UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÓDULOS SIMPLES SOBRE FUNTORES DE GREEN EN BICONJUNTOS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
BENJAMÍN AZIEL GARCÍA HERNANDEZ

DIRECTOR: ALBERTO GERARDO RAGGI CÁRDENAS
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

MORELIA, MICHOACÁN. JUNIO DE 2014.

Índice general

Agradecimientos

A mi madre, por apoyarme tanto y por creer en mí incluso cuando más he dudado. A los que se han tomado el tiempo para darme un buen consejo o para hacerme ver mis errores, por sus palabras. Al Dr. Gerardo, por su paciencia conmigo y su dedicación en este proyecto.

A todos: gracias.

Resumen

En esta tesis damos una equivalencia entre las categorías $A - \mathcal{M}od$ y $Fun^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$ dado un funtor de Green en biconjuntos A, que nos da una nueva definición de A-módulo, análoga a la definición de funtor de biconjuntos. Así mismo, proporcionamos una clasificación de los A-módulos simples con un único grupo minimal (hasta isomorfismo), empleando técnicas similares a las que se usan para la clasificación de los funtores de biconjuntos simples.

Abstract

In this thesis, given a Green biset functor A, we provide an equivalence between the categories $A - \mathcal{M}od$ and $Fun^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$, which gives us a new definition of an A-module, analogous to the definition of a biset functor. We also provide a clasification of simple A-modules with a unique minimal group (up to isomorphism), using similar tecniques to the used in the clasification of simple biset functors.

Introducción

Los funtores de biconjuntos aparecen naturalmente en distintas áreas de las matemáticas. Algunos ejemplos de estos son los funtores de representaciones (sobre un campo de característica 0), la cohomología y el funtor de Burnside. Estos funtores y categorías relacionadas han sido estudiados ampliamente desde los 80's, siendo actualmente Serge Bouc [1] uno de los más importantes en esta área. Él mismo es quien introdujera el concepto de módulo sobre un funtor de Green en biconjuntos en los 90's, que generaliza a los funtores de biconjuntos.

Nadia Romero [2], en su tesis doctoral proporciona una clasificación de los funtores de biconjuntos simples en términos de un grupo H y un $ROut(H)$-módulo simple, y también una clasificación de los módulos sobre funtores de Green en biconjuntos con un único grupo minimal.

Este trabajo se divide en dos capítulos: en el primero, proporcionamos la definición natural de módulo sobre un funtor de Green en biconjuntos y una equivalencia de categorías que nos da una nueva definición, parecida a la definición de funtor de biconjuntos (que no son otra cosa que los módulos sobre el funtor de Burnside), y resultando esta mucho más manejable para nuestros fines; en el segundo capítulo, inspirados en el procedimiento de Romero para la clasificación de los funtores de biconjuntos, damos una clasificiación de los módulos simples sobre funtores de Green en biconjuntos con un único grupo minimal, dada en términos de un grupo y un módulo simple.

Capítulo 1

Módulos sobre funtores de Green en biconjuntos

El anillo de Burnside de un grupo finito H, $B(H)$, es el grupo de Grothendieck de la categoría de H-conjuntos izquierdos finitos; este es un anillo con multiplicación inducida por el producto cartesiano. Si R es un anillo conmutativo con unidad, se denota por $B_R(H)$ a la R-álgebra $R \otimes B(H)$. Dados grupos finitos H y K, un (H, K)-biconjunto X es un conjunto con una acción izquierda por H y una acción derecha por K, y es tal que las acciones conmutan. Cada (H, K)-biconjunto X puede ser visto como un $H \times K$-conjunto: definiendo $(h, k) \cdot x := h \cdot x \cdot k^{-1}$, X adquiere estructura de (H, K)-biconjunto. Recíprocamente cada $H \times K$-conjunto X puede verse como un (H, K)-biconjunto, si definimos $h \cdot x := (h, 1) \cdot x$ y $x \cdot k := (1, k^{-1}) \cdot x$. La notación ${}_HX_K := X$ hace implícito el hecho de que X es un (H, K)-biconjunto, y así diremos simplemente que ${}_HX_K$ es un biconjunto. Dados biconjuntos ${}_HX_K$ y ${}_KY_L$, el producto cartesiano $X \times Y$ hereda estructura de K-conjunto con la acción $k \cdot (x, y) := (x \cdot k^{-1}, k \cdot y)$. El conjunto de órbitas de esta acción, $X \times Y/K$, tiene estructura natural de (H, L)-biconjunto, dada por $h \cdot [x, y] \cdot l := [h \cdot x, y \cdot l]$, que denotaremos por ${}_HX_K \circ_K Y_L = X \circ Y$.

Introducimos a continuación los conceptos de funtor de biconjuntos y funtor de Green en biconjuntos.

Definición 1.1. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Definimos la categoría Ω_R en objetos como la clase de todos los grupos finitos, y para H y K grupos finitos, $hom_{\Omega_R}(H, K) = B_R(H, K) := B_R(H \times K)$, donde B_R es el funtor de Burnside. Un funtor de biconjuntos M es un funtor contravariante de Ω_R en la categoría $R - Mod$.

Definición 1.2. Un funtor de Green en biconjuntos A es un funtor de biconjuntos tal que para cualesquiera $H, K \in Ob(\Omega_R)$ existe una aplicación R-bilineal

$$\mu_{H,K} : A(H) \times A(K) \longrightarrow A(H \times K)$$

que satisface:

1. $\forall H, \forall K \in Ob(\Omega_R)$, $\mu_{H,K}$ es natural en H y en K: si $L \in Ob(\Omega_R)$ y ${}_HX_L \in B_R(H, L)$, ${}_KY_L \in B_R(K, L)$, los diagramas

$$\begin{tikzcd} A(H)\times A(K) \arrow[r, "\mu_{H,K}"] & A(H\times K) \\ A(L)\times A(K) \arrow[u, "A({}_HX_L)\times Id_{A(K)}"] \arrow[r, "\mu_{L,K}"] & A(L\times K) \arrow[u, "A({}_{H\times K}X\times K_{L\times K})"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A(H)\times A(K) \arrow[r, "\mu_{H,K}"] & A(H\times K) \\ A(H)\times A(L) \arrow[u, "Id_{A(H)}\times A({}_KY_L)"] \arrow[r, "\mu_{H,L}"] & A(H\times L) \arrow[u, "A({}_{H\times K}H\times Y_{H\times L})"'] \end{tikzcd}$$

conmutan.

2. $\forall H, K, L \in Ob(\Omega_R)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A(H)\times A(K)\times A(L) \arrow[r, "Id_{A(H)}\times\mu_{K,L}"] \arrow[d, "\mu_{H,K}\times Id_{A(L)}"'] & A(H)\times A(K\times L) \arrow[d, "\mu_{H,K\times L}"] \\ A(H\times K)\times A(L) \arrow[r, "\mu_{H\times K,L}"] & A(H\times K\times L) \end{tikzcd}$$

conmuta.

3. $\exists\epsilon \in A(1)$ tal que $\forall H \in Ob(\Omega_R), \forall a \in A(H)$,

$$A({}_HH\times 1_{H\times 1})(\mu_{H,1}(a,\epsilon)) = a = A({}_H1\times H_{1\times H})(\mu_{1,H}(\epsilon, a)).$$

Si A y B son funtores de Green en biconjuntos y $f : A \longrightarrow B$ es una transformación natural, diremos que f es un morfismo de funtores de Green en biconjuntos si:

1. $f_1(\epsilon_A) = \epsilon_B$, donde ϵ_A es la unidad de A y ϵ_B es la unidad de B,
2. $f_{H\times K}(a\times b) = f_H(a)\times f_K(b)$, para cuales quiera H y K grupos finitos, $a \in A(H)$, $b \in A(K)$.

En adelante, diremos simplemente funtor de Green en lugar de funtor de Green en biconjuntos, que no resulta ambiguo en este texto, y denotaremos $\mu_{H,K}(a, b)$ simplemente por $a\times b$.

En la literatura, es posible encontrar múltiples definiciones equivalentes de funtor de Green. La equivalencia que se prueba a continuación da una definición de funtor de Green mucho más natural, aunque menos manipulable que la definición que ha sido dada ya. Ahora, si X y Y son H-conjuntos izquierdos, ${}_{H^d}X\times Y$ es un H-conjunto con la acción dada por $h\cdot(x, y) := (h\cdot x, h\cdot y)$ para $h \in H$, $(x, y) \in X\times Y$, y análogamente se define $Z\times W_{{}^dH}$ para H-conjuntos derechos Z y W.

Proposición 1.3. *Son equivalentes:*

1. *A es un funtor de Green.*

2. *A es un funtor de biconjuntos tal que, para cada $H \in Ob(\Omega_R)$, $A(H)$ es una R-álgebra asociativa con unidad, y $\forall \phi : H \longrightarrow K$, se tiene*
   a) $A({}_{H^\phi}K_K)$ es homomorfismo de R-álgebras.
   b) (Identidades de Frobenius) $\forall a \in A(H), \forall b \in A(K)$,

$$A({}_K K_{\phi H})(a)b = A({}_K K_{\phi H})(aA({}_{H^\phi}K_K)(b))$$

$$bA({}_K K_{\phi H})(a) = A({}_K K_{\phi H})(A({}_{H^\phi}K_K)(b)a).$$

Demostración. 1 $\Rightarrow$ 2. Para $a, b \in A(H)$, definimos

$$ab := A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times b),$$

que le da a $A(H)$ estructura de R-álgebra asociativa con unidad $A({}_H 1_1)(\epsilon)$: en efecto, si $a \in A(H)$,

$$A({}_H 1_1)(\epsilon)a = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(A({}_H 1_1)(\epsilon) \times a) = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H} \circ_{H\times H} 1 \times H_{1\times H})(\epsilon \times a)$$

$$= A({}_H 1 \times H_{1\times H})(\epsilon \times a) = a,$$

donde $[(h_1, h_2), (1, h_4)] \mapsto (1, h_2h_4)$ define un isomorfismo de ${}_{H^d}H \times H_{H\times H} \circ_{H\times H} 1 \times H_{1\times H}$ en ${}_H 1 \times H_{1\times H}$, y de forma análoga obtenemos que $aA({}_H 1_1)(\epsilon) = a$. Si además $b, c \in (H)$,

$$a(b + c) = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times (b + c)) = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times b + a \times c)$$

$$= A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times b) + A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times c) = ab + ac,$$

y de forma similar se obtiene $(a + b)c = ac + bc$. Además,

$$a(bc) = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(b \times c))$$

$$= A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(A({}_{H\times H^d}H \times (H \times H)_{H\times H\times H})(a \times (b \times c))$$

$$= A({}_{H^d}H \times H_{H\times H} \circ_{H\times H^d} H \times (H \times H)_{H\times H\times H})(a \times b \times c)$$

$$(ab)c = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times b) \times c)$$

$$= A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(A({}_{H^d\times H}(H \times H) \times H_{H\times H\times H})((a \times b) \times c)$$

$$= A({}_{H^d}H \times H_{H\times H} \circ_{H^d\times H} (H \times H) \times H_{H\times H\times H})(a \times b \times c)$$

donde es fácil ver que ${}_{H^d}H \times H_{H\times H} \circ_{H\times H^d} H \times (H \times H)_{H\times H\times H} \cong_{H^d} H \times H_{H\times H} \circ_{H^d\times H} (H \times H) \times H_{H\times H\times H}$, y por lo tanto, $a(bc) = (ab)c$.

Sea $\phi : H \longrightarrow K$ un homomorfismo de grupos, $a, b \in A(K)$. Usando la naturalidad de las paridades, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$A({}_{H^\phi}K_K)(ab) = A({}_{H^\phi}K_K \circ_{K^d} K \times K_{K\times K})(a \times b)$$

$$A({}_{H^\phi}K_K)(b)A({}_{H^\phi}K_K)(b) = A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(A({}_{H^\phi}K_K)(a) \times A({}_{H^\phi}K_K)(b))$$

$$= A({}_{H^d}H \times H_{H\times H} \circ_{H\times H^{\phi\times\phi}} K \times K_{K\times K})(a \times b)$$

Observando que la aplicación

$$_{H^\phi}K_K \circ_{K^d} K\times K_{K\times K} \longrightarrow _{H^d} H\times H_{H\times H} \circ_{H\times H^{\phi\times\phi}} K\times K_{K\times K}$$

$$[k_1,(k_2,k_3)] \mapsto [(1,1),(k_1k_2,k_1k_3)]$$

es un isomorfismo de biconjuntos, se tiene que

$$A(_{H^\phi}K_K)(ab) = A(_{H^\phi}K_K)(b)A(_{H^\phi}K_K)(b).$$

Además,

$$A(_{H^\phi}K_K)(A(_K1_1)(\epsilon)) = A(_{H^\phi}K_K \circ_k 1_1)(\epsilon) = A(_H1_1)(\epsilon)$$

y así, $A(_{H^\phi}K_K)$ es homomorfismo de R-álgebras con unidad.

Sean ahora $a\in A(K)$, $b\in A(H)$. Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$aA(_KK_{\phi H})(b) = A(_{K^d}K\times K_{K\times K})(a\times A(_KK_{\phi H})(b))$$

$$= A(_{K^d}K\times K_{K\times K}\circ_{K\times K} K\times K_{Id\times\phi K\times H})(a\times b)$$

$$A(_KK_{\phi H})(A(_{H^\phi}K_K)(a)b)$$

$$= A(_KK_{\phi H})(A(_{H^d}H\times H_{H\times H})(A(_{H^\phi}K_K)(a)\times b))$$

$$= A(_KK_{\phi H}\circ_{H^d} H\times H_{H\times H}\circ_{H\times H^{\phi\times Id}} K\times H_{K\times H})(a\times b).$$

Las aplicaciones

$$_{K^d}K\times K_{K\times K}\circ_{K\times K} K\times K_{Id\times\phi K\times H} \longrightarrow _{K^d} K\times K_{Id\times\phi K\times H}$$

$$[(k_1,k_2),(k_3,k_4)] \mapsto (k_1k_3,k_2k_4)$$

$$_KK_{\phi H}\circ_{H^d} H\times H_{H\times H}\circ_{H\times H^{\phi\times Id}} K\times H_{K\times H} \longrightarrow _{K^d} K\times K_{Id\times\phi K\times H}$$

$$[k_1,(h_1,h_2),(k_2,h_3)] \mapsto (k_1\phi(h_2h_3),\phi(h_3^{-1}h_2^{-1}h_1)k_2)$$

definen isomorfismos de biconjuntos, y por lo tanto $aA(_KK_{\phi H})(b) = A(_KK_{\phi H})(A(_{H^\phi}K_K)(a)b)$. La ecuación

$$bA(_KK_{\phi H})(a) = A(_KK_{\phi H})(A(_{H^\phi}K_K)(b)a).$$

se obtiene de manera análoga a la anterior.
$2\Rightarrow 1$. Para $a\in A(H), b\in A(K)$, definimos $a\times b := A(_{H\times K}H_H)(a)A(_{H\times K}K_K)(b)$. La aplicación $\times$ es bilineal por construcción.

Para probar la naturalidad de $\times$ en H, obsérvese que si ${}_HX_L$ y ${}_LY_T$ son tales que, $\forall a \in A(L), \forall c \in A(T), \forall b \in A(K)$,

$$A({}_{H\times K}X \times K_{L\times K})(A({}_{L\times K}L_L)(a)A({}_{L\times K}K_K)(b)) = A({}_{H\times K}H_H \circ_H X_L)(a)A({}_{H\times K}K_K)(b)$$

$$A({}_{L\times K}Y \times K_{T\times K})(A({}_{T\times K}T_T)(c)A({}_{T\times K}K_K)(b)) = A({}_{L\times K}L_L \circ_L Y_T)(c)A({}_{L\times K}K_K)(b)$$

entonces

$$\begin{aligned} &A({}_{H\times K}(X \circ Y) \times K_{T\times K})(A({}_{T\times K}T_T)(c)A({}_{T\times K}K_K)(b)) \\ &= A({}_{H\times K}X \times K_{L\times K} \circ_{L\times K} Y \times K_{T\times K})(A({}_{T\times K}T_T)(c)A({}_{T\times K}K_K)(b)) \\ &= A({}_{H\times K}X \times K_{L\times K})(A({}_{L\times K}L_L \circ_L Y_T)(c)A({}_{L\times K}K_K)(b)) \\ &= A({}_{H\times K}X \times K_{L\times K})(A({}_{L\times K}L_L)(A({}_LY_T)(c))A({}_{L\times K}K_K)(b)) \\ &= A({}_{H\times K}H_H \circ ({}_HX_L \circ_L Y_T))(c)A({}_{H\times K}K_K)(b) \end{aligned}$$

Así, tomando en cuenta que los biconjuntos transitivos generan a $B_R(H, L)$, y por la descomposición de Bouc para biconjuntos transitivos, podemos reducir a los casos en que X es de las formas ${}_{H^\phi}L_L$ y ${}_HH_{\psi L}$, con $\phi : H \longrightarrow L$ y $\psi : L \longrightarrow H$ homomorfismos de grupos.

En el primer caso, $A({}_{H^\phi}L_L)$ es homomorfismo de anillos, como también lo es $A({}_{H\times K^{\phi\times Id}}L\times K_{L\times K})$, y entonces

$$\begin{aligned} &A({}_{H\times K^{\phi\times Id}}L \times K_{L\times K})(A({}_{L\times K}L_L)(a)A({}_{L\times K}K_K)(b)) \\ &= A({}_{H\times K^{\phi\times Id}}L \times K_{L\times K} \circ_{L\times K} L_L)(a)A({}_{H\times K^{\phi\times Id}}L \times K_{L\times K} \circ_{L\times K} K_K)(b) \\ &= A({}_{H\times K}H_H \circ_{H^\phi} L_L)(a)A({}_{H\times K}K_K)(b). \end{aligned}$$

Considerando ahora ${}_HH_{\psi L}$, tanto este biconjunto como ${}_{H\times K}H \times K_{\psi\times Id}{}_{L\times K}$ satisfacen la identidad de Frobenius, tenemos

$$\begin{aligned} &A({}_{H\times K}H \times K_{\psi\times Id}{}_{L\times K})(A({}_{L\times K}L_L)(a)A({}_{L\times K}K_K)(b)) \\ &= A({}_{H\times K}H \times K_{\psi\times Id}{}_{L\times K} \circ_{L\times K} L_L)(a)A({}_{H\times K}K_K)(b) \\ &= A({}_{H\times K}H_H \circ_H H_{\psi L})(a)A({}_{H\times K}K_K)(b). \end{aligned}$$

Esto prueba la naturalidad de $\times$ en H. Procediendo de forma análoga, se prueba que $\times$ es natural en K.

Sean ahora $a \in A(H)$, $b \in A(K)$ y $c \in A(L)$. Se tiene

$$\begin{aligned} &a \times (b \times c) \\ &= A({}_{H\times K\times L}H_H)(a)A({}_{H\times K\times L}K \times L_{K\times L})(A({}_{K\times L}K_K)(b)A({}_{K\times L}L_L)(c)) \\ &= A({}_{H\times K\times L}H_H)(a)A({}_{H\times K\times L}K_K)(b)A({}_{H\times K\times L}L_L)(c) \\ &= A({}_{H\times K\times L}H \times K_{H\times K})(A({}_{H\times K}H_H)(a)A({}_{H\times K}K_K)(b))A({}_{H\times K\times L}L_L)(c) \end{aligned}$$

$$= (a \times b) \times c$$

Finalmente, sea ϵ el elemento identidad de $A(1)$, $a \in A(H)$. Entonces

$$A({}_H1 \times H_{1\times H})(\epsilon \times a) = A({}_H1 \times H_{1\times H})(A({}_{1\times H}1_1)(\epsilon)A({}_{1\times H}H_H)(a))$$
$$= A({}_H1 \times H_{1\times H} \circ_{1\times H} 1_1)(\epsilon)A({}_H1 \times H_{1\times H} \circ_{1\times H} H_H)(a)$$
$$= A({}_H1_1)(\epsilon)A({}_HH_H)(a) = a$$

y de igual manera, se satisface $A({}_HH \times 1_{H\times 1})(a \times \epsilon) = a$. Por lo tanto, A es un funtor de Green.□

B_R, el funtor de Burnside, es un funtor de Green, con paridad definida, para ${}_HX$ un H-conjunto y ${}_KY$ un K-conjunto, como ${}_{H\times K}X \times Y$, el producto cartesiano, y extendida por linealidad a elementos de los respectivos anillos de Burnside, donde el 1-conjunto ${}_11$ es el elemento identidad, y para un biconjunto ${}_KY_H$, definimos $B_R({}_KY_H)({}_HX) :={}_K Y_H \circ_H X$, extendiendo esta definición sobre todo $B_R(H)$ R-linealmente.

Si A y B son funtores de Green y $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de funtores de Green, entonces, para un grupo finito H y $1, a, b \in A(H)$, se tiene que $f_H(1) = f_H(A({}_H1_1)(\epsilon_A)) = B({}_H1_1)(f_1(\epsilon)) = B({}_H1_1)(\epsilon_B) = 1 \in B(H)$ y que $f_H(ab) = f_H(A({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(a \times b)) = B({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(f_{H\times H}(a \times b)) = B({}_{H^d}H \times H_{H\times H})(f_H(a) \times f_H(b)) = f_H(a)f_H(b)$, lo que dice que f_H es un homomorfismo de R-álgebras.

Lema 1.4. *Para cada funtor de Green A, existe un único $e : B_R \longrightarrow A$ morfismo de funtores de Green.*

Demostración. Definimos $e_H({}_HX) = A({}_HX_1)(\epsilon_A)$ para un H-conjunto ${}_HX$ y extendemos esta definición R-linealmente a todo $B_R(H)$: se satisface que $e_1({}_11) = A({}_11_1)(\epsilon_A) = \epsilon_A$, tomando en cuenta que ${}_11 = \epsilon_{B_R}$, y $e_{H\times K}({}_{H\times K}X \times Y) = A({}_{H\times K}X \times Y_1)(\epsilon_A) = A({}_{H\times K}X \times Y_1)(A({}_11 \times 1_{1\times 1})(\epsilon_A \times \epsilon_A)) = A({}_{H\times K}X \times Y_{1\times 1})(\epsilon_A \times \epsilon_A) = A({}_{H\times K}X_1)(\epsilon_A) \times A(Y_1)(\epsilon_A) = e_H({}_HX) \times e_K(KY)$. Si $f : B_R \longrightarrow A$ es otro morfismo de funtores de Green y ${}_HX$ un H-conjunto, $f_H({}_HX) = f_H({}_HX_1 \circ_1 1) = f_H(B_R({}_HX_1)({}_11)) = A({}_HX_1)(f_1({}_11)) = A({}_HX_1)(\epsilon_A) = e_H({}_HX)$ y entonces $f = e$.□

Si A es un funtor de Green y H es un grupo finito, A_H dado por $A_H(K) := A(K \times H)$ y $A_H({}_KX_L) := A({}_{K\times H}X \times H_{L\times H})$ es también un funtor de Green, con la paridad dada por $a \times b := A({}_{K\times L\times H}K \times H \times L \times H_{K\times H\times L\times H})(a \times b)$ para $a \in A_H(K), b \in A_H(L)$, y con identidad $A({}_{1\times H}1_1)(\epsilon)$.

Definición 1.5. Sea M un funtor de biconjuntos, A funtor de Green. Diremos que M es un módulo sobre A, o simplemente un A-módulo, si $\forall H, K \in Ob(\Omega_R)$, existe una aplicación R-bilineal

$$\nu_{H,K} : A(H) \times M(K) \longrightarrow M(H \times K)$$

tal que

1. $\forall H, K \in Ob(\Omega_R)$, $\nu_{H,K}$ es natural en H y en K: Si $L \in Ob(\Omega_R)$ y ${}_HX_L \in B_R(H, L)$, ${}_KY_L \in B_R(K, L)$, los diagramas

$$\begin{tikzcd} A(H) \times M(K) \arrow[r, "\nu_{H,K}"] & M(H \times K) \\ A(L) \times M(K) \arrow[u, "A({}_HX_L)\times Id_{M(K)}"] \arrow[r, "\nu_{L,K}"] & A(L \times K) \arrow[u, "M({}_{H\times K}X\times K_{L\times K})"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A(H) \times M(K) \arrow[r, "\nu_{H,K}"] & M(H \times K) \\ A(H) \times M(L) \arrow[u, "Id_{A(H)}\times M({}_KY_L)"] \arrow[r, "\nu_{H,L}"] & M(H \times L) \arrow[u, "M({}_{H\times K}H\times Y_{H\times L})"'] \end{tikzcd}$$

conmutan.

2. $\forall H, K, L \in Ob(\Omega_R)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A(H) \times A(K) \times M(L) \arrow[r, "Id_{A(H)}\times\nu_{K,L}"] \arrow[d, "\nu_{H,K}\times Id_{A(L)}"'] & A(H) \times M(K \times L) \arrow[d, "\nu_{H,K\times L}"] \\ A(H \times K) \times M(L) \arrow[r, "\nu_{H\times K,L}"] & M(H \times K \times L) \end{tikzcd}$$

conmuta.

3. $\forall H \in Ob(\Omega_R), \forall m \in M(H)$, $M({}_H1 \times H_{1\times H})(\nu_{1,H}(\epsilon, m)) = m$.

Si M y N son A-módulos, diremos que $\phi : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos si es transformación natural tal que para cuales quiera H y K grupos finitos, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A(H) \times M(K) \arrow[r, "\nu_{H\times K}"] \arrow[d, "1_{A(H)}\times\phi_K"'] & M(H \times K) \arrow[d, "\phi_{H\times K}"] \\ A(H) \times N(K) \arrow[r, "\nu_{H\times K}"] & N(H \times K) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Escribiremos $a \times m$ en lugar de $\nu_{H,K}(a, m)$. Denotaremos por $A - \mathcal{M}od$ la categoría de módulos sobre un funtor de Green A con los morfismos de A-módulos. La siguiente proposición es análoga a la proposición anterior.

Proposición 1.6. *Sea A un funtor de Green. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M es un A-módulo,*
2. *M un funtor de biconjuntos tal que para cada $H \in Ob(\Omega_R)$, $M(H)$ es un $A(H)$-módulo, que satisface*

a) $\forall \phi : H \longrightarrow K$, $\forall a \in A(K), \forall m \in M(K)$, $M({}_{H^\phi}K_K)(am) = A({}_{H^\phi}K_K)(a)M({}_{H^\phi}K_K)(m)$.

b) *(Identidades de Frobenius)* $\forall \phi : H \longrightarrow K, \forall H, K \in Ob(\Omega_R), a \in A(H), m \in M(K), m' \in M(H), b \in A(K)$,

$$A({}_KK_{\phi H})(a)m = M({}_KK_{\phi H})(aM({}_{H^\phi}K_K)(m))$$

$$bA({}_KK_{\phi H})(m') = M({}_KK_{\phi H})(M({}_{H^\phi}K_K)(b)m').$$

Demostración. La prueba es similar a la de la Proposición 1.3. □

Denotaremos por $\overleftarrow{H}$ a H visto como $(1, H \times H)$-conjunto, con acción derecha $h \cdot (h_1, h2) = h_1^{-1}hh_2$, y por $\overrightarrow{H}$ a H como $(H \times H, 1)$-conjunto, con acción izquierda $(h_1, h_2) \cdot h = h_1hh_2^{-1}$.

Sea A un funtor de Green. Definimos la categoría $\mathcal{P}_A$, con $Ob(\mathcal{P}_A)$ la clase de todos los grupos finitos, y para cada H y K grupos finitos, $hom_{\mathcal{P}_A}(H, K) = A(H, K) := A(H \times K)$, tal que si $a \in A(H, K), b \in A(K, L)$, definimos la composición por

$$a \circ b := A({}_{H\times L}H \times \overleftarrow{K} \times L_{H\times K\times K\times L})(a \times b).$$

Nótese que esta composición está de izquierda a derecha, de forma análoga a la composición de biconjuntos, y no de derecha a izquierda como se denota usualmente. Para $H \in Ob(\mathcal{P}_A)$, $A(\overrightarrow{H})(\epsilon_1)$ es la identidad de $A(H, H)$: Sea $a \in A(H, K)$,

$$A(\overrightarrow{H})(\epsilon) \circ a = A({}_{H\times K}H \times \overleftarrow{H} \times K_{H\times H\times H\times K} \circ_{H\times H\times H\times K} \overrightarrow{H} \times H \times K_{H\times K})(\epsilon \times a)$$

donde ${}_{H\times K}H\times\overleftarrow{H}\times K_{H\times H\times H\times K}\circ_{H\times H\times H\times K}\overrightarrow{H}\times H\times K_{1\times H\times K}$ es isomorfo a ${}_{H\times K}H\times K_{H\times K}$, vía la aplicación $[(h_1, h_2, k_1), (h_3, h_4, k_2)] \mapsto [h_1h_3h_2h_4, k_1k_2]$, por lo tanto, $A(\overrightarrow{H})(\epsilon) \circ a = a$, y procediendo de manera similar, se prueba que $b \circ A(\overrightarrow{H})(\epsilon) = b$ para $b \in A(K, H)$.

Es claro además que $\mathcal{P}_A$ es una categoría R-lineal. Consideremos ahora $Fun_R^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$, la categoría de funtores R-lineales contravariantes de $\mathcal{P}_A$ en $R - Mod$. Se tiene lo siguiente:

Teorema 1.7. *Las categorías $A - \mathcal{M}od$ y $Fun_R^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$ son equivalentes.*

Demostración. Sea M un A-módulo. Definimos $\overline{M}$ como $\overline{M}(H) := M(H)$ para $H \in Ob(\mathcal{P}_A)$ y $\overline{M}(a)(m) := M({}_HH \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a \times m)$ para $a \in A(H, K), m \in M(K)$. Se tiene:

Sean $a \in A(H, K), b \in A(K, L), m \in M(L)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\overline{M}(a \circ b)(m)\\
&= M({}_HH \times \overleftarrow{L}_{H\times L\times L})(A({}_{H\times L}H \times \overleftarrow{K} \times L_{H\times K\times K\times L})(a \times b) \times m)\\
&= M({}_HH \times \overleftarrow{L}_{H\times L\times L} \circ_{H\times L\times L} H \times \overleftarrow{K} \times L \times L_{H\times K\times K\times L\times L})(a \times b \times m)
\end{aligned}$$

$\overline{M}(a) \circ \overline{M}(b)(m)$
$= M({}_H H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a \times M({}_K K \times \overleftarrow{L}_{K\times L\times L})(b \times m))$
$= M({}_H H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K} \circ_{H\times K\times K} H \times K \times K \times \overleftarrow{L}_{H\times K\times K\times L\times L})(a \times b \times m))$

donde

$$[(h_1, l_1), (h_2, k_1, l_2, l_3)] \mapsto [(h_1 h_2, l_2^{-1} l_1 l_3), (1, k_1, 1, 1)]$$

de

$${}_H H \times \overleftarrow{L}_{H\times L\times L} \circ_{H\times L\times L} H \times \overleftarrow{K} \times L \times L_{H\times K\times K\times L\times L}$$

en

$${}_H H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K} \circ_{H\times K\times K} H \times K \times K \times \overleftarrow{L}_{H\times K\times K\times L\times L}$$

es un isomorfismo de biconjuntos, y por lo tanto $\overline{M}(a \circ b) = \overline{M}(a) \circ \overline{M}(b)$.

Consideremos ahora $A(\overrightarrow{H})(\epsilon)$, $m \in M(H)$. Entonces

$$\overline{M}(A(\overrightarrow{H})(\epsilon))(m) = M({}_H H \times \overleftarrow{H}_{H\times H\times H})(A(\overrightarrow{H})(\epsilon) \times m)$$

$$= M({}_H H \times \overleftarrow{H}_{H\times H\times H} \circ_{H\times H\times H} \overrightarrow{H} \times H_H)(\epsilon \times m) = m$$

pues no es difícil observar que ${}_H H \times \overleftarrow{H}_{H\times H\times H} \circ_{H\times H\times H} \overrightarrow{H} \times H_H$ es isomorfo a ${}_H H_H$.

De lo anterior, tenemos que $\overline{M} \in Fun_R^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$.

Sean $M, N \in A{-}\mathcal{M}od$ y $\phi : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de A-módulos. Definimos $\overline{\phi} : \overline{M} \longrightarrow \overline{N}$ como $\overline{\phi}_H := \phi_H$. Entonces, si $H, K \in Ob(\mathcal{P}_A)$, $a \in A(H, K)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{M}(H) \arrow[r, "\overline{\phi}_H"] & \overline{M}(H) \\
\overline{M}(K) \arrow[u, "\overline{M}(a)"] \arrow[r, "\overline{\phi}_K"] & \overline{N}(K) \arrow[u, "\overline{N}(a)"']
\end{tikzcd}$$

es igual al diagrama

$$\begin{tikzcd}
M(H) \arrow[r, "\phi_H"] & N(H) \\
M(K) \arrow[u, "M({}_H H\times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a\times _)"] \arrow[r, "\phi_K"] & N(K) \arrow[u, "N({}_H H\times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a\times _)"']
\end{tikzcd}$$

que conmuta pues $\forall m \in M(H)$ se satiface

$$N({}_H H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a \times \phi_K(m)) = N({}_H H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(\phi_{H\times K\times K}(a \times m))$$

$$= \phi_H(M({}_H H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a \times m)).$$

Por lo anteior, las asignaciones $M \mapsto \overline{M}$ y $\phi \mapsto \overline{\phi}$ definen un funtor covariante de $A - \mathcal{M}od$ en $Fun^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$.

Ahora, sea $N \in Fun^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$. Definimos $\widetilde{N}(H) := N(H)$. Sea e el único homomorfismo de funtores de Green de B_R en A, para ${}_HX_K \in B_R(H, K)$ definimos $\widetilde{N}({}_HX_K) := N(e_{H\times K}({}_HX_K)) : \widetilde{N}(H) \longrightarrow \widetilde{N}(K)$. Se verifica entonces que $\widetilde{N}$ es un funtor contravariante de Ω_R en $R - mod$:

Si ${}_HX_K \in B_R(H, K), {}_K Y_L \in B_R(K, L)$

$$\widetilde{N}({}_HX_K \circ_K Y_L) = N(e_{H\times L}({}_HX_K \circ_K Y_L))$$
$$= N(e_{H\times K}({}_HX_K)) \circ N(e_{K\times L}({}_KY_L)) = \widetilde{N}({}_HX_K) \circ \widetilde{N}({}_KY_L)$$
$$\widetilde{N}({}_HH_H) = N(e_{H\times H}({}_HH_H)) = N(A({}_{H\times H}\overrightarrow{H}_1)(\epsilon)) = Id_{N(H)} = Id_{\widetilde{N}(H)}$$

Así, $\widetilde{N}$ es un funtor de biconjuntos.

Para $a \in A(H), m \in \widetilde{N}(K)$, definimos $a \times m := N(A({}_{H\times K\times K}H \times \overrightarrow{K}_H)(a))(m)$ que por construcción es R-bilineal. Entonces, para ${}_HX_L \in B_R(H, L), {}_K Y_L \in B_R(K, L)$, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A(H) \times \widetilde{N}(K) & \longrightarrow & \widetilde{N}(H \times K) \\ {\scriptstyle A({}_HX_L)\times Id_{\widetilde{N}(K)}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \widetilde{N}({}_{H\times K}X\times K_{L\times K})} \\ A(L) \times \widetilde{N}(K) & \longrightarrow & \widetilde{N}(L \times K) \end{array}$$

Tenemos las siguientes ecuaciones

$$\widetilde{N}({}_{H\times K}X \times K_{L\times K}))(a \times m)$$
$$= N(A({}_{H\times K\times L\times K}X \times K_1)(\epsilon))(N(A({}_{L\times K\times K}L \times \overrightarrow{K}_L)(a))(m))$$
$$= N(A({}_{H\times K\times L\times K}X \times K_1)(\epsilon) \circ A({}_{L\times K\times K}L \times \overrightarrow{K}_L)(a))(m))$$

$$A({}_{H\times K\times L\times K}X \times K_1)(\epsilon) \times A({}_{L\times K\times K}L \times \overrightarrow{K}_L))(a)$$
$$= A({}_{H\times K\times K}H \times K \times \overleftarrow{L \times K} \times K_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times K} \circ_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times K} X \times K \times L \times \overrightarrow{K}_{1\times L})(\epsilon \times a)$$
$$= A({}_{H\times K\times K}H \times K \times \overleftarrow{L \times K} \times K_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times K} \circ_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times K} X \times K \times L \times \overrightarrow{K}_L)(a)$$

$$A({}_HX_L)(a) \times m = N(A({}_{H\times K\times K}H \times \overleftarrow{K}_H \circ_H X_L)(a))(m)$$
$$= N(A({}_{H\times K\times K}H \times \overleftarrow{K}_H \circ_H X_L)(a))(m)$$

Pero

$${}_{H\times K\times K}H \times K \times \overleftarrow{L \times K} \times K_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times K} \circ_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times K} X \times K \times L \times \overrightarrow{K}_L$$

es isomorfo a

$$ {}_{H\times K\times K}H \times \overleftarrow{K}_H \circ_H X_L $$

y por lo tanto, el diagrama conmuta.

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
A(H)\times\widetilde{N}(K) \arrow[r] & \widetilde{N}(H\times K) \\
A(H)\times\widetilde{N}(L) \arrow[r] \arrow[u, "Id_{A(H)}\times\widetilde{N}({}_KY_L)"] & \widetilde{N}(H\times L) \arrow[u, "\widetilde{N}({}_{H\times K}H\times Y_{H\times L})"']
\end{tikzcd}$$

también conmuta, y se prueba de manera similar a la conmutatividad del diagrama anterior.

Probaremos ahora que las paridades definidas son asociativas. Sean H, K y L grupos finitos. Entonces

$$\begin{tikzcd}
A(H)\times A(K)\times\widetilde{N}(L) \arrow[r] \arrow[d] & A(H)\times\widetilde{N}(K\times L) \arrow[d] \\
A(H\times K)\times\widetilde{N}(L) \arrow[r] & \widetilde{N}(H\times K\times L)
\end{tikzcd}$$

Sea $(a,b,m)\in A(H)\times A(K)\times\widetilde{N}(L)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
& a\times(b\times m)\\
&= N(A({}_{H\times K\times L\times K\times L}H\times\overrightarrow{K\times L}_H)(a))(N(A({}_{K\times L\times L}K\times\overrightarrow{L}_K)(b))(m)\\
&= N(A({}_{H\times K\times L\times K\times L}H\times\overrightarrow{K\times L}_H)(a)\circ A({}_{K\times L\times L}K\times\overrightarrow{L}_K)(b))(m)\\
&= N(A({}_{H\times K\times L\times\times L}H\times K\times L\times\overleftarrow{K\times L}\times L_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times L\times L}\\
&\quad\cdots\circ_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times L\times L}\, H\times\overrightarrow{K\times L}\times K\times\overrightarrow{L}_{H\times K})(a\times b))(m))
\end{aligned}$$

por otro lado

$$(a\times b)\times m = N(A({}_{H\times K\times L\times L}H\times K\times\overrightarrow{L}_{H\times K})(a\times b))(m)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}
&{}_{H\times K\times L\times\times L}H\times K\times L\times\overleftarrow{K\times L}\times L_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times L\times L}\\
&\cdots\circ_{H\times K\times L\times K\times L\times K\times L\times L}\, H\times\overrightarrow{K\times L}\times K\times\overrightarrow{L}_{H\times K}
\end{aligned}$$

es isomorfo a

$$ {}_{H\times K\times L\times L}H\times K\times\overrightarrow{L}_{H\times K} $$

y por lo tanto, el diagrama conmuta.

Para concluir que $\widetilde{N}$ es un A-módulo, finalmente observamos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}({}_H1\times H_{1\times H})(\epsilon\times m)\\
&= N(A({}_{H\times 1\times H}1\times H_1)(\epsilon))(N(A({}_{1\times H\times H}1\times\overrightarrow{H}_1)(\epsilon))(m))
\end{aligned}$$

$$= N(A({}_{H\times 1\times H}1\times H_1)(\epsilon)\circ A({}_{1\times H\times H}1\times\overrightarrow{H}_1)(\epsilon))(m)$$
$$= N(e({}_H1\times H_{1\times H})\circ e({}_{1\times H}1\times H_H))(m)$$
$$= N(e({}_H1\times H_{1\times H}\circ_{1\times H}1\times H_H))(m)$$
$$= N(e({}_HH_H))(m) = N(A(\overrightarrow{H})(\epsilon))(m) = m.$$

Sean ahora M y N en $Fun^o_R(\mathcal{P}_A, R{-}Mod)$, y $\psi : M \longrightarrow N$ una transformación natural. Definimos $\widetilde{\psi}$ de $\widetilde{M}$ en $\widetilde{N}$ como $\widetilde{\psi}_H := \psi_H$. $\widetilde{\psi}$ es un homomorfismo de A-módulos: Sean H y K grupos finitos, ${}_HX_K \in B_R(H,K)$, entonces

$$\widetilde{\psi}_H(\widetilde{M}({}_HX_K)(m)) = \psi_H(M(e({}_HX_K))(m)) = N(e({}_HX_K))(\psi_K(m))$$
$$= \widetilde{N}({}_HX_K)(\widetilde{\psi}_K(m))$$

lo que prueba que $\widetilde{\psi}$ es una transformación natural. Además, si $a\in A(H)$ y $m \in M(K)$,

$$\widetilde{\psi}_{H\times K}(a\times m) = \psi_{H\times K}(M(A({}_{H\times K\times K}H\times\overrightarrow{K}_H)(a))(m))$$
$$= N(A({}_{H\times K\times K}H\times\overrightarrow{K}_H)(a))(\psi_K(m)) = a\times\widetilde{\psi}_K(m),$$

que prueba que $\widetilde{\psi}$ es un homomorfismo de A-módulos.

Así, $N\mapsto\widetilde{N}$, $\psi\mapsto\widetilde{\psi}$ definen un funtor covariante de $Fun^o_R(\mathcal{P}_A, R-Mod)$ en $A-\mathcal{M}od$.

Por la manera en que han sido definidos los funtores anteriores, tenemos que $\widetilde{\overline{M}} = M$ y $\widetilde{\overline{\phi}} = \phi$ para M y N en $Ob(A-\mathcal{M}od)$ y $\phi\in Hom_{A-\mathcal{M}od}(M,N)$, $\overline{\widetilde{T}} = T$ y $\overline{\widetilde{\psi}} = \psi$ para T y W en $Ob(Fun^o(\mathcal{P}_A, R-Mod))$ y $\psi\in Hom_{Fun^o(\mathcal{P}_A,R-Mod)}(T,W)$.

Las asignaciones $M\mapsto\overline{M}$, $\phi\mapsto\overline{\phi}$ y $N\mapsto\widetilde{N}$, $\psi\mapsto\widetilde{\psi}$, definen isomorfismos de categorías, uno inverso del otro: si $M\in Ob(A-\mathcal{M}od)$, $\widetilde{\overline{M}}(K) = M(K)$ como R-módulos para cada K; si $a\in A(K)$, $m\in\widetilde{\overline{M}}(K)$ y $\times'$ es la paridad de $\widetilde{\overline{M}}$, se tiene que

$$a\times' m = \overline{M}(A({}_{H\times K\times K}H\times\overleftarrow{K}_H)(a))(m) = M({}_{H\times K}H\times K\times\overleftarrow{K}_{H\times K\times K\times K})(A({}_{H\times K\times K}H\times\overleftarrow{K}_H)(a)\times m)$$
$$= M({}_{H\times K}H\times K\times\overleftarrow{K}_{H\times K\times K\times K}\circ_{H\times K\times K\times K}H\times\overleftarrow{K}\times K_{H\times K})(a\times m) = a\times m,$$

dado que ${}_{H\times K}H\times K\times\overleftarrow{K}_{H\times K\times K\times K}\circ_{H\times K\times K\times K}H\times\overleftarrow{K}\times K_{H\times K}\cong_{H\times K}H\times K_{H\times K}$. No es difícil ver también que dado ${}_HX_K$ un biconjunto, $M({}_HX_K) = \widetilde{\overline{M}}({}_HX_K)$, y por tanto $\widetilde{\overline{M}} = M$.

Si $N\in Ob(Fun^o(\mathcal{P}_A, R-Mod))$, $N(K) = \overline{\widetilde{N}}$ como R-módulos para cualquier grupo K; si $a\in A(H,K)$ y $n\in N(K)$,

$$\overline{\widetilde{N}}(a)(n) = \widetilde{N}({}_HH\times\overleftarrow{K}_{H\times K\times K})(a\times n) = N(e_{H\times H\times K\times K}({}_HH\times\overleftarrow{K}_{H\times K\times K}))(N(A({}_{H\times K\times K\times K}H\times K\overrightarrow{K}_{H\times K})(a)(n))$$
$$= N(e_{H\times H\times K\times K}({}_HH\times\overleftarrow{K}_{H\times K\times K})\circ A({}_{H\times K\times K\times K}H\times K\overrightarrow{K}_{H\times K})(a))(n),$$

pero

$$\begin{aligned}
&e_{H\times H\times K\times K}({}_{H}H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K}) \circ A({}_{H\times K\times K\times K}H \times K \times \overrightarrow{K}_{H\times K})(a) \\
&= A({}_{H\times K}H \times \overleftarrow{H \times K \times K} \times K_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K\times K})(e_{H\times H\times K\times K}({}_{H}H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K}) \\
&\qquad \times A({}_{H\times K\times K\times K}H \times K \times \overrightarrow{K}_{H\times K})(a)) \\
&= A({}_{H\times K}H \times \overleftarrow{H \times K \times K} \times K_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K\times K})(A({}_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K}H \times \overleftarrow{K}_{1})(\epsilon) \\
&\qquad \times A({}_{H\times K\times K\times K}H \times K \times \overrightarrow{K}_{H\times K})(a)) \\
&= A({}_{H\times K}H \times \overleftarrow{H \times K \times K} \times K_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K\times K} \circ_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K\times K} \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{K} \times H \times K \times \overrightarrow{K}_{H\times K})(a)
\end{aligned}$$

donde

$${}_{H\times K}H \times \overleftarrow{H \times K \times K} \times K_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K\times K} \circ_{H\times H\times K\times K\times H\times K\times K\times K} \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{K} \times H \times K \times \overrightarrow{K}_{H\times K} \cong_{H\times K} H \times K_{H\times K}$$

y así $e_{H\times H\times K\times K}({}_{H}H \times \overleftarrow{K}_{H\times K\times K}) \circ A({}_{H\times K\times K\times K}H \times K \times \overrightarrow{K}_{H\times K})(a) = a$, $\overline{\overline{N}}(a)(n) = N(a)(n)$, $\overline{\overline{N}}(a) = N(a)$, y por lo tanto $\overline{\overline{N}} = N$.□

De aquí en adelante, consideraremos los A-módulos como objetos de $Fun_R^o(\mathcal{P}_A, R - Mod)$ y no como en la definición original. Esta definición es más manejable para nuestros propósitos, dado que es análoga a la definición de funtor de biconjuntos, y de hecho, generaliza a esta: para $A = B_R$, $\mathcal{P}_A$ es exactamente Ω_R y así $Fun_R^o(\mathcal{P}_{B_R}, R - Mod)$ es la categoría de funtores de biconjuntos.

A_H es un A-módulo, donde definimos naturalmente $A_H(\alpha)(\beta) = \alpha \circ \beta$ para $\alpha \in A(K, L), \beta \in A_H(L)$.

Capítulo 2

A-módulos simples

Dado un A-módulo M, diremos que un subfuntor N de M es un submódulo de M si N es un A-módulo naturalmente.

Definición 2.1. Sea A un funtor de Green. Un A-módulo $S \neq 0$ es simple, si para todo A-submódulo $N \leq S$, $N = 0$ o $N = S$.

Definición 2.2. Sea M un A-módulo. Diremos que un grupo H es minimal para M si $M(H) \neq 0$ y $M(K) = 0$ si $|K| < |H|$.

Los grupos minimales siempre existen. Para los funtores de biconjuntos, los grupos minimales son únicos salvo isomorfismo. Para un A-módulo en general, no se tiene unicidad de los grupos minimales, para un ejemplo de esto, véase Romero [3]. Sin embargo, aún se puede obtener una clasificación para A-módulos simples que satisfacen tener un único grupo minimal (para ejemplos, véase Bouc [1] y Romero [2] y [4]), análoga a la clasificación de los funtores de biconjuntos simples, y la cual es nuestra meta en este capítulo.

Consideraremos entonces sólo A-módulos con un único grupo minimal salvo isomorfismo en el resto de este capítulo.

Sea A un funtor de Green, H un grupo. Definimos

$$\widehat{A}(H) := \frac{A(H \times H)}{\sum_{|K|<|H|} A(H \times K) \circ A(K \times H)}$$

Ahora, sean M un A-módulo y H un grupo. Definimos

$$\widetilde{M}(H) := \frac{M(H)}{\sum_{|K|<|H|} M(A(H \times K) \circ A(K \times H))(M(H))}$$

El conjunto $\sum_{|K|<|H|} A(H \times K) \circ A(K \times H)$ es un ideal bilateral de $A(H \times H)$, por lo tanto $\widehat{A}(H)$ es un anillo. $\widetilde{M}(H)$ por su parte es un $A(H \times H)$-módulo pues $M(H)$ y $\sum_{|K|<|H|} M(A(H \times K) \circ A(K \times H))(M(H))$ lo son, si definimos $am := M(a)(m)$ para $a \in A(H \times H)$, $m \in M(H)$. Observando que si $b \in A(H, K), c \in A(K, H)$, $(b \circ c)m = M(b \circ c)(m) \in \sum_{|K|<|H|} M(A(H \times K) \circ A(K \times H))(M(H))$, tenemos que $\widetilde{M}(H)$ es anulado por este ideal, y por lo tanto, tiene estructura de $\widehat{A}(H)$-módulo.

Lema 2.3. $\widehat{A}(H) = \widetilde{A_H}(H)$.

Demostración. Por definición, $A_H(H) = A(H \times H)$. Ahora, si $\alpha \in A(H, K)$, $\beta \in A(K, H)$, $\gamma \in A(H, H)$, se tiene

$$A_H(\alpha \circ \beta)(\gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \in A(H, K) \circ A(K, H).$$

Si consideramos $A(\overrightarrow{H})(\epsilon) \in A(H \times H)$, entonces $A_H(\alpha \circ \beta)(A(\overrightarrow{H})(\epsilon)) = (\alpha \circ \beta) \circ A(\overrightarrow{H})(\epsilon) = \alpha \circ \beta$, de donde tenemos

$$\sum_{|K|<|H|} A_H(A(H \times K) \circ A(K \times H))(A_H(H)) = \sum_{|K|<|H|} A(H \times K) \circ A(K \times H). \square$$

Sean M y N A-módulos, ϕ de M en N una transformación natural y H un grupo. Consideramos ϕ_H de $M(H)$ en $N(H)$ y observamos que es de $A(H, H)$-módulos, pues dado $a \in A(H, H)$ y $m \in M(H)$, $\phi_H(am) = \phi_H(M(a)(m)) = N(a)(\phi_H(m)) = a\phi_H(m)$. En particular, si $b \in A(H, K), c \in A(K, H)$, $\phi_H(M(b \circ c)(m)) = N(b \circ c)(\phi_H(m))$, de donde tenemos que ϕ_H envía $\sum_{|K|<|H|} M(A(H \times K) \circ A(K \times H))(M(H))$ en $\sum_{|K|<|H|} N(A(H \times K) \circ A(K \times H))(N(H))$, y así tenemos un homomorfismo de $\widehat{A}(H)$-módulos $\widetilde{\phi}$ de $\widetilde{M}(H)$ en $\widetilde{N}(H)$, inducido por ϕ_H. Si T es un tercer A-módulo y ψ una transformación natural de N en T, se satisface $(\widetilde{\psi \circ \phi})_H = \widetilde{\psi}_H \circ \widetilde{\phi}_H$. Esto define un funtor covariante G_H de $A - \mathcal{M}od$ en $\widehat{A}(H) - Mod$ dado por $G_H(M) = \widetilde{M}(H)$ y $G_H(\phi) = \widetilde{\phi}_H$.

Sea ahora V un $\widehat{A}(H)$-módulo. Definimos $F_{H,V}(K) := hom_{\widehat{A}(H)}(\widetilde{A_K}(H), V)$, para cada grupo K, que es un $\widehat{A}(H)$-módulo, y por restricción de escalares, un R-módulo. Si $a \in A(K, L)$, definimos $F_{H,V}(a) : f \mapsto (\overline{b} \mapsto f(\overline{b \circ a}))$ para cada $f \in F_{H,V}(L)$ y $\overline{b} \in \widetilde{A_L}(H)$, que no depende de los representantes pues $\circ$ es bilineal y f es de $\widehat{A}(H)$-módulos. Entonces, $F_{H,V}$ es un A-módulo. Sea $\psi : V \longrightarrow W$ de $\widetilde{A}(H)$-módulos, definimos $(F_{H,\psi})_K$ de $F_{H,V}(K)$ en $F_{H,W}(K)$ por $(F_{H,\psi})_K(f) = \psi \circ f$ para $f \in F_{H,V}(K)$. Es claro que $F_{H,\psi}$ es una transformación natural de $F_{H,V}$ en $F_{H,W}$. Entonces, $F_{H,\_}$ es un funtor covariante de $\widehat{A}(H) - Mod$ en $A - \mathcal{M}od$.

Tenemos además

$$F_{H,V}(H) = hom_{\widehat{A}(H)}(\widetilde{A_H}(H), V) \cong hom_{\widehat{A}(H)}(\widehat{A}(H), V) \cong V$$

dado que V es un $\widehat{A}(H)$-módulo.

Probaremos a continuación que F_H es adjunto derecho de G_H. Convenimos denotar por (S, T) a los homomorfismos de S en T en los objetos de una categoría dada C, en lugar de escribir $hom_C(S, T)$. Así, si M es un A-módulo, V un $\widehat{A}(H)$-módulo, tenemos

Lema 2.4. $(M, F_{H,V}) \cong (G_H(M), V)$ *como R-módulos.*

Demostración. Dado $f \in (M, F_{H,V})$, consideramos $f_H : M(H) \longrightarrow F_{H,V}(H)$ que es de R-módulos. Dado que f es transformación natural, f_H es también de $A(H,H)$-módulos si definimos $a \cdot m := M(a)(m)$ para $m \in M(H)$ y $a \cdot n := F_{H,V}(a)(n)$ para $n \in F_{H,V}(H)$, en vista de que $f_H(a \cdot m) = f_H(M(a)(m)) = F_{H,V}(a)(f_H(m)) = a \cdot f_H(m)$. Además, si $a \in A(H,K), b \in A(K,H)$, $|K| < |H|$, $f_H((a \circ b) \cdot m) = 0$ por la forma en que definimos $\widetilde{A_H}(H)$, así, $\sum_{|K|<|H|} M(A(H,K) \circ A(K,H))(M(H)) \subset ker f_H$, por lo cual podemos inducir un homomorfismo de $\widehat{A}(H)$-módulos $\widetilde{f_H} : \widetilde{M}(H) \longrightarrow F_{H,V}(H)$ dado por $\widetilde{f_H}(\widetilde{m}) := f_H(m)$. Consideramos ahora el isomorfismo canónico $\eta : F_{H,V}(H) \longrightarrow V$ dado por $(\widetilde{1} \mapsto m) \mapsto m$, y definimos $\phi(f) := \eta \circ \widetilde{f_H} \in (G_H(M), V)$.

Sea ahora $g \in (G_H(M), V)$. Sea L un grupo finito. Entonces definimos $\bar{g}_L : M(L) \longrightarrow F_{H,V}(L)$ dada por $m \mapsto (\widetilde{a} \mapsto g(\widetilde{M(a)(m)}))$. $\bar{g}$ es una transformación natural de M en $F_{H,V}$: si $b \in A(L,T)$, $m \in M(T)$ y $\widetilde{a} \in \widetilde{A_L}(H)$,

$$F_{H,V}(b)(\overline{g}_T(m))(\widetilde{a}) = \overline{g}_T(m))(\widetilde{a \circ b}) = g(M(\widetilde{a \circ b})(m))$$

$$= g_L(M(b)(m))(\widetilde{a}) = g(M(a)(\widetilde{M(b)}(m))) = g(M(\widetilde{a \circ b})(m))$$

lo que prueba que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M(L) & \xrightarrow{\bar{g}_L} & F_{H,V}(L) \\ {\scriptstyle M(b)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F_{H,V}(b)} \\ M(T) & \xrightarrow[\bar{g}_T]{} & F_{H,V}(T) \end{array}$$

conmuta. Definimos entonces $\psi(g) := \overline{g}$.

Si $f \in (M, F_{H,V})$, $f = \psi \circ \phi(f)$ es equivalente a probar que $f_L = \psi \circ \phi(f)_L$ para cada grupo finito L. Si $m \in M(L)$, $f_L(m)$ y $\psi \circ \phi(f)_L(m)$ son $\widehat{A}(H)$-homomorfismos $\widetilde{A_L}(H)$ en V, y para $\widetilde{a} \in \widetilde{A_L}(H)$, se tiene

$$\psi \circ \phi(f)_L(m)(\widetilde{a}) = \psi(\eta \circ \widetilde{f_H})_L(m)(\widetilde{a}) = \eta \circ \widetilde{f_H}(\widetilde{M(a)(m)}) = \widetilde{f_H}(\widetilde{M(a)(m)})(1)$$

$$= f_H(M(a)(b))(1) = F_{H,V}(a)(f_L(m))(1) = f_L(m)(\widetilde{a})$$

lo que prueba que $\psi \circ \phi = Id_{(M,F_{H,V})}$.

Ahora, si $g \in (G_H(M), V)$,

$$\phi \circ \psi(g)(\widetilde{m}) = \eta \circ \widetilde{\overline{g}}_H(\widetilde{m}) = \eta((\widetilde{a} \mapsto g(\widetilde{M(a)(m)}))) = \eta((\widetilde{1} \mapsto g(\widetilde{m}))) = g(\widetilde{m})$$

de donde $\phi \circ \psi = Id_{(G_H(M),V)}$.□

Lema 2.5. *Sea S es un A-módulo simple con grupo minimal H. Entonces $S(H)$ es $\widehat{A}(H)$-módulo, $\widehat{A}(H)$ es no cero y $S(H) \cong \widetilde{S}(H)$.*

Demostración. $S(H)$ tiene estructura de $A(H,H)$-módulo como hemos visto antes dada por $a \cdot m = S(a)(m)$. Si $a \in A(H,K), b \in A(K,H)$ con $|K| < |H|$, $S(a \circ b)(m) = S(a)(S(b)(m)) = S(a)(0) = 0$ por la minimalidad de H, de donde $S(H)$ tiene estructura de $\widehat{A}(H)$-módulo. Dado que $S(H)$ es no cero, se tiene que si $0 \neq s$ en $S(H)$, $\widehat{1} \cdot s = s$, y por lo tanto, $\widehat{1} \neq 0$, lo que prueba que $\widehat{A}(H)$ es no cero. Finalmente, $\sum_{|K|<|H|} S(A(H,K) \circ A(K,H))(S(H)) = 0$, por lo tanto $\widetilde{S}(H) \cong S(H)$.□

Dado un A-módulo M con grupo minimal H y W un $\widehat{A}(H)$-submódulo de $M(H)$, definimos

$$\langle W\rangle(K) := \langle M(A(K,H))(W)\rangle$$

para K un grupo finito. Es fácil observar que $\langle W\rangle$ es un submódulo de M, al que llamaremos el submódulo generado por W.

Lema 2.6. *Si S es un A-módulo simple con grupo minimal H, entonces $S(H)$ es un $\widehat{A}(H)$-módulo simple.*

Demostración. Sea $W \leq S(H)$. Por ser S simple, $\langle W\rangle = 0$ o $\langle W\rangle = S$. Pero $\langle W\rangle(H) = W$ dado que la función identidad está en $S(A(H,H))$, y por lo tanto $W = 0$ o $W = S(H)$.□

Denotaremos por $S_{H,V}$ a $\langle V\rangle$ en $F_{H,V}$, abusando de que $F_{H,V}(V) \cong V$.

Lema 2.7. *Si V es simple, $S_{H,V}$ es simple.*

Demostración. Si T es es un submódulo de $S_{H,V}$, $T(H)$ es $\widehat{A}(H)$-submódulo de V, por lo tanto $T(H)$ es 0 o V. T es también submódulo de $F_{H,V}$, por lo tanto, podemos considerar los morfismos inclusión y cero de T en $F_{H,V}$; si $T(H) = 0$, entonces $(T, F_{H,V}) \cong (G_H(T), V) \cong (0, V) \cong 0$ que implica que la inclusión de T en $F_{H,V}$ y el morfismo cero son iguales y entonces $T = 0$. Si $T(H) = V$, $S_{H,V}(K) = \langle F_{H,V}(A(K,H))(V)\rangle \subset T(K)$ y por lo tanto $T = S_{H,V}$. □

El siguiente teorema da una caracterización de nuestros A-módulos simples en términos de su grupo minimal y su valuación en este. Esta caracterización es única salvo isomorfismo (sobre el grupo minimal y el módulo).

Teorema 2.8. *Sea S un A-módulo simple. Si H es su grupo minimal y $S(H) = V$, entonces $S \cong S_{H,V}$. Si K es otro grupo finito y W un $\widehat{A}(K)$-módulo simple tal que $S \cong S_{K,W}$, entonces existe un isomorfismo de grupos $\phi : H \longrightarrow K$ y $V \cong^{\phi} W$ como $\widehat{A}(H)$-módulos.*

Demostración. $0 \neq (V,V) \cong (\widetilde{V}, V) = (G_H(S), V) \cong (S, F_{H,V})$, y entonces existe un homomorfismo $f \neq 0$ de A-módulos de S en $F_{H,V}$. La imagen de S bajo tal homomorfismo contiene a $S_{H,V}$: $ker\phi$ es un submódulo de S, por lo tanto es igual a 0 o a S, pero $f \neq 0$ por tanto el kernel es 0, así $0 \neq f_H(V) \subset V$ y por ser de $\widehat{A}(H)$-módulos, $f_H(V) = V$, todo esto por la simplicidad de V; pero dado que S es simple también, su imagen es simple, y por lo tanto $S \cong S_{H,V}$. Si K es otro grupo finito y W un $\widehat{A}(K)$-módulo simple tal que $S \cong S_{K,W}$, Hy K son ambos grupos minimales para S, y por lo tanto isomorfos. V y W son isomorfomos como R-módulos, digamos que Ψ es algún isomorfismo entre estos: si ϕ es un isomorfimo de grupos de H en K, entonces $\Phi : V \longrightarrow^{\phi} W$ dado por $\Phi(\widehat{a} \cdot m) = A(\widehat{{}_{K^\phi}H_H})(a)\Psi(m)$ define un isomorfismo de $\widehat{A}(H)$-módulos. $\square$

Bibliografía

[1] Bouc, Serge. *Biset Functors for Finite Groups*. Lecture Notes in Mathematics, 1990.

[2] Romero, Nadia. *Tesis doctoral: Funtores de Mackey*. UNAM, 2011.

[3] Romero, Nadia. *On fibred biset functors with fibers of prime order and four*. Journal of Algebra 387: 185–194, 2013.

[4] Romero, Nadia. *Simple modules over Green biset functors*. Journal of Algebra 367: 203–221, 2012.