo. Suponiendo ahora que tales representaciones m_n son n -dimensionales, al utilizar la ecuación (2.4):

$$\sum_\alpha [\xi_\alpha(C_1)]^2 = \sum_n m_n n^2 = m_1 + 4m_2 + 9m_3 + \dots = 6, \quad (2.9)$$

donde se cumple que $m_n \geq 0$.

La ecuación (2.9) tiene únicamente dos soluciones posibles,

$$m_1 = 2 \quad y \quad m_2 = 1,$$

y por otro lado,

$$m_1 = 6 \quad y \quad m_2 = 0,$$

sin embargo, nótese que sólo la primer solución es posible, pues es la única que además satisface la condición impuesta por la ecuación (2.8). Por tanto, las representaciones irreducibles de S_3 están dadas por dos singuletes que se representarán como $\mathbf{1}$ y $\mathbf{1}'$ respectivamente y además, un doblete que será representado como $\mathbf{2}$. Así, se denotarán sus caracteres $\xi_1(g)$, $\xi_{1'}(g)$ y $\xi_2(g)$ respectivamente.

Es menester notar que al haber supuesto representaciones n -dimensionales, m_n , se obtiene fácilmente que $\xi_1(C_1) = \xi_{1'}(C_1) = 1$, mientras que $\xi_2(C_2) = 2$. Además, uno de los singuletes debe ser un singulete trivial, por lo que $\xi_1(C_2) = \xi_1(C_3) = 1$. Por otro lado, para el singulete no trivial se deben cumplir las condiciones expuestas en (2.7), por lo que, $\{\xi_{1'}(C_2)\}^3 = 1$ y además $\{\xi_{1'}(C_3)\}^2 = 1$, lo que lleva a las soluciones

$$\xi_{1'}(C_2) = \begin{cases} 1 \\ e^{2\pi i/3} \\ e^{4\pi i/3} \end{cases} \quad y \quad \xi_{1'}(C_3) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}, \quad (2.10)$$

correspondientes a las raíces n -ésimas de la unidad, y al usar la relación de ortogonalidad (2.2), se sigue que

$$\sum_g \xi_1(g)\xi_{1'}(g) = 1 + 2\xi_{1'}(C_2) + 3\xi_{1'}(C_3) = 0, \quad (2.11)$$

por lo que al usar las soluciones de la ecuación (2.10), se encuentra una solución única para la ecuación (2.11) dada por $\xi_{1'}(C_2) = 1$ y $\xi_{1'}(C_3) = -1$. Ahora bien, usando nuevamente la relación de ortogonalidad (2.2) y además la relación (2.3) se llega al sistema de ecuaciones

$$\sum_g \xi_1(g)\xi_2(g) = 2 + 2\xi_2(C_2) + 3\xi_2(C_3) = 0,$$

$$\sum_{\alpha} \xi_{\alpha}(C_1)^* \xi_{\alpha}(C_2) = 1 + \xi_{1'}(C_2) + 2\xi_2(C_2) = 0,$$

cuya solución es $\xi_2(C_2) = -1$ y $\xi_2(C_3) = 0$.

	h	ξ_1	ξ_1'	ξ_2
C_1	1	1	1	2
C_2	3	1	1	-1
C_3	2	1	-1	0

Cuadro 2.1: Caracteres de las representaciones de S_3 .

Este estudio sobre los caracteres será sumamente importante en la construcción de las representaciones irreducibles de S_3 (sección 2.4.3) y los resultados se resumen en la tabla 2.1. El análisis anterior puede ser extendido análogamente para S_n y en general para otros grupos que cumplan las hipótesis de las relaciones de ortogonalidad.

2.4.3. Construcción de las representaciones

Considerando primero las matrices de la representación $D(g)$ para el doblete, donde se tiene que $D(g)$ son matrices unitarias bidimensionales, de esta manera, usando la definición de representación (definición 2.7) es obvio que $D_2(e)$ es la matriz identidad de dos dimensiones. Ahora bien, de la tabla 2.1 se tiene que $\xi_2(C_3) = 0$ lo que implica que se puede diagonalizar un elemento de la clase de conjugación, en este caso eligiendo φ como ejemplo en C_3 como el elemento diagonal, se puede escribir

$$\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los demás elementos de la clase C_3 y además de la clase C_2 son matrices no diagonales. Si ahora se usa de la ecuación (2.7) que $\psi^2 = e$, entonces se tiene

$$\psi = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \psi \varphi \psi = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sen 2\theta \\ -\sen 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

por lo que los elementos de la clase de conjugación C_2 se ven como

$$\varphi \psi = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad y \quad \psi \varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sen \theta \\ \sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

y como la traza de los elementos de C_2 es -1 , entonces, de calcular la traza de las matrices en (2.12) se sigue que

$$2 \cos \theta = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = -1/2 \quad \therefore \theta = \begin{cases} 2\pi/3 \\ 4\pi/3 \end{cases}.$$

Cualquiera de las dos soluciones es igual de válida y de hecho, se puede probar que son equivalentes. Si se elige $\theta = 4\pi/3$ se obtiene la siguiente representación de S_3 :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \psi\varphi = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \psi\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

2.4.4. Producto tensorial

Para terminar el análisis de las representaciones irreducibles de S_3 se va a estudiar el producto tensorial entre representaciones irreducibles del grupo. Para ello, se debe considerar primero el producto tensorial entre dos dobles, (x_1, x_2) y (y_1, y_2) . Como ejemplo, se puede calcular

$$\begin{aligned} \psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \psi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_1y_1 + 3x_2y_2 + \sqrt{3}(x_1y_2 + x_2y_1)}{4} & \frac{\sqrt{3}(x_1y_1 - x_2y_2) - x_1y_2 + 3x_2y_1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}(x_1y_1 - x_2y_2) - x_2y_1 + 3x_1y_2}{4} & \frac{3x_1y_1 + x_2y_2 - \sqrt{3}(x_1y_2 + x_2y_1)}{4} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo cada componente $x_i y_j$ se transforma bajo ψ como

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &\rightarrow \frac{x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + \sqrt{3}(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{4} \\ x_1 y_2 &\rightarrow \frac{\sqrt{3}(x_1 y_1 - x_2 y_2) - x_1 y_2 + 3x_2 y_1}{4} \\ x_2 y_1 &\rightarrow \frac{\sqrt{3}(x_1 y_1 - x_2 y_2) - x_2 y_1 + 3x_1 y_2}{4} \\ x_2 y_2 &\rightarrow \frac{3x_1 y_1 + x_2 y_2 - \sqrt{3}(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{4}, \end{aligned}$$

donde se sigue que

$$\psi(x_1 y_1 + x_2 y_2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2), \quad \psi(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

así se puede concluir que dichas combinaciones lineales corresponden a los singuletes

$$\mathbf{1} : x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad \mathbf{1}' : x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Ahora bien, al calcular

$$\psi \begin{pmatrix} x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

lo que muestra que dicho objeto transforma como doblete bajo ψ , i.e.,

$$\mathbf{2} : \begin{pmatrix} x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix},$$

por lo que el producto tensorial de dos dobletes resulta en dos singuletes $\mathbf{1}$ (singulete trivial) y $\mathbf{1}'$ y un doblete $\mathbf{2}$.

Capítulo 3

Una extensión mínima del modelo estándar

3.1. Lagrangiano de Yukawa

En la sección (2.4) se estudiaron las representaciones bidimensionales del grupo S_3 y se mostró que el producto tensorial de dos dobletes resulta en dos singuletes $\mathbf{1}$ y $\mathbf{1}'$ y un doblete $\mathbf{2}$, donde es menester notar que el singulete no trivial no es invariante ante S_3 . Con este análisis, se puede proceder ahora a hacer una extensión mínima del modelo estándar, donde además del campo escalar de Higgs usual, H_S , se introduce un doblete de Higgs de S_3 , H_D . Además, es importante mencionar que los campos de quarks y leptones tienen el mismo tipo de interacción de norma, sin embargo, sólo difieren en sus masas y en sus números cuánticos de sabor como se ilustra en la siguiente tabla:

Multipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$	I	II	III
Quarks	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$	u_R	c_R	t_R
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$	d_R	s_R	b_R
Leptones	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$	e_R	μ_R	τ_R
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$

Cuadro 3.1: Multipletes de los campos en el modelo estándar.

donde las generaciones de fermiones se denotan como ψ_i , $i = 1, 2, 3$ y éstas contemplan a los neutrinos derechos considerando que el mecanismo de see-saw es el responsable de la masa de los neutrinos izquierdos como se verá en la sección 4.3.

Para cada uno de estos campos se dará por hecho una representación reducible $\mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$ para permitir la simetría de sabor en el lagrangiano. Se puede resumir lo anterior si se utiliza la siguiente notación:

$$Q^T = (u_L, d_L), \quad u_R, \quad d_R, \quad L^T = (\nu_L, e_L), \quad e_R, \quad \nu_R, \quad H_I.$$

donde los dobletes llevan índices I y J , los cuales corren de 1 a 2, mientras que los singuletes del grupo de sabor se denotan por $Q_3, u_{3R}, d_{3R}, L_3, e_{3R}, \nu_{3R}$ y H_S . De esta manera se puede escribir de la manera más general a las interacciones renormalizables de Yukawa como [16]:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \quad (3.1)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} - Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ &\quad - Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{Y_U} &= -Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_S^* u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_S^* u_{3R} - Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \eta \bar{Q}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ &\quad - Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_I^* u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_I^* u_{3R} + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{Y_E} &= -Y_1^e \bar{L}_I H_S e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} - Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ &\quad - Y_4^e \bar{L}_3 H_I e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_I H_I e_{3R} + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{Y_\nu} &= -Y_1^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} - Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ &\quad - Y_4^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_I^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_I^* \nu_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} H_S &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \quad , \quad H_I = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_3) \end{pmatrix} \quad , \\ \kappa &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, se considerará que después del rompimiento espontáneo de la simetría (SSB, por sus siglas en inglés), los campos de Higgs adquieren un valor de expectación en el vacío dado por

$$\langle |H_S| \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix}, \quad \langle |H_1| \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} \quad y \quad \langle |H_2| \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Debido a que en ésta extensión se tienen tres campos de Higgs, el potencial de Higgs tiene una forma diferente y más complicada [25]. Entonces, conviene suponer que todos los VEV's son reales, además que $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$ y que se satisface la constricción $\langle H_S \rangle^2 + \langle H_1 \rangle^2 + \langle H_2 \rangle^2 \approx (246 \text{ GeV})^2 / 2$ [16].

3.2. Cálculo de las matrices de masa

3.2.1. Matriz de masa para los quarks tipo down

Procediendo ahora a calcular las matrices de masa a partir de las interacciones de Yukawa. Para ello, conviene trabajar por partes la ecuación (3.1), iniciando con

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_D} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{1R} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} - Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\
&\quad - Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{1R} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + \text{h.c.} \\
&= \mathcal{L}_{Y_{D_1}} + \mathcal{L}_{Y_{D_2}} + \mathcal{L}_{Y_{D_3}} + \mathcal{L}_{Y_{D_4}} + \mathcal{L}_{Y_{D_5}} + \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

al desarrollar el primer término de la ecuación (3.2):¹

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_1}} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{1R} \\
&= -Y_1^d (\bar{Q}_1 H_S d_{1R} + \bar{Q}_2 H_S d_{2R}),
\end{aligned}$$

así después del rompimiento espontáneo de la simetría

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_1}} &\xrightarrow{SSB} -Y_1^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} d_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} s_R \right\} \\
&= -Y_1^d (\bar{d}_L \langle H_S \rangle d_R + \bar{s}_L \langle H_S \rangle s_R) \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^d \left\{ (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

donde en la tercer igualdad se ha escrito una representación tridimensional apropiada para poner los índices de sabor a los campos (se hará esto mismo en los demás cálculos) dada por la asociación

$$d \rightarrow \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d \quad , \quad s \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \quad y \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b,$$

¹Se hará el cálculo para la matriz de masa omitiendo el h.c., sin embargo, en el apéndice A se muestran los términos correspondientes al h.c.

y se ha usado el hecho de que

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 0, 1).$$

Así, definiendo

$$m_1 \equiv -2Y_1^d \langle H_S \rangle ,$$

se obtiene finalmente la expresión:

$$\mathcal{L}_{Y_{D_1}} = \frac{1}{2}(\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Procediendo ahora con el segundo término de la ecuación (3.2) se tiene

$$\mathcal{L}_{Y_{D_2}} = -Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R},$$

por lo que después del rompimiento espontáneo de la simetría

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D_2}} &\xrightarrow{SSB} -Y_3^d(\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle \end{pmatrix} b_R \\ &= -Y_3^d \bar{b}_L \langle H_S \rangle b_R \\ &= -Y_3^d(0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix} \\ &= -Y_3^d(0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera, definiendo $m_3 \equiv -2Y_3^d \langle H_S \rangle$, se sigue que

$$\mathcal{L}_{Y_{D_2}} = \frac{1}{2}(0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix} \Rightarrow M_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

la cual corresponde a la matriz de masa para el segundo término en la ecuación (3.2).

Note ahora que se puede desarrollar el tercer término de (3.2) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{D_3}} &= -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\
 &= -Y_2^d [\bar{Q}_1 \kappa_{11} H_1 d_{1R} + \bar{Q}_1 \kappa_{12} H_1 d_{2R} + \bar{Q}_2 \kappa_{21} H_1 d_{1R} + \bar{Q}_2 \kappa_{22} H_1 d_{2R} \\
 &\quad + \bar{Q}_1 \eta_{11} H_2 d_{1R} + \bar{Q}_1 \eta_{12} H_2 d_{2R} + \bar{Q}_2 \eta_{21} H_2 d_{1R} + \bar{Q}_2 \eta_{22} H_2 d_{2R}] \\
 &= -Y_2^d [\bar{Q}_1 H_1 d_{2R} + \bar{Q}_2 H_1 d_{1R} + \bar{Q}_1 H_2 d_{1R} - \bar{Q}_2 H_2 d_{2R}],
 \end{aligned}$$

y después del rompimiento espontáneo de la simetría,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{D_3}} &\xrightarrow{SSB} -Y_2^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} s_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} d_R + (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} d_R - (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} s_R \right\} \\
 &= -Y_2^d [\bar{d}_L \langle H_1 \rangle s_R + \bar{s}_L \langle H_1 \rangle d_R + \bar{d}_L \langle H_2 \rangle d_R - \bar{s}_L \langle H_2 \rangle s_R] \\
 &= -Y_2^d (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Entonces, definiendo $m_2 \equiv -2Y_2^d \langle H_1 \rangle$ y $m_6 \equiv -2Y_2^d \langle H_2 \rangle$ se obtiene

$$\mathcal{L}_{Y_{D_3}} = \frac{1}{2} (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} m_6 & m_2 & 0 \\ m_2 & -m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 \equiv \begin{pmatrix} m_6 & m_2 & 0 \\ m_2 & -m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

la cual corresponde a la matriz de masa del tercer término en la ecuación (3.2).

Por otro lado, desarrollando el cuarto término de la lagrangiana (3.2) se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{D_4}} &= -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} \\
 &= -Y_4^d (\bar{Q}_3 H_1 d_{1R} + \bar{Q}_3 H_2 d_{2R})
 \end{aligned}$$

y después del rompimiento espontáneo de la simetría,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{D_4}} &\xrightarrow{SSB} -Y_4^d \left\{ (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} d_R + (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} s_R \right\} \\
 &= -Y_4^d (\bar{b}_L \langle H_1 \rangle d_R + \bar{b}_L \langle H_2 \rangle s_R) \\
 &= -Y_4^d (0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

así, si se define $m_4 \equiv -2Y_4^d \langle H_1 \rangle$ y $m_7 \equiv -2Y_4^d \langle H_2 \rangle$ se tiene que

$$\mathcal{L}_{Y_{D_4}} = \frac{1}{2} (0, 0, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_7 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Finalmente, para el quinto término

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y_{D_5}} &= -Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} \\ &= -Y_5^d (\bar{Q}_1 H_1 b_R + \bar{Q}_2 H_2 b_R)\end{aligned}$$

por lo que se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y_{D_5}} &\xrightarrow{SSB} -Y_5^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle \end{pmatrix} b_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle \end{pmatrix} b_R \right\} \\ &= -Y_5^d (\bar{d}_L \langle H_1 \rangle b_R + \bar{s}_L \langle H_2 \rangle b_R) \\ &= -Y_5^d (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Así, al definir $m_5 \equiv -2Y_5^d \langle H_1 \rangle$ y $m_8 \equiv -2Y_5^d \langle H_2 \rangle$, se puede escribir entonces,

$$\mathcal{L}_{Y_{D_5}} = \frac{1}{2} (\bar{d}_L, \bar{s}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_5 \\ 0 & 0 & m_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix} \Rightarrow M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_5 \\ 0 & 0 & m_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Por tanto, al sumar todas las matrices de masa correspondientes a las ecuaciones (3.3)-(3.7) se puede definir

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_d &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_6 & m_2 & 0 \\ m_2 & -m_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m_4 & m_7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_5 \\ 0 & 0 & m_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} m_1 + m_6 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_6 & m_8 \\ m_4 & m_7 & m_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y si ahora se usa el hecho de que $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$ se sigue que $m_2 = m_6$, $m_4 = m_7$ y $m_5 = m_8$, se obtiene la matriz de masa para los quarks tipo *down* dada por

$$\boxed{\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_2 & m_5 \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix}}. \quad (3.8)$$

3.2.2. Matriz de masa para los quarks tipo up

Continuando este análisis para los quarks tipo up , es útil proceder dividiendo a su lagrangiano como sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y_U} &= -Y_1^u \bar{Q}_I(i\sigma_2)H_S^*u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3(i\sigma_2)H_S^*u_{3R} - Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ}(i\sigma_2)H_1^*u_{JR} + \eta \bar{Q}_I \eta_{IJ}(i\sigma_2)H_2^*u_{JR}] \\ &\quad - Y_4^u \bar{Q}_3(i\sigma_2)H_I^*u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_I(i\sigma_2)H_I^*u_{3R} + \text{h.c.} \\ &= \mathcal{L}_{Y_{U_1}} + \mathcal{L}_{Y_{U_2}} + \mathcal{L}_{Y_{U_3}} + \mathcal{L}_{Y_{U_4}} + \mathcal{L}_{Y_{U_5}} + \text{h.c.},\end{aligned}\tag{3.9}$$

así desarrollando el primer término de (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y_{U_1}} &= -Y_1^u \bar{Q}_I(i\sigma_2)H_S^*u_{IR} \\ &= -Y_1^u \{ \bar{Q}_1(i\sigma_2)H_S^*u_{1R} + \bar{Q}_2(i\sigma_2)H_S^*u_{2R} \}\end{aligned}$$

así que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y_{U_1}} &\xrightarrow{SSB} -Y_1^u \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle^* \end{pmatrix} u_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle^* \end{pmatrix} c_R \right\} \\ &= -Y_1^u \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle \\ 0 \end{pmatrix} u_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle \\ 0 \end{pmatrix} c_R \right\} \\ &= -Y_1^u (\bar{u}_L \langle H_S \rangle u_R + \bar{c}_L \langle H_S \rangle c_R) \\ &= -Y_1^u \left\{ (\bar{u}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= -Y_1^u \left\{ (\bar{u}_L, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= -Y_1^u \left\{ (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Al definir $m'_1 \equiv -2Y_1^u \langle H_S \rangle$ se puede escribir

$$\mathcal{L}_{Y_{U_1}} = \frac{1}{2} (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} m'_1 & 0 & 0 \\ 0 & m'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M'_1 = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 & 0 \\ 0 & m'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{3.10}$$

la cual es la matriz de masa para el primer término en la ecuación (3.9).

Para el segundo término de la densidad lagrangiana de Yukawa para los quarks tipo up

$$\mathcal{L}_{Y_{U_2}} = -Y_3^u \bar{Q}_3(i\sigma_2) H_S^* u_{3R}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_2}} &\xrightarrow{SSB} -Y_3^u(\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_S \rangle^* \end{pmatrix} t_R \\ &= -Y_3^u(\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle \\ 0 \end{pmatrix} t_R \\ &= -Y_3^u \bar{t}_L \langle H_S \rangle t_R \\ &= -Y_3^u(0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix} \\ &= -Y_3^u(0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y si se define $m'_3 \equiv -2Y_3^u \langle H_S \rangle$, se sigue que

$$\mathcal{L}_{Y_{U_2}} = \frac{1}{2}(0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix} \Rightarrow M'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m'_3 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

que es la matriz de masa para el segundo término en (3.9).

Ahora bien, desarrollando el tercer término de la densidad (3.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_3}} &= -Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ}(i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \eta \bar{Q}_I \eta_{IJ}(i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ &= -Y_2^u [\bar{Q}_1 \kappa_{11}(i\sigma_2) H_1^* u_{1R} + \bar{Q}_1 \kappa_{12}(i\sigma_2) H_1^* u_{2R} + \bar{Q}_2 \kappa_{21}(i\sigma_2) H_1^* u_{1R} + \bar{Q}_2 \kappa_{22}(i\sigma_2) H_1^* u_{2R} \\ &\quad + \eta \bar{Q}_1 \eta_{11}(i\sigma_2) H_2^* u_{1R} + \eta \bar{Q}_1 \eta_{12}(i\sigma_2) H_2^* u_{2R} + \eta \bar{Q}_2 \eta_{21}(i\sigma_2) H_2^* u_{1R} + \eta \bar{Q}_2 \eta_{22}(i\sigma_2) H_2^* u_{2R}] \end{aligned}$$

así, después del rompimiento espontáneo de la simetría

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{U_3}} &\xrightarrow{SSB} -Y_2^u \left\{ \bar{Q}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle^* \end{pmatrix} c_R + \bar{Q}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle^* \end{pmatrix} u_R \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{Q}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle^* \end{pmatrix} u_R - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{Q}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle^* \end{pmatrix} c_R \right\} \\
&= -Y_2^u \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} \langle H_1 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} c_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} \langle H_1 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} u_R + (\bar{u}_L, -\bar{d}_L) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} u_R - (\bar{c}_L, -\bar{s}_L) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} c_R \right\} \\
&= -Y_2^u [\bar{u}_L \langle H_1 \rangle c_R + \bar{c}_L \langle H_1 \rangle u_R + \bar{u}_L \langle H_2 \rangle u_R - \bar{c}_L \langle H_2 \rangle c_R] \\
&= -Y_2^u (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de esta manera, al definir

$$\begin{aligned}
m'_2 &\equiv -2Y_2^u \langle H_1 \rangle, \\
m'_6 &\equiv -2Y_2^u \langle H_2 \rangle,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\mathcal{L}_{Y_{U_3}} = \frac{1}{2} (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} m'_6 & m'_2 & 0 \\ m'_2 & -m'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M'_2 = \begin{pmatrix} m'_6 & m'_2 & 0 \\ m'_2 & -m'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

la cual es la matriz de masa para el tercer término en (3.9).

Por otro lado, para el cuarto término de (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{U_4}} &= -Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_1^* u_{1R} \\
&= -Y_4^u (\bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_1^* u_{1R} + \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_2^* u_{2R}),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{U_4}} &\xrightarrow{SSB} -Y_4^u \left\{ (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle^* \end{pmatrix} u_R + (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle^* \end{pmatrix} c_R \right\} \\
&= -Y_4^u \left\{ (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} \langle H_1 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} u_R + (\bar{t}_L, \bar{b}_L) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} c_R \right\} \\
&= -Y_4^u (\bar{t}_L \langle H_1 \rangle u_R + \bar{t}_L \langle H_2 \rangle c_R) \\
&= -Y_4^u (0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

así al definir

$$\begin{aligned} m'_4 &\equiv -2Y_4^u \langle H_1 \rangle, \\ m'_7 &\equiv -2Y_4^u \langle H_2 \rangle, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\mathcal{L}_{Y_{U_4}} = \frac{1}{2}(0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m'_4 & m'_7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m'_4 & m'_7 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

correspondiente a la matriz de masa del cuarto término en (3.9).

Finalmente, para el quinto término,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_5}} &= -Y_5^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_I^* u_{3R} \\ &= -Y_5^u (\bar{Q}_1 (i\sigma_2) H_1^* t_R + \bar{Q}_2 (i\sigma_2) H_2^* t_R) \end{aligned}$$

por lo que, después del rompimiento espontáneo de la simetría,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_5}} &\xrightarrow{SSB} -Y_5^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_1 \rangle^* \end{pmatrix} t_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_2 \rangle^* \end{pmatrix} t_R \right\} \\ &= -Y_5^d \left\{ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} \langle H_1 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} t_R + (\bar{c}_L, \bar{s}_L) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle \\ 0 \end{pmatrix} t_R \right\} \\ &= -Y_5^u (\bar{u}_L \langle H_1 \rangle t_R + \bar{c}_L \langle H_2 \rangle t_R) \\ &= -Y_5^u (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces, definiendo

$$\begin{aligned} m'_5 &\equiv -2Y_5^u \langle H_1 \rangle, \\ m'_8 &\equiv -2Y_5^u \langle H_2 \rangle, \end{aligned}$$

se obtiene la expresión

$$\mathcal{L}_{Y_{U_5}} = \frac{1}{2}(\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & m'_5 \\ 0 & 0 & m'_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix} \Rightarrow M'_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m'_5 \\ 0 & 0 & m'_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

obteniéndose así la matriz de masa del quinto término en (3.9).

Análogamente al desarrollo para los quarks tipo down, al sumar todas las matrices de masa correspondientes a las ecuaciones (3.10)-(3.14) se puede escribir

$$\mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 & 0 \\ 0 & m'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m'_6 & m'_2 & 0 \\ m'_2 & -m'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m'_4 & m'_7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & m'_5 \\ 0 & 0 & m'_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} m'_1 + m'_6 & m'_2 & m'_5 \\ m'_2 & m'_1 - m'_6 & m'_8 \\ m'_4 & m'_7 & m'_3 \end{pmatrix},$$

y utilizando nuevamente el hecho de que $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$, se sigue que $m'_2 = m'_6$, $m'_4 = m'_7$ y $m'_5 = m'_8$, entonces se puede escribir a la matriz de masa para los quarks tipo *up* como

$$\mathbf{M}_u = \begin{pmatrix} m'_1 + m'_2 & m'_2 & m'_5 \\ m'_2 & m'_1 - m'_2 & m'_5 \\ m'_4 & m'_4 & m'_3 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2.3. Matriz de masa para los leptones

Finalmente, de manera completamente idéntica al desarrollo utilizado para la obtención de la matriz de masa de los quarks tipo *down* y *up*, pero esta vez considerando los coeficientes correspondientes a los leptones cargados y neutrinos, se puede escribir la matriz de masa para leptones cargados como

$$\mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} m_1^e + m_2^e & m_2^e & m_5^e \\ m_2^e & m_1^e - m_2^e & m_5^e \\ m_4^e & m_4^e & m_3^e \end{pmatrix},$$

mientras que para los neutrinos de Dirac

$$\mathbf{M}_\nu^D = \begin{pmatrix} m_1^\nu + m_2^\nu & m_2^\nu & m_5^\nu \\ m_2^\nu & m_1^\nu - m_2^\nu & m_5^\nu \\ m_4^\nu & m_4^\nu & m_3^\nu \end{pmatrix}.$$

donde el superíndice *D* hace referencia a que son términos de masa de Dirac.

Capítulo 4

Fenomenología de partículas

4.1. Matrices de mezcla

Es importante considerar que las matrices de masa obtenidas en la sección anterior para el sector de quarks y leptones pueden ser diagonalizadas a través de transformaciones biunitarias de tal manera que se tiene [19]

$$U_{d(u,e)L}^\dagger \mathbf{M}_{d(u,e)} U_{d(u,e)R} = \text{diag}(m_{d(u,e)}, m_{s(c,\mu)}, m_{b(t,\tau)}), \quad (4.1)$$

donde los subíndices hacen referencia al sector de quarks y leptones cargados, mientras que para los neutrinos [21]

$$U_\nu^T \mathbf{M}_\nu U_\nu = \text{diag}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}), \quad (4.2)$$

donde en todos los casos, las entradas de las matrices diagonales pueden ser complejas, por lo que los observables físicos de las masas corresponden a su valor absoluto.

Por otro lado, para poder estudiar la fenomenología de estas partículas, es conveniente definir las *matrices de mezcla* como [23]

$$V_{CKM} = U_{uL}^\dagger U_{dL} \quad y \quad V_{PMNS} = U_{eL}^\dagger U_{\nu L} K, \quad (4.3)$$

donde K es la matriz diagonal de los factores de Majorana que será explicada más adelante en este capítulo. Estas matrices llevan dichos subíndices en honor a las iniciales de quienes las introdujeron, los cuales son Cabibbo-Kobayashi-Maskawa y Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata respectivamente.

4.2. Reparametrización de la matriz de masa de leptones cargados

En el modelo estándar, el sector de Yukawa cuenta con demasiados parámetros libres, sin embargo, es posible reducir el número de parámetros en el sector leptónico si se introduce una simetría adicional Z_2 , con lo cual algunos acoplamientos de Yukawa no estarán permitidos. Una posible asignación de la simetría Z_2 compatible con los datos experimentales en el sector leptónico [23] está dada en la Tabla 4.1.

-	+
H_S, ν_{3R}	$H_I, L_3, L_I, e_{3R}, e_{IR}, \nu_{IR}$

Cuadro 4.1: Asignaciones de la simetría Z_2 en el sector leptónico.

Nótese ahora que debido a la imposición de la simetría Z_2 , los acoplamientos

$$Y_1^e = Y_3^e = 0 \quad , \quad Y_1^\nu = Y_5^\nu = 0$$

pues los términos en la densidad lagrangiana que contiene dichos acoplamientos cambian de signo. De esta manera, los términos correspondientes en las matrices de masa son nulos, a saber, $m_1^e = m_3^e = 0$ y $m_1^\nu = m_5^\nu = 0$ y por consiguiente, la matriz de masa para los leptones cargados queda como

$$\mathbf{M}_e = m_\tau \begin{pmatrix} \tilde{m}_2^e & \tilde{m}_2^e & \tilde{m}_5^e \\ \tilde{m}_2^e & -\tilde{m}_2^e & \tilde{m}_5^e \\ \tilde{m}_4^e & \tilde{m}_4^e & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

y para los neutrinos de Dirac se ve respectivamente como

$$\mathbf{M}_\nu^D = \begin{pmatrix} m_2^\nu & m_2^\nu & 0 \\ m_2^\nu & -m_2^\nu & 0 \\ m_4^\nu & m_4^\nu & m_3^\nu \end{pmatrix} \quad , \quad (4.4)$$

donde en donde las \tilde{m}_i^e son los cocientes de las m_i^e 's originales entre la masa del leptón cargado más pesado, m_τ , y el superíndice D indica que son neutrinos con término de masa de Dirac¹. Es importante notar que ambas matrices son *a priori* complejas y no-Hermitianas, sin embargo, si se escribe para el caso de los leptones cargados

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger}{m_\tau^2} &= \frac{m_\tau}{m_\tau} \begin{pmatrix} \tilde{m}_2^e & \tilde{m}_2^e & \tilde{m}_5^e \\ \tilde{m}_2^e & -\tilde{m}_2^e & \tilde{m}_5^e \\ \tilde{m}_4^e & \tilde{m}_4^e & 0 \end{pmatrix} \frac{m_\tau}{m_\tau} \begin{pmatrix} \tilde{m}_2^{e*} & \tilde{m}_2^{e*} & \tilde{m}_4^{e*} \\ \tilde{m}_2^{e*} & -\tilde{m}_2^{e*} & \tilde{m}_4^{e*} \\ \tilde{m}_5^{e*} & \tilde{m}_5^{e*} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2|\tilde{m}_2^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2 & |\tilde{m}_5^e|^2 & 2|\tilde{m}_2^e||\tilde{m}_4^e|e^{-i\delta_e} \\ |\tilde{m}_5^e|^2 & 2|\tilde{m}_2^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2 & 0 \\ 2|\tilde{m}_2^e||\tilde{m}_4^e|e^{i\delta_e} & 0 & 2|\tilde{m}_4^e|^2 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (4.5)$$

¹La diferencia entre fermiones de Dirac y de Majorana se explica a detalle en la sección 4.3.

donde se tiene un factor de fase δ_e correspondiente a la suma de los ángulos de los números complejos en su representación polar. A continuación se mostrará que los elementos de matriz $|\tilde{m}_2^e|$, $|\tilde{m}_4^e|$ y $|\tilde{m}_5^e|$ pueden expresarse directamente en términos de las masas de los leptones cargados.

Considerando los invariantes de la matriz hermitiana tridimensional $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger$ se tiene que

$$\text{Tr}(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger) = m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 = m_\tau^2 \{2(|\tilde{m}_4^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2) + 4|\tilde{m}_2^e|^2\}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger) &\equiv \frac{1}{2} \left[\{\text{Tr}(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger)\}^2 - \text{Tr}\{(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger)^2\} \right] \\ &= m_\tau^2(m_e^2 + m_\mu^2) + m_e^2 m_\mu^2 \\ &= 4m_\tau^4 \{|\tilde{m}_2^e|^4 + |\tilde{m}_2^e|^2(|\tilde{m}_4^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2) + |\tilde{m}_4^e|^2|\tilde{m}_5^e|^2\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\det(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger) = m_e^2 m_\mu^2 m_\tau^2 = 4m_\tau^6 |\tilde{m}_2^e|^2 |\tilde{m}_4^e|^2 |\tilde{m}_5^e|^2, \quad (4.8)$$

lo que nos proporciona un sistema de tres ecuaciones teniendo como incógnitas a los parámetros $|\tilde{m}_2^e|^2$, $|\tilde{m}_4^e|^2$ y $|\tilde{m}_5^e|^2$.

Para resolverlo, se puede proceder a hacer una combinación de las ecuaciones (4.6-4.8) de manera que se obtenga una ecuación de tercer grado para $|\tilde{m}_2^e|^2$ dada por

$$(|\tilde{m}_2^e|^2)^3 - \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger)\frac{(|\tilde{m}_2^e|^2)^2}{m_\tau^2} + \frac{1}{4}\chi(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger)\frac{|\tilde{m}_2^e|^2}{m_\tau^4} - \frac{1}{4m_\tau^6}\det(\mathbf{M}_e\mathbf{M}_e^\dagger) = 0, \quad (4.9)$$

y si se hace el cambio de variable $y = \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{m_\tau^2}$ y $z = \frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^4}$, se puede reescribir la ecuación (4.9) en términos de las masas de los leptones cargados como

$$(|\tilde{m}_2^e|^2)^3 - \frac{1}{2}(1+y)(|\tilde{m}_2^e|^2)^2 + \frac{1}{4}(y+z)|\tilde{m}_2^e|^2 - \frac{1}{4}z = 0, \quad (4.10)$$

y haciendo otro cambio de variable $|\tilde{m}_2^e|^2 = \alpha + \frac{1}{6}(1+y)$, podemos reescribir la ecuación (4.10) de manera que se simplifique en una ecuación cúbica para α de la forma $\alpha^3 + P\alpha + Q$, donde P y Q son polinomios con entradas en los reales, a saber

$$\alpha^3 - \frac{1}{12}(1-y+y^2-3z)\alpha - \frac{1}{108}(1-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^2+y^3+\frac{45}{2}z-\frac{9}{2}zy) = 0,$$

lo que nos proporciona tres soluciones para $|\tilde{m}_2^e|^2$, las cuales están dadas por

$$|\tilde{m}_2^e|^2 = \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1+x^4}{1+x^2} + \beta,$$

donde $\tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{m_\tau}$ y β es la solución a la ecuación cúbica

$$\beta^3 - \frac{1}{2}\left(1 - 2y + \frac{6z}{y}\right)\beta^2 - \frac{1}{4}\left(y - y^2 - \frac{4z}{y} + 7z - \frac{12z^2}{y^2}\right)\beta - \frac{yz}{8} - \frac{z^2}{2y^2} + \frac{3z^2}{4y} - \frac{z^3}{y^3} = 0. \quad (4.11)$$

Entonces se elegirá la que sea compatible con la fenomenología [26], es decir, la que se aproxime más a la siguiente solución

$$|\tilde{m}_2^e|^2 \rightarrow \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1 + \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^4}{1 + \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2} \equiv \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1 + x^4}{1 + x^2}, \quad x \equiv \frac{m_e}{m_\mu},$$

por lo que se puede escribir la solución para $|\mu_2^e|$ como

$$|\tilde{m}_2^e|^2 = \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1 + x^4}{1 + x^2} + \beta_{\text{mín}},$$

con $\beta_{\text{mín}}$ la solución mínima en valor absoluto de la ecuación (4.11), la cual puede estimarse a partir de la misma ecuación si se toma el caso límite cuando $m_e = 0$, lo que implica por definición que $z = 0$ y entonces la solución trivial es válida para (4.11). De esta manera, las dos soluciones restantes cumplen con la ecuación

$$\beta^2 - \frac{1}{2}(1 - 2y)\beta - \frac{1}{4}(y - y^2) = 0,$$

las cuales están dadas por

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{4}(1 - 2y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(1 - 4y + 4y^2) + y - y^2} = \frac{1}{4}(1 - 2y) \pm \frac{1}{4},$$

y al multiplicar estas últimas dos soluciones se tiene

$$\beta_1\beta_2 = \left[\frac{1}{4}(1 - 2y) + \frac{1}{4}\right] \left[\frac{1}{4}(1 - 2y) - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{16}(1 - 2y)^2 - \frac{1}{16} = -\frac{y}{4}(1 - y). \quad (4.12)$$

Ahora, note que en la aproximación $m_e \rightarrow 0$ los términos cuadráticos y mayores en z de la ecuación (4.11) desaparecen, sin embargo, se sigue teniendo una ecuación del tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Así, si se considera que $\beta_{\text{mín}}$ es solución de esta ecuación cúbica general, y que β_1 y β_2 son soluciones aproximadas (pues estas son solución del caso extremo cuando $z = 0$), se sabe que el producto de las raíces de la ecuación cúbica general está dado por²

$$\beta_{\text{mín}}\beta_1\beta_2 \approx -\left(\frac{d}{a}\right),$$

²Véase apéndice B para conocer la relación entre los coeficientes y las raíces de una ecuación cúbica.

donde la igualdad no se da debido a que β_1 y β_2 son soluciones aproximadas.

De esta manera se puede estimar la mínima solución debido al hecho de que el producto de las tres soluciones es en este caso

$$\beta_{\text{mín}}\beta_1\beta_2 \approx -\left(-\frac{1}{8}yz\right) \quad , \quad (4.13)$$

por lo que a partir de (4.12) y (4.13) se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_{\text{mín}} &\approx \left(\frac{1}{8}yz\right) \left(\frac{1}{\beta_1\beta_2}\right) = -\left(\frac{1}{8}yz\right) \left(\frac{4}{y(1-y)}\right) = -\frac{1}{2} \frac{z}{(1-y)} = -\frac{m_e^2 m_\mu^2}{2m_\tau^4 \left(1 - \left(\frac{m_e^2 + m_\mu^2}{m_\tau^2}\right)\right)} \\ &\Rightarrow \boxed{\beta_{\text{mín}} \approx -\frac{m_e^2 m_\mu^2}{2m_\tau^2 (m_\tau^2 - (m_e^2 + m_\mu^2))}} \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ahora bien, una vez determinado $|\tilde{m}_2^e|^2$, se pueden obtener los elementos de matriz $|\tilde{m}_4^e|^2$ y $|\tilde{m}_5^e|^2$ usando la ecuación (4.6) se tiene

$$|\tilde{m}_4^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2 = \frac{m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2}{2m_\tau^2} - 2|\tilde{m}_2^e|^2 = \frac{1}{2} + \frac{y}{2} - 2|\tilde{m}_2^e|^2, \quad (4.15)$$

y usando ahora la ecuación (4.8) se llega a que

$$|\tilde{m}_4^e|^2 |\tilde{m}_5^e|^2 = \frac{m_e^2 m_\mu^2}{4m_\tau^4 |\tilde{m}_2^e|^2} = \frac{z}{4|\tilde{m}_2^e|^2}, \quad (4.16)$$

así, de la ecuación (4.15) se puede escribir

$$|\tilde{m}_5^e|^2 - \frac{1}{2} - \frac{y}{2} + 2|\tilde{m}_2^e|^2 + |\tilde{m}_4^e|^2 = 0,$$

y sustituyendo (4.16) en la ecuación anterior se tiene

$$|\tilde{m}_5^e|^2 - \frac{1}{2} - \frac{y}{2} + 2|\tilde{m}_2^e|^2 + \frac{z}{4|\tilde{m}_2^e|^2 |\tilde{m}_5^e|^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (|\tilde{m}_5^e|^2)^2 - \frac{1}{2}(1+y-4|\tilde{m}_2^e|^2)|\tilde{m}_5^e|^2 + \frac{z}{4|\tilde{m}_2^e|^2} = 0,$$

y como las ecuaciones (4.15) y (4.16) son simétricas para $|\tilde{m}_4^e|^2$ y $|\tilde{m}_5^e|^2$, podemos escribir de manera general la ecuación anterior como una ecuación cuadrática para $|\tilde{m}_{4,5}^e|^2$ dada por

$$(|\tilde{m}_{4,5}^e|^2)^2 - \frac{1}{2}(1+y-4|\tilde{m}_2^e|^2)|\tilde{m}_{4,5}^e|^2 + \frac{z}{4|\tilde{m}_2^e|^2} = 0,$$

la cual tiene como solución

$$\begin{aligned}
|\tilde{m}_{4,5}^e|^2 &= \frac{1}{4}(1+y-4|\tilde{m}_2^e|^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(1+y-4|\tilde{m}_2^e|^2)^2 - \frac{z}{|\tilde{m}_2^e|^2}} \\
&= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{m_\tau^2} - 2\tilde{m}_\mu^2\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right) - 4\beta_{\text{mín}}\right] \\
&\pm \frac{1}{4}\sqrt{\left[1 + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{m_\tau^2} - 2\tilde{m}_\mu^2\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right) - 4\beta_{\text{mín}}\right]^2 - \frac{4\frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^4}}{\frac{\tilde{m}_\mu^2}{2}\frac{1+x^4}{1+x^2} + \beta_{\text{mín}}}} \\
&= \frac{1}{4}\left[1 + \tilde{m}_e^2 - \tilde{m}_\mu^2\left(\frac{(1-2x^2+x^4)+x^4+x^2}{1+x^2}\right) - 4\beta_{\text{mín}}\right] \\
&\pm \frac{1}{4}\sqrt{\left[1 + \tilde{m}_e^2 - \tilde{m}_\mu^2\left(\frac{(1-2x^2+x^4)+x^4+x^2}{1+x^2}\right) - 4\beta_{\text{mín}}\right]^2 - \frac{8\tilde{m}_e^2\tilde{m}_\mu^2}{\tilde{m}_\mu^2\left(\frac{1+x^4}{1+x^2}\right) + 2\beta_{\text{mín}}}} \\
&= \frac{1}{4}\left[1 + \tilde{m}_e^2 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - \tilde{m}_\mu^2 x^2\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}\right) - 4\beta_{\text{mín}}\right] \\
&\pm \frac{1}{4}\sqrt{\left[1 + \tilde{m}_e^2 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - \tilde{m}_\mu^2 x^2\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}\right) - 4\beta_{\text{mín}}\right]^2 - \frac{8\tilde{m}_e^2\tilde{m}_\mu^2(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4) + 2\beta_{\text{mín}}(1+x^2)}} \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)} + \frac{m_e^2 - m_\mu^2\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right)}{m_\tau^2} - 4\beta_{\text{mín}}\right] \\
&\pm \frac{1}{4}\sqrt{\left[1 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} + \frac{m_e^2 - m_\mu^2\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right)}{m_\tau^2} - 4\beta_{\text{mín}}\right]^2 - \frac{8\tilde{m}_e^2\tilde{m}_\mu^2(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4) + 2\beta_{\text{mín}}(1+x^2)}} \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - 4\beta_{\text{mín}}\right] \\
&\pm \frac{1}{4}\left[\left(1 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}\right)^2 - 8\beta_{\text{mín}}\left[1 - \tilde{m}_\mu^2\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)}\right]\right]^{1/2} \\
&\quad \left[-\frac{8\tilde{m}_e^2\tilde{m}_\mu^2(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4) + 2\beta_{\text{mín}}(1+x^2)} + 16\beta_{\text{mín}}^2\right]^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

en donde se ha usado que $\tilde{m}_e = \frac{m_e}{m_\tau}$. Debido a la simetría de (4.15) y (4.16) para $|\tilde{m}_4^e|^2$ y $|\tilde{m}_5^e|^2$, al obtener una solución para alguna de ellas a través de (4.17), la otra estará determinada por la otra solución. Este resultado difiere con el encontrado en [16, 19–22, 26] en el término en la raíz.

Es importante resaltar que se ha obtenido una solución compatible con la mezcla de neutrinos [16, 18–22, 26], y además se ha conseguido una reparametrización de $\mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger$ en términos de las masas de leptones cargados, i.e., una expresión exacta y fenomenológica de la misma. Así, una vez que $\mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger$ ha sido reparametrizada en términos de las masas de los leptones cargados, se puede calcular \mathbf{M}_e y U_{eL} también como función de las masas de los leptones cargados. La expresión resultante para \mathbf{M}_e a orden $z = (m_e m_\mu / m_\tau^2)^2$ y $x^2 = (m_e / m_\mu)^2$ está dada por [20]

$$\mathbf{M}_e \approx m_\tau \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

la cual es una matriz no hermitiana y es numéricamente exacta hasta el orden de 10^{-9} en unidades de la masa del leptón τ y tiene como único parámetro libre a la fase de Dirac δ_e [21].

4.2.1. Matriz biunitaria de los leptones cargados

Para poder calcular la matriz de *Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata* (PMNS) o también conocida como matriz de mezcla de neutrinos o matriz de mezcla de leptones, es necesario calcular la matriz biunitaria de los leptones cargados (debido a que en general la matriz de masa de leptones tiene entradas complejas) la cual se encuentra en la expresión (4.3) y está definida por (4.1) como

$$U_{eL}^\dagger \mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger U_{eL} = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad (4.19)$$

y de acuerdo a la ecuación (4.5), la matriz $\mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger &= m_\tau^2 \begin{pmatrix} 2|\tilde{m}_2^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2 & |\tilde{m}_5^e|^2 & 2|\tilde{m}_2^e||\tilde{m}_4^e|e^{-i\delta_e} \\ |\tilde{m}_5^e|^2 & 2|\tilde{m}_2^e|^2 + |\tilde{m}_5^e|^2 & 0 \\ 2|\tilde{m}_2^e||\tilde{m}_4^e|e^{i\delta_e} & 0 & 2|\tilde{m}_4^e|^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & B & C e^{-i\delta_e} \\ B & A & 0 \\ C e^{i\delta_e} & 0 & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta_e} \end{pmatrix} \\ &\equiv P M P^\dagger, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde es menester notar que la matriz M es una matriz simétrica sin fases y con entradas reales, por lo que puede ser diagonalizada a través de una matriz ortogonal, i.e., $M_{diag} = O_{eL}^T M O_{eL}$, por lo que $M = O_{eL} M_{diag} O_{eL}^T$. De esta manera se puede reescribir la ecuación (4.20) como

$$\mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger \equiv P M P^\dagger = (P O_{eL}) M_{diag} (O_{eL}^T P^\dagger),$$

$$\Rightarrow M_{diag} = O_{eL}^T P^\dagger \mathbf{M}_e \mathbf{M}_e^\dagger P O_{eL} \quad , \quad (4.21)$$

y al comparar la expresión (4.21) con (4.19) se puede escribir $U_{eL} = P O_{eL}$, donde $P = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta_e})$.

Por tanto, para obtener explícitamente la matriz biunitaria que diagonaliza a la matriz de masa de leptones cargados, es necesario encontrar una expresión para la matriz ortogonal, O_{eL} . Para ello, sin pérdida de la generalidad, utilizando como ansatz al i -ésimo eigenvector ³:

$$|i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \end{pmatrix} ,$$

entonces, al plantear la ecuación de eigenvalores

$$M|i\rangle = \lambda_i|i\rangle, \quad \text{i.e.,} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \end{pmatrix} ,$$

con λ_i el i -ésimo eigenvalor de M con eigenvector $|i\rangle$, obteniendo así las ecuaciones para cada renglón como

$$\begin{aligned} A + Bx_i + Cy_i &= \lambda_i \\ B + Ax_i = \lambda_i x_i &\Rightarrow x_i = \frac{B}{(\lambda_i - A)} \\ C + Dy_i = \lambda_i y_i &\Rightarrow y_i = \frac{C}{(\lambda_i - B)}, \end{aligned}$$

así que el vector normalizado queda como

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} (\lambda_i - D)(\lambda_i - A) \\ B(\lambda_i - D) \\ C(\lambda_i - A) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\lambda_i - A)^2[(\lambda_i - D)^2 + C^2] + B^2(\lambda_i - B)^2}} \begin{pmatrix} (\lambda_i - D)(\lambda_i - A) \\ B(\lambda_i - D) \\ C(\lambda_i - A) \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (4.22)$$

³No hay ninguna consideración física en particular para restringir el eigenvector a únicamente dos grados de libertad.

por lo que utilizando (4.22), se obtiene de manera particular para cada eigenvector

$$\begin{aligned}
 |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\tilde{m}_e^2 - A)^2[(\tilde{m}_e^2 - D)^2 + C^2] + B^2(\tilde{m}_e^2 - D)^2}} \begin{pmatrix} (\tilde{m}_e^2 - D)(\tilde{m}_e^2 - A) \\ B(\tilde{m}_e^2 - D) \\ C(\tilde{m}_e^2 - A) \end{pmatrix} \\
 |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(\tilde{m}_\mu^2 - A)^2[(\tilde{m}_\mu^2 - D)^2 + C^2] + B^2(\tilde{m}_\mu^2 - D)^2}} \begin{pmatrix} (\tilde{m}_\mu^2 - D)(\tilde{m}_\mu^2 - A) \\ B(\tilde{m}_\mu^2 - D) \\ C(\tilde{m}_\mu^2 - A) \end{pmatrix} \\
 |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(1 - A)^2[(1 - D)^2 + C^2] + B^2(1 - D)^2}} \begin{pmatrix} (1 - D)(1 - A) \\ B(1 - D) \\ C(1 - A) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

donde en cada eigenvector se deben sustituir los valores para A , B , C y D de acuerdo a la ecuación (4.18) dados por:

$$\begin{aligned}
 A &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{1 + x^2 + \tilde{m}_\mu^2}{1 + x^2} \right) \\
 B &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{1 + x^2 - \tilde{m}_\mu^2}{1 + x^2} \right) \\
 C &\approx \frac{\sqrt{2}\tilde{m}_\mu^2}{\sqrt{1 + x^2}} \left(\frac{\tilde{m}_e^2(1 + x^2)}{\sqrt{1 + x^2 - \tilde{m}_\mu^2}} \right) \\
 D &\approx 2 \left(\frac{\tilde{m}_e^2(1 + x^2)^2}{1 + x^2 - \tilde{m}_\mu^2} \right).
 \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz ortogonal se escribe como

$$O_L = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle),$$

y aproximándola al mismo orden que la matriz de masa de leptones cargados (4.18) se puede escribir como

$$O_{eL} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\tilde{m}_\mu^2-2\tilde{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{\sqrt{1+x^2}\tilde{m}_e\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

donde como se mencionó anteriormente, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$, $\tilde{m}_e = m_e/m_\tau$ y además $x = \frac{m_e}{m_\mu}$.

Finalmente, se puede escribir a la matriz biunitaria que diagonaliza a la matriz de masa de leptones cargados como:

$$U_{eL} = PO_{eL} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31} & -O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -e^{i\delta_e} O_{31} & -e^{i\delta_e} O_{32} & e^{i\delta_e} O_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

donde se ha utilizado la expresión (4.23) para la matriz ortogonal.

4.3. Reparametrización de la matriz de masa de los neutrinos de Majorana

En el modelo estándar el sector leptónico cuenta con un tipo de partículas que no cuentan con carga eléctrica y por tanto son llamadas *neutrinos*. A pesar de que sean partículas muy ligeras, es importante mencionar que aún así son masivos. Sin embargo, los neutrinos en el modelo estándar no son masivos, y la única diferencia que tienen con sus antipartículas es a través de la conservación total del número leptónico. A pesar de ello, las oscilaciones de neutrinos han evidenciado experimentalmente que estos son masivos [27]. Además, el hecho de que los neutrinos no cuenten con carga eléctrica da lugar a propiedades con las que no cuentan los fermiones del modelo estándar, i.e., puede que los neutrinos sean sus propias antipartículas sin violar la conservación de la carga eléctrica, y en dado caso, se dirá que es un fermión de *Majorana* y de lo contrario será un fermión de *Dirac*. [28], [29]. Más formalmente se pueden establecer propiedades específicas para cada uno de estos campos espinoriales de Dirac y Majorana como se describe más a detalle en las siguientes secciones.

4.3.1. Espinores de Dirac

Para el caso de tener espinores de Dirac, los neutrinos tendrán dos estados, uno derecho y uno izquierdo, los cuales quedarán representados como ν_R y ν_L respectivamente; además de respectivas antipartículas con estados $\bar{\nu}_R$ y $\bar{\nu}_L$. Todos estos cuatro estados para los neutrinos son independientes y su comportamiento se encuentra en el langrangiano de Dirac escrito como

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

el cual tiene como ecuación de movimiento a la ecuación de Dirac dada por

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \equiv (i\cancel{\partial}_\mu - m)\psi = 0.$$

4.3.2. Espinores de Majorana

Al haber dicho que los neutrinos de Majorana son aquellos que son su propia antipartícula, se tienen únicamente dos estados, ν_L para el neutrino izquierdo y $\bar{\nu}_R$ para el antineutrino derecho. Por tanto, se puede describir a una partícula, y en este caso, un neutrino de Majorana, si el campo espinorial es el mismo que su conjugado de carga, es decir

$$\psi_M \equiv \psi_M^c = C\bar{\psi}^T,$$

donde C es la matriz de conjugación de carga eléctrica, la cual cumple la propiedad

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T.$$

Al suponer que existen dos tipos de neutrinos, derechos e izquierdos, las masas de estos pueden generarse a través del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil [30] a partir de las interacciones de la forma $Y_{ij}^\nu \bar{L}^i (i\sigma_2) H^* \nu_R^j \equiv Y_{ij}^\nu \bar{L}^i \tilde{H} \nu_R^j$. Dado que L^i y \tilde{H} tienen los mismos números cuánticos de carga débil e hipercarga, entonces ν_R debe permanecer neutro ante la fuerza débil y electromagnética. Por tanto, es común referirse a los neutrinos derechos como **neutrinos estériles**.

4.3.3. Mecanismo de see-saw

En el modelo estándar al tener un único doblete de Higgs no es posible construir términos de masa del estilo $\bar{\nu}_L^c \nu_L$, pues no son invariantes de norma. Debido a esto $m_L = 0$, sin embargo, es posible introducir adicionalmente términos como $\bar{\nu}_R^c \nu_R$, el cual al ser un singulete es un término completamente válido pues no rompe la simetría de norma. Así, al considerar las componentes derechas de los neutrinos, se puede agregar el término de masa de Majorana sin violar ninguna de las simetrías de norma del modelo estándar, donde el término de masa de Majorana para los neutrinos derechos está dado por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \nu_R^T C^{-1} m_R \nu_R + \text{h.c.},$$

por lo que al combinar el término de masa de Dirac con el de Majorana se obtiene

$$\mathcal{L}_{\nu(\text{masa})} = \frac{1}{2} \omega_L^T C^{-1} \mathbf{M} \omega_L + \text{h.c.},$$

donde $\omega_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ C\bar{\nu}_R^T \end{pmatrix}$, mientras que la matriz de masas está dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

donde el elemento nulo corresponde al hecho de que $m_L = 0$. Esta matriz puede ser llevada a su forma diagonal teniendo como eigenvalores a

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left(m_R \mp \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2} \right),$$

por lo que es menester notar que si $m_D \ll m_R$ se tiene como soluciones

$$m_n \equiv m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \quad \text{y} \quad m_N \equiv m_2 \approx m_R,$$

por lo que se obtiene un neutrino ligero (n) y uno pesado (N), donde $m_n \ll m_N$ (mecanismo de see-saw) [31], [32], [33]. Además, debido al hecho de contar con tres generaciones ($n_G = 3$) de neutrinos izquierdos ν_{iL} , con $i = 1, \dots, 3$ y en principio, un número arbitrario n_R de neutrinos derechos ν_{jR} , con $j = 1, \dots, n_R$, la matriz (4.25) es compleja y simétrica de dimensión $(n_G + n_R) \times (n_G + n_R)$ la cual puede escribirse como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix}.$$

Suponiendo cierto el mecanismo de see-saw, los neutrinos son entonces partículas de Majorana, y de esta manera las masas de los neutrinos ligeros (izquierdos) se obtienen a través de dicho mecanismo. Por ello, es necesario introducir el término de masa de Majorana para los neutrinos derechos,

$$\mathcal{L}_M = -M_1 \nu_{1R}^T C \nu_{1R} - M_3 \nu_{3R}^T C \nu_{3R}, \quad (4.26)$$

para los cuales, con el fin de introducir la simetría S_3 , se ha considerado que también tienen una representación $\mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$ de S_3 . Es sumamente importante notar que debido a la forma de este lagrangiano para los neutrinos derechos, existe una degeneración en las masas, es decir, dos de las masas de los neutrinos deben ser las mismas.

Ahora, para calcular la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana, es necesario utilizar la ecuación (4.4) para la matriz de masa de los neutrinos de Dirac considerando la simetría Z_2 . Además, del término de masa de Majorana para los neutrinos derechos (4.26) se puede ver que $\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(M_1, M_1, M_3)$, por lo que se puede demostrar que la matriz de los neutrinos ligeros de

Majorana puede expresarse como [17], [31], [34]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_\nu &= \mathbf{M}_\nu^D \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_\nu^D)^T \\
 &= \begin{pmatrix} m_2^\nu & m_2^\nu & 0 \\ m_2^\nu & -m_2^\nu & 0 \\ m_4^\nu & m_4^\nu & m_3^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & M_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2^\nu & m_2^\nu & m_4^\nu \\ m_2^\nu & -m_2^\nu & m_4^\nu \\ 0 & 0 & m_3^\nu \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m_2^\nu & m_2^\nu & 0 \\ m_2^\nu & -m_2^\nu & 0 \\ m_4^\nu & m_4^\nu & m_3^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2^\nu M_1^{-1} & m_2^\nu M_1^{-1} & m_4^\nu M_1^{-1} \\ m_2^\nu M_1^{-1} & -m_2^\nu M_1^{-1} & m_4^\nu M_1^{-1} \\ 0 & 0 & m_3^\nu M_3^{-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2(m_2^\nu)^2 M_1^{-1} & 0 & 2m_2^\nu m_4^\nu M_1^{-1} \\ 0 & 2(m_2^\nu)^2 M_1^{-1} & 0 \\ 2m_2^\nu m_4^\nu M_1^{-1} & 0 & 2(m_4^\nu)^2 M_1^{-1} + (m_3^\nu)^2 M_3^{-1} \end{pmatrix} \\
 &\equiv \begin{pmatrix} 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 & 2(\rho_2^\nu)(\rho_4^\nu) \\ 0 & 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 \\ 2(\rho_2^\nu)(\rho_4^\nu) & 0 & 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 \end{pmatrix}, \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

habiendo definido $\rho_2^\nu \equiv m_2^\nu/M_1^{1/2}$, $\rho_3^\nu \equiv m_2^\nu/M_3^{1/2}$ y $\rho_4^\nu \equiv m_2^\nu/M_1^{1/2}$. Por otro lado, M_1 y M_3 son las masas de los neutrinos derechos que se encuentran en (4.26). Nótese que esta matriz \mathbf{M}_ν es no-hermitiana y en general con entradas complejas, sin embargo es simétrica y puede ser llevada a una forma diagonal a través de la ecuación (4.2) expresada como

$$U_\nu^T \mathbf{M}_\nu U_\nu = \text{diag}(|m_{\nu 1}|e^{i\phi_1}, |m_{\nu 2}|e^{i\phi_2}, |m_{\nu 3}|e^{i\phi_\nu}), \tag{4.28}$$

mediante la matriz unitaria U_ν , y para obtener dicha matriz conviene definir $A = 2(\rho_2^\nu)^2$, $B = 2(\rho_2^\nu)(\rho_4^\nu)$ y $D = 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2$, pues de esta manera se puede escribir

$$\mathbf{M}_\nu^\dagger \mathbf{M}_\nu = \begin{pmatrix} A^* & 0 & B^* \\ 0 & A^* & 0 \\ B^* & 0 & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A & 0 \\ B & 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^2 + |B|^2 & 0 & A^*B + B^*D \\ 0 & |A|^2 & 0 \\ AB^* + BD^* & 0 & |B|^2 + |D|^2 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

donde es importante mencionar que la matriz $\mathbf{M}_\nu^\dagger \mathbf{M}_\nu$ y \mathbf{M}_ν tienen los mismos ceros de textura.

Por otro lado, los elementos de matriz $(\mathbf{M}_\nu^\dagger \mathbf{M}_\nu)_{13}$ y $(\mathbf{M}_\nu^\dagger \mathbf{M}_\nu)_{31}$ en la ecuación (4.29) son complejos conjugados uno del otro y los demás elementos son reales, por lo que la matriz unitaria que diagonaliza a la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana de la ecuación (4.27) en analogía con la matriz biunitaria de leptones cargados está dada por [20]

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{i\delta_\nu} \sin \eta & e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

por lo que se puede escribir a la ecuación (4.2) como

$$\begin{aligned}
U_\nu^T \mathbf{M}_\nu U_\nu &= \begin{pmatrix} \cos \eta & 0 & -e^{i\delta_\nu} \sin \eta \\ \sin \eta & 0 & e^{i\delta_\nu} \cos \eta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A & 0 \\ B & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{i\delta_\nu} \sin \eta & e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \eta & 0 & -e^{i\delta_\nu} \sin \eta \\ \sin \eta & 0 & e^{i\delta_\nu} \cos \eta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos \eta - B e^{i\delta_\nu} \sin \eta & A \sin \eta + B e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & A \\ B \cos \eta - D e^{i\delta_\nu} \sin \eta & B \sin \eta + D e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A \cos^2 \eta - 2B e^{i\delta_\nu} \cos \eta \sin \eta + D e^{2i\delta_\nu} \sin^2 \eta & (A - D e^{i\delta_\nu}) \cos \eta \sin \eta + B(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) & 0 \\ (A - D e^{i\delta_\nu}) \cos \eta \sin \eta + B(\cos^2 \eta - \sin^2 \eta) & A \sin^2 \eta + 2B e^{i\delta_\nu} \cos \eta \sin \eta + D e^{2i\delta_\nu} \cos^2 \eta & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \\
&= \text{diag}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

y de esta manera, a partir de la ecuación (4.31) se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
A &= m_{\nu 1} \cos^2 \eta + m_{\nu 2} \sin^2 \eta = m_{\nu 3} \\
B &= \sin \eta \cos \eta (m_{\nu 2} - m_{\nu 1}) e^{-i\delta_\nu} \\
D &= (m_{\nu 1} \cos^2 \eta + m_{\nu 2} \sin^2 \eta) e^{-2i\delta_\nu},
\end{aligned}$$

y resolviendo estas ecuaciones para $\sin^2 \eta$ y $\cos^2 \eta$, se encuentra que

$$\sin^2 \eta = \frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}} \quad \text{y} \quad \cos^2 \eta = \frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}, \tag{4.32}$$

por lo que se puede reescribir a A , B y D como

$$\begin{aligned}
A &\equiv 2(\rho_2^\nu)^2 = m_{\nu 3} \\
B &\equiv 2(\rho_2^\nu)(\rho_4^\nu) = \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} \\
D &\equiv 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 = (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3}) e^{-2i\delta_\nu}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la reparametrización de la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana (4.27) en términos de las masas complejas de los neutrinos está dada por [16]

$$\mathbf{M}_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu 3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & m_{\nu 3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu 3} - m_{\nu 1})(m_{\nu 2} - m_{\nu 3})} e^{-i\delta_\nu} & 0 & (m_{\nu 1} + m_{\nu 2} + m_{\nu 3}) e^{-2i\delta_\nu} \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

mientras que la matriz unitaria (4.30) se ve como

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Es menester notar que debido a que se exige que U_ν sea unitaria,

$$\begin{aligned}
U_\nu^\dagger U_\nu &= \begin{pmatrix} (\cos \eta)^* & 0 & -e^{-i\delta_\nu} (\sin \eta)^* \\ (\sin \eta)^* & 0 & e^{-i\delta_\nu} (\cos \eta)^* \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{i\delta_\nu} \sin \eta & e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |\cos \eta|^2 + |\sin \eta|^2 & (\cos \eta)^* \sin \eta - (\sin \eta)^* \cos \eta & 0 \\ (\sin \eta)^* \cos \eta - (\cos \eta)^* \sin \eta & |\sin \eta|^2 + |\cos \eta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

esto implica que $\sin \eta$ sea real y además, $|\sin \eta| \leq 1$, lo que impone una condición a las fases ϕ_1 y ϕ_2 dada por

$$|m_{\nu 1}| \sin \phi_1 = |m_{\nu 2}| \sin \phi_2 = |m_{\nu 3}| \sin \phi_\nu, \quad (4.35)$$

la cual cancela las componentes imaginarias. Por tanto, los únicos parámetros libres en las reparametrizaciones son: la fase de Dirac, δ_ν y la fase ϕ_ν , la cual se encuentra implícita en $m_{\nu 1}$, $m_{\nu 2}$ y $m_{\nu 3}$.

4.4. Matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata

Como se vió al inicio de este capítulo, la matriz de mezcla de neutrinos, V_{PMNS} , de la ecuación (4.3) está dada por el producto de matrices, entre ellas, K , donde K es la matriz diagonal de los factores de fase de Majorana, la cual está definida como [20]

$$\text{diag}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3}) = K^\dagger \text{diag}(|m_{\nu 1}|, |m_{\nu 2}|, |m_{\nu 3}|) K^\dagger$$

donde ignorando el término $e^{i\phi_1}$ se puede escribir a K explícitamente como⁴

$$K = \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \quad (4.36)$$

⁴Esto es válido pues el término $e^{i\phi_1}$ es simplemente un factor de fase global.

con $\alpha = 1/2(\phi_1 - \phi_2)$, $\beta = (\phi_1 - \phi_\nu)$ son las fases de Majorana. De esta manera, se puede escribir a la matriz teórica de mezcla de neutrinos teórica, $V_{PMNS}^{\text{teó}}$, de la ecuación (4.3) como

$$\begin{aligned} V_{PMNS}^{\text{teó}} &= U_{eL}^\dagger U_\nu K \\ &= \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31}e^{i\delta_e} & -O_{32}e^{i\delta_e} & O_{33}e^{i\delta_e} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{i\delta_\nu} \sin \eta & e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \end{pmatrix} K \\ &= \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{21} & -O_{31}e^{-i\delta_e} \\ -O_{12} & O_{22} & -O_{32}e^{-i\delta_e} \\ O_{13} & O_{23} & O_{33}e^{-i\delta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{i\delta_\nu} \sin \eta & e^{i\delta_\nu} \cos \eta & 0 \end{pmatrix} K. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz teórica de Pontecorvo-Maki-Nakaga-Sakata está dada por

$$V_{PMNS}^{\text{teó}} = \begin{pmatrix} O_{11} \cos \eta + O_{31}e^{i\delta} \sin \eta & O_{11} \sin \eta - O_{31}e^{i\delta} \cos \eta & -O_{21} \\ -O_{12} \cos \eta + O_{32}e^{i\delta} \sin \eta & -(O_{12} \sin \eta + O_{32}e^{i\delta} \cos \eta) & O_{22} \\ O_{13} \cos \eta - O_{33}e^{i\delta} \sin \eta & O_{13} \sin \eta + O_{33}e^{i\delta} \cos \eta & O_{23} \end{pmatrix} K, \quad (4.37)$$

donde $\delta = \delta_\nu - \delta_e$, y además $\sin \eta$ y $\cos \eta$ están dados de acuerdo a (4.32) como

$$\sin \eta = \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} \quad \text{y} \quad \cos \eta = \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}}, \quad (4.38)$$

mientras que los elementos de matriz O_{ij} están dados por (4.23) como:

$$\begin{aligned} O_{eL} &= \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31} & -O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\tilde{m}_\mu^2-2\tilde{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{\sqrt{1+x^2}\tilde{m}_e\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde es importante mencionar que se esta haciendo la aproximación al mismo orden la matriz de masa de los leptones cargados (4.18).

Capítulo 5

Predicciones teóricas vs resultados experimentales

5.1. Oscilaciones de neutrinos

El incremento dramático en el conocimiento sobre las propiedades de neutrinos se debe a la evidencia observacional de las oscilaciones de neutrinos. Estos cambios de sabor de los neutrinos requiere que los estados de sabor sean distintos de los de los de masa [35]. Los eigenestados de sabor ν_α ($\alpha = e, \mu, \tau$) pueden escribirse como una mezcla de eigenestados de masa ν_i ($i = 1 \dots, 3$) e inversamente, i.e.

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad \text{o bien} \quad |\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^\dagger |\nu_\alpha\rangle.$$

Las probabilidades de oscilaciones de neutrinos dependen, en general, de las energías de los neutrinos, la distancia del detector y la fuente, además de los elementos de U , y para los neutrinos relativistas usados en todos los experimentos hasta ahora, de la diferencia del cuadrado de las masas, $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. En el caso de la mezcla de tres neutrinos, hay únicamente dos masas al cuadrado de neutrinos independientes, dígame $\Delta m_{21}^2 \neq 0$ y $\Delta m_{31}^2 \neq 0$, además se sabe que $\Delta m_{21}^2 > 0$.

N.B. La enumeración de los neutrinos masivos ν_j es arbitraria, sin embargo, resulta conveniente desde el punto de vista de relación con el ángulos de mezcla $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ con los observables, hacer la identificación de $|\Delta m_{21}^2|$ como la diferencia de masas al cuadrado más pequeña de los neutrinos [23].

5.2. Particle Data Group

La parametrización de la matriz de mezcla de neutrinos del Particle Data Group (PDG) [23] está dada por la expresión

$$V_{PMNS}^{\text{PDG}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ y δ_{CP} es la fase de violación de CP en todos los procesos de cambio de sabor en el modelo estándar. Los ángulos θ_{ij} pueden tomarse en el primer cuadrante, es decir, $\theta_{ij} = [0, \pi/2]$ e igualmente $\delta_{CP} = [0, \pi/2]$, por lo que se supone $s_{ij}, c_{ij} \geq 0$. Se puede notar además que los parámetros fundamentales para la parametrización que caracteriza las mezclas de tres neutrinos son: *i*) los tres ángulos de mezcla θ_{12} , θ_{13} y θ_{23} , *ii*) dependiendo de la naturaleza de los neutrinos masivos se tendrán $(\nu_j - 1)$ fases de Dirac (δ), o 1 de Dirac +2 de Majorana ($\delta, \alpha_{21}, \beta_{31}$).

Por consiguiente, al igualar la expresión teórica para la matriz de mezcla de neutrinos (4.37) con la parametrización (5.1) del PDG, se puede establecer una relación de los resultados obtenidos en la sección anterior con los ángulos de mezcla de neutrinos, es decir

$$|V_{PMNS}^{\text{teó}}| = |V_{PMNS}^{\text{PDG}}|,$$

o más específicamente,

$$|V_{ij}^{\text{teó}}| = |V_{ij}^{\text{PDG}}|, \quad \text{donde } i, j = 1, 2, 3. \quad (5.2)$$

De esta manera a partir de (5.2), particularmente de $|V_{13}^{\text{teó}}| = |V_{13}^{\text{PDG}}|$, se obtiene que

$$\boxed{|\sin \theta_{13}| = |O_{21}| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}}}, \quad (5.3)$$

y además, de $|V_{23}^{\text{teó}}| = |V_{23}^{\text{PDG}}|$ se sigue que

$$\boxed{|\sin \theta_{23}| = \left| \frac{O_{22}}{\cos \theta_{13}} \right| = \left| \frac{O_{22}}{\sqrt{1 - O_{21}^2}} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - 2\tilde{m}_\mu^2 + \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 - 4\tilde{m}_\mu^2 + x^2 + 6\tilde{m}_\mu^4 - 4\tilde{m}_\mu^6}}}, \quad (5.4)$$

donde hay que recordar que en ambas igualdades se ha tomado la expresión (4.23) para O_{ij} y que $x = \frac{m_e}{m_\mu}$ y $\tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{m_\tau}$. Por otro lado, es importante notar que para ambas expresiones, los ángulos de mezcla **reactor** y **atmosférico**, θ_{13} y θ_{23} respectivamente, están únicamente determinados por las masas de los leptones cargados.

Ahora bien, de las expresiones $|V_{11}^{\text{teó}}| = |V_{11}^{\text{PDG}}|$ y $|V_{12}^{\text{teó}}| = |V_{12}^{\text{PDG}}|$ se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned} O_{11} \cos \eta + O_{31} e^{i\delta} \sin \eta = c_{12} c_{13} &\Rightarrow O_{11}^2 \cos^2 \eta + O_{31}^2 \sin^2 \eta + 2O_{11} O_{31} \sin \eta \cos \eta \cos \delta = c_{12}^2 c_{13}^2 \\ O_{11} \sin \eta - O_{31} e^{i\delta} \cos \eta = s_{12} c_{13} &\Rightarrow O_{11}^2 \sin^2 \eta + O_{31}^2 \cos^2 \eta - 2O_{11} O_{31} \sin \eta \cos \eta \cos \delta = s_{12}^2 c_{13}^2 \end{aligned}$$

donde sólo se ha usado la parte real de $e^{i\delta}$ pues es la que aporta información física. Así, al tomar el siguiente cociente entre estas últimas ecuaciones se obtiene la tangente cuadrada del ángulo de mezcla **solar** θ_{12} como

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta_{12} &= \frac{s_{12}^2}{c_{12}^2} = \frac{O_{11}^2 \sin^2 \eta + O_{31}^2 \cos^2 \eta - 2O_{11} O_{31} \sin \eta \cos \eta \cos \delta}{O_{11}^2 \cos^2 \eta + O_{31}^2 \sin^2 \eta + 2O_{11} O_{31} \sin \eta \cos \eta \cos \delta} \\ &= \frac{O_{11}^2 \frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}} + O_{31}^2 \frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}} - 2O_{11} O_{31} \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} \cos \delta}{O_{11}^2 \frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}} + O_{31}^2 \frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}} + 2O_{11} O_{31} \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 1}}} \cos \delta} \\ &= \frac{O_{11}^2 (m_{\nu 3} - m_{\nu 1}) + O_{31}^2 (m_{\nu 2} - m_{\nu 3}) - 2O_{11} O_{31} \sqrt{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}} \sqrt{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}} \cos \delta}{O_{11}^2 (m_{\nu 2} - m_{\nu 3}) + O_{31}^2 (m_{\nu 3} - m_{\nu 1}) - 2O_{11} O_{31} \sqrt{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}} \sqrt{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}} \cos \delta} \\ &= \frac{O_{11}^2 + O_{31}^2 \frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}} - 2O_{11} O_{31} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}} \cos \delta}{O_{11}^2 \frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}} + O_{31}^2 + 2O_{11} O_{31} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}} \cos \delta} \\ &= \left(\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}} \right) \frac{O_{11}^2 \frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}} + O_{31}^2 - 2O_{11} O_{31} \sqrt{\frac{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}} \cos \delta}{O_{11}^2 \frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}} + O_{31}^2 + 2O_{11} O_{31} \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}} \cos \delta} \\ &= \alpha^2 \frac{O_{11}^2 \frac{1}{\alpha^2} + O_{31}^2 - 2O_{11} O_{31} \frac{1}{\alpha} \cos \delta}{O_{11}^2 \alpha^2 + O_{31}^2 + 2O_{11} O_{31} \alpha \cos \delta}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

en donde se ha definido $\alpha \equiv \sqrt{\frac{m_{\nu 2} - m_{\nu 3}}{m_{\nu 3} - m_{\nu 1}}}$. Ahora bien, se puede reescribir la ecuación (5.5) como

$$\begin{aligned} &O_{11}^2 \alpha^2 t_{12}^2 \theta_{12} + O_{31}^2 t_{12}^2 + 2O_{31} O_{11} \alpha t_{12}^2 \cos \delta - O_{11}^2 - O_{31}^2 \alpha^2 + 2\alpha O_{31} O_{11} \cos \delta = 0 \\ \Rightarrow &\alpha^2 \left(\frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2 - \frac{O_{31}^2}{O_{31}^2} \right) + 2\alpha \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta (1 + t_{12}^2) + t_{12}^2 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} = 0 \\ \Rightarrow &\alpha^2 \left(1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2 \right) - 2\alpha \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta (1 + t_{12}^2) - \left(t_{12}^2 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} \right) = 0 \\ \Rightarrow &\alpha^2 - \frac{O_{11}}{O_{31}} \frac{2 \cos \delta (1 + t_{12}^2)}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2} \alpha - \frac{t_{12}^2 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2}}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2} = 0, \end{aligned}$$

donde $\tan \theta_{12} = t_{12}$. Por tanto, se puede expresar a α explícitamente de la siguiente manera

$$\alpha = \frac{O_{11}}{O_{31}} \frac{\cos \delta (1 + t_{12}^2)}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2} \pm \sqrt{\frac{O_{11}^2 \cos^2 \delta (1 + t_{12}^2)^2}{O_{31}^2 \left(1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2\right)^2} + \frac{t_{12}^2 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2}}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2}}, \quad (5.6)$$

o bien, notando que se puede hacer las siguientes aproximaciones a orden de 10^{-3}

$$O_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_\mu} \frac{(1 + 2\tilde{m}_\mu^2 + 4x^2 + \tilde{m}_\mu^4 + 2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4 - \tilde{m}_\mu^6 + \tilde{m}_e^2 + 12x^4}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_\mu},$$

y

$$O_{31} = -\frac{\sqrt{1 + 2x^2 - \tilde{m}_\mu^2 - \tilde{m}_e^2} (1 + \tilde{m}_\mu^2 + x^2 - 2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4 - \tilde{m}_\mu^6 + \tilde{m}_e^2 + 12x^4}} \sim 1,$$

al expandir la ecuación (5.6) se puede escribir como

$$\alpha = \pm \tan \theta_{12} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e}{m_\mu} \cos \delta\right),$$

por lo que se puede decir que α es igual a $\tan \theta_{12}$ hasta el orden de 10^{-3} . Expresando explícitamente a α , esto se puede escribir como

$$\begin{aligned} |\tan \theta_{12}|^2 &\approx \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} = \frac{|m_2|(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) - |m_3|(\cos \phi_\nu + i \sin \phi_\nu)}{|m_3|(\cos \phi_\nu + i \sin \phi_\nu) - |m_1|(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)} \\ &= \frac{|m_2| \cos \phi_2 - |m_3| \cos \phi_\nu + i (|m_2| \sin \phi_2 - |m_3| \sin \phi_\nu)}{|m_3| \cos \phi_\nu - |m_1| \cos \phi_1 + i (|m_3| \sin \phi_\nu - |m_1| \sin \phi_1)} \\ &= \frac{(|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu}{-(|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde en la última igualdad se ha usado la ecuación (4.35). Sin embargo, como se vió en la sección 3.2.3, debido a que en la *praxis* los experimentos arrojan únicamente las diferencias de las masas al cuadrado, es conveniente escribir la ecuación (5.7) en función de la diferencia de masas y de m_{ν_3} como

$$\tan^2 \theta_{12} \approx \frac{(\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu}{-(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu}, \quad (5.8)$$

donde hay que recordar que $\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu_i}^2 - m_{\nu_j}^2$. Esta expresión difiere de la encontrada en [16,18–22] por un signo menos en el primer sumando del denominador.

5.3. Comparación de los resultados teóricos con experimentales

En la sección anterior se han obtenido los ángulos de mezcla reactor y atmosférico en términos de las masas de los leptones cargados. Por otro lado, se ha obtenido al ángulo de mezcla solar en términos de las masas de los leptones cargados y de los neutrinos, lo que permite calcular las masas de los neutrinos en términos de los datos experimentales para las masas y los ángulos de mezcla. Sin embargo, como se menciona en la sección 3.2.3, lo que se obtiene experimentalmente son las diferencias de las masas al cuadrado, no las masas *per se*, y de dichas diferencias sólo se ha determinado el signo $\Delta m_{31}^2 > 0$. Esto abre la posibilidad a dos casos completamente válidos para Δm_{31}^2 , a saber

- $\Delta m_{31}^2 > 0$ (Jerarquía normal)
- $\Delta m_{31}^2 < 0$ (Jerarquía invertida)

y como se verá a continuación, en esta extensión se ha obtenido una jerarquía invertida.

Ahora bien, recordemos que para el ángulo reactor se obtuvo en la sección anterior

$$|\sin \theta_{13}| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}},$$

por lo que al tomar los valores para las masas de los leptones cargados de acuerdo a [23], se obtiene

$$x = \frac{m_e}{m_\mu} = 4.8 \times 10^{-3} \quad \text{y} \quad \tilde{m}_\mu = 5.9 \times 10^{-2}.$$

Por tanto, se puede hacer la comparación entre el seno del ángulo de mezcla reactor teórico y el obtenido experimentalmente haciendo un ajuste global [23] a los datos actuales de neutrinos [36], teniendo

$$\boxed{(\sin^2 \theta_{13})^{\text{teó}} = 1.1 \times 10^{-5}}, \quad \text{mientras que} \quad (\sin^2 \theta_{13})^{\text{exp}} = 2.18_{-0.12}^{+0.12} \times 10^{-2}. \quad (5.9)$$

Por otro lado, para el caso del ángulo de mezcla atmosférico se ha obtenido la expresión

$$|\sin \theta_{23}| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - 2\tilde{m}_\mu^2 + \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 - 4\tilde{m}_\mu^2 + x^2 + 6\tilde{m}_\mu^4 - 4\tilde{m}_\mu^6}},$$

de esta manera se llega a que

$$\boxed{(\sin^2 \theta_{23})^{\text{teó}} = .499}, \quad \text{mientras que} \quad (\sin^2 \theta_{23})^{\text{exp}} = .5_{-0.05}^{+0.05}. \quad (5.10)$$

Finalmente, recordando que para la tangente cuadrada del ángulo solar se obtuvo

$$\tan^2 \theta_{12} \approx \frac{(\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu 3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu 3}| \cos \phi_\nu}{-(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu 3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu 3}| \cos \phi_\nu}, \quad (5.11)$$

el valor del ángulo solar del modelo será igual al experimental, pues puede obtenerse a partir de esta ecuación una expresión para las masas de los neutrinos en términos del ángulo de mezcla solar, de las diferencias de las masas al cuadrado y de ϕ_ν , a saber

$$\begin{aligned} |m_{\nu 3}| &\approx \frac{\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 - \Delta m_{13}^2 \tan^4 \theta_{12}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{21}^2 \tan^2 \theta_{12} + \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 + 2\Delta m_{13}^2 \tan^2 \theta_{12} + \Delta m_{13}^2 \tan^4 \theta_{12}}} \\ &= \frac{(1 + r^2 - \tan^4 \theta_{12}) \Delta m_{13}^2}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{21}^2 (1 + \tan^2 \theta_{12}) + \Delta m_{13}^2 (1 + 2 \tan^2 \theta_{12} + \tan^4 \theta_{12})}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{\frac{1}{\sqrt{\Delta m_{13}^2}} 2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{21}^2 (1 + \tan^2 \theta_{12}) + \Delta m_{13}^2 (1 + \tan^2 \theta_{12})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{\frac{1}{\sqrt{\Delta m_{13}^2}} 2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12} \sqrt{1 + \tan^2 \theta_{12}} \sqrt{\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 (1 + \tan^2 \theta_{12})}} \\ &= \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2} (1 + r^2 - \tan^4 \theta_{12})}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12} \sqrt{1 + \tan^2 \theta_{12}} \sqrt{1 + r^2 + \tan^2 \theta_{12}}}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

por lo que se puede escribir a las otras dos masas en términos de esta como

$$|m_{\nu 1}| = \sqrt{|m_{\nu 3}|^2 + \Delta m_{13}^2} \quad (5.13)$$

y

$$|m_{\nu 2}| = \sqrt{|m_{\nu 3}|^2 + \Delta m_{13}^2 (1 + r^2)}, \quad (5.14)$$

donde $r^2 \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{13}^2} = \frac{7.37 \times 10^{-5}}{2.54 \times 10^{-3}} \approx 3 \times 10^{-2}$ (véase cuadro 5.1). Por tanto, se obtiene la **jerarquía invertida**, es decir: $|m_3| < |m_1| < |m_2|$.

Debido al hecho de que $r^2 \ll 1$, las ecuaciones (5.12-5.14) pueden escribirse como

$$|m_{\nu 1}| = |m_{\nu 2}| \approx \sqrt{|m_{\nu 3}|^2 + \Delta m_{13}^2} \quad (5.15)$$

y

$$|m_{\nu 3}| \approx \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} (1 - \tan^2 \theta_{12}). \quad (5.16)$$

5.3. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS TEÓRICOS CON EXPERIMENTALES

51

Parámetros	Mejor ajuste	3σ
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} eV^2]$	7.37	6.93-7.97
$\Delta m_{31(23)}^2 [10^{-3} eV^2]$	2.56 (2.54)	2.45-2.69 (2.42-2.66)
$\sin^2 \theta_{12}$.297	0.250-0.354
$\sin^2 \theta_{23}, \Delta m_{31(32)}^2 > 0$.425	0.381-0.615
$\sin^2 \theta_{23}, \Delta m_{32(31)}^2 < 0$.589	0.384-0.636
$\sin^2 \theta_{13}, \Delta m_{31(32)}^2 > 0$.0215	0.0190-0.0240
$\sin^2 \theta_{13}, \Delta m_{32(31)}^2 < 0$.0216	0.0190-0.0242

Cuadro 5.1: Valores mejor ajustados y rangos permitidos de 3σ de los parámetros de oscilación de tres neutrinos, derivados de un ajuste global de los datos actuales de las oscilaciones de neutrinos [36]. Los valores (valores en paréntesis) corresponden a $|m_1| < |m_2| < |m_3|$ ($|m_3| < |m_1| < |m_2|$).

Por tanto, al sumar las masas de los neutrinos utilizando las expresiones (5.15) y (5.16) se llega a que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 |m_{\nu i}| &\approx 2\sqrt{\frac{\Delta m_{13}^2}{4 \cos^2 \phi_\nu \tan^2 \theta_{12}} (1 - \tan^2 \theta_{12})^2 + \Delta m_{13}^2} + \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} (1 - \tan^2 \theta_{12}) \\
 &= \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} \left(1 + 2\sqrt{1 + 2 \tan^2 \theta_{12} (2 \cos^2 \phi_\nu - 1) + \tan^4 \theta_{12} - \tan^2 \theta_{12}} \right) \\
 &\leq 0.23eV
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde la desigualdad viene dada por la cota cosmológica superior más restrictiva [37]. Además, utilizando los valores experimentales [23] que se encuentran en el cuadro 5.1 se puede escribir a la tangente del ángulo solar como $\tan \theta_{12} = .649980851$, y de esta manera obtener una cota inferior para el único parámetro libre en la ecuación (5.17), es decir

$$\cos \phi_\nu \geq .343439, \quad \text{o bien} \quad 0^\circ \leq \phi_\nu \leq 69.91^\circ. \tag{5.18}$$

Si ahora se usan los valores experimentales en la ecuación (5.12) y eligiendo convenientemente¹ a $\phi_\nu = 50^\circ$ se obtiene

$$|m_{\nu 3}| = .035eV, \tag{5.19}$$

por lo que las otras dos masas se encuentran de acuerdo a las ecuaciones (5.13) y (5.14) obteniendo

$$|m_{\nu 1}| = .061eV \quad \text{y} \quad |m_{\nu 2}| = .062eV. \tag{5.20}$$

¹Este valor se debe a que está en concordancia para los requerimientos de leptogénesis [18].

Por tanto, utilizando (5.19) y (5.20), la suma de la masa de los neutrinos queda como

$$\boxed{\sum_{i=1}^3 |m_{\nu i}| = 0.159901 eV \leq .23 eV} \quad (5.21)$$

el cual es un resultado que se encuentra perfectamente situado por debajo de la cota cosmológica más restrictiva para la suma de las masas de los neutrinos [37].

Capítulo 6

Conclusiones

El estudio de diversos grupos de simetría y en particular, el estudio del producto tensorial entre representaciones irreducibles de los mismos, ha llevado a proponer una extensión mínima del modelo estándar, donde además del campo escalar de Higgs usual, H_S , se añade un doblete de Higgs de S_3 , H_D , extendiendo así el concepto de sabor y de generaciones al sector del Higgs. La introducción de la simetría de sabor S_3 permite entonces tener tres dobletes de $SU(2)$ de Higgs. De esta manera, se ha realizado un estudio de la fenomenología del sector de quarks y leptones calculado las matrices de masa de ambos sectores partiendo del lagrangiano de Yukawa.

Además, se le ha impuesto al sector leptónico la simetría cíclica Z_2 con la intención de reducir la cantidad de parámetros libres de la teoría al no permitir algunos acoplamientos de Yukawa. Esto permitió reparametrizar a las matriz de masa de los leptones cargados en términos precisamente de sus masas y teniendo como único parámetro libre a la fase de Dirac. De esta manera, se consiguió un resultado distinto a [16, 18–22] para los elementos de matriz $|\tilde{m}_{4,5}^e|$. Asimismo, se ha reparametrizado la matriz de masa de los neutrinos de Majorana, suponiendo que el mecanismo de see-saw es el responsable de las masas de los neutrinos izquierdos. Posteriormente, se calculó la matriz bi-unitaria de leptones cargados y la de neutrinos para de esta manera poder calcular la matriz PMNS.

Por consiguiente, al comparar la matriz de mezcla de leptones obtenida teóricamente con la reparametrización del Particle Data Group se han obtenido las expresiones de los ángulos de mezcla reactor y atmosférico únicamente en términos de las masas de los leptones cargados, a saber

$$|\sin \theta_{13}| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}} \quad y \quad |\sin \theta_{23}| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - 2\tilde{m}_\mu^2 + \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 - 4\tilde{m}_\mu^2 + x^2 + 6\tilde{m}_\mu^4 - 4\tilde{m}_\mu^6}},$$

donde $x = m_e/m_\mu$. De esta manera, al comparar los valores teóricos del modelo con los experimentales que se muestran en el cuadro 6.1, se puede notar que para el ángulo de mezcla atmosférico están en perfecto acuerdo con el valor experimental, sin embargo el ángulo de mezcla reactor no.

Ángulo de mezcla de neutrinos	Valor teórico	Valor experimental
$\sin^2 \theta_{13}$	1.1×10^{-5}	$2.18_{-.12}^{+.12} \times 10^{-2}$
$\sin^2 \theta_{23}$.499	$.5_{-.05}^{+.05}$
$\sin^2 \theta_{12}$.297	$.297_{-.017}^{+.017}$

Cuadro 6.1: Comparación entre los valores teóricos y experimentales para los ángulos de mezcla reactor y atmosférico de neutrinos.

Por otro lado, el ángulo de mezcla solar se obtuvo en términos de las diferencias de las masas al cuadrado y de $m_{\nu 3}$ como

$$\tan^2 \theta_{12} \approx \frac{(\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu 3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu 3}| \cos \phi_\nu}{-(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu 3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu 3}| \cos \phi_\nu},$$

lo que permitió determinar la jerarquía invertida de las masas y al considerar el valor experimental del ángulo de mezcla solar y de las diferencias de masas, se ha obtenido un valor para la suma de las masas de los neutrinos,

$$\sum_{i=1}^3 |m_{\nu i}| = 0.159901 eV \leq .23 eV,$$

el cual es un resultado que se encuentra perfectamente situado por debajo de la cota cosmológica más restrictiva para la suma de las masas de los neutrinos, sin embargo, difiere de los resultados obtenidos previamente en [16, 18–22].

Finalmente, aunque el ángulo de mezcla θ_{13} está muy alejado del valor experimental, el desarrollar este modelo ha permitido obtener un valor distinto de cero para dicho ángulo de mezcla y valores precisos para θ_{12} y θ_{23} de acuerdo a los datos experimentales. De acuerdo a [18], la razón por la que el ángulo θ_{13} es tan pequeño en comparación con los valores experimentales se debe a que se ha considerado un mismo término de masa de Majorana de los neutrinos derechos para los dobletes de neutrinos, por lo que al trabajar con una extensión en la que no exista esta degeneración, todos los ángulos de mezcla coinciden con los valores experimentales. Por otro lado, cabe mencionar que no hay un razón particular para pensar que la simetría S_3 es la simetría del universo, es decir, se puede proceder a trabajar con otra simetría de sabor como las propuestas en [15] y obtener una fenomenología distinta y tal vez más cercana a los datos experimentales. Por tanto, como trabajo futuro se propone trabajar con alguna de estas otras simetrías y estudiar la fenomenología implicada.

Apéndice A

Cálculo de los h.c. de la densidad lagrangiana de Yukawa

A.1. Quarks tipo *down*

Para calcular $\mathcal{L}_{Y_{D_1}}^\dagger$ se puede utilizar el hecho de que

$$\mathcal{L}_{Y_{D_1}}^\dagger = (-Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR})^\dagger = -(Y_1^d)^* d_{IR}^\dagger (\bar{Q}_I H_S)^\dagger = -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_I^\dagger,$$

y además, es útil utilizar las siguientes propiedades de las matrices de Dirac [1]:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad \gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}, \quad \gamma^0 \gamma^{0\dagger} = \mathbb{1} \quad y \quad \gamma^0 = \gamma^{0\dagger},$$

de esta manera se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{D_1}}^\dagger &= -Y_1^{d*} d_{IR}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_I^\dagger \\ &= -Y_1^{d*} \bar{d}_{IR} \gamma^0 H_S^\dagger \gamma^0 Q_I \\ &= -Y_1^{d*} \bar{d}_{IR} H_S^\dagger Q_I \\ &= -Y_1^{d*} \left(\bar{d}_{1R} H_S^\dagger Q_1 + \bar{d}_{2R} H_S^\dagger Q_2 \right), \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_1}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_1^{d*} \left\{ \bar{d}_R(0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R(0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \right\} = -Y_1^{d*} (\bar{d}_R \langle H_S \rangle d_L + \bar{s}_R \langle H_S \rangle s_L) \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (1, 0, 0) \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, 0, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_1^{d*} \left\{ (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, veamos que para el hermitiano conjugado del segundo término se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_2}}^\dagger &= (-Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R})^\dagger \\
&= -Y_3^{d*} d_{3R}^\dagger H_S^\dagger \bar{Q}_3^\dagger \\
&= -Y_3^{d*} \bar{d}_{3R} \gamma^0 H_S^\dagger \gamma^0 Q_3 \\
&= -Y_3^{d*} \bar{d}_{3R} H_S^\dagger Q_3,
\end{aligned}$$

y después del rompimiento espontáneo de la simetría,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_2}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_3^{d*} \bar{b}_R(0, \langle H_S \rangle) \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \\
&= -Y_3^{d*} \bar{b}_R \langle H_S \rangle b_L \\
&= -Y_3^{d*} (0, 0, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle H_S \rangle (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix} \\
&= -Y_3^{d*} (0, 0, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para el hermitiano conjugado del tercer término

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_3}}^\dagger &= -Y_2^{d*} [\bar{d}_{JR} H_1^\dagger \kappa_{IJ}^\dagger Q_I + \bar{d}_{JR} H_2^\dagger \eta_{IJ}^\dagger Q_I] \\
&= -Y_2^{d*} [\bar{d}_{1R} H_1^\dagger \kappa_{11}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{1R} H_1^\dagger \kappa_{21}^\dagger Q_2 + \bar{d}_{2R} H_1^\dagger \kappa_{12}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{2R} H_1^\dagger \kappa_{22}^\dagger Q_2 \\
&\quad + \bar{d}_{1R} H_2^\dagger \eta_{11}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{1R} H_2^\dagger \eta_{21}^\dagger Q_2 + \bar{d}_{2R} H_2^\dagger \eta_{12}^\dagger Q_1 + \bar{d}_{2R} H_2^\dagger \eta_{22}^\dagger Q_2] \\
&= -Y_2^{d*} [\bar{d}_{1R} H_1^\dagger Q_2 + \bar{d}_{2R} H_1^\dagger Q_1 + \bar{d}_{1R} H_2^\dagger Q_1 - \bar{d}_{2R} H_2^\dagger Q_2],
\end{aligned}$$

por lo que después del rompimiento espontáneo de la simetría,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_3}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_2^{d*} \left\{ \bar{d}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{d}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} - \bar{s}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_2^{d*} [\bar{d}_R \langle H_1 \rangle s_L + \bar{s}_R \langle H_1 \rangle d_L + \bar{d}_R \langle H_2 \rangle d_L - \bar{s}_R \langle H_2 \rangle s_L] \\
&= -Y_2^{d*} (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para el hermitiano del cuarto término se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_4}}^\dagger &= (-Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR})^\dagger \\
&= -Y_4^{d*} \bar{d}_{IR} H_I^\dagger Q_3 \\
&= -Y_4^{d*} (\bar{d}_{1R} H_1^\dagger Q_3 + \bar{d}_{2R} H_2^\dagger Q_3),
\end{aligned}$$

y de esta manera,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_4}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_4^{d*} \left\{ \bar{d}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{t}_L \\ \bar{b}_L \end{pmatrix} + \bar{s}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{t}_L \\ \bar{b}_L \end{pmatrix} \right\} \\
&= -Y_4^{d*} (\bar{d}_R \langle H_1 \rangle b_L + \bar{s}_R \langle H_2 \rangle b_L) \\
&= -Y_4^{d*} (\bar{d}_R, \bar{s}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para el quinto h.c.,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_{D_5}}^\dagger &= (-Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R})^\dagger \\
&= -Y_5^{d*} \bar{d}_{3R} H_I^\dagger Q_I \\
&= -Y_5^{d*} (\bar{d}_{3R} H_1^\dagger Q_1 + \bar{d}_{3R} H_2^\dagger Q_2)
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{D_5}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_5^{d*} \left\{ \bar{b}_R(0, \langle H_1 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{u}_L \\ \bar{d}_L \end{pmatrix} + \bar{b}_R(0, \langle H_2 \rangle) \begin{pmatrix} \bar{c}_L \\ \bar{s}_L \end{pmatrix} \right\} \\
 &= -Y_5^{d*} (\bar{b}_R \langle H_1 \rangle d_L + \bar{b}_R \langle H_2 \rangle s_L) \\
 &= -Y_5^{d*}(0, 0, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De esta manera, para este caso se puede construir un término de matriz de masa idéntico al desarrollado en el capítulo 3 para el caso no h.c. de la densidad lagrangiana de Yukawa de los quarks tipo *down*.

A.2. Quarks tipo *up*

Partiendo del primer término h.c. para el lagrangiano de los quarks tipo *up* se tiene

$$\mathcal{L}_{Y_{U_1}}^\dagger = (-Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_S^* u_{IR})^\dagger,$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{U_1}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_1^{u*} \left\{ (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^\dagger \\
 &= -Y_1^{u*} \left\{ (\bar{u}_R, \bar{c}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_S \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle H_S \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, para el segundo término h.c. se tiene

$$\mathcal{L}_{Y_{U_2}}^\dagger = (-Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_S^* u_{3R})^\dagger$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Y_{U_2}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} -Y_3^{u*} \left\{ (0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix} \right\}^\dagger \\
 &= -Y_3^{u*}(0, 0, \bar{t}_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle H_S \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_L \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el tercer término hermitiano conjugado está dado por

$$\mathcal{L}_{Y_{U_3}}^\dagger = \{-Y_2^u(\bar{Q}_I \kappa_{IJ}(i\sigma_2)H_1^* u_{JR} + \eta \bar{Q}_I \eta_{IJ}(i\sigma_2)H_2^* u_{JR})\}^\dagger,$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_3}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} \left\{ -Y_2^u(\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^\dagger \\ &= -Y_2^{u*} \left\{ (\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^\dagger \\ &= -Y_2^{u*}(\bar{u}_R, \bar{c}_R, 0) \begin{pmatrix} \langle H_2 \rangle & \langle H_1 \rangle & 0 \\ \langle H_1 \rangle & -\langle H_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, para el cuarto término

$$\mathcal{L}_{Y_{U_4}}^\dagger = (-Y_4^u \bar{Q}_3(i\sigma_2)H_I^* u_{IR})^\dagger$$

así,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_4}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} \left\{ -Y_4^u(0, 0, \bar{t}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^\dagger \\ &= -Y_4^{u*}(\bar{u}_L, \bar{c}_R, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, el hermitiano conjugado del quinto término se tiene está dado por

$$\mathcal{L}_{Y_{U_5}}^\dagger = (-Y_5^u \bar{Q}_I(i\sigma_2)H_I^* u_{3R})^\dagger$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_{U_5}}^\dagger &\xrightarrow{SSB} \left\{ -Y_5^u(\bar{u}_L, \bar{c}_L, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle H_1 \rangle \\ 0 & 0 & \langle H_2 \rangle \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_R \end{pmatrix} \right\}^\dagger \\ &= -Y_5^{u*}(0, 0, \bar{t}_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \langle H_1 \rangle & \langle H_2 \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, para este caso también se puede construir un término de matriz de masa idéntico al desarrollado en el capítulo 3 para el caso no h.c. de la densidad lagrangiana de Yukawa de los quarks tipo up .

Apéndice B

Relación entre raíces y coeficientes de una ecuación cúbica

De manera general, se puede escribir a una ecuación cúbica de la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0, \quad (\text{B.1})$$

donde a, b, c y d son escalares. Suponga ahora que α, β y γ son raíces de dicha ecuación, entonces, por el Teorema Fundamental del Álgebra se puede reescribir (B.1) como

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0, \quad (\text{B.2})$$

por lo que de (B.1) y (B.2) se sigue que

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &\equiv a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= a(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta)(x - \gamma) \\ &= ax^3 - a\alpha x^2 - a\beta x^2 + a\alpha\beta x - a\gamma x^2 + a\alpha\gamma x + a\beta\gamma x - a\alpha\beta\gamma \\ &= ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - a\alpha\beta\gamma, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de donde se obtienen las siguientes expresiones al igualar los coeficientes:

$$\begin{aligned} b = -a(\alpha + \beta + \gamma) &\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \\ c = a(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) &\Rightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}, \\ d = -a(\alpha\beta\gamma) &\Rightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}}. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 1984.
- [2] B. Hatfield. *Quantum Field Theory Of Point Particles And Strings*. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1998.
- [3] Danuta Kielczewska. Neutrino oscillations at super-kamiokande. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 81(Supplement C):133 – 142, 2000. Proceedings of the International Workshop on Particles in Astrophysics and Cosmology: From Theory to Observation.
- [4] Thomas Schwetz, Mariam Tórtola, and José W F Valle. Three-flavour neutrino oscillation update. *New Journal of Physics*, 10(11):113011, 2008.
- [5] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, and A. M. Rotunno. Hints of $\theta_{13} > 0$ from global neutrino data analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 101:141801, Sep 2008.
- [6] G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, and A.M. Rotunno. Neutrino masses and mixing: 2008 status. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 188(Supplement C):27 – 30, 2009. Proceedings of the Neutrino Oscillation Workshop.
- [7] M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, and Jordi Salvado. Updated global fit to three neutrino mixing: status of the hints of $\theta_{13} > 0$. *JHEP*, 04:056, 2010.
- [8] Wolfgang Ehrenfeld. Supersymmetry and other beyond the Standard Model physics: Prospects for determining mass, spin and CP properties. In *Proceedings, 38th International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2008): Hamburg, Germany, September 15-20, 2008*, pages 349–353, 2009.
- [9] Howard Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441, Feb 1974.
- [10] Arnold Perlmutter and Susan M. Widmayer, editors. *Unified Gauge Theories*, pages 329–339. Springer US, 1975.

- [11] A. Masiero, S. K. Vempati, and O. Vives. Flavour physics and grand unification. In *Particle physics beyond the standard model. Proceedings, Summer School on Theoretical Physics, 84th Session, Les Houches, France, August 1-26, 2005*, pages 1–78, 2005.
- [12] Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio. Discrete Flavor Symmetries and Models of Neutrino Mixing. *Rev. Mod. Phys.*, 82:2701–2729, 2010.
- [13] J. C. Gómez-Izquierdo, F. González-Canales, and M. Mondragon. Q_6 as the flavor symmetry in a non-minimal SUSY $SU(5)$ model. *The European Physical Journal C*, 75(5):221, May 2015.
- [14] R. Gonzalez Felipe, H. Serodio, and Joao P. Silva. Neutrino masses and mixing in A4 models with three Higgs doublets. *Phys. Rev.*, D88(1):015015, 2013.
- [15] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Yusuke Shimizu, Hiroshi Okada, et al. Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics. *Prog.Theor.Phys.Suppl.*, 183:1–163, 2010.
- [16] J. Kubo, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Rodriguez-Jauregui. The Flavor symmetry. *Prog.Theor.Phys.*, 109:795–807, 2003.
- [17] W. Grimus and L. Lavoura. The Seesaw mechanism at arbitrary order: Disentangling the small scale from the large scale. *JHEP*, 11:042, 2000.
- [18] Arturo Alvarez Cruz and Myriam Mondragón. Neutrino masses, mixing, and leptogenesis in an S_3 model. *arXiv: 1701.07929 hep-ph*, 2017.
- [19] A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Peinado. Lepton masses, mixings and FCNC in a minimal $S(3)$ -invariant extension of the Standard Model. *Phys. Rev.*, D76:076003, 2007.
- [20] O. Felix, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Peinado. Neutrino masses and mixings in a minimal S_3 -invariant extension of the standard model. *Revista mexicana de fisica*, 52:67 – 73, 11 2006.
- [21] O. Felix, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Peinado. Neutrino masses and mixings in a minimal $S(3)$ -invariant extension of the standard model. *AIP Conf. Proc.*, 917:383–389, 2007.
- [22] Kubo J., A. Mondragon, M. Mondragon, E. Rodriguez-Jauregui, O. Felix-Beltran, and E. Peinado. A minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model. *Journal of Physics: Conference Series*, 18(1):380, 2005.
- [23] C. Patrignani et al. (Particle Data Group). *Chin. Phys.*, C, **40**:100001, 2016 and 2017 update.
- [24] Howard Georgi. *Lie Algebra in Particle Physics*. Westview Press, second edition, 1999.
- [25] Yoshio Koide. Universal seesaw mass matrix model with an S_3 symmetry. *Phys. Rev. D*, 60:077301, Sep 1999.

-
- [26] E. Peinado Rodríguez. *Simetría de sabor S_3 en el sector leptónico*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [27] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562–1567, 1998.
- [28] B. Felix and V. Petr. *Physics of Massive Neutrinos*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [29] R. N. Mohapatra et al. Theory of neutrinos: A White paper. *Rept. Prog. Phys.*, 70:1757–1867, 2007.
- [30] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model. Cambridge University Press, 2014.
- [31] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanović. Neutrino mass and spontaneous parity non-conservation. *Phys. Rev. Lett.*, 44:912–915, Apr 1980.
- [32] André de Gouvêa, Juan Herrero-García, and Andrew Kobach. Neutrino masses, grand unification, and baryon number violation. *Phys. Rev. D*, 90:016011, Jul 2014.
- [33] Tsutomu Yanagida. Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos. *Conf. Proc.*, C7902131:95–99, 1979.
- [34] Tsutomu Yanagida. Horizontal symmetry and masses of neutrinos. *Progress of Theoretical Physics*, 64(3):1103–1105, 1980.
- [35] V. Barger, D. Marfatia, and K.L. Whisnant. *The Physics of Neutrinos*. Princeton University Press, 2012.
- [36] F. Capozzi, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, and A. Palazzo. Neutrino masses and mixings: Status of known and unknown 3ν parameters. *Nuclear Physics B*, 908(Supplement C):218 – 234, 2016. Neutrino Oscillations: Celebrating the Nobel Prize in Physics 2015.
- [37] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, et al. Planck 2015 results - xiii. cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.