



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
UNAM-UMSNH

TOPOLOGÍA DE LOS MORFISMOS ENTRE VARIETADES ALGEBRAICAS  
AFINES Y PROYECTIVAS

TESINA  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
MANUEL ANTONIO VALDESPINO BORJA

TUTOR O TUTORES PRINCIPALES  
DR. JESÚS MUCIÑO RAYMUNDO  
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM CAMPUS MORELIA

MORELIA, MICHOACÁN      FEBRERO 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Preliminares de topología.</b>	<b>6</b>
2.1. Fibraciones. . . . .	6
2.2. Fibraciones de Hurewicz. . . . .	9
2.3. Monodromía de fibraciones de Hurewicz. . . . .	11
<b>3. Campos vectoriales, flujos locales y el teorema de la fibración de Ehresmann.</b>	<b>15</b>
<b>4. Morfismos entre variedades algebraicas</b>	<b>20</b>
4.1. Morfismos entre variedades proyectivas. . . . .	21
4.2. Morfismos entre variedades afines. . . . .	22
4.2.1. Completación. . . . .	22
4.2.2. Desingularización. . . . .	22
4.2.3. Estratificación. . . . .	23
<b>5. Fibras singulares</b>	<b>26</b>

## Notación.

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ .
- $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n)\}$ .
- $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} = \{[z_0 : \dots : z_n]\}$  donde  $[\dots]$  es la clase.
- $$\begin{array}{ccc} \phi_i : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) & \longmapsto & [z_0 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \dots : z_n] \end{array}$$
 es carta afín.
- $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  es el anillo de polinomios en las variables  $z_1, \dots, z_n$ .
- $p(z_1, \dots, z_n)$  es un polinomio en  $n$  variables.
- $Z(p(z_1, \dots, z_n))$  denota al conjunto de ceros en  $\mathbb{C}^n$  del polinomio  $p(z_1, \dots, z_n)$ .
- $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}^m$  con  $F = (F_1, \dots, F_m)$  es una aplicación polinomial.
- $X, Y, Z$  denotan espacios topológicos, superficies de Riemann, variedades algebraicas o variedad diferenciables.
- $f, g, h, p$  denotan aplicaciones continuas, morfismos algebraicos, aplicaciones diferenciables o aplicaciones holomorfas.
- $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  es cubriente topológico de  $X$ .
- $\cong_{Gr}$  denota isomorfismo de grupos.
- $\cong_{Top}$  denota homeomorfismo de espacios topológicos.
- $\cong_{SR}$  denota biholomorfismo de superficies de Riemann.
- $\cong_{Alg}$  denota isomorfismo de variedades algebraicas.
- $S_X$  es el grupo de permutaciones del conjunto  $X$ .
- $\mathfrak{X}(X)$  denota al conjunto de campos vectoriales diferenciables de una variedad diferenciable  $X$ .
- $\prod_{j \in I} X_j \xrightarrow{\pi_i} X_i$  es la proyección en la  $i$ -ésima entrada.
- $I$  denota al intervalo  $[0, 1]$  con la topología Euclidiana.

# 1. Introducción

Según F. Klein [9], estudiar la geometría de un espacio es equivalente a estudiar su grupo de transformaciones. Para el espacio afín  $\mathbb{C}^n$  (con la topología de Zariski), su grupo de transformaciones es el de automorfismos polinomiales

$$\text{Aut}(\mathbb{C}^n) = \{\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}^n \mid \text{polinomial, invertible}\}.$$

Por lo que estudiar la geometría de este espacio es equivalente a comprender todas las aplicaciones polinomiales invertibles y sus propiedades.

Hoy día, sigue siendo un problema abierto dar una caracterización de los automorfismos polinomiales

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}^n, \text{ con } n > 1.$$

Un intento de tal caracterización lo da la conjetura Jacobiana [16], la cual afirma que una aplicación polinomial  $F$  es invertible si es localmente invertible, es decir, si tiene Jacobiano distinto de cero en cada punto, y por lo tanto Jacobiano constante. La conjetura sigue siendo un problema abierto incluso para el caso  $n = 2$ .

Existen distintas técnicas que buscan demostrar o dar contraejemplos de esta conjetura. Una de ellas se basa en buscar la existencia de pares Jacobianos, que son pares de polinomios  $F = (F_1, F_2)$  los cuales definen una aplicación localmente invertible pero no invertible.

S. Friedland en [2] trata el estudio de pares Jacobianos. Uno de los puntos claves de ese artículo es el estudio de la monodromía de las fibras regulares de la aplicación  $F_1$ .

Vale la pena hacer notar que un automorfismo polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}^n$ , con  $F = (F_1, \dots, F_n)$ , define  $n$  fibraciones triviales  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F_i} \mathbb{C}$  con fibras isomorfas a  $\mathbb{C}^{n-1}$ , como mostramos en 2.4, y por lo tanto tienen monodromía trivial como se verá en 2.18.

Una pregunta natural que surge es ¿cuándo una aplicación polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  define una fibración?

Esto no siempre ocurre como vemos en los ejemplos como 2.9 y 2.10.

¿Cuál es la obstrucción a que  $F$  sea una fibración?

¿Es posible remover un conjunto  $B \subset \mathbb{C}$  tal que  $\mathbb{C}^n \setminus F^{-1}(B) \xrightarrow{F} \mathbb{C} \setminus B$  sea fibración?

La respuesta a estas preguntas fue hallada por R. Thom [19] y J. Mather ??, los cuales afirmaron lo siguiente.

**Teorema 1.1.** *Dada una aplicación polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  no constante, existe un conjunto finito  $B \subset \mathbb{C}$ , tal que*

$$\mathbb{C}^n \setminus F^{-1}(B) \xrightarrow{F} \mathbb{C} \setminus B$$

*es fibración, considerando a los espacios con la topología Eucladiana.*

En este trabajo se esboza la demostración de 1.1, siguiendo las ideas de [1] y [13]. Para ello se empieza definiendo lo que es una fibración topológica, se dan algunas propiedades y ejemplos de éstas.

Un problema que surge inmediatamente es hallar métodos que nos permitan decidir cuándo una aplicación es fibración. El teorema 3.7 proporciona condiciones suficientes para que una aplicación diferenciable  $X \xrightarrow{F} Y$  sea fibración: para ello basta que  $F$  sea suprayectiva, submersión y propia.

Se sigue de 3.7 que los morfismos entre variedades proyectivas lisas son fibraciones fuera de su conjunto de valores críticos.

El caso afín (1.1) es más complicado, pues las aplicaciones polinomiales  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  nunca son propias, para  $n > 1$  como demostramos en 3.10, así por lo que no es posible utilizar 3.7. Además, estas aplicaciones guardan información en el infinito, como se puede ver en el ejemplo 2.10. Una posibilidad para estudiarlo es la que se propone en [1] y [13], la cual se divide en 3 partes:

*Completación.* Esta parte consiste en extender una aplicación polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  a un morfismo  $X \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbb{CP}$  entre variedades proyectivas.

*Desingularización.* Esta parte menciona el problema de desingularización de variedades, el cual fue resuelto por Hironaka<sup>1</sup> en [7] y [8] para campos de característica 0. Este resultado afirma que para cualquier variedad proyectiva  $X$  y cualquier subvariedad  $V$  de  $X$ , existen una variedad lisa  $\tilde{X}$  y un morfismo propio  $\tilde{X} \xrightarrow{\phi} X$ , los cuales inducen un isomorfismo (equivalencia birracional)  $\tilde{X} \setminus \phi^{-1}(V) \xrightarrow{\phi} X \setminus V$ . Más aún, el resultado nos garantiza que  $\phi^{-1}(V)$  es una subvariedad de  $\tilde{X}$  de codimensión 1, la cual tiene a lo más cruzamientos normales.

Así, obtenemos el morfismo  $\tilde{X} \xrightarrow{\phi \circ \tilde{F}} \mathbb{CP}$  entre variedades proyectivas lisas que extiende a  $F$ , por lo que se tiene una fibración fuera del conjunto de valores críticos.

*Estratificación.* Un problema con las fibraciones es que no se portan bien respecto a las restricciones en el dominio, así que lo anterior no basta para demostrar que  $F$  induce una fibración sobre  $\mathbb{C}$ , salvo puntos críticos de la extensión.

En esta parte se esboza la demostración del primer teorema de isotopía de Thom, el cual es una generalización de 3.7. Con esto se demuestra que la fibración que se obtiene de la parte anterior se puede restringir a  $\mathbb{C}^n$  como se buscaba. Para ello nos basaremos en [12].

El teorema 1.1 nos garantiza fibraciones fuera de un conjunto finito de  $\mathbb{C}$  (valores singulares). Una pregunta natural es ¿qué pasa con las fibras asociadas a los valores singulares? Observemos igualmente que se remueven las fibras de valores críticos de la extensión y no sólo de  $F$ , por lo que podemos preguntarnos ¿existen valores críticos de la extensión que no lo sean de  $F$ ?

En la cuarta sección se estudian algunos ejemplos de fibras asociadas a valores singulares, en particular las que provienen de singularidades de tipo Morse (para el caso plano), donde se demuestra que la topología de la fibra cambia, por lo que no se puede extender a una fibración en ese punto. También se da un ejemplo de aplicaciones polinomiales con un único valor crítico que proviene de un punto crítico en el infinito, en el cual cambia la topología de la fibra, lo cual demuestra que no es suficiente con remover los puntos críticos de la aplicación original para obtener una fibración.

---

<sup>1</sup>Por este resultado, Hironaka obtuvo la medalla Fields en 1970.

## 2. Preliminares de topología.

Esta sección se trabajará en la categoría topológica, por lo que todas las aplicaciones son continuas.

### 2.1. Fibraciones.

Los conceptos a tratar en esta sección pueden encontrarse en [3] y [6].

**Definición 2.1.** Una *fibración o haz fibrado* es una cuarteta  $(X, Y, p, F)$  donde:

- 1)  $X, Y, F$  son espacios topológicos,
- 2)  $X \xrightarrow{p} Y$  es una aplicación continua y suprayectiva,
- 3) para cada punto  $y \in Y$  existe una vecindad  $U_y$  y un homeomorfismo  $U_y \times F \xrightarrow{\phi_y} p^{-1}(U_y)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_y \times F & \xrightarrow{\phi_y} & p^{-1}(U_y) \subseteq X \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow p \\ & & U_y \subseteq Y \end{array}$$

en donde  $\pi_1(x, y) = x$ .

$X$  es el *espacio total*,  $Y$  es la *base* y  $F$  es la *fibra* de la fibración.

Observemos que para una fibración  $(X, Y, p, F)$ , la fibra<sup>2</sup> de  $p$  sobre  $y \in Y$  es homeomorfa a  $F$  bajo  $\phi_y$ .

Abusando de notación, a la aplicación  $X \xrightarrow{p} Y$  se le llamará fibración.

**Ejemplo 2.2.** Dado un par de espacios topológicos  $Y, F$ , la proyección  $Y \times F \xrightarrow{\pi_1} Y$  es una fibración, la cual se le conoce como la *fibración trivial*.

**Ejemplo 2.3.** Todo cubriente  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ , en donde las fibras tienen la misma cardinalidad, digamos  $\kappa$ , tiene estructura de fibración con fibra discreta  $F = \{x_i\}_{i \in \kappa}$ .

Las fibraciones se comportan bien con homeomorfismos y restricciones.

**Observación 2.4.** Consideremos una fibración  $X \xrightarrow{p} Y$  con fibra  $F$ . Si tenemos un homeomorfismo  $X' \xrightarrow{h} X$  entonces  $X' \xrightarrow{p \circ h} Y$  es fibración.

Esto se tiene ya que, para cada  $y \in Y$  existe vecindad  $U_y$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} U_y \times F & \xrightarrow{\phi_y} & p^{-1}(U_y) \subseteq X & \xrightarrow{h^{-1}} & (p \circ h)^{-1}(U_y) \subseteq X' \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow p & & \swarrow p \circ h \\ & & U_y & & \end{array}$$

donde  $h^{-1} \circ \phi_y$  es homeomorfismo, así que  $p \circ h$  es fibración con fibra  $F$ .

---

<sup>2</sup>Dada una aplicación continua  $X \xrightarrow{f} Y$ , la *fibra de  $f$  sobre  $y \in Y$*  es el subespacio de  $X$  dado por  $f^{-1}(y)$ .

**Observación 2.5.** Consideremos  $X \xrightarrow{p} Y$  es una fibración con fibra  $F$ . Si  $U$  un abierto de  $Y$ , entonces  $p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$  es fibración.

Para ver esto, fijamos  $y \in U$ , como  $X \xrightarrow{p} Y$  es fibración, consideremos una vecindad  $U_y$  en  $Y$  de  $y$  y homeomorfismo  $U_y \times F \xrightarrow{\phi_y} p^{-1}(U_y)$  que satisface la definición 2.1.

Denotemos por  $V_y = U_y \cap U$ , así  $V_y$  es vecindad de  $y$  y tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} U_y \times F & \longleftarrow & V_y \times F & \xrightarrow{\phi_y} & p^{-1}(V_y) \hookrightarrow p^{-1}(U_y) \\ \downarrow \pi_1 & & \searrow \pi_1 & & \downarrow p \\ U_y & \longleftarrow & & & V_y \hookrightarrow U_y \end{array}$$

lo cual demuestra que  $p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$  es fibración con fibra  $F$ .

La composición de una fibración y un cubriente finito es fibración.

**Proposición 2.6.** Si  $X \xrightarrow{p} Y$  es una fibración con fibra  $F$  y  $Y \xrightarrow{q} Z$  es cubriente finito de  $n$  hojas entonces la composición  $X \xrightarrow{q \circ p} Z$  es fibración.

*Demostración.* Consideremos  $z \in Z$ . Como  $q$  es cubriente existe  $V_z$  vecindad de  $z$  tal que  $q^{-1}(V_z) = \coprod_1^n V_i$  y  $V_i \cong_{Top} V_z$  bajo  $q$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada  $V_i$  cumplen la propiedad 3) de 2.1, por lo que existen homeomorfismos  $V_i \times F \xrightarrow{\phi_i} p^{-1}(V_i)$ , para cada  $i$ , que hacen conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccc} V_y \times F & \xrightarrow{h_i} & V_i \times F & \xrightarrow{\phi_i} & p^{-1}(V_i) \\ \downarrow \pi_1 & & \searrow \pi_1 & & \downarrow p \\ V_z & \xleftarrow{q} & & & V_i \end{array}$$

donde  $h_i = q^{-1} \times 1_F$ . Así se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i^n (V_z \times F) & \xrightarrow{\psi_i} & \coprod_i^n p^{-1}(V_i) \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow q \circ p \\ & & V_z \end{array}$$

Sabemos que  $(q \circ p)^{-1}(V_z) = p^{-1}(q^{-1}(V_z)) = p^{-1}(\coprod_i^n V_i) = \coprod_i^n p^{-1}(V_i)$ , además  $\coprod_i^n (V_z \times F) = V_z \times (\coprod_i^n F)$  por lo que se obtiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_z \times (\coprod_i^n F) & \xrightarrow{\psi_i} & (q \circ p)^{-1}(V_z) \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow q \circ p \\ & & V_z \end{array}$$

Ello demuestra que  $q \circ p$  es fibración con fibra  $\coprod_i^n F$ . □

Gracias a lo anterior podemos construir familias de ejemplos.



**Ejemplo 2.7.** Consideremos  $F(z) \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio con coeficientes complejos de grado  $n$ . La función  $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  es localmente invertible fuera de los valores críticos  $B$ . Así que

$$\mathbb{C} \setminus F^{-1}(B) \xrightarrow{F} \mathbb{C} \setminus B$$

es homeomorfismo local. Es fácil verificar que  $F$  es propia; por lo que dicho homeomorfismo local en realidad es un cubriente. Vale la pena observar que  $F$  es una fibración con fibra discreta  $F^{-1}(b) = \{z_1, \dots, z_n\}$ , para  $b \in \mathbb{C} \setminus B$ .

Adicionalmente, para cualquier fibración  $X \xrightarrow{q} \mathbb{C}$ , por las observaciones 2.5 y 2.6 tenemos que;  $q^{-1}(\mathbb{C} \setminus F^{-1}(B)) \xrightarrow{q} \mathbb{C} \setminus F^{-1}(B)$  y  $q^{-1}(\mathbb{C} \setminus F^{-1}(B)) \xrightarrow{F \circ q} \mathbb{C} \setminus B$  son fibraciones.

**Ejemplo 2.8.** Consideremos un movimiento de cartas

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^n, \quad \phi(z_1, \dots, z_n) = (z_1 + \psi(z_2, \dots, z_n), z_2, \dots, z_n),$$

en donde  $\mathbb{C}^{n-1} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$  es continua, ver [14]. Notemos que  $\phi$  es homeomorfismo con inverso  $\phi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1 - \psi(z_2, \dots, z_n), z_2, \dots, z_n)$ , así por el lema 2.4 sabemos que  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{C}$  dada por  $\phi_1(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \psi(z_2, \dots, z_n)$ , es fibración.

Claramente esta fibración es trivial pues se obtiene de jalar la fibración trivial  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}, \pi_1(z_1, \dots, z_n) = z_1)$ , bajo el homeomorfismo  $\phi$ .

Un caso particular de los ejemplos anteriores es el siguiente.

**Ejemplo 2.9.** Consideremos el polinomio  $F \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  dado por  $F(z_1, \dots, z_n) = z_1^n$ . La aplicación  $F^{-1}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{F} \mathbb{C}^*$  es una fibración.

Notemos que  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  no es fibración, ya que  $F^{-1}(0)$  tiene una componente conexa (repetida  $n$  veces), mientras que la fibra general de  $F^{-1}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{F} \mathbb{C}^*$  tiene  $n$  componentes conexas.

Decimos que una aplicación polinomial, digamos  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ , es *fibración global* si lo es en todo su codominio. En general, no es fácil decir cuándo una aplicación polinomial induce una fibración global.

Como se mencionó en la introducción, el teorema 1.1 nos afirma que toda aplicación polinomial  $F$  define una fibración fuera de un conjunto finito de puntos. Este es el resultado principal de la sección 4.

Un ejemplo importante de una aplicación polinomial que no es fibración global es el siguiente, el cual se encuentra en [1].

**Ejemplo 2.10.** La aplicación polinomial  $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  dada por  $F(z_1, z_2) = z_1^2 z_2 + z_1$  induce la fibración  $F^{-1}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{F} \mathbb{C}^*$ , pues se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\phi} & F^{-1}(\mathbb{C}^*) \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow F \\ & & \mathbb{C}^* \end{array}$$

donde  $\phi(z, w) = (w, \frac{z-w}{w^2})$ , el cual es homeomorfismo con inverso  $\phi^{-1}(z_1, z_2) = (F(z_1, z_2), z_1)$ . Notemos que la fibración anterior es trivial en  $\mathbb{C}^*$  con fibra  $\mathbb{C}^*$ .

Este es otro ejemplo que no es fibración global ya que  $F^{-1}(0) = Z(z_1) \cup Z(z_1 z_2 + 1)$  tiene dos componentes conexas mientras que  $F^{-1}(c)$  tiene una componente conexa para  $c \neq 0$ . La importancia de este ejemplo se explica en la sección 4, en donde se estudian las fibras asociadas a los valores críticos.

La *conjetura Jacobiana* es uno de los problemas abiertos más conocidos en geometría algebraica<sup>3</sup>, el cual afirma que los automorfismos polinomiales de  $\mathbb{C}^n$  consisten de aplicaciones con Jacobiano constante y distinto de 0. Así, las funciones polinomiales que son componentes de automorfismos polinomiales inducen fibraciones globales triviales, por tanto, es necesario que una función polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  induzca dicho tipo de fibración para ser componente de un automorfismo polinomial.

## 2.2. Fibraciones de Hurewicz.

Existe otra noción de fibraciones relacionadas con levantamientos de homotopías, conocidas como fibraciones de Hurewicz, cuya definición y propiedades se pueden encontrar en [15].

**Definición 2.11.** Una aplicación continua  $X \xrightarrow{f} Y$  tiene la *propiedad del levantamiento de homotopías* respecto al espacio  $Z$ , si cualquier diagrama conmutativo que es de la forma

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \\ h_0 \downarrow & & \downarrow f \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

con  $h_0(z) = (z, 0)$ , se extiende al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \\ h_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow f \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & Y. \end{array}$$

**Definición 2.12.** Una función continua  $X \xrightarrow{f} Y$  es una *fibración de Hurewicz* si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a cualquier espacio  $Z$ .

**Ejemplo 2.13.** Si  $Y$  y  $F$  son espacios topológicos, la fibración trivial  $Y \times F \xrightarrow{\pi_1} Y$  es de Hurewicz.

*Demostración.* Consideremos un espacio topológico  $Z$  y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \times F \\ h_0 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

Podemos considerar las aplicaciones continuas  $Z \times I \xrightarrow{H} Y$  y  $Z \times I \xrightarrow{\pi_2 \circ g \circ \pi_1} F$ , donde  $Z \times I \xrightarrow{\pi_1} Z$  y  $Y \times F \xrightarrow{\pi_2} F$  son las proyecciones. La propiedad universal del producto nos

---

<sup>3</sup>La conjetura Jacobiana aparece en los problemas propuestos por Smale en 1998, el cual se puede encontrar en [16].

garantiza la existencia de una única función  $Z \times I \xrightarrow{\tilde{H}} Y \times F$  que hace conmutar los siguientes triángulos

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \xrightarrow{\tilde{H}} & Y \times F \\ & \searrow H & \swarrow \pi_1 \\ & & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z \times I & \xrightarrow{\tilde{H}} & Y \times F \\ & \searrow \pi_2 \circ g \circ \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & & F \end{array}$$

De donde se sigue que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \times F \\ h_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \pi_1 \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

□

**Proposición 2.14.** Consideremos una fibración de Hurewicz  $X \xrightarrow{f} Y$  suprayectiva. Si  $Y$  es contráctil entonces  $f$  admite una sección.

*Demostración.* Como  $Y$  es contráctil, existe contracción  $Y \times I \xrightarrow{H} Y$  tal que  $H(\cdot, 0) = y_0$ , con  $y_0 \in Y$ , y  $H(\cdot, 1) = 1_Y$ . Consideramos  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = y_0$ , por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{x}_0} & X \\ \downarrow h_0 & & \downarrow f \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

donde  $h_0(y) = (y, 0)$ ,  $\tilde{x}_0(y) = x_0$ .

Como  $f$  es fibración de Hurewicz, existe levantamiento de  $Y \times I \xrightarrow{\tilde{H}} X$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{x}_0} & X \\ \downarrow h_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

Consideremos la aplicación  $Y \xrightarrow{g} X$  dada por  $g(y) = \tilde{H}(y, 1)$ . Notamos que  $g$  es sección de  $f$ , pues  $(f \circ g)(y) = f(\tilde{H}(y, 1)) = H(y, 1) = y$ .

□

En general estas dos nociones de fibración no coinciden, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.15** (Fibración que no es de Hurewicz). Consideremos el espacio

$$Y = \frac{(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})}{\sim}, \text{ donde } (y, 0) \sim (y, 1) \text{ si } y \in \mathbb{R}^+.$$

Observemos que este espacio es contráctil, cuya contracción es

$$Y \times I \xrightarrow{H} Y, \text{ dada por } H([y, i], t) = [ty + (1-t), i].$$

La idea es construir una fibrición con base  $Y$ , que no tenga secciones, por lo que dicha fibrición no será de Hurewicz por la proposición anterior. Para ello, consideremos los abiertos  $U = q(\mathbb{R} \times \{0\})$  y  $V = q(\mathbb{R} \times \{1\})$ , donde  $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \xrightarrow{q} Y$  denota a la función cociente.

Claramente se cumple que  $U \cap V = \{[y, 0] = [y, 1] \mid y > 0\}$ , en donde tenemos la aplicación continua

$$U \cap V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+ \text{ dada por } f([y, i]) = y, \text{ para } i = 0, 1.$$

Observemos que  $f$  no puede extenderse a todo  $Y$ , es decir, no existe  $Y \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{R}^+$  tal que  $\tilde{f}|_{U \cap V} = f$ , pues si este fuera el caso, podríamos encontrar un par de funciones continuas  $f_0, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  que extienden a la identidad  $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{1_{\mathbb{R}^+}} \mathbb{R}^+$ , las cuales estarían dadas por  $f_i(y) = \tilde{f}(q(y, i))$ .

Para construir la fibrición deseada, consideremos las fibriciones triviales  $U \times \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\pi_1} U$  y  $V \times \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\pi_1} V$ . Notemos que la aplicación  $(U \times \mathbb{R}^+)|_{U \cap V} \xrightarrow{\phi_f} (V \times \mathbb{R}^+)|_{U \cap V}$ , dada por  $\phi_f(x, t) = (x, f(x)t)$ , es un homeomorfismo cuyo inverso está dado por  $\phi_f^{-1}(x, t) = (x, \frac{t}{f(x)})$ , por lo que podemos considerar el espacio

$$X = \frac{(U \times \mathbb{R}^+) \amalg (V \times \mathbb{R}^+)}{\sim}, \text{ donde } (x, t) \sim \phi_f(x, t),$$

en el cual se tiene la aplicación  $X \xrightarrow{h} Y$  dada por  $h([x, t]) = x$ .

La aplicación  $X \xrightarrow{h} Y$  es fibrición, pues en los abiertos  $U$  y  $V$  es trivial. Afirmamos que la fibrición anterior no es de Hurewicz. Para ver esto basta demostrar que  $h$  no admite secciones. Una sección de  $h$ , digamos  $Y \xrightarrow{g} X$ , determina un par de secciones para las fibriciones triviales  $U \times \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\pi_1} U$  y  $V \times \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\pi_1} V$ , las cuales a su vez determinan aplicaciones continuas  $U \xrightarrow{s_U} \mathbb{R}^+$  y  $V \xrightarrow{s_V} \mathbb{R}^+$ . Estas aplicaciones cumplen que  $s_V(y) = f(y)s_U(y)$  para cada  $y \in U \cap V$ , así que  $f(y) = \frac{s_V(y)}{s_U(y)}$ , con  $y \in U \cap V$ .

Con lo anterior podemos construir una aplicación continua  $\mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{R}^+$ , dada por  $\tilde{f}(y) = \frac{s_V(q(y, 0))}{s_U(q(y, 1))}$ , la cual extiende a la identidad en  $\mathbb{R}^+$ , lo cual es una contradicción, por lo que se demuestra que  $f$  no es de Hurewicz.

Observemos que el ejemplo anterior no es un espacio  $T_2$ . En [17] teorema (7.14) del capítulo 2, se puede encontrar el resultado siguiente.

**Teorema 2.16.** Toda fibrición  $X \xrightarrow{f} Y$ , donde  $Y$  es un espacio  $T_2$  y paracompacto, es de Hurewicz.

Ya que en este trabajo estaremos interesados en fibriciones con base variedades diferenciales, todas las fibriciones que consideremos serán de Hurewicz.

### 2.3. Monodromía de fibriciones de Hurewicz.

Para cada fibrición de Hurewicz, con la propiedad de levantamiento único de homotopías, tenemos asociado un invariante: la monodromía, que nos ayuda a medir la no trivialidad de la fibrición.

Consideremos una fibrición de Hurewicz con la propiedad de levantamiento único de homotopías  $X \xrightarrow{f} Y$ , y un lazo basado en  $b_0 \in f(X) \subseteq Y$ ,  $I \xrightarrow{\gamma} Y$ . Denotamos la fibra de  $f$  sobre  $b_0$  como  $F = f^{-1}(b_0)$ . Con lo anterior obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{i} & X \\
h_0 \downarrow & & \downarrow f \\
F \times I & \xrightarrow{H} & Y
\end{array}$$

donde  $h_0(x) = (x, 0)$  y  $H(x, t) = \gamma(t)$ . Por la propiedad de levantamiento único de homotopías, el diagrama anterior se completa a uno de la forma

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{i} & X \\
h_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\
F \times I & \xrightarrow{H} & Y
\end{array}$$

donde  $\tilde{H}$  es única con tal propiedad.

Observemos que  $\gamma$  induce una función continua

$$m_\gamma : F \rightarrow F, \text{ dada por } m_\gamma(x) = \tilde{H}(x, 1)$$

la cual está bien definida pues  $f(\tilde{H}(x, 1)) = H(x, 1) = \gamma(1) = b_0$ .

Cualesquiera dos lazos homotópicos inducen funciones homotópicas, pues dada una homotopía de lazos  $I \times I \xrightarrow{H} Y$  entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{i} & X \\
h_0 \downarrow & & \downarrow f \\
F \times I \times I & \xrightarrow{H'} & Y
\end{array}$$

donde  $H'(x, s, t) = H(s, t)$ , el cual se completa al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{i} & X \\
h_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\
F \times I \times I & \xrightarrow{H'} & Y
\end{array}$$

Observemos que la aplicación  $\tilde{H}$  se puede restringir a  $F$ , pues para cada  $t \in I$  se tiene que  $f(\tilde{H}(x, 1, t)) = H(1, t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b_0$ , y así  $F \times I \xrightarrow{\tilde{H}(x, 1, t)} F$  es homotopía entre  $m_{\gamma_1}$  y  $m_{\gamma_2}$ .

Es fácil ver que las funciones anteriores se comportan bien con las concatenación de lazos, es decir, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son lazos basados en  $b_0$ , entonces  $m_{\gamma_1 * \gamma_2} = m_{\gamma_2} \circ m_{\gamma_1}$ .

Notemos que  $m_{e_{b_0}} = 1_F$ , donde  $e_{b_0}$  denota al lazo constante en  $b_0$ . Esto es porque el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{i} & X \\
h_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\
F \times I & \xrightarrow{e_{b_0}} & Y
\end{array}$$

donde  $\tilde{H}(x, t) = x$ .

De lo anterior se tiene que  $m_\gamma$  es equivalencia homotópica, pues el inverso está dado por  $m_{\gamma^{-1}}$ , así que  $H_*(m_\gamma) \in \text{Aut}(H_*(F, \mathbb{Z}))$  está bien definido en clases de homotopía de lazos.

Por todo lo anterior tenemos una acción del grupo fundamental  $\pi_1(Y, b_0)$  en la homología de la fibra  $F$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_f : \pi_1(Y, b_0) &\longrightarrow \text{Aut}(H_*(F, \mathbb{Z})) \\ [\gamma(t)] &\longmapsto H_*(m_\gamma) : H_*(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(F, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

A tal acción se le conoce como la *monodromía* de la fibración de Hurewicz  $f$ .

**Ejemplo 2.17.** Dados un par de espacios topológicos  $F, Y$ . Consideremos la fibración trivial  $Y \times F \xrightarrow{\pi_1} Y$ . Para cada lazo basado en  $b_0 \in Y$ ,  $I \xrightarrow{\gamma} Y$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F \times \{b_0\} & \xrightarrow{i} & Y \times F \\ \downarrow h_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \pi_1 \\ F \times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

donde  $h_0(x, b_0) = (x, 0)$ ,  $H(x, t) = \gamma(t)$  y  $\tilde{H}(x, t) = (x, \gamma(t))$ .

Así que  $m_\gamma(x) = \tilde{H}(x, 1) = (x, b_0)$ , por lo que  $m_\gamma = 1_{F \times \{b_0\}}$  y la monodromía corresponde a la acción trivial.

**Observación 2.18.** La monodromía es invariante bajo homeomorfismos.

**Corolario 2.19.** Si una fibración es isomorfa a la trivial<sup>4</sup> entonces tiene monodromía trivial.

Por lo anterior tenemos que la monodromía nos ayuda a medir la no trivialidad de las fibra-ciones.

**Ejemplo 2.20.** Consideremos el cubriente  $\mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$  con fibra  $\mathbb{Z}$ , dado por  $p(t) = e^{2\pi it}$ . Para calcular la monodromía bastará con calcular la imagen del generador del grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$  con base en 1, el cual está dado por  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ . Observemos que para cada  $i \in \mathbb{Z}$  el levantamiento de  $\gamma$  que empieza en  $i$  es  $\tilde{\gamma}_i(t) = i + t$ , así que obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbb{R} \\ \downarrow h_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ \mathbb{Z} \times I & \xrightarrow{H} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

en donde  $j(i) = i$ ,  $h_0(i) = (i, 0)$ ,  $H(i, t) = \gamma(t)$  y  $\tilde{H}(i, t) = \tilde{\gamma}_i(t) = i + t$ . Por lo que

$$m_\gamma(i) = \tilde{H}(i, 1) = i + 1$$

y así

$$H(m_\gamma)_*(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (x_{i+1})_{i \in I}, \text{ en } H_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})},$$

y es trivial para  $H_n$  para  $1 \leq n$ .

El recíproco del corolario anterior es falso, pues la monodromía puede ser trivial sin tener una fibración trivial como lo muestra el siguiente ejemplo.

---

<sup>4</sup>Decimos que una fibración  $X \xrightarrow{f} Y$  con fibra  $F$  es *isomorfa* a la fibración trivial si existe un homeomorfismo  $X \xrightarrow{h} Y \times F$  tal que  $f = \pi_1 \circ h$ .

**Ejemplo 2.21** (Fibración de Hopf). La fibración de Hopf

$$\mathbb{S}^{2n+1} \xrightarrow{h} \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \text{ está dada por } h(z_1, \dots, z_n) = [z_1 : \dots : z_n],$$

considerando a  $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^n$ . Para demostrar que  $h$  es fibración, consideremos los conjuntos  $U_i = \{[z_1 : \dots : z_n] \mid z_i \neq 0\}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Es fácil notar que la familia  $\{U_i\}_{i=0}^n$  forma una cubierta abierta de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , para los cuales se tienen las aplicaciones

$$U_i \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\phi_i} h^{-1}(U_i), \text{ dadas por } \phi_i([z_0 : \dots : z_n], c) = \frac{c|z_i|}{z_i|(z_0, \dots, z_n)}(z_0, \dots, z_n)$$

las cuales están bien definidas en clases de equivalencias y resultan continuas. Gracias a estas aplicaciones se tienen los diagramas

$$\begin{array}{ccc} U_i \times \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\phi_i} & h^{-1}(U_i) \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow h \\ & & U_i \end{array}$$

los cuales demuestran que  $h$  es fibración.

Para mostrar que tiene monodromía trivial basta con observar que  $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, x_0) = 0$ <sup>5</sup>, pero no es la fibración trivial pues  $h$  tiene fibra  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{S}^1$  no es homeomorfo a  $\mathbb{S}^{2n+1}$  (el grupo fundamental del primero es  $\mathbb{Z}$  mientras que el del segundo es trivial).

---

<sup>5</sup>Una manera de mostrar que  $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, x_0) = 0$ , es utilizando la sucesión exacta larga en grupos de homotopía inducida por la fibración  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , con la cual obtenemos la sucesión exacta  $\dots \rightarrow 0 = \pi_1(\mathbb{S}^{2n+1}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow \pi_0(\mathbb{S}^1) = 0 \rightarrow \dots$ , de donde se sigue que  $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, x_0) = 0$ .

### 3. Campos vectoriales, flujos locales y el teorema de la fibración de Ehresmann.

Esta sección se trabajará en la categoría diferenciable. Las aplicaciones serán diferenciables entre variedades diferenciables, de clase  $C^\infty$ .

En general no es fácil determinar cuando una aplicación es fibración. El resultado principal de la sección es el teorema 3.7 que nos da condiciones suficientes para determinar cuándo una aplicación es fibración. Para demostrarlo necesitaremos dar algunas definiciones y resultados previos los cuales se pueden encontrar en [11] y [10].

**Teorema 3.1** (del Rango). Consideremos dos variedades diferenciables  $X$  y  $Y$ , de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es una aplicación diferenciable de rango constante  $r$ , entonces para cada punto  $p \in X$  existen cartas  $(U, \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\})$  de  $X$  centrada en  $p$ , y  $(V, \{V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n\})$  de  $Y$  centrada en  $f(p)$ , con  $f(U) \subseteq V$ , tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde  $\pi(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ .

Consideremos una variedad  $X$ . El *haz tangente de  $X$*  es la unión ajena de los espacios tangentes, el cual denotamos por  $TX$ , junto con la proyección  $\pi : TX \rightarrow X$  definida por  $\pi(v_p) = p$ .

Recordemos que el haz tangente de una variedad posee una estructura natural de variedad diferenciable<sup>6</sup> (su dimensión es el doble de la dimensión de  $X$ ), esta estructura hace de la proyección  $\pi$  una función diferenciable.

Un *campo vectorial diferenciable* en una variedad  $X$  es una sección diferenciable de la proyección  $TX \xrightarrow{\pi} X$ , es decir es una función diferenciable  $X \xrightarrow{S} TX$  que cumple  $\pi \circ S = 1_X$ .

**Definición 3.2.** Un *flujo o flujo local* en una variedad diferenciable  $X$  es un par  $(\mathcal{D}, \theta)$  donde  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times X$  es un abierto y  $\mathcal{D} \xrightarrow{\theta} X$  es una función diferenciable, que cumplen las siguientes propiedades

1) para cada  $p \in X$  se tiene que  $\mathcal{D}_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto que contiene a 0,

2)  $\theta(0, p) = p$  para cada  $p \in X$ ,

3)  $\theta(s, \theta(t, p)) = \theta(s + t, p)$  para cada  $p \in X$ ,  $t \in \mathcal{D}_p$  y  $s \in \mathcal{D}_{\theta(t, p)}$ , tales que  $s + t \in \mathcal{D}_p$ .

Decimos que es un *flujo global* si  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times X$ . En este caso  $\theta$  define una acción diferenciable del grupo aditivo  $\mathbb{R}^+$  sobre  $X$ .

**Definición 3.3.** Consideremos una variedad diferenciable  $X$ , un campo vectorial  $S$  en  $X$  y  $J = (a, b) \xrightarrow{\gamma} X$  una trayectoria diferenciable. Decimos que  $\gamma$  es una *trayectoria integral* de  $S$

<sup>6</sup>El haz tangente es un haz vectorial, es decir, una fibración cuya fibra tiene estructura de espacio vectorial y el homeomorfismo de la definición 2.1 induce transformaciones lineales en las fibras.



si  $\gamma'(t_0)^7 = S_{\gamma(t_0)}$  para cada  $t \in J$ . Decimos que es *máxima* si  $\gamma$  no puede extenderse a algún intervalo abierto más grande que cumpla esta propiedad.

Observemos que las trayectorias integrales máximas son únicas por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Notemos que dado un flujo  $\mathcal{D} \xrightarrow{\theta} X$ , cada  $p \in X$  determina una trayectoria  $\mathcal{D}_p \xrightarrow{\theta_p} X$  la cual está definida como  $\theta_p(t) = \theta(t, p)$ .

**Observación 3.4.** Cada flujo  $\mathcal{D} \xrightarrow{\theta} X$  determina un campo vectorial  $S$ , dado por  $S_p = \theta'_p(0)$ . Además, para cada  $p \in X$ ,  $\theta_p$  determina una trayectoria integral de  $S$ .

Inversamente, cada campo vectorial determina un único flujo máximo. Esta correspondencia está descrita por el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [11] (9.12).

**Teorema 3.5** (Fundamental en flujos). Dada una variedad diferenciable  $X$ , existe una correspondencia biyectiva entre: campos vectoriales  $S$  sobre  $X$  y flujos  $(\mathcal{D}, \theta)$  en  $X$ , que cumple las siguientes propiedades

- 1)  $\mathcal{D}_p \xrightarrow{\theta_p} X$  es la única trayectoria integral máxima de  $S$  que inicia en  $p$ ,
- 2) si  $s \in \mathcal{D}_p$  entonces  $\mathcal{D}_{\theta(s,p)} = \{t - s \mid t \in \mathcal{D}_p\}$ ,
- 3) para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X_t = \{p \in X \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$  es un abierto de  $X$  y  $X_t \xrightarrow{\theta_t} X_{-t}$  es difeomorfismo,
- 4) si  $\mathcal{D}' \xrightarrow{\theta'} X$  es otro flujo con  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ ,  $\theta'|_{\mathcal{D}} = \theta$  y  $(\mathcal{D}', \theta')$  cumplen lo anterior, entonces  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$  y  $\theta = \theta'$ , es decir,  $(\mathcal{D}, \theta)$  es un *flujo máximo*.

Al flujo  $\theta$  se le llama el *flujo asociado a  $S \in \mathfrak{X}(X)$*  y se dice que  $S$  es *el campo vectorial inducido por  $\theta$* . Si el flujo es global se dice que  $S$  es un campo vectorial *completo*.

**Lema 3.6** (del escape). Para una variedad diferenciable  $X$ , un campo vectorial  $S$  en  $X$  y  $(a, b) \xrightarrow{\gamma} X$  trayectoria integral máxima de  $S$ . Si  $b \neq \infty$  (respectivamente  $a \neq -\infty$ ), entonces para cada  $t_0 \in (a, b)$ ,  $\gamma((t_0, b))$  (respectivamente  $\gamma((a, t_0))$ ) no está contenido en algún compacto.

*Demostración.* Supongamos que  $b \neq \infty$  (el caso  $a \neq -\infty$  es análogo) y que el resultado es falso, así que existe  $t_0 \in (a, b)$  y un compacto  $K \subseteq X$  tal que  $\gamma((t_0, b)) \subseteq K$ .

Consideremos una sucesión de reales  $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ , con  $t_i \in (t_0, b)$ , tal que  $t_i \rightarrow b$ . Como  $\{\gamma(t_i)\}_{i=0}^{\infty}$  es una sucesión en  $K$ , que es compacto, existe una subsucesión convergente, sin pérdida de generalidad suponemos que es la original, tal que  $\gamma(t_i) \rightarrow q \in K$ .

Por el teorema fundamental de los flujos, existe un único flujo  $\mathcal{D} \xrightarrow{\theta} X$  que induce el campo vectorial  $S$ , y como  $(0, q) \in \mathcal{D}$  tenemos que existe  $\epsilon > 0$  y  $U$  abierto de  $X$  tal que  $q \in U$  y  $(-\epsilon, \epsilon) \times U \subseteq \mathcal{D}$ . Además tenemos que  $\gamma(t) = \theta_p(t)$ , donde  $p = \gamma(0)$ , por la unicidad de las trayectorias integrales máximas.

Como  $t_i \rightarrow b$ , existe  $t_{j'}$  tal que  $b - \epsilon < t_{j'} < b$ , y como  $\gamma(t_i) \rightarrow q$ , existe  $t_{j''}$  tal que  $\gamma(t_{j''}) \in U$ , si  $j = \max\{j', j''\}$  tenemos que  $b - \epsilon < t_j < b$  y  $\gamma(t_j) \in U$ . Podemos suponer que  $a < t_j - \epsilon < b$  y  $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq (a, b)$ .

Con lo anterior construimos una nueva trayectoria  $(a, t_j + \epsilon) \xrightarrow{\sigma} X$  definida como

---

<sup>7</sup>Recordemos que  $\gamma'(t_0) = T\gamma(t_0)(\frac{d}{dt})$ , donde  $T_{t_0}\mathbb{R} \xrightarrow{T\gamma(t_0)} T_{\gamma(t_0)}X$  es la derivada de  $\gamma$  en  $t_0$  y  $\frac{d}{dt} \in T_{t_0}\mathbb{R}$  es la derivación usual en  $\mathbb{R}$ .

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in (a, b) \\ \theta_{t_j} \circ \theta_p(t - t_j) & \text{si } -\epsilon < t - t_j < \epsilon \end{cases}$$

$\sigma$  está bien definida ya que  $t - t_j \in (-\epsilon, \epsilon) \subseteq (a, b)$ , por lo que  $\theta_p(t - t_j)$  cobra sentido, además  $\theta_{t_j} \circ \theta_p(t - t_j) = \theta(t_j, \theta(t - t_j, p)) = \theta(t, p) = \gamma(t)$ . Notemos que  $\sigma$  es curva integral y extiende a  $\gamma$ , lo cual contradice la maximalidad de  $\gamma$  de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Teorema 3.7** (de la fibrición de Ehresmann). Toda submersión propia y suprayectiva  $X \xrightarrow{f} Y$  es una fibrición.

*Demostración.* Notemos que la propiedad de ser fibrición es local sobre el contradominio, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $Y = \mathbb{R}^n$  (para  $n = \dim(Y)$ ). Por 3.1 existe un atlas  $\{U_j \xrightarrow{\phi_j} \mathbb{R}^m\}_{j \in J}$  de  $X$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow \phi_j & & \downarrow 1_{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (1)$$

donde  $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ , viendo a  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  ( $\dim(X) = m$ ).

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in J$  se define el campo vectorial  $U_j \xrightarrow{D_{ij}} TX$  dado por  $\phi_j^*(\frac{\partial}{\partial x_i})$ , el cual tiene sentido pues  $\phi_j$  es difeomorfismo entre  $U_j$  y  $\mathbb{R}^m$ , así que  $\phi_j^*(\frac{\partial}{\partial x_i})$  está dado como la composición  $U_j \xrightarrow{\phi_j} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_i}} T\mathbb{R}^m \xrightarrow{(T\phi_j)^{-1}} TU_j$ . Considerando una partición de la unidad  $\{\psi_j\}_{j \in J}$  subordinada a la cubierta  $\{U_j\}_{j \in J}$ , se pegan los campos anteriores para obtener el campo  $D_i = \sum_{j \in J} \psi_j D_{ij} \in \mathfrak{X}(X)$ .

Observemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^m & \xrightarrow{T\pi} & T\mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \uparrow & & \uparrow \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2)$$

donde  $\pi$  es como antes y  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  tiene sentido en ambos casos pues  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $n \leq m$ .

De 2 obtenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R}^n \\ D_i \uparrow & & \uparrow \frac{\partial}{\partial x_i} \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (3)$$

ya que

$$\begin{aligned}
Tf(D_i(p)) &= Tf(\sum \psi_j(p) \phi_j^*(\frac{\partial}{\partial x_i})(p)) \\
&= \sum \psi_j(p) Tf(\phi_j^*(\frac{\partial}{\partial x_i})(p)) \text{ por linealidad de la derivada} \\
&= \sum \psi_j(p) (T\pi \circ T\phi_j \circ \phi_j^*(\frac{\partial}{\partial x_i})(p)) \text{ por el diagrama 1} \\
&= \sum \psi_j(p) (T\pi \circ T\phi_j \circ (T\phi_j)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \phi_j(p)) \text{ por la definici3n de } \phi_j^*(\frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \sum \psi_j(p) (T\pi \circ \frac{\partial}{\partial x_i}(x, y)) \text{ si } \phi_j(p) = (x, y) \\
&= \sum \psi_j(p) (\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \pi(x, y)) \text{ por el diagrama 2} \\
&= \sum \psi_j(p) (\frac{\partial}{\partial x_i}(x)) \text{ por la definici3n de } \pi \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \text{ ya que } \sum \psi_j(p) = 1
\end{aligned}$$

y es claro que lo anterior es lo mismo que  $\frac{\partial}{\partial x_i} \circ f(p)$ , pues si  $p \in U_j$  tenemos que  $\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \pi \circ \phi_j(p) = \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \pi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ .

Adem3s, para cada  $p \in X$ , la trayectoria  $(a, b) \xrightarrow{\gamma} M$  definida como  $\phi_j^{-1}(\phi_j(p) + te_i)$  (donde  $p \in U_j$ ) es curva integral de  $D_i$ , y como el diagrama 3 conmuta, tenemos que  $f \circ \gamma$  es trayectoria integral de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , as3 que por la unicidad de las trayectorias integrales, tenemos que  $f(\phi_j^{-1}(\phi_j(p) + te_i)) = f(p) + te_i$ .

Por el teorema fundamental de los flujos, existe  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times X$  dominio de flujo y  $\mathcal{D} \xrightarrow{\theta_i} X$  flujo m3ximo asociado a  $D_i$ .

Se afirma que  $D_i$  es completo. Si no fuera el caso, existir3a  $p \in X$  tal que  $\mathcal{D}_p = (a, b) \neq \mathbb{R}$ , supongamos que  $b \neq \infty$ . Se tiene que  $\sigma = f \circ \theta_{i,p}$  es curva integral de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  y claramente para cualquier  $t_0 \in (a, b)$  tenemos que  $\sigma(t_0, b) = \{f(p) + te_i \mid t \in (t_0, b)\}$  est3 acotado, por lo que existe un compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  tal que  $\sigma(t_0, b) \subseteq K$ , as3 que  $\gamma(t_0, b) \subseteq f^{-1}(K)$ , pero  $f$  es propia as3 que  $f^{-1}(K)$  es compacto, lo cual contradice el lema del escape.

Por lo anterior tenemos que los flujos  $\theta_i$  son globales, as3 que se puede definir la siguiente aplicaci3n

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) &\xrightarrow{\phi} X \\
(t_1, \dots, t_n, y) &\mapsto \theta_1(t_1, \theta_2(t_2, \dots (\theta_n(t_n, y)) \dots))
\end{aligned}$$

la cual resulta ser difeomorfismo, cuyo inverso est3 dado por

$$\begin{aligned}
X &\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) \\
x &\mapsto (f(x), \theta_n(-f(x)_n, \dots \theta_1(-f(x)_1, x) \dots))
\end{aligned}$$

donde  $f(y) = (f(y)_1, \dots, f(y)_n)$ . As3, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n \times f^{-1}(0) \\
f \downarrow & \swarrow \pi & \\
\mathbb{R}^n & & 
\end{array}$$

donde  $\pi(t_1, \dots, t_n, y) = (t_1, \dots, t_n)$ , lo cual demuestra que  $f$  es fibraci3n. □

**Corolario 3.8.** Toda submersi3n suprayectiva  $X \xrightarrow{f} Y$ , con  $X$  compacto, es fibraci3n  $C^\infty$  y por lo tanto es fibraci3n topol3gica.

*Demostración.* Es claro pues todo compacto  $K$  de  $Y$  es cerrado ( $Y$  es  $T_2$ ) y  $X$  es compacto, por lo que  $f^{-1}(K)$  es cerrado en un compacto y por lo tanto compacto, así  $f$  es propia y se sigue de 3.7.  $\square$

**Ejemplo 3.9.** Consideremos la aplicación  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^+$  dada por  $F(x, y) = x^2 + y^2$ . Es fácil ver que es submersión, es propia y suprayectiva, por lo que cumple las condiciones del teorema de Ehressman y  $F$  es fibración con fibra  $\mathbb{S}^1$ .

Las aplicaciones polinomiales con coeficientes complejos son más complicadas pues nunca son propias, salvo el caso de una variable, como lo demuestra la siguiente proposición.

**Proposición 3.10.** Dado un polinomio no constante  $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ , con  $n \geq 2$ , la aplicación polinomial inducida por  $P$ , denotada por  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ , no es propia.

*Demostración.* Consideremos  $c \in \mathbb{C}$  y  $R > 0$ , queremos ver que  $F^{-1}(c) = Z(P - c) \not\subseteq B(0, R)$ . Como  $P$  no es constante se tiene que  $P - c$  tampoco lo es, por lo que podemos suponer que el grado de  $P - c$  respecto a la variable  $z_n$  es  $m \geq 1$ , así que  $P - c = \sum_{i=0}^m a_i(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^i$ , donde cada  $a_i(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{n-1}]$  y  $a_m(z_1, \dots, z_{n-1})$  es distinto de cero. Recordemos que para cada polinomio distinto de cero  $Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$  se tiene que  $Z(Q) \neq \mathbb{C}^k$ , el cual es un resultado inmediato del teorema de los ceros de Hilbert, pues si  $Z(Q) = \mathbb{C}^k$  entonces  $\langle 0 \rangle = I(\mathbb{C}^k) = I(Z(Q)) = \sqrt{\langle Q \rangle}$  y ésto sólo es posible si  $Q = 0$ .

Por lo anterior existe  $z = (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus Z(a_m(z_1, \dots, z_{n-1}))$  tal que  $\|z\| > R$ , así que podemos considerar el polinomio  $P(z, z_n) - c$  en la variable  $z_n$ , el cual es distinto de cero pues tiene grado  $m$ , y como  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado existe  $p_n$  raíz de  $P(z, z_n) - c$ , por lo que  $p = (p_1, \dots, p_n) \in Z(P - c)$  y  $\|p\| \geq \|z\| > R$ , lo cual demuestra que  $F^{-1}(c)$  no es compacto y así  $F$  no es propia.  $\square$

## 4. Morfismos entre variedades algebraicas

En esta sección trabajaremos en la categoría algebraica, por lo que las aplicaciones serán morfismos entre variedades algebraicas.

Empezaremos repasando algunos conceptos y resultados de geometría algebraica, los cuales pueden hallarse en [5].

**Definición 4.1.** Un *conjunto algebraico afín (proyectivo)* es un subconjunto cerrado  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  ( $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ), con la topología de Zariski<sup>8</sup>, para algún entero  $n > 0$ . Decimos que es una *variedad afín (proyectiva)* si es un conjunto algebraico irreducible<sup>9</sup>.

**Definición 4.2.** Consideremos una variedad algebraica  $X$  (afín o proyectiva). La dimensión de  $X$  es el supremo de los enteros  $n$  tales que existe una cadena  $Y_0 \subsetneq Y_1 \cdots \subsetneq Y_n = X$ , donde cada  $Y_i$  es cerrado e irreducible en  $X$ .

Recordemos que espacio proyectivo posee una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i=0}^n$ , donde cada  $U_i = \{[z_0 : \dots : z_n] \mid z_i \neq 0\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ , cuyo homeomorfismo es

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \xrightarrow{\phi_i} U_i, \text{ dado por } \phi_i((z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)) = [z_0 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \dots : z_n].$$

Por lo anterior, toda variedad proyectiva  $X \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  está cubierta por variedades afines, las cuales están dadas por  $X \cap U_i$ .

**Definición 4.3.** Consideremos una variedad algebraica afín  $X = Z(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ . Un punto  $p \in X$  es liso si el rango de la matriz Jacobiana  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))_{i,j}$  es igual a  $n - \dim(X)$ , en caso contrario  $p$  es un punto *singular*. La variedad es *lisa o no singular* si lo es en cada punto. Denotaremos por  $Sing(X)$  al conjunto de puntos singulares.

**Ejemplo 4.4.** Consideremos la cúbica  $X = Z(y - x^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ . Un punto  $p = (x, y) \in X$  es liso si y sólo si la matriz  $(-3x^2 \ 1)$  tiene rango 1, lo cual siempre ocurre, así que  $X$  es lisa.

**Ejemplo 4.5.** Consideremos la cúbica cuspidal  $X = Z(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ . Un punto  $p = (x, y) \in X$  es singular si y sólo si la matriz  $(-3x^2 \ 2y)$  tiene rango 0, lo cual únicamente ocurre si  $p = (0, 0)$ , así que el único punto singular de  $X$  es el origen.

**Ejemplo 4.6.** Consideremos el conjunto  $X = Z(xy^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ . Observemos que este conjunto no es variedad algebraica, pues tiene dos componentes irreducibles (una de multiplicidad 2). Aún así podemos preguntarnos si este conjunto es liso o no. Un punto  $p = (x, y) \in X$  es singular si y sólo si la matriz  $(y^2 \ 2xy)$  tiene rango 0, lo cual únicamente ocurre en  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{C}\}$ , así que  $X$  es singular en todo el eje  $y$ .

El siguiente resultado es el teorema (5.3) de [5].

**Teorema 4.7.** Consideremos  $X$  variedad algebraica afín. El conjunto  $Sing(X)$  es un subconjunto cerrado y propio de  $X$ .

<sup>8</sup>La topología de Zariski tiene por cerrados a los ceros de familia de polinomios. Para el caso proyectivo los polinomios tienen que considerarse homogéneos.

<sup>9</sup>El conjunto vacío no es considerado irreducible.

## 4.1. Morfismos entre variedades proyectivas.

**Definición 4.8.** Consideremos una variedad proyectiva  $X \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Decimos que  $p \in X$  es un punto liso si  $\phi_i^{-1}(p)$  es punto liso de  $\phi_i^{-1}(X \cap U_i) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ , donde  $p \in U_i$ . Decimos que  $X$  es *lisa* o *no singular* si lo es en cada punto.

**Ejemplo 4.9.** Consideremos la variedad proyectiva  $X = Z(z y^2 - x^3) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ . Es claro que  $\phi_0^{-1}(X \cap U_0)$ ,  $\phi_1^{-1}(X \cap U_1)$  y  $\phi_2^{-1}(X \cap U_2)$  corresponden a los ejemplos 4.4, 4.5 y 4.6. Por lo que  $X$  únicamente tiene 2 puntos singulares, a saber  $[0 : 0 : 1]$  y  $[1 : 0 : 0]$ .

**Observación 4.10.** Toda variedad proyectiva lisa  $X$  tiene una estructura de variedad diferenciable compleja dada por el teorema de la función implícita, con la cual resulta ser compacta (ya que es cerrada y  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es compacto).

**Definición 4.11.** Un morfismo entre variedades proyectivas  $X \xrightarrow{f} Y$  es *liso* si el rango de la matriz Jacobiana de  $f$  es constante e igual a la dimensión de  $Y$ .

**Observación 4.12.** Un morfismo entre variedades proyectivas induce una aplicación holomorfa entre las variedades complejas correspondientes. Si el morfismo es liso la aplicación holomorfa asociada resulta ser submersión.

**Corolario 4.13.** Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es un morfismo liso entre variedades proyectivas lisas, entonces  $f$  es una fibración entre las variedades complejas asociadas.

*Demostración.* Como  $f$  es lisa entre variedades proyectivas, induce una submersión sobreyectiva y propia ( $X$  es compacto), por lo que se puede aplicar el teorema de la fibración de Ehresmann.  $\square$

En realidad podemos eliminar la hipótesis de que el morfismo sea liso, para ello necesitaremos lo siguiente.<sup>10</sup>

**Proposición 4.14.** Consideremos  $X$  variedad algebraica proyectiva. Si  $Y$  es cualquier variedad algebraica entonces  $X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$  es una aplicación cerrada.

De lo anterior tenemos que la imagen de cualquier conjunto cerrado bajo algún morfismo siempre es cerrado, pues si  $X \xrightarrow{f} Y$  es un morfismo entre variedades proyectivas tenemos que la gráfica de  $f$ , denotada por  $\Gamma_f$ , es un cerrado de  $X \times Y$ , y como la proyección  $\pi_2$  es cerrada entonces  $\pi_2(\Gamma_f) = f(X)$  es cerrado en  $Y$ . Así, podemos pedir que los morfismos sean suprayectivos.

Recordemos además que el conjunto de puntos críticos de un morfismo  $X \xrightarrow{f} Y$  es un cerrado de  $X$ , el cual denotaremos por  $C$ , así por la completez de  $X$  tenemos que  $f(C) \subseteq Y$  es un cerrado de  $Y$ .

**Corolario 4.15.** Consideremos un morfismo suprayectivo  $X \xrightarrow{f} Y$  entre variedades proyectivas lisas. Se tiene que  $f$  induce una fibración en  $X \setminus f^{-1}(B) \xrightarrow{f} Y \setminus B$ , donde  $B$  es el conjunto de valores críticos de  $f$ <sup>11</sup>.

*Demostración.* Basta con observar que  $X \setminus B \xrightarrow{f} Y \setminus f(C)$  es propia, suprayectiva y submersión con la topología Euclidea por lo que el resultado se sigue de 3.7.  $\square$

<sup>10</sup>Una variedad algebraica se dice *completa* si se cumple 4.14.

<sup>11</sup>El teorema de Sard nos garantiza que  $f(C) \subseteq Y$ .

## 4.2. Morfismos entre variedades afines.

Recordemos que una aplicación  $X \xrightarrow{f} Y$  entre variedades afines es morfismo si las funciones componentes son aplicaciones polinomiales, por lo que nos centraremos en estudiar aplicaciones polinomiales  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ .

El resultado principal es 4.29. Para demostrarlo proponemos hacerlo en 3 pasos.

### 4.2.1. Completación.

Dada una aplicación polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ , nos gustaría utilizar el teorema 3.7 para estas aplicaciones, al igual que en el caso proyectivo. La primera obstrucción que encontramos es la dada por 3.10, el cual nos afirma que las aplicaciones nunca son propias (para  $n > 1$ ) ya que las fibras no son compactas, por lo que será necesario extender la aplicación  $F$  a una que sea propia, lo cual haremos de la siguiente manera:

Dada una aplicación polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ , consideramos la gráfica de  $F$ ,  $\Gamma = \{(x, F(x)) \mid X \in \mathbb{C}^n\}$ . Tenemos que  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ , y bajo los morfismos  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi_0} \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  y  $\mathbb{C} \xrightarrow{\phi_0} \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  podemos ver a  $\Gamma$  como subconjunto de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Denotemos por  $X$  a la cerradura de Zariski de  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

Para  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  tenemos la proyección en la segunda entrada  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , la cual podemos restringir a  $X$  de donde tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ \uparrow i & & \uparrow \phi_0 \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \end{array}$$

donde  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{i} X$  está dada como la composición de los morfismos  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\psi} \Gamma$  y  $\Gamma \xrightarrow{j} X$ , donde  $\psi(x) = (x, F(x))$  es un isomorfismo y  $j$  es la inclusión de  $\Gamma$  en su cerradura. Notemos que  $\pi$  es un morfismo propio y extiende a  $F$ .

### 4.2.2. Desingularización.

El problema con la construcción anterior es que la variedad  $X$  no necesariamente es lisa, por lo que tenemos que sustituir a  $X$  por una variedad que lo sea. Para ello tenemos el siguiente resultado, nada trivial, debido a Hironaka y cuya demostración se encuentra en los artículos [7] y [8].

**Teorema 4.16.** Dadas una variedad algebraica  $X$  y  $V$  subvariedad algebraica de  $X$ , existe un par  $(\tilde{X}, f)$  que cumplen las siguientes propiedades:

- 1)  $\tilde{X}$  es una variedad lisa y  $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$  es un morfismo propio,
- 2)  $f$  induce un isomorfismo entre  $\tilde{X} \setminus f^{-1}(V)$  y  $X \setminus V$ ,
- 3)  $f^{-1}(V)$  tiene codimensión 1 en cada punto y únicamente tiene cruzamiento normal.

La condición 3) nos dice que las singularidades de  $f^{-1}(V)$  se ven localmente (en cartas) como la intersección de hiperplanos coordenados  $Z(z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k})$ .

Gracias al teorema anterior, si consideramos  $X \setminus \mathbb{C}^n = V$ , tenemos un morfismo  $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$  que es propio entre variedades lisas y  $\tilde{X} \setminus f^{-1}(V) \cong_{\text{Alg}} \mathbb{C}^n$ , por lo podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{X} & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{P} \\
\uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i \\
\tilde{X} \setminus f^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}
\end{array}$$

así que  $g = f \circ \pi$  extiende a  $F$  y al ser composición de aplicaciones propias también es propia.

Por lo anterior tenemos un morfismo entre variedades proyectivas lisas  $\tilde{X} \xrightarrow{g} \mathbb{C}\mathbb{P}$ , el cual es suprayectivo pues  $F$  lo es.

Gracias a esto y al teorema 3.7 tenemos que  $\tilde{X} \setminus B \xrightarrow{g} \mathbb{C} \setminus g(K)$  es una fibración, donde  $K$  es el conjunto de puntos críticos de  $g$  y  $B = g^{-1}(K)$ . Pero nosotros estamos interesados en  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ , por lo que nos gustaría restringir el morfismo  $g$  a  $\mathbb{C}^n$ .

En general la restricción de fibraciones no es fibración, por ejemplo, para la fibración trivial  $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}$ , la restricción a  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}$  no es fibración pues la fibra de 0 es  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mientras que la fibra de  $c \neq 0$  es  $\mathbb{C}$ .

### 4.2.3. Estratificación.

Una generalización de 3.7 es el primer teorema de isotopía de Thom. Para poder enunciarlo son necesarias algunas definiciones previas.

**Definición 4.17.** Consideremos un conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$ . Una  $P$ -descomposición de un espacio topológico  $X$  es una colección localmente finita de subespacios  $\{X_i\}_{i \in P}$  que cumple:

- 1)  $X_i \subseteq \overline{X_j}$  si y sólo si  $i \leq j$ ,
- 2)  $X_i \cap X_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ,
- 3)  $X_i$  es localmente cerrado para cada  $i \in P$ ,
- 4)  $X = \bigcup_{i \in P} X_i$
- 5) si  $X_i \cap \overline{X_j} \neq \emptyset$  entonces  $X_i \subseteq \overline{X_j}$ .

**Definición 4.18.** Dada una variedad diferenciable  $X$ . Una *estratificación* de  $X$  es una  $P$ -descomposición  $\{X_i\}_{i \in P}$ , donde cada  $X_i$  es subvariedad diferenciable.

Además decimos que es una *estratificación de Whitney* si se satisfacen las siguientes dos propiedades para cada par  $X_i \leq X_j$ : siempre que tengamos sucesiones  $\{x_i\}$  en  $X_i$  y  $\{y_i\}$  en  $X_j$  tales que convergen al mismo punto  $y \in X_i$ , y además supongamos que para alguna carta las rectas secantes  $\overline{x_i y_i}$  (vistas como puntos en el proyectivo) converge a una recta  $l$  y los espacios tangentes  $T_{x_i} X_j$  convergen a un espacio  $T$  (vistos como puntos en la Grassmaniana), entonces:

- a)  $T_y X_i \subseteq T$ ,
- b)  $l \subseteq T$ .

Cada elemento  $X_i$  es un *estrato* de la estratificación.

**Observación 4.19.** En [12](2.4) se demuestra que basta con verificar la condición b) para que se cumpla la condición a).

**Observación 4.20.** Toda variedad diferenciable  $X$  tiene una estratificación de Whitney trivial, cuyo único estrato es todo el espacio.

**Ejemplo 4.21.** Consideremos  $\mathbb{C}^n$  con la siguiente partición:  $X_0 = \{0\}$ ,  $X_1 = (\bigcup \text{eje } z_i) \setminus X_0$ ,  $X_2 = \bigcup \text{plano } z_i z_j \setminus (X_1 \cup X_0)$ ,  $\dots$ ,  $X_{n-1} = (\bigcup Z(z_i) \setminus (\bigcup_{i < n-1} X_i))$ ,  $X_n = \mathbb{C}^n \setminus (\bigcup_{i < n} X_i)$ .



Es fácil notar que la anterior es una estratificación de Whitney pues los estratos son variedades diferenciables y la condición *b*) se satisface ya que los espacios tangentes son hiperplanos coordinados que contienen a los estratos menores.

No toda estratificación es de Whitney como lo muestra el siguiente ejemplo, el cual se encuentra en [12]

**Ejemplo 4.22.** Consideremos  $\mathbb{R}^2$  y  $X$  la espiral en  $\mathbb{R}^2$  definida por la condición de que la recta tangente en cada punto  $p$  de  $X$  tiene un ángulo constante con el vector radial de dicho punto. Consideremos la partición de  $\mathbb{R}^2$  dada por los siguientes subconjuntos:  $\{0\}$ ,  $X$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus (X \cup \{0\})$ . Es fácil de ver que son una descomposición de  $\mathbb{R}^2$ .

Veamos que la anterior no es una estratificación de Whitney, para ello consideremos cualquier suceción de puntos en  $X$ , digamos  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  tal que  $x_i \rightarrow 0$ . Tenemos que el ángulo entre  $T_{x_i}X$  y la secante  $\overline{0x_i}$  es el mismo para cada  $i$ , e igual a  $\alpha$ . Supongamos que  $\{T_{x_i}X\}_{i=0}^{\infty}$  converge a  $\tau$  y que las secantes  $\{\overline{0x_i}\}_{i=0}^{\infty}$  convergen a  $l$ , por la construcción de  $X$  se tiene que en ángulo entre  $l$  y  $\tau$  es  $\alpha$ , por lo que  $l \not\subseteq \tau$  y así no se cumple la condición *b*) para ser estratificación de Whitney.

**Definición 4.23.** Consideremos una aplicación diferenciable  $X \xrightarrow{f} Y$  y una estratificación de Whitney  $\{S_i\}$  de  $X$ . Decimos que  $f$  es una submersión estratificada propia si se cumple lo siguiente:

- 1)  $f$  es propia,
- 2) para cada estrato  $S_i$ , la restricción  $S_i \xrightarrow{f} Y$  es submersión.

**Definición 4.24.** Consideremos una variedad diferenciable  $X$  y  $\{X_i\}$  estratificación de Whitney de  $X$ . Un *campo vectorial estratificado en  $X$*  es un campo vectorial  $S \in \mathfrak{X}(X)$  tal que para cada estrato  $X_i$ ,  $S$  se restringe a un campo vectorial en  $X_i$ .

El primer teorema de isotopía es una generalización de la demostración dada para el teorema 3.7, el cual reside en el siguiente lema, que es consecuencia directa de (7,1) y (9,1) en [12].

**Lema 4.25.** Consideremos un par de variedades diferenciables  $X$  y  $Y$ , y  $\{X_i\}$  una estratificación de Whitney de  $X$ . Si  $X \xrightarrow{f} Y$  es una submersión estratificada, entonces para cada campo vectorial  $S \in \mathfrak{X}(Y)$  existe un campo vectorial estratificado  $S' \in \mathfrak{X}(X)$  tal que  $Tf(S'_{x_0}) = S_{f(x_0)}$  para cada  $x_0 \in X$ .

**Observación 4.26.** En 3.7 se demostró un hecho similar al anterior, es decir, para submersión  $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  todo campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  se levantaba a un campo  $D_i$  en  $X$ . La única diferencia es que el campo que construimos no pedía restricciones sobre ninguna subvariedad de  $X$ .

**Observación 4.27.** Consideremos  $X$  variedad diferenciable,  $\{X_i\}$  estratificación de  $X$  y  $S$  es un campo vectorial estratificado en  $X$ . Si  $\mathcal{D} \xrightarrow{\theta} X$  es el flujo asociado a  $S$ , entonces cada estrato  $X_i$  es invariante bajo  $\theta$ , es decir, se tiene que  $\theta(\mathcal{D} \cap X_i \times \mathbb{R}) \subseteq X_i$  para cada estrato  $X_i$ .

**Teorema 4.28** (Primer teorema de isotopía). Toda submersión estratificada propia  $X \xrightarrow{f} Y$  es una fibración en cada estrato.

*Demostración.* La demostración es análoga a la dada en 3.7. Podemos suponer  $Y = \mathbb{R}^m$ . Consideremos los campos vectoriales  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  en  $\mathbb{R}^m$ . Por el lema anterior, cada uno de estos campos se levanta a un campo vectorial estratificado  $D_i$ , los cuales resultan ser completos ya que  $f$  es submersión y  $(Tf)(D_i(x_0)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x_0))$  (de forma análoga a 3.7).

Ya que cada campo  $D_i$  es estratificado, tenemos para cada estrato  $X_i$  el homeomorfismo  $X_i \xrightarrow{\phi} f|_{X_i}^{-1}(0) \times \mathbb{R}^m$ , el cual es la restricción del homeomorfismo dado en 3.7, de donde sigue que  $f$  es fibrición en cada estrato.  $\square$

Para poder aplicar el teorema anterior a nuestro morfismo  $\tilde{X} \xrightarrow{g} \mathbb{C}\mathbb{P}$  tenemos que dar una estratificación adecuada de  $\tilde{X}$  en donde  $\mathbb{C}^n$  sea uno de los estratos. La estratificación que consideraremos es la siguiente:  $\tilde{X} \setminus f^{-1}(V) = \mathbb{C}^n$ ,  $f^{-1}(V)_{reg} = X_0$ ,  $(f^{-1}(V) \setminus X_0)_{reg} = X_1, \dots$ ,  $(f^{-1}(V) \setminus X_{n-1}) = X_n$ . No es difícil notar que la partición anterior es una estratificación. Tampoco es difícil notar que forman una estratificación de Whitney ya que  $f^{-1}(V)$  tiene únicamente cruzamientos normales, así que localmente se ve como 4.21, por lo que es estratificación de Whitney.

Observemos que podemos pedir que la aplicación no tenga puntos singulares restringiendo la aplicación al conjunto de valores regulares, como se hizo después del teorema 4.16.

Con la estratificación anterior tenemos que  $\tilde{X} \xrightarrow{g} \mathbb{C}\mathbb{P}$  es una fibrición en cada estrato de  $\tilde{X}$ , en particular  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  es fibrición (salvo valores críticos de  $g$ ).

Lo anterior se puede resumir en el siguiente corolario:

**Corolario 4.29.** Dada una aplicación polinomial no constante  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  y  $\tilde{X} \xrightarrow{g} \mathbb{C}\mathbb{P}$  extensión propia entre variedades lisas, si  $S \subseteq \mathbb{C}$  es conjunto (finito) de valores críticos de  $g$  entonces  $\mathbb{C}^n \setminus g^{-1}(S) \xrightarrow{F} \mathbb{C} \setminus S$  es una fibrición topológica.

## 5. Fibras singulares

Como ya vimos en las secciones anteriores, cualquier aplicación polinomial  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  induce una fibración fuera de un conjunto finito de elementos de  $\mathbb{C}$  (el cual contiene a los valores regulares de la aplicación  $F$ ). Una pregunta natural es ¿qué pasa con la fibra de los valores críticos?

Notemos que 2.9 es un claro ejemplo de que no es posible extender  $F$  a una fibración global. Una familia de aplicaciones polinomiales que tampoco pueden extenderse a una fibración global son las que tienen puntos tipo Morse. Los resultados que se enunciarán, así como las definiciones que se darán, pueden encontrarse en [4].

**Definición 5.1.** Dada una función holomorfa  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$ . Un punto crítico en  $p \in \mathbb{C}^n$  de  $F$  es de tipo Morse o no degenerado si la matriz Hessiana  $(\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j})_{i,j}(p)$  es invertible

**Teorema 5.2** (Lema de Morse). Si  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  es una función holomorfa con punto crítico de Morse  $z$ , existe un cambio local de coordenadas al rededor de  $z$  en donde  $F$  se ve de la forma  $\sum z_i^2$ .

**Proposición 5.3.** Consideremos  $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{C}$  es aplicación polinomial. Si  $F$  tiene un punto crítico de tipo Morse en 0 entonces no es fibración en un abierto que contenga a 0.

*Demostración.* Por el lema de Morse sabemos que existen cartas holomorfas de  $F$  tal que localmente se ve como  $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$ . Notemos que la fibra de 0 localmente es la unión de dos planos los cuales se intersectan en un punto. Por el teorema de la función implícita, las fibras de valores regulares son variedades, así que localmente se ven como planos. Por último observemos que si a los dos planos se les quita el punto de intersección no es conexo, mientras que un plano sin un punto siempre es conexo. Por lo anterior las fibras no pueden ser homeomorfas y no puede haber fibración en 0. □

**Observación 5.4.** En la demostración de 4.29 fue necesario quitar los puntos críticos de la extensión  $g$  y no sólo los puntos críticos de  $F$ . A estos puntos se les conoce como *bifurcaciones de segundo tipo* los cuales son imágenes de puntos críticos en el infinito. Un ejemplo de que es necesario quitar tales puntos es el siguiente.

**Ejemplo 5.5.** Consideremos  $F(z_1, z_2) = z_1^2 z_2 + z_1$ .  $F$  no es fibración global y no tiene puntos críticos.

*Demostración.* Ya vimos en 2.10 que  $F^{-1}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{F} \mathbb{C}^*$  es una fibración que no es global. No tiene puntos críticos, pues  $\nabla F = (2z_1 z_2 + 1, z_1^2)$ , el cual nunca se puede anular, pues se tiene que cumplir que  $z_1 = 0$  y  $2z_1 z_2 + 1 = 0$ , así  $z_1 = 0$  y  $1 = 0$ , lo cual es contradicción. □

Lo anterior demuestra la existencia de bifurcaciones de segundo tipo y es un ejemplo de una aplicación polinomial sin puntos críticos y que no es fibración global.

## Referencias

- [1] S. A. Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces*, Procc. of Symposia in Pure Math. vol 40, part 1 (1983), 167-178.
- [2] S. Friedland, *Monodromy, differential equations and the Jacobian conjecture*, Annales Polonici Mathematici. Vol. 72, No. 3, (1999).
- [3] S. Gitler, *Espacios Fibrados*, Colegio Nacional, México, D. F., (2012).
- [4] G. M. Greuel, C. Lossenb, E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer, New York, (2007).
- [5] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Vol. 52, New York, (2013).
- [6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2002).
- [7] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I*, Annals of Mathematics, Vol. 79, No. 1 (1964), 109-326.
- [8] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero II*, Annals of Mathematics, Vol. 79, No. 2 (1964), 205-326.
- [9] F. Klein, *Das Erlanger Programm*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, No. 253 (1974).
- [10] A. A. Kosinski, *Differential Manifolds*, Dover Publications, Inc., New York, (2007).
- [11] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, (2003).
- [12] J. Mather, *Notes on topological stability*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, No.4, (2012), 475-506.
- [13] F. Pham, *Vanishing Homologies and the  $n$ -Variable Saddlepoint Method*, Proceedings of the Symposia in Pure and Applied Mathematics, Vol. 40, Part 2, (1984), 319- 334.
- [14] J. P. Rosay, W. Rudin, *Holomorphic maps from  $\mathbb{C}^n$  to  $\mathbb{C}^n$* , Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 310, No. 1 (1988), 47-86.
- [15] G. Salicrup, *Introducción a la Topología*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones matemáticas, México, (1997).
- [16] S. Smale, *Mathematical problems for the next century* The Mathematical Intelligencer, Vol. 20, No.2 (1998), 7-15.
- [17] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, MacGraw-Hill, New York, (1966).
- [18] A. Van den Essen, *Polynomial Automorphisms: and the Jacobian Conjecture*, Birkhäuser Vol. 190 , Alemania 2012.
- [19] R. Thom, *La stabilité topologique des applications polynomiales*, Enseignement Math., Vol. 8, No. 2 (1962): 24-33.

- [20] F. Zaldivar, *Funciones Algebraicas de una Variable Compleja*, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México, (1995).
- [21] H. Zoladek, *The monodromy group*, Springer Science & Business Media, Vol. 67 , USA (2006).