UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

H-transformadas de Doob e inversiones de difusiones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALEJANDRO ROSALES ORTIZ

DIRECTORA DE TESIS:
MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA, 2018

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2018

H-transformadas de Doob e inversiones de difusiones

Alejandro Rosales Ortiz
Dirigido por la Dra. Maria Emilia Caballero Acosta

A mi mamá, mi papá y mi pequeñísima hermana. Gracias por su constante e incondicional apoyo y cariño.

Gracias a mi asesora Maria Emilia Caballero Acosta, quien además de ser una fantástica profesora e investigadora, es una gran amiga. Fue un placer poder trabajar con usted, gracias por todo.

Introducción

El objetivo inicial de este trabajo es dar una presentación unificada de la h-transformada de Doob (Capítulo 4). Posteriormente, se vio que un artículo reciente la utilizaba como herramienta primordial, por lo cual se generó el interés de estudiar dicho artículo (Capí tulo 6).

Para poder abordar el estudio de la h-transformada, se requiere una amplia gama de conocimientos previos:
-Primero fue necesario estudiar teoría de martingalas, semigrupos, teoría básica de procesos de Markov y dar por hecho algunos resultados de teoría básica de difusiones y cálculo estocástico para no extender más esta tesis. Los teoremas de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas y el cálculo estocástico de Itô los estudié en el curso de Procesos estocásticos 2 en la licenciatura impartido por la doctora María Emilia Caballero, y se encuentran en su texto *Introduction to Stochastic Integration.* Estos resultados se encuentran el la sección 1, resultados preliminares, no todos están probados aunque si en su mayoría. Para el estudio de la teoría de procesos de Markov y semigrupos, seguí el texto de Erhan Çinlar *Probability and Stochastics* y para teoría general de martingalas, las notas de la profesora Perla Sousi de su curso *Advanced Probability* impartido en 2013 en la universidad de Cambridge y de las notas del profesor David Gamarnik del curso impartido en 2013 en el MIT *Advanced Stochastic Processes.* Los teoremas de existencia y teoría básica de difusiones de esta sección vienen enunciados en *Stochastic Differencial Equations, An Introduction With Applications* de Bernt Oksendal.
-En segundo lugar, teoría de difusiones: propiedad de Markov y Markov fuerte, definición del generador infinitesimal, propiedad del valor medio entre otras.
-Finalmente, en la sección 3, se estudia análisis cualitativo de difusiones: fórmula de Dynkin y cálculo de probabilidades de salida así como una colección de aplicaciones. Poder calcular estas probabilidades será de gran utilidad a la hora de construir ejemplos de procesos h-transformados en la sección 4. El texto de referencia para estos dos últimos temas fue *Stochastic Differencial Equations, An Introduction With Applications* de Bernt Oksendal.

Ya con todo esto, podemos abordar en la sección 4 el primer tema mencionado: la h-transfromada de Doob de un proceso de Markov. Este tema se usa y acepta pero no suele encontrarse una presentación unificada en la literatura. Seguiremos para esto un trabajo de Alex Bloemendal *Doob's h-transforms: theory and examples, 2010* en el cual enuncia una serie de resultados y da una larga lista de ejemplos de cómo condicionar un proceso. Como en el trabajo de Bloemendal sólo se da una idea de las pruebas de los principales resultados y otros no se prueban, nos propusimos presentar el tema con todas las demostraciones completas, llenando todos los huecos dejados por el autor (el trabajo no se publicó) y explicamos con todo detalle varios ejemplos de cómo condicionar procesos tanto continuos como discretos para que se comporten de cierta forma predeterminada. Para construir estos ejemplos, los resultados de las secciones anteriores sobre difusiones serán extremadamente útiles. Como es de esperarse, el semigrupo del proceso y el generador infinitesimal (en caso de que se trate de una difusión) se modifican al obtener el nuevo proceso condicionado, veremos de qué forma se transforma. Al terminar esta sección, el lector será capaz de construir fácilmente sus propios ejemplos de procesos condicionados siempre que conozca el semigrupo del proceso o el generador infinitesimal si se trata de una difusión y la correspondiente función armónica, la cual se definirá es esa sección y que está ligada a la probabilidad del evento al cual se quiera condicionar. Vale la pena señalar que la h-transformada se puede definir para clases más amplias de procesos de Markov (es decir, no solo para difusiones).

Posteriormente, cuando considerábamos que el trabajo ya estaba terminado, vimos que un artículo reciente de gran interés general utilizaba la h-transformada para difusiones como herramienta básica, por lo que decidimos abordarlo en esta tesis. Para poder estudiarlo, hizo falta profundizar más en el estudio de difusiones. Por ello, en la sección 5, estudiaremos más propiedades: definiremos lo que es la función de escala y la medida de velocidad de una difusión (resulta que el generador infinitesimal está fuertemente ligado a las dos primeras)y su relación con las funciones de Green. La medida de velocidad es un concepto muy usado pero la forma en que se aborda en los textos no resulta nada clara: se define como la medida que satisface una igualdad en la cual están involucradas las funciones de green, y se dice que "define la velocidad a la cual la difusión se mueve en intervalos". En este trabajo además de mencionar esta definición, se agrega un estudio más constructivo que explica el por qué se le da ese nombre. Para ello, nos guiaremos en las notas del curso de Análisis Estocástico impartido en la universidad de Oxford por Alison Etheridge en 2016 *Stochastic analysis and PDEs, 2016.* Lo que se hace ahí es, partir de una difusión cualquiera y con un cambio de escala y un cambio de tiempo, convertirla en un movimiento browniano. Resulta que este cambio de tiempo está dado por la medida de velocidad. Otros resultados interesantes de está sección son La fórmula de Volkonsky, que muestra cómo se ve afectado el generador infinitesimal de una difusión al aplicarle un cambio de tiempo y cómo obtener al generador infinitesimal a partir de la medida de velocidad y la función de cambio de escala.

Ahora, tendremos las herramientas para abordar el segundo artículo: *On Inversions and Doob h-transforms of Linear Diffusions 2015* por Larbi Alili, Piotr Graczyk y Tomasz Zak. En este, se hace lo siguiente:
Abstract *Let X be a regular linear diffusion whose state space is an open interval E. We consider the dual diffusion X^* whose probability law is obtained as a Doob h-trasnfrom of the law of X, where h is a positive harmonic function for the infnitesimal generator of X on E. We provide a contruction of X^* as a deterministic inversion $I(X)$ of X, timechanged with some random clock. Such inversions generalize the Euclidean inversions that intervene when X is a Brownian motion.*
Este artículo, interesante por si mismo, ha resultado de gran importancia puesto que ha permitido a sus autores en colaboración con Loïc Chaumont resolver un problema que desde los años 70 fue planteado por Lamperti, y que consiste en poder generalizar la transformada de Lamperti a $\mathbb{R}^n$. El artículo en el que se resuelve este problema se titula *Inversions, duality and Doob h-transforms for self-similar Markov processes, 2017*:
Abstract: *We show that any $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ -valued self similar Markov processes X, with index $\alpha > 0$ can be represented as a path transformation of some Markov additive process in $S^{d-1} \times \mathbb{R}$. This result extends the well known*

Lamperti transformation. [...]
En este, entre otras cosas, se prueba que se puede obtener al dual de una difusión X componiendo con una inversión y un cambio de tiempo, lo que permite obtener al proceso h-transformado fácilmente y deriva en una gran cantidad de ejemplos.

Finalmente, en la sección 7, para ilustrar la teoría de las secciones previas se concluye este trabajo con un breve estudio de los procesos de Bessel; se construirá de distintas formas: primero como solución de una ecuación diferencial estocástica, como h-transformada usando la teoría de la sección 4 (Con esto, debería quedar claro por que se afirma que el proceso de Bessel es un movimiento browniano condicionado), como inversión usando la teoría de la sección 6, como transformada de Lamperti de un movimiento browniano con deriva y para cerrar, como inversión de un Bessel siguiendo la teoría desarrollada en [1], pues existe una relación de dualidad entre los procesos de Bessel de dimensión δ y $4-\delta$. Para la construcción del proceso de Bessel como solución de una ecuación estocástica, seguimos la construcción dada por Mark Yor y Daniel Revuz en el libro *Continuous Martingales and Brownian Motion* y algunas de la propiedades son del texto *Brownian Motion and Stochastic Calculus* de Ioannis Karatzas y Steven E. Shreve.

Esta tesis fue realizada bajo la dirección de la doctora María Emilia Caballero Acosta.

Contents

Gracias a Laura Rosales Ortiz por apoyarme con las figuras.

1 Resultados preliminares

En este capítulo enunciaremos algunos resultados y definiciones básicas de teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, martingalas y procesos de Markov que necesitaremos más adelante(algunos no se probarán). Con esto estaremos preparados para abordar el análisis de difusiones, soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas así como sus propiedades. Puesto que resolverlas puede resultar muy laborioso, en los primeros capítulos nos enfocaremos en el análisis cualitativo de éstas: ¿Qué se puede decir de la solución de una ecuación diferencial estocástica sin tener la solución explícitamente? ¿Podemos, dada la solución, construir una nueva a partir de ésta de modo que tenga un comportamiento "predecible"?
Primero, hablaremos de cuando podemos garantizar la existencia de una solución y distinguiremos dos diferentes tipos: fuertes y débiles. Luego daremos algunos resultados sobre Martingalas, definiciones y propiedades de los procesos de Markov así como de sus semigrupos y terminaremos con la propiedad de Markov para difusiones. Con estas bases, podremos abordar los temas de interés para este trabajo.

Definición 1.1 Igualdades entre procesos
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ *y* $\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ *dos procesos en este espacio,*

$$X_t\,,\,Y_t : \Omega \to \mathbb{R}$$

1-Decimos que X *y* Y *con* t *en el intervalo* $[0, T]$ *son indistinguibles si*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \quad t \in [0, T]) = 1$$

Es decir, salvo en un conjunto de medida 0, $X_t(w) = Y_t(w)$ *para toda* t *en el intervalo* $[0, T]$*, por lo que las trayectorias son las mismas.*

2-Decimos que dos procesos X *y* Y *con* t *en el intervalo* $[0, T]$ *tienen las mismas distribuciones finito dimensionales si para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y dados* $0 \leq t_1 < ... < t_n \leq T$ *cualesquiera,*

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n) = \mathbb{P}(Y_{t_1} \in A_1, ..., Y_{t_n} \in A_n)$$

$$\text{para todo } A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \;\; y \;\; A = (A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

En este caso, los procesos no tienen por qué estar definidos en el mismo espacio de probabilidad, por lo que la igualdad se puede dar para dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ relativas a dos espacios distintos.

Definición 1.2 Ecuaciones diferenciales estocásticas y soluciones débiles y fuertes
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y B definido por $B_t = (B_1(t), ..., B_m(t))$ un movimiento browniano m-dimensional donde $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración canónica completada generada por este movimiento browniano (siempre se dará por hecho que se está trabajando con la medida completada). Sean b y σ funciones medibles,

$$b(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$$

y consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad 0 \leq t \leq T \quad X_0 = x_0$$

Un proceso X adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ y que satisface la ecuación anterior es llamado solución fuerte de la ecuación.
Si $\tilde{B}$ es otro movimiento browniano con respecto a otra filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,T]}$ y $\tilde{X}$ es un proceso adaptado a $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,T]}$ que satisface

$$d\tilde{X}_t = b(t, \tilde{X}_t)dt + \sigma(t, \tilde{X}_t)d\tilde{B}_t \quad 0 \leq t \leq T \quad \tilde{X}_0 = x_0$$

entonces decimos que $\tilde{X}$ es una solución débil de la ecuación.

Teorema 1.3 Teorema de existencia de soluciones
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, donde $\mathcal{F}_t$ es la filtración generada por un movimiento browniano B_t. Sean b y σ funciones medibles,

$$b(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$$

tales que satisfacen las siguientes condiciones Lipschitz:

$$|b(t,x)-b(y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq D|x-y| \quad x,y \in \mathbb{R}^n \quad t \in [0,T] \quad D \in \mathbb{R}^+$$

y

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L(1+|x|)$$

donde

$$|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2 \; y \; L \in \mathbb{R}^+$$

Si X_0 es $\mathcal{F}_0$-medible, $\mathbb{E}\left[X_0^2\right] < \infty$, X_0 es independiente de $B_t \quad \forall\, t > 0$ (es decir X_0 es independiente de $\mathcal{F}_{0^+}$) , entonces existe una única solución fuerte X a la ecuación diferencial estocásitca:

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \quad 0 \leq t \leq T \quad X_0 = x_0$$

es decir, cualquier otra solución fuerte X' es indistinguible de X. Si $\tilde{X}_t$ es otra solución débil a la ecuación, entonces X y $\tilde{X}$ tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

1.1 Algunos resultados sobre Martingalas

Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso continuo en $\mathbb{R}$, diremos que el proceso *cruza el intervalo* $[a,b]$ si existen $0 < t < s < \infty$ tales que $X_t < a < b < X_s$. Es decir, cada vez que pase de estar "por debajo" de a a estar "por arriba" de b. El objetivo del siguiente resultado es acotar el número de veces que una super-martingala real discreta atraviesa (upcrossing) un intervalo $[a,b]$. *Doob's upcrossing lemma* nos da una cota para el valor esperado de cruces.

Definición 1.4 *Sea $\{\mathcal{N}_t\}$ familia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una función*

$$\tau : \Omega \to [0,\infty]$$

es tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{N}_t\}$ si $\{\omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t \;\; \forall\, t \geq 0$.

Definición 1.5 *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso. Decimos que X es una sub-martingala si*

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}|X_1...X_n\right] = X_n$$

Definición 1.6 *Sea X una supermartingala discreta en $\mathbb{R}$. Sea $U_N[a,b](\omega)$ el máximo k tal que se satisface lo siguiente:*
Existen

$$0 \leq s_1 < t_1 < ... < s_k < t_k \leq N$$

$$X_{s_i}(\omega) < a < b < X_{t_i}(\omega) \quad 1 \leq i \leq k$$

Es decir, $U_N[a,b]$ es el número de veces que X atraviesa de "abajo" a "arriba" el intervalo $[a,b]$.

Teorema 1.7 Doob's upcrossing lemma
Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una super-martingala y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces para todo $N \geq 0$:

$$(b-a)\mathbb{E}\left[U_N[a,b]\right] \leq \mathbb{E}\left[(X_N - a)^-\right]$$

donde $(X_N - a)^-$ es la función "parte negativa" de $X_N - a$:

$$(X_N - a)^- = \begin{cases} a - X_N & si\ X_N \leq a \\ 0 \quad o.c. \end{cases}$$

Demostración Definiremos una colección de tiempos de paro: $T_0 = 0$ y recursivamente:
La primera vez que X_n toma un valor inferior o igual a "a", con $n \geq T_k$

$$S_{k+1} = \inf\{n \geq T_k \,:\, X_n \leq a\}$$

La primera vez que X_n toma un valor mayor o igual a "b", con $n \geq S_{k+1}$

$$T_{k+1} = \inf\{n \geq S_{k+1} \,:\, X_n \geq b\}$$

Por construcción,

$$X_{T_k} - X_{S_k} \geq b - a \quad \text{ y } \quad U_N[a,b] \leq N$$

Nótese que en general, para k natural arbitrario, no sabemos si T_k y S_k ocurrieron antes o después del tiempo N. Pero como $U_N[a,b] \leq N$, podemos partir la siguiente suma en dos:

$$\sum_{k=1}^{N}(X_{T_k\wedge N}-X_{S_k\wedge N})=\sum_{k=1}^{U_N[a,b]}(X_{T_k}-X_{S_k})$$
$$+\sum_{k=U_N[a,b]+1}^{N}(X_N-X_{S_k\wedge N})\,\mathbb{1}_{\{U_N[a,b]<N\}}$$

Obsérvese que si $k\geq U_N[a,b]+1$, entonces $T_k>N$ pues de no serlo, tendríamos otro *upcrossing*, por lo que $T_{U_N[a,b]+1}\wedge N=N$.
Como por construcción:

$$T_{U_N[a,b]+1}<S_{U_N[a,b]+2}<T_{U_N[a,b]+2}<S_{U_N[a,b]+3}$$

entonces $S_k\wedge N=N$ para $k>U_{[a,b]}+2$. Por ello, el único término que puede ser distinto de 0 en la segunda suma es el primero en caso de que $S_{U_N[a,b]}+1$ sea menor o igual que N.
Tomando en cuenta esta observación, la expresión anterior se simplifica en:

$$\sum_{k=1}^{N}(X_{T_k\wedge N}-X_{S_k\wedge N})=\sum_{k=1}^{U_N[a,b]}(X_{T_k}-X_{S_k})+\Big(X_N-X_{S_{U_N[a,b]+1}}\Big)\,\mathbb{1}_{\{S_{U_N[a,b]+1\leq N}\}}$$

•*Observación 1:*
Como $S_k\wedge N$ y $T_k\wedge N$ son tiempos de paro y $S_k\wedge N<T_k\wedge N$, por el *Teorema de Paro Opcional de Doob:*

$$\mathbb{E}\left[X_{S_k\wedge N}\right]\geq\mathbb{E}\left[X_{T_k\wedge N}\right]\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

Por lo que:

$$\mathbb{E}\left[X_{T_k\wedge N}-X_{S_k\wedge N}\right]\leq 0$$

y

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N}X_{T_k\wedge N}-X_{S_k\wedge N}\right]\leq 0$$

•*Observación 2:*

$$\sum_{k=1}^{U_N[a,b]}X_{T_k}-X_{S_k}\geq\sum_{k=1}^{U_N[a,b]}(b-a)=U_N[a,b](b-a)$$

Por lo cual:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{U_N[a,b]} X_{T_k} - X_{S_k}\right] \geq \mathbb{E}\left[U_N[a,b]\right](b-a)$$

$\bullet$ *Observación 3:* Como $X_{S_{U_N[a,b]+1}}$ es menor o igual que a,

$$X_{S_{U_N[a,b]+1}} \cdot \mathbb{1}_{\{S_{U_N[a,b]+1} \leq N\}} \leq a \cdot \mathbb{1}_{\{S_{U_N[a,b]+1} \leq N\}}$$

Multiplicando por -1 de ambos lados y sumando $X_N \cdot \mathbb{1}_{\{S_{U_N[a,b]+1}\}}$ obtenemos que:

$$\left(X_N - X_{S_{U_N[a,b]}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{S_{U_N[a,b]+1} \leq N\}} \geq (X_N - a)\, \mathbb{1}_{\{S_{U_N[a,b]+1} \leq N\}} \geq -(X_N - a)^-$$

Utilizando las tres observaciones, podemos acotar la esperanza del término inicial:

$$0 \geq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} (X_{T_k \wedge N} - X_{S_k \wedge N})\right] \geq (b-a)\mathbb{E}\left[U_N[a,b]\right] - \mathbb{E}\left[(X_n - a)^-\right]$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[(X_n - a)^-\right] \geq (b-a)\mathbb{E}\left[U_N[a,b]\right].$$

$\blacksquare$

Claramente $U_N[a,b](\omega)$ es no decreciente con respecto a N, por lo que podemos definir:

$$U_\infty[a,b](\omega) := \lim_{N\to\infty} U_N[a,b](\omega)$$

el número de *upcrossings* de X_n para $n \in \mathbb{N}$. El objetivo es probar que este número es finito casi seguramente, para cualesquiera a y b.
Es decir, si definimos

$$\Lambda_{a,b} := \{\omega : \, U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$$

queremos probar el siguiente resutlado:

Proposición 1.8 *Si* $\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$ *entonces* $\mathbb{P}\left(\Lambda_{a,b}\right) = 0$

Demostración Por el lema 1.7,

$$\mathbb{E}\left[U_N[a,b]\right] \leq (b-a)^{-1}\mathbb{E}\left[(X_n - a)^-\right] \leq (b-a)^{-1}\mathbb{E}\left[|X_n| + a\right]$$

Como $U_N[a,b]$ es monótonamente creciente, por el teorema de convergencia monótona:

$$\mathbb{E}\left[U[a,b]\right] \leq (b-a)^{-1}\left(\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n| + a\right]\right) < \infty$$

Por lo que $\mathbb{E}\left[U[a,b]\right] < \infty$. Pero entonces,

$$U[a,b] < \infty \text{ c.s.}$$

Es decir, el número de *upcrossings* del processo X_n es finito salvo en un conjunto de medida 0, por lo que

$$\mathbb{P}\left(\Lambda_{a,b}\right) = 0$$

$\blacksquare$

Es decir, eventualmente, el proceso X_n se mantiene por encima de a o por debajo de b, para cualesquiera a, $b \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.9 Primer teorema de convergencia de Martingalas (Doob)
Supongamos que X es una super martingala discreta que satisface

$$\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$$

Entonces, $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ existe casi seguramente, por lo que

$$X_n \to X_\infty \; c.s.$$

y además $\mathbb{E}\left[|X_\infty|\right] < \infty$

Demostración Sea Λ el conjunto donde X_n no converge:

$$\Lambda = \{\omega : X_n(\omega) \text{ no converge a un límite en } \mathbb{R}\}$$

$$= \{\omega : \liminf_n X_n(\omega) < \limsup_n X_n(\omega)\}$$

$$= \bigcup_{a<b\,:\,a,b\in\mathbb{Q}} \{\omega : \liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup_n X_n(\omega)\}$$

Usando la notación que definimos previamente, podemos reescribir Λ como sigue:

$$\Lambda = \bigcup_{a<b\,:\,a,b\in\mathbb{Q}} \{\omega :\ U_\infty[a,b](\omega) = \infty\} = \bigcup_{a<b\,:\,a,b\in\mathbb{Q}} \Lambda_{a,b}$$

Por la proposición anterior

$$\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$$

Por lo que $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$ por ser unión numerable de conjuntos de medida 0. Por lo tanto, X_n converge en $[-\infty, \infty]$ c.s. Es decir,

$$\liminf_n X_n = \limsup_n X_n = X_\infty$$

Falta probar que $X_\infty \in L_1$:

$$\begin{aligned} |X_\infty| = \mathbb{E}\left[\liminf_n |X_n|\right] &\overset{Fatou}{\leq} \liminf_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \\ &\leq \limsup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] \\ &\leq \sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty \end{aligned}$$

Por lo que X_∞ es finito c.s. ■

Este teorema es sorprendente: nótese que en general, el hecho de que $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|]$ sea finito no implica que la sucesión converja, por ejemplo la sucesión $\{X_n(\omega) = (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ claramente diverge y el valor absoluto de la esperanza de sus términos está acotada por 1. Este resultado es también válido para super-martingalas continuas, pero la prueba es más elaborada y no se incluirá.

1.2 Kernels, procesos de Markov y propiedad de Markov

Daremos a continuación una breve presentación de los procesos de Markov.

Definición: Sean $(E,\mathcal{E})$ y $(F,\mathcal{F})$ espacios medibles. Sea

$$K : E \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$$

$$K(x,B) \in \mathbb{R}_+ \quad x \in E \quad B \in \mathcal{F}$$

K es un kernel de transición si:
• El mapeo $x \mapsto K(x,B)$ es $\mathcal{E}$-medible $\quad \forall B \in \mathcal{F}$
• El mapeo $B \mapsto K(x,B)$ es una medida en $(F,\mathcal{F})$ $\ \forall x \in E$

Propiedades:
• K actúa sobre las funciones positivas $\mathcal{F}$-medibles:
Si $f \in \mathcal{F}_+$

$$Kf(x) := \int_F K(x,dy)f(y) := \int_F f(y)K(x,dy) \quad x \in E$$

es una función en $\mathcal{E}_+$ ($\mathcal{E}$-medible y positiva).

Demostración:
Basta probarlo para las funciones simples medibles, puesto que se extiende naturalmente a las medibles usando el teorema de convergencia monótona y observando que el límite de funciones $\mathcal{E}$-medibles es $\mathcal{E}$-medible.
Sea $f : F \to \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \sum_i b_i \mathbb{1}_{B_i}(x) \quad \text{con } B_i \in \mathcal{F}$$

Entonces,

$$Kf(x) = \sum_i b_i K(x,B_i)$$

Como por definición $K(x,B_i)$ es una función $\mathcal{E}$-medible, entonces $Kf(x)$ es $\mathcal{E}$-medible pues es una combinación lineal de funciones $\mathcal{E}$-medibles. ∎

• Si μ es una medida de $(E,\mathcal{E})$

$$\mu K(B) := \int_E K(x,B)\mu(dx) \quad B \in \mathcal{F}$$

define una medida μK en $(F,\mathcal{F})$.

Demostración:
i)Positiva: $\mu K(B) = \int_E K(x,B)\mu(dx)$. Como para cada x, $K(x,\cdot)$ es una medida, entonces $K(x,B) \geq 0$ para toda x. Por lo tanto, $\mu K(B) \geq 0$.
ii) Una vez más, por ser $K(x,\cdot)$ una medida, se tiene que $\mu K(\emptyset) = 0$
iii) Sean $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ conjuntos disjuntos y $B_i \in \mathcal{F}$para toda i en $\mathbb{N}$.

$$\mu K(\bigcup_i B_i) = \int_E K(x, \bigcup_i B_i)\mu(dx) = \int_E \sum_i \left(K(x,B_i)\right)\mu(dx)$$

$$= \sum_i \int_E K(x,B_i)\mu(dx) = \sum_i \mu K(B_i)$$

■

Definición 1.10 *Sea $\{P_{t,u}\}_{t<u}$ una familia de kernels de $(E,\mathcal{E})$ en $(E,\mathcal{E})$ y sean $0 \leq s < t < u$. Decimos que son funciones de transición markovianas si:*

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}$$

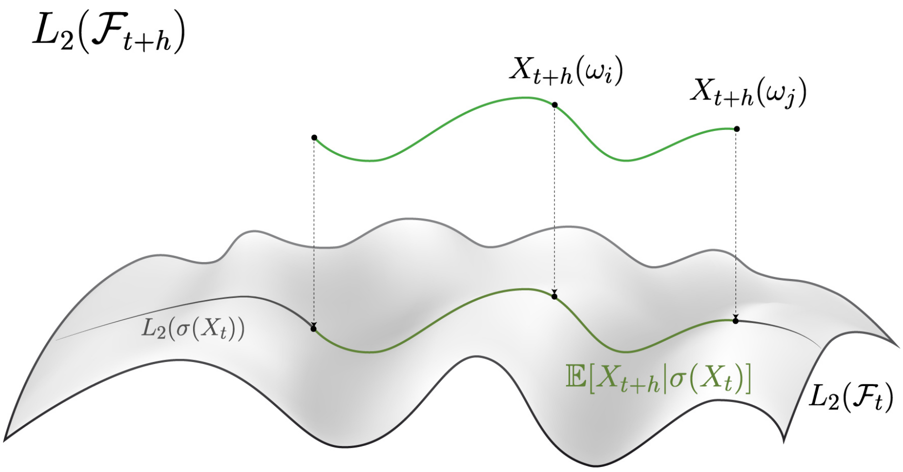
Es decir, si satisface la ecuación de Champan-Kolmogorov. Obsérvese que otra forma de escribir la expresión anterior en el caso en que $f = \mathbb{1}_B$ es:

$$\int_E P_{t,u}(y,B)P_{s,t}(x,dy) = P_{s,u}(x,B)$$

Definición 1.11 *Decimos que un proceso X adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ es markoviano o de Markov si para cualquier función f en $\mathcal{E}_+$ y para $u > t \geq 0$ se cumple que:*

$$\mathbb{E}\left[f \circ X_u | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[f \circ X_u | X_t\right]$$

Es decir, la mejor aproximación en L_2 $\mathcal{F}_t$-medible de X_{t+h} coincide con la mejor aproximación $\sigma(X_t)$-medible:



Definición 1.12 *Un proceso X markoviano admite a una familia de kernels $\{P_{t,u}\}$ como funciones de transición si:*

$$\mathbb{E}\left[f \circ X_u | X_t\right] = (P_{t,u} f) \circ X_t \qquad u > t$$

Definición 1.13 *Un proceso X markoviano con kernel $\{P_{s,t}\}$ con $s < t$ es homogéneo con respecto al tiempo si*

$$P_{s,t} = P_{t-s} \quad \textit{para algún kernel } P_{t-s}$$

Obsérvese que como consecuencia, se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in B | X_s = x) = P_{s,s+t} \mathbb{1}_B(x) = P_{0,t} \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{P}(X_t \in B | X_0 = x)$$

Notación: De ahora en adelante trabajaremos con procesos markovianos homogeneos con respecto al tiempo. Por ello, diremos que X tiene kernel o funciones de transición $\{P_t\}$ donde:

$$P_t = P_{s,s+t} \qquad s \geq 0$$

Es decir, el sub-índice indica el tiempo transcurrido desde la última observación del proceso. Por lo tanto, si el proceso markoviano es homogéneo, podemos reescribir la definición 1.12 como sigue:
Un proceso X markoviano homogéneo admite P_t como función de transición si:

$$\mathbb{E}\left[f \circ X_{t+s} | X_s\right] = (P_t f) \circ X_s$$

Proposición 1.14 *Sea X proceso markoviano homogéneo con funciones de transición $\{P_t\}$. Entonces:*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in B|X_s) = P_t(X_s, B).$$

Demostración Sea $f(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)$ y $B \in \mathcal{E}$
Por una parte:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f \circ X_{t+s}|X_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B(X_{t+s})|X_s\right] \\ &= \mathbb{P}(X_{t+s} \in B|X_s).\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$(P_t\mathbb{1}_B) \circ X_s = \int_E \mathbb{1}_B(y)P_t(x, dy) \circ X_s = P_t(x, B) \circ X_s = P_t(X_s, B).$$

■

Corolario 1.15 *Sea X definido como en el teorema anterior:*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in B|X_s = y) = P_t(y, B).$$

Proposición 1.16 *Si X es un proceso de Markov con funciones de transición $\{P_t\}_{t>0}$, entonces $\{P_t\}_{t>0}$ son funciones de transición Markovianas (también se dice que forman un semigrupo de operadores, donde P_t actúa sobre las funciones continuas acotadas medibles de E en $\mathbb{R}$). Es decir, si $s < t$:*

$$P_sP_t = P_{s+t}.$$

Demostración

Basta demostrarlo para las indicadoras, pues se extiende naturalmente a las funciones medibles usando los teoremas de convergencia.

$$\begin{aligned}
P_{s+t}\mathbb{1}_B(x) &= \int_E \mathbb{1}_B(y)P_{s+t}(x,dy) \\
&= P_{s+t}(x,B) \\
&= \mathbb{P}(X_{t+s} \in B|X_0 = x) \\
&= \mathbb{P}^x\left(X_{t+s} \in B\right) \\
&= \int_\Omega \mathbb{P}(X_{s+t} \in B|X_s)d\mathbb{P}^x \\
&= \int_E \mathbb{P}(X_{s+t} \in B|X_s = y)d\mathbb{P}^x_{X_s}(dy) \\
&= \int_E \mathbb{P}(X_{s+t} \in B|X_s = y)dP_s(x,dy) \\
&= \int_E P_t(y,B)dP_s(x,dy) \\
&= P_sP_t(x,B) \\
&= P_sP_t\mathbb{1}_B(x).
\end{aligned}$$

■

1.3 Propiedad de Markov para difusiones

Las soluciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas del siguiente tipo

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad s \leq t \quad X_s = x \text{ condicíon inicial}$$

donde B_t es un movimiento browniano m-dimensional, son llamadas difusiones.

Bajo las condiciones del teorema de existencia fuerte de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas, existe una única solución fuerte. Denotaremos a esta solución $X_t = X_t^{s,x}, s \leq t$. Si $s = 0$ escribiremos X_t^x en lugar de $X_t^{0,x}$.

Proposición 1.17 *X es homogéneo con respecto al tiempo, es decir, $X_{s+h}^{s,x}$ tiene la misma distribución que $X_h^{0,x}$.*

Demostración

$$\begin{aligned} X^{s,x}_{s+h} &= x + \int_s^{s+h} b(X^{s,x}_u)du + \int_s^{s+h} \sigma(X^{s,x}_u)dB_u \\ &= x + \int_0^h b(X^{s,x}_{s+v})dv + \int_0^h \sigma(X^{s,x}_{s+v})d\tilde{B}_v \end{aligned}$$

donde $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$ es un movimiento browniano.
Es decir, el proceso $X^{s,x}_{s+t}$ satisface la ecuación

$$dX^{s,x}_{s+t} = b(X^{s,x}_{s+t})dt + \sigma(X^{s,x}_{s+t})dB_t.$$

Observación: La anterior igualdad entre las dos integrales estocásticas se da por lo siguiente.
Sea $\Pi_n = [t_0, t_1, t_2, ..., t_n]$ donde $t_0 = 0$, $t_n = h$ partición del intervalo $[0, h]$

$$\begin{aligned} \int_0^h \sigma(X_{s+v})d\tilde{B}_v &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^n \sigma(X_{s+t_i})\Delta\tilde{B}_{t_{i+1}} \\ &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sigma(X_{s+t_1})\Delta\tilde{B}_{t_1} + \ \ ... \ \ + \sigma(X_{s+t_n})\Delta\tilde{B}_{t_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sigma(X_{s+t_1})\left[B_{s+t_1} - B_s - (B_{s+0} - B_s)\right] + \ \ ... \\ &\qquad\qquad + \left[B_{s+t_n} - B_s - \left(B_{s+t_{n-1}} - B_s\right)\right] \\ &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sigma(X_{s+t_1})\Delta B_{t_1} + \ \ ... \ \ + \sigma(X_{s+t_n})\Delta B_{t_n} \\ &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^n \sigma(X_{s+t_i})\Delta B_{s+t_i} \\ &= \lim_{|\Pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^n \sigma(S_{u_i})\Delta B_{u_i} \\ &= \int_s^{s+h} \sigma(X_u)dB_u \end{aligned}$$

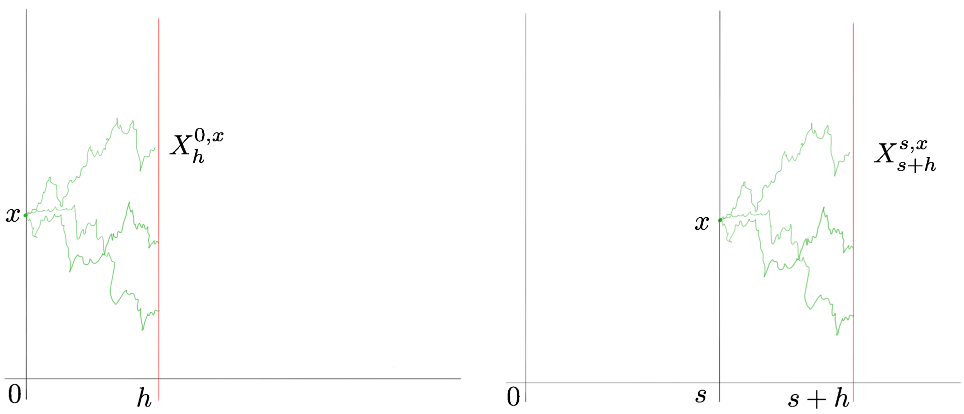
Por otra parte, si $s = 0$ se tiene que:

$$X^{0,x}_h = x + \int_0^h b(X^{0,x}_v)dv + \int_0^h \sigma(X^{0,x}_v)dB_v,$$

es decir, el proceso $X_t^{0,x}$ satisface la ecuación

$$dX_t^{0,x} = b(X_t^{0,x})dt + \sigma(X_t^{0,x})dB_t.$$

Como $X_t^{0,x}$ y $X_{s+t}^{s,x}$ satisfacen la misma diferencial, por el teorema de existencia y unicidad, deben tener las mismas distribuciones finito dimensionales, denotadas P^0. Por lo tanto, X es homogéneo con respecto al tiempo. ■



Definición 1.18 *Definimos* $\mathbb{P}^x$ *la ley de probabilidad para* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *con* $x \in \mathbb{R}^n$ *es decir,* $\mathbb{P}^x$ *es la distribución de* X_t *dado que* $X_0 = x$

$$\mathbb{P}^x \left[X_{t_1} \in E_1, ..., X_{t_k} \in E_k\right] := \mathbb{P}^0 \left[X_{t_1}^x \in E_1, ..., X_{t_k}^x \in E_k\right]$$

donde $E_i \subset \mathbb{R}^n$ *pertenece a la* σ*-álgebra de Borel.*

Denotaremos por $\mathcal{F}_t^{(m)}$ *a la* σ*-álgebra generada por* $\{B_r; r \leq t\}$ *movimiento browniano m-dimensional y por* $\mathcal{M}_t$ *a la* σ*-álgebra generada por* $\{X_r; r \leq t\}$.

Una consecuencia del teorema de existencia de soluciones, es que X_t *es un proceso* $\mathcal{F}_t$*-medible y por lo tanto* $\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{F}_t^{(m)}$.

Teorema 1.19 Propiedad de Markov para difusiones.

Sea f *una función Borel-medible,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* X *una difusión. Entonces, para* t, $h \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t^{(m)}\right] = \mathbb{E}^{X_t}\left[f(X_h)\right].$$

Notación: $\mathbb{E}^y\left[f(X_t)\right] := \mathbb{E}\left[f(X_t^y)\right].$

1.4 La propiedad fuerte de Markov

Definición 1.20 *Sea $\{\mathcal{N}_t\}$ familia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una función*

$$\tau : \Omega \to [0, \infty]$$

es tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{N}_t\}$ si $\{\omega \in \Omega \,|\, \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t \ \forall\, t \geq 0$.

Ejemplos:

1- Si $\tau(\omega) \equiv t_0 \ \forall\, \omega$ entonces τ es tiempo de paro, pues

$$\{\omega |\, \tau(\omega) \leq t\} = \begin{cases} \Omega, & \text{si } t \leq t_0, \\ \emptyset, & \text{si } t > t_o. \end{cases}$$

2- Sea X una difusión adaptada a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. $\tau_U := \inf\{t > 0;\ X_t \notin U\}$ es un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y se le llama tiempo de salida de U. Lo anterior es también válido para U boreliano.

La prueba se puede leer en Dynkin, Markov Processes, volumen 1, página 109.

Definición 1.21 *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{M}_t\}$. La σ-álgebra parada $\mathcal{M}_\tau$ se define como:*

$$\mathcal{M}_\tau = \textit{la } \sigma\textit{-álgebra generada por } \{X_{\min(s,\tau)}\}_{s\geqslant 0}.$$

Es decir, para cada $\omega \in \Omega$ tenemos una sigma álgebra $\mathcal{M}_{\tau(\omega)}$.

Observación: Si X es una difusión adaptada a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y τ es un tiempo de paro con respecto a esta, entonces X_τ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_\tau$ -medible, donde

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Teorema 1.22 Propiedad fuerte de Markov para difusiones
Sea f una función Borel acotada en $\mathbb{R}^n$, τ un tiempo de paro con respecto a $\mathcal{F}_t^{(m)}$ tal que $\tau < \infty$ c.s. Entonces:

$$\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau+h}) | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] = \mathbb{E}^x \left[f(X_h) | X_\tau \right].$$

La prueba se puede leer en Oksendal, Introduction to Stochastic Diferential Equations.

2 Difusiones y sus propiedades

2.1 Hitting distribution, medida armónica y propiedad del valor promedio

Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ medible, τ_H el primer tiempo de salida de H de una difusión X, α otro tiempo de paro y g una función medible y acotada en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1 *Sea X un proceso y $\{g_i\}_{i \in I}$ $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones. Definimos al operador de translación Θ_{t_0} como sigue:*

$$\Theta_{t_0} g_1(X_t) \cdots g_n(X_t) = g_1(X_t \circ \Theta_{t_o}) \cdots g_n(X_t \circ \Theta_{t_o}) := g_1(X_{t_0+t}) \cdots g_n(X_{t_0+t}).$$

Ambas notaciones $\Theta_t g(X_t)$ y $g(X_t \circ \Theta_t)$ se usarán indistintamente a lo largo de este trabajo.

Definición 2.2 *Si τ es un tiempo de paro con respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, definimos al operador Θ_τ como*

$$g(X_t \circ \Theta_\tau)(\omega) = \begin{cases} g(X_{t+s}) & si\ \tau(\omega) = s < \infty \\ \Delta & si\ \tau(\omega) = \infty \end{cases}$$

donde Δ es la trayectoria idénticamente igual a Δ.

Como sabemos que X_τ es $\mathcal{F}_\tau$ medible, entonces es claro que $X_t \circ \Theta_\tau(\omega) = X_{\tau+t}(\omega)$ para toda ω y que $(\Theta_\tau \circ X_t)^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \subset \sigma(X_{\tau+t} \,:\, t \geq 0)$.

Teorema 2.3 Propiedad Fuerte de Markov: otras formulaciones
Usando la notación introducida, podemos reescribir la propiedad de Markov fuerte de las siguientes formas:
1*) Si Z es $\mathcal{F}_\infty$-medible y acotada (o positiva) entonces*

$$\mathbb{E}^x [Z \circ \Theta_\tau | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[Z | X_\tau].\ c.s.$$

2) *Si f es medible positiva:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x [f(X_{\tau+t}) | \mathcal{F}_\tau] &= \mathbb{E}^x [f(X_t \circ \Theta_\tau) | \mathcal{F}_\tau] \\ &= \mathbb{E}^x [f(X_t) | X_\tau] \\ &= P_t f(X_\tau). \end{aligned}$$

3) *Si f es medible positiva:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau+t+s})|\mathcal{F}_{\tau+t}\right] &= \mathbb{E}^x\left[f(X_s)\circ\Theta_{\tau+t}|\mathcal{F}_{\tau+t}\right]\\ &= \mathbb{E}^x\left[f(X_s)|X_{\tau+t}\right]\\ &= P_s f(X_{\tau+t}).\end{aligned}$$

Proposición 2.4 *Sea X una difusión adaptada a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*

$$\eta := g(X_{\tau_H})\mathbb{1}_{\{\tau_H<\infty\}}$$

α un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y definimos

$$\tau_H^\alpha := \inf\{t>\alpha | X_t \notin H\}$$

el primer tiempo de salida de X de H para $t>\alpha$. Entonces, se cumple que

$$\Theta_\alpha\eta\cdot\mathbb{1}_{\{\alpha<\infty\}} = g(X_{\tau_H^\alpha})\mathbb{1}_{\{\tau_H^\alpha<\infty\}}.$$

Demostración Demostraremos que

$$\Theta_\alpha g(X_{\tau_H})\mathbb{1}_{\{\tau_H<\infty\}}\cdot\mathbb{1}_{\{\alpha<\infty\}} = g(X_{\tau_H^\alpha})\mathbb{1}_{\{\tau_H^\alpha<\infty\}}.$$

Aproximemos a η por funciones η^k donde

$$\eta^k = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(X_{t_i})\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(\tau_H) \quad t_i = i\cdot 2^{-k}\, i=1,2,\cdots$$

$$\begin{aligned}\Theta_t\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(\tau_H(\omega)) &= \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(\tau_H\circ\Theta_t(\omega))\\ &= \begin{cases}1 & \text{si } \tau_H\circ\Theta_t(\omega)\in[t_i,t_{i+1})\\ 0 & \text{si } \tau_H\circ\Theta_t(\omega)\notin[t_i,t_{i+1})\end{cases}\\ &= \begin{cases}1 & \text{si } s+t\in[t_i,t_{i+1})\ ,\ \tau_H(\omega)=s\\ 0 & \text{si } s+t\notin[t_i,t_{i+1})\ ,\ \tau_H(\omega)=s\end{cases}\\ &= \begin{cases}1 & \text{si } s\in[t+t_i,t+t_{i+1})\ ,\ \tau_H(\omega)=s\\ 0 & \text{si } s\notin[t+t_i,t+t_{i+1})\ ,\ \tau_H(\omega)=s\end{cases}\\ &= \mathbb{1}_{\{\tau_H(\omega)\geq t\}}\cdot\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(\tau_H(\omega))\\ &= \mathbb{1}_{[t+t_j,t+t_{j+1})}(\tau_H^t(\omega))\end{aligned}$$

Entonces:

$$\Theta_t \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(\tau_H(\omega)) = \mathbb{1}_{[t+t_j,t+t_{j+1})}(\tau_H^t(\omega)).$$

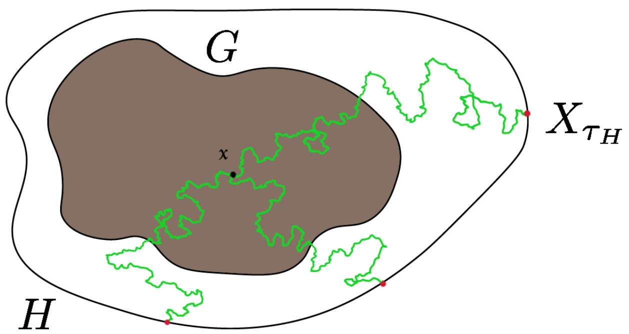
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Theta_t \eta &= \lim_{k\to\infty} \Theta_t \eta^k \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} \Theta_t g(X_{t_j}) \mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1}]}(\tau_H) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} g(X_{t+t_j}) \mathbb{1}_{[t+t_j,t+t_{j+1}]}(\tau_H^t) \\
&= g(X_{\tau_H^t}) \mathbb{1}_{\{\tau_h^t<\infty\}}.
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.5 *En particular, bajo las hipótesis del teorema anterior, si $G \subset\subset H$ son subconjuntos medibles,*
$x \in G$ sea $\alpha = \tau_G$ y $\tau_H < \infty$ c.s. entonces se satisface:

$$\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_H}) \right] = \int_{\partial G} \mathbb{E}^y \left[f(X_{\tau_H}) \right] \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy)$$



Demostración Como X es continuo,

$$\tau_H^\alpha = \tau_H \quad \text{y} \quad \Theta_{\tau_G} g(X_{\tau_H}) = g(X_{\tau_H}).$$

Ahora, sea f medible y acotada:

$$\begin{aligned}
E^x \left[f(X_{\tau_H}) \right] &= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_H}) | \mathcal{F}_{\tau_G} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[\Theta_{\tau_G} f(X_{\tau_H}) | \mathcal{F}_{\tau_G} \right] \right] \\
&\overset{\text{Markov Fuerte}}{=} \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_H}) | X_{\tau_G} \right] \right].
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_H})|X_{\tau_G}\right]$ es una función X_{τ_G}-medible, existe Y función boreliana tal que $Y \circ X_{\tau_G(\omega)} = \mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_H})|X_{\tau_G}\right]$.
Por lo tanto,

$$\mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_H})|X_{\tau_G}\right]\right] = \mathbb{E}^x\left[Y(X_{\tau_G})\right] \overset{\text{TCV}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} Y(y)\, d\mathbb{P}^x_{X_{\tau_G}}(dy)$$

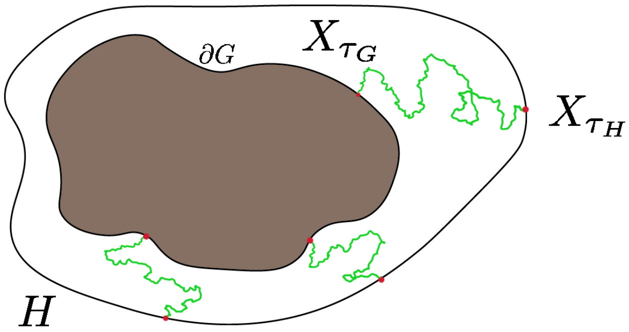
donde $\mathbb{P}^x_{X_{\tau_G}}$ es la medida inducida por X_{τ_G} en $\mathbb{R}^n$:
Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es Borel-medible, $\mathbb{P}^x_{X_{\tau_G}}(A) := \mathbb{P}^x(X^{-1}_{\tau_G}(A)) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in A)$.

Como $X_{\tau_G} \in \partial G$, entonces $\mathbb{P}^x_{X_{\tau_G}}(A) = 0$ si $A \cap \partial G = \emptyset$.
Por lo anterior,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} Y(y)\, \mathbb{P}^x_{X_{\tau_G}}(dy) &= \int_{\partial G} Y(y)\, \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy) \\
&= \int_{\partial G} Y(y)\, \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy) \\
&= \int_{\partial G} \mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_H})|X_{\tau_G} = y\right] \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy) \\
&= \int_{\partial G} \mathbb{E}^x\left[\Theta_{\tau_G} f(X_{\tau_H})|X_{\tau_G} = y\right] \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy) \\
&= \int_{\partial G} \mathbb{E}^y\left[f(X_{\tau_H})\right] \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_H})\right] = \int_{\partial G} \mathbb{E}^y\left[f(X_{\tau_H})\right] \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in dy). \tag{1}$$



Definición 2.6 *Sea $G \subset H$ medibles, definimos la medida armónica de X en ∂G como*

$$\mu^x_G(F) := \mathbb{P}^x(X_{\tau_G} \in F)$$

para F subconjunto medible de ∂G y $x \in G$.

Ahora, sea

$$\phi(x) := \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_H}) \right].$$

Entonces, por (1), si $x \in G$, ϕ satisface la propiedad del valor promedio:

$$\phi(x) = \int_{\partial G} \phi(y) \mu_G^x(dy).$$

Es decir, podemos obtener el valor esperado de f en X_{τ_H} iniciando en $x \in G$ integrando el valor esperado iniciando en $y \in \partial G$ con respecto a la medida armónica.

2.2 El generador infinitesimal de una difusión

Definición 2.7 *Sea X una difusión en $\mathbb{R}^n$. El generador infinitesimal A de X se define como:*

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}^x \left[f(X_t) \right] - f(x)}{t} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

siempre que este exista.
- *El conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que existe el limite en x se denota $\mathcal{D}_A(x)$.*
- *El conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que existe el limite $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ se denota $\mathcal{D}_A$.*

Intuición detrás de esta definición:
Recordemos que la derivada en cero de una función diferenciable $h(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ está dada por

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$$

y $h'(0)$ nos da el comportamiento infinitesimal de h en 0. Por Taylor, para x "suficientemente pequeño",

$$h(x) \approx h(0) + xh'(0).$$

Ahora, si X es un proceso y f una funcion de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ medible,

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}^x \left[f(X_t) \right] - f(x)}{t} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

es el comportamiento infinitesimal esperado de $f(X_0) = f(x)$.
Similarmente, para t suficientemente pequeño,

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right] \approx f(x) + tAf(x.$$

Por ejemplo, mas adelante se verá que si B es un movimiento browniano unidimensional

$$\mathbb{E}^x\left[f(B_t)\right] \approx f(x) + \frac{t}{2}f''(x).$$

En este capítulo, veremos que podemos calcular fácilmente el generador infinitesimal de una difusión con solo conocer la ecuación que satisface.

Lema 2.8 *Sea $Y_t = Y_t^x$ un proceso de Itô de la forma:*

$$Y_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t u(s,\omega)dB_s(\omega) \qquad B_t \text{ m.b. } m\text{-dimensional.}$$

Sea $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ y sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^m\}$. Asumimos que $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$ y que tanto $u(t,\omega)$ como $v(t,\omega)$ son acotadas en el conjunto de los (t,ω) tales que $Y_t(\omega)$ está en el soporte de f.
Entonces:

$$\mathbb{E}^x\left[f(Y_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i(s,\omega)\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{i,j}(s,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s)\right)ds\right]$$

Demostración Primero recordemos la fórmula de Itô:
Fórmula de Itô en $\mathbb{R}^n$:

Sea $Y(t,w)$ un proceso que satisface la siguiente diferencial:

$$dY = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$$

con

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix} B_t = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ \vdots \\ B_m(t) \end{bmatrix}$$

$$u_i = u_i(t,\omega) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}(t,\omega) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}.$$

Si $g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_p(t,x))$ entonces la k-ésima entrada de $g(Y_t)$ esta dada por:

$$dZ_k(t) = dg_k(Y) = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,Y)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,Y)dY_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X)dY_i dY_j$$

donde la i-ésima entrada del proceso Y_t está dada por:

$$dY_i = u_i dt + v_{i1}dB_1 + \cdots + v_{im}dB_m = u_i dt + \sum_{k=1}^{m} v_{ik}dB_k = u_i dt + (v \cdot dB)_i.$$

Si $g(t,x) = f(x)$ donde $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, entonces aplicando la fórmula de Itô obtenemos que:

$$dZ = df(Y) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y)dY_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)dY_i dY_j.$$

Obsérvese que el término $\frac{\partial f}{\partial t}$ no aparece puesto que f no depende de t.

$$\begin{aligned} dY_i dY_j &= \left(u_i dt + \sum_{k=1}^{m} v_{ik}dB_k\right) \cdot \left(u_j dt + \sum_{n=1}^{m} v_{jn}dB_n\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} v_{ik}dB_k\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} v_{jn}dB_n\right) \\ &= \sum_k v_{ik}v_{jk}dt \\ &= (v \cdot v^T)_{i,j}dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$df(Y) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y)(u_i dt + (v \cdot dB)_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)(v \cdot v^T)_{i,j}dt.$$

Como τ es finito casi seguramente, podremos evaluar en $t = \tau$ la expresión anterior, y calcular la esperanza:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f(Y_\tau) - f(Y_0)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y)(u_i dt + (v \cdot dB)_i) + \frac{1}{2}\int_0^\tau \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)(v \cdot v^T)_{i,j} dt\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(Y_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}\Bigg[&\int_0^\tau \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(v \cdot v^T)_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)\right) dt \\
&+ \int_0^\tau \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y)(v \cdot dB)_i)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(Y_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}&\left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(v \cdot v^T)_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)\right) dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \sum_{i,k} v_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) dB_k\right].
\end{aligned}$$

Para concluir la prueba, sólo falta demostrar que:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \sum_{i,k} v_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) dB_k\right] = 0.$$

Recordemos que si $f(\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible, entonces $\mathbb{E}\left[\int_0^t f(\omega) dB_t\right] = 0$.
Sea g una función Borel-medible tal que $|g| < M$ para algún $M \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^k \underbrace{\mathcal{X}_{\{s<\tau\}} g(Y_s)}_{\mathcal{F}_t\text{medible}} dB_s\right] = 0.$$

Además $L_2(\Omega)$-$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s) dB_s = \int_0^\tau g(Y_s) dB_s$ pues, por isometría de Itô:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\tau g(Y_s) dB_s - \int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s) dB_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_{\tau\wedge k}^\tau g^2(Y_s) ds\right)\right] \\
&\leq M^2 \mathbb{E}\left[\tau - \tau \wedge k\right].
\end{aligned}$$

Como $|\tau - \tau\wedge k| \ \leq 2|\tau| \ \forall k \in \mathbb{N}$ y $2\tau \in L_1(\Omega)$, por el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_{k\to\infty} M^2 \mathbb{E}\left[\tau - \tau\wedge k\right] = M^2 \mathbb{E}\left[\lim_{k\to\infty} \tau - \tau\wedge k\right] = 0.$$

Por lo tanto, $L_2(\Omega)\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s = \int_0^{\tau} g(Y_s)dB_s$.

Por el teorema de Schwartz:

Si $X_n \to X$ en $L_2(\Omega)$ donde Ω es un espacio de probabilidad, entonces

$$\int_\Omega |X_n - X| d\mathbb{P} \leq \left(\int_\Omega |X_n - X|^2 d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es decir, si $X_n \overset{L_2}{\to} X$ entonces $X_n \overset{L_1}{\to} X$.
Además, si $X_n \overset{L_1}{\to} X$ entonces $\mathbb{E}\left[X_n\right] \to \mathbb{E}\left[X\right]$ puesto que:

$$|\mathbb{E}\left[X_n\right] - \mathbb{E}\left[X\right]| = |\mathbb{E}\left[X_n - X\right]| \leq \mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo cual obtenemos que $\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s \overset{L_1}{\longrightarrow} \int_0^{\tau} g(Y_s)dB_s$ y por la observación anterior:

$$0 = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s\right] \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} g(Y_s)dB_s\right].$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} g(Y_s)dB_s\right] = 0.$$

Con esto, podemos concluir que:

$$\mathbb{E}\left[f(Y_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau} \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(v\cdot v^T)_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y)\right)dt\right].$$

■

Teorema 2.9 *Sea X una difusión que satisface $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ con b_i y $\sigma_{i,j}$ acotadas por una función $g \in L_1$. Si $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ y*

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Es decir, podemos calcular el generador infinitesimal de X usando únicamente los coeficientes de la ecuación que satisface. Más adelante veremos que no es la única forma. El generador infinitesimal está íntimamente ligado con otros dos conceptos que se estudiarán más adelante: la medida de velocidad y la función de cambio de escala de una difusión.

Demostración

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_t)\right] - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sum_i b_i(X_s(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\right)dt\right]}{t}$$

Para algún $u \in [0,t]$:

$$\overset{T.V.M.}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_i b_i(X_u(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_u)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_u)\right)\right]\cdot t}{t}$$

$$\overset{T.C.D.}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{t\to 0}\left(\sum_i b_i(X_u(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_u)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_u)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)\right] \quad \text{pues } X_0 = x$$

$$= \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

■

Ejemplos:

• El generador infinitesimal del movimiento browniano n-dimensional $dX_t = dB_t$

$$\begin{bmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ \vdots \\ dX_t^n \end{bmatrix} = 0dt + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{I_{n\times n}} \begin{bmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \\ \vdots \\ dB_t^n \end{bmatrix}$$

Sea $f(x_1,\ldots,x_n) \in C_0^2(R^n)$ Entonces, el generador $\mathcal{A}f$ esta dado por:

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \underbrace{\left(I_{n\times n}\cdot I_{n\times n}^T\right)_{ij}}_{\delta_j^i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\Delta f(x)$$

• La gráfica del movimiento browniano:

Sea $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ proceso que satisface la diferencial $\begin{cases} dX_1 = dt & X_1(0) = t_0 \\ dX_2 = dB_t & X_2(0) = x_0 \end{cases}$

es decir:

$$dX = bdt + \sigma dB \text{ con } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, si $f = f(t,x) \in C_0^2$, el generador $\mathcal{A}f$ esta dado por:

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

3 La fórmula de Dynkin, aplicaciones y el operador característico

3.1 La fórmula de Dynkin

La fórmula de Dynkin es una consecuencia directa del Teorema 2.9 y del lema 2.8 :

Teorema 3.1 *Si X es una difusión y τ un tiempo de paro acotado casi seguramente, entonces:*

$$\mathbb{E}\left[f(X_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s)ds\right] \quad \textit{si } f \in C_o^2.$$

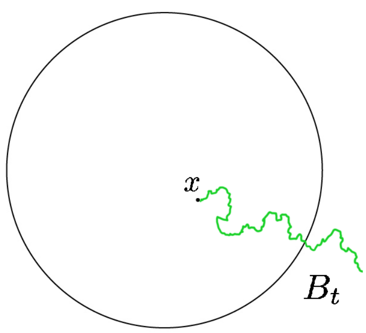
Observación: Si τ es el tiempo de salida de un conjunto acotado medible y se cumple que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ entonces la fórmula de Dynkin es válida para $f \in C^2$. *Oksendal, Introduction to Stochastic Diferencial Equations, página 121.*

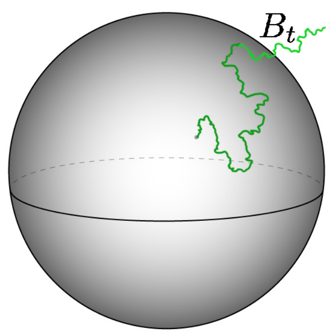
Obsérvese que, con esta fórmula, podemos calcular distintas probabilidades y obtener propiedades de la difusión sin conocer la solución de la ecuación explícitamente, únicamente usando su generador infinitesimal, que como vimos, es muy fácil obtener a partir de la ecuación diferencial estocástica. A continuación veremos algunos ejemplos.

3.2 Aplicaciones:

A- Tiempo de salida del movimiento browniano de una esfera

Sea $B = (B_1, \ldots, B_n)$ un movimiento browniano n-dimensional que inicia en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $|a| < R$.





¿Cual es el valor esperado de salida τ_K de B de la bola K de radio R, donde $K = K_R = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \ |x| < R\}$?

No sabemos si τ_K es finito casi seguramente, por lo que no podemos aplicar la fórmula de Dynkin directamente. Por ello, definimos el tiempo de paro $\sigma_k = \min\{k, \tau_K\}$, claramente es acotado por k y $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \tau_K$ Aplicamos la fórmula de Dynkin a:

$$\begin{cases} X = B \\ \tau = \sigma_k = \min\{k, \tau_K\} \\ f(x) = |x|^2 \text{ si } x \leq R \\ \text{(completamos a } f \text{ fuera de la bola de modo que esté en } C_0^2 \text{)} \end{cases}$$

Obsérvese que $\Delta f = \Delta \left(\sum_i^n x_i^2\right) = 2n$ y que $f(B_{\sigma_k}) \leq R^2$, por lo que:

$$\begin{aligned} R^2 \geq \mathbb{E}^a \left[f(B_{\sigma_k})\right] = f(a) + \mathbb{E}^a \left[\int_0^{\sigma_k} \frac{1}{2} \Delta f(B_s) ds\right] \\ = |a|^2 + \mathbb{E}^a \left[\int_0^{\sigma_k} n \, ds\right] \\ = |a|^2 + n\mathbb{E}^a \left[\sigma_k\right]. \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} R^2 \geq |a|^2 + n\mathbb{E}^a \left[\sigma_k\right] \\ \mathbb{E}^a \left[\sigma_k\right] \leq \frac{1}{n}\left(R^2 - |a|\right) \quad \text{para toda } k \\ \text{y entonces } \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^a \left[\sigma_k\right] = \frac{1}{n}\left(R^2 - |a|\right) < \infty \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Como $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas, por el teorema de convergencia monótona:

$$\mathbb{E}^a \left[\tau_K\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^a \left[\sigma_k\right] < \infty \text{ c.s. por lo anterior. Por lo cual:}$$

$$\mathbb{E}^a \left[\tau_K\right] < \infty.$$

Ahora, por la fórmula de Dynkin para el tiempo de paro τ_K:

$$
\begin{aligned}
R^2 = \mathbb{E}^a\left[f(B_{\tau_K})\right] &= f(a) + \mathbb{E}^a\left[\int_0^{\tau_K} \frac{1}{2}\Delta f(X_s) ds\right] \\
&= |a|^2 + \mathbb{E}^a\left[\int_0^{\tau_K} n\, ds\right] \\
&= |a|^2 + n\mathbb{E}^a\left[\tau_K\right]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}^a\left[\tau_K\right] = \frac{1}{n}\left(R^2 - |a|\right)
$$

Es decir, el tiempo esperado de salida de un movimiento browniano de una bola de radio R en $\mathbb{R}^n$ es $\frac{1}{n}\left(R^2 - |a|\right)$.

B- Probabilidad de escape y recurrencía del movimiento browniano

Una vez mas, consideremos la bola K_R de radio R centrada en 0. Sea $b \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ tal que $2^k R > |b| > R$. Sea α_k el primer tiempo de salida del anillo:

$$
A_k = \{x \in \mathbb{R}^n | R < |x| < 2^k R\} \quad k \in \mathbb{N}.
$$

¿Cual es la probabilidad de que un movimiento browniano B iniciando en b escape de A_k por la frontera interior ∂K_R en lugar de por la frontera exterior $\partial K_{2^k R}$?

Para un conjunto medible G definimos $T_G = \inf\{t > 0 | X_t \in G\}$ y sea $f = f_{n,k} \in C_0^2$ tal que si $R \leq |x| \leq 2^k R$ entonces:

$$
f(x) = \begin{cases} -\log|x| \text{ si } n = 2 \quad (\mathbb{R}^2) \\ \\ |x|^{2-n} \text{ si } n \geq 2 \quad \left(\mathbb{R}^{n\geq 2}\right) \end{cases}
$$

(f satisface $\Delta f = 0$)

f se puede extender a todo $\mathbb{R}^n$ de manera que sea C_0^2.
Definimos al tiempo de paro

$$
\alpha_k := \min\{T_{\partial K_R}, T_{\partial K_{2^k R}}\} = \inf\{t \,|\, X_t \in A_k^c\}.
$$

Nótese que α_k es la primera vez que el proceso escapa del anillo, puesto que debe hacerlo por alguna de las dos fronteras. Por la fórmula de Dynkin, por un lado se tiene que

$$\mathbb{E}^b\left[f(B_{\alpha_k})\right] = f(b) + \mathbb{E}^b\left[\int_0^{\alpha_k} \frac{1}{2}\Delta f(X_s)ds\right] = f(b)$$

Por otro lado, obsérvese que la norma del browniano parado en α_k solo puede tomar dos valores:

$$|B_{\alpha_k}| = \begin{cases} R & \text{con probabilidad } p_k \\ 2^k R & \text{con probabilidad } q_k \end{cases}$$

donde $p_k = \mathbb{P}^b\left(|B_{\alpha_k}| = R\right)$ es la probabilidad de que al salir de anillo, lo haga por la frontera interior y $q_k = \mathbb{P}^b\left(|B_{\alpha_k}| = 2^k R\right)$ es la probabilidad de que al salir del anillo, lo haga por la frontera exterior. Entonces

$$p_k = \mathbb{P}^b\left(T_{\partial K_R} < T_{\partial K_{2^k R}}\right)$$
$$q_k = \mathbb{P}^b\left(T_{\partial K_R} > T_{\partial K_{2^k R}}\right).$$

Caso $n = 2$:
Por lo anterior, $\mathbb{E}^b\left[f(B_{\alpha_k})\right] = f(b) = \log|b|$

$$f(|B_{\alpha_k}|) = \begin{cases} -\log R & \text{con probabilidad } p_k \\ -\log(2^k R) & \text{con probabilidad } q_k \end{cases}$$

Así:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^b\left[f(B_{\alpha_k})\right] = -\log(R)\cdot p_k + (-\log(2^k R))q_k &= -\log|b| \\ -\log(R)\cdot p_k - \left(\log(2^k) + \log(R)\right) q_k &= -\log|b| \\ -\log(R)\cdot p_k - (k\log 2 + \log R)q_k &= -\log|b|. \end{aligned}$$

Por lo cual:

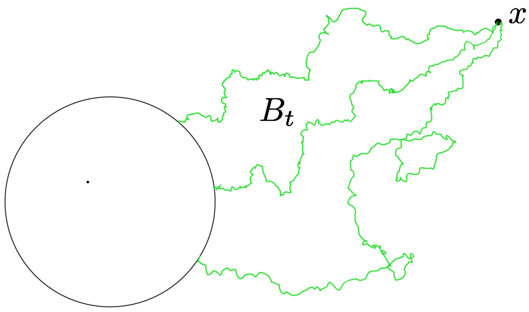
$$\lim_{k\to\infty} -\log(R)\cdot p_k - (k\log 2 + \log R)q_k = -\log|b| < \infty$$

y como $\lim_{k\to\infty} -k\log 2 = -\infty$ para $0 \leq p_k,\, q_k \leq 1$
entonces $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$ y por lo tanto

$$\mathbb{P}^b(T_{\partial K_R} < \infty) = 1.$$

Es decir, con probabilidad 1 el movimiento browniano entra eventualmente a la bola de radio R.

Decimos entonces que el movimiento browniano es recurrente en $\mathbb{R}^2$



Caso $n \geq 3$

$\mathbb{E}^b\left[f(B_{\alpha_k})\right] = f(b) = |b|^{2-n}$

$$f(|B_{\alpha_k}|) = \begin{cases} R^{2-n} & \text{con probabilidad } p_k \\ (2^kR)^{2-n} & \text{con probabilidad } q_k \end{cases}$$

Similarmente:

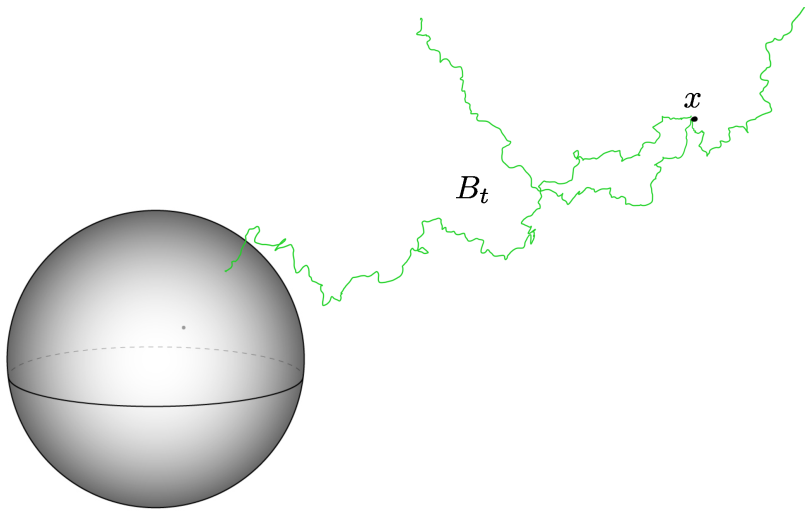
$$\mathbb{E}\left[f(B_{\alpha_k})\right] = p_k \cdot R^{2-n} + q_k \cdot (2^kR)^{2-n} = |b|^{2-n}$$
$$\lim_{k\to\infty} p_k \cdot R^{2-n} + q_k \cdot (2^kR)^{2-n} = |b|^{2-n} < \infty$$

Como $\lim_{k\to\infty}(2^kR)^{2-n} = \infty$ entonces $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$

$$\lim_{k\to\infty} p_k R^{2-n} = |b|^{2-n}$$
$$\lim_{k\to\infty} p_k = \frac{|b|^{2-n}}{R^{2-n}} = \mathbb{P}^b(T_{\partial K_R} < \infty) < 1.$$

Es decir, el movimiento browniano entra a la bola de radio R con probabilidad menor a 1.

Decimos entonces, que el movimiento browniano es transitorio si $n \geq 3$



3.3 El operador característico

Definición: Sea X una difusión. El operador característico $A = A_X$ de X se define como:

$$Af(x) = \lim_{U_i \downarrow x} \frac{\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_{U_i}}) \right] - f(x)}{\mathbb{E}\left[\tau_{U_i}\right]} \qquad \tau_{U_i} = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin U_i\}$$

donde $\{U_i\}_{i \in N}$ es una familia de abiertos que decrecen al punto x en el siguiente sentido:

- $U_{k+1} \subset U_k$
- $\bigcap_k U_k = \{x\}$.

El conjunto de funciones f para las cuales existe el limite para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para toda familia $\{U_k\}$ se denota $\mathcal{D}_A$. Si $\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right] = \infty$ para todo abierto U con $x \in U$, definimos $Af(x) = 0$.

Definición: Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es una trampa para X si

$$\mathbb{P}^x(\{X_t = x \ \text{ para todo } \ t \geq 0\}) = 1.$$

Es decir, si $\tau_{\{x\}} = \infty$ c.s. $\mathbb{P}^x$.

Lema: Si x no es una trampa para X, entonces existe un abierto U con

$x \in U$ tal que $\mathbb{E}^x[\tau_U] < \infty$.

La prueba se puede leer en [11] Dynkin, Markov Processes volumen 1, Lema 5.5.

Teorema 3.2 *Sea $f \in \mathcal{C}^2$. Entonces $f \in \mathcal{D}_A$ y*

$$Af = \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\sigma \sigma^T\right)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \mathcal{A} f.$$

Demostración Sea $Lf = \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\sigma \sigma^T\right)_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$
Nótese que si $f \in C_0^2$, entonces $Lf = \mathcal{A} f$.

• Si x es una trampa de X entonces $\mathbb{P}^x(X_t = x \ \forall t) = 1$, por lo tanto $\mathbb{E}^x[\tau_U] = \infty$ y por definición $\mathcal{A} f = 0$.
Sea V un abierto tal que $x \in V$. Denotamos f_0 a la modificación de f fuera de V de modo que $f_0 \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces tenemos que $f_0 \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$ (*[4] Oksendal, Introduction to Stochastic Diferenctial Equations, Capítulo 7*) y

$$\mathcal{A} f_0 = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t}.$$

Como

$$\mathbb{E}^x[f_0(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y) d\mathbb{P}^x_{X_t}(dy) \quad \text{donde} \quad \mathbb{P}^x_{X_t}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Entonces $\mathbb{E}^x[f_0(X_t)] = f_0(x)$ y por lo tanto $Af_0 = 0$ y:

$$Af = Af_0 = \mathcal{A} f = 0.$$

• Si x no es una trampa de X entonces sea U abierto que contiene a x y tal que $\mathbb{E}^x[\tau_U] < \infty$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_U})\right]-f(x)}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}-Lf(x)\right| &\overset{Dynkin}{=} \left|\frac{\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_U} Af(X_s)ds\right]}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}-\frac{Lf(x)\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}\right| \\
&= \left|\frac{\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_U} Af(X_s)ds\right]-\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_U} Lf(x)ds\right]}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}\right| \\
&= \left|\frac{\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_U} Lf(X_s)-Lf(x)ds\right]}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}\right| \\
&\leq \left|\frac{\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_U} \sup_{y\in U}\{|Lf(y)-Lf(x)|\}ds\right]}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]}\right| \\
&= \frac{\sup_{y\in U}\{|Lf(y)-Lf(x)|\}\mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_U} 1ds\right]}{\mathbb{E}^x\left[\tau_U\right]} \\
&\leq \sup_{y\in U}\{|Lf(y)-Lf(x)| \overset{U\downarrow x}{\to} 0
\end{aligned}
$$

puesto que Lf es continua por ser f función C^2.

■

Ejemplo: El movimiento browniano en el circulo unitario.

Sea $X = B$ un movimiento browniano 1-dimensional y

$$g(t,x) = e^{ix} = (\cos(x), \sin(x)) = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Definimos el proceso Y como:

$$Y(t) = g(t, X_t) = e^{iB_t} = (\cos B_t, \sin B_t.)$$

Por la fórmula de Itô, las coordenadas (Y_1, Y_2) del proceso $Y(t)$ satisfacen:

$$dY_i = \frac{\partial g_i}{\partial x}(X_t)dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_i}{\partial x \partial x}(X_t)dX_t \qquad i = 1, 2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} dY_1(t) = -\sin(B_t)dB_t - \frac{1}{2}\cos(B_t)dt \\ dY_2(t) = \cos(B_t)dB_t - \frac{1}{2}\sin(B_t)dt. \end{cases}$$

Es decir, $Y(t) = (\cos B_t, \sin B_t)$ satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dY_1 = -\frac{1}{2}Y_1 dt - Y_2 dB_t \\ dY_2 = -\frac{1}{2}Y_2 dt + Y_1 dB_t. \end{cases}$$

En notación matricial: $dY(t) = -\dfrac{1}{2}Y(t)dt + KY(t)dB_t \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Llamamos al proceso Y el movimiento browniano en el círculo unitario. Recodemos que si $dY = b(Y)dt + \sigma(Y)dB$ entonces su generador infinitesimal está dado por :

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\sigma\sigma^T\right)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

En este caso, tenemos que:

- $b(Y) = -\dfrac{1}{2}Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y_1 \\ -\frac{1}{2}Y_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad b(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y_1 \\ -\frac{1}{2}y_2 \end{bmatrix}$

- $\sigma(Y) = KY = \begin{bmatrix} -Y_2 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$

- $\dfrac{1}{2}\sigma \cdot \sigma^T(y_1, y_2) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y_2 & y_1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} y_2^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & y_1^2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto $\mathcal{A}f(y) = \dfrac{1}{2}\left[y_2^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} - 2y_1y_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} + y_1^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} - y_1\dfrac{\partial f}{\partial y_1} - y_2\dfrac{\partial f}{\partial y_2}\right].$

Los dos siguientes problemas servirán para introducir temas que se abordarán en los siguientes capítulos.

2-Medida de velocidad:

Proposición 3.3 *Sea X una difusión uni-dimensional tal que* $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)db_t \quad X_0 = x$ *con operador característico* $\mathcal{A}$. *Sea* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *una solución a la siguiente ecuación diferencial:*

$$\mathcal{A}f(x) = b(x)f(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f'(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *un intervalo abierto tal que* $x \in (a, b)$ *y definimos*

$$\tau = \inf\{t > 0 | X_t \notin (a, b)\}$$

Asumimos que $\tau < \infty$ *c.s.* $\mathbb{P}^x$ *y sea* $p = \mathbb{P}^x [X_\tau = b]$.

Entonces:

$$p = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

En otras palabras, la medida armónica $\mu^x_{(a,b)}(x)$ *de X en* $\partial(a, b) = \{a, b\}$ *está dada por:*

$$\mu^x_{(a,b)}(b) = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)} \quad \mu^x_{(a,b)}(a) = \frac{f(b) - f(x)}{f(b) - f(a)}.$$

b) En el caso particular del proceso $X_t = x + B_t$ *tenemos que:*

$$p = \frac{x - a}{b - a}$$

c) Si:

$$X_t = x + \mu dt + \sigma dB_t$$

calcularemos el valor de p.

Demostración a) Sea f la solución de $\mathcal{A}f(x) = 0$. Por la fórmula de Dynkin:

$$\mathbb{E}^x [f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s)ds\right] = f(x).$$

Por otra parte, $f(X_\tau)$ solo puede tomar dos valores puesto que $X_\tau \in \partial(a, b)$ y por lo tanto:

$$\mathbb{E}^x [f(X_\tau)] = f(a)\mathbb{P}^x(X_\tau = a) + f(b)\mathbb{P}^x(X_\tau = b).$$

Entonces:

$f(a)(1-p)+f(b)p=f(x)$

$p=\mathbb{P}^x(X_\tau=b)=\mu^x_{(a,b)}(b)=\dfrac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}$

$1-p=\mathbb{P}^x(X_\tau=a)=\mu^x_{(a,b)}(a)=\dfrac{f(b)-f(x)}{f(b)-f(a)}.$

b) X_t satisface la siguiente diferencial:

$$dX_t=dB_t.$$

Recordemos que por la Proposición 2.9, si $dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t$ entonces, el generador infinitesimal de X_t esta dado por:

$$\mathcal{A}f=\sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}.$$

En este caso, $b=0$ y $\sigma=1$, por lo cual

$$\mathcal{A}f(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x\partial x}.$$

Una solución a la ecuación de Laplace en dimension 1

$$\mathcal{A}f(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x\partial x}=0 \quad \text{es simplemente} \quad f(x)=x.$$

Como consecuencia del inciso anterior con $f(x)=x$ tenemos que:

$$p=\frac{x-a}{b-a}.$$

Es decir, la probabilidad de que un movimiento browniano uni-dimensional escape por b habiendo empezado en x es $\frac{x-a}{b-a}$.

c) La difusión X_t satisface la siguiente diferencial:

$$dX_t=\mu dt+\sigma dB_t.$$

Esta vez, tenemos que $b(x)=\mu$ y $\sigma(x)=\sigma$ por lo que

$$\mathcal{A}f=\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}.$$

Una solución a la ecuación

$$\mathcal{A}f = \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 0 \quad \text{es} \quad f(x) = e^{-cx} \quad c = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\sigma}.$$

Por el inciso a) con $f(x) = e^{-cx}$ se tiene que:

$$p = \frac{e^{-cx} - e^{-ca}}{e^{-cb} - e^{-ca}}$$

$\blacksquare$.

Así, si tenemos una difusión X solución de una ecuación diferencial estocástica podemos obtener fácilmente su generador $\mathcal{A}$, y usando una solución a la ecuación $\mathcal{A}f = 0$ podemos calcular probabilidades de salida sin necesidad de tener una solución explícita a la ecuación diferencial estocástica.

Ahora nos preguntamos: dada una difusión, o de forma más general, un proceso de Markov, será posible modificarlo de modo que tenga un comportamiento "predecible" y siga cumpliendo la propiedad de Markov? Por ejemplo, a partir de un movimiento browniano, podemos obtener un nuevo proceso a partir de este tal que nunca tome el valor 0? O condicionarlo a escapar de un intervalo por uno de los dos extremos en particular? Y de ser posible, como proceder?

En la siguiente sección, mostraremos como a partir de un proceso de Markov, podemos obtener un nuevo proceso condicionado a comportarse de una forma específica.

El siguiente ejercicio servirá de motivación:

1-h-transformada de Doob

Sea B un movimiento browniano n-dimensional, $D \subset \mathbb{R}^n$ acotado y abierto, sea $h > 0$ función armónica en D ($\Delta h = 0$ en D). Sea X solución de

$$dX_t = \nabla(\ln h)(X_t)dt + dB_t.$$

Sean $\{D_k\}$ abiertos $\bar{D_k} \subset D$ tal que $\bigcup\limits^{\infty} D_k = D$. Supongamos que para cada D_k, la ecuación tiene una solución fuerte, para $t < \tau_{D_k}$. Esto da una solución natural para $t < \tau := \lim_{k\to\infty} \tau_{D_k}$

a)El generador A de X satisface:

$$Af = \frac{\nabla(hf)}{2h} \text{ para } f \in C_0^2(D) \quad \text{en particular, si } f = \frac{1}{h} \text{ entonces } \mathcal{A}f = 0$$

b)Si existe $x_0 \in \partial D$ tal que

$$\lim_{x\to y\in\partial D} h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x_0 \\ \infty & \text{si } y = x_0 \end{cases} \qquad \text{(i.e. h es una función kernel)}$$

$$\text{entonces: } \lim_{t\to\tau} X_t = x_0 \text{ a.s.}$$

Demostración:

a) Primero, calcularemos $\mathcal{A}f$:

$$\nabla(ln(h))(x) = \left(\frac{1}{h}\cdot h_{x_1}(x), \cdots, \frac{1}{h}\cdot h_{x_n}(x)\right) \quad \sigma = Id \quad \Rightarrow \sigma_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} h_{x_i}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h(x)} h_{x_i}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i \partial x_i} \\ &= \frac{1}{h(x)}\sum_{i=1}^{n} h_{x_i}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i \partial x_i}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{h}\nabla h \cdot \nabla f + \frac{1}{2}\Delta f.$$

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hf)}{\partial x_i} &= h_{x_i} f + h f_{x_i} \\ \frac{\partial^2(hf)}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}(h_{x_i} f + h f_{x_i}) = h_{x_i x_i} f + h f_{x_i x_i} + 2h_{x_i} h_{x_i}. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}
\Delta hf &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2(hf)}{\partial x_i \partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_{x_i x_i} f + h f_{x_i x_i} + 2h_{x_i} f_{x_i} \\
&= f \underbrace{\Delta h}_{0} + h \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i} + 2\nabla h \cdot \nabla f
\end{aligned}$$

Entonces $\Delta hf = h\Delta f + 2\nabla h \cdot \nabla f$.

Por lo tanto, $\dfrac{\Delta hf}{2h} = \dfrac{h\Delta f + 2\nabla h \cdot \nabla f}{2h} = \dfrac{\Delta f}{2} + \dfrac{\nabla h \cdot \nabla f}{h} = \mathcal{A}f$.

■

b) Sea $\{D_k\}$ una sucesión creciente de abiertos tal que $\bigcup D_k = D$ y sea $f = \frac{1}{h}$. Obsérvese que al ser $h > 0$ y armónica en D, $\frac{1}{h}$ es C^2 en D_k. Para cada D_k trabajaremos con la extensión C_0^2 de $\frac{1}{h}$.

$$\mathcal{A}f(x) = \mathcal{A}\frac{1}{h} = \frac{\Delta(h\frac{1}{h})}{2h} = 0.$$

Sea τ_{D_k} el tiempo de salida de X_t de D_k. Por Dynkin en D_k para la correspondiente extensión de $\frac{1}{h}$:

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{1}{h(X_{\tau_{D_k}})}\right] = \frac{1}{h(x)} < \infty \quad \text{para toda}\, k.$$

Por lo tanto, tenemos una sucesión de funciones $\{\frac{1}{X_{\tau_{D_k}}(\omega)}\}_k$ en $L^1(\Omega)$ acotadas por $\frac{1}{h(x)}$. Por el teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^x\left[\frac{1}{h(X_{\tau_{D_k}})}\right] = \mathbb{E}^x\left[\frac{1}{h(X_{\tau_D})}\right] = \frac{1}{h(x)}.$$

Por otra parte, $\frac{1}{h}$ solo toma dos valores en ∂D:

$$\frac{1}{h}(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Por lo que

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{1}{h(X_{\tau_D})}\right] = \infty \cdot \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \neq x_0) + 0 \cdot \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} = x_0) = \frac{1}{h(x)} < \infty.$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \neq x_0) = 0 \quad \text{por lo cual} \quad \mathbb{P}^x(X_{\tau_D} = x_0) = 1.$$

Dicho de otra forma, el proceso X_t se escapa de D por x_0
con probabilidad 1.

4 h-transformadas de Doob

Artículo: [2] Doob's h-transform: theory and examples, Alex Bloemendal.

4.1 Construcción del proceso h-transformado

En esta sección, X será un proceso de Markov homogéneo con kernel $\{P_t\}$, espacio de estados $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{F}_t$ su filtración natural.
Obsérvese que podemos reescribir la propiedad de Markov usando la notación del kenrel del proceso si f es una función medibla de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ como sigue:

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s\right] = P_t(f(X_s)) \quad \mathbb{P}^x \text{ c.s..}$$

Una versión mas general que nos será de utilidad es la siguiente:

Teorema 4.1 *Sea $F : \Omega \to R$ una función acotada y medible con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}$, la σ-álgebra generada por $\{X_s\}_{s>t}$, es decir, $\tilde{\mathcal{F}}$ es la σ-álgebra generada por el futuro del proceso X. Entonces se cumple que:*

$$\mathbb{E}\left[F \circ \Theta_t|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[F|X_t\right] \quad \mathbb{P}^x \ c.s.$$

Definición 4.2 *Decimos que una función h es armónica en el espacio de estados E si:*

$$P_t h = h. \quad \forall t \geq 0$$

Proposición 4.3 *h es armónica si y solo si $h(X_t)$ es martingala con respecto a $\mathbb{P}^x$.*

Demostración Primero supongamos que $P_t h = h \quad \forall t \geq 0$. Entonces:

$$P_t h(X_s) = h(X_s)$$

$$\mathbb{E}\left[h(X_t)|X_s\right] = h(X_s)$$

por lo que $h(X_t)$ es martingala.
Ahora supongamos que $h(X_t)$ es martingala.

Por un lado: $\quad \mathbb{E}^x\left[h(X_t)\right] = \mathbb{E}\left[h(X_t)|X_0 = x\right] = h(x).$

Por otro lado: $\quad \mathbb{E}^x[h(X_t)] = \int_E h(y)\mathbb{P}^x_{X_t}(dy) = \int_E h(y)P_t(x,dy) = P_t h(x).$

■

Definición 4.4 *Llamaremos $\mathcal{I}$ al conjunto de funciones invariantes bajo el operador de translación, es decir, que satisfacen que $F = F \circ \Theta_t \quad$ para todo $t >$* 0.

Definición 4.5 *Sea A un evento. Decimos que A es invariante bajo $(\Theta_t\, t \geq 0)$ si $\mathbb{1}_A \in \mathcal{I}$. Por ejemplo, si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es discreta, los eventos en la sigma-álgebra cola de X son invariantes.*

Motivación: Estudiaremos el comportamiento de los procesos markovianos cuando el tiempo tiende a infinito y por ello, nos interesamos en eventos A y funciones H invariantes bajo Θ_t. Existe una fuerte relación entre las funciones $H \in \mathcal{I}$ y las funciones armónicas:

Proposición 4.6 *Sea H una función medible en $\mathcal{I}$ y acotada. Entonces:*

$$h(x) := \mathbb{E}^x[H] \quad \textit{es una función armónica.}$$

Demostración Por 4.3 , basta probar que $h(X_t) = \mathbb{E}^{X_t}[H]$ es martingala.

$$h(X_t) = \mathbb{E}[H|X_t] \underset{Markov}{=} \mathbb{E}[H \circ \Theta_t|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[H|\mathcal{F}_t].$$

Entonces, si $s < t$:

$$\mathbb{E}[h(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[H|\mathcal{F}_s] = h(X_s).$$

Por lo tanto, $h(X_t)$ es martingala.

■

Proposición 4.7 *Sea h acotada tal que $\{h(X_t)\}_{t\geq 0}$ es martingala. Entonces:*
1) $G = L_1 - \lim_{t\to\infty} h(X_t)$ existe, está en L_1 y además $h(X_t) \to G$ c.s.
2) $G \in \mathcal{I}$.
3) $\mathbb{E}^x[G] = h(x)$, es decir, podemos recuperar la $h(x)$ inicial calculando la esperanza de H iniciando al proceso X en x.

Demostración 1)La primer afirmación es consecuencias del Teorema 1.4 (Primer Teorema de convergencia de martingalas de Doob)

2)$G \in \mathcal{I}$ puesto que:

$$G \circ \Theta_t = \lim_{s\to\infty} h(X_s) \circ \Theta_t = \lim_{s\to\infty} h(X_{s+t}) = G$$

3)
Como:

$$\lim_{t\to\infty} h(X_t(\omega)) = G(\omega)$$

$$\mathbb{E}^x[G] = \mathbb{E}^x\left[\lim_{t\to\infty} h(X_t)\right].$$

Como h es acotada, por el teorema de convergencia dominada:

$$\mathbb{E}^x[G] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^x[h(X_t)] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[h(X_t)|X_0 = x] = h(x)$$

pues $h(X_t)$ es martingala

■

Entonces, sea A un evento invariante, $H := \mathbb{1}_A$ y sea $h(x) = \mathbb{P}^x(A)$, la probabilidad de que ocurra A iniciando en x. Por la Proposición 4.3, h es armónica pues $h(x) = \mathbb{P}^x(A) = \mathbb{E}^x[H]$.

Proposición 4.8 *Sea $\tilde{S} := \{x \in S | h(x) > 0\}$ los estados desde los cuales el evento invariante A es accesible.*

Entonces, $(\tilde{\mathbb{P}^x}, x \in E)$ *definida como sigue es una medida de probabilidad en* $(\Omega, \mathcal{F})$

$$d\tilde{\mathbb{P}}^x = \frac{\mathbb{1}_A}{h(x)} d\mathbb{P}^x \quad x \in \tilde{S}.$$

Además es absolútamente continua con respecto a $\mathbb{P}^x$ *con* $x \in \tilde{S}$*:*

Demostración Claramente $\tilde{\mathbb{P}}^x$ es medida, y además es absolútamente continua con respecto a $\mathbb{P}^x$. Además:

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(\Omega) = \int_\Omega \frac{\mathbb{1}_A}{h(x)} d\mathbb{P}^x = \frac{\mathbb{P}^x(A)}{h(x)} = 1.$$

■

Obsérvece que esta definición de $\tilde{\mathbb{P}}^x$ no es mas que la probabilidad condicional $\mathbb{P}^x(B|A)$ pues

$$\tilde{\mathbb{P}}^x(B) = \int_B \frac{\mathbb{1}_A}{h(x)} d\mathbb{P}^x = \frac{\mathbb{P}^x\left(A \bigcap B\right)}{h(x)} = \frac{\mathbb{P}^x\left(A \bigcap B\right)}{\mathbb{P}^x(A)} = \mathbb{P}^x(B|A).$$

Proposición 4.9 *Restringiendo a* $\mathcal{F}_t$ *se cumple que:*

$$d\tilde{\mathbb{P}}^x\Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}^x\left[\frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}|\mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P}^x\big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{h(x)} d\mathbb{P}^x\big|_{\mathcal{F}_t} \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración La primera igualdad es consecuencia de la definición de esperanza condicional:

Para $B \in \mathcal{F}_t$ se tiene que

$$\int_B \mathbb{E}^x\left[\frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}|\mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P}^x = \int_B \frac{\mathbb{1}_A}{h(x)} d\mathbb{P}^x = \int_B d\tilde{\mathbb{P}}^x = \tilde{\mathbb{P}}^x(B).$$

La segunda igualdad es consecuencia de lo siguiente:

$$\int_B \mathbb{E}^x\left[\frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}|\mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P}^x \overset{Markov}{=} \int_B \mathbb{E}^x\left[\frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}|X_t\right] d\mathbb{P}^x = \int_B \frac{\mathbb{P}^x(A|X_t)}{h(x)} d\mathbb{P}^x$$

$$= \int_B \frac{\mathbb{P}^{X_t}(A)}{h(x)} d\mathbb{P}^x = \int_B \frac{h(X_t)}{h(x)} d\mathbb{P}^x.$$

Como lo anterior es valido para todo $B \in \mathcal{F}_t$ entonces restringido a $\mathcal{F}_t$ se tiene la igualdad c.s.

■

Teorema 4.10 h-transformadas de Doob

Con la medida $\tilde{\mathbb{P}}^x$ definida en la Proposición 4.8, X_t es un proceso de Markov homogéneo con respecto al tiempo en $\tilde{S}$, con kernel de transición:

$$\tilde{P}_t(x, dy) = \frac{h(y)}{h(x)} P_t(x, dy)$$

es decir, $\tilde{P} = h^{-1}Ph$. Definido de esta forma, $\tilde{P}_t$ forma un semigrupo y $\tilde{P}(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad. A esta fórmula se le conoce como la h-transformada de Doob . Esto implica que la probabilidad de transición condicionada $\tilde{\mathbb{P}}^x$ es absolútamente continua con respecto a la original y la proposición anterior nos da una forma de calcular la derivada de Radón Nikodin:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbb{P}}^x}{\partial \mathbb{P}^x} = \frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}.$$

La demostración se hará en el siguiente orden:

Probaremos que

i) $\tilde{P}_t(x, \cdot)$ es una medida de proabilidad.

ii) La familia $\{\tilde{P}_t\}$ forma un kernel de Markov, es decir, es un semigrupo (o dicho de otra forma, satisface la ecuación de Champan-Kolmogorov)

iii) X_t es un proceso de Markov con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}^x$.

iv) X_t admite a la familia $\{\tilde{P}_t\}$ como función de transición.

Demostración • El hecho de que $\tilde{P}_t(x, \cdot)$ es una medida se sigue de que $P_t(x, \cdot)$ sea una medida. Además es medida de probabilidad pues h es armónica ($P_t h = h$):

$$\tilde{P}_t(x, E) = \frac{1}{h(x)} \int_E h(y) P_t(x, dy) = \frac{1}{h(x)} P_t h(x) = \frac{1}{h(x)} h(x) = 1.$$

• Probaremos que $\tilde{P}_{t+s} = \tilde{P}_t \tilde{P}_s$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_{t+s}f(x) &= \frac{1}{h(x)}P_{t+s}(x,dy)f(y)h(y) \\
&= \frac{1}{h(x)}P_t(x,dy)P_s(y,dz)f(z)h(z) \\
&= \frac{1}{h(x)}\int_E \left(P_s(y,dz)f(z)h(z)\right)P_t(x,dy) \\
&= \frac{1}{h(x)}\int_E \left(\int_E f(z)h(z)P_s(y,dz)\right)P_t(x,dy) \\
&= \frac{1}{h(x)}\int_E h(y)\left(\int_E \frac{f(z)h(z)}{h(y)}P_s(y,dz)\right)P_t(x,dy) \\
&= \frac{1}{h(x)}\int_E h(y)\left(\tilde{P}_s(y,dz)f(z)\right)P_t(x,dy) \\
&= \tilde{P}_t(x,dy)\tilde{P}_s(y,dt)f(z) \\
&= \tilde{P}_t\tilde{P}_s f(x).
\end{aligned}
$$

- Por demostrar que $\tilde{\mathbb{E}}^x\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] = \tilde{\mathbb{E}}^{X_t}\left[f(X_{t+s})\right]$. Para ello, probaremos antes que

$$
\tilde{\mathbb{E}}^x\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] \quad \tilde{\mathbb{P}}^x \text{ c.s.}
$$

Ahora, por la proposición 4.9:

$$\begin{aligned}
\int_{B\in\mathcal{F}_t} & \frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] d\tilde{\mathbb{P}}_x \\
&= \int_{B\in\mathcal{F}_t} \frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] \frac{h(X_t)}{h(x)} d\mathbb{P}^x \\
&= \frac{1}{h(x)}\int_{B\in\mathcal{F}_t} \mathbb{E}\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] d\mathbb{P}^x \\
&= \frac{1}{h(x)}\int_{B\in\mathcal{F}_t} h(X_{t+s})f(X_{t+s}) d\mathbb{P}^x \\
&= \int_{B\in\mathcal{F}_t} f(X_{t+s})\frac{h(X_{t+s})}{h(x)} d\mathbb{P}^x \\
&= \int_{B\in\mathcal{F}_t} f(X_{t+s}) d\tilde{\mathbb{P}}^x \\
&= \int_{B\in\mathcal{F}_t} \tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] d\tilde{\mathbb{P}}^x.
\end{aligned}$$

Como esto es válido para todo $B \in \mathcal{F}_t$, entonces se tiene que

$$\tilde{\mathbb{E}}^x\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}^x\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] \quad \tilde{\mathbb{P}}^x \text{ c.s.}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] &= \frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}^x\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{1}{h(X_t)}\mathbb{E}\left[h(X_{t+s})f(X_{t+s})|X_t\right] \\
&= \frac{1}{h(X_t)}(P_s hf)(X_t) \\
&= (\tilde{P}_s f)(X_t) \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s})|X_t\right].
\end{aligned}$$

Por lo que se satisface la propiedad de Markov con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}$. La última igualdad se prueba a continuación:

• Probaremos que X_t admite a la familia $\{\tilde{P}_t\}$ como función de transición, es decir, hay que probar que:

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[f \circ X_{t+s}|X_s\right] = \left(\tilde{P}_t f\right) \circ X_s.$$

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{P}_t f\right) \circ X_s &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \tilde{P}_t(x, dy) \right) \circ X_s \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{h(y)}{h(x)} P_t(x, dy) \right) \circ X_s \\
&= \left(\frac{1}{h(x)} P_t\left(fh\right) \right) \circ X_s \\
&= \frac{1}{h(X_s)} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right]
\end{aligned}
$$

pues como P_t es semigrupo de X, entonces $(P_t g) \circ X_s = \mathbb{E}\left[g \circ X_{t+s} | X_s\right]$. Para terminar la prueba, basta probar que:

$$
\frac{1}{h(X_s)} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s}) | X_s \right]
$$

Sea $B \in \sigma(X_s)$, la sigma álgebra generada por X_s.

$$
\begin{aligned}
&\int_B \frac{1}{h(X_s)} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right] d\tilde{\mathbb{P}}^x \\
&\underset{B \in \sigma(X_s) \subset \mathcal{F}_s}{=} \int_B \frac{1}{h(X_s)} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right] \frac{h(X_s)}{h(x)} d\mathbb{P}^x \\
&= \frac{1}{h(x)} \int_B \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right] d\mathbb{P}^x \\
&= \frac{1}{h(x)} \int_B f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) d\mathbb{P}^x \\
&= \int_B f(X_{t+s}) \frac{h(X_{t+s})}{h(x)} d\mathbb{P}^x .
\end{aligned}
$$

Una vez más, como $B \in \sigma(X_s) \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t+s}$:

$$
= \int_B f(X_{t+s}) d\tilde{\mathbb{P}}^x = \int_B \tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s}) | X_s \right] d\tilde{\mathbb{P}}^x
$$

por lo que $\frac{1}{h(X_s)} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s}) | X_s \right]$

$$
\left(\tilde{P}_t f\right) \circ X_s = \frac{1}{h(X_s)} \mathbb{E}\left[f(X_{t+s}) h(X_{t+s}) | X_s \right] = \tilde{\mathbb{E}}\left[f(X_{t+s}) | X_s \right].
$$

$\blacksquare$

4.2 Ejemplos

Caso discreto:

• *La caminata aleatoria simple y simétrica* Y_n *en* $\mathbb{Z} \bigcap [0, M]$, $M \in \mathbb{N}$*, condicionada a tocar* M *antes que 0.*

Construiremos una caminata aleatoria condicionada a llegar a M antes que al 0, a partir de la caminata simétrica simple usando la h-transformada de Doob.

Sea $\tau = \min\{n \mid Y_n \in \{0, M\}\}$. Obsérvese que el evento $\{Y_\tau = M\}$ no es invariante con respecto a Θ_t:
Por ejemplo, si X es discreto, $X_1(\omega) = 0$ y $X_1(\omega) = M$ para todo ω, entonces $\{X_\tau = M\} = \emptyset$ pero $\{X_\tau = M\} \circ \theta_1 = \Omega$.
Por ello, trabajaremos con el proceso parado $X_t = Y_{t \wedge \tau}$ donde:

$$\tau = \min\{n \, : \, X_n \in \{0, M\}\} = \min\{n \,|\, X_n \notin \{1, 2, .., M-1\}\}.$$

El evento con el que queremos condicionar es $\{X_\tau = M\}$.

i) Primero, probaremos que en efecto el evento $\{X_\tau = M\}$ *es invariante bajo* Θ_n *con* $n \in \mathbb{N}$*:*

Recordemos que, por la Proposición 2.4, si H es un subconjunto medible del espacio de estados, $\tau_H = \inf\{t \, : \, X_t \notin H\}$, y $\tau_H^t = \inf\{s > t \, : \, X_s \notin H\}$, entonces:

$$\Theta_t g(X_{\tau_H}) = g(X_{\tau_H}) \circ \Theta_t = g(X_{\tau_H^t}).$$

Por un lado, tenemos que:

$$\{X_\tau = M\} = \{Y_{\tau \wedge \tau}\} = \{Y_\tau = M\}.$$

Por otra parte:

$$\{X_\tau = M\} \circ \Theta_n = \{X_{\tau^n} = M\} = \{Y_{\tau^n \wedge \tau} = M\}.$$

Hay dos casos posibles:
1-Si $n \leq \tau$, entonces $\tau^n = \tau$, por lo que:

$$\{Y_{\tau^n \wedge \tau} = M\} = \{Y_{\tau \wedge \tau} = M\} = \{Y_\tau = M\} = \{X_\tau = M\}$$

Por lo que $\{X_\tau = M\} \circ \Theta_n = \{X_\tau = M\}$.

2-Si $n \geq \tau$, entonces $\tau^n \wedge \tau = \tau$, por lo cual:

$$\{Y_{\tau^n \wedge \tau} = M\} = \{Y_\tau = M\} = \{X_\tau = M\}.$$

Por lo que $\{X_\tau = M\} \circ \Theta_n = \{X_\tau = M\}$.

Entonces, en efecto el evento $\{X_\tau = M\}$ es invariante bajo Θ_n para $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que para la caminata aleatoria simétrica discreta, la probabilidad de llegar a M antes que a 0 si se inicia en el i-ésimo estado con $i \notin \{0, M\}$, es:

$$\mathbb{P}^i (X_\tau = M) = \frac{i}{M}.$$

Por lo que la función h que usaremos para construir al proceso h-transformado es

$$h(i) := \mathbb{P}^i (X_\tau = M) = \frac{i}{M}.$$

Obsérvese que h es armónica puesto que el evento $\{X_\tau = M\}$ es invariante bajo Θ_n .

ii)Daremos la expresión del semigrupo $P_1(i,j)$ de X_t asi como la de $\tilde{P}_1(i,j)$, del proceso condicionado $\tilde{X}_t$.

Puesto que el tiempo es discreto denotaremos por $P(i,j)$ a $P_1(i,j)$.

Si $i \in \{1, ..., M-1\}$:

$$\mathbb{E}\left[f(X_1)|\tilde{X}_0 = i\right] = \sum_{j \in E} f(j)\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i) = \frac{f(i-1) + f(i+1)}{2}.$$

Si $i = 0$

$$\mathbb{E}\left[f(X_1)|X_0 = 0\right] = \sum_{j \in E} f(j)\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = 0) = f(0).$$

Similarmente, si $i = M$

$$P_1 f(M) = f(M).$$

Proponemos como semigrupo de X_n a:

$$P(i,j) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i-1\}}(j) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i+1\}}(j) \quad \text{si } i \notin \{0, M\}$$

$$P(i,j) = \mathbb{1}_{\{j=i\}}(j) \quad \text{si } i \in \{0, M\}.$$

Probaremos que en efecto X_n lo admite como semigrupo.

Si $i \in \{1, ..., M-1\}$

$$(Pf)(i) = \sum_{j \in E} f(j)P(i,j) = \sum_{j \in E} f(j)\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i-1\}}(j) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i+1\}}(j)\right)$$

$$= \frac{1}{2}f(i-1) + \frac{1}{2}f(i+1) = \frac{f(i-1) + f(i+1)}{2} = \mathbb{E}\left[f(X_1)|X_0 = i\right]$$

Si $i \in \{0, M\}$

$$(Pf)(i) = \sum_{j \in E} f(j)P(i,j) = \sum_{j \in E} f(j)\mathbb{1}_{\{j=i\}}(j) = f(i) = \mathbb{E}\left[f(X_1)|X_0 = i\right].$$

Por lo tanto, el semigrupo propuesto es el semigrupo de X_n. Ahora contruiremos el semigrupo del proceso condicionado $\tilde{X}_n$ a partir de este. Como el conjunto de estados iniciales desde los cuales $\mathbb{P}(X_\tau = M|X_0 = i)$ es estrictamente positivo es $\{1, ..., M\}$ ya que $h(0) = \mathbb{P}\left(X_\tau = M|X_0 = 0\right) = 0$, solo podemos contruir el semigrupo $\tilde{P}(i,j)$ para $i \in \{1, ..., M\}$.
Por el Teorema 4.10

$$\tilde{P}(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)}P(i,j).$$

Para calcular el semi-grupo del proceso condicionado, nos falta calcular $h(j)P(i,j)$. Obsérvese que $h(j)P(i,j)$ es un operador que actúa sobre las funciones $f : E \to \mathbb{R}$ multiplicándolas por h e integrándolas con respecto a la medida del semi-grupo:

$$h(j)P(i,j)f = \sum_j h(j)f(j)P(i,j).$$

Si $i \in \{1, ..., M-1\}$:

$$P(i,j) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i-1\}}(j) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i+1\}}(j).$$

entonces:

$$h(j)P(i,j) = \frac{j}{M}\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i-1\}}(j) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{j=i+1\}}(j)\right) = \frac{j}{M}\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-i|=1\}}(j)\right).$$

por lo que en este caso, el semigrupo del proceso condicionado está dado por:

$$\tilde{P}(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)}P(i,j) = \frac{j}{M}\frac{M}{i}\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-i|=1\}}(j)\right) = \frac{j}{i}\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-i|=1\}}(j)\right).$$

Si $i = M$:

$$P(M,j) = \mathbb{1}_{\{j=M\}}(j).$$

Entonces, similarmente:

$$\tilde{P}(M,j) = \frac{h(j)}{h(M)}P(0,j) = \frac{h(j)}{h(M)}\mathbb{1}_{\{j=M\}}(j) = \mathbb{1}_{\{j=M\}}(j).$$

por lo que M es un estado absorbente.

Entonces, el semigrupo del proceso h-transformado $\tilde{X}_t$ está dado por:

$$\tilde{P}(i,j) = \frac{j}{i}\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-i|=1\}}(j)\right) \qquad \text{si } i \in \{1, ..., M-1\}$$

$$\tilde{P}(M,j) = \mathbb{1}_{\{j=M\}}(j) \qquad \text{si } i = M.$$

donde

$$P(i,j) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

por lo que podemos calcular la matriz de probabilidades de transición del proceso condicionado:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{i-1}{2i} & 0 & \frac{i+1}{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Las columnas van indexadas de 0 a M mientras que los renglones de 1 a M, y la entrada $A_{i,j}$ corresponde a $\mathbb{P}(X_1 = j|X_0 = i)$.

Obsérvese que M no aparece en la expresión, por lo que M puede ser un valor arbitrariamente grande, y que la probabilidad de llegar al estado 0 es $\tilde{P}(1,0) = \frac{0}{1}\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-1|=1\}}(0)\right) = 0$.

Caso continuo: difusiones

El objetivo ahora es el mismo pero con difusiones. Partir de una difusión X y obtener una nueva difusión $\tilde{X}$ de modo que esté obligada a comportarse de una forma predecible, por ejemplo, escapar de un intervalo por un extremo en particular, o de una región por un subconjunto de la frontera predeterminado. Como era de esperarse, el generador de la difusión original $\mathcal{A}$ se ve modificado por el condicionamiento. Veremos a continuación de que forma:

Proposición 4.11 *Sea X una difusión con semi-grupo $\{P_t\}$ y generador infinitesimal L. Entonces $L = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} P_t$*

Demostración

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}^x\left[f(X_t) - f(X_0)\right]}{t} = \frac{P_t f(x) - P_0 f(x)}{t} = \frac{\partial P_t f(x)}{\partial t}_{|t=0}$$

■

Proposición 4.12 *La difusión X con generador L condicionada bajo h tiene generador*

$$\tilde{L} = \frac{1}{h} Lh.$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\tilde{L}f &= \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{\mathbb{E}}^x\left[f(X_t) - f(x)\right]}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega f(X_t) d\tilde{\mathbb{P}}^x - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \frac{f(X_t)h(X_t)}{h(x)} d\mathbb{P}^x - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega \frac{f(X_t)h(X_t)}{h(x)} - \frac{f(x)h(x)}{h(x)} d\mathbb{P}^x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{h(x)} \frac{\int_\Omega f(X_t)h(X_t) - f(x)h(x) d\mathbb{P}^x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{h(x)} \frac{\mathbb{E}^x\left[f(X_t)h(X_t) - f(x)h(x)\right]}{t} \\
&= \frac{1}{h} Lhf.
\end{aligned}$$

■

Así, podemos obtener el generador de la difusión condicionada conjugado por h, la función armónica que lleva la probabilidad del evento con el cual queremos condicionar.

Observación: Si h es armónica ($P_t h = h$), entonces también es L-armónica (es decir, $Lh = 0$) pues

$$Lh = \lim_{t\Rightarrow 0} \frac{P_t h(x) - h(x)}{t} = \frac{h(x) - h(x)}{t} = 0.$$

Proposición 4.13 *Sea X una difusión en $\mathbb{R}^n$ tal que $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$. Entonces:*

$$\tilde{L} = L + \sigma\sigma^T \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla.$$

Demostración Recordemos que el generador infinitesimal de una difusión de este tipo está dado por:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \cdot \sigma^T)_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}f &= \frac{1}{h}Lhf = \frac{1}{2h}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}\frac{\partial^2 hf}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{h}\sum_i b_i\frac{\partial hf}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{2h}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}f + \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + h\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right) \\
&\quad + \frac{1}{h}\sum_i b_i\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}f + h\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2h}\sum_{i,j}h(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{h}\sum_i hb_i\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{Lf} \\
&\quad + \frac{1}{2h}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}f + \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{h}\sum_i b_i\frac{\partial h}{\partial x_i}f \\
&= Lf + \frac{f}{h}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_j\partial x_i} + \sum_i b_i\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)}_{Lh=0} \\
&\quad + \frac{1}{2h}\underbrace{\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}_{2(\sigma\nabla h)\cdot\nabla f} \\
&= Lf + \frac{1}{h}(\sigma\sigma^T\nabla h)\cdot\nabla f.
\end{aligned}
$$

■

Observación:
Como $d\tilde{P} = \frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}d\mathbb{P}$ entonces $\frac{\mathbb{1}_A}{h(x)}$ es la derivada de Radon Nikodym de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$ y por la Proposición 4.9, restringido a $\mathcal{F}_t$ es igual a $\frac{h(X_t)}{h(x)}$.

En los siguientes ejemplos, trabajaremos con procesos de Markov fuertes X_t parados en algún tiempo de paro T_A. Para poder aplicar la teoría estudiada previamente, necesitamos probar que en efecto el proceso parado $X_{t\wedge T_A}$es proceso de Markov.

Teorema 4.14 *Sea X difusión, $X_t : \Omega \to \mathbb{R} \bigcup \{\Delta\}$ y Δ en $\mathbb{R}$ un punto cementerio, es decir, el valor que tomará X una vez que el proceso esté parado.*

$$T_A := \begin{cases} \inf\{t | X_t \notin A\} \\ \infty \end{cases}$$

y sea $f : \mathbb{R}\bigcup\{\Delta\} \to \mathbb{R}$ función borel medible y acotada tal que $f(\Delta) = 0$ Entonces, el proceso parado en T_A

$$Y_t := \begin{cases} X_t & t < T_A \\ \Delta & t \geq T_A \end{cases}$$

satisface la propiedad de Markov para difusiones.

$$\mathbb{E}^x \left[f(Y_{t+s}) | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{Y_t} \left[f(Y_s) \right].$$

Demostración La siguiente igualdad nos será de utilidad más adelante:

$$\mathbb{1}_{\{T_A > s+t\}} = \mathbb{1}_{\{T_A > t\}} \mathbb{1}_{\{T_A > s\}} \circ \Theta_t$$

Probaremos que para todo $\Lambda \in \mathcal{F}_t$, se satisface que:

$$\int_\Lambda \mathbb{E}^x \left[f(Y_{t+s}) | \mathcal{F}_t \right] = \int_\Lambda \mathbb{E}^{Y_t} \left[f(Y_s) \right]$$

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \mathbb{E}^x \left[f(Y_{t+s}) | \mathcal{F}_t \right] &= \int_\Lambda f(Y_{t+s}) \\ &= \int_\Lambda f(Y_{t+s}) \mathbb{1}_{\{T_A > t+s\}} + \int_\Lambda \underbrace{f(Y_{t+s})}_{f(\Delta)=0} \mathbb{1}_{\{T_A \leq t+s\}} \\ &= \int_\Lambda f(Y_{t+s}) \cdot \left(\mathbb{1}_{\{T_A > t+s\}} \right) \circ \Theta_t \cdot \mathbb{1}_{\{T_A > t\}} \\ &= \int_\Lambda \left(f(X_s) \mathbb{1}_{\{T_A > s\}} \right) \circ \Theta_t \cdot \mathbb{1}_{\{T_A > t\}} \\ &= \mathbb{E}^x \left[\left(f(X_s) \mathbb{1}_{\{T_A > s\}} \right) \circ \Theta_t \cdot \mathbb{1}_{\{T_A > t\}} \mathbb{1}_\Lambda \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[\left(f(X_s) \mathbb{1}_{\{T_A > s\}} \right) \circ \Theta_t \cdot \mathbb{1}_{\{T_A > t\}} \mathbb{1}_\Lambda | \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[\left(f(X_s) \mathbb{1}_{\{T_A > s\}} \right) \circ \Theta_t | \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\{T_A > t\}} \mathbb{1}_\Lambda \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{Markov}{=} \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^{X_t}\left[\left(f(X_s)\mathbb{1}_{\{T_A>s\}}\right)\right]\mathbb{1}_{\{T_A>t\}}\mathbb{1}_\Lambda\right] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^{Y_t}\left[\left(f(Y_s)\mathbb{1}_{\{T_A\leq s\}}\right)\right]\mathbb{1}_{\{T_A\leq t\}}\mathbb{1}_\Lambda\right] \\
&= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^{Y_t}\left[\left(f(Y_s)\mathbb{1}_{\{T_A>s\}}\right)\right]\mathbb{1}_{\{T_A>t\}}\mathbb{1}_\Lambda\right] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^{Y_t}\left[\left(f(Y_s)\mathbb{1}_{\{T_A\leq s\}}\right)\right]\mathbb{1}_{\{T_A\leq t\}}\mathbb{1}_\Lambda\right] \\
&= \int_\Lambda \mathbb{E}^{Y_t}\left[\left(f(Y_s)\mathbb{1}_{\{T_A>s\}}\right)\right] + \mathbb{E}^{Y_t}\left[\left(f(Y_s)\mathbb{1}_{\{T_A\leq s\}}\right)\right] \\
&= \int_\Lambda \mathbb{E}^{Y_t}\left[f(Y_s)\right].
\end{aligned}
$$

Por lo que $\mathbb{E}^{Y_t}[f(Y_s)] = \mathbb{E}^x[f(Y_{t+s})|\mathcal{F}_t]$ c.d.s.

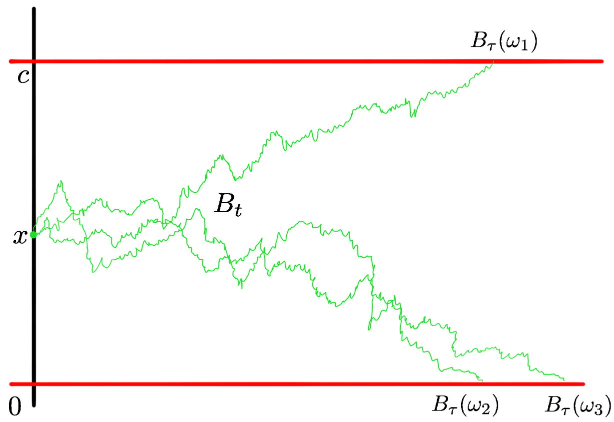
■

Ejemplos:

• *El movimiento browniano en el intervalo* $[0, c]$ *condicionado a llegar a* c *antes que a 0.*

Sea $\tau = \inf\{t\,|B_t \in \{0, c\}\}$ por la Proposición 3.3,

$$\mathbb{P}^x(B_\tau = c) = \frac{x}{c}.$$



Una vez mas, trabajaremos con el browniano parado en τ, para que el evento $\{B_\tau = c\}$ sea invariante bajo Θ_t.

El generador infinitesimal del browniano en $\mathbb{R}$ está dado por

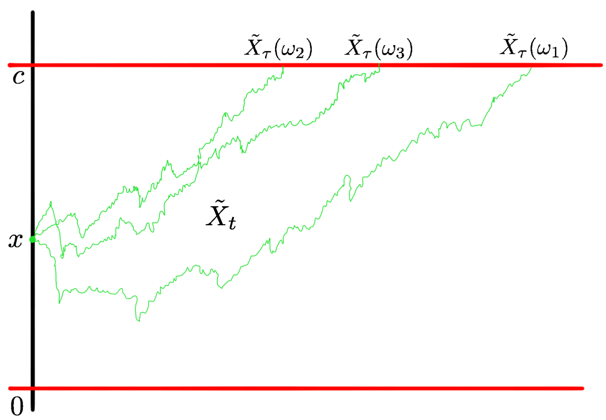
$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x}.$$

Por lo que el generador del browniano parado condicionado a llegar a c antes que al 0 esta dado por:

$$\tilde{L} = L + \sigma\sigma^T \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + \frac{\frac{1}{c}}{\frac{x}{c}} \cdot \nabla = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

que es el generador de la difusión:

$$d\tilde{X} = dB_t + \frac{1}{\tilde{X}_t} dt \qquad X_t \in [0, c].$$



Es decir, $\tilde{X}$ es el proceso obtenido al condicionar a B a llegar antes a c que a 0. Este ejemplo es de particular interés y se volverá a abordar más adelante.

- *El Movimiento browniano en un anillo A de radio interior R y exterior $2^k R$ en $\mathbb{R}^2$ condicionado a salir por la frontera interior.*

Sea $\alpha_k = \inf\{t \,|\, B_t \in \partial A\}$. Recordemos que por la aplicación B de la sección 7, si B_t es el Borwniano y $x \in A$:

$$\mathbb{E}^x \left[\log |B_{\alpha_k}|\right] = \log |x|.$$

Obsérvese que $|B_{\alpha_k}|$ solo puede tomar dos valores por estar en ∂A:R con probabilidad p_x y $2^k R$ con probabilidad $1 - p_x$ (con probabilidad 1 el Movimiento browniano se escapa de A). Por lo tanto,

$$\mathbb{E}^x\left[\log|B_{\alpha_k}|\right] = \log(R)\cdot p_x + \log(2^k R)\cdot(1-p_x) = \log|x|$$

y entonces:

$$p_x = \frac{\log|x| - log(2^k R)}{\log(R) - \log(2^k R)}.$$

Sea:

$$h(x) := \frac{\log|x| - log(2^k R)}{\log(R) - \log(2^k R)}.$$

Para cada $x \in A$, $h(x)$ es la probabilidad de que iniciando en x, B_{α_k} escape de A por la frontera interior. Por la proposición anterior, el generador del browniano condicionado a escapar de A por su frontera interior esta dado por:

$$\tilde{L} = L + \sigma\frac{\nabla h}{h}\cdot\nabla.$$

donde L es el generador del browniano, es decir, $L = \frac{1}{2}\Delta$ y $\sigma = Id_{\mathbb{R}^2}$

$$\nabla h(x) = \left(\frac{\frac{1}{2}2x_1\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{|x|}, \frac{\frac{1}{2}2x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{|x|}\right) = \left(\frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}\right).$$

Por lo cual:

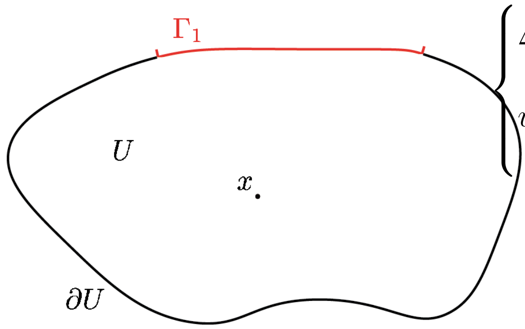
$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{h}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x_1}{|x|^2}\\ \frac{x_2}{|x|^2}\end{bmatrix}\cdot\nabla\\ &= \frac{1}{2}\Delta + \frac{\log(R) - log(2^k R)}{\log|x| - \log(2^k R)}\left(\frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right).\end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{L}$ es el generador infinitesimal de la difusión:

$$\begin{bmatrix}dX_t^1\\ dX_t^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}dB_t^1\\ dB_t^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\log(R)-log(2^k R)}{\log|X_t|-\log(2^k R)}\cdot\frac{X_t^1}{|X_t|^2}\\ \frac{\log(R)-log(2^k R)}{\log|X_t|-\log(2^k R)}\cdot\frac{X_t^2}{|X_t|^2}\end{bmatrix}dt$$

$$dX_t = dB_t + \begin{bmatrix}\frac{h(X_t)X_t^1}{|X_t|^2}\\ \\ \frac{h(X_t)X_t^2}{|X_t|^2}\end{bmatrix}dt.$$

• *El Movimiento browniano en una región acotada y abierta U condicionado a escapar de U por un subconjunto específico de ∂U. Llamaremos a ese subconjunto de la frontera Γ_1 y a $\partial U - \Gamma_1 = \Gamma_2$.*
Para construir este ejemplo, necesitaremos un poco mas de teoría.
Sea U una región donde se pueda resolver la siguiente ecuación parcial:

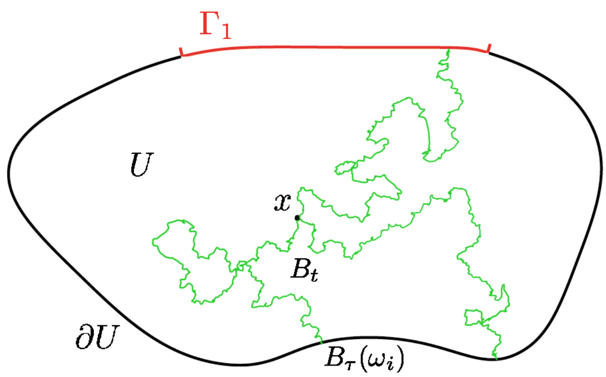


$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \in U \\ u = g & \in \partial U \quad g = \begin{cases} 1 & x \in \Gamma_1 \\ 0 & x \in \Gamma_2 \end{cases} \end{cases} .$$

Sea B_t un browniano en U y $\tau = \inf\{t \,|\, B_t \in \partial U\}$. Por la fórmula de Dynkin:

$$\mathbb{E}^x \left[u(B_\tau) \right] = u(x).$$

Obsérvese que esto da una forma numérica de resolver ecuaciones parciales de la forma $\mathcal{A}$f=0 donde $\mathcal{A}$ es el generador de una difusión X_t. Bastaría numéricamente calcular $\mathbb{E}^x \left[f(X_\tau) \right]$ para obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial parcial. En este caso particular, $f = u$, $\mathcal{A}$ es el operador Δ y la difusión correspondiente el movimiento browniano.



Como $B_\tau \in \partial U$ entonces $\mathbb{E}^x \left[u(B_\tau) \right] = \mathbb{E}^x \left[g(B_\tau) \right] = u(x)$.

La función g solo toma los valores 1 y 0 en Γ_1 y Γ_2 respectivamente, entonces:

$$u(x) = \mathbb{E}^x \left[g(B_\tau) \right] = 1 \cdot \mathbb{P}^x \left(B_\tau \in \Gamma_1 \right) + 0 \cdot \mathbb{P}^x \left(B_\tau \in \Gamma_2 \right).$$

Por lo que

$$u(x) = \mathbb{P}^x \left(B_\tau \in \Gamma_1 \right)$$

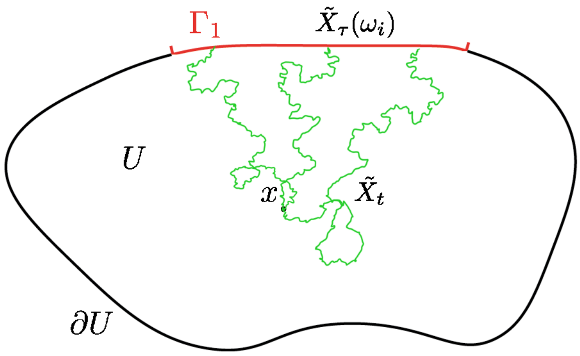
Sea $h(x) := u(x) = \mathbb{P}^x \left(B_\tau \in \Gamma_1 \right)$. El generador infinitesimal del browniano condicionado a escapar de U por Γ_1 es:

$$\tilde{L} = L + Id_{\mathbb{R}^2} \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla = L + \frac{\nabla u}{u} \cdot \nabla$$

que, por un ejercicio previo, es el generador de la difusión:

$$dX_t = dB_t + \nabla(\log(h))(X_t)dt.$$

Es decir, X_t es el proceso obtenido al condicionar al browniano a abandonar U por Γ_1.



5 Cambios de escala y medida de velocidad

Sea Xuna difusión en $\mathbb{R}$

$$\tau_y := \inf\{t \,|\, X_t = y\}$$

y asumamos que $\mathbb{P}^x(\tau_y < \infty) = 1 \quad \forall x$ es decir, todos los estados están conectados.

Definición 5.1 *Si una difusión satisface que* $\mathbb{P}^x(\tau_y < \infty) = 1 \quad \forall x$ *decimos que es regular.*

Definición 5.2 *Sea* J *un intervalo en* $\mathbb{R}$, $\tau_J := \inf\{t \,|\, X_t \notin J\}$ *es decir, el primer tiempo de salida de* J *de* X.

Ya vimos que si X es un Movimiento browniano:

$$\mathbb{P}^x\left(X_{\tau_{[a,b]}} = a\right) = \frac{b-x}{b-a} \qquad \mathbb{P}^x\left(X_{\tau_{[a,b]}} = b\right) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Definición 5.3 *Diremos que una difusión está en su escala natural si lo anterior se cumple para cualquier intervalo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Proposición 5.4 *Si* X *está en su escala natural entonces el proceso iniciado en* x *debe dejar* x *inmediatamente, es decir, si*

$$S := \inf\{t > 0 \,|\, X_t \neq x\} \quad \textit{entonces } \mathbb{P}^x(S = 0) = 1.$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ y sea $U_\epsilon := \inf\{t \,|\; |X_t - x| \geq \epsilon\}$.

Observación 1: Al ser X_t *regular se tiene que* $\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right] > 0$ *pues por hipótesis*

$$\mathbb{P}^x(T_{x+\epsilon} < \infty) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}^x(T_{x-\epsilon} < \infty) = 1$$

y

$$\mathbb{P}^x(U_\epsilon < \infty) = \mathbb{P}^x(T_{x+\epsilon} \wedge T_{x-\epsilon} < \infty) = \mathbb{P}^x(T_{x+\epsilon} < \infty) \cdot \mathbb{P}^x(T_{x-\epsilon} < \infty).$$

Por lo que:

$$\mathbb{P}^x(U_\epsilon < \infty) = 1$$

y por lo tanto:
$$\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right] > 0.$$

Observación 2:
$$U_\epsilon = S + U_\epsilon \circ \Theta_S$$

es decir,
$$\inf\{t \mid \ |X_t - x| \geq \epsilon\} = \inf\{t \mid \ X_t \neq x\} + \inf\{t \mid \ |X_{t+S} - x| \geq \epsilon\}$$

pues si $t < S$ entonces $X_t = x$.

Observación 3: Por continuidad de X_t, $X_S = x$.

Con estas tres observaciones en cuenta, podemos proceder:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right] &= \mathbb{E}^x\left[e^{-(S+U_\epsilon\circ\Theta_S)}\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[\mathbb{E}^x\left[e^{-(S+U_\epsilon\circ\Theta_S)}|\mathcal{F}_S\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[e^{-S}\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\circ\Theta_S|\mathcal{F}_S\right]\right] \\
&\overset{MarkovFuerte}{=} \mathbb{E}^x\left[e^{-S}\mathbb{E}^{X_S}\left[e^{-U_\epsilon}\right]\right] \\
&\overset{X_S=x}{=} \mathbb{E}^x\left[e^{-S}\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}^x\left[e^{-S}\right]\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right]
\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto: } \mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right] = \mathbb{E}^x\left[e^{-S}\right]\mathbb{E}^x\left[e^{-U_\epsilon}\right]$$
$$\mathbb{E}^x\left[e^{-S}\right] = 1$$
$$S = 0 \text{ c.s. pues } S \geq 0.$$

Pero si $S = 0$ entonces X_t abandona el estado x inmediatamente. ■

Sea:
$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

$\sigma(x), b(x) \in \mathbb{R}$ continuas, acotadas superiormente y σ acotada inferiormente por una constate positiva, y sea $\sigma(x)^2 = a(x)$.

Teorema 5.5 *Existe una función de escala para X, que es una función continua, estrictamente creciente y tal que $s(X)$ está en su escala natural. Además, $s(x)$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial:*

$$\frac{1}{2}a(x)s''(x) + b(x)s'(x) = 0.$$

y para algunas constantes c_1, c_2 y x_0 está dada por:

$$s(x) = c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{y} \frac{2b(w)}{a(w)} dw} dy.$$

Demostración Primero, demostraremos que esa $s(x)$ es en efecto solución de la ecuación parcial:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a(x)s''(x) + b(x)s'(x) = 0 \\
&\frac{s''(x)}{s'(x)} = -2\frac{b(x)}{a(x)} \quad (s' \text{ no se anula }) \\
&\log'(s'(x)) = -2\frac{b(x)}{a(x)} \\
&\log(s'(x)) = \int_{x_0}^{y} -2\frac{b(w)}{a(w)} dw + c \\
&s'(x) = e^{\int_{x_0}^{y} -2\frac{b(w)}{a(w)} dw} e^{c} \\
&s(x) = c_1 + c_2 \int_{x_0}^{y} -2\frac{b(w)}{a(w)} dw.
\end{aligned}$$

■

Ahora probaremos que en efecto $s(X)$ está en escala natural:
Obsérvese que puesto que σ y $b(x)$ son continuas, entonces $s(x) \in \mathcal{C}^2$ y $s(x)$ es creciente pues $e^x > 0$.

Aplicando Itô a $s(X_t)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} ds(X_t) &= s'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}s''(X_t)dt \\ &= s'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + s'(X_t)b(X_t)dt + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)s''(X_t)dt. \end{aligned}$$

Al ser s solución de $\frac{1}{2}a(x)s''(x) + b(x)s'(x) = 0$ podemos simplificar la expresión anterior y obtenemos que:

$$s(X_t) - s(X_0) = s'(X_t)\sigma(X_t)dB_t$$

por lo cual $s(X_t) - s(X_0)$ es una martingala. Por el Teorema de Lévy, $s(X_t) - s(X_0)$ es un movimiento browniano compuesto con un cambio de tiempo, por lo que las probabilidades de salida de $s(X_t)$ en un intervalo cualquiera $[a, b]$ son las mismas que las de un movimiento browniano, por lo que $s(X_t)$ está en escala natural.

■

Sea $Y_t = s(X_t)$, el proceso original compuesto con el cambio de escala. Por lo anterior,

$$ds(X_t) = s'(X_t)\sigma(X_t)dB_t$$

o equivalentemente, remplazando X_t por $s^{-1}(Y_t)$:

$$dY_t = s'(s^{-1}(Y_t))\sigma(s^{-1}(Y_t))dB_t.$$

Entonces el proceso Y_t tiene generador infinitesimal

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2}(s'(s^{-1}(X_t)))^2\sigma^2(s^{-1}(x))\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}.$$

Obsérvese que no aparece el término asociado a la deriva del proceso. Es decir, al componer a X_t con su cambio de escala, obtuvimos una difusión *sin deriva*, que resulta ser un browniano cambiado de tiempo. Este cambio de tiempo está fuertemente ligado con el siguiente concepto que estudiaremos, *la medida de velocidad* de X_t.

5.1 El cambio de escala desde otro enfoque

Una forma más natural de abordar el cambio de escala, aunque menos presente en los textos es el siguiente: Si X es una difusión con diferencial $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$ y generador infinitesimal

$$\mathcal{H}f = b(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

nos preguntamos si existe una función $s(x)$ tal que $Y_t = s(X_t)$ es una difusión sin deriva, es decir, de la forma:

$$dY_t = g(Y_t)dB_t$$

para alguna función $g(x)$. Por el teorema de Lévy, tendríamos que Y_t se comporta como un movimiento brownano. A nivel del generador infinitesimal, obtendríamos que el generador de Y_t es de la forma

$$\mathcal{A}f = h(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

para alguna función h. Obsérvese que si $h(x) = 1$, obtenemos al generador infinitesimal del movimiento browniano.

Por la fórmula de Itô, vimos que

$$ds(X_t) = s'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + \left(s'(X_t)b(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)s''(X_t)\right)dt.$$

Ahora, si $Y_t = s(X_t)$, entonces tenemos que $X_t = s^{-1}(X_t)$.
Así, remplazamos en la expresión anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned} dY_t &= s'(s^{-1}(Y_t))\sigma(s^{-1}(Y_t))dB_t \\ &\qquad + \left(s'(s^{-1}(Y_t)b(s^{-1}(Y_t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(s^{-1}(Y_t))s''(s^{-1}(Y_t))\right)dt. \end{aligned}$$

Por lo que el generador infinitesimal de Y_t es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x) &= \left(s'(s^{-1}(x))b(s^{-1}(x)) + \frac{1}{2}\sigma^2(s^{-1}(x))s''(s^{-1}(x))\right)\frac{\partial f}{\partial x} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(s'(s^{-1}(x))\sigma(s^{-1}(x))\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}. \end{aligned}$$

Pero $s'(s^{-1}(x))b(s^{-1}(x)) + \frac{1}{2}\sigma(s^{-1}(x))s''(s^{-1}(x)) = (\mathcal{H}s)\,(s^{-1}(x))$
Por lo cual:

$$\mathcal{A}f = (\mathcal{H}s)\,(s^{-1}(x))\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(s'(s^{-1}(x))\sigma(s^{-1}(x))\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}.$$

Así, si s satisface que $\mathcal{H}s = 0$, entonces tendríamos que

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2}\left(s'(s^{-1}(x))\sigma(s^{-1}(x))\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

por lo que $s(X_t) = Y_t$ es un proceso sin deriva, y el generador de Y_t está dado por:

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2}\left(s'(s^{-1}(x))\sigma(s^{-1}(x))\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}. \tag{2}$$

La función $s(x)$ propuesta en la sección anterior es solución a la ecuación $\mathcal{H}s = 0$ por lo que sirve como función de cambio de escala y elimina el término de deriva de X_t.

5.2 Cambio de tiempo y medida de velocidad

Ahora, nos preguntamos como se afecta el comportamiento de una difusión a nivel del generador infinitesimal si cambiamos la escala temporal, es decir, si aplicamos un cambio de tiempo. Podemos pensar el cambio de tiempo como un reloj que cambia su velocidad según la posición del proceso y el tiempo en el cual se encuentra.

Un ejemplo sencillo sería considerar a $Y_t = B_{2t}$ donde B_t es un movimiento browniano. En este caso, Y_t recorre la misma trayectoria que B_t pero *más rápido* (aquí el cambio de tiempo sería $\tau(t) = 2t$).

De forma más general, sea X una difusión con diferencial $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$, generador $\mathcal{H}$ y sea $Y_t = X_{\tau(t)}$ donde $\tau(t)$ es un cambio de tiempo. Supongamos además que el cambio de tiempo (nuestro reloj) es de la forma:

$$\tau(t) = \int_0^t \beta(Y_s)ds$$

para β función acotada, continua y estríctamente positiva (esto garantiza que $\tau(t)$ sea creciente y derivable y que $\tau(t)$ dependa de las posiciones de Y_s para $s < t$).

Teorema 5.6 Fórmula de Volkonski
El proceso $Y_t = X_{\tau(t)}$ *tiene generador infinitesimal:*

$$\mathcal{A} = \beta(x)\mathcal{H}.$$

Una vez más, el cambio en la difusión original se ve reflejado en el generador infinitesimal. Esta fórmula nos permite calcular el generador de una difusión cambiada de tiempo fácilmente usando el generador de la difusión original.

Demostración La prueba es similar a la del Teorema 2.9:
Recordemos que por el Lema 2.8

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_\tau)\right] = f(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i(s,\omega)\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{i,j}(s,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\right)ds\right]$$

donde $\tau(t) = \int_0^t \beta(Y_s)ds$.

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\left[f(X_{\tau(t)})\right] - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau(t)}\left(\sum_i b_i(X_s(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\right)dt\right]}{t}$$

$$\stackrel{T.V.M.}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_i b_i(X_u(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_u)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_u)\right)\cdot\int_0^t\beta(Y_s)ds\right]}{t}$$

para algún $u \in \left[0, \int_0^t \beta(Y_s)ds\right]$

$$\stackrel{T.V.M.}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_i b_i(X_u(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_u)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_u)\right)\cdot\beta(Y_v)\right]\cdot t}{t}$$

para algún $v \in [0,t]$

$$\stackrel{T.C.D.}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{t\to 0}\left(\sum_i b_i(X_u(\omega))\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_u(\omega)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(X_u)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_u)\right)\beta(Y_u)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)\beta(x)\right]$$

pues $Y_0 = X_0 = x$

$$= \left(\sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\cdot\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)\beta(x) = \beta(x)\mathcal{H}f.$$

■

Ahora, combinando los resultados obtenidos en el Teorema 5.6 y (2) , si aplicamos el cambio de tiempo:

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(Y_s)(s'(Y_s))^2}$$

al proceso $s(X_t)$, obtendríamos un proceso con generador

$$\phi f = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$$

que es un movimiento brwoniano.

Es decir, partiendo de una difusión X_t, obtuvimos un movimiento browniano al hacer un cambio de escala y un cambio de tiempo. Obsérvese que como consecuencia, tenemos que una difusión de la forma

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t$$

es un movimiento browniano cambiado de tiempo.

Ahora, si X es una difusión y $X_t \in (a,b)$ con $x, x_0 \in (a,b)$, entonces $s(X)$ es una difusión en $(s(a), s(b))$ y $s(x), s(x_0) \in (s(a), s(b))$.
Definimos, usando nuestro cambio de tiempo:

$$m(x) := \int_{s(x_0)}^{s(x)} \frac{1}{\sigma^2(s^{-1}(y))(s'(s^{-1}(y)))^2}dy$$

Observemos que, por el teorema de cambio de variable,

$$\int_{s(x_0)}^{s(x)} \frac{1}{\sigma^2(s^{-1}(y))(s'(s^{-1}(y)))^2}dy = \int_{s(x_0)}^{s(x)} \frac{1}{\sigma^2(s^{-1}(y))s'(s^{-1}(y))}\cdot\frac{1}{s'(s^{-1}(y))}dy$$
$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sigma^2(\xi)s'(\xi)}d\xi$$

Definición 5.7 *La medida de velocidad de X se define como*

$$m(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sigma^2(\xi)s'(\xi)} d\xi$$

y a $D(\xi)$ definida como:

$$D(\xi) = \frac{1}{\sigma^2(\xi)s'(\xi)}$$

se le llama la densidad de la medida de velocidad.

Teorema 5.8 *Si $s(x)$ es la función de escala y $m(x)$ la medida de velocidad de X_t, entonces:*

$$\mathcal{H}f = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right).$$

Notación: Si $q(x)$ es derivable, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial dq} := \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Este resultado termina de relacionar el generador infinitesimal y la medida de velocidad y cambio de escala. Ahora, si conocemos la medida de velocidad y el cambio de escala, podemos recuperar el generador infinitesimal de forma sorprendentemente simple.

Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
=& \frac{1}{2}\sigma^2(x)s'(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s'(x)}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
=& \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2(x)s'(x)\frac{s''(x)}{(s'(x))^2}\frac{\partial f}{\partial x}\\
=& \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{s''(x)}{s'(x)}\frac{\partial f}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}s = 0$ entonces:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)s''(x) + b(x)s'(x) = 0.$$

Por lo que, despejando:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2(x)s''(x) = bs'(x).$$

Ahora, remplazando en nuestra expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - b\frac{s'(x)}{s'(x)}\frac{\partial f}{\partial x}\\
&=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - b\frac{\partial f}{\partial x}\\
&=\mathcal{H}f.
\end{aligned}$$

■

5.3 Funciones de Green y medida de velocidad

Si X es una difusión con generador $\mathcal{A}$, g continua y acotada y τ es un tiempo de paro, definimos

$$w(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau g(X_s)ds | X_0 = x\right].$$

Obsérvese que poder calcular este tipo de cantidades puede ser sumamente útil:
Por ejemplo, si

$$X_t \in (a,b) \quad \tau = \tau_a \wedge \tau_b \quad g(x) \equiv 1$$

entonces $w(x) = \mathbb{E}^x[\tau]$ es decir, el tiempo esperado de salida de la difusión del intervalo (a,b).
El objetivo es encontrar qué ecuación satisface $w(x)$ (si es que satisface alguna) y resolverla para así poder calcular este tipo de valores. No se cubrirán algunos detalles por falta de información en algunos puntos pero se tratará de dar un esquema lo más preciso posible puesto que en la literatura, no se encuentra una construcción de las funciones de green para difusiones.
Sea:

$$A_h = \left(\int_0^h g(X_s)ds + \int_h^\tau g(X_s)ds\right) \cdot \mathbb{1}_{h<\tau}$$

$$B_h = \int_0^\tau g(X_s)ds \cdot \mathbb{1}_{h>\tau}.$$

Entonces, tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau g(X_s)ds|X_0\right] = \mathbb{E}\left[A_h|X_0\right] + \mathbb{E}\left[B_h|X_0\right].$$

Estudiaremos ambos términos por separado:
Por un lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[A_h|X_0\right] =& \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[A_h|\mathcal{F}_h\right]|X_0\right] \\
=& \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\int_0^h g(X_s)ds + \int_h^\tau g(X_s)ds\right) \cdot \mathbb{1}_{h<\tau}|\mathcal{F}_h\right]|X_0\right] \\
=& \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot \left(\int_0^h g(X_s)ds + \mathbb{E}\left[\int_h^\tau g(X_s)ds|\mathcal{F}_h\right]\right)|X_0\right].
\end{aligned}$$

Ahora, por la propiedad de Markov y homogeneidad temporal:

$$\mathbb{E}\left[\int_h^\tau g(X_s)ds|\mathcal{F}_h\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau g(X_s)ds|X_h\right] = w(X_h).$$

(Para más detalles sobre esta igualdad, se puede consultar *[16] Green, Brown, and Probability and Brownian Motion on the Line, Kai Lai Chung*)
Por lo cual:

$$\mathbb{E}\left[A_h|X_0\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot \int_0^h g(X_s)ds|X_0\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot w(X_h)|X_0\right].$$

Como

$$w(x) = \mathbb{E}\left[A_h|X_0 = x\right] + \mathbb{E}\left[B_h|X_0 = x\right]$$

podemos descomponer a $w(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
w(x) =& \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot \int_0^h g(X_s)ds|X_0 = x\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot w(X_h)|X_0 = x\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h>\tau} \cdot \int_0^\tau g(X_s)ds|X_0 = x\right].
\end{aligned}$$

Sumamos de ambos lados $-w(x) - hg(x)$:

$$\begin{aligned}
-hg(x) =& \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot \int_0^h g(X_s)ds|X_0 = x\right] - hg(x) \\
&+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau} \cdot w(X_h)|X_0 = x\right] - w(x) + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h>\tau} \cdot \int_0^\tau g(X_s)ds|X_0 = x\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, dividimos de ambos lados por h:

$$\begin{aligned}-g(x) = &\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau}\cdot\int_0^h g(X_s)ds|X_0=x\right]-hg(x)}{h}\\ &+\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h<\tau}\cdot w(X_h)|X_0=x\right]-w(x)}{h}+\frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h>\tau}\cdot\int_0^\tau g(X_s)ds|X_0=x\right]}{h}.\end{aligned}$$

Al sacar el límite cuando h tiende a 0, el primer término tiende a 0 por el teorema del valor medio para integrales y el segundo término tiende a $\mathcal{A}w(x)$. El tercer término tiende a 0 pues:

$$\begin{aligned}|\mathbb{1}_{h>\tau}\cdot\int_0^\tau g(X_s)ds| \leq &\mathbb{1}_{h>\tau}\cdot\int_0^\tau |g(X_s)|ds\\ \leq &\mathbb{1}_{h>\tau}\cdot\int_0^h |g(X_s)|ds\\ \leq &\mathbb{1}_{h>\tau}\cdot h|g(X_\xi)|.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h>\tau}\cdot\int_0^\tau g(X_s)ds|X_0=x\right]|}{h}\leq\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{h>\tau}|g(X_\xi)||X_0=x\right]=0$$

pues g es acotada y τ finito casi seguramente.
Dejamos como referencia las notas de *Alison Etheridge, Stochastic Analisis and PDE* para mayor detalle.

Por ende, obtenemos que

$$-g(x)=\mathcal{A}w(x)$$

o dicho de otra forma, $w(x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$b(x)w'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)w''(x)=-g(x)\quad w(a)=0=w(b).$$

que también puede escribirse como:

$$\mathcal{A}w(x)=-g(x). \tag{3}$$

Buscamos ahora la solución a esta ecuación.

Por el Teorema 5.8, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}f =& \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) \\
=& \frac{1}{2}\sigma^2(x)s'(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s'(x)}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
=& \frac{1}{2}\frac{1}{D(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s'(x)}w'(x)\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $w(x)$ satisface:

$$
\frac{1}{2}\frac{1}{D(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s'(x)}w'(x)\right) = -g(x).
$$

Así:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{s'(x)}w'(x)\right) &= -2g(x)D(x) \\
\frac{1}{s'(x)}w'(x) &= -\int_a^x 2g(y)D(y)dy + \beta
\end{aligned}
$$

β una constante.

$$
w'(x) = -s'(x)\int_a^x 2g(y)D(y)dy + s'(x)\cdot\beta.
$$

Integrando de ambos lados obtenemos:

$$
w(x) = -\int_a^x s'(\xi)\int_a^\xi 2g(y)D(y)dy\, d\xi + (s(x) - s(a))\cdot\beta + \alpha
$$

α una constante.

Como $w(a) = 0$ entonces $\alpha = 0$ Ahora haciendo un cambio de parametrización de la región de integración e intercambiando el orden de intergración obtenemos:

$$
\begin{aligned}
w(x) =& -2\int_a^x\int_y^x s'(\xi)d\xi g(y)D(y)dy + (s(x) - s(a))\cdot\beta \\
=& -2\int_a^x (s(x) - s(y))g(y)D(y)dy + (s(x) - s(a))\cdot\beta.
\end{aligned}
$$

Como $w(b) = 0$ obtenemos que

$$\beta = \frac{2}{s(b) - s(a)} \int_a^b (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy.$$

Así, concluimos que:

$$\begin{aligned} w(x) = -2 &\int_a^x (s(x) - s(y))g(y)D(y)dy \\ &\qquad + 2\frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)} \int_a^b (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy \\ = &\frac{2}{s(b) - s(a)}\Bigg((s(x) - s(a)) \int_a^b (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy \\ &\qquad - (s(b) - s(a)) \int_a^x (s(x) - s(y))g(y)D(y)dy\Bigg). \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión anterior, partimos en dos la primera integral:

$$\begin{aligned} (s(x) - s(a)) &\int_a^b (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy \\ &= (s(x) - s(a)) \int_x^b (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy \\ &\qquad + (s(x) - s(a)) \int_a^x (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy. \end{aligned}$$

Agrupando

$$(s(x) - s(a)) \int_a^x (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy$$

con

$$-(s(b) - s(a)) \int_a^x (s(x) - s(y))g(y)D(y)dy$$

y cancelando obtenemos que

$$\begin{aligned} (s(x) - s(a)) \int_a^x (s(a) - s(y))g(y)D(y)dy - (s(b) - s(a)) \int_a^x (s(x) - s(y))g(y)D(y)dy \\ = (s(b) - s(x)) \int_a^x (s(y) - s(a))g(y)D(y)dy. \end{aligned}$$

Así, remplazando en nuestra expresión original obtenemos que

$$w(x) = \frac{2}{s(b)-s(a)}\bigg((s(x)-s(a))\int_x^b (s(b)-s(y))g(y)D(y)dy$$

$$+(s(b)-s(x))\int_a^x (s(y)-s(a))g(y)D(y)dy\bigg).$$

Los cálculos anteriores se resumen en el siguiente resultado:

Teorema 5.9 *Si g es una función continua, entonces:*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau g(X_s)ds|X_0 = x\right] = \int_a^b G(x,\xi)g(\xi)m(d\xi)$$

donde, para $a < x < b$

$$G(x,\xi) := \begin{cases} 2\frac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}(s(b)-s(\xi)) & x < \xi < b \\ 2\frac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)}(s(\xi)-s(a)) & a < \xi < x \end{cases}$$

con $s(x)$ la función de escala, $m(d\xi) = D(\xi)d\xi$ y $D(\xi) = \frac{1}{\sigma^2(\xi)s'(\xi)}$ la densidad de la medida de velocidad.

Ejemplo: La medida de velocidad del Movimiento browniano es la medida de Lebesgue, es decir:

$$m(dy) = dy$$

Como el movimiento browniano ya se encuentra en su escala natural, entonces la función de escala es $s(x) = x$. Por otro lado, $\sigma(x) = 1$. Por lo tanto:

$$m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)s'(x)} = 1$$

por lo que $m(dy) = dy$.

En la literatura, se encuentra mucho más frecuentemente la siguiente definición de medida de velocidad (no se probará que son equivalentes) y que sin la construcción previa, podría parecer poco intuitiva:

Definición 5.10 *Definimos para cada intervalo (a,b)*

$$G_{ab}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x-a)(b-y)}{b-a} & a < x \le y < b \\ \frac{2(y-a)(b-x)}{b-a} & a < y \le x < b \end{cases}$$

y sea $G_{a,b}(x,y) = 0$ *si* x *o* $y \notin (a,b)$.

Una medida $m(dx)$ *es la medida de velocidad de una difusión en escala natural* X *si:*

$$\mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right] = \int_{\mathbb{R}} G_{a,b}(x,y)m(dy) \quad \textit{para todo } (a,b) \textit{ y } x \in (a,b).$$

Que no es más que un caso particular del Teorema 5.9 para $g = 1$.

Ejemplo: Usando esta definición probaremos una vez más que la medida de velocidad del Movimiento browniano es la medida de Lebesgue:

$$m(dy) = dy.$$

Demostración Bastaría demostrar que

$$\mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right] = \int_{\mathbb{R}} G_{a,b}(x,y)dy \quad \forall (a,b) \text{ y } x \in (a,b)$$

para probar que $m(dy) = dy$, es decir, $D(\xi) = 1$.

• Cálculo de $\mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right]$
Por la Fórmula de Dynkin:

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_{\tau_{(a,b)}})\right] = f(x) + \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_{(a,b)}} \mathcal{A}f(X_s)ds\right].$$

Al ser X un Movimiento Brwoniano, se tiene que $\mathcal{A}f = \frac{1}{2}\Delta f$. Evaluando $f(x) = x^2$ obtenemos que:

$$\mathbb{E}^x\left[X^2_{\tau_{(a,b)}}\right] = x^2 + \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_{(a,b)}} \frac{1}{2}2ds\right] = x^2 + \mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right] \quad (1)$$

puesto que Δx^2 no es mas que $\frac{\partial^2 x^2}{\partial x \partial x} = 2$. Ahora obsérvese que:

$$\mathbb{E}^x\left[X_{\tau_{(a,b)}}\right] = a^2\mathbb{P}^x\left(X_{\tau_{(a,b)}} = a\right) + b^2\mathbb{P}^x\left(X_{\tau_{(a,b)}} = b\right)$$

y recordemos que al ser X un Movimiento browniano,

$$\mathbb{P}^x\left(X_{\tau_{[a,b]}} = a\right) = \frac{b-x}{b-a} \qquad \mathbb{P}^x\left(X_{\tau_{[a,b]}} = b\right) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Por lo cual,

$$\mathbb{E}^x\left[X^2_{\tau_{(a,b)}}\right] = a^2\frac{b-x}{b-a} + b^2\frac{x-a}{b-a}.$$

Despejando $\mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right]$ de (1) y remplazando $\mathbb{E}^x\left[X^2_{\tau_{(a,b)}}\right]$ por lo anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right] &= -x^2 + \mathbb{E}^x\left[X^2_{\tau_{(a,b)}}\right] \\
&= x^2 + a^2\frac{b-x}{b-a} + b^2\frac{x-a}{b-a} \\
&= -x^2 + \frac{a^2b - xa^2 + b^2x - b^2a}{b-a} \\
&= \frac{-x^2(b-a) + a^2b - xa^2 + b^2x - b^2a + abx - axb}{b-a} \\
&= \frac{(xb - x^2 - ab + ax)(b-a)}{b-a} \\
&= (x-a)(b-x).
\end{aligned}$$

- Cálculo de $\int_{\mathbb{R}} G_{a,b}(x,y)dy$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} G_{a,b}(x,y)dy &= \int_a^x \frac{2(y-a)(b-x)}{b-a}dy + \int_x^b \frac{2(x-a)(b-y)}{b-a}dy \\
&= \frac{1}{b-a}\left(2(b-x)\int_a^x (y-a)dy + 2(x-a)\int_x^b (b-y)dy\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\Big(2(b-x)(\frac{x^2}{2} - ax - \frac{a^2}{2} + a^2) \\
&\quad + 2(x-a)(b^2 - \frac{b^2}{2} - bx + \frac{x^2}{2})\Big) \\
&= \frac{1}{b-a}\left((b-x)(x^2 - 2ax + a^2) + (x-a)(x^2 - 2bx + b^2)\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left((b-x)(x-a)^2 + (x-a)(x-b)^2\right) \\
&= \frac{1}{b-a}(x-a)(b-x)(x-a-x+b) \\
&= (x-a)(b-x).
\end{aligned}$$

Por lo cual:

$$\mathbb{E}^x\left[\tau_{(a,b)}\right] = \int_{\mathbb{R}} G_{a,b}(x,y)dy \quad \forall (a,b) \text{ y } x \in (a,b).$$

$\blacksquare$

La siguiente observación será de utilidad mas adelante:

Recordemos que si X una difusión tal que $X_0 = x$ y $s(x)$ su función de escala. Entonces $s(X)$ está en su escala natural, por lo que para un intervalo cualquiera $[a, b]$ con $x \in [a, b]$, $s(X_{t\wedge\tau_{(a,b)}}) \in [s(a), s(b)]$ y

$$\mathbb{P}^x (T_a < T_b) = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}$$

$$\mathbb{P}^x (T_b < T_a) = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

Definición 5.11 Dualidad entre procesos de Markov
Sean P_t y $\hat{P}_t$ semigrupos de dos procesos de Markov X y Y. Diremos que X y Y están en dualidad con respecto a una medida $\mu(dx)$(o son duales el uno del otro) si para f y g cualesquiera medibles se satisface:

$$\int_E f(x) (P_t g) \mu(dx) = \int_E g(x) \left(\hat{P}_t f\right) \mu(dx).$$

Denotaremos por $\tilde{X} = Y$ al dual de X.

Ahora, si $X^\dagger$ y $\tilde{X}^\dagger$ son los procesos X y $\tilde{X}$ matados en un tiempo de paro ξ con semigrupos $P_t^\dagger$ y $\tilde{P}_t^\dagger$ entonces $\tilde{X}^\dagger$ y $X^\dagger$ están también en dualidad con respecto a la medida de velocidad:

$$\int_E f(x) \left(\tilde{P}_t^\dagger g\right) m(dx) = \int_E g(x) \left(P_t^\dagger f\right) m(dx).$$

Si h es una función armónica con respecto a $P_t^\dagger$ $\left(P_t^\dagger h = h \, \forall t\right)$ remplazamos a f por fh en a expresión anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_E f(x) \left(\tilde{P}_t^\dagger g\right) h(x) m(dx) &= \int_E g(x) \left(P_t^\dagger fh\right) m(dx) \\ &= \int_E g(x) \frac{1}{h(x)} \left(P_t^\dagger fh\right) h(x) m(dx).\end{aligned}$$

Por lo cual, si definimos al semigrupo $P_t^* f := \frac{1}{h(x)}\left(P_t^\dagger f h\right)$ entonces $\{P_t^*\}$ es un semigrupo markoviano por el Teorema 4.10 y se satisface la siguiente igualdad:

$$\int_E f(x)\left(\tilde{P}_t^\dagger g\right) h(x)m(dx) = \int_E g(x)\left(P_t^* f\right) h(x)m(dx).$$

Es decir, $\tilde{P}_t^\dagger$ y P_t^* son duales con respecto a la medida $h(x)m(dx)$. Obsérvese que P_t^* no es más que el semigrupo del proceso h-transformado, por lo que el proceso X y el proceso h-transformado $\tilde{X}$ están en dualidad.

Ahora, tenemos las herramientas para abordar el artículo *[2] On Inversions and Doob h-transforms of Linear Diffusions* que decidimos agregar después de haber terminado el estudio del artículo de Bloemendal.

6 Inversiones y h-Transformadas de difusiones

Artículo: [1] On Inversions and Doob h-Transforms of Linear Diffusions, Larbi Alili, Piotr Graczyk, and Tomasz Zak.

6.1 Definiciones previas

Definición 6.1 *Sea $s(x)$ y $s^{-1}(x)$ una función de escala y su inversa para X, y sea $x_0 \in E$. Un mapeo $I : E \to E$ se llama una inversión en la dirección de s o s-inversión con punto fijo x_0 si se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $I \circ I(x) = x \quad x \in E$
2) $s \circ I \circ s^{-1} \in \mathcal{MR}$

$$\mathcal{MR} := \{w \,|\, \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}\,; w(x) = \frac{ax+b}{cx-a}\,, a^2 + bc > 0 \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

las involuciones reales de Möebius.

3) $I(E) = E$
4) $I(x_0) = x_0$.

La condición $a^2 + bc > 0$ garantiza que w sea decreciente pues

$$\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)' = -\frac{a^2+cb}{(cx-a)^2} < 0$$

si y solo si $a^2 + bc > 0$.

Definición 6.2 *Si $s \circ I \circ s^{-1}$ es la reflexión euclidiana con respecto a x_0, diremos que I es la s-reflexión en x_0*

$$s \circ I \circ s^{-1}(x) = -x + 2x_0$$

Definición 6.3 *Si $E = [l, r]$, diremos que X es de:*
- *Tipo I: si $-\infty < s(l)$ y $s(r) < +\infty$*
- *Tipo 2: si $-\infty < s(l)$ y $s(r) = +\infty$*

- *Tipo 3: si* $-\infty = s(l)$ *y* $s(r) < +\infty$
- *Tipo 4: si* $-\infty = s(l)$ *y* $s(r) = +\infty$

Recordemos que el generador infinitesimal L de una difusión X tal que $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)ds$ en $\mathbb{R}$ está dado por:

$$Lf = \frac{\sigma^2}{2}f'' + bf'.$$

Definición 6.4 *Para* $x_0 \in E$, $h(x)$ *es la única función* L*-armónica (también llamada función armónica de* X*) positiva* $Lh = 0$*, o dicho de otra forma, tal que sea la solución de la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{\sigma^2}{2}h'' + bh' = 0 \quad h(x_0) = 1$$

y

$$h(l) = \begin{cases} \frac{1}{h(r)} & \text{si } X \text{ es de Tipo 1 con } 2s(x_0) \neq s(l) + s(r) \\ 1 & \text{si } X \text{ es de Tipo 1 y } 2s(x_0) = s(l) + s(r) \text{ o es de Tipo 4} \\ 0 & \text{si } X \text{ es de Tipo 2} \end{cases}$$

o $h(r) = 0$ *si* X *es de Tipo 3.*

Nótese que está función h *no tiene por que ser como las funciones armónicas con las que estuvimos trabajando en las secciones anteriores, no representan la probabilidad de un evento invariante partiendo de* x.

6.2 Difusiones condicionadas e inversiones

Asumiremos que X es de *Tipo 1* y sea $h : E \to \mathbb{R}$ su correspondiente función armónica positiva tal que $0 < h(l) < h(r) < \infty$. Sea X^* el dual de X con respecto a $h(x)m(dx)$

De ahora en adelante, denotaremos por X^* al proceso dual con respecto a la función armónica descrita en la definición anterior, a diferencia de $\tilde{X}$ que se usó para el dual con respecto a las funciones armónicas de la forma

$h(x) = \mathbb{P}^x (X \in A)$ con $A \in \mathcal{I}$ definidas en el capítulo de H-transformadas. $\mathbb{P}^*$ denotará la ley de probabilidad asociada al proceso X^* y $\mathbb{E}^*$ la esperanza con respecto a esta ley de probabilidad.

Proposición 6.5 *Supongamos que X es de Tipo 1. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Existe un único $x_0 \in E$ tal que $h^2(x_0) = h(l)h(r)$. Llamaremos a x_0 la media h-geométrica de $\{l, r\}$.*
Además, si $x \in E$,

$$\mathbb{P}^x (T_l < T_r) = \mathbb{P}^*_x(T_r < T_l) \quad \textit{si y solo si} \quad x = x_0.$$

2) *Existe un único $x_1 \in E$ tal que $h(x_1) = \frac{h(l)+h(r)}{2}$. Llamaremos a x_1 la media h-aritmética de $\{l, r\}$. Además, si $x \in E$,*

$$\mathbb{P}^x (T_l < T_r) = \mathbb{P}^x (T_r < T_l) = \frac{1}{2} \quad \textit{si y solo si} \quad x = x_1.$$

Demostración Se probó que la función de escala satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\sigma(x)^2}{2} s''(x) + b(x)s'(x) = 0,$$

y por definición de L-armonicidad, $h(x)$ satisface $Lh = 0$, es decir:

$$\frac{\sigma(x)^2}{2} h''(x) + b(x)h'(x) = 0.$$

Por lo cual, h y σ son iguales salvo por una transformación afín. Se probó previamente que s es monótona creciente, por lo que h debe ser monótona creciente (o decreciente) además de ser positiva por hipótesis. Por lo tanto, si $s < r$:

$$h^2(s) < h^2(l) \tag{4}$$

$$h^2(s) < h(s)h(r) < h^2(r) \tag{5}$$

$$h(s) < \sqrt{h(s)h(r)} < h(r). \tag{6}$$

Por continuidad y monotonicidad de h, existe un único x_0 tal que $h(x_0) = \sqrt{h(s)h(r)}$

Probaremos ahora que $\frac{-1}{h}$ es función de escala de $\tilde{X}$. Por una observación anterior, basta probar que $\frac{-1}{h}$ satisface $\tilde{L}(\frac{-1}{h}) = 0$.
Como

$$\tilde{L} = L + \sigma\sigma^T \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla$$

entonces:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + b\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2 \frac{h'}{h} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\left(\frac{-1}{h}\right) &= \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{h''h^2 - 2h(h')^2}{h^4}\right) + b\left(\frac{h'}{h^2}\right) + \sigma^2\left(\frac{h'}{h}\right)\left(\frac{h'}{h^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{h''h - 2(h')^2}{h^3}\right) + b\left(\frac{h'h}{h^3}\right) + \sigma\left(\frac{(h')^2}{h^3}\right) \\
&= \frac{h\left(\frac{1}{2}\sigma^2 h'' + bh'\right)}{h^3} + \frac{-\sigma^2(h')^2 + \sigma^2(h')^2}{h^3} = h\frac{Lh}{h^3} = 0
\end{aligned}$$

pues h es L-armónica.

Como $Lh = 0$ y $\tilde{L}\left(\frac{-1}{h}\right) = 0$ entonces h es función de escala para X y $\frac{-1}{h}$ es función de escala para $\tilde{X}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}^x\left(T_l < T_r\right) = \frac{h(x) - h(r)}{h(l) - h(r)}$$

y

$$\mathbb{P}^*_x(T_r < T_l) = \frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(l)}}{\frac{1}{h(r)} - \frac{1}{h(l)}}.$$

Solo falta probar que estas dos probabilidades solo son iguales cuando $x = x_0$:
Si

$$\mathbb{P}^x\left(T_l < T_r\right) = \mathbb{P}^*_x(T_r < T_l)$$

entonces:

$$\frac{h(x) - h(r)}{h(l) - h(r)} = \frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(l)}}{\frac{1}{h(r)} - \frac{1}{h(l)}}$$

$$
\begin{aligned}
(h(x)-h(r))\left(\frac{1}{h(r)}-\frac{1}{h(l)}\right) &= \left(\frac{1}{h(x)}-\frac{1}{h(l)}\right)(h(l)-h(r)) \\
\frac{h(x)}{h(r)}-\frac{h(x)}{h(l)}-1+\frac{h(r)}{h(l)} &= \frac{h(l)}{h(x)}-\frac{h(r)}{h(x)}-1+\frac{h(r)}{h(l)} \\
\frac{h(x)}{h(r)}-\frac{h(x)}{h(l)} &= \frac{h(l)}{h(x)}-\frac{h(r)}{h(x)} \\
\frac{h(l)h(x)-h(x)h(r)}{h(r)h(l)} &= \frac{h(l)h(x)-h(x)h(r)}{h(x)h(x)}.
\end{aligned}
$$

Concluimos que:

$$h(r)h(l)=h^2(x)$$

es decir, x es la h-media aritmética, por lo que $x=x_0$
El regreso es consecuencia de la prueba anterior.

■

La prueba de 2) es muy similar a la de 1) y se omitirá.

Observación: Como $h(x_0)=\sqrt{h(r)h(l)}$ y h es invertible por ser monótona, (creciente o decreciente) se tiene que:

$$r=h^{-1}\left(\frac{h^2(x_0)}{h(l)}\right).$$

El objetivo será encontrar las inversiones correspondientes a X para los distintos Tipos 1-4. Empezaremos por un caso muy particular:

Proposición 6.6 *Si X es de tipo 1 y y $h(x_0)=\sqrt{h(r)h(l)}$ entonces la inversión I con punto fijo x_0 de X está dada por*

$$I(x)=h^{-1}\left(\frac{h^2(x_0)}{h(x)}\right).$$

Demostración Basta ver que se satisfacen siguientes propiedades:

- Sabemos que h es creciente o decreciente.

Si $h(x)$ es creciente, entonces $h^{-1}(x)$ es creciente y $\frac{1}{h(x)}$ es decreciente, por lo

que I es decreciente.
Si $h(x)$ es decreciente, entonces $h^{-1}(x)$ es decreciente y $\frac{1}{h(x)}$ es creciente, por lo que I es decreciente.
Por lo tanto, I es necesariamente decreciente.

• x_0 es punto fijo de I.

• $h \circ I \circ h^{-1}(x) = h\left(h^{-1}\left(\frac{h^2(x_0)}{h(h^{-1}(x))}\right)\right) = \frac{h^2(x_0)}{x}$

• $I \circ I(x) = h^{-1}\left(\frac{h^2(x_0)}{h\left(h^{-1}\left(\frac{h^2(x_0)}{h(x)}\right)\right)}\right) = h^{-1}\left(\frac{h^2(x_0)}{h^2(x_0)}h(x)\right) = x$
Por lo que $I \circ I = Id(x)$

Por lo tanto $h \circ I \circ h^{-1}$ es una s-inversión y $h(x_0)$ es su punto fijo, por lo que $h \circ I \circ h^{-1}$ es la *s-inversión en $h(x_0)$*

$\blacksquare$

Por lo anterior, tenemos una expresión para I en un caso particular, cuando X es de *Tipo 1* con punto fijo $h(x_0)$, donde x_0 es la h-media aritmética.
El objetivo de la siguiente proposición será determinar el conjunto de s-inversiones asociadas a X cuando X es de *Tipo 1* según el tipo de punto fijo x_0 de I. Por la Proposición 6.6 ya quedó demostrado el primer caso:

Proposición 6.7 *Sea $x_0 \in E$ y asumamos que s es acotada en E (X es de tipo 1). Entonces:*

1) *La inversión de E en dirección de s con punto fijo x_0 está dada por:*

$$I(x) = \begin{cases} s^{-1}\left(\frac{s^2(x_0)}{s(x)}\right) & si\ s^2(x_0) = s(l)s(r) \\ s^{-1}(2s(x_0) - s(x)) & si\ 2s(x_0) = s(l) + s(r) \\ s^{-1}\left(\frac{s(x)+a}{bs(x)-1}\right) & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde

$$a = \frac{2s(l)s(r) - s(x_0)(s(l)+s(r))}{s^2(x_0) - s(l)s(r)} s(x_0)$$

$$b = \frac{2s(x_0) - (s(l)+s(r))}{s^2(x_0) - s(l)s(r)}$$

2) *Si* $2s(x_0) \neq s(l) + s(r)$ *entonces*

$$I(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)$$

donde:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{bs(x)-1}{bs(x_0)-1} & si\ s^2(x_0) \neq s(l)s(r) \\ \frac{s(x)}{s(x_0)} & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Además, h es continua, estríctamente monótona (creciente o decreciente) y $h \neq 0$ *en* E.

Demostración 1)

- Supongamos $s(x_0) \neq s(l)s(r)$.

Estamos buscando $I(x)$ tal que

$$s \circ I \circ s^{-1}(x) = \frac{x+a}{bx-1}$$

con $ab+1 \neq 0$ (equivale a la condición $a^2 + bc \neq 0$ para este caso particular).

Como $E = [l, r]$ y $s \circ I \circ s^{-1}(x)$ es una involución decreciente y tanto s como s^{-1} son crecientes, entonces I debe ser decreciente de E en E, por lo que $I(l) = r$. Además, la ser x_0 punto fijo de I, tenemos que $I(x_0) = x_0$. Obtenemos lo siguiente:

Por una parte:

$$\frac{s(x_0)+a}{bs(x_0)-1} = s \circ I \circ s^{-1}(s(x_0)) = s \circ I(x_0) = s(x_0)$$

y por lo tanto:

$$bs^2(x_0) - a = 2s(x_0).$$

Por otra parte:

$$\frac{s(l)+a}{bs(l)-1} = s\circ I\circ s^{-1}(s(l)) = s\circ I(l) = s(r)$$

$$\Rightarrow bs(l)s(r) - a = s(l) + s(r).$$

Para encontrar a a y a b, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} bs^2(x_0) - a = 2s(x_0) \quad (1) \\ bs(l)s(r) - a = s(l) + s(r) \quad (2) \end{cases} .$$

Despejando de (2) a "a" obtenemos:

$$a = -(s(l) + s(r)) + b(s(l)s(r).$$

Luego remplazamos en (2) y despejamos a "b":

$$bs^2(x_0) + (s(l) + s(r)) - bs(l)s(r) = 2s(x_0)$$

$$\Rightarrow b = \frac{2s(x_0) - (s(l) + s(r))}{s^2(x_0) - s(l)s(r)}.$$

(*Cuando* $2s(x_0) = s(l) + s(r)$ *obtenemos que* $b = 0$) Remplazando a "b" en (1) encontramos la expresión de "a":

$$a = -(s(l) + s(r)) + \left(\frac{2s(x_0) - (s(l) + s(r))}{s^2(x_0) - s(l)s(r)}\right) s(l)s(r)$$

$$\Rightarrow a = \frac{(2s(l)s(r) - s(x_0)(s(l) + s(r)))s(x_0)}{s^2(x_0) - s(l)s(r)}$$

(*Cuando* $2s(x_0) = s(l) + s(r)$ *obtuvimos que* $b = 0$ *por lo que* $a = -s(l) - s(r)$)

Ahora, como

$$s\circ I\circ s^{-1}(s(x)) = \frac{s(x)+a}{bs(x)-1}$$

entonces:

$$I(x) = s^{-1}\left(\frac{s(x)+a}{bs(x)-1}\right).$$

En el caso $2s(x_0) = s(l) + s(r)$ *obtenemos que:*

$$I(x) = s^{-1}\left(2s(x_0) - s(x)\right).$$

Falta probar que $ab+1>0$ en el caso $b\neq 0$ (es decir, cuando $2s(x_0)=s(l)+s(r)$) pues en el caso $b=0$ claramente $ab+1>0$.

Por (1):

$$\begin{aligned} bs^2(x_0)-ab &= 2s(x_0) \\ b^2s^2(x_0)-ab &= 2s(x_0)b \\ 1+b^2s^2(x_0)-2s(x_0)b &= ab+1 \\ (bs(x_0)-1)^2 &= 1+ab \end{aligned}$$

Por lo que $1+ab>0$ siempre que $b\neq \frac{1}{s(x_0)}$, lo cual siempre ocurre, esto se obtiene de una manipulación aritmética.

Finalmente, el caso $s^2(x_0)=s(l)s(r)$ se estudió ya previamente.

■

2)

Primero daremos la función armónica y después probaremos que se satisface la igualdad $I=h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)$. Recordemos que si X es de Tipo 1 $h(x)$ es la única función armónica que satisface:

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}h''+bh'=0 \quad (Lh=0) \\ h(x_0)=1 \\ h(l)=\begin{cases} \frac{1}{h(r)} \text{ si } X \text{ es de tipo 1 y } 2s(x_0)\neq s(l)+s(r) \\ 1 \text{ si } X \text{ es de tipo I y } 2s(x_0)=s(l)+s(r) \end{cases} \end{cases}.$$

Por lo tanto, buscamos $h(x)$ que satisfaga lo anterior.

Caso 1

Supongamos que $s^2(x_0)\neq s(l)s(r)$

Sea

$$h(x):=\frac{bs(x)-1}{bs(x_0)-1}$$

Probaremos que h definida de esa forma en este caso particular es la función armónica buscada.
$Lh = 0$ por ser una transformación afín de s, la función de cambio de escala.
Además claramente $h(x_0) = 1$.

Dos sub-casos posibles:
Primero, si $2s(x_0) = s(l) + s(r)$ entonces $h(l) = 1$ pues $h(x) = 1$ por lo que h es la función armónica buscada si X es de tipo 1 y $s(x_0) = s(l) + s(r)$ y $s(x_0) \neq (l)s(r)$.
Ahora, si $2s(x_0) \neq s(l) + s(r)$ faltaría probar que $h(l) = \frac{1}{h(r)}$.

Previamente, se definió:

$$b = \frac{-2s(x_0) + s(l) + s(r)}{s(l)s(r) - 2s(x_0)}.$$

Entonces:

$$b(s(l)s(r) - s(x_0))^2 = -2s(x_0) + s(l) + s(r)$$
$$bs(l)s(r) - s(l) - s(r) = bs(x_0)^2 - 2s(x_0)$$
$$b^2 s(l)s(r) - bs(l) - bs(r) + 1 = b^2 s(x_0)^2 + 1 - 2bs(x_0)$$
$$(bs(l) - 1)(bs(r) - 1) = (bs(x_0) - 1)(bs(x_0) - 1)$$
$$\frac{bs(l) - 1}{bs(x_0) - 1} = \frac{bs(x_0) - 1}{bs(r) - 1}$$
$$h(l) = \frac{1}{h(r)}.$$

Por lo que h definida de esa forma es la función armónica buscada cuando X es de tipo 1 y $s(x_0) \neq s(l) + s(r)$ y $s(x_0) \neq (l)s(r)$.

Por el primer inciso de esta proposición , $s \neq \frac{1}{b}$ por lo que $h \neq 0$ en E. Concluimos entonces que $h(x) = \frac{bs(x)-1}{bs(x_0)-1}$ es la función armónica de X si es de tipo 1 y $s(x_0) \neq s(l)s(r)$.

Ahora, probaremos que para el **caso 1**, se satisface la igualdad siguiente:

$$I(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right).$$

Sabemos que:

$$h(x)=\frac{bs(x)-1}{bs(x_0)-1}=\frac{s(x)-\frac{1}{b}}{s(x_0)-\frac{1}{b}}.$$

Sea $\delta=s(x_0)-\frac{1}{b}$. Con esta notación, reescribimos a h como $\frac{s(x)-\frac{1}{b}}{\delta}$. Obsérvese que como $(bs(x_0)-1)^2=1+ab$, entonces $\delta=\frac{\sqrt{1+ab}}{b}$.

Despejando, podemos hallar h^{-1}:

$$h^{-1}(x)=s^{-1}\left(\delta x+\frac{1}{b}\right)$$

Por lo cual:

$$\begin{aligned}
h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)&=s^{-1}\left(\delta\left(\frac{1}{h(x)}\right)+\frac{1}{b}\right)=s^{-1}\left(\frac{\delta^2}{s(x)-\frac{1}{b}}+\frac{1}{b}\right)\\
&=s^{-1}\left(\frac{b\delta^2}{bs(x)-1}+\frac{\frac{1}{b}(bs(x)-1)}{bs(x)-1}\right)\\
&=s^{-1}\left(\frac{b\delta^2-\frac{1}{b}+s(x)}{bs(x)-1}\right)\\
&\overset{\delta=\frac{\sqrt{1+ab}}{b}}{=}s^{-1}\left(\frac{b\frac{1+ab}{b^2}-\frac{1}{b}+s(x)}{bs(x)-1}\right)\\
&=s^{-1}\left(\frac{\frac{ab}{b}+s(x)}{bs(x)-1}\right)\\
&=s^{-1}\left(\frac{s(x)+a}{bs(x)-1}\right)\\
&=I
\end{aligned}$$

tanto si $2s(x_0)\neq s(l)s(r)$ como si $2s(x_0)=s(l)s(r)$ pues nótese que cuando $2s(x_0)=s(l)s(r)$ la expresión $s^{-1}\left(\frac{s(x)+a}{bs(x)-1}\right)$ se simplifica en $s^{-1}(2s(x_0)-s(x))$.

Caso 2

Cuando $s^2(x_0)=s(l)s(r)$, procederemos como sigue: Sea $[l,r-\epsilon^n]$ donde $\epsilon<<1$ y $\epsilon<r-l$ de modo que $x_0\in[l,r-\epsilon^n]$ para todo n.

Claramente, al ser s estrictamente creciente y positiva, $s^2(x_0)\neq s(l)s(r-\epsilon^n)$, lo cual nos regresa al **caso 1**, por lo que la función armónica h_n que satisface las condiciones deseadas para la n correspondiente es

$$h_n = \frac{b_n s(x) - 1}{b_n s(x_0) - 1}$$

donde

$$b_n = \frac{2s(x_0) - (s(l)s(r - \epsilon^n))}{s(x_0) - s(l)s(r - \epsilon^n))}.$$

Obsérvese que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ Por continuidad, la h que satisface las condiciones deseadas en el caso $s^2(x_0) = s(l)s(r)$ es

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n = \frac{s(x)}{s(x_0)}.$$

Ahora probaremos que también en este caso se cumple que $h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right) = I$. Despejando, obtenemos que $h^{-1}(x) = s^{-1}(xs(x_0))$ por lo que:

$$h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right) = s^{-1}\left(\frac{s(x_0)}{s(x)}s(x_0)\right) = s^{-1}\left(\frac{s^2(x_0)}{s(x)}\right) = I.$$

■

Hasta ahora, nos hemos enfocado en estudiar las inversiones de difusiones de *Tipo 1*. Resulta que podemos obtener las de *Tipo 2-4* a partir de estas fácilmente:

Proposición 6.8 *Todas las inversiones de E en la dirección de s con punto fijo $x_0 \in E$ son las siguientes:*
1) Si X es de Tipo 1, con $2s(x_0) \neq s(l) + s(r)$, entonces su inversión está dada por la proposición anterior.
2) Si X es de Tipo 2, entonces

$$I(x) = s^{-1}\left(s(l) + \frac{(s(x_0) + s(l))^2}{s(x) + s(l)}\right).$$

3) Si X es de Tipo 3, entonces

$$I(x) = s^{-1}\left(s(r) - \frac{(s(r) - s(x_0))^2}{s(r) - 2(x)}\right).$$

4) Si X es de Tipo 4 o de Tipo 1 con $2s(x_0) = s(l) + s(r)$, entonces I es la s-reflexión en x_0.

Demostración Puesto que las pruebas son muy similares, solo probaremos 2):

Sea X una difusión de *Tipo 2*, es decir, $\infty < s(l)$ y $s(r) = \infty$.
Sea $\{(l, r^n)\}n \in \mathbb{N}$ una sucesión creciente de intervalos tal que $\lim_{n\to\infty} r^n \to r$ donde $s(r^n) < \infty$.
Entonces, $\lim_{n\to\infty} s(r^n) = \infty$ por continuidad de s. Restringiendo a X a cualquier intervalo de la forma (l, r^n), X es de *Tipo 1* pues tanto $s(l)$ como $s(r^n)$ son finitos. Sea $I_n(x)$la inversión asociada a X restringida al intervalo (l, r^n) y a_n, b_n los coeficientes correspondientes al intervalo como se definieron anteriormente. Entonces, tenemos que:

$$I_n(x) = s^{-1}\left(\frac{s(x) + a_n}{b_n s(x) - 1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_n(x) = \lim_{n\to\infty} s^{-1}\left(\frac{s(x) + \frac{2s(l)s(r^n) - s(x_0)(s(l)+s(r^n))}{s^2(x_0) - s(l)s(r^n)} s(x_0)}{\frac{2s(x_0) - (s(l)+s(r^n))}{s^2(x_0) - s(l)s(r^n)} s(x) - 1}\right) \\
= \lim_{n\to\infty} s^{-1}\left(\frac{s(x) + \frac{s(r^n)\left(2s(l) - s(x_0)\left(\frac{s(l)}{s(r^n)} + 1\right)\right)}{s(r^n)\left(\frac{s^2(x_0)}{s(r^n)} - s(l)\right)}}{\frac{s(r^n)\left(2\frac{s(x_0)}{s(r^n)} - \left(\frac{s(l)}{s(r^n)} + 1\right)\right)}{s(r^n)\left(\frac{s^2(x_0)}{s(r^n)} - s(l)\right)} s(x) - 1}\right) \\
= s^{-1}\left(s(x)\frac{2s(l) - s(x_0)}{-s(l)} s(x_0)\frac{1}{s(l)} s(x) - 1\right) \\
= s^{-1}\left(\frac{s(x)s(l) - 2s(l)s(x_0) + s^2(x_0) + s^2(l) - s^2(l)}{s(x) - s(l)}\right) \\
= s^{-1}\left(\frac{s(x)s(l) - s^2(l)}{s(x) - s(l)} + \frac{(s(x_0) - s(l))^2}{s(x) - s(l)}\right) \\
= s^{-1}\left(s(l) + \frac{(s(x_0) - s(l))^2}{s(x) - s(l)}\right).
\end{aligned}$$

■

No es difícil verificar que todas las funciones armónicas buscadas son las siguientes:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{bs(x)-1}{bs(x_0)-1} & \text{si } X \text{ es de Tipo 1 y } 2s(x_0) \neq s(l)+s(r) \\ 1 \quad \text{si } X \text{ es de Tipo 1 y } 2s(x_0) = s(l)+s(r) \text{ o es de Tipo 4} \\ \frac{s(x)-s(l)}{s(x_0)-s(l)} \text{ si } X \text{ es de Tipo 2} \\ \frac{s(r)-s(x)}{s(r)-s(x_0)} \text{ si } X \text{ es de Tipo 3} \end{cases}.$$

En la Proposición 6.7 ya se hallaron todas las funciones armónicas cuando X es de tipo 1. No es difícil comprobar que las de tipo 2-4 descritas previamente también satisfacen las condiciones buscadas.
El objetivo de esta proposición es escribir las inversiones en función de la función armónica h.

Proposición 6.9 *Si X es de Tipo 1, 2, 3 o 4 entonces*

$$I(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right).$$

Demostración Por la Proposición 6.7 el caso en que X es de tipo 1 ya se probó.
Si X es de tipo 2:
Por la Proposición 6.8 la inversión I de X está dada por:

$$I(x) = s^{-1}\left(s(l) + \frac{(s(x_0)+s(l))^2}{s(x)+s(l)}\right)$$

y

$$h(x) = \frac{s(x)-s(l)}{s(r)-s(l)}.$$

Despejando a x en esta expresión de $h(x)$ obtenemos que

$$h^{-1}(x) = s^{-1}\left(x(s(x_0)-s(l))+s(l)\right).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right) &= s^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}(s(x_0)-s(l))+s(l)\right) \\ &= s^{-1}\left(\frac{(s(x_0)-s(l))^2}{s(x)-s(l)}+s(l)\right) \\ &= I(x). \end{aligned}$$

Por lo que $I(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)$.
Si X es de Tipo 3:
Por Proposición 6.8 la inversión I de X está dada por:

$$I(x) = s^{-1}\left(s(r) - \frac{(s(r) - s(x_0))^2}{s(r) - 2(x)}\right)$$

y

$$h(x) = \frac{s(r) - s(x)}{s(r) - s(x_0)}.$$

Una vez más, despejando x obtenemos que

$$h^{-1}(x) = s^{-1}\left(x(s(x_0) - s(r)) + s(r)\right).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right) &= s^{-1}\left(\frac{(s(x_0) - s(l))^2}{s(x) - s(l)} + s(l)\right) \\ &= I(x) \end{aligned}$$

Por lo que $h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right) = I(x)$.

Si X es de Tipo 4 la prueba es similar y se omitirá.

■

Por este resultado, hallar la inversión de X conociendo a su función armónica h se reduce a un solo caso y es sumamente sencillo.

Proposición 6.10 *Una función $I : E \to E$ es la s-inversión con punto fijo $x_0 \in E$ si y solo si $I(E) = E$ y para todo $x \in E$*

$$\mathbb{P}^{x_0}\left(H_x < H_{I(x)}\right) = \mathbb{P}^*_{x_0} = \left(H_{I(x)} < H_x\right)$$

donde $\mathbb{P}^*$ es la ley de probabilidad del proceso X h-transformado, X^*.

Demostración *Ida:*
Sabemos que $I(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{h(x)}\right)$ y s.p.g. supongamos $x > I(x)$
Como h es función de escala de X y $\frac{-1}{h(x)}$ es función de escala de X^* entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{x_0}\left(H_x < H_{I(x)}\right) &= \frac{h(x_0) - h(I(x))}{h(x) - h(I(x))} \\
&= \frac{h(x_0) - \frac{1}{h(x)}}{h(x) - \frac{1}{h(x)}} \\
&= \frac{\frac{h(x)h(x_0)-1}{h(x)}}{\frac{h^2(x)-1}{h(x)}} \\
&= \frac{h(x)h(x_0) - 1}{h^2(x) - 1} \\
&= \frac{h(x) - 1}{h^2(x) - 1} \qquad \text{pues } h(x_0) = 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*_{x_0}\left(H_{I(x)} < H_x\right) &= \frac{s^*(x) - s^*(x_0)}{s^*(x) - s^*(I(x))} \\
&= \frac{\frac{-1}{h(x)} + \frac{1}{h(x_0)}}{\frac{-1}{h(x)} + \frac{1}{h(I(x))}} \\
&= \frac{h(x) - h(x_0)}{h(x)h(x_0)} \Bigg/ \frac{h(x) - h(I(x))}{h(x)h(I(x))} \\
&= \frac{h(I(x))(h(x) - h(x_0))}{h(x_0)(h(x) - h(I(x))} \\
&= \frac{\frac{1}{h(x)}(h(x) - h(x_0))}{h(x_0)(h(x) - \frac{1}{h(x)})} \\
&= \frac{1 - \frac{h(x_0)}{h(x)}}{h(x_0)h(x) - \frac{h(x_0)}{h(x)}} \\
&= \frac{h(x) - h(x_0)}{h(x_0)(h^2(x) - 1)} \\
&= \frac{h(x) - 1}{h^2(x) - 1} \qquad \text{pues } h(x_0) = 1.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbb{P}^*_{x_0}\left(H_{I(x)} < H_x\right) = \mathbb{P}^{x_0}\left(H_x < H_{I(x)}\right)$$

El regreso no se usará más adelante así que no se probará.

$$\blacksquare$$

Teorema 6.11 *Sea X una difusión tal que $X_0 = x_0$ en $[l, r]$ y sea p la probabilidad de que X abandone el intervalo por l. Entonces el proceso X^* es el proceso X condicionado a abandonar el intervalo $[l, r]$ por l con probabilidad $q = 1 - p$.*

Demostración Primero, probaremos que podemos descomponer a $h(x)$ como:

$$h(x) = q^* \frac{h(x) - h(l)}{h(x_0) - h(l)} + p^* \frac{h(r) - h(x)}{h(r) - h(x_0)} := q^* h_r(x) + p^* h_l(x)$$

donde

$$q^* = \frac{h(x_0) - h(l)}{h(r) - h(l)} h(r) = \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r < H_l)$$

$$p^* = \frac{h(r) - h(x_0)}{h(r) - h(l)} h(l) = \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r > H_l)$$

$$h_r(x) = \frac{h(x) - h(l)}{h(x_0) - h(l)} = \frac{h(x) - h(l)}{h(r) - h(l)} \frac{h(r) - h(l)}{h(x_0) - h(l)} = \frac{\mathbb{P}^x (H_r < H_l)}{\mathbb{P}^{x_0} (H_r < H_l)}$$

$$h_l(x) = \frac{h(r) - h(x)}{h(r) - h(x_0)} = \frac{h(r) - h(x)}{h(r) - h(l)} \frac{h(r) - h(l)}{h(r) - h(x_0)} = \frac{\mathbb{P}^x (H_r > H_l)}{\mathbb{P}^{x_0} (H_r > H_l)}.$$

Primero, obsérvese que si remplazamos a q^* por $\frac{h(x_0)-h(l)}{h(r)-h(l)} h(r)$ y a p^* por $\frac{h(r)-h(x_0)}{h(r)-h(l)} h(l)$ obtenemos a $h(x)$ pues si:

$$\begin{aligned}
K(x) :&= \frac{h(x_0) - h(l)}{h(r) - h(l)} h(r) \cdot \frac{h(x) - h(l)}{h(x_0) - h(l)} + \frac{h(r) - h(x_0)}{h(r) - h(l)} h(l) \cdot \frac{h(r) - h(x)}{h(r) - h(x_0)} \\
&= h(r) \frac{h(x) - h(l)}{h(r) - h(l)} + h(l) \frac{h(r) - h(x)}{h(r) - h(l)} \\
&= \frac{h(x)h(r) - h(r)h(l) + h(l)h(r) - h(l)h(x)}{h(r) - h(l)} \\
&= h(x) \frac{h(r) - h(l)}{h(r) - h(l)} \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

por lo que bastaría probar que:

$$\frac{h(x_0)-h(l)}{h(r)-h(l)}h(r)=\mathbb{P}^*_{x_0}(H_r<H_l)$$

$$\frac{h(r)-h(x_0)}{h(r)-h(l)}h(l)=\mathbb{P}^*_{x_0}(H_r>H_l).$$

Por simplicidad, lo probaremos cuando X es de tipo 1 con $s^2(x_0)\neq s(l)s(r)$. Los demás casos son similares.
En ese caso, h está dada por

$$h(x)=\frac{s(x)}{s(x_0)}.$$

Obsérvese que como $s^*(x)=\frac{-1}{h(x)}$ entonces si X es de tipo 1, X^* también es de tipo 1 pues tanto $s^*(l)$ como $s^*(r)$ son finitos. Además, $s^*(x_0)\neq s^*(l)s^*(r)$ por lo que h^* está dado por:

$$h^*(x)=\frac{s^*(x)}{s^*(x_0)}.$$

Como $\frac{-1}{h(x)}$ es una función de escala para X^* entonces

$$h^*(x)=\frac{\frac{-1}{h(x)}}{\frac{-1}{h(x_0)}}=\frac{h(x_0)}{h(x)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*_{x_0}(H_r<H_l)=\frac{s^*(x_0)-s^*(l)}{s^*(r)-s^*(l)}&=\frac{h^*(x_0)-h^*(l)}{h^*(r)-h^*(l)}\\&=\frac{\frac{h(x_0)}{h(x_0)}-\frac{h(x_0)}{h(l)}}{\frac{h(x_0)}{h(r)}-\frac{h(x_0)}{h(l)}}\\&=\frac{\frac{h(l)-h(x_0)}{h(x_0)h(l)}}{\frac{h(l)-h(r)}{h(r)h(l)}}\\&=\frac{h(l)-h(x_0)}{h(l)-h(r)}h(r)\\&=\frac{h(x_0)-h(l)}{h(r)-h(l)}h(r).\end{aligned}$$

Por lo que en efecto,

$$\frac{h(x_0)-h(l)}{h(r)-h(l)}h(r) = \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r < H_l).$$

Similarmente, se prueba que

$$\frac{h(r)-h(x_0)}{h(r)-h(l)}h(l) = \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r > H_l).$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$h(x) = q^*h_r(x) + p^*h_l(x) = \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r < H_l)h_r(x) + \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r > H_l)h_l(x).$$

Como $I(r) = l$ y $I(l) = r$, por 6.10 obtenemos:

$$\mathbb{P}^*_{x_0}(H_r < H_l) = \mathbb{P}_{x_0}(H_r > H_l) = p$$

y

$$\mathbb{P}^*_{x_0}(H_r > H_l) = \mathbb{P}_{x_0}(H_r < H_l) = q.$$

Así,

$$h(x) = p \cdot h_r(x) + q \cdot h_l(x).$$

Obtuvimos dos expresiones para h:

$$h(x) = q^*h_r(x) + p^*h_l(x) = \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r < H_l)h_r(x) + \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r > H_l)h_l(x)$$

$$h(x) = p \cdot h_r(x) + q \cdot h_l(x) = \mathbb{P}_{x_0}(H_r > H_l)h_r(x) + \mathbb{P}_{x_0}(H_r < H_l)h_l(x).$$

Usando la segunda expresión, si $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*_{x_0}\left[G(X_s)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{h(X_t)}{h(x_0)}G(X_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(p \cdot h_r(x) + q \cdot h_l(x)\right)G(X_s)\right] \\
&= q \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[h_l(X_t)G(X_s)\right] + p \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[h_r(X_t)G(X_s)\right].
\end{aligned}$$

Como:

$$h_r(x) = \frac{\mathbb{P}^x\left(H_r < H_l\right)}{\mathbb{P}^{x_0}\left(H_r < H_l\right)}$$

$$h_l(x) = \frac{\mathbb{P}^x\left(H_r > H_l\right)}{\mathbb{P}^{x_0}\left(H_r > H_l\right)}$$

entonces en el primer término, estamos condicionando a X a salir del intervalo $[l, r]$ por l y en el segundo, a salir por r. Estas son h-transformadas como se estudiaron en los capítulos anteriores. Así:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*_{x_0}\left[G(X_s)\right] &= q \cdot \tilde{\mathbb{E}}^{x_0}_l\left[G(X_s)\right] + p \cdot \tilde{\mathbb{E}}^{x_0}_r\left[G(X_s)\right] \\ &= q \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r > H_l\right] + p \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r < H_l\right].\end{aligned}$$

Ahora, seguiremos el mismo procedimiento pero usando la primera expresión que obtuvimos de h:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*_{x_0}\left[G(X_s)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{h(X_t)}{h(x_0)}G(X_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(q^* \cdot h_r(x) + p^* \cdot h_l(x)\right)G(X_s)\right] \\ &= p^* \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[h_l(X_t)G(X_s)\right] + q^* \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[h_r(X_t)G(X_s)\right] \\ &= p^* \cdot \tilde{\mathbb{E}}^{x_0}_l\left[G(X_s)\right] + q^* \cdot \tilde{\mathbb{E}}^{x_0}_r\left[G(X_s)\right] \\ &= p^* \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r > H_l\right] + q^* \cdot \mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r < H_l\right].\end{aligned}$$

Por lo cual, se sigue que:

$$\begin{aligned}&p^*\mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r > H_l\right] + q^*\mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r < H_l\right] \\ &\qquad = q\mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r > H_l\right] + p\mathbb{E}^{x_0}\left[G(X_s)|H_r < H_l\right]\end{aligned}$$

y por lo tanto, $p^* = q$ y $q^* = p$.
Es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*_{x_0}(H_r > H_l) &= \mathbb{P}^{x_0}\left(H_r < H_l\right) \\ \mathbb{P}^*_{x_0}(H_r < H_l) &= \mathbb{P}^{x_0}\left(H_r > H_l\right).\end{aligned}$$

Por lo que el proceso X^* es el proceso X condicionado a salir de $[l, r]$ por l con probabilidad $p^* = q$ y a salir por r con probabilidad $q^* = p$.
Los casos en que $h(l)$ y $h(r)$ no son finitos no se probaran. Para detalles de la prueba, [1] *On Inversions and Doob h-Transfroms of Linear Diffusions, Alili, Graczyk and Zak.*

Definición 6.12 *Para una difusión X_t definimos al funcional*

$$A_t := \int_0^t \frac{(I')^2(X_s)\sigma^2(X_s)}{\sigma^2(I(X_s))}ds.$$

Al ser creciente, es invertible; definimos a τ_t como su inversa.
A_t^* y τ_t^* son los objetos análogos asociados al dual de X, X^*. Además, la medida de velocidad de X^* está dada por $m^*(dx) = h^2(x)dx$ (CITAR?) y su función armónica asociada es $h^*(x) = \frac{-1}{h(x)}$.

Teorema 6.13 *Sea I la s-inversión de E con punto fijo $x_0 \in E$. Si X_0, $X_0^* \in E$ son tales que $I(X_0) = X_0^*$ entonces:*
1- Para todo $t < \xi$, τ_t y A_t^* tienen la misma distribución.
2- Los procesos $(X_t^*, t \leq \xi^*)$ y $(I(X_{\tau_t}), t \leq A_\xi)$ tienen la misma ley de probabilidad.

Demostración

1-Sea $t > 0$, definimos $\eta_t := I(X_{\tau_t})$. Puesto que τ_t es la inversa de A_t, entonces :

$$A_{\tau_t} = t$$

por lo que derivando de ambos lados, obtenemos:

$$\tau_t' \cdot \frac{(I')^2(X_{\tau_t})\sigma^2(X_{\tau_t})}{\sigma^2(I(X_{\tau_t}))} = 1.$$

Finalmente, despejando a τ_t' e integrando:

$$\tau_t = \int_0^t \frac{\sigma^2(I(X_{\tau_s}))}{(I')^2(X_{\tau_s})\sigma^2(X_{\tau_s})} ds.$$

Ahora, puesto que $I(I(x)) = x$, entonces

$$I'(x) = \frac{1}{I'(I(x))}.$$

Remplazando en la fórmula anterior, obtenemos la siguiente expresión para τ_t:

$$\tau_t = \int_0^t \frac{(I')^2(X_{\tau_s})\sigma^2(X_{\tau_s})}{\sigma^2(I(X_{\tau_s}))} ds = A_t^\eta,$$

por lo cual, $\tau_t = A_t^\eta$.
En el punto número 2, probaremos que η y X^* tienen la misma distribución, que es lo que falta para concluir esta prueba.

2-Antes de probarlo, necesitamos el siguiente resultado:

Lema 6.14 *Si $y \in E$, entonces $A_{H_{I(y)}} = H^y_\eta$*

Demostración

$$
\begin{aligned}
H^\eta_\alpha &= \inf\{s > 0 \,:\, \eta_s = \alpha\} \\
&= \inf\{s > 0 \,:\, I(X_{\tau_s}) = \alpha\} \\
&= \inf\{s > 0 \,:\, I(I(X_{\tau_s})) = I(\alpha)\} \\
&= \inf\{s > 0 \,:\, I(I(X_{\tau_s})) = I(\alpha)\}
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $u = \tau_s$ entonces al ser τ_s la inversa de A_t tenemos que $A_u = A_{\tau_s} = s$, por lo que podemos reescribir la expresión anterior usando el hecho de que $I \circ I = Id$ anterior como sigue:

$$
\begin{aligned}
&= \inf\{A_u \, u > 0 \,:\, I(I(X_u)) = I(\alpha)\} \\
&= \inf\{A_u \, u > 0 \,:\, X_u = I(\alpha)\} \\
&= A_{\inf\{u>0 \,:\, X_u = I(\alpha)\}} \qquad \text{(Puesto que } A_t \text{ es estrictamente creciente)} \\
&= A_{H_{I(\alpha)}}.
\end{aligned}
$$

■

Regresando a nuestra prueba, observemos que puesto que $A_{H_{I(y)}} = H^\eta_y$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H^\eta_\alpha \wedge H^\eta_\beta\right] &= \mathbb{E}\left[A_{H_{I(\alpha)}} \wedge A_{H_{I(\beta)}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{H_{I(\alpha)} \wedge H_{I(\beta)}} A'_s \, ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{H_{I(\alpha)} \wedge H_{I(\beta)}} dA_t\right].
\end{aligned}
$$

Así:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{I(x)}\left[\int_0^{H_{I(\alpha)}\wedge H_{I(\beta)}} dA_t\right] &= \mathbb{E}^{I(x)}\left[\int_0^{H_{I(\alpha)}\wedge H_{I(\beta)}} \frac{(I')^2(X_s)\sigma^2(X_s)}{\sigma^2(I(X_s))}ds\right] \\
&= \int_{I(\beta)}^{I(\alpha)} G(I(x),y)\frac{(I')^2(y)\sigma^2(y)}{\sigma^2(I(y))}m(dy) \\
&= \int_{I(\beta)}^{I(\alpha)} G(I(x),y)\frac{(I')^2(y)\sigma^2(y)}{\sigma^2(I(y))}\cdot\frac{2}{\sigma^2(y)s'(y)}dy \\
&= 2\int_{I(\beta)}^{I(\alpha)} G(I(x),y)\frac{(I')^2(y)}{\sigma^2(I(y))s'(y)}dy \\
&= 2\int_{\beta}^{\alpha} G(I(x),I(y))\frac{(I'(I(y))}{\sigma^2(I(I(y))s'(I(y))}dy.
\end{aligned}
$$

Una vez más, usando que $I'(I(x)) = \frac{1}{I'(x)}$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{\beta}^{\alpha} G(I(x),I(y))\frac{1}{\sigma^2(I(I(y))s'(I(y))I'(y)}dy \\
&= 2\int_{\beta}^{\alpha} G(I(x),I(y))\frac{1}{\sigma^2(y)(s(I(y)))'}dy
\end{aligned}
$$

$$
= 2\int_{\beta}^{\alpha} G(I(x),I(y))\frac{1}{\sigma^2(y)(-h(I(y))')}dy.
$$

Ahora, observemos que como $I(x) = h^{-1}(\frac{1}{h(x)})$ y $(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{-\sigma^2(y)(h(I(y)))'}dy &= \frac{1}{-\sigma^2(y)(h'(h^{-1}(\frac{1}{h(y)}))\cdot(h^{-1}(\frac{1}{h(y)}))'}dy \\
&= \frac{1}{-\sigma^2(y)(h'(h^{-1}(\frac{1}{h(y)}))\cdot\frac{1}{h'(h^{-1}(\frac{1}{h}))}\cdot\frac{-h'(y)}{h^2(y)}}dy \\
&= \frac{h^2(y)}{\sigma^2(y)h'(y)}dy \\
&= h^2(y)\frac{1}{\sigma^2(y)s'(y)}dy \\
&= h^2(y)m(dy) \\
&= m^*(dy).
\end{aligned}
$$

Ahora probaremos que $G_{I(J)}(I(x), I(y)) = G^*_J(x, y)$.
Recordemos que si $J = [a, b] \quad a < b$ es un intervalo, entonces la función de Green asociada a una difusión X está dada por

$$G_J(x, y) = c\,(s(x \wedge y) - s(a))\,\frac{s(b) - s(x \vee y)}{s(b) - s(a)}$$

donde c es una constante y s es la función de escala asociada a X.
Regresando a la prueba, en nuestro caso la imagen de la difusión X_t es el intervalo $J = [\alpha, \beta]$. Obsérvese que al ser I una inversión, es decreciente, por lo que la imagen de J bajo I es el intervalo $I(J) = [I(\beta), I(\alpha)]$ con $I(\beta) < I(\alpha)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $I(x) < I(y)$ (por lo que $x > y$).
Así:

$$\begin{aligned}
G_{I(J)}(I(x), I(y)) &= (h(I(x) \wedge I(y)) - h(I(\beta)))\,\frac{h(I(\alpha)) - h(I(x) \vee I(y))}{h(I(\alpha)) - h(I(\beta))} \\
&= (h(I(x)) - h(I(\beta)))\,\frac{h(I(\alpha)) - h(I(y))}{h(I(\alpha)) - h(I(\beta))} \\
&= \left(\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(\beta)}\right)\frac{\frac{1}{h(\alpha)} - \frac{1}{h(y)}}{\frac{1}{h(\alpha)} - \frac{1}{h(\beta)}} \qquad \left(\text{pues } I(x) = h^{-1}(\frac{1}{h(x)})\right) \\
&= (-h^*(x) + h^*(\beta))\,\frac{-h^*(\alpha) + h^*(y)}{-h^*(\alpha) + h^*(\beta)} \\
&= (h^*(y) - h^*(\alpha))\,\frac{h^*(\beta) - h^*(x)}{h^*(\beta) - h^*(\alpha)} \\
&= (h^*(x \wedge y) - h^*(\alpha))\,\frac{h^*(\beta) - h^*(x \vee y)}{h^*(\beta) - h^*(\alpha)} \\
&= G^*_J(x, y).
\end{aligned}$$

En resumen, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H^\eta_\alpha \wedge H^\eta_\beta\right] &= 2\int_\beta^\alpha G_{I(J)}(I(x), I(y))\frac{1}{\sigma^2(y)(-h(I(y))')}dy \\
&= 2\int_\beta^\alpha G_{I(J)}(I(x), I(y))m^*(dy) \\
&= \int_\beta^\alpha G^*_J(x, y)m^*(dy) \\
&= \mathbb{E}\left[H^*_\alpha \wedge H^*_\beta\right].
\end{aligned}$$

Ahora, bastaría con probar que $G_{I(J)}(I(x), I(y))$ es la función de green de η_t para concluir esta prueba, pues de ser así, tendríamos que la medida de velocidad de η_t y de X^* es la misma, por lo que los procesos son los mismos.

Para eso, calculemos la función de Green de η_t en $I(J) = [I(\beta), I(\alpha)]$:
Sin perdida de generalidad, supongamos que $x > y$ por lo que $I(x) < I(y)$.

$$\begin{aligned} G^{\eta}_{I(J)}(I(x), I(y)) &= (s^{\eta}(I(x) \wedge I(y)) - s^{\eta}(I(\beta)))\, \frac{s^{\eta}(I(\alpha)) - s^{\eta}(I(x) \vee I(y))}{s^{\eta}(I(\alpha)) - s^{\eta}(I(\beta))} \\ &= (s^{\eta}(I(x)) - s^{\eta}(I(\beta)))\, \frac{s^{\eta}(I(\alpha)) - s^{\eta}(I(y))}{s^{\eta}(I(\alpha)) - s^{\eta}(I(\beta))}. \end{aligned}$$

Observemos que $s^{\eta} = \frac{-1}{h(x)}$ es una función de escala para η, pues

$$\begin{aligned} s^{\eta}(\eta_t) &= \frac{-1}{h(\eta_t)} \\ &= \frac{-1}{h(I(X_{\tau_t}))} \\ &= -h(X_{\tau_t}) \qquad\qquad \left(\text{pues } I(x) = h^{-1}(\frac{1}{h(x)})\right). \end{aligned}$$

Como h es armónica, $h(X_{\tau_t})$ es una martingala por lo que es un movimiento browniano cambiado de tiempo, y que sus tiempos de salida del intervalo $[\alpha, \beta]$ son los de un movimiento browniano. Por lo cual, así definida, s^{η} es función de escala de η_t.

Para mayor información acerca de esta afirmación: [6] M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, proposition 3.5
"Teorema: Una función Borel localmente acotada f es función de escala si y solo si $f(X_t)$ es una martingala local".

Así:

$$
\begin{aligned}
G^{\eta}_{I(J)}(I(x),I(y)) &= (s^{\eta}(I(x)) - s^{\eta}(I(\beta)))\,\frac{s^{\eta}(I(\alpha)) - s^{\eta}(I(y))}{s^{\eta}(I(\alpha)) - s^{\eta}(I(\beta))} \\
&= \left(\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(\beta)}\right)\frac{\frac{1}{h(\alpha)} - \frac{1}{h(y)}}{\frac{1}{h(\alpha)} - \frac{1}{h(\beta)}} \\
&= G_{I(J)}(I(x),I(y)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[H^{\eta}_{\alpha} \wedge H^{\eta}_{\beta}\right] &= \int_{\beta}^{\alpha} G^{\eta}_{I(J)}(I(x),I(y))m^{*}(dy) \\
&= \int_{\beta}^{\alpha} G^{*}_{J}(x,y)m^{*}(dy) \\
&= \mathbb{E}\left[H^{*}_{\alpha} \wedge H^{*}_{\beta}\right].
\end{aligned}
$$

Así que $m^{\eta}(dy) = m^{*}(dy)$ es decir, ambos tienen la misma medida de velocidad, por lo que $\eta_t = X^{*}_t$.

■

7 Procesos de Bessel

7.1 El proceso de variación cuadrática de una martingala

Definición 7.1 *El proceso de variación cuadrática o simplemente la variación cuadrática de una martingala se define como*

$$< X, X >_t := \lim_{|\Pi_n|} \sum_{i=0}^{n} \left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right)^2 \qquad 0 \leq t \leq T$$

Π_n *partición del intervalo* $[0, T]$.

Sea M_t una martingala adaptada a una filtración $\mathcal{F}_t$ con $s < t$. Al ser x^2 una función convexa,

$$\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[M_t^2|\mathcal{F}_s\right]$$

Por lo tanto:

$$(M_s)^2 = \mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[M_t^2|\mathcal{F}_s\right]$$
$$(M_s)^2 \leq \mathbb{E}\left[M_t^2|\mathcal{F}_s\right]$$

por lo que M_t^2 es una sub-martingala. El proceso de variación cuadrática sirve para compensar a la sub-martingala M_t^2 y volverla martingala. Se sabe que si M es una martingala, no es de variación acotada. Sin embargo, al igual que el movimiento browniano se puede demostrar lo siguiente:

Teorema 7.2 *Una Martingala continua y acotada tiene variación cuadrática finita, se le denota por* $< M, M >_t$ *y satisface:*
$t \to < M, M >_t$ *con* $t \in [0, T]$ *es el único proceso creciente y continuo tal que* $M_t^2 - < M, M >_t$ *es martingala.*

Demostración *(solo se probará la segunda afirmación)*

Por demostrar que $M_t^2 - < M, M >_t$ es martingala:

$$\mathbb{E}\left[M_s M_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_t M_s|\mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[M_s \mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[M_s^2\right].$$

Por lo cual,

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 + M_s^2 - 2M_t M_s\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2\right].$$

Si $\{t_i\}_{i=1}^{n+1}$ es una partición de $[s,t]$, con $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2|\mathcal{F}_s\right].$$

Ahora, si $\{k_j\}_{j=1}^{m+1}$ es una partición de $[0,s]$, entonces

$$\Pi := \{r_i\}_{i=1}^{n+m+1} := \{k_j\}_{j=1}^{m}\bigcup\{t_i\}_{i=1}^{n+1}$$

es una partición de $[0,t]$, donde $r_{m+1} = t_1 = s$ y $r_{m+n+1} = t_{n+1} = t$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right)^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=m+1}^{m+n}\left(M_{r_{j+1}} - M_{r_j}\right)^2|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{m}\left(M_{r_{j+1}} - M_{r_j}\right)^2 + \sum_{j=m+1}^{m+n}\left(M_{r_{j+1}} - M_{r_j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{m}\left(M_{r_{j+1}} - M_{r_j}\right)^2|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{m+n}\left(M_{r_{j+1}} - M_{r_j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{m}\left(M_{r_{j+1}} - M_{r_j}\right)^2|\mathcal{F}_s\right].$$

Lo cual, tomando límite cuando la norma de la partición tiende a 0, $|\Pi_l| \to 0$, Π_l refinamiento de Π, converge a

$$\mathbb{E}\left[< M, M >_t - < M, M >_s |\mathcal{F}_s\right].$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[< M, M >_t - < M, M >_s |\mathcal{F}_s\right].$$

Al ser $< M, M >_s$ y M_s^2 procesos $\mathcal{F}_s$ medibles, reacomodamos la expresión anterior para llegar al resultado enunciado:

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - < M, M >_t |\mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - < M, M >_s .$$

Es decir, $M_t^2 - < M, M >_t$ es una martingala.

$\blacksquare$

En nuestro caso, usaremos el proceso de variación cuadrática solamente para procesos obtenidos al integrar un movimiento browniano, es decir, de la forma $X_t = \int_0^t f_s dB_s$, donde f_t es un proceso adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t$ generada por el proceso browniano B_t.
En este caso particular, es fácil de calcular la variación cuadrática de X_t:

Lema 7.3 *Si $F \in \Gamma^2[0,T]$ entonces $\left(Y_t := \int_0^t F_s dB_s\right)_{t\in[0,T]}$ tiene variación cuadrática $\int_0^t F_s^2 ds$.*

Demostración Sea $Y_t = \int_0^t F_s dB_t$ y $f(x) = x^2$. Aplicando la fórmula de Itô, obtenemos:

$$\begin{aligned} df(Y_t) &= \frac{\partial x^2}{\partial x}(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x^2}{\partial x \partial x}(Y_t)dY_t dY_t \\ &= 2\int_0^t Y_t \cdot F_s dB_s + \int_0^t F_s^2 ds. \end{aligned}$$

Por lo cual:

$$\left(\int_0^t F_s dB_s\right)^2 = 2\int_0^t Y_t \cdot F_s dB_s + \int_0^t F_s^2 ds.$$

Entonces:

$$\left(\int_0^t F_s dB_s\right)^2 - \int_0^t F_s^2 ds = 2\int_0^t Y_t \cdot F_s dB_s$$

que es una martingala por ser integral de un movimiento browniano.Por lo que $< X, X >_t = \int_0^t F_s^2 ds$.
Una consecuencia de esto es que si B_t es un movimiento browniano, entonces

$$< B, B >_t = t$$

pues $B_t = \int_0^t 1 dB_t$.

$\blacksquare$

7.2 Resultados preliminares

Teorema 7.4 *Sea B_t un movimiento browniano. Entonces, para casi todo ω el conjunto $C_\omega = \{t \mid B_t(w) = 0\}$ es de interior vacío, de medida de Lebesgue $\Lambda(C_\omega) = 0$ y no acotado.*

Demostración *Cerrado:* Puesto que $C_w = \left(B_t^{-1}(w)\right)(0)$ y B_t es continuo, C_w debe ser cerrado (imagen inversa de un conjunto cerrado bajo una función continua es un cerrado)

Interior vacío:

$$\mathbb{E}\left[\Lambda(C)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\{0\}}(B_t)dt\right] = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{B_t=0\}}dt\right] = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{P}(B_t = 0)dt = 0$$

pues $\mathbb{P}(B_t = 0) = 0 \quad \forall\, t$
Por lo cual, $\Lambda(C) = 0$ casi seguramente.
Finalmente, por recurrencia del movimiento browniano C_w no es acotado.

$\blacksquare$

Teorema 7.5 Teorema de Lévy
Sea M un proceso en $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}\mathbb{P})$ adaptado a una filtración $\mathcal{F}$ con $0 \leq t \leq T$ tal que:
1. M tiene trayectorias continuas.
2. M es martingala.
3. $< M, M >_t = t$
Entonces, M es un movimiento browniano.

Este resultado no se probará

7.3 El proceso de Bessel

Sea B un movimiento browniano de dimensión δ y sea $\rho := |B|$, la norma de B. Aplicando la fórmula de Itô a $|B|^2$, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
d|B|^2 &= \sum_{i=1}^{\delta}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B)dB_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{\delta}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dB_i dB_j \\
&= \sum_{i=1}^{\delta}\int_0^t 2B_i dB_i + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\delta}\int_0^t 2dB_i dB_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{\delta}\int_0^t B_i dB_i + \sum_{i=0}^{\delta}\int_0^t 1dt \\
&= 2\sum_{i=1}^{\delta}\int_0^t B_i dB_i + \delta t.
\end{aligned}
$$

Por lo cual:

$$
\rho_t^2 = \rho_0^2 + 2\sum_{i=0}^{\delta}\int_0^t B_s^i dB_s^i + \delta t
$$

• Si $\delta \geq 2$, $\mathbb{P}(B_t = 0) = 0$

• Si $\delta = 1$, $\{s \,|\, \rho_s = 0\}$ tiene medida de Lebesgue 0. Por lo que podemos definir el siguiente proceso:

$$
\beta_t := \sum_{i=1}^{\delta}\int_0^t \frac{B_s^i}{\rho_s} dB_s^i
$$

Obsérvese que,

$$
\begin{aligned}
< \beta, \beta > &= \left(\sum_{i=1}^{\delta}\int_0^t \frac{B_s^i}{\rho_s} dB_s^i\right)\left(\sum_{j=1}^{\delta}\int_0^t \frac{B_s^j}{\rho_s} dB_s^j\right) \\
&= \int_0^t \frac{1}{\rho_s^2}\sum_{i=1}^{\delta}\left(B_s^i\right)^2 ds \\
&= t
\end{aligned}
$$

Además, β_t es martingala por ser integral con respecto a un movimiento browniano y tiene continuidad de trayectorias.
Por el teorema de Lévy, β_t es un movimiento browniano.

Como
$$B_t dB_t = \rho_t \frac{B_t}{\rho_t} dB_t = \rho_t d\beta_t$$
, entonces podemos reescribir la ecuación (1):
$$\rho_t^2 = \rho_0^2 + 2 \int_0^t \rho_s d\beta_s + \delta t.$$
Sea $Z_t = \rho_t^2$, el cuadrado de la norma de un movimiento browniano y sea $x \geq 0$. Consideremos la siguiente ecuación:
$$Z_t = x + 2 \int_0^t \sqrt{|Z_t|} d\beta_s + \delta t.$$
Como $|\sqrt{z} - \sqrt{z'}| < \sqrt{|z - z'|}$ con $z, z' > 0$, entonces se satisfacen las condiciones Hölder de unicidad de soluciones (*Continuous Martingales and Brownian Motion, Daniel Revuz, Marc Yor Capítulo 9 sección 3*), por lo que la ecuación tiene una única solución fuerte y su solución se llama el proceso cuadrado de Bessel.
El siguiente teorema será usado pero no se probará:

Teorema 7.6 Teorema de Comparación *Sean b^1, b^2 funciones Borel tales que $b^1 \geq b^2$ y por lo menos una satisface condiciones Lipchitz. Si X^1, X^2 son soluciones de*
$$dX^1 = \sigma(X^1) dB_t + b^1(X^1) dt$$
y
$$dX^2 = \sigma(X^2) dB_t + b^2(X_2) dt$$
ecuaciones definidas en el mismo espacio con respecto al mismo movimiento browniano, y si $X_0^1 \geq X_0^2$ casi seguramente, entonces:
$$\mathbb{P}(X_t^1 \geq X_t^2 \, \forall \, t \geq 0) = 1.$$
Es decir, casi seguramente, para cada $\omega \in \Omega$,
$$X_t^1(\omega) \geq X_t^2(\omega) \, \forall \, t.$$

Regresando a lo anterior, obsérvese que en el caso $\delta = x = 0$, claramente $\tilde{Z}_t \equiv 0$ es una solución a la ecuación

$$d\tilde{Z}_t = 2\sqrt{Z_t}d\beta_t + 0dt.$$

Por el teorema de comparación, la solución Z_t de la ecuación

$$dZ_t = 2\sqrt{Z_t}d\beta_t + \delta dt$$

con $\delta \geq 1$ satisface que $Z_t \geq 0$ casi seguramente. Es decir, cualquier solución a la ecuación es positiva.
Por lo anterior, podemos reescribir la ecuación omitiendo el valor absoluto dentro de la raiz cuadrada.
La prueba se puede leer en Continuous Martingales and Brownian Motion, Daniel Revuz, Marc Yor, Capítulo 9-Teorema 3.7

Definición 7.7 *Para cada $\delta \geq 0$, $x \geq 0$, la única solución fuerte de la ecuación*

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}d\beta_s + \delta t$$

tiene por nombre cuadrado de un Bessel δ -dimensional, denotado $BESQ^\delta(x)$. El semigrupo de un $BESQ^\delta(x)$ se denota Q_x^δ. El índice de un $BESQ^\delta$ se define como $\nu := \frac{\delta}{2} - 1$.

Teorema 7.8 *Sean β y β' dos movimientos brownianos independientes y Z y Z' los $BESQ^\delta(x)$ y $BESQ^{\delta'}(x')$ soluciones de las siguientes ecuaciones:*

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}d\beta_s + \delta t$$

$$Z'_t = x' + 2\int_0^t \sqrt{Z'_s}d\beta'_s + \delta' t.$$

Entonces $Z_t + Z'_t$ es un $BESQ^{\delta+\delta'}(x + x')$.

Demostración Sea $X_t = Z_t + Z'_t$, entonces:

$$X_t = Z_t + Z'_t = x + x' + 2\left(\int_0^t \sqrt{Z_s}d\beta_s + \int_0^{t'} \sqrt{Z'_s}d\beta'_s\right) + (\delta + \delta')\, t$$

$$d\left(Z_t+Z'_t\right)=2\left(\sqrt{Z_t}d\beta_t+\sqrt{Z'_t}d\beta'_t\right)+\left(\delta+\delta'\right)dt$$

Sea $\gamma_t := \mathbb{1}_{\{X_t>0\}}\cdot\frac{\left(\sqrt{Z_t}d\beta_t+\sqrt{Z'_t}d\beta'_t\right)}{\sqrt{X_t}}+\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}d\beta''_t$.
Demostraremos que γ_t es un movimiento browniano:

$$1)<\gamma,\gamma>_t=d\gamma\cdot d\gamma=\mathbb{1}_{\{X_t>0\}}\cdot\frac{\sqrt{Z_t}\cdot\sqrt{Z_t}dt+\sqrt{Z'_t}\cdot\sqrt{Z'_t}dt}{\sqrt{X_t}\cdot\sqrt{X_t}}+\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}dt$$

$$=\mathbb{1}_{\{X_t>0\}}\frac{(Z_t+Z'_t)dt}{X_t}+\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}dt=\mathbb{1}_{\{X_t>0\}}dt+\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}dt=dt=t.$$

Como γ_t es una suma de integrales con respecto a movimientos brownianos, entonces es continua por trayectorias y es martingala.
Por el teorema de Lévy, γ_t es un movimiento browniano. Obsérvese que

$$\sqrt{X_t}d\gamma_t=\mathbb{1}_{\{X_t>0\}}(\sqrt{Z_t}d\beta_t+\sqrt{Z'_t}d\beta'_t)+0\cdot\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}d\beta''_t=\sqrt{Z_t}d\beta_t+\sqrt{Z'_t}d\beta'_t.$$

Observación: Esta última igualdad se da pues $X_t=0$ ssi Z_t y Z'_t son 0 por ser procesos positivos.
Ahora, teniendo lo anterior en cuenta, podemos reescribir la ecuación que satisface X_t:

$$X_t=x+x'+\int_0^t 2\sqrt{X_s}d\gamma_s+\int_0^t\delta+\delta'dt.$$

Por lo tanto, X_t es un $BESQ^{\delta+\delta'}(x+x')$.

■

Definición 7.9 *A la raíz cuadrada de un $BESQ(\delta)$ se le llama proceso de Bessel de dimensión δ, denotado $BES(\delta)$.*

Si Y_t es un $BESQ(\delta)$ con valor inicial $x>0$, $\delta\geq 2$, podemos aplicar la fórmula de Itô a $X_t=\sqrt{Y_t}$ (pues el movimiento de dimensión $\delta\geq 2$ no toma el valor 0 casi seguramente) y obtenemos que el proceso de Bessel X_t satisface la ecuación:

$$dX_t=\frac{\delta-1}{2X_t}dt+dB_t$$

En la siguiente sección se verá con detalle el procedimiento.

Proposición 7.10 *Para:*
1) $\delta \leq 2$ *el proceso de Bessel es recurrente*
2) $\delta \leq 1$ *el 0 es alcanzado casi seguramente.*

Demostración Recordemos las definiciones de un proceso recurrente y un proceso transitorio:
Si K es una bola con centro en 0 de radio R, X_t *es:*
-transitorio si

$$\mathbb{P}^x \left(T_K < \infty\right) = 1.$$

-recurrente si

$$\mathbb{P}^x \left(T_K < \infty\right) < 1$$

$x \in \mathbb{R}^n$.

1)El movimiento browniano es un proceso recurrente si $\delta \leq 2$, por lo cual

$$\mathbb{P}^x \left(T_K^{B_t} < \infty\right) = 1$$

Por lo que:

$$\mathbb{P}^x \left(\text{existe } t < \infty \ \text{ tal que } |B_t| = R\right) = 1$$

Y entonces:

$$\mathbb{P}^x \left(T_K^{Z_t} < \infty\right) = 1$$

por lo cual, Z_t es recurrente si $\delta \leq 2$

3) Si $\delta = 1$, entonces: $Z_t = max\{B_t, -B_t\}$
Como el movimiento browniano regresa al 0 casi seguramente, entonces para todo t, existe $t_0 > t$ tal que $B_{t_0} = 0$.
Entonces:

$$Z_{t_0} = max\{B_{t_0}, -B_{t_0}\} = 0.$$

■

Recapitulando, se definió el proceso $BESQ(\delta)$ como la norma al cuadrado de un browniano y luego al proceso de Bessel como la raíz cuadrada de este. En las siguientes secciones se construirá el proceso de Bessel de otras dos formas: como raíz de la transformada de Lamperti de un browniano con deriva, y como la h-transformada de un browniano.

7.4 Construcción del processo de Bessel como transfromada de Lamperti

Sea B_t un movimiento browniano, $\xi_t = B_t + mt$ y $f(x) = e^{2x}$.
Por la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} df(\xi_t) &= \int_0^t 2e^{2\xi_t} d\xi_t + \frac{1}{2}\int_0^t 4e^{2\xi_t} d\xi_t d\xi_t \\ &= 2\int_0^t e^{2\xi_t} dB_t + 2m\int_0^t e^{2\xi_t} dt + 2\int_0^t e^{2\xi_t} dt \\ &= 2\int_0^t e^{2\xi_s} dB_s + 2(m+1)\int_0^t e^{2\xi_s} ds. \end{aligned}$$

Definamos $M_t := \int_0^t e^{\xi_s} dB_s$.
Por el lema 7.3 :

$$< M, M >_t = \int_0^t e^{2\xi_s} ds.$$

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$f(\xi_t) = 1 + 2\int_0^t e^{\xi_t} dM_t + 2(m+1) < M, M >_t .$$

El siguiente resultado no se probará:

Teorema 7.11 (Dambis, Dubino-Schwartz) *Sea M_t una martingala continua tal que $M_t = 0$ y $< M, M >_\infty = \infty$. Entonces existe un movimiento browniano B_t tal que para todo $t \geq 0$, $M_t = B_{<M,M>_t}$. Es decir, M_t es un movimiento browniano cambiado de tiempo, y el cambio de tiempo está dado por su proceso de variación cuadrática.*
Inversamente, el proceso $M_{\tau(v)} := \beta_v$ es un movimiento browniano con respecto a $\mathcal{F}_{\tau(v)}$ donde $\tau(v) = \inf\{t \mid < M, M >_t > v\}$.

$\tau(v)$ es llamada la inversa generalizada de $< M, M >_t$ y obsérvese que en caso de que $< M, M >_t$ sea estrictamente creciente, coincide con su inversa.

Se puede leer la prueba de este resultado en [7] Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus, Capítulo 7.

Regresando a nuestro caso, como M_t es una martingala por ser una integral con respecto a un movimiento browniano, por el teorema anterior, es un movimiento browniano cambiado de tiempo y este cambio está dado por

$$A_t =< M, M >_t= \int_0^t e^{2\xi_s} ds_t.$$

Como A_t es estríctamente creciente, entonces es invertible; si $\tau(v)$ es su inversa entonces $< M, M >_{\tau(v)}= v$.

Ahora, evaluemos $f(\xi_t)$ en el cambio de tiempo $\tau(v)$:

$$\begin{aligned} X_u := f(\xi_{\tau(v)}) = e^{2\xi_{\tau(v)}} &= 1 + 2\int_0^{\tau(v)} e^{\xi_s} dM_s + 2(m+1) < M, M >_{\tau(v)} \\ &= 1 + 2\int_0^{v} e^{\xi_{\tau(v)}} dM_{\tau(v)} + 2(m+1)v \\ &= 1 + 2\int_0^{v} e^{\xi_{\tau(v)}} d\beta_v + 2(m+1)v \end{aligned}$$

pues recordemos que por el teorema anterior, $M_{\tau(v)} = \beta_v$ para algún movimiento browniano β_v. Por lo tanto:

$$X_v = 1 + 2\int_0^v \sqrt{X_u} d\beta_u + \delta v \quad \text{donde } \delta = 2(m+1).$$

El proceso solución a esta ecuación diferencial estocásitca es el Cuadrado del Proceso de Bessel de dimensión δ, $BESQ(\delta)$, y al proceso $e^{2\xi_{\tau(v)}}$ se le llama *la transformada de Lamperti* de ξ_t. Esta tiene la siguiente particularidad: permite transformar un proceso de Lévy en un proceso de Markov (como se hizo en este caso, aunque no se probará), y su inversa transforma a un proceso de Markov en un Lévy.

Definimos el *Proceso de Bessel* $BES(\delta)$ como $Y_t := \sqrt{X_t}$, donde X_t es un $BESQ(\delta)$. Como para $\delta \geq 2$, $BESQ(\delta)$ el 0 no es alcanzado casi seguramente, entonces podemos aplicar la fórmula de Itô. Para el caso $\delta = 1$ no se calculará la diferencial del proceso de Bessel, puesto que las herramientas necesarias para su construcción son más complejas. De hecho, el proceso de Bessel se generaliza para $\delta \in \mathbb{Q}$ y es llamado proceso de Bessel fraccionario.

Por la fórmula de Itô aplicada a X_t y $f(x) = \sqrt{x}$:

$$dY_t = d\sqrt{X_t} = \frac{1}{2}(X_t)^{-\frac{1}{2}} dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}X_t^{-\frac{3}{4}} dX_t dX_t\right)$$

$$= \frac{1}{2}(X_t)^{-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{X_t}dB_t + \delta dt\right) - \frac{1}{8}(X_t)^{-\frac{3}{2}}(4X_t dt + 0)$$

$$= dB_t + \frac{\delta}{2\sqrt{X_t}}dt - \frac{1}{2\sqrt{X_t}}dt = dB_t + \frac{\delta - 1}{2\sqrt{X_t}}dt$$

Entonces:

$$dY_t = \frac{\delta - 1}{2Y_t}dt + dB_t. \tag{7}$$

La solución a está ecuación es llamado el proceso de Bessel $BES(\delta)$ de dimensión δ.

Por el Teorema 2.9 obtenemos que su generador infinitesimal está dado por:

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{\delta - 1}{2x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}.$$

Proposición 7.12 *Para $d \geq 2$, $d \in \mathbb{N}$ y $r > 0$, el proceso de Bessel R_t de dimensión d iniciado en r satisface*

$$\mathbb{P}(R_t > 0 \quad 0 \leq t < \infty) = 1.$$

Es decir, casi seguramente, R_t es estríctamente positivo. Esto también prueba que un movimiento browniano en $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ no regresa al origen casi seguramente.

Demostración Basta demostrarlo para $n = 2$ pues solamente si $d > 2$,

$$\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(W_t^{(n)}\right)^2 = 0$$

si $\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2 = 0$.

Para los $k \in \mathbb{N}$ que satisfacen que $\left(\frac{1}{k}\right)^k < r < k$ definimos los siguientes tiempos de paro:

$$T_k = \inf\{t \geq 0 \,|\, R_t = \left(\frac{1}{k}\right)^k\}$$

$$S_k = \inf\{t \geq 0 \,|\, R_t = k\}$$

$$\tau_k = T_k \wedge S_k \wedge n.$$

Como el movimiento browniano es casi seguramente no acotado,

$$\mathbb{P}(S_k < \infty) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\lim_{k\to\infty} S_k = \infty) = 1$$

y por lo tanto:

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{\infty}\{S_k < \infty\} \cap \{\lim_{k\to\infty} S_k = \infty\}) = 1.$$

Como R es un proceso de Bessel de dimensión 2, satisface

$$dR_t = \frac{1}{2R_t}dt + dB_t.$$

Por la fórmula de Itô:

$$d\log(R_t) = \frac{1}{R_t}dR_t - \frac{1}{2}\frac{1}{R_t^2}dR_t \cdot dR_t = \frac{1}{R_t}\frac{1}{2R_t}dt + \frac{1}{R_t}dB_t - \frac{1}{2}\frac{1}{R_t^2}dt = \frac{1}{R_t}dB_t$$

Entonce:

$$\log(R_{\tau_k}) = log(r) + \int_0^{\tau_k}\frac{1}{R_s}dB_s.$$

Podemos aplicar la fórmula de Itô pues $log(x)$ es C^2 para $x \in \left(\frac{1}{k^k}, k\right)$, y $R_{\tau_k} \in \left(\frac{1}{k^k}, k\right)$.

Como para $0 \leq s \leq \tau_k$, $\frac{1}{R_s}$ es acotado y como τ_k es acotado por n, tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_k}\frac{1}{R_s}dB_s\right] = 0.$$

Por lo que calculando la esperanza de ambos lados, obtenemos:

$$\begin{aligned}\log(r) &= \mathbb{E}\left[\log(R_{\tau_k})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\log(R_{\tau_k}) \cdot \mathbb{1}_{\{T_k \leq S_k \wedge n\}} + \log(R_{\tau_k}) \cdot \mathbb{1}_{\{S_k \leq T_k \wedge n\}} + \log(R_{\tau_k}) \cdot \mathbb{1}_{\{n < S_k \wedge T_k\}}\right]\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\left[\log\left(\left(\frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \mathbb{1}_{\{T_k \leq S_k \wedge n\}} + \log(k) \cdot \mathbb{1}_{\{S_k \leq T_k \wedge n\}} + \log(R_n) \cdot \mathbb{1}_{\{n < S_k \wedge T_k\}}\right]$$

$$= -k\log(k)\mathbb{P}(T_k \leq S_k \wedge n) + \log(k)\mathbb{P}(S_k \leq T_k \wedge n) + \mathbb{E}\left[\log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k\wedge T_k\}}\right].$$

Como para $n \geq 1$,

$$\log(R_{T_k}) \leq \log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}} \leq \log(R_{S_k})$$

$$-k\log(k) \leq \log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}} \leq \log(k)$$

$$\mathbb{E}\left[-k\log(k)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\log(k)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}}\right]$$

$$-k\log(k)\mathbb{P}(n \leq S_k+T_k) \leq \mathbb{E}\left[\log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}}\right] \leq \log(k)\cdot\mathbb{P}(n \leq S_k \wedge T_k).$$

Recordemos que $\mathbb{P}(S_k < \infty) = 1$, por lo cual:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n \leq S_k \wedge T_k) = 0.$$

Calculando el límite cuando n tiende a infinito de nuestra expresión anterior, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k+T_k\}}\right] = 0.$$

Usando lo anterior:

$$\lim_{n\to\infty} \log(r) = \lim_{n\to\infty} -k\log(k)\mathbb{P}(T_k \leq S_k \wedge n)$$
$$+ \log(k)\mathbb{P}(S_k \leq T_k \wedge n) + \mathbb{E}\left[\log(R_n)\cdot \mathbb{1}_{\{n<S_k\wedge T_k\}}\right]$$

$$\log(r) = -k\log(k)\mathbb{P}(T_k \leq S_k) + \log(k)\mathbb{P}(S_k \leq T_k).$$

Dividiendo entre $k\log(k)$ y calculando el límite cuando k tiende a infinito, obtenemos que:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(T_k \leq S_k).$$

Ahora, si definimos a

$$T = \inf\{t > 0 \,|\, R_t = 0\}.$$

Entonces, se tiene que

$$T > T_k \quad \forall\, k$$

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(T \leq S_k) \leq \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(T_k \leq S_k) = 0$$

y así:

$$\mathbb{P}(R_t > 0 \,\forall\, 0 < t < \infty) = 1.$$

■

Para mas propiedades de recurrencia y transitividad del proceso de Bessel, [14] Karatzas and Shreve Brownian Motion and Stochastic Calculus, Bessel Process questions of Recurrence p158.

7.5 El proceso de Bessel 3-dimensional como h-transformada de un movimiento browniano

Sea B un movimiento browniano en $\mathbb{R}$. Construiremos el proceso X, obtenido al condicionar a B a tomar el valor $c \in \mathbb{R}^+$ antes que el valor 0.
Sea $\tau = \inf\{t \,|B_t \in \{0, c\}\}$ por la Proposición 3.3,

$$\mathbb{P}^x (B_\tau = c) = \frac{x}{c} \qquad 0 < x < c.$$

Una vez mas, trabajaremos con el browniano parado en τ, para que el evento $\{B_\tau = c\}$ sea invariante bajo Θ_t.

El generador infinitesimal del browniano en $\mathbb{R}$ está dado por

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x}.$$

Por lo que el generador del browniano parado condicionado a llegar a c antes que al 0 está dado por:

$$\tilde{L} = L + \sigma\sigma^T \frac{\nabla h}{h} \cdot \nabla = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + \frac{\frac{1}{c}}{\frac{x}{c}} \cdot \nabla = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

que es el generador de la difusión:

$$dX_t = dB_t + \frac{1}{X_t} dt \qquad X_t \in [0, c].$$

Pero entonces, X es un proceso de Bessel 3-dimensional! Es decir, el proceso de Bessel X es el proceso obtenido al condicionar a B a llegar antes a c que a 0.
Obsérvese que c no aparece en el generador infinitesimal ni en la ecuación diferencial, es decir, X satisface que toma el valor c antes que el valor 0 para cualquier $c \in \mathbb{R}^+$.

7.6 El proceso de Bessel como inversión, dualidad y su relación con la transformada de Lamperti

La idea de esta última sección es establecer una conexión entre las construcciones previas y el artículo de Alili, Graczyk y Zak [1] y surgió a raíz de las correcciones y comentarios que hizo el doctor Víctor Manuel Rivero al revisar el trabajo, no se encuentra en los textos estudiados.
Primero, obtendremos al dual de un proceso de Bessel usando la teoría desarrollada en [1]:

Sea X un proceso de Bessel de dimensión δ.
Si X es de dimensión 3, índice $\nu = \frac{1}{2}$ en $(0, \infty)$, la función de escala está dada por $s(x) = x^{-2\nu}$ [6], por lo que en este caso, $s(x) = \frac{1}{x}$.

Por [1], la función armónica asociada a X está dada por:

$$h(x) = \frac{s(r) - s(x)}{s(r) - s(x_0)} = \frac{0 - \frac{1}{x}}{0 - \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{x}.$$

Así, $h(x) = \frac{x_0}{x}$. Ahora, por la Proposición 6.9, la inversión asociada a X está dada por:

$$I(x) = h\left(\frac{1}{h(x)}\right) = \frac{1}{x}.$$

Este resultado sigue siendo válido siempre que $\delta > 2$. Por el Teorema 6.13, $I(X_{c(t)})$ tiene la misma distribución que X^*, el dual de X con respecto a $h(x)$, donde $c(t)$ es el inverso del funcional:

$$A_t = \int_0^t \frac{(I')^2(X_s)\sigma^2(X_s)}{\sigma^2(I(X_s))} ds.$$

En este caso, $\sigma = \frac{1}{2}$ e $I(x) = \frac{1}{x}$ por lo que esta expresión se reduce a:

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{X_s^4} ds.$$

Para encontrar la expresión de $X^* = I(X_{c(t)})$, necesitamos calcular a $c(t)$, el inverso de A_t y para esto, usaremos la construcción del proceso como transformada de Lamperti de $\xi_t = B_t + mt$ de la sección 7.4, donde m cumple que $\delta = 2(m + 1)$.

Por la ecuación (7) y lo estudiado en la sección 7.4, la raiz de la transformada de Lamperti de ξ_t, $X_t = e^{\xi_{\tau(u)}}$ es un proceso de Bessel, donde $\tau(u)$ es la inversa de:

$$R_t = \int_0^t e^{2\xi_s} ds.$$

Esto nos permite obtener una nueva expresión de A_t que facilitará calcular a su inversa $c(t)$:

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^t \frac{1}{X_s^4} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{e^{4\xi_{\tau(s)}}} ds \\ &= \int_0^{\tau(t)} \frac{1}{e^{4\xi_u}} \cdot e^{2\xi_u} du \\ &= \int_0^{\tau(t)} \frac{1}{e^{2\xi_u}} du \end{aligned}$$

pues usando el cambio de variable $u = \tau(s)$, entonces $R_u = R_{\tau(s)} = s$ por lo que $e^{2\xi_u} du = ds$.
Por lo tanto,

$$A_t = \int_0^{\tau(t)} \frac{1}{e^{2\xi_u}} du.$$

Ahora, podemos calcular a $c(t)$:

$$\begin{aligned} c(t) &= (A_t)^{-1} \\ &= \left(\int_0^{\tau(t)} \frac{1}{e^{2\xi_u}} du \right)^{-1} \\ &= \left[\left(\int_0^{\cdot} \frac{1}{e^{2\xi_u}} du \right) \circ \tau(t) \right]^{-1} \\ &= \tau^{-1}(t) \circ \left(\int_0^t e^{-2\xi_u} du \right)^{-1} \\ &= R_{\left(\int_0^t e^{-2\xi_u} du\right)^{-1}} \end{aligned}$$

por lo que la inversa de A_t está dada por

$$c(t) = R_{\left(\int_0^t e^{-2\xi_u} du\right)^{-1}}. \tag{8}$$

Ahora, podemos obtener al dual de X, X^*.
Por el Teorema 6.13, $X^* = I(X_{c(t)})$, pero por lo que acabamos de obtener:

$$\begin{aligned}
I(X_{c(t)}) &= \left(X_{c(t)}\right)^{-1} \\
&= \left(e^{\xi_{\tau(u)\circ c(t)}}\right)^{-1} \\
&= e^{-\xi_{\tau(c(t))}} \qquad \text{por lo que usando la ecuación (8):} \\
&= e^{-\xi\left(\tau\left(R_{\left(\int_0^t e^{-2\xi_u du}\right)^{-1}}\right)\right)} \\
&= e^{-\xi_{\left(\int_0^t e^{-2\xi_u}\right)^{-1}}}
\end{aligned}$$

pues τ y R son inversos.
Entonces, $X^* = I(X_{c(t)}) = e^{-\xi_{\left(\int_0^t e^{-2\xi_u}\right)^{-1}}}$, que es la transformada de Lamperti de $-\xi$, denotada $TL\,(-\xi)$.

Por el corolario 4 de [1], si X es un proceso de Bessel de dimensión δ, entonces X^* es un proceso de Bessel de dimensión $4-\delta$. Entonces, $TL(-\xi) = X^* = Y$ donde Y es un proceso de Bessel de dimensión $4-\delta$. Es decir, si partimos de un proceso $\xi_t = B_t + mt$, la raíz de su transformada de Lamperti $TL(\xi)$ es un proceso de Bessel X de dimensión $\delta = 2(m+1)$ mientras que la transformada de Lamperti de $-\xi$ es un proceso de Bessel de dimensión $4-\delta$ y está dado por:

$$TL(-\xi) = I(X_{c(t)}) = e^{-\xi_{\left(\int_0^t e^{-2\xi_u}\right)^{-1}}}.$$

Apéndice

Teorema 7.13 Teorema de convergencia dominada
Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones real valuadas integrables en un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *que converge casi donde sea a una función* f*. Si existe una función* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* f *es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

La prueba se puede leer en [15] Teorema 5.6 página 44.

Teorema 7.14 Teorema de convergencia monótona
Sea $\{f_n\}$ *una sucesión monótonamente creciente de funciones medibles positivas e integrables en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *tal que converge a una funcion* f*. Entonces:*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

La prueba se puede leer en [15] Teorema 4.6 página 31.

Lema 7.15 Lema de Fatou
Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones real valuadas medibles positivas e integrables en un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$*. Entonces*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

La prueba se puede leer en [15] Lemma 4.8 página 33.

References

[1] L. Alili, P. Graczyk, and T. Zak *On Inversions and Doob h-Transforms of Linear Diffusions* , 2015.

[2] A. Bloemendal *Doob's h-transform: theory and examples (Draft)*, 2010.

[3] M. E. Caballero *Introduction to Stochastic Integration*, First Edition, 2018.

[4] B. Oskendal *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Fifth Edition 1998

[5] P. Sousi *Advanced probability (lecture notes)*, 2013.

[6] D. Revuz, M. Yor *Continuous Martingales and Brwonian Motion* , First Edition 1990.

[7] Klebaner *Introduction to Stochastic Calculus with Aplications*, Second Edition 2005.

[8] D. Gamarnik *Advanced Stochasic Processes (lecture notes)*, 2013.

[9] A. Etheridge *Stochastic Análisis and PDE (lecture notes)*, 2016.

[10] D. Williams, L. C. G. Rogers *Diffusions, Markov processes and martingales, Volume 1*, Second Edition 1994.

[11] Dynkin *Markov Processes, Volume 1 and 2*, First Edition 1965.

[12] Kai Lai Chung, J. B. Walsh *Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry*, Second Edition 2005.

[13] R. F. Bass *Stochastic Processes*, First Edition 2011.

[14] I. Karatzas, S. E. Shreve *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition 1991.

[15] G. Bartle *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, First Edition 1995.

[16] KAI LAI CHUNG *Green, Brown, And Probability And Brownian Motion On The Line*, Second Edition 2001.