



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de la complejidad de estados
nucleares en ^{48}Ca

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Diego Alberto Lara Bustillos

TUTOR

Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar
Ciudad Universitaria, Cd. Mx.
2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Lara
Bustillos
Diego
Alberto
5539741863
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
308116153

2. Datos del tutor

Dr
Víctor Manuel
Velázquez
Aguilar

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Enrique
López
Moreno

4. Datos del sinodal 2

Dr
Irving Omar
Morales
Agiss

5. Datos del sinodal 3

Dr
Luis
Benet
Fernández

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Beatriz
Elizabeth
Fuentes
Madariaga

7. Datos del trabajo escrito.

Estudio de la complejidad de estados nucleares en ^{48}Ca .
56p
2018

*Dedicado a mis padres
y hermana.*

Agradecimientos

Le agradezco a mis padres Adriana Bustillos Castillo y Alberto Lara Martínez quienes me han apoyado en todos los aspectos de mi vida, sin ustedes este trabajo no hubiera sido posible, A mi hermana Damaris Aylín Lara Bustillos por soportarme en todo momento. Sin duda, son los pilares de lo que soy y seré.

A mi asesor el Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar por transmitirme sus conocimientos, el tiempo y ayuda para el desarrollo de éste trabajo. Así, como a los miembros del jurado el Dr. Enrique López Moreno, el Dr. Irvng Omar Morales Agiss, la Dra. Beatriz Elizabeth Fuentes Madariaga y el Dr. Luis Benet Fernández por su tiempo y esmero en la revisión del presente trabajo.

A Adriana Razo de León por todos los agradables e inigualables momentos que hemos compartido juntos desde que nos conocimos en la carrera, por todo el apoyo incondicional, por las platicas y motivación que siempre me ha brindado. Tu presencia siempre hace que todo mejore.

A mis compañeros de Laboratorio Gustavo, Benjamín, Raúl, Erick, José y Alma con quienes he aprendido mucho en el tiempo que hemos convivido, siempre es agradable su presencia.

A mi compañero y amigo de hace muchos años Juan Antonio Flores Alanis, por las discusiones, debates y tiempo de convivencia. A mis compañeros de carrera Eunice, Héctor, Jonathan y María por todas las horas que compartimos estudiando y conviviendo. También a todos aquellos de los que aprendí.

Índice general

Lista de figuras	II
1. Introducción	3
2. Caos	5
2.1. Caos determinista	5
2.1.1. Exponentes de Lyapunov	6
2.2. Sistemas Hamiltonianos	7
2.2.1. Sistemas integrables	8
3. Caos cuántico	10
3.0.1. Conjetura BGS	11
3.1. Teoría de matrices aleatorias.	11
3.1.1. Formulación	12
3.2. Billares	13
3.2.1. Caos cuántico y el experimento de la doble rendija	15
4. Modelo de Capas	17
4.1. Espacio de Fock	20
4.2. Carozo inerte y espacio de valencia	21
4.3. Interacciones efectivas en el espacio de valencia	21
5. Métodos de cuantificación de la complejidad	22
5.1. Espectro de potencias	22
5.1.1. Rectificación del espectro de energías	22
5.1.2. Ruido $\frac{1}{f}$	23
5.1.3. Leyes de potencias	24
5.2. Análisis de niveles de energía a primeros vecinos	24
5.3. Interferencia de estados nucleares	27
6. Caos cuántico, espectro nuclear del ^{48}Ca	28
6.1. Espectro de potencias	33
6.2. $P(s)$ y correlaciones de corto alcance	36
6.3. Interferencia de estados nucleares	39
7. Conclusiones	43
A. Espectro de energías	45
A.1. Método Lanczos	45

Índice de figuras

3.1. Resonancia de neutrones lentos, tomado de [1]	11
3.2. Billar circular. Tomada de Chernov [2]	14
3.3. Billar de Bunimovich. Tomada de Ullmo y Tomsovic [3]	14
3.4. Distribución correspondiente a un billar semicircular. Tomado de O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, J. Physique Lett. 45 pp 1015-1022 (1984)	15
3.5. Distribución correspondiente a un billar de Bunimovich (estadio). Tomado de O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, J. Physique Lett. 45 pp 1015-1022 (1984)	15
3.6. Geometría de la simulación numérica experimento de la doble rendija. Tomada de Casati y Prosen. [4]	15
3.7. Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija (Caso una rendija). Tomada de Casati y Prosen [4].	16
3.8. Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija. Tomada de Casati y Prosen [4].	16
4.1. Ilustración esquemática de la interacción nucleón-nucleón $V_{i,j}$, como función de la separación entre nucleones $r = r_i - r_j $. Tomada de [5].	18
5.1. Secuencias de espaciamiento típicas tomado de Bohigas and Giannoni [6]. a) Niveles aleatorios sin correlación, series de Poisson. b) Secuencia de números primos. c) Resonancia de niveles de neutrones lentos del núcleo de 166 Erbio. d) Posibles niveles de energía de una partícula libre moviéndose dentro de un área delimitada por 1/8 de un cuadrado y un arco circular cuyo centro es el punto medio del cuadrado; y con área especificada por las desigualdades, $y \geq 0$, $x \geq y$, $x \leq 1$ y $x^2 + y^2 \geq r$. (Billar de Sinai). e) Los ceros de la función zeta de Riemman en la línea $Re\zeta = 1/2$. f) Secuencia de niveles espaciados de forma uniforme.	26
6.1. Espectro de energía para $\chi = 0,005$	29
6.2. Espectro de energía para $\chi = 0,01$	29
6.3. Espectro de energía para $\chi = 0,0235$	29
6.4. Espectro de energía para $\chi = 0,04$	29
6.5. Espectro de energía para $\chi = 0,04$	30
6.6. Espectro de energía para $\chi = 0,11$	30
6.7. Espectro de energía para $\chi = 0,15$	30
6.8. Espectro de energía para $\chi = 0,18$	30
6.9. Espectro de energía para $\chi = 0,21$	31
6.10. Espectro de energía para $\chi = 0,25$	31
6.11. Pendientes de los espectros de energía en función de la interacción χ	31
6.12. Espectro de potencias para $\chi = 0,005$	33
6.13. Espectro de potencias para $\chi = 0,01$	33
6.14. Espectro de potencias para $\chi = 0,0235$	33
6.15. Espectro de potencias para $\chi = 0,04$	33
6.16. Espectro de potencias para $\chi = 0,07$	34
6.17. Espectro de potencias para $\chi = 0,11$	34
6.18. Espectro de potencias para $\chi = 0,11$	34
6.19. Espectro de potencias para $\chi = 0,18$	34

6.20. Espectro de potencias para $\chi = 0,21$	34
6.21. Espectro de potencias para $\chi = 0,25$	34
6.22. Factor de correlación en función de la interacción χ	35
6.23. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,005$	36
6.24. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,01$	36
6.25. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,0235$	36
6.26. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,04$	36
6.27. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,07$	37
6.28. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,11$	37
6.29. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,15$	37
6.30. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,18$	37
6.31. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,21$	38
6.32. Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,25$	38
6.33. Distribución de energía para $\chi = 0,005$	39
6.34. Distribución de energía para $\chi = 0,01$	39
6.35. Distribución de energía para $\chi = 0,0235$	39
6.36. Distribución de energía para $\chi = 0,04$	39
6.37. Distribución de energía para $\chi = 0,07$	40
6.38. Distribución de energía para $\chi = 0,11$	40
6.39. Distribución de energía para $\chi = 0,15$	40
6.40. Distribución de energía para $\chi = 0,18$	40
6.41. Distribución de energía para $\chi = 0,21$	40
6.42. Distribución de energía para $\chi = 0,25$	40
6.43. Visibilidad en función de la interacción cuadrupolar χ	41

Abreviaturas

Abreviatura	Término
RMT	Teoría de Matrices Aleatorias (Random Matrix Theory)
GDE	Gaussian Diagonal Ensemble (Ensamble Diagonal Gaussiano)
GOE	Gaussian Orthogonal Ensemble (Ensamble Ortogonal Gaussiano)
GUE	Gaussian Unitary Ensemble (Ensamble Unitario Gaussiano)
GSE	Gaussian Symplectic Ensemble (Ensamble Diagonal Gaussiano)
BGS	Bohigas, Giannoni y Schmit
KAM	Kolmogorov, Arnold y Moser
KB3	Potencial de interacción realista de Kuo y Brawn modificado.

Resumen

El núcleo es una estructura de gran complejidad, se compone de A nucleones con N neutrones y Z protones, $A = N + Z$. Todos ellos interactúan fuertemente a distancias del orden del fm y energías del orden del MeV . Los núcleos se pueden ver como una pieza de materia densa pero elástica con forma esférica o elipsoidal. Este objeto puede vibrar y si está deformado, rotar. Muchos núcleos poseen modos colectivos, manifestaciones cuánticas de las vibraciones y las rotaciones. El movimiento del núcleo se compone de movimiento de partícula independiente acoplado a través de la interacción residual, modos colectivos debidos a la deformación y una componente estocástica. Estos componentes tienen importancias relativas distintas dependiendo de la energía de excitación y el número atómico. El modelo de capas ha logrado integrar todos estos componentes.

Esta tesis presenta el estudio de la complejidad de estados nucleares en el ^{48}Ca , mediante el uso de tres métodos de caracterización del caos cuántico, con los cuales se busca integrar el modelo de capas con la imagen del núcleo como billar cuántico. El ^{48}Ca es un núcleo con doble número mágico, por lo que es un núcleo estable.

Como se ha dicho, se busca integrar el modelo de capas con la imagen del núcleo como billar cuántico, para esto, se toma como referencia el trabajo de Prosen y Casati [4], donde los autores simulan numéricamente el experimento de la doble rendija utilizando un billar cuántico con dos configuraciones. Una configuración con dinámica regular, y otra con una dinámica caótica, obteniendo como resultado interferencia para el caso del billar regular lo cual concuerda con lo observado en el experimento de la doble rendija, y para el caso del billar caótico el patrón de interferencia desaparece. Por ello, se buscó identificar el caos cuántico en el núcleo ^{48}Ca identificando la dinámica de los niveles de energía del sistema para compararla con lo observado en billares cuánticos.

Los espectros de energía están dados por un Hamiltoniano nuclear que considera una parte monopolar y una parte multipolar. Dentro de la parte monopolar se toman en cuenta los términos de energía cinética y potencial del oscilador armónico, así como la parte monopolar de la interacción de campo medio KB3 [7] (interacción Kuo-Brown modificado) [8], y en la parte multipolar, se considera el término de interacción cuadrupolar $\hat{H}_{SM} = \hat{H}_{monopolar} + \hat{H}_{multipolar}$ para el núcleo de ^{48}Ca en la capa fp .

Con el Hamiltoniano mencionado anteriormente, se obtuvieron los espectros de energía modificando un parámetro de interacción cuadrupolo-cuadrupolo. Teniendo los espectros de energía, se realizó el primer método de análisis, el cual consistió en obtener el espectro de potencias de los niveles de energía.

Para realizar cualquier tipo de análisis estadístico de las fluctuaciones del espectro de energías de un sistema cuántico es necesario efectuar una transformación del espectro. Esta operación se denomina rectificación. Sin ella es imposible una comparación directa entre sistemas que tienen energías características y comportamientos muy diferentes. Como resultado de la rectificación del espectro de energías, se obtiene una nueva secuencia de energías, que se puede interpretar como una serie de tiempo.

A estas series de tiempo se les realizó el espectro de potencias de Fourier y de acuerdo con la teoría del ruido $1/f$, se obtuvieron transiciones en las fluctuaciones estadísticas del ruido $1/f^2$ y $1/f$ que corresponden de acuerdo a la literatura con las estadísticas GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) y GDE (Gaussian Diagonal Ensemble) respectivamente.

El segundo método tuvo como base el análisis de niveles de energía a primeros vecinos. Con este método se obtuvieron las estadísticas de los niveles energéticos para cada una de las variaciones del parámetro de interacción cuadrupolar χ ; obteniendo como resultado que los niveles de energía para $\chi = 0,005$ y $\chi = 0,01$ pueden ajustarse con una distribución de Poisson correspondiente a la estadística GDE, y para $0,0235 < \chi < 0,25$, la distribución de estados se ajusta con una distribución de Wigner correspondiente a una estadística GOE.

El tercer método se basó en obtener la visibilidad de la interferencia de los estados nucleares en función de la interacción cuadrupolar. Se observa que si el factor de interacción cuadrupolar es pequeño, se tiene un patrón

de interferencia en los estados nucleares y por tanto una visibilidad cercana a 1, y mientras χ va creciendo la interferencia desaparece y la visibilidad tiende a cero.

En particular esta tesis se enfocó en encontrar evidencia suficiente de las transiciones estadísticas entre dinámicas regulares y caóticas en los niveles de energías dentro de la capa fp , para el ^{48}Ca quién tiene un número par de nucleones de valencia y cuenta con deformaciones cuadrupolares del núcleo.

En los resultados de cada uno de los métodos utilizados se observan comportamientos cuantitativos consistentes entre sí:

- Transiciones estadísticas de una dinámica regular a una caótica correspondientes al ruido $1/f^2$ y $1/f$ respectivamente.
- Los ajustes estadísticos realizados concuerdan con los asociados a sistemas regulares GDE y GOE dentro de la RMT (Random Matrix Theory por sus siglas en inglés).
- Interferencia en el espectro de energía debida al cambio en la dinámica de los estados.

Por lo que, se concluye que existe un cambio en la dinámica de los estados de energía que va de un comportamiento regular a uno caótico, consistente y observado mediante tres métodos de análisis distintos y lo encontrado por Casati y Prosen en [4]. Los resultados obtenidos llevan a la conclusión de que el núcleo de ^{48}Ca se comporta como un billar cuántico, en donde la complejidad en la dinámica de los estados está determinada por la deformación del núcleo debida a la interacción cuadrupolar.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de sistemas complejos es reconocido en los últimos años como una nueva disciplina científica, lo último en campos multidisciplinarios. Su desarrollo está comprendido por los avances que se han hecho en diversos campos del conocimiento que van desde la Física hasta la Antropología. Muchos de los sistemas en nuestro entorno son complejos.

La palabra complejo proviene del latín *complexus* que significa entrelazar, trenzar o bien *plexus* que refiere a entretreído. De la misma forma, funciona la naturaleza de un sistema complejo, debido a la relación intrínseca de sus partes, que se conectan y se entretrejen; sin embargo, los sistemas simples también se conforman por partes.

Por su propia naturaleza, la noción de complejidad, es fundamental para la física contemporánea, sin embargo, todavía carece de una definición precisa. El reciente concepto de redes complejas libres de escala ofrece una dirección prometedora para formalizar la complejidad, aunque muchas cuestiones relacionadas siguen abiertas.

En términos cualitativos la noción de complejidad se refiere a la diversidad de formas, a la aparición de patrones coherentes de aleatoriedad y también a la capacidad de conmutación entre tales patrones, presentes en sistemas físicos. Esto implica normalmente muchas componentes diferentes al igual que escalas de tiempo y espacio; por lo tanto se da una gran variedad de fenómenos; siendo algunos de ellos el caos, el ruido y la coherencia. De hecho, estos fenómenos van en paralelo, debido a que están conectados con la existencia de muchos grados de libertad, y a menudo, interacciones al azar entre ellos.

La teoría de matrices aleatorias (RMT) [9] concepto originado de consideraciones de física nuclear, ha demostrado ser un buen camino para acercarse a los sistemas cuánticos complejos y en el tratamiento de la cuestión, de cómo el caos se manifiesta a nivel cuántico.

El caos es esencialmente una propiedad presente en los sistemas complejos, tales como; por ejemplo núcleos atómicos, donde se ha encontrado evidencia de una amplia aplicabilidad de RMT para describir las fluctuaciones de niveles de energía. La teoría de la complejidad rama de la ciencia que se encuentra en reciente crecimiento, encuentra sus bases en la teoría del caos. La relación entre estas dos teorías está dada por los planteamientos sobre los procesos causales y no lineales y sus comportamientos no deterministas. Por lo que, se tienen puntos en común, siendo éstos, un poco diferentes. Es decir, por un lado plantea un comportamiento caótico y por otro un orden complejo.

En la presente investigación se hace un estudio de los estados nucleares del ^{48}Ca mediante herramientas propias del caos cuántico. El modo más habitual de discernir entre un sistema cuántico integrable (o regular) y un sistema cuántico caótico consiste en analizar las fluctuaciones del espectro de energía. La comparación de estas fluctuaciones con las de una secuencia completamente aleatoria y con las de espectros procedentes de la Teoría de Matrices Aleatorias permiten construir sistemas cuánticos integrables, cuyas fluctuaciones espectrales coinciden con RMT [10]. Así que el trabajo se centra en la aplicación de técnicas para el análisis de estas fluctuaciones espectrales para la identificación del comportamiento caótico en sistemas cuánticos. Dichas técnicas permiten la comparación de estas fluctuaciones con las que aparecen en otros ámbitos de la naturaleza.

En el capítulo 2 se presenta un resumen de la formulación y la fenomenología del caos en la mecánica clásica, teniendo en cuenta los conceptos fundamentales relacionados con el caos partiendo del caos clásico y el caos Hamiltoniano mediante a integrabilidad y no integrabilidad de dichos sistemas.

En el capítulo 3 se aborda el caos cuántico tomando como punto de partida el principio de equivalencia en

Mecánica Cuántica y la conjetura BGS (Bohigas, Giannoni y Schmit). Además se introduce la teoría de matrices aleatorias como primera aproximación estadística del caos cuántico mediante la explicación de la distribución de Wigner como cuantificación de dicho comportamiento para sistemas nucleares.

En el capítulo 4 se abordan los conceptos relacionados con el modelo de capas donde se explica el caos cuántico dentro de sistemas de muchos cuerpos debido a que el Hamiltoniano nuclear del ^{48}Ca es un Hamiltoniano formado por una interacción monopolar y una multipolar.

Posteriormente en el capítulo 5, se introducen los métodos de cuantificación del caos cuántico, se aborda el método de espectros de potencias en base al análisis de series de tiempo. En la siguiente sección se describe el análisis de los niveles de energías nucleares mediante las fluctuaciones del espectro de energías y su distribución de probabilidad. Por último se explica la visibilidad de los estados de interferencia en el espectro de energías.

En el capítulo 6 se exponen los resultados obtenidos teniendo los espectros de energía nucleares correspondientes al núcleo del ^{48}Ca , además de los espectros de potencias asociados a los espectros de energía anteriormente mencionados y las distribuciones de probabilidad, así como también los patrones de interferencia de estados nucleares como análogo de la visibilidad óptica.

Capítulo 2

Caos

2.1. Caos determinista

Uno de los puntos centrales dentro de la física, es el estudio del movimiento; este concepto está presente en todas y cada una de sus áreas. Dentro de la Mecánica Clásica, la dinámica de un sistema, es fundamental para el análisis de los fenómenos naturales a gran escala. De acuerdo con la Mecánica Clásica, el movimiento de un sistema está caracterizado por una trayectoria. Este desplazamiento reconoce la información de la localización del sistema para cada tiempo la obtención de estas trayectorias es fundamental para el entendimiento del fenómeno en cuestión. Si bien, muchos sistemas físicos a gran escala pueden ser descritos por la mecánica clásica, no en todos estos se puede obtener una descripción sencilla de su evolución temporal en términos de su trayectoria; de hecho, gran parte de los fenómenos naturales no tienen un comportamiento lineal. Debido a esto, algunos de los sistemas que cuentan con una dinámica no lineal suelen ser denominados como caóticos. Sin embargo, existen sistemas que son lineales por segmentos y presentan un comportamiento caótico.

La palabra caos usualmente se utiliza para hacer referencia a lo impredecible, así como también para hacer alusión al desorden. Sin embargo, es difícil encontrar una definición concreta de dicho término. En la Grecia antigua el caos era considerado como el estado amorfo e indefinido anterior a la ordenación del cosmos; aquello que existió antes del resto de los dioses y fuerzas elementales. Actualmente, se usa para señalar un comportamiento errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos.

Un sistema dinámico es un sistema que evoluciona en el tiempo. Dicho sistema debe incluir una descripción del estado del mismo y una regla para seguir su evolución. Los sistemas dinámicos regularmente se representan por medio de un espacio fase, donde las trayectorias contenidas en éste dan la descripción dinámica del sistema, y debido a que la los sistemas dinámicos cuentan con una trayectoria para seguir su evolución temporal, suele decirse que el sistema es determinista [11]. Así, un sistema determinista hace referencia a sistemas cuyo estado inicial determina el estado futuro, es decir, sistemas que están definidos por sus condiciones iniciales. El determinismo plantea que el desarrollo de los fenómenos naturales está definido por la dinámica del sistema y por sus condiciones iniciales. Entonces, en teoría, es posible saber la evolución temporal de un sistema determinista si se conocen las condiciones iniciales. En términos generales, el caos hace alusión a sistemas dinámicos no lineales, que presentan movimientos irregulares y cuya evolución temporal está determinada de forma única a partir de las condiciones iniciales [12].

El descubrimiento del caos y sus aplicaciones a gran variedad de sistemas físicos representan uno de los grandes avances de la física. La mayoría de los sistemas dinámicos no lineales son caóticos, esto ha permitido el estudio de muchos sistemas complejos que antes no podrían ser tratados.

- a) Se presenta un comportamiento aperiódico.
- b) Alta sensibilidad a las condiciones iniciales. El parámetro que mide este efecto es el exponente de Lyapunov del sistema:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d(x_0, t)}{d(x_0, 0)}. \quad (2.1)$$

donde $d(x_0, t)$ es la separación entre dos trayectorias a tiempo t y con condiciones iniciales cercanas a x_0 y el resultado se debe promediar sobre las trayectorias cercanas a x_0 .

- c) El sistema está confinado. Se debe cumplir con la propiedad matemática de mezclado¹, es decir, que las trayectorias que se separan se vuelvan a encontrar una y otra vez. Las trayectorias cercanas se separan localmente pero la dinámica está confinada globalmente a una región finita del espacio de fases y, necesariamente, las trayectorias se reaproximan arbitrariamente cerca unas a otras infinitas veces [13].

2.1.1. Exponentes de Lyapunov

Un comportamiento impredecible está presente en sistemas dinámicos caóticos; dicho comportamiento se origina por inestabilidades dinámicas, éstas pueden llegar a ser exponenciales dentro de un intervalo de tiempo; si un sistema es lineal, pequeñas imprecisiones en las condiciones iniciales no crecen exponencialmente y entonces es posible un comportamiento predecible. En el caso en que las imprecisiones en las condiciones iniciales crecen de forma exponencial, se tiene como resultado un comportamiento caótico en la dinámica del sistema. Una forma de cuantificar ésta inestabilidad exponencial es mediante los exponentes de Lyapunov.

La inestabilidad es determinista e intrínseca a la dinámica; por lo que, el caos no puede ser explicado por ruido externo. Por ejemplo sistemas con tres cuerpos pueden dar origen a un comportamiento complicado e impredecible, pero un comportamiento impredecible no es extraño en un sistema con muchos grados de libertad. Sin embargo, el caos también puede presentarse en sistemas con pocos grados de libertad.

Considerando un sistema lineal:

$$\frac{d}{dt}x_i = f_i(x_1, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

Si x es una solución del sistema de ecuaciones, entonces la ecuación de movimiento para las variaciones δx de una trayectoria cercana estará dada por la matriz Jacobiana para δx pequeño:

$$\frac{d}{dt}\delta x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (2.3)$$

dado que el Jacobiano no depende de x por que 2.2 es lineal. Por lo tanto, el Jacobiano es una matriz de coeficientes constantes (independientes de x):

$$\frac{d}{dt}\delta x_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} \delta x_j \quad (2.4)$$

con $M = \frac{\partial f}{\partial x}$. Entonces se puede escribir la solución en términos de la exponencial de la matriz.

$$\delta x_i(t) = \sum_{j=1}^n \exp(Mt)_{ij} \delta x_j(0) \quad (2.5)$$

que está definida para cualquier matriz. Ahora si M tiene eigenvalores λ_j , la matriz exponencial también tiene eigenvalores $\exp(\lambda_j t)$, por lo que se pueden esperar divergencias exponenciales. Regularmente, la parte real de los eigenvalores es la de mayor importancia, ya que la parte real da la divergencia de las trayectorias (la parte imaginaria, las rotaciones de las trayectorias en una distancia constante). Por lo tanto, la parte real de estos eigenvalores son los exponentes de Lyapunov en el caso lineal. Como la solución anterior es la solución explícita para un sistema lineal, cabe mencionar que un sistema lineal nunca es caótico, y para obtener un comportamiento caótico los exponentes de Lyapunov tendrían que ser negativos.

Así, en el caso no lineal el Jacobiano M depende de x entonces los eigenvalores también dependen de x . Por ello, los exponentes de Lyapunov en el caso general están definidos como los eigenvalores promediados, donde el promedio es tomado respecto a la evolución a largo plazo de una trayectoria. Debido al comportamiento

¹Matemáticamente dados dos subconjuntos A y $B \in M$, y $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\mu(\phi_t(A \cap B)) = \mu(A)\mu(B)$

exponencial, el exponente de Lyapunov más grande λ_1 domina la divergencia, entonces la distancia entre las trayectorias pueden escribirse como:

$$|\delta x| \approx e^{\lambda_1 t} \quad (2.6)$$

para pequeñas separaciones, la interpretación del conjunto completo de exponentes lo podemos visualizar como una esfera muy pequeña con condición inicial y tiempo después ésta evoluciona en un elipsoide, donde el eje principal mide la evolución de $\exp(\lambda_i t)$. Entonces, para un comportamiento caótico, es necesario por lo menos un exponente de Lyapunov positivo (notando que el movimiento acortado requiere por lo menos un exponente negativo en el sistema caótico).

2.2. Sistemas Hamiltonianos

En la sección anterior se dio una breve introducción a los sistemas dinámicos y las características que deben cumplir para presentar un comportamiento caótico. Dichos sistemas como se mencionó deben contar con una dinámica no lineal. Este tipo de sistemas suelen ser encontrados en la literatura como sistemas disipativos, su principal característica es que existe un colapso en la evolución del volumen de condiciones iniciales en el espacio fase del sistema, por lo cual, en la mayoría de los casos se pone atención a los atractores. Es por ello, que para entender la dinámica de un sistema a largo tiempo es necesario considerar los atractores.

Por otra parte existen sistemas dinámicos conservativos, a los que también conocemos como sistemas Hamiltonianos, los cuales se llaman conservativos debido a que satisfacen el teorema de Liouville.

Al igual que los sistemas disipativos, este tipo de sistemas dinámicos siguen un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el comportamiento del sistema. Mientras que en el caso de sistemas conservativos, se requiere sólo cumplir la no linealidad de las ecuaciones. Al conservar las propiedades físicas del sistema (energía mecánica, momento angular, etc.) [14], y de acuerdo con el Teorema de Liouville², no existen atractores, por lo tanto la falta de éstos se considera una de las principales diferencias de este tipo de sistemas.

En un sistema Hamiltoniano, la evolución temporal del sistema está descrita en términos de las variables q_i coordenadas y p_i los momentos. Si el sistema consiste de N partículas puntuales, cada una cuenta con tres componentes para su vector de posición y tres componentes para su vector de momento, donde el subíndice i toma los valores de 1 a $3N$. Cada par q_i, p_i corresponde a un grado de libertad para el sistema Hamiltoniano.

Una vez conocidas las q_i coordenadas y p_i los momentos para todo tiempo t y para cada i , entonces se conoce todo sobre el comportamiento en el tiempo del sistema. La dependencia temporal de las q_i y p_i está dada por las soluciones de las ecuaciones de Hamilton, que están en términos de la función Hamiltoniana $H(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$, donde en los casos simples el Hamiltoniano es simplemente la energía mecánica total del sistema $H = T + V$ escrita en términos de las q_i y p_i . Las ecuaciones de Hamilton son un conjunto de $2N$ ecuaciones diferenciales acopladas. Para un sistema con N grados de libertad, las ecuaciones de Hamilton están dadas por:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}. \quad (2.8)$$

El Hamiltoniano para una partícula es la suma de la energía cinética y la energía potencial,

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + V(x, t). \quad (2.9)$$

y las ecuaciones de Hamilton en este caso son:

²El teorema de Liouville establece que: El volumen de una región arbitraria del espacio fase se conserva si los puntos de la frontera se mueven de acuerdo a las ecuaciones canónicas. Además la densidad de puntos en el espacio fase en la vecindad de un punto que se mueve con el fluido es constante, en términos del corchete de Poisson el teorema de Liouville puede reescribirse como: $\frac{\partial D}{\partial t} = -\{D, H\}$ con $D = \frac{dN}{dV}$ siendo D el volumen del espacio fase [15].

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.10)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}. \quad (2.11)$$

que son las ecuaciones usuales de movimiento para una partícula en un potencial.

Al igual que en los sistemas disipativos los sistemas Hamiltonianos tienen una descripción geométrica dada por un espacio fase, que tiene como ejes los valores de las q 's y p 's. Así, si se tienen N grados de libertad, se tienen N pares de q_i y p_i y el espacio fase tiene una dimensión de $2N$, por lo cual en los sistemas Hamiltonianos, el espacio fase siempre tiene un número par de dimensiones. Como el valor del Hamiltoniano (energía) no depende del tiempo explícitamente las trayectorias para el sistema Hamiltoniano no pueden estar en cualquier lugar del espacio fase, es decir, sólo pueden estar en las regiones donde se tiene el mismo valor de la energía como punto inicial de la trayectoria; las trayectorias en el espacio fase están confinadas en una superficie constante de energía $2N - 1$ dimensional. Por lo que se puede demostrar que un volumen de condiciones iniciales en el espacio fase permanece constante aún cuando el sistema Hamiltoniano evolucione en el tiempo.

De acuerdo con esto, el caos puede dividirse en dos clases y delimitar sus características. Por una parte en sistemas disipativos el volumen ocupado por las trayectorias en el espacio fase va disminuyendo mientras el sistema evoluciona, de ésta forma, mientras el tiempo tiende a infinito y dependiendo de los parámetros del sistema, el conjunto de trayectorias del sistema se puede convertir en un atractor extraño³ donde la dimensión de éstos es menor a la dimensión del espacio fase original, siendo un fractal, o en un ciclo límite donde el movimiento es periódico. Y para los sistemas conservativos, al contrario que en los sistemas disipativos, el área ocupada por el conjunto de trayectorias en el espacio fase no cambia en el tiempo, por lo que se impide el colapso de movimiento del sistema y no existen atractores en este tipo de sistemas. Por lo tanto, una vez teniendo claras las diferencias entre los tipos de sistemas que pueden presentar caos dentro de la mecánica clásica, es importante notar que al igual que en los sistemas disipativos introducidos en la sección 2.1, una medida del caos está dada por los exponentes de Lyapunov.

2.2.1. Sistemas integrables

Los sistemas integrables son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que pueden resolverse analíticamente, sin embargo, pueden no tener solución analítica. Es decir, las soluciones pueden reducirse a un número finito de operaciones algebraicas e integraciones. Tales sistemas son muy raros, la mayoría de los sistemas dinámicos tienen regiones de movimiento ordenado y otras con movimiento caótico; de hecho, los sistemas puramente caóticos no son muy comunes y además no presentan soluciones explícitas, los sistemas integrables por el contrario nunca admiten un comportamiento caótico.

En mecánica clásica suelen tratarse dos tipos de sistemas los sistemas integrables y los caóticos. Los sistemas integrables en general presentan un comportamiento sencillo y predecible. Por otra parte, los sistemas caóticos se comportan de forma muy complicada. Considerando un sistema Hamiltoniano $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ que no depende explícitamente del tiempo, se dice que el sistema es integrable si existen N funciones independientes F_1, \dots, F_N que son constantes de movimiento $dF_i/dt = 0$ y que están en involución⁴. De acuerdo con el teorema de integrabilidad de Liouville se garantiza que bajo esas condiciones las ecuaciones de movimiento tienen solución; cuando esto ocurre, la trayectoria del sistema está confinada en un toro N -dimensional en el espacio fase $2N$ dimensional, y el movimiento es equivalente a N movimientos periódicos en una dimensión cada uno con su propia frecuencia. Como el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, dicho sistema se vuelve una de las constantes de movimiento que suele tomarse por convención como $F_1 = H$.

En general, cada una de las N constantes de movimiento F_i puede considerarse una coordenada con coordenada conjugada f_i ; así, entonces las ecuaciones de evolución del sistema se reducen a:

$$\frac{dF_i}{dt} = 0 \quad (2.12)$$

³Un atractor es un conjunto de valores numéricos hacia los cuales tiende a evolucionar un sistema, en una amplia variedad de condiciones iniciales del sistema. A diferencia de los atractores clásicos, los atractores extraños tienen estructura fractal.

⁴Dos funciones F y G están en involución si su corchete de Poisson es igual a cero $\{F, G\} = 0$. con

$$\{F, G\} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\frac{df_i}{dt} = W_i(F_1, \dots, F_N) \quad (2.13)$$

siendo estas ecuaciones un ejemplo factible de lo inteligible de los sistemas integrables. Sin embargo, en pocas ocasiones es posible obtener este sistema de coordenadas a través de una transformación canónica a partir del sistema de coordenadas de posiciones y momentos $(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$. Debido a que existen N constantes de movimiento, existen por consecuencia N funciones $I_1, \dots, I_N, I_j = I_j(F_1, \dots, F_N)$ para todo j que cumplen:

1. I_j es constante de movimiento
2. Cada I_j es una coordenada con coordenada conjugada ϕ_j
3. El conjunto de coordenadas $(I_1, \dots, I_N, \phi_1, \dots, \phi_N)$ puede obtenerse mediante una transformación canónica a partir de $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$, de forma que el Hamiltoniano puede escribirse $H = H(I_1, \dots, I_N)$. Siendo este conjunto de coordenadas las variables acción-ángulo y constituyen la forma canónica de describir los sistemas integrables; así las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\frac{dI_j}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j(I_1, \dots, I_N) \quad (2.15)$$

Una vez que se ha escrito el Hamiltoniano en función de las variables acción-ángulo, la integración de las ecuaciones de movimiento es sencilla. De esta manera se puede notar la autonomía de sistemas Hamiltonianos con 1-grado de libertad, los cuales son siempre integrables, debido a que la energía es una cantidad conservada. Por lo tanto no existe un comportamiento caótico en este tipo de sistemas. Así, entonces, es necesario como mínimo dos grados de libertad o de una dependencia del tiempo explícita para producir el comportamiento caótico. Es por ello, que los sistemas integrables son muy escasos en la naturaleza. La mayoría de los sistemas no poseen el alto grado de simetría requerida para la condición de integrabilidad.

Una pequeña perturbación en un sistema Hamiltoniano integrable, hace que se pierda la integrabilidad. El teorema de KAM muestra que si una perturbación es suficientemente pequeña, y si las frecuencias son suficientemente irracionales, entonces el movimiento cuasi-periódico se preserva.

Capítulo 3

Caos cuántico

En la sección anterior se introdujeron las características principales del comportamiento caótico en sistemas clásicos, notando que tanto para los sistemas disipativos y conservativos se tienen definiciones consistentes de dicho comportamiento. El caos en la mecánica clásica está bien definido, sin embargo las nociones de caos no se pueden transportar fácilmente a sistemas cuánticos, aunque podría esperarse un comportamiento similar en sistemas cuánticos. Pero debido a la naturaleza propia de la mecánica cuántica no puede hablarse de forma consistente de una dinámica caótica en el contexto de la mecánica cuántica. Debido a esto el caos cuántico no tiene como tal una definición universalmente establecida [16]. Así, el caos cuántico se refiere a las manifestaciones cuánticas de sistemas cuyo análogo clásico es caótico.

Los conceptos y definiciones desarrollados en mecánica clásica no son fácilmente aplicables a la mecánica cuántica. Mientras que en la mecánica cuántica, se pierde la noción de trayectoria, y por tanto la propia definición del exponente de Lyapunov, además de que la ecuación de Schrodinger es lineal. El principio de correspondencia indica que la mecánica clásica debe aparecer como límite de la mecánica cuántica para escalas grandes comparadas con la longitud de De Broglie.

Como la ecuación de evolución en mecánica cuántica es siempre lineal, esta linealidad inherente a la mecánica cuántica permite describir el estado de un sistema como superposición de estados (denominados autoestados) relacionados con el espectro de un operador lineal. En mecánica cuántica, pequeñas perturbaciones del estado inicial conducen generalmente a pequeñas perturbaciones en estados posteriores, y no a una divergencia exponencial.

Además, debido al principio de incertidumbre de Heisenberg ($\Delta p \Delta x \leq \hbar/2$), el concepto de trayectoria en el espacio fase no tiene sentido ya que la precisión con la que se fijan posiciones y velocidades tiene un límite dictado por la constante de Planck. La mecánica cuántica difumina las trayectorias clásicamente bien definidas y evita por tanto la complejidad dinámica de esas trayectorias.

Así entonces, no parece posible una definición del caos cuántico en base a los conceptos de la mecánica clásica. Sin embargo, el caos debería manifestarse en sistemas cuánticos de alguna manera, ya que la mecánica clásica emerge como un límite de la mecánica cuántica en la región semiclásica.

Considerando un sistema cuántico cuyo análogo clásico es no integrable, la evolución temporal de dicho sistema estará determinada por su correspondiente función de onda $\psi(t)$, dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = \hat{H}(t) \Psi(t) \quad (3.1)$$

donde el Hamiltoniano $H(t)$ puede depender explícitamente del tiempo. En el caso en que éste no dependa del tiempo, el sistema se llama conservativo y su evolución temporal está determinada por:

$$\Psi(t) = \exp\left(\frac{-i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}\right) \Psi(t_0) \quad (3.2)$$

en donde t_0 es el tiempo inicial y $\psi(t_0)$ el estado del sistema en el tiempo correspondiente; la información de la trayectoria $x(t)$ está contenida en la función de onda $\psi(t)$.

Además, otra característica principal de un comportamiento caótico está basada en la inestabilidad del sistema bajo pequeñas perturbaciones. La sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales está cuantificada

por los exponentes de Lyapunov. En mecánica cuántica no se puede hablar de trayectorias del sistema por lo que no se puede medir la inestabilidad del sistema mediante un método similar; es por eso que en vez de ocupar el término trayectoria como en mecánica clásica se sustituye por la función de onda cuántica y buscar una separación de dos funciones de onda próximas producidas por la evolución del sistema. Debido a que la ecuación de Schrödinger es lineal la evolución es unitaria, por lo que si se tienen dos funciones de onda distintas con condiciones iniciales $|\Phi(0)\rangle$ y $|\Psi(0)\rangle$, la evolución unitaria conserva el producto escalar en el espacio de Hilbert,

$$|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\phi(0)|\psi(0)\rangle|^2 \quad (3.3)$$

siendo independiente del Hamiltoniano del sistema. Debido a esto, es difícil poder definir rigurosamente el caos cuántico utilizando la sensibilidad a pequeñas condiciones iniciales del Hamiltoniano. En la literatura, solamente existen algunos ejemplos de sistemas concretos pero no una teoría general sobre las inestabilidades del Hamiltoniano ante pequeñas perturbaciones. Otra característica importante dentro del caos Hamiltoniano son las propiedades del espacio fase del sistema que cumple con el teorema de KAM.

(Comentario Luis Benet) Desde los 90s, pero en particular durante la primer década de los 2000, se estudió el caso de perturbar el Hamiltoniano y comparar el resultado de la evolución de un estado concreto con la evolución de ese mismo estado bajo el Hamiltoniano no perturbado. *Muchos* resultados interesantes se han obtenido. El concepto se llama fidelidad, o eco de Lochschmidt, y existe en mecánica clásica.

3.0.1. Conjetura BGS

Una vez destacadas las características principales de los sistemas clásicos que presentan un comportamiento caótico, y buscando por otra parte una definición para este tipo de comportamiento pero en sistemas cuánticos, en este trabajo se toma como referencia la conjetura BGS para el estudio del caos cuántico. En 1984 Bohigas, Giannoni y Schmit (BGS) propusieron su famosa conjetura: *Las fluctuaciones del espectro de sistemas cuánticos invariantes bajo inversión temporal cuyos análogos clásicos son sistemas K son iguales a las predichas por el GOE* [6].

3.1. Teoría de matrices aleatorias.

Las matrices aleatorias aparecieron primero en la matemática estadística alrededor de los años 30, [9] sin llamar mucho la atención. Posteriormente en los años 50 y 60 fue desarrollada por Wigner, Dyson Mehta y otros con la finalidad de sistematizar el estudio de los espectros de los núcleos complejos, esto mediante las estadísticas de los eigenvalores y eigenfunciones de dichos sistemas.

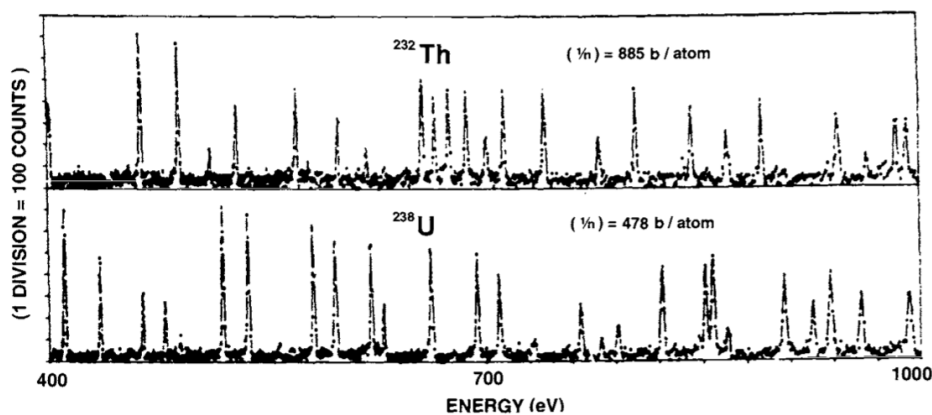


Figura 3.1: Resonancia de neutrones lentos, tomado de [1]

Los primeros estudios sobre matrices aleatorias en física fueron realizados para entender el comportamiento de las resonancias de neutrones lentos en física nuclear. En la figura 3.1 se pueden observar los niveles de energía del uranio y el torio (Rosen et al., 1960; Camarda et al., 1973; Liou et al., 1972b), donde el estado base y los estados excitados de niveles bajos fueron explicados en términos de un modelo de una partícula independiente

donde los nucleones se supone que deben moverse libremente en un pozo de potencial promedio (Mayer and Jensen, 1955; Kisslinger and Sorenson, 1960). A medida que la energía de excitación aumenta, cada vez más nucleones son expulsados del cuerpo principal del núcleo, y la aproximación de la sustitución de las interacciones complicadas con un potencial medio se vuelve inexacta.

En excitaciones aún más altas los estados nucleares son tan densos y el entremezclado es tan fuerte que es una tarea imposible tratar de explicar los estados individuales; pero cuando las complicaciones aumentan más allá de cierto punto la situación se revierte de nuevo, y ya es necesario explicar las características de cada estado individual, sino sólo sus propiedades medias, lo cual es mucho más simple. El comportamiento estadístico de los distintos niveles de energía es muy importante en el estudio de las reacciones nucleares.

La idea principal en el desarrollo de la teoría de matrices aleatorias (RMT) es, dado que se desconocen los detalles de la interacción nuclear, prescindir de los mismos y realizar una descripción estadística del sistema, es decir, hacer a un lado el estudio de un núcleo concreto y encontrar propiedades que caractericen el conjunto de espectros nucleares en general. Esto se llevó a cabo sustituyendo el Hamiltoniano del sistema por un ensamble de matrices aleatorias con las mismas propiedades de simetría. Dependiendo de la simetría del sistema se debe considerar un ensamble de matrices aleatorias distinta, el ensamble de matrices ortogonales gaussianas (Gaussian Orthogonal Ensemble o GOE), el ensamble de matrices unitarias gaussianas (Gaussian Unitary Ensemble o GUE) o el ensamble de matrices simplécticas gaussianas (Gaussian Symplectic Ensemble o GSE). Este problema es similar al de los sistemas complejos con muchos grados de libertad que surgieron después del desarrollo de la mecánica estadística. La principal diferencia es que en mecánica estadística se consideran ensambles de condiciones iniciales para un sólo Hamiltoniano que es conocido, y en este caso se consideran ensambles de Hamiltonianos para un sistema.

Si bien la formulación de la RMT no se hizo con el objetivo de describir el caos cuántico, los trabajos sobre esta tema formulados a principio de los años ochenta, en particular los trabajos de Bohigas, Giannoni y Schmit [6], vincularon ambas teorías, aunque no fueron los únicos que escribieron sobre esta conexión con los resultados de RMT, tal fue el caso de Berry, Casati, Chirkov, entre otros. Por otra parte, aun se desconoce cómo es que la RMT, formulada para describir un sistema tan complejo como el núcleo atómico, sirve para caracterizar sistemas sencillos como los billares cuánticos. Lo que es un hecho, es que la vinculación mencionada anteriormente realizada por la conjetura BGS funciona, por lo que el conocimiento de la RMT es fundamental para entender el caos cuántico.

3.1.1. Formulación

La RMT está compuesta por tres tipos de Hamiltonianos o clase de universalidad, que dan lugar a la definición de otros ensambles y dependiendo de la simetría del sistema [9]:

- Ensamble GUE (Gaussian Unitary Ensemble), está compuesta por matrices aleatorias y hermíticas. Sus elementos diagonales H_{jj} y las partes reales e imaginaria de sus elementos no diagonales H_{jk} con $j > k$ son estadísticamente independientes, y su distribución de probabilidad es invariante bajo todas las transformaciones unitarias de H . Es aplicable a sistemas que no son invariantes bajo inversión temporal.
- Ensamble GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble), está compuesta por matrices aleatorias, hermíticas y simétricas. Los elementos de matriz H_{jk} tales que $j \geq k$ son independientes estadísticamente, y su distribución de probabilidad $P(H)$ es invariante bajo todas las transformaciones reales y ortogonales de H . Es aplicable a sistemas invariantes bajo inversión temporal y simetría bajo rotaciones, y a sistemas invariantes bajo inversión temporal que no verifican la simetría bajo rotaciones pero tienen espín entero.
- Ensamble GSE (Gaussian Symplectic Ensemble), está compuesta por matrices aleatorias, hermíticas y auto-duales. Sus elementos diagonales H_{jj} y los cuatro componentes cuaterniónicos de los elementos diagonales H_{jk} con $j > k$ son estadísticamente independientes, y su distribución de probabilidad es invariante bajo todas las transformaciones simplécticas de H . Es aplicable a sistemas de espín semientero e invarianza bajo inversión temporal.

Como se ha mencionado anteriormente, la RMT supone que los detalles de la interacción de un sistema no son importantes para las propiedades de las fluctuaciones de su espectro y que basta con conocer sus propiedades de simetría. Por este motivo se reemplaza el Hamiltoniano por una matriz cuyos elementos se eligen aleatoriamente. Los elementos de matriz no se pueden fijar con completa libertad. Se debe obedecer

la clase de universalidad del Hamiltoniano que se quiere representar. Para la clase ortogonal el Hamiltoniano puede ser representado por una matriz real simétrica. Por tanto, tenemos $N(N+1)/2$ elementos de matriz independientes. En un sistema completamente aleatorio cualquier conjunto de funciones de la base es a priori tan bueno como cualquier otro, excepto por la hermiticidad del Hamiltoniano. La función de probabilidad de los elementos de matriz $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$ no debe depender de la base a la que se aplica. Esto nos lleva a la propiedad de invarianza.

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H'_{11}, \dots, H'_{NN}). \quad (3.4)$$

H' se obtiene de H por una transformación ortogonal $H' = OHO^T$ con $OO^T = 1$. Las funciones de H_{nm} invariantes bajo transformaciones ortogonales sólo pueden depender de trazas de potencias de H . Como las propiedades matemáticas de estos ensambles son muy parecidas entre de ellas. En general, para que se cumplan las invarianzas y las simetrías es necesario que la distribución de probabilidad de los elementos de las matrices que las representan verifique lo siguiente:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = C \exp \left[-B \text{Tr}(H) - A \text{Tr}(H^2) \right]. \quad (3.5)$$

Además se supone que los elementos de matriz no están correlacionados $p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H_{11})p(H_{12}) \dots p(H_{NN})$ donde la constante B puede tomarse cero sin pérdida de generalidad, y la constante C queda determinada por la normalización.

$$\int p(H_{11}, \dots, H_{NN}) dH_{11} \dots dH_{NN} = 1. \quad (3.6)$$

De este modo, las expresiones de la distribución de probabilidad quedan para el caso ortogonal como:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \exp \left[-A \sum_{n,m} H_{nm}^2 \right]. \quad (3.7)$$

El conjunto de todas las matrices aleatorias con elementos de matriz que obedecen la función de distribución 3.7 define la ensamble gaussiano ortogonal, Gaussian Orthogonal Ensemble, (GOE). De forma análoga podemos obtener la ensamble unitario gaussiano (GUE) y la ensamble simpléctico gaussiana (GSE). A saber:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \exp \left[-A \sum_{n,m} [(H_R)_{nm}^2 + (H_I)_{nm}^2] \right] \quad (3.8)$$

donde H_R es la parte real y H_I es la parte imaginaria del hamiltoniano, para el GUE y

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \exp \left[-A \sum_{n,m} [(H_0)_{nm}^2 + (H_1)_{nm}^2 + (H_2)_{nm}^2 + (H_3)_{nm}^2] \right] \quad (3.9)$$

donde H_0, H_1, H_2, H_3 son las componentes cuaterniónicas, para el GSE. Por otra parte para el GDE se aplica la distribución de probabilidad 3.7 sólo para los elementos de la diagonal y el resto son nulos [17], [18].

3.2. Billares

La teoría matemática de los billares caóticos nace alrededor de los años 30 con los trabajos de George Birkhoff. Durante los últimos años se ha convertido en un área muy bien establecida dentro de la teoría moderna de los sistemas dinámicos y mecánica estadística.

Los billares son modelos matemáticos para diversos fenómenos físicos donde una o más partículas se mueven en un contenedor compacto de un espacio d-dimensional y colisionan con las paredes y entre sí. Las propiedades

dinámicas de cada modelo quedan determinadas por la forma de las paredes que contienen las partículas, y pueden variar de un comportamiento completamente regular (integrable) a uno completamente caótico.[2]

Es por eso que el estudio de los billares cuánticos ha sido fundamental para alcanzar el nivel de comprensión actual del caos cuántico. Así, los billares pueden tener una dinámica regular, mezclada o caótica, para un valor $d = 2$ se tiene que la dinámica no es trivial, el círculo y la elipse son dos de los principales ejemplos de billares integrables. Por otra parte dos casos de billares caóticos muy estudiados son el billar de Sinai¹ y el estadio de Bunimovich².

El análogo cuántico de un billar clásico está definido por la ecuación de Schrödinger estacionaria con condiciones de frontera de Dirichlet, es decir, la función de onda se anula en la frontera. El Hamiltoniano de la partícula está compuesto por el Laplaciano multiplicado por algunas constantes, por lo cual el problema se asemeja al de las vibraciones de una membrana.

Por tanto, es evidente que la estructura de la mecánica cuántica no deja lugar a un comportamiento caótico similar al de la mecánica clásica. Sin embargo, puesto que la mecánica clásica debe emerger de la mecánica cuántica cuando el tamaño del sistema es suficientemente grande, o equivalentemente, cuando $\hbar \rightarrow 0$, puede haber algunas características del comportamiento caótico en el espectro y la función onda.

Hay evidencia de que ciertas propiedades de los espectros y funciones de ondas de los sistemas cuánticos están determinadas por el comportamiento a gran escala de tiempo de sus análogos clásicos. Los billares son necesarios aquí: cómo definir una contraparte clásica de un sistema cuántico particular, sólo es clara y directa para sistemas con pocos grados de libertad, y por lo tanto la mayoría de los resultados se refieren a este tipo de sistemas. A finales de los años setenta y principios de los ochenta, muchos autores comenzaron a estudiar sistemas cuánticos simples como el billar cuántico o pequeñas moléculas, tratando de relacionar sus propiedades con el carácter integrable o caótico de la dinámica de sus análogos clásicos. Desde el principio, estos estudios sugirieron que el espectro de un sistema cuántico genérico debería ser una superposición de topologías que reflejen la existencia de regiones regulares y caóticas en su espacio de fase.

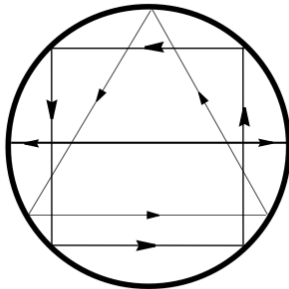


Figura 3.2: Billar circular. Tomada de Chernov [2]

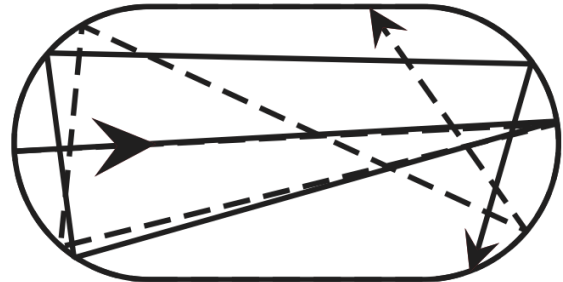


Figura 3.3: Billar de Bunimovich. Tomada de Ullmo y Tomsovic [3]

Este hecho enlaza directamente con la teoría de matrices aleatorias. El paradigma del caos cuántico son los billares cuánticos: partícula confinada en un potencial de paredes infinitas. Para ello se suelen hacer analogías entre los billares clásicos y cuánticos. Por ejemplo, una partícula clásica confinada en un billar rectangular sigue trayectorias bien definidas; su movimiento es totalmente determinista e integrable. Una partícula cuántica en un potencial rectangular de paredes infinitas es el análogo cuántico del sistema anterior. Si se estudian las fluctuaciones del espectro energético, se puede observar que se sigue una estadística de Poisson. Por otra parte para el caso de un billar como el de Bunimovich o de Sinai las fluctuaciones estadísticas de su espectro siguen una distribución de Wigner.

Un ejemplo de las distribuciones ajustadas para un billar regular y un billar no regular (caótico) pueden verse en las Figuras 3.4 y 3.5 donde por un lado se muestran las distribuciones de referencia siendo éstas la distribución de Wigner (GOE).

¹El billar de Sinai consiste en un cuadrado al cual se le ha quitado un círculo concéntrico

²El estadio de Bunimovich consiste en dos rectas paralelas de la misma longitud que están unidas por dos semicírculos

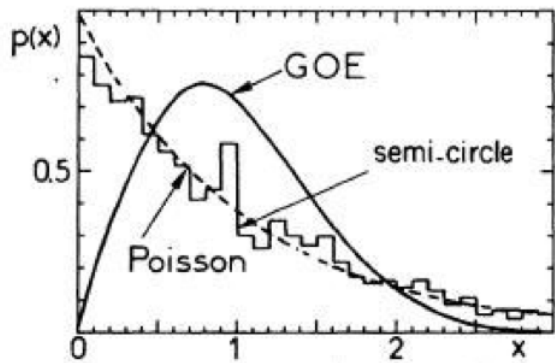


Figura 3.4: Distribución correspondiente a un billar semicircular. Tomado de O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *J. Physique Lett.* 45 pp 1015-1022 (1984)

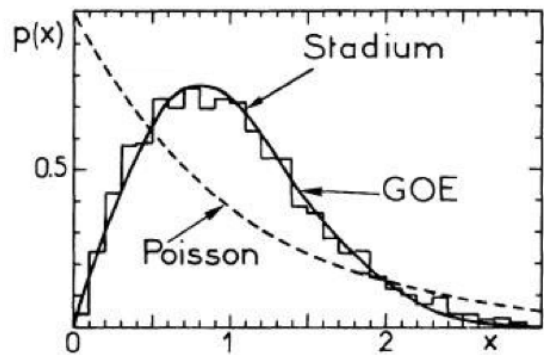


Figura 3.5: Distribución correspondiente a un billar de Bunimovich (estadio). Tomado de O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *J. Physique Lett.* 45 pp 1015-1022 (1984)

3.2.1. Caos cuántico y el experimento de la doble rendija

Como se ha mencionado en la sección anterior, la RMT puede aplicarse para el estudio de los billares regulares y no regulares. En este sentido, debido a la aplicación de RMT en ese tipo de sistemas en esta sección se toma como referencia el artículo [4] en el cual toman el estudio de un billar cuántico para simular numéricamente el experimento de la doble rendija. El propósito de esto es ver la relación que existe entre el comportamiento del billar regular (y no regular) en términos de la interferencia producida en la simulación del experimento de la doble rendija.

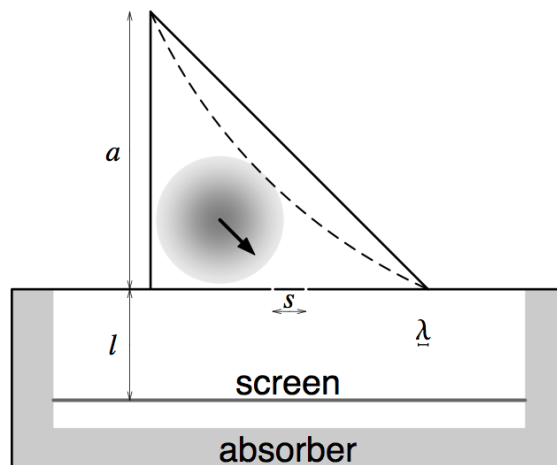


Figura 3.6: Geometría de la simulación numérica experimento de la doble rendija. Tomada de Casati y Prosen. [4]

El artículo [4] lleva por título "Quantum chaos and the double-slit experiment", en donde Giulio Casati y Tomas Prosen llevaron a cabo una simulación numérica del experimento de la doble rendija, tomando como geometría del experimento la Figura 3.6. En base a esa geometría dividen ésta en dos regiones, llamando a la parte superior de la figura dominio del billar y a la parte inferior región radiante.

La región del dominio del billar está conformada por un billar triangular con dos rendijas en la base de dicho triángulo, el estado inicial del sistema $t = 0$ es un paquete de ondas Gaussiano centrado en la parte sombreada

de la Figura 3.6 con una velocidad \bar{v} en dirección al punto medio entre las dos rendijas.

Por otra parte la región radiante está compuesta por una pantalla que se encuentra posicionada a una distancia l de la doble rendija y una capa absorbente que rodea esta región. Así entonces, la simulación consiste en dejar evolucionar temporalmente la función de onda y una pequeña parte del flujo de probabilidad escapará del billar y ésta se irradiará por las rendijas. La probabilidad radiada es registrada en la pantalla, y el experimento llega a su fin cuando la probabilidad de que la partícula permanezca en el billar es muy pequeña.

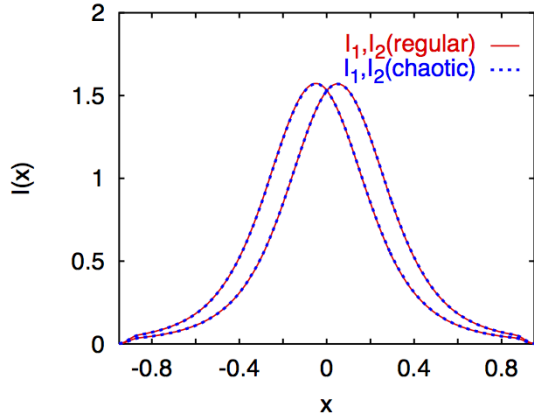


Figura 3.7: Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija (Caso una rendija). Tomada de Casati y Prosen [4].

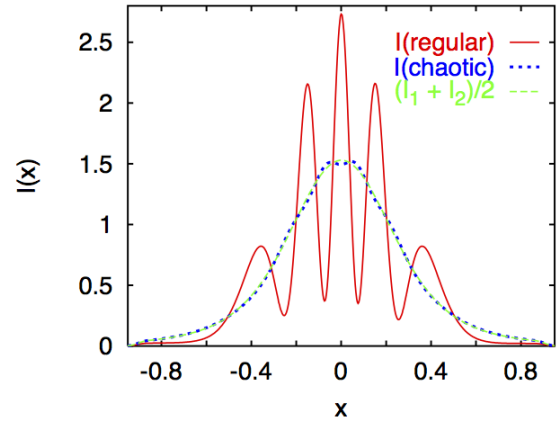


Figura 3.8: Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija. Tomada de Casati y Prosen [4].

De acuerdo con lo anterior, los resultados de la simulación arrojan las curvas de las figuras 3.7 y 3.8, donde en el primer caso representa el experimento de una rendija en el cual como se puede notar obtienen dos curvas. La curva roja representa el caso de un billar regular es decir el billar triangular mostrado en la figura 3.6 y la curva azul corresponde a un billar no regular (caótico) que es el mismo billar triangular pero cambiando la hipotenusa por un arco circular (líneas punteadas) figura 3.6.

Por otra parte, la figura 3.8 muestra los resultados obtenidos para el experimento de la doble rendija donde de igual manera se tomaron dos geometrías correspondientes a un billar regular y un billar caótico. La curva roja representa la intensidad total después de el experimento de la doble rendija para el billar regular y la curva azul corresponde al billar caótico. Además se tiene una tercer curva correspondiente al promedio de las intensidades que obtuvieron para la simulación del experimento de una solo rendija. Como se puede notar, el promedio de las intensidades del experimento de la primer rendija es la misma que para el experimento de la doble rendija.

La conclusión de Casati y Prosen es que para la simulación del experimento de una rendija se obtiene una distribución unimodal simple para las dos geometrías del billar utilizadas. Por otra parte, para el experimento de la doble rendija se obtienen franjas de interferencia que están de acuerdo con el experimento habitual de la doble rendija con ondas planas. Entonces, si el billar cuántico es clásicamente integrable se pueden observar franjas de interferencia en concordancia con el experimento de la doble rendija realizado con ondas planas. Sin embargo, para el caso en que el billar caótico, las franjas de interferencia desaparecen completamente y la intensidad observada es la suma de las intensidades obtenidas para una sola rendija. Los resultados obtenidos por Casati y Prosen muestran la manifestación del caos clásico en mecánica cuántica.

Capítulo 4

Modelo de Capas

El modelo de capas fue propuesto por primera vez por Dimitri Ivanenko [19] en 1932. Años después daría un premio nobel a los físicos Eugene Wigner, Hans Jensen y Maria Geoppert-Mayer [20] en 1963 por sus contribuciones en los términos espín-órbita.

El modelo de capas considera un Hamiltoniano de la forma:

$$\hat{H}_{SM} = \sum_{i=1}^A \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega^2 \hat{r}_i^2 + C \hat{L}_i \cdot \hat{S}_i + D \hat{L}^2 \right) \quad (4.1)$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética, el segundo término al potencial del oscilador armónico y los últimos dos términos corresponden al acoplamiento espín-órbita. A este Hamiltoniano se le llama Hamiltoniano de Nilsson.

El Hamiltoniano utilizado tiene dos partes, una parte monopolar que está compuesta por el potencial del oscilador armónico debido a que la interacción que se ejerce sobre cada uno de los nucleones alrededor de un punto de equilibrio, debido a los demás. Además cuenta con una parte multipolar que describe la interacción a dos cuerpos dada por la interacción cuadrupolar. Podemos notar que el Hamiltoniano de Nilsson representa el Hamiltoniano de campo medio del modelo de capas.

El Hamiltoniano de Nilsson puede ser descrito en segunda cuantización como un término de un cuerpo:

$$\hat{H}_{SM} = \sum_{k,k'} \langle k | \hat{H}_{SM} | k' \rangle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \quad (4.2)$$

donde la idea principal de este modelo es que los núcleos que cumplen con un número de nucleones igual a un número mágico poseen características especiales. Una de ellas es que su energía de amarre es más fuerte, y en caso de no ser un núcleo con capa cerrada, las características principales del núcleo están determinadas por los nucleones de valencia.

Por otra parte, debido a que la descripción teórica del comportamiento del núcleo no está completa tomando como base el Hamiltoniano de Nilsson es decir una parte monopolar con un término de oscilador armónico y de acoplamiento espín órbita se necesita tomar en cuenta interacciones residuales. El modelo de capas resulta ser insuficiente debido a que desprecia correlaciones de dos cuerpos entre los nucleones, dos términos que toman en cuenta correlaciones de largo y corto alcance son el término cuadrupolar y el término de apareamiento, los espectros de energía analizados en este trabajo solo cuentan con el termino cuadrupolar .

Dicho término $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$ es una interacción de largo alcance y es muy útil para predecir las deformaciones del núcleo, como si todos sus elementos estuvieran moviéndose como parte de uno solo. Al ser parte del Hamiltoniano, el término cuadrupolar (cuadrupolo-cuadrupolo) $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$, toma la siguiente forma:

$$\hat{H}_Q = -\frac{\chi}{2} \hat{Q} \cdot \hat{Q} = -\frac{\chi}{2} \sum_{\mu} (-1)^{2-\mu} \hat{Q}_{\mu} \cdot \hat{Q}_{-\mu}. \quad (4.3)$$

Cada uno de los Q son funciones que involucran una dependencia del radio del núcleo y los armónicos esféricos. Cabe mencionar que el término cuadrupolar no es como tal una interacción eléctrica, sino que mas

bien se escoge el término por conveniencia, equivalente al cuadrupolo eléctrico, con dependencia de r^2 para dar simplicidad y permitir interactuar a todas partes como un todo a la vez.

En el modelo de capas nuclear la suposición básica es que, a primer orden, cada nucleón se mueve de manera independiente en un campo promedio[21]. Esto no es así, a priori, ya que el núcleo constituye un problema A-cuerpos que interactúan a través de la fuerza nucleón-nucleón en el medio nuclear. Está claro desde el principio que esta fuerza nucleón-nucleón será diferente de la interacción libre nucleón-nucleón. La forma no relativista de la interacción nucleón-nucleón se comporta como se muestra en la figura 4.1. En general la separación $r = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \approx 1,5 - 2fm$, la fuerza se comporta de acuerdo a un potencial de cambio de un pión (OPEP) [5], que tiene una dependencia analítica en $r = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ de

$$V(r) = -\frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right) \quad (4.4)$$

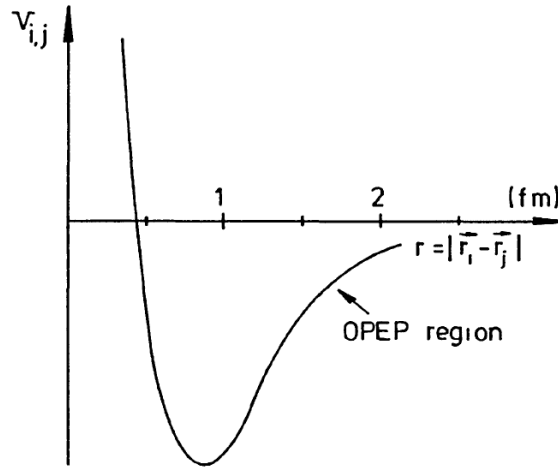


Figura 4.1: Ilustración esquemática de la interacción nucleón-nucleón $V_{i,j}$, como función de la separación entre nucleones $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Tomada de [5].

Para pequeñas distancias la parte atractiva da la vuelta y se vuelve repulsiva a distancias $r < 0,5fm$; siendo este el potencial de núcleo duro.

En el caso atómico, N, Bohr demostró que existe una estructura de capas. Iniciando con un campo promedio de Coulomb $V(r) = -Ze^2/r$, la correspondiente ecuación de Schrödinger de un electrón puede resolverse y las órbitas atómicas pueden resolverse a detalle. De acuerdo con el principio de Pauli, sólo un fermión puede estar en un estado cuántico específico definido por el número cuántico radial (n), y el momento angular orbital (l), total (j) y magnético (m). Para cada j , los $2j + 1$ subestados magnéticos con $-j \leq m \leq j$ son degenerados y forman una estructura de capas dada. Un número de subcapas ahora forma una capa mayor. Átomos con una mayor configuración de capas cerradas de configuraciones que son particularmente estables contra la pérdida del último electrón.

Una descripción similar es posible en el núcleo. Sin embargo, existen algunas diferencias respecto al caso atómico:

- El campo medio nuclear es muy diferente que el potencial de Coulomb. Mas aún, en el núcleo existe un acoplamiento fuerte espín-órbita.
- En el núcleo están presentes protones cercanos y neutrones.
- No hay un punto central preferencial, u otro que no sea el centro de masa del núcleo en contraste con el campo atómico generado por el núcleo atómico.

Debido a las condiciones anteriores, la estructura de capas en el núcleo atómico será muy diferente de la correspondiente estructura de capas en el átomo. A continuación se enuncian una serie de propiedades nucleares que señalan inequívocamente hacia una estructura de capas nuclear y el aumento de la estabilidad nuclear cuando el número de protones Z y el número de neutrones N tiene un cierto valor "mágico".

- 1 Existen desviaciones de la masa nuclear (energía de enlace) del valor medio de la gota líquida.
- 2 Dado que los nucleones se acoplan en $J^\pi = 0^+$ pares acoplado, la forma de excitar núcleos (la energía de excitación del primer estado excitado que es a menudo el estado $J^\pi = 2^+$) como función del número de neutrones de nuevo se correlacionan muy bien con capas cerradas.
- 3 Resultados de pruebas específicas cuando, en reacciones de transferencia de un nucleón (recogiendo o creando una banda), un nucleón se saca o agregado a un núcleo compuesto por la composición de nucleones $A(Z, N)$. En el caso de añadir un protón a ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ vía una reacción (${}^3\text{He}, d$), se puede observar claramente que el protón extra es colocado en una capa específica del modelo nuclear orbital.

Las configuraciones estables de nucleones son determinadas por $N(oZ) = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, (\dots)$. Estos números pueden ser explicados tomando inicialmente una ecuación de Schrödinger de un cuerpo usando un campo central promedio (atractivo) $U(r)$ a la que se le añade un término de interacción espín-órbita fuerte $\zeta l \cdot s$.

Suponiendo que $\psi_1(\mathbf{r})$ ($a = n_a, l_a, j_a, m_a, \dots$) son soluciones a la ecuación de Schrödinger para un cuerpo (donde \mathbf{r} es la notación para todas las coordenadas, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, \dots$), entonces

$$H = [T + U(r)] \psi_a = \epsilon_a \psi_a(\mathbf{r}). \quad (4.5)$$

donde T describe la energía cinética, $U(r)$ el campo promedio y ϵ_a la energía de una partícula. Las condiciones de ortogonalidad requieren que.

$$\int \psi_a^*(r) \psi_b(r) dr = \delta_{ab}. \quad (4.6)$$

El modelo Hamiltoniano para A nucleones (considerados partículas independientes) se puede escribir de la siguiente manera:

$$H^0 = \sum_{i=1}^A (T_i + U(r_i)). \quad (4.7)$$

y sus eigenfunciones son:

$$\Phi_{a_1, a_2, \dots, a_A}(1, 2, 3, \dots, A) = \prod_{i=1}^A \phi_{a_i}(r(i)). \quad (4.8)$$

con valores propios

$$E_0 = \sum_{i=1}^A \epsilon_{a_i}. \quad (4.9)$$

Para un sistema de partículas idénticas, la función de onda anterior no está bien estructurada. Para ello se necesita considerar que las partículas son indistinguibles, es decir la función de onda es antisimétrica ante el cambio de partículas. La función de onda para dos partículas considerando lo anterior es la siguiente:

$$\Phi_{a_1, a_2}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{a_1}(r_1) \phi_{a_2}(r_2) - \phi_{a_1}(r_2) \phi_{a_2}(r_1)). \quad (4.10)$$

y en su forma de determinante de Slater

$$\Phi_{a_1, a_2}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_{a_1}(r_1) & \phi_{a_1}(r_2) \\ \phi_{a_2}(r_1) & \phi_{a_2}(r_2) \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

donde el campo promedio expresado por el potencial $U(r)$ no está dado explícitamente. Por lo que se puede iniciar con el Hamiltoniano de A-nucleones

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V_{i,j}. \quad (4.12)$$

restringido sólo a interacciones entre dos cuerpos. Para escribir el Hamiltoniano podemos expresarlo como

$$H = \sum_{i=1}^A [T_i + U(r_i)] + \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V_{ij} - \sum_{i=1}^A U(r_i) \right) = H_0 + H_{res} = \sum_{i=1}^A h_0(i) + H_{res}. \quad (4.13)$$

donde H_0 describe el movimiento de A nucleones, independientes entre sí en el mismo campo promedio.

La interacción residual entre dos cuerpos es la responsable de la estructura del núcleo; a esta interacción residual suele llamarse correlación. Dicha correlación puede inducir coherencia (movimientos colectivos). El movimiento colectivo de partículas independientes, se genera a las correlaciones de dos cuerpos.

El modelo de capas es la teoría más completa que se tiene para describir el núcleo atómico y sus excitaciones a baja energía. La investigación de los efectos que el caos cuántico tiene en los eigenvalores y eigenvectores de las matrices del modelo de capas es fundamental para entender qué efectos tiene el caos en la física nuclear. Al ser el modelo de capas una teoría realista sobre un sistema de muchos cuerpos que interactúan fuertemente es un sistema ideal para el estudio del caos cuántico.

Se supone al núcleo atómico compuesto de Z protones y N neutrones que interactúan mediante fuerzas a dos cuerpos y obedecen la ecuación de Schrödinger. La energía, el momento angular total y la paridad se conservan en el núcleo atómico. Un autoestado viene caracterizado por los tres números cuánticos E_n , J^π , donde J es el momento angular total y $\pi = +-$ es la paridad

$$H\Phi(1, \dots, A) = \left[\sum_{k=1}^A T(k) + \sum_{1=k<l}^A W(k, l) \right] \Psi(1, \dots, A) = E\Phi(1, \dots, A) \quad (4.14)$$

siendo $A = N + Z$ el número total de nucleones.

En una primera aproximación se considera que cada nucleón se mueve independientemente en un potencial que representa la interacción media del resto de nucleones.

$$H = \sum_{k=1}^A [T(k) + U(k)] + \left[\sum_{1=k<l}^A W(k, l) - \sum_{k=1}^A U(k) \right] = H^{(0)} + H^{(1)}. \quad (4.15)$$

$H^{(0)}$ representa el movimiento de partículas independientes y $H^{(1)}$ la interacción residual debido a que las partículas no se mueven de manera completamente independiente.

En el núcleo atómico esta interacción residual es muy fuerte, de intensidad comparable al campo medio. La imagen del modelo de capas en el núcleo parece incompatible con la intensidad de la interacción residual. Sin embargo, existe gran cantidad de información experimental indicando la existencia de un comportamiento de este tipo, por ejemplo, los números mágicos y los momentos magnéticos.

4.1. Espacio de Fock

La aproximación de orden cero para el problema nuclear viene dada por el campo medio esférico. Sus órbitas se utilizan como base para el espacio de números de ocupación, el espacio de Fock. Se tienen estados de partículas independientes i, j, \dots con energías $\epsilon_i, \epsilon_j, \dots$. Cada estado tiene asociado un momento angular que además indica su degeneración. Los estados de la base del espacio de Fock son los determinantes de Slater, funciones de onda de A partículas normalizadas y antisimetrizadas. Cualquier estado del espacio de Hilbert se puede expresar

como combinación de determinantes de Slater.

4.2. Carozo inerte y espacio de valencia

En el modelo de capas la base que se utiliza para diagonalizar el problema del núcleo atómico es el de campo medio. Para realizar los cálculos del modelo de capas se dividen las infinitas órbitas del campo medio en tres conjuntos:

- **El carozo inerte:** Se compone de las órbitas mas bajas en energía que se suponen siempre llenas en el modelo. Los nucleones que ocupan estas órbitas no se tienen en cuenta en el cálculo excepto para renormalizar la interacción efectiva.
- **El espacio de valencia:** Lo constituyen las órbitas en las que se pueden mover los nucleones de valencia, que son los que no están en el *carozo*. Los nucleones de valencia se mueven de acuerdo con la interacción efectiva ocupando parcialmente las órbitas en este espacio.
- **El espacio externo:** Compuesto por las órbitas mas altas en energía que suponemos que están siempre vacías en el problema que deseamos estudiar.

Se debe encontrar el espacio de valencia apropiado para resolver el núcleo en cuestión. Los espacios de valencia suelen estar comprendidos entre dos números mágicos. Las órbitas en esos casos tienen una separación muy grande en energía y se pueden considerar para energías de excitación bajas.

4.3. Interacciones efectivas en el espacio de valencia

Cuando resolvemos nuestro problema en un espacio de valencia reducido, debemos regularizar la interacción para que tenga en cuenta de forma apropiada las configuraciones que hemos omitido,

$$H_{ef}\Phi_{ef} = H\Phi. \quad (4.16)$$

El principal problema que representan las interacciones efectivas encontradas con este método son su mala propiedad de saturación.

Una vez que tenemos la interacción efectiva, el problema del modelo de capas se reduce a la diagonalización del Hamiltoniano en el espacio de valencia. Para construir la matriz Hamiltoniana utilizamos la base del espacio de Fock. Para que el modelo de capas tenga sentido, su estructura no debe ser completamente borrada al introducir la interacción residual.

Si utilizamos el acoplamiento jj , la interacción efectiva se puede escribir como,

$$\sum_i t_i + \sum_{ijkl} W_{ijkl}^\Gamma [a_i^+ a_j^+]^\Gamma [a_k a_l]^\Gamma. \quad (4.17)$$

donde Γ representa el par de números cuánticos J, T correspondiente al momento angular y al isoespín y $W_{ijkl}^\Gamma = \langle ij(JT) | V_{eff} | kl(JT) \rangle$. Las funciones de onda deben tener los números cuánticos apropiados a las simetrías del Hamiltoniano.

Capítulo 5

Métodos de cuantificación de la complejidad

5.1. Espectro de potencias

5.1.1. Rectificación del espectro de energías

Para llevar a cabo el análisis estadístico de las fluctuaciones es necesario llevar a cabo un procedimiento de rectificación. La rectificación permite comparar las fluctuaciones de espectros de distintos sistemas o de distintas partes de un espectro. La densidad de estados de un sistema cuántico se puede dividir en una parte suave $\bar{\rho}(E)$ y una parte fluctuante $\tilde{\rho}(E)$. El estudio de las fluctuaciones estadísticas como índices del caos en mecánica cuántica se basa en que la parte fluctuante de la densidad presenta propiedades universales, que dependen solamente de si el sistema es caótico o integrable. Esto se debe a que en la cuantización, la parte suave de la densidad de niveles contiene básicamente información clásica, de modo que no puede servir para caracterizar la universalidad del caos en la mecánica cuántica. Para llevar a cabo el análisis de las fluctuaciones es necesario remover la contribución de $\bar{N}(E)$ del espectro de energías; esto se logra rectificando el espectro globalmente de manera que $\tilde{N}(E) = 1$. Entonces, renombrando las energías para enfatizar el mapeo.

$$E_i \rightarrow \epsilon_i \equiv \tilde{N}(E_i), i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

donde $\tilde{N}(E_i)$ es una función de ajuste suave de la función de densidad $N(E_i)$. El espaciamiento es calculado como $s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i$ para $i = 1, 2, \dots, N-1$. Además las fluctuaciones del espectro pueden definirse de la siguiente manera:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = [\epsilon_{n+1} - \epsilon_1] - n\langle s \rangle. \quad (5.2)$$

La función δ_n contiene las desviaciones de la distancia entre el primer estado y el $n+1$ estado reescalado, relacionando la distancia correspondiente en una secuencia uniforme teniendo una unidad de distancia por nivel $\langle s \rangle = 1$.

Así, la secuencia presentada en la ecuación 5.2 se puede interpretar como una serie discreta de tiempo.

Las fluctuaciones en la densidad de niveles $\tilde{N}(E) = N(E) - \bar{N}(E)$ se pueden caracterizar con diferentes métodos estadísticos. Las correlaciones de corto alcance se pueden estudiar con la distribución de probabilidad a primeros vecinos $P(s)$. Por otro lado las correlaciones de largo alcance se pueden caracterizar con otras estadísticas como Σ_2 y Δ_3 . Por otra parte se pueden interpretar las fluctuaciones rescaladas $\tilde{N}(E)$ [22] como una serie de tiempo generalizada, la cual puede ser analizada con métodos especializados para el estudio de señales temporales. Dentro de estos métodos se encuentran el análisis tipo Fourier [23][24], wavelets [25] y Detrended Fluctuation Analysis (DFA) [26]. Se ha demostrado que fluctuaciones de niveles que obedecen la estadística GOE se comportan como ruido $1/f$, mientras que fluctuaciones que siguen la estadística GDE se comportan como ruido Browniano $1/f^2$. Y para casos intermedios se comporta como ruido $1/f^\beta$ con $1 < \beta < 2$ [27].

5.1.2. Ruido $\frac{1}{f}$

Las series temporales de una determinada magnitud suelen utilizarse para estudiar diversos fenómenos. Una de las técnicas más habituales en el análisis de series temporales es la transformada de Fourier, con la cual se obtiene la representación temporal en el espacio de frecuencias:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5.3)$$

siendo $\tilde{f}(\omega)$ la señal transformada y $f(t)$ es la señal original, que puede obtenerse de nueva cuenta a partir de la transformada mediante:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.4)$$

En lugar de analizar directamente la transformada de Fourier, se define el espectro de potencias como el modulo al cuadrado de éste:

$$P(\omega) = \left| \tilde{f}(\omega) \right|^2. \quad (5.5)$$

Cuando una señal cumple que su espectro de potencias sigue:

$$\langle P(\omega) \rangle \propto \omega^{-\beta} \quad (5.6)$$

se dice que la señal es invariante bajo cambios de escala:

$$\langle P(\lambda\omega) \rangle \propto \omega^{-\beta}. \quad (5.7)$$

También se dice que la señal presenta un ruido $1/f^\beta$.

A partir de la secuencia de espaciamentos 5.2 y considerando entonces la δ_n como una señal temporal se puede calcular su serie de Fourier y su espectro de potencias. En este caso al tener una serie de tiempo discreta, la transformada de Fourier para una serie de este tipo está dada por la siguiente expresión:

$$\hat{\delta}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_n \delta_n \exp\left(\frac{-2\pi kn}{m}\right) \quad (5.8)$$

cuyo espectro de potencias sería:

$$P_k = \left| \hat{\delta}_k \right|^2 \quad (5.9)$$

y la evidencia de un ruido $1/f^\alpha$ se expresa como:

$$\langle P_k \rangle \propto \frac{1}{k^\alpha}. \quad (5.10)$$

El caos cuántico y el ruido $1/f$, conceptos y métodos de procesos estocásticos y física estadística fuera de equilibrio juegan un rol importante en RMT. La característica principal del espectro de energía caótico en sistemas cuánticos es la existencia de repulsión y correlaciones entre niveles de energía. Las funciones de correlación y otras estadísticas relacionadas, comúnmente utilizadas en RMT, se toman de esta disciplina para estudiar esta característica [28].

De acuerdo con $1/f^\beta$ los ruidos más encontrados en la naturaleza, son $\beta = 2$ correspondiente a ruido térmico (o también llamado ruido Browniano), $\beta = 1$ que corresponde a ruido caótico y el ruido de Poisson $\beta = 0$. En [22] se muestra una propuesta para el estudio del caos cuántico mediante los análisis de series temporales y se propone la siguiente conjetura: *El espectro de energía de los sistemas cuánticos caóticos está caracterizado por un ruido $1/f$.*

El ruido $1/f$ es universal para cualquier sistema cuántico caótico independientemente de sus simetrías. Por otra parte, los espectros de sistemas cuánticos integrables vienen caracterizados por un ruido $1/f^2$. En contraste

con la conjetura BGS ésta no requiere mas información que el espectro de energía del sistema, por lo que no se hace referencia a las propiedades de otros sistemas como al GOE en la conjetura BGS. [29].

5.1.3. Leyes de potencias

Una de las principales características del caos en sistemas Hamiltonianos es la complejidad de las trayectorias en el espacio fase, que no constituyen necesariamente un movimiento periódico ni multiperódico, dependiendo claro de las condiciones iniciales. A pesar de ello, no todo es desorden debido a que hay algunas estructuras simples que emergen del comportamiento complejo. Además de los sistemas Hamiltonianos, en la naturaleza existen una gran cantidad de fenómenos muy complejos en los que de una manera u otra, se manifiesta el caos tales como los sistemas biológicos, sistemas sociales entre otros, donde una característica principal entre ellos es su trayectoria.

La autosimilaridad es una de las propiedades presentes en todos los fenómenos relacionados con el caos. Este fenómeno consiste en la invarianza frente al cambio de escala. Debido a que los sistemas presentan un comportamiento similar a escalas grandes y pequeñas, el grado y tipo de orden es el mismo, es decir la autosimilaridad significa que un objeto en unidades, sub-unidades y sub-sub-unidades en varios niveles, que estadísticamente tienen una estructura similar a la del objeto completo. En realidad, ningún objeto físico presenta autosimilaridad matemática, debido a que aparece una escala límite por ejemplo, la constante de Planck, la velocidad de la luz, entre otras; aun así se puede definir y estudiar la autosimilaridad en un rango finito de escalas.

La autosimilaridad se expresa matemáticamente mediante las leyes de potencias. Considérese un sistema descrito por la siguiente ley:

$$f(x) = cx^\alpha. \quad (5.11)$$

donde c, α números reales y constantes, y x es una variable dentro de los números reales. Si se estudia el mismo sistema en una escala diferente $y = \lambda x$, la ley que describe el sistema sigue siendo la misma, excepto por una constante:

$$f(\lambda x) = c\lambda^\alpha x^\alpha = \lambda^\alpha f(x). \quad (5.12)$$

con λ cualquier constante numérica distinta de cero. Por lo que se puede decir que las leyes de potencias son invariantes de escala. Si se toma el logaritmo de ambos lados de la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$\log f(x) = \log c + \alpha \log x. \quad (5.13)$$

La ley de potencia $f(x)$ decrece lentamente a cero cuando x crece hacia infinito, por lo que tiene la propiedad de ser observada por igual, sin importar la escala escogida. Las leyes de potencias aparecen en la física desde leyes sencillas como la gravedad newtoniana o en fenómenos complejos como transiciones de fase.

5.2. Análisis de niveles de energía a primeros vecinos

La RMT se enfoca en estudiar las fluctuaciones espectrales para dar resultados universales. El nivel de dichas fluctuaciones está dado por las funciones de correlación. Para comparar los resultados obtenidos con los resultados generales de la RMT se debe realizar el proceso de reescalado anteriormente tratado en la sección 5.1.1. Las fluctuaciones del espectro se miden mediante estadísticos; según Mehta, se define un estadístico espectral como un número W que puede calcularse utilizando solamente una secuencia de niveles sin mas información.

Dada una secuencia de niveles $\epsilon_{i=1, \dots, N-1}$, ordenada en orden creciente de energía, los espaciamentos a primeros vecinos se definen como:

$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, i = 1, \dots, N - 1 \quad (5.14)$$

donde los espaciamentos son siempre positivos, debido a que la secuencia de niveles está siempre ordenada $i < j \Rightarrow \epsilon_i < \epsilon_j$. La distribución de probabilidad de estos espaciamentos es una estadística que sirve para caracterizar la repulsión entre niveles, es decir si en un espectro de energías existe repulsión la probabilidad de que existan espaciamentos nulos (la probabilidad de que dos niveles de energía tengan el mismo valor) es cero; por

otra parte si no existe repulsión en el espectro, los niveles están descorrelacionados y la probabilidad de encontrar dos estados con la misma energía no es cero, esto es, hay una probabilidad de que existan espaciamientos nulos.

Berry[30] utilizó este tipo de estadística para demostrar que en los sistema integrables los niveles están descorrelacionados. Así consiguió demostrar que la distribución de espaciamientos a primeros vecinos en este tipo de sistemas seguía una distribución de Poisson:

$$P(s) = e^{-s}. \quad (5.15)$$

Esta distribución proviene de una secuencia de variables aleatorias independientes. Y se puede notar que $P(0) \neq 0$. La $P(s)$ correspondiente a las colectividades gaussianas puede calcularse a partir de las distribuciones de eigenvalores correspondientes; Cabe mencionar que este cálculo es muy complicado. En lugar de considerar matrices de dimensión arbitraria Wigner[31] lo realizó para matrices de dimensión 2 y obtuvo las siguientes expresiones:

$$P(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) & , \quad GOE \\ \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right) & , \quad GUE \\ \frac{3^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right) & , \quad GSE \end{cases} \quad (5.16)$$

siendo éstas muy buenas aproximaciones para matrices de dimensión arbitraria, donde se puede observar que si existe repulsión $(P(0)) = 0$. Estas son las distribuciones de espaciamiento a primeros vecinos propias de los sistemas caóticos, según la conjetura BGS [6].

En la figura 5.1 se muestran distintas secuencias de espaciamiento de niveles; dependiendo de cómo se van desarrollando las secuencias de niveles se tiene una estadística diferente. Como se puede observar en la figura hay distintas secuencias en donde se puede destacar la secuencia correspondiente a niveles sin correlación entre otras, con el análisis de espaciamientos a primeros vecinos se pueden analizar los espaciamientos una secuencia dada, que en el caso de esta tesis se tiene una secuencia de niveles de energía.

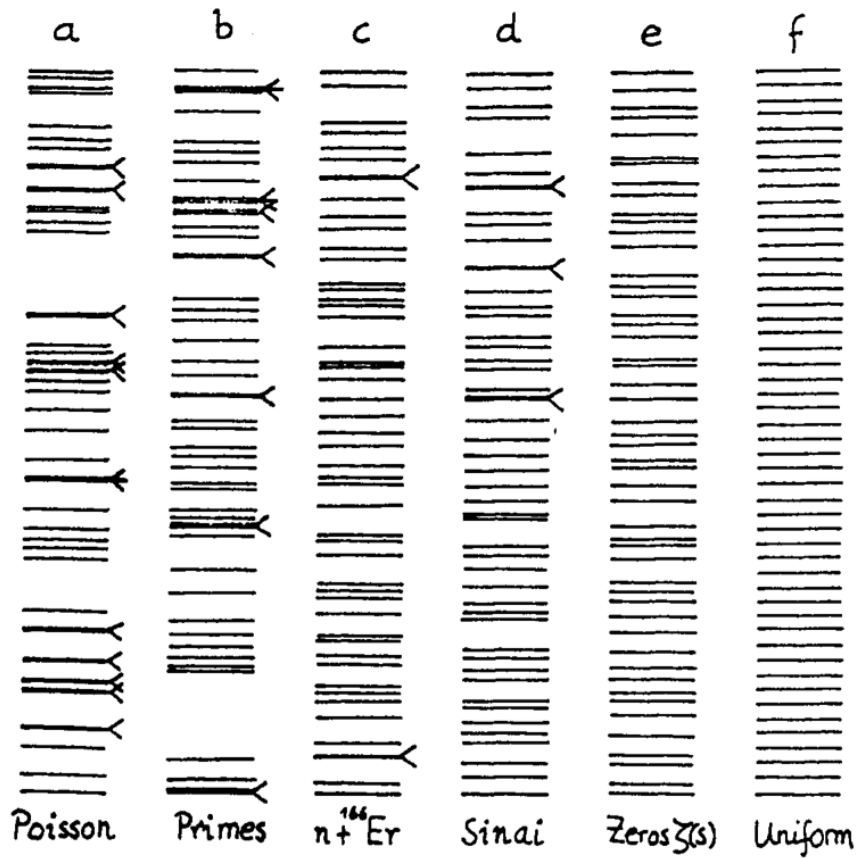


Figura 5.1: Secuencias de espaciamento típicas tomado de Bohigas and Giannoni [6]. a) Niveles aleatorios sin correlación, series de Poisson. b) Secuencia de números primos. c) Resonancia de niveles de neutrones lentos del núcleo de ^{166}Er . d) Posibles niveles de energía de una partícula libre moviéndose dentro de un área delimitada por $1/8$ de un cuadrado y un arco circular cuyo centro es el punto medio del cuadrado; y con área especificada por las desigualdades, $y \geq 0$, $x \geq y$, $x \leq 1$ y $x^2 + y^2 \geq r$. (Billar de Sinai). e) Los ceros de la función zeta de Riemman en la línea $\text{Re}\zeta = 1/2$. f) Secuencia de niveles espaciados de forma uniforme.

5.3. Interferencia de estados nucleares

El concepto de coherencia es relacionado muchas veces de manera inmediata en el campo de la óptica, en donde se estudian los patrones de interferencia obtenidos por fuentes de luz. En este trabajo se busca hacer un análogo en cuanto a la interferencia de estados nucleares y la visibilidad en éstos haciendo un énfasis en la pérdida de coherencia en términos de la visibilidad.

La coherencia en óptica expresa una idea principal, la naturaleza estadística de las ondas de luz que existen en la naturaleza. Las ondas de luz en mayor o menor manera son fluctuantes por su propia naturaleza. Esto debido a que la luz se genera mediante los electrones libres o ligados en átomos y la dinámica hasta cierto punto aleatoria presente en los átomos e iones en gases y de los electrones en sólidos que se traslada en consecuencia a la luz que éstos generan.

Dicha aleatoriedad tiene consecuencias en todos los campos de la óptica siendo algunos casos la polarización e interferencia. La polarización es la coherencia entre dos ondas de luz que vibran perpendicularmente y ésta se mide mediante el grado de polarización. Por otra parte la interferencia es la coherencia entre dos ondas que vibran en direcciones no ortogonales (regularmente en la misma dirección) y ésta se mide mediante la visibilidad o el grado de coherencia. De hecho, el grado de coherencia, polarización y visibilidad están mutuamente relacionados, ya que el grado de polarización entre dos componentes E_1 y E_2 es el máximo grado de coherencia y la máxima visibilidad que se pueda conseguir entre dos ondas que se obtengan de E_1 y E_2 conservando la energía total.

Hay distintas formas de interpretar la coherencia. Una de ellas es identificar la coherencia con correlaciones entre campos eléctricos, de hecho el grado de coherencia usual es el grado de correlación entre dos campos eléctricos $\langle E_1 E_2^* \rangle$ siendo ésta la representación compleja donde se expresa el promedio sobre conjuntos o realizaciones del experimento. Por otra parte una segunda interpretación entiende la coherencia como la visibilidad de la interferencia donde las dos ondas en cuestión se superponen.

La diferencia entre un estado coherente y un estado no coherente puede expresarse en términos de la anchura espectral, donde la anchura espectral es inversamente proporcional a la medida de coherencia y por otra parte una mayor coherencia implica un mayor grado de interferencia y mayor pureza en los estados. En el modelo nuclear, la coherencia de los estados sigue una regla parecida al caso óptico, donde una menor configuración de mezclado (mayor pureza en los estados) implica una gran coherencia. Así entonces podemos definir la visibilidad de la distribución de energía como:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (5.17)$$

donde I_{max} e I_{min} hacen referencia a las intensidades (o números de cuentas) de un pico consecutivo a un valle en la distribución. La interferencia en los estados nucleares está determinada por la simetría presente en el Hamiltoniano ocupado para obtener el espectro de energías, es decir, con este método se pretende establecer la relación existente entre un patrón de interferencia de los estados nucleares y la presencia de un comportamiento regular o caótico en los niveles de energía. Así, un comportamiento regular en los estados nucleares estaría determinado por la máxima visibilidad debido a que si la visibilidad es máxima, en base a las consideraciones hechas de acuerdo a la ecuación 5.17, los estados de energía están más puros debido a que la parte que de interacción cuadrupolar es la que deforma el núcleo y hace que los niveles de energía se empiecen a mezclar teniendo en ese caso una visibilidad menor.

Capítulo 6

Caos cuántico, espectro nuclear del ^{48}Ca

En este trabajo se analizaron los espectros de energía correspondientes al núcleo de ^{48}Ca . Dichos espectros se obtuvieron utilizando el modelo de capas nuclear (en el Apéndice A se muestra de manera esquemática cómo se obtuvieron los espectros de energía), para poder aproximar de esta manera la dinámica del núcleo. El modelo utilizado está compuesto por un Hamiltoniano esquemático, que es una versión simplificada del modelo de capas con una parte de interacción monopolar y una parte multipolar, que son lo suficientemente adecuadas para una descripción aproximada pero realista del comportamiento del núcleo. En este sentido seleccionando un Hamiltoniano de interacción adecuado \hat{H}_{SM} , y un método computacional confiable [32], se puede estudiar el comportamiento de algunas observables en función de un conjunto de condiciones iniciales con el cual se puede dar seguimiento a la transición de diferentes regímenes. En este sentido, el propósito es estudiar cómo evolucionan los distintos parámetros de cuantificación del caos cuántico mencionados en el capítulo 5 (espectro de potencias, las correlaciones de corto alcance $P(s)$ y la visibilidad), poniendo atención en aquellas regiones donde existan transiciones:

$$\hat{H}_{SM} = \hat{H}_{monopolar} + \hat{H}_{multipolar} = H_0 - \chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}. \quad (6.1)$$

La parte monopolar está basada en el potencial del oscilador armónico haciendo una aproximación de un campo medio donde los nucleones interactúan independientemente; por otra parte la parte multipolar es aproximada por dos términos de interacción entre dos cuerpos y sin tomar en cuenta interacciones de orden superior, donde el Hamiltoniano H_0 es el Hamiltoniano de partícula independiente no perturbado y describe a los fermiones sin interacción en el campo promedio de un núcleo esférico, correspondiente a un sistema integrable. El segundo término $\chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}$ describe una interacción residual de dos cuerpos cuadrupolo cuadrupolo, que en el caso del núcleo estudiado ^{48}Ca actúa sobre ocho neutrones de valencia en la capa fp, siendo esta parte por si misma también integrable. Los estados nucleares analizados fueron para el subespacio $J^\pi = 3^+$. El coeficiente χ modula la intensidad de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, y es la que da lugar a la repulsión de los niveles del espectro de energías nuclear.

Así entonces los espectros analizados, fueron obtenidos aumentando la magnitud de la interacción $\chi = 0.005, 0.01, 0.04, 0.07, 0.11, 0.15, 0.18, 0.21, 0.25$, teniendo un total de 9 interacciones es decir 9 espectros de energías con un total de 1627 estados.

La figura ?? muestra la gráfica de las energías obtenidas para cada una de las interacciones χ mencionadas anteriormente. El eje y corresponde a las energías en MeV, y en el eje x se tienen el número de estados n .

De acuerdo con la Figura ??, lo primero que se puede destacar es que mientras la interacción es pequeña, se presentan pequeños saltos en las energías. Sin embargo, mientras la interacción se va haciendo más grande estos saltos en las energías dejan de estar presentes. Además de presentar los saltos en los valores de la energía para interacciones bajas, también se puede destacar que la pendiente de las curvas del espectro de energías va creciendo conforme a la interacción.

Los saltos presentes en las energías se suavizan desde la interacción $\chi = 0,07$ en adelante, lo cual se puede observar más claramente en las Figuras 6.1- 6.10 mostrando así que una interacción débil cambia la estadística

entre energías cercanas.

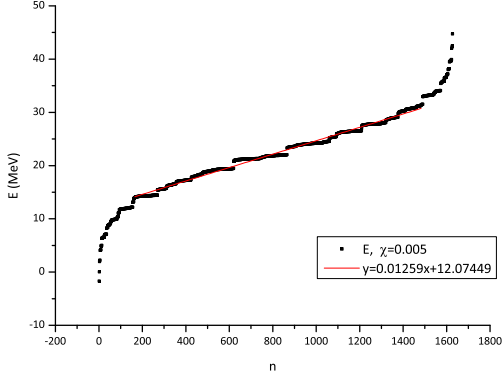


Figura 6.1: Espectro de energía para $\chi = 0,005$.

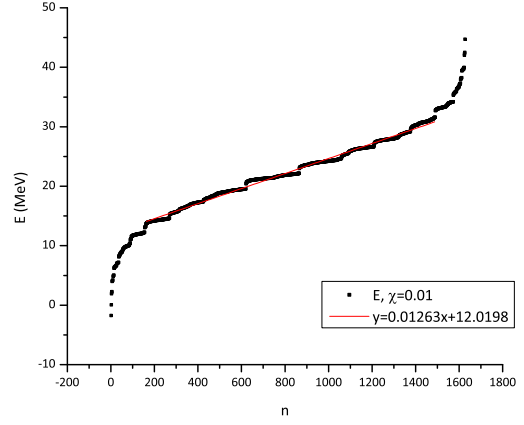


Figura 6.2: Espectro de energía para $\chi = 0,01$.

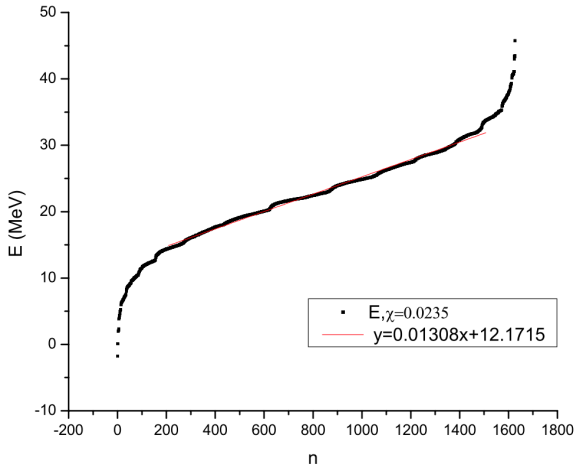


Figura 6.3: Espectro de energía para $\chi = 0,0235$.

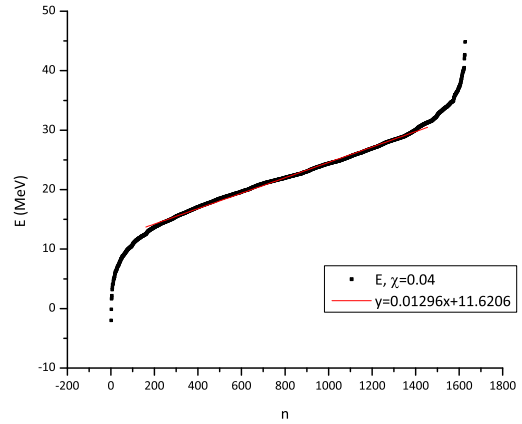


Figura 6.4: Espectro de energía para $\chi = 0,04$.

Con las gráficas mostradas anteriormente además de por una parte notar el comportamiento de las energías bajo el cambio en aumento del valor de interacción en el Hamiltoniano del modelo ocupado se obtuvieron las pendientes correspondientes a cada espectro de energías, obteniendo en este sentido un valor correspondiente al cambio en el espectro para cada valor de interacción. Las pendientes se evaluaron en la parte central del espectro, considerando la parte lineal de cada uno de los espectros.

Si bien las curvas obtenidas para las energías no muestran en todos los casos un comportamiento suave tanto por las regiones en donde se presentan los saltos en la energía como en la parte inicial y final de la curva, el ajuste lineal obtenido se realizó considerando la parte central de la curva descartando así las partes iniciales y finales de la curva. El conjunto de pendientes obtenidas se pueden observar en la Figura 6.11, donde el eje y corresponde a las pendientes obtenidas y el eje x corresponde a el valor de la interacción.

Debido a que el término $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$ es útil para predecir las deformaciones del núcleo, los valores esperados de

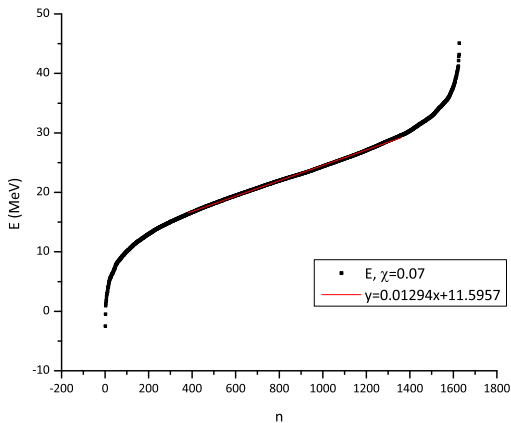


Figura 6.5: Espectro de energía para $\chi = 0,04$.

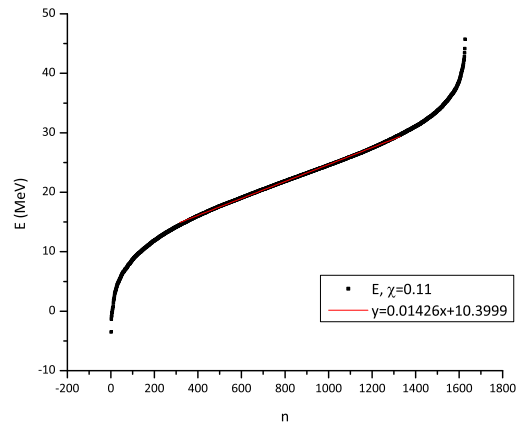


Figura 6.6: Espectro de energía para $\chi = 0,11$.

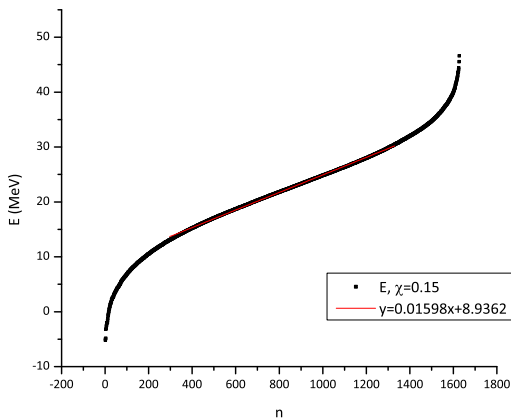


Figura 6.7: Espectro de energía para $\chi = 0,15$.

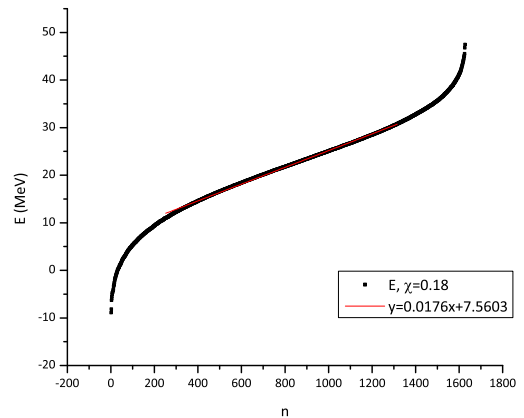


Figura 6.8: Espectro de energía para $\chi = 0,18$.

cada una de las componentes de dicho operador proporcionan información acerca de la deformación del núcleo. Existen 4 tipos de deformación cuadrupolar: oblata, prolata, triaxial y esférica [33]. Cada una de ellas se presenta mediante ciertas condiciones específicas que se deben cumplir.

En este trabajo no se hace un estudio de la geometría del núcleo como tal, es por eso que en base al Hamiltoniano esquemático utilizado en el cual se encuentra presente la interacción cuadrupolar, podemos decir que el núcleo tratado en este caso ^{48}Ca es un núcleo deformado, cuya deformación está dada por el término cuadrupolar y como se ha mencionado anteriormente, el parámetro que nos da indicios del nivel de deformación es χ . Aún mas, debido a que la parte monopolar del Hamiltoniano está compuesta por términos del oscilador armónico y acoplamiento espín-órbita, sabemos que si el Hamiltoniano sólo estuviera constituido por la parte monopolar la geometría del núcleo sería esférica y sus niveles de energía estarían degenerados. Sin embargo, en el modelo utilizado no sólo se tiene la parte monopolar sino que cuenta también con la parte cuadrupolar. Los espectros de energía obtenidos cuando el parámetro χ es pequeño presentan degeneraciones las cuales están presentes por ejemplo en el oscilador armónico; en este caso los saltos que se pueden observar en las gráficas

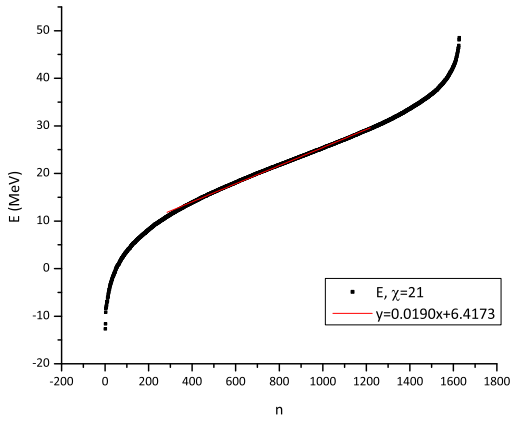


Figura 6.9: Espectro de energía para $\chi = 0,21$.

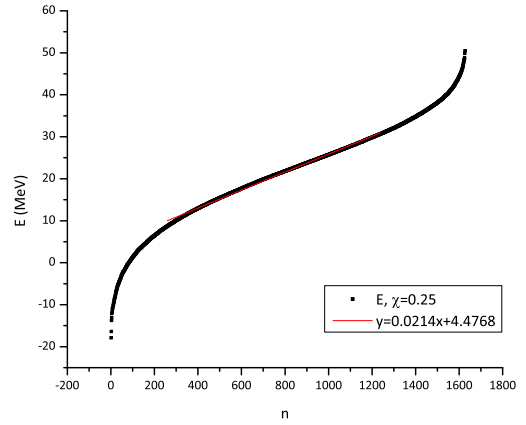


Figura 6.10: Espectro de energía para $\chi = 0,25$.

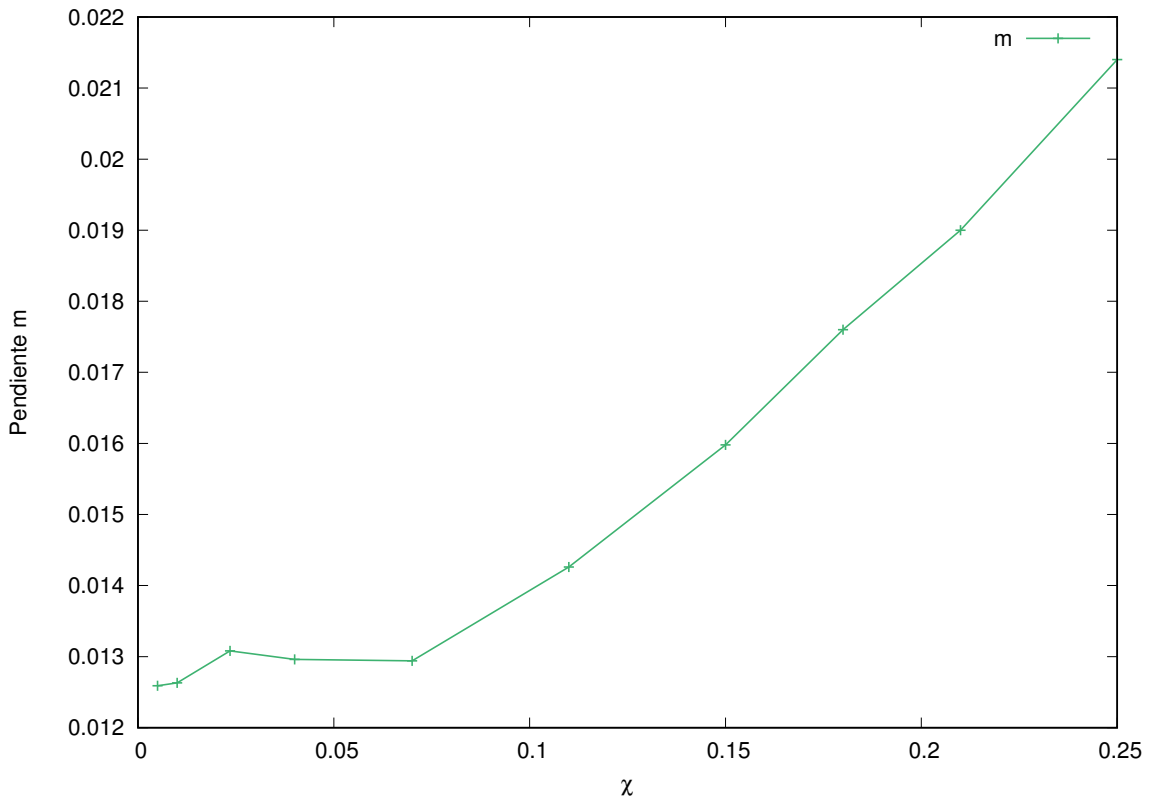


Figura 6.11: Pendientes de los espectros de energía en función de la interacción χ .

de los espectros de energía muestran eso, estados de energía degenerados lo cual concuerda con el hecho de que éstos sólo están presentes para valores de interacción cuadrupolar pequeños. Por lo que retomando lo establecido por el modelo de Nilsson al considerar un potencial distinto o una interacción extra en el Hamiltoniano, tal como la interacción cuadrupolar, dichas degeneraciones hacen que los niveles de energía aumenten de manera

que la dinámica de los niveles de energía se hace compleja. Por lo que regresando a los resultados obtenidos, podemos notar que cuando el valor de χ es mas grande, dichos niveles de energía degenerados desaparecen. Por lo cual la complejidad en los estados nucleares del ^{48}Ca está dada por el término de interacción cuadrupolar, y sus implicaciones han sido observadas en los espectros de energía obtenidos, además de dar un indicio de la geometría del núcleo dado por la naturaleza misma del modelo utilizado.

6.1. Espectro de potencias

Una vez teniendo las energías correspondientes a cada interacción se analizaron las series de tiempo. Dichas series de tiempo se trataron utilizando el análisis del ruido en las fluctuaciones de las series de tiempo. Para ello se obtuvo la transformada de Fourier de las series de tiempo, obteniendo así las frecuencias características, y después se graficaron las amplitudes de frecuencias contra las frecuencias características para así obtener el factor de correlación. El procedimiento anteriormente realizado se llevó para cada una de los espectros de energía [34].

En las Figuras 6.12- 6.21, se muestran los espectros de potencias obtenidos donde el eje y corresponde al $\log P(f)$ siendo las intensidades de las frecuencias características y el eje x corresponde a las frecuencias características $\log f$.

Del espectro de potencias se obtuvo el factor de correlación β siendo éste el ajuste lineal en cada una de las gráficas.

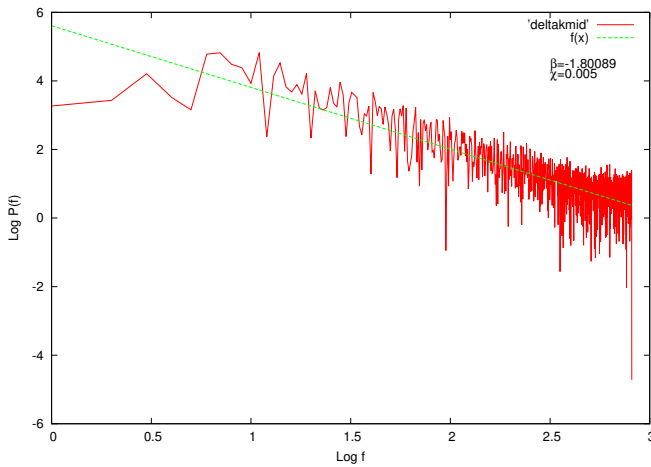


Figura 6.12: Espectro de potencias para $\chi = 0,005$.

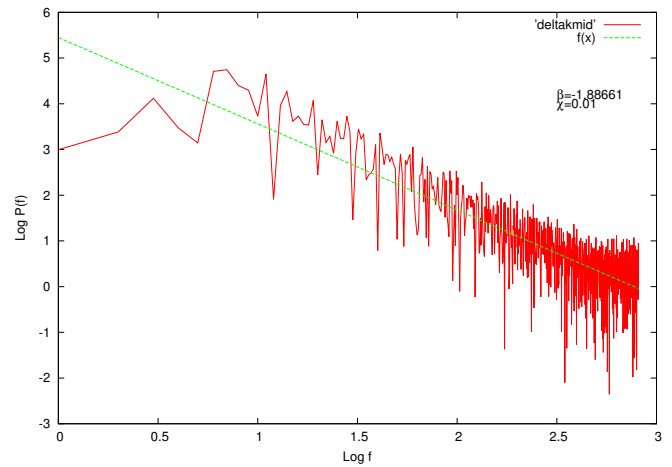


Figura 6.13: Espectro de potencias para $\chi = 0,01$.

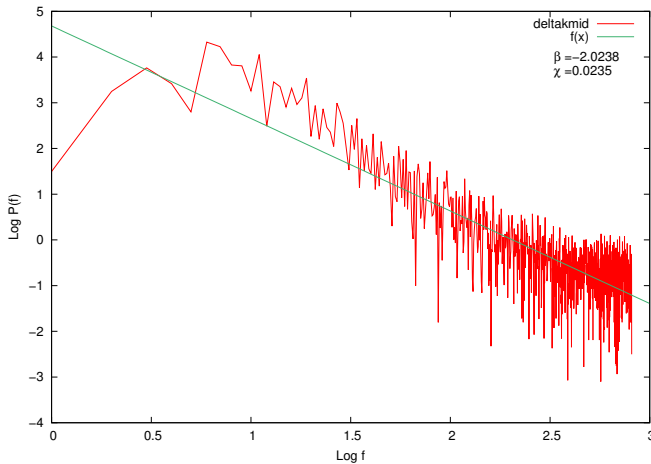


Figura 6.14: Espectro de potencias para $\chi = 0,0235$.

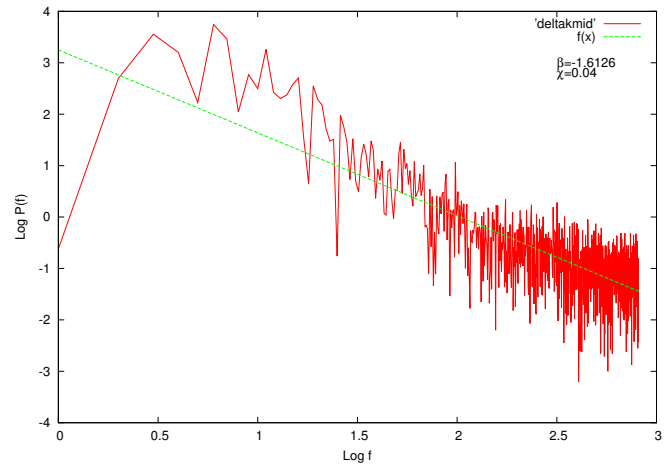


Figura 6.15: Espectro de potencias para $\chi = 0,04$.

Al variar la intensidad del parámetro de interacción cuadrupolar-cuadrupolar en el rango mencionado en la sección anterior $0,005 < \chi < 0,25$, se encuentra en primer lugar que la serie de tiempo δ_n se comporta como una ley de potencias de la forma $P(f) \propto 1/f^\beta$ (capítulo 5).

Así, con los valores del coeficiente de correlación β obtenidos, se graficaron en función de la interacción, como se puede ver en la Figura 6.22, notando que en este caso el valor del coeficiente de correlación tiende a

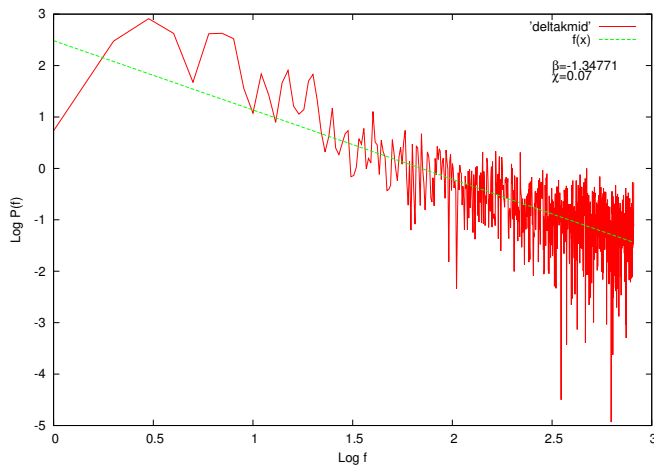


Figura 6.16: Espectro de potencias para $\chi = 0,07$.

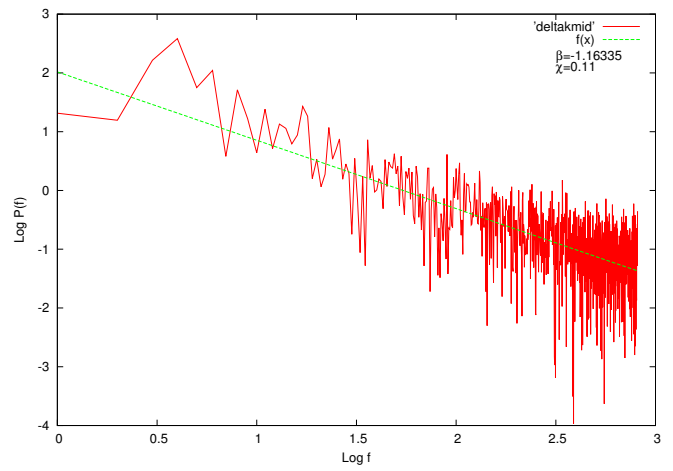


Figura 6.17: Espectro de potencias para $\chi = 0,11$.

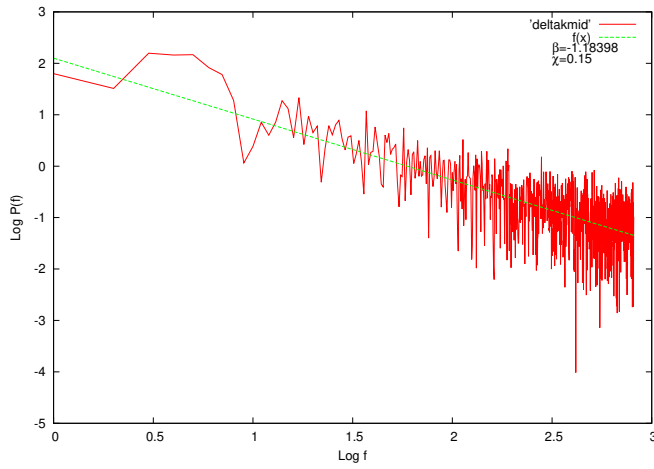


Figura 6.18: Espectro de potencias para $\chi = 0,11$.

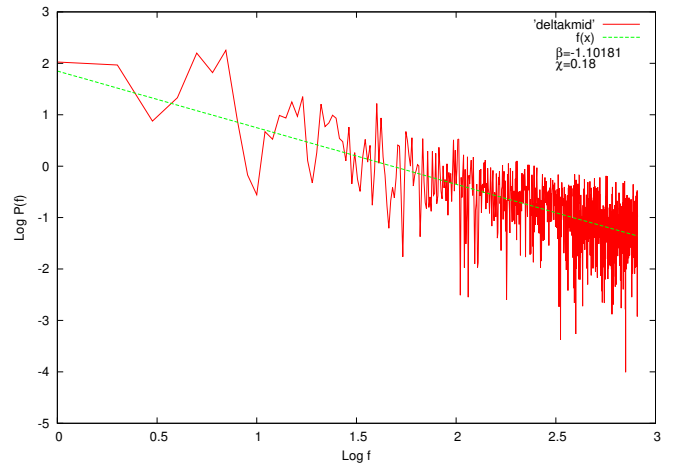


Figura 6.19: Espectro de potencias para $\chi = 0,18$.

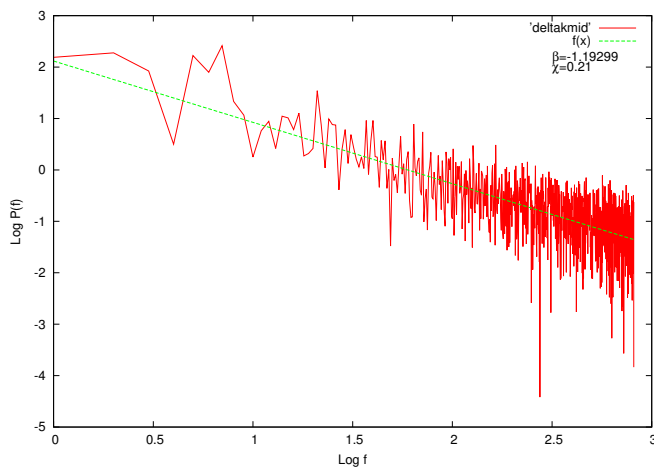


Figura 6.20: Espectro de potencias para $\chi = 0,21$.

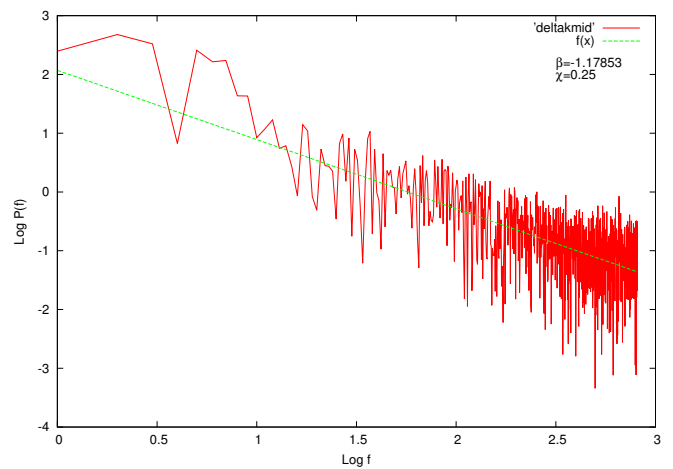


Figura 6.21: Espectro de potencias para $\chi = 0,25$.

disminuir en términos de la interacción. Con algunas zonas particulares para la interacción $\chi = 0,005$ el factor de correlación es mayor en comparación del coeficiente de correlación de la interacción $\chi = 0,01$. De igual manera dicho coeficiente disminuye al pasar de la interacción $\chi = 0,10$ a $\chi = 0,15$ y en la zona donde la interacción sube de $\chi = 0,18$ a $\chi = 0,21$ el coeficiente de correlación disminuye.

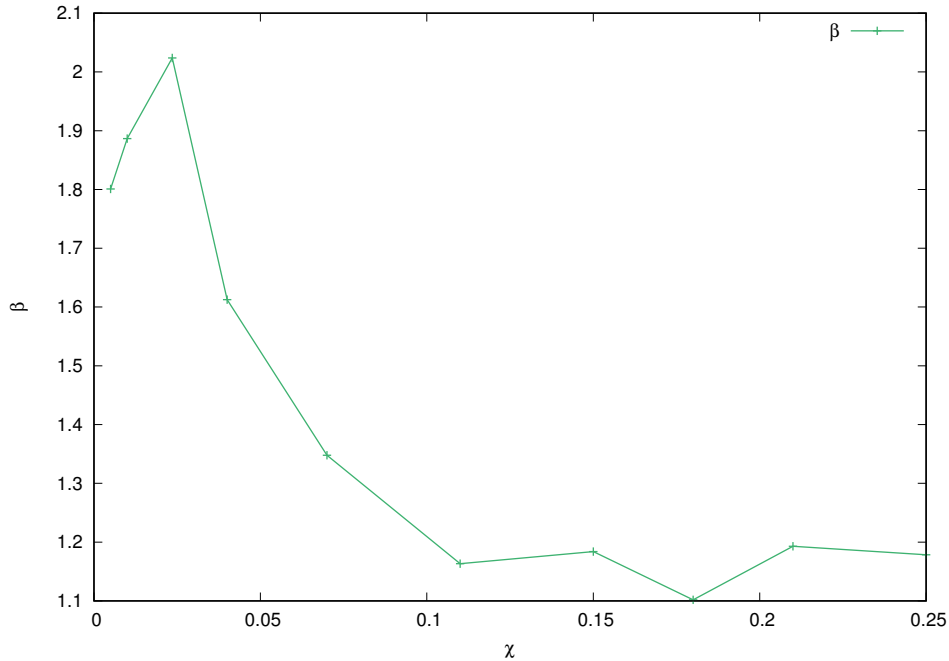


Figura 6.22: Factor de correlación en función de la interacción χ .

Debido a que se considero el espectro de energías como una serie de tiempo, los métodos estadísticos de análisis de series de tiempo nos dan información para el estudio del caos cuántico, en este caso la teoría del ruido $1/f^\beta$, es una buena herramienta. Además se corroboró lo encontrado en la literatura que dice que las fluctuaciones espectrales de los sistemas cuánticos caóticos presentan ruido $1/f$, en donde, cabe aclarar que para valores de interacción cuadrupolar $0,11 < \chi < 0,25$, el parámetro de correlación β se encuentra muy cercano a 1, ver gráfica 6.22, donde la mejor aproximación a un valor de correlación correspondiente a ruido $1/f$ se da para $\chi = 0,18$ teniendo $\beta = 1,10$. Además también se encuentra en la literatura que las fluctuaciones espectrales de los sistemas cuánticos regulares constituyen un ruido $1/f^2$, que en el caso de los espectros analizados se obtuvo un valor de correlación β cercano a 2 para valores de interacción cuadrupolar entre $0,005 < \chi < 0,04$ en donde la mejor aproximación a ruido $1/f^2$ se da para $\chi = 0,01$ teniendo un valor correspondiente de $\beta = 1,88$.

De lo anterior podemos decir que si bien los espectros de energía analizados para interacciones pequeñas presentan estados mas puros, los cuales pueden observarse como saltos en las gráficas de los espectros de energía, estos términos corresponden a la parte monopolar de la interacción la cual es una parte integrable y por lo cual muestra fluctuaciones correspondientes a sistemas regulares; y de igual manera mientras la interacción cuadrupolar va aumentando, los estados en los espectros de energía van mezclándose. Por una parte se pierden estos saltos presentes en los espectros de energía lo cual se muestran el espectro de potencias como un ruido $1/f$ lo cual corresponde según la literatura a fluctuaciones espectrales de sistemas cuánticos caóticos, lo cual esta de acuerdo con la ganancia de complejidad en la dinámica de los estados energéticos debida a la interacción cuadrupolar del Hamiltoniano. Teniendo así por medio de este análisis indicadores de la presencia del comportamiento caótico en el núcleo de ^{48}Ca lo cual concuerda con lo esperado al analizar los espectros de energía y con la teoría del ruido $1/f$, obteniendo como una de las principales conclusiones una transición entre un comportamiento de fluctuaciones estadísticas pertenecientes a sistemas cuánticos regulares hacia un comportamiento de las fluctuaciones característico de sistemas cuánticos caóticos

6.2. $P(s)$ y correlaciones de corto alcance

Por otra parte, una vez realizada la rectificación de los espectros se obtuvo su distribución de probabilidad. Para ello, tomando los espectros de energía rectificados, mediante un programa hecho en Fortran. El programa subdivide los estados en n subestados para así obtener el número de estados con los cuales se contaron cuántos estados tienen cierto intervalo de energía.

El programa inicialmente lee el archivo que contiene las energías y posteriormente pide un intervalo de probabilidad y los límites mínimo y máximo sobre el intervalo de probabilidad, además del número de estados. En el caso de las figuras que se muestran a continuación, el intervalo de probabilidad fue de 0,2 y los límites mínimo y máximo fueron respectivamente 0 y 6, además el número de estados fue de 1627.

Como se puede observar en las figuras 6.23 y 6.24 los datos pueden ajustarse con una distribución de Poisson, donde dichas distribuciones corresponden a los estados cuyo valor de interacción χ es pequeño, en este caso $\chi = 0,005$ y $\chi = 0,01$.

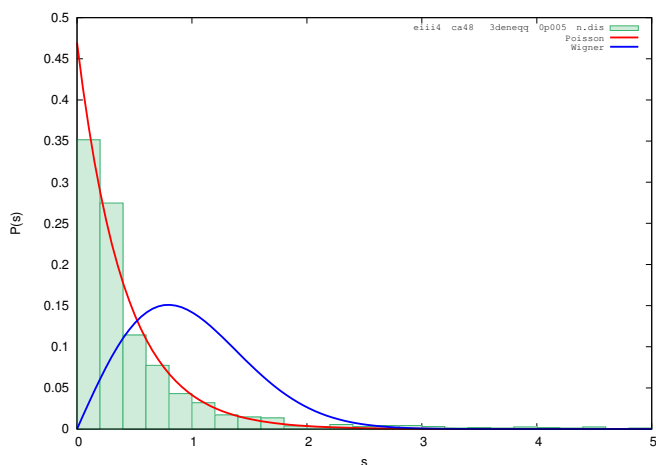


Figura 6.23: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,005$.

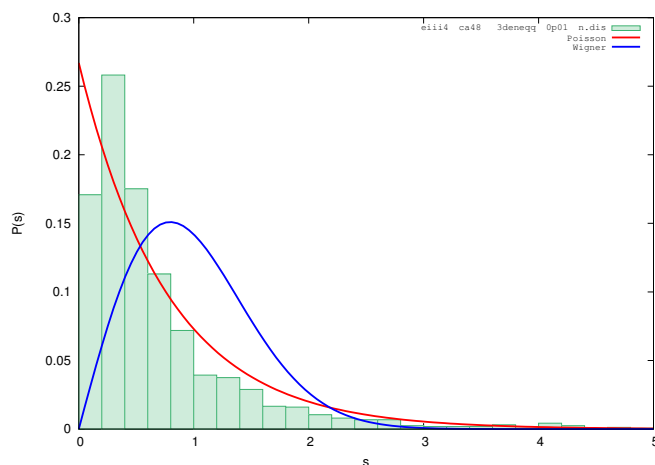


Figura 6.24: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,01$.

Por otra parte, en las figuras 6.26-6.32 se puede notar que para valores de interacción a partir de $\chi = 0,04$ y hasta $\chi = 0,25$ las distribuciones obtenidas se pueden ajustar perfectamente con las distribuciones $P(s)$ de acuerdo con la conjetura de Wigner.

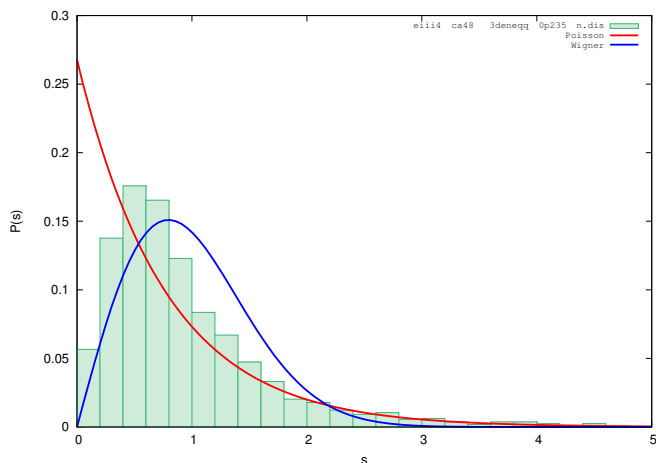


Figura 6.25: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,0235$.

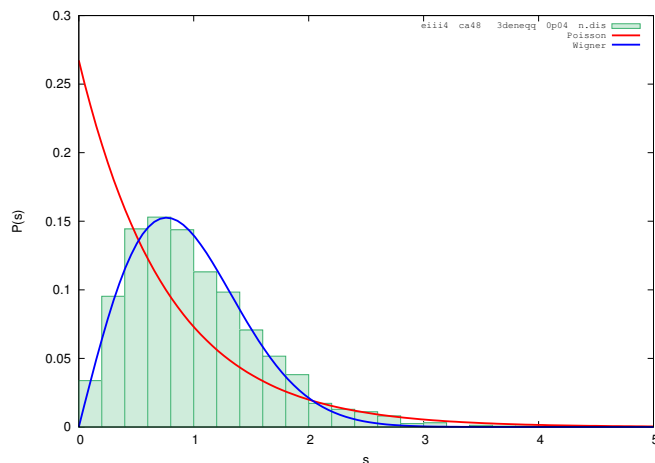


Figura 6.26: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,04$.

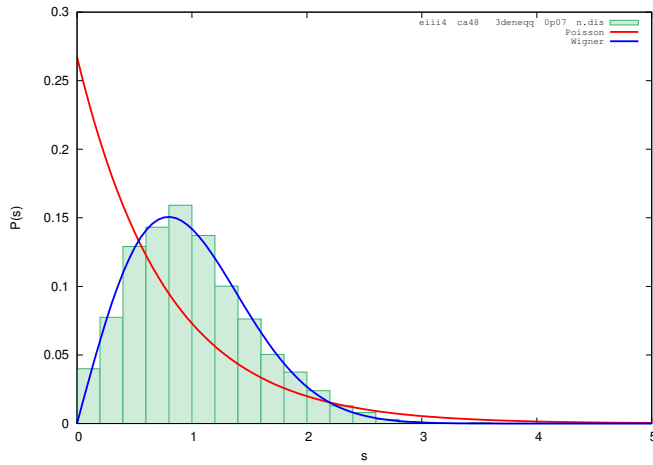


Figura 6.27: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,07$.

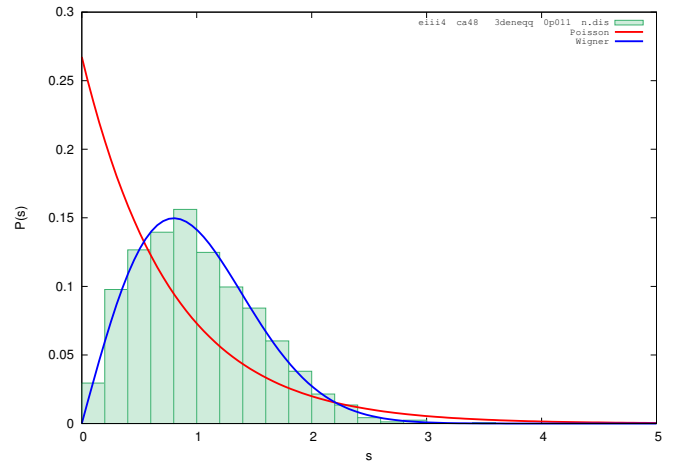


Figura 6.28: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,11$.

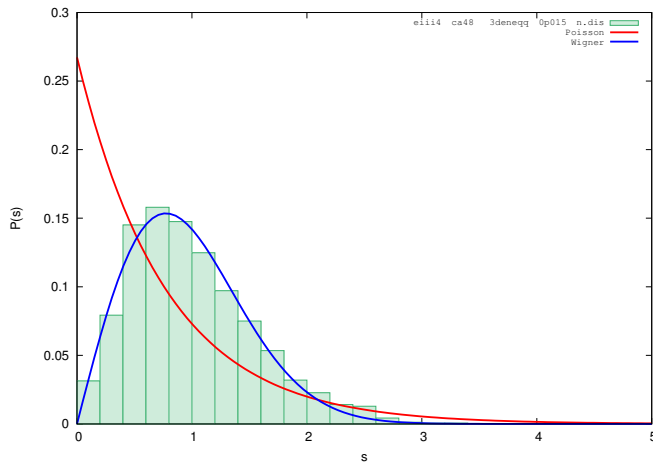


Figura 6.29: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,15$.

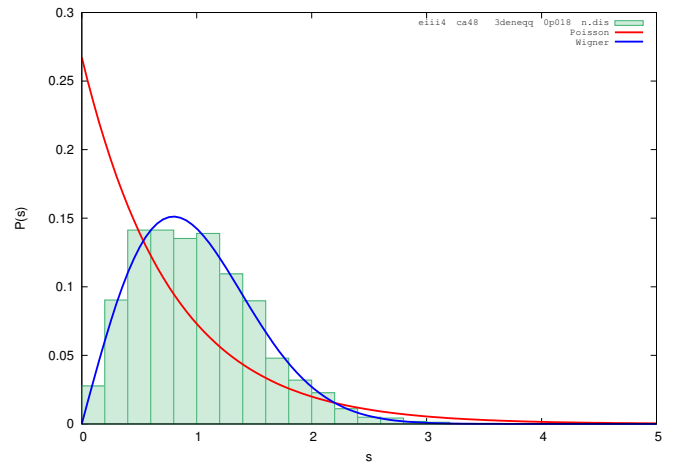


Figura 6.30: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,18$.

Al obtener las distribuciones de energía a primeros vecinos lo que se quiere hacer notar es que, por una parte se tiene una transición de alguna manera esperada, obtener una distribución de Poisson correspondiente a espectros característicos de GDE para interacciones cuadrupolares pequeñas, y por otro lado, las distribuciones que concuerdan con el caso de GOE. Es decir cuando se tiene una distribución de Poisson, las fluctuaciones estadísticas del espectro se dicen que pertenecen a sistemas integrables teniendo como ejemplos los mencionados en la sección 3.2. Por otro lado, una distribución de Wigner indica la presencia de un comportamiento caótico en las fluctuaciones lo cual está de acuerdo con lo observado en billares con comportamiento caótico; un ejemplo claro es lo reportado por Casati y Prosen el cual ha sido tratado en la sección 3.2.1. Por lo que los resultados obtenidos mediante este análisis están de acuerdo con la literatura. Lo siguiente es contrastar este resultado con lo encontrado en los espectros de potencias y en las gráficas de niveles de energía.

En las gráficas de niveles de energías, hemos concluido que la dinámica y la presencia del comportamiento complejo en los estados nucleares se debe a la interacción cuadrupolar, además de que la estructura del Hamiltoniano ocupado da implicaciones sobre la deformación del núcleo. En este sentido, sabemos que las degeneraciones presentes en los espectros de energía para interacciones cuadrupolares pequeñas se deben a que gana, por decirlo de alguna manera, la parte monopolar que está formada por términos del oscilador armónico cuyos estados están degenerados e implican una geometría esférica en el núcleo. Con el análisis a primeros vecinos

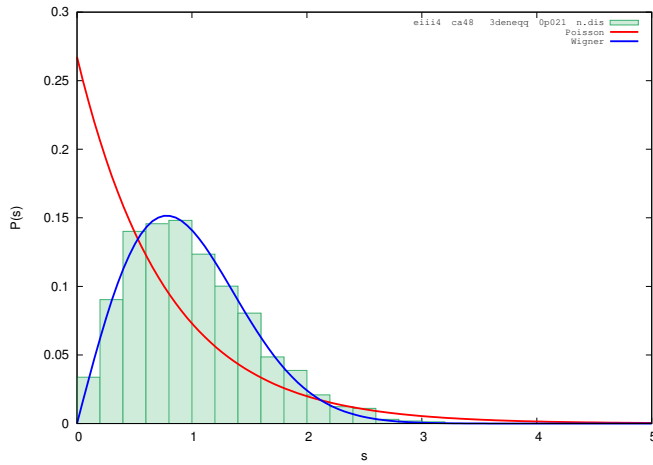


Figura 6.31: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,21$.

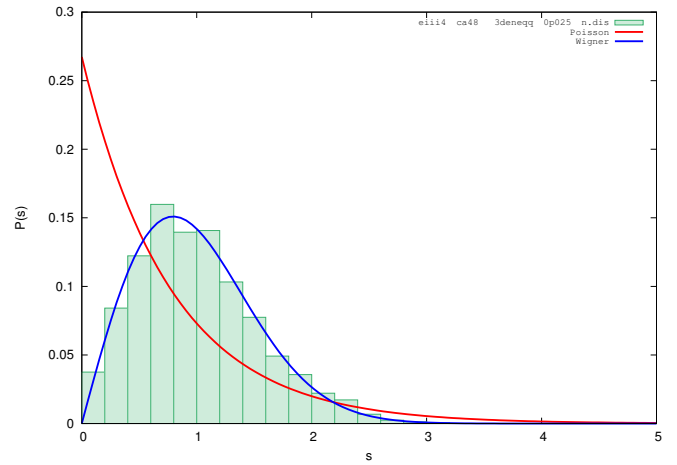


Figura 6.32: Distribución de probabilidad para de energías a primeros vecinos para $\chi = 0,25$.

podemos respaldar esto debido a que las fluctuaciones estadísticas son características de sistemas integrables (distribución de Poisson) y la parte monopolar del Hamiltoniano también es integrable. Por otra parte debido a que existe un cambio en la geometría del núcleo dada por la interacción cuadrupolar, y tomando los resultados de la simulación numérica hecha por Casati y Prosen podemos decir que el núcleo del ^{48}Ca se comporta como un billar cuántico. Para valores de interacción cuadrupolar pequeños con una geometría esférica en el núcleo, se comporta como un billar regular con una estadística propia de este comportamiento y tiene una transición a un comportamiento caótico con fluctuaciones estadísticas propias de éste, cuando dicho valor aumenta con una geometría deformada.

Ahora bien, hasta el momento se ha encontrado la relación entre los espectros de energía y las distribuciones a primeros vecinos obtenidas. En los espectros de potencias se analizan las energías como una serie de tiempo encontrando un factor de correlación que da información acerca de la estadística de las energías mediante la teoría del ruido. De acuerdo con la literatura, se puede encontrar que los resultados de la RMT para GDE presentan ruido del tipo $1/f^2$ y para GOE con ruido $1/f$. Así entonces, debido a que se encontraron distribuciones que concuerdan con los resultados de la RMT para χ pequeñas, notando que los estados nucleares presentan una estadística dada por una distribución de Wigner (GDE) y para interacciones más grandes presentan una estadística característica de (GOE), la relación entre las transiciones del ruido $1/f^2$ y $1/f$ están bien establecidas. El espectro de potencias inicialmente muestra un ruido cercano a $1/f^2$ donde los valores de β obtenidos están cercanos a $\beta = 2$ y mientras χ crece los valores de β están cercanos a 1 indicando la presencia de ruido $1/f$.

Por lo tanto, el análisis de energías a primeros vecinos en conjunto con el análisis de los espectros de energías establecen la conexión entre el modelo utilizado y la presencia de partes integrables y no integrables en el Hamiltoniano esquemático. Además, también están de acuerdo con los resultados de los espectros de potencias, y estableciendo una relación entre los billares cuánticos, el espectro de potencias y la dinámica de los niveles de energía.

6.3. Interferencia de estados nucleares

En esta sección se muestran los resultados obtenidos al realizar el análisis de interferencia de los estados nucleares. El análisis se llevó a cabo mediante un programa en Fortran llamado `visibilidad.f` el cual toma el archivo correspondiente al espectro de energías de cada uno de los valores de la interacción cuadrupolar. Dicho programa pide un valor de densidad de probabilidad, y dos límites uno mínimo y uno máximo correspondientes al intervalo de energías que se tienen en el espectro. En este caso se tomó un valor de densidad de probabilidad de 0.5 MeV y los límites anteriormente mencionados fueron de 0 a 50 MeV. Una vez teniendo estos parámetros, el programa empieza a contar de 0.5 en 0.5 MeV los estados con dicha energía en el intervalo de 0 a 50 MeV al número de cuentas se le llamó I (counts). Posteriormente, el programa genera un archivo con los datos obtenidos siendo éstos las cuentas o intensidad y el barrido de energías.

Dichos resultados se muestran a continuación, donde el eje y corresponde al número de cuentas, es decir el número de estados contados, y el eje x representa las energías. Los 1627 estados están delimitados por zonas espectrales, es decir zonas donde el espectro presenta una estructura definida en forma de organización.

Así, las energías organizadas en diferentes sub-ensambles comparten una propiedad en la que se puede notar que para interacciones débiles, los estados pertenecientes a un sub-ensamble no se mezclan con los del ensamble subsecuente. En este sentido dicho comportamiento puede interpretarse como interferencia.

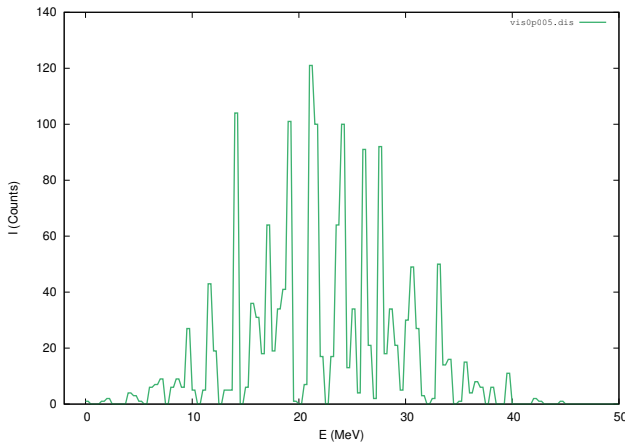


Figura 6.33: Distribución de energía para $\chi = 0,005$.

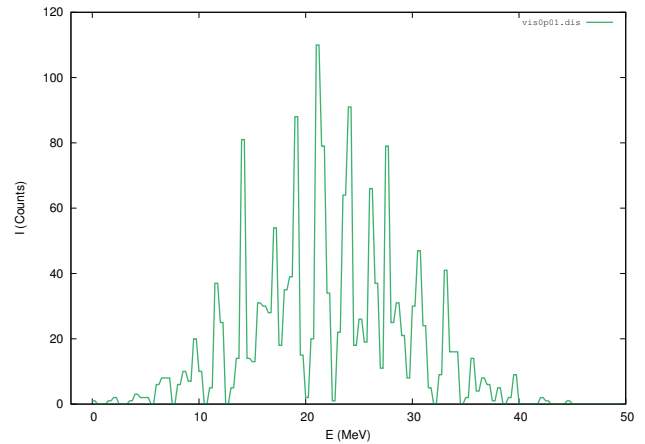


Figura 6.34: Distribución de energía para $\chi = 0,01$.

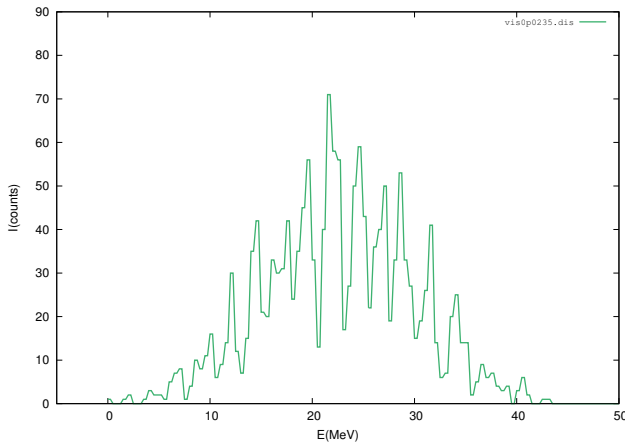


Figura 6.35: Distribución de energía para $\chi = 0,0235$.

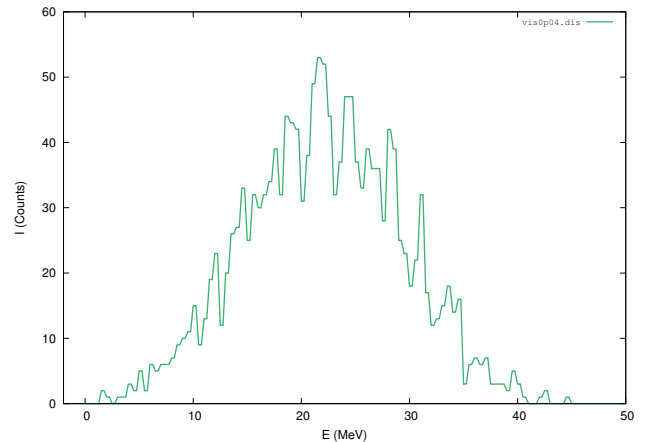


Figura 6.36: Distribución de energía para $\chi = 0,04$.

Por otra parte sabemos que en el modelo de capas el parámetro de interacción es el que dicta el mezclado o interacción en los niveles de energía. Es decir, el mezclado de los niveles de energía está en función del parámetro

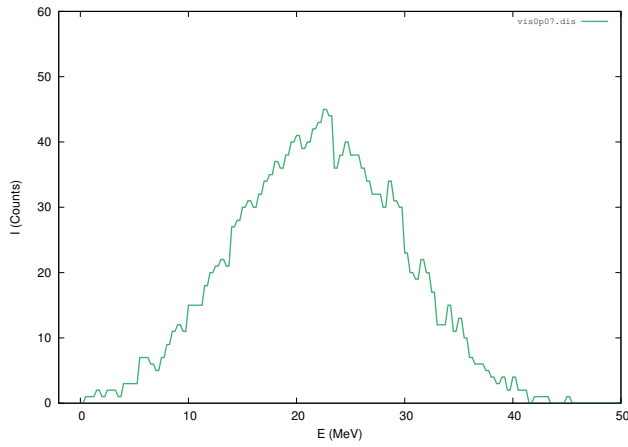


Figura 6.37: Distribución de energía para $\chi = 0,07$.

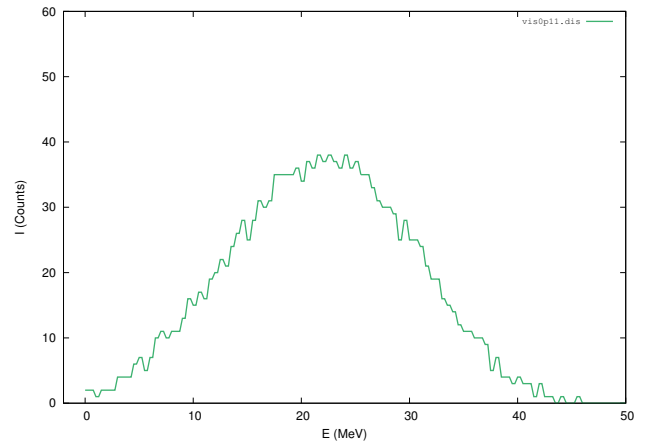


Figura 6.38: Distribución de energía para $\chi = 0,11$.

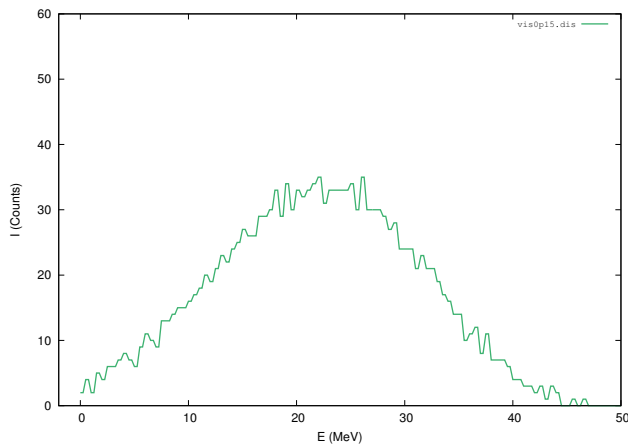


Figura 6.39: Distribución de energía para $\chi = 0,15$.

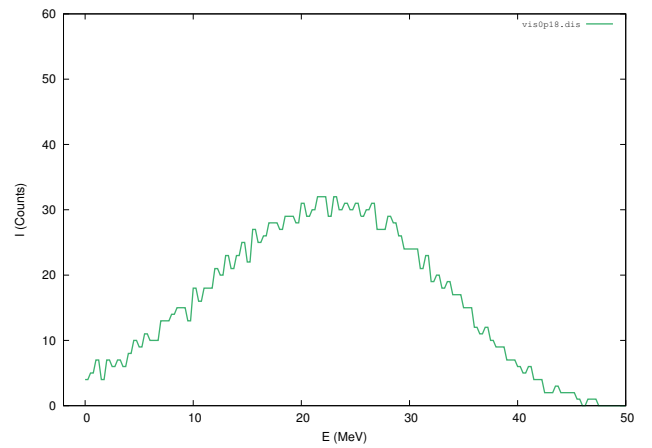


Figura 6.40: Distribución de energía para $\chi = 0,18$.

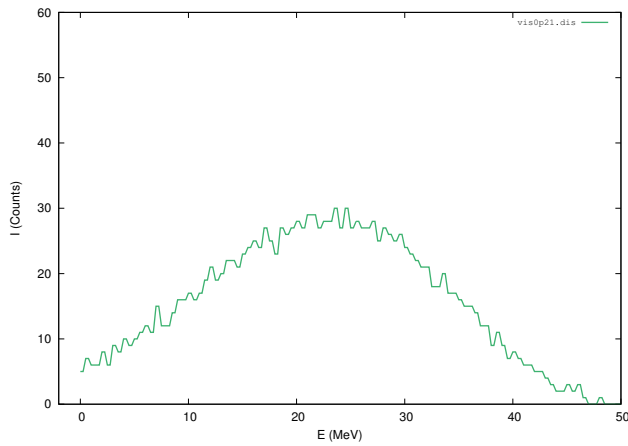


Figura 6.41: Distribución de energía para $\chi = 0,21$.

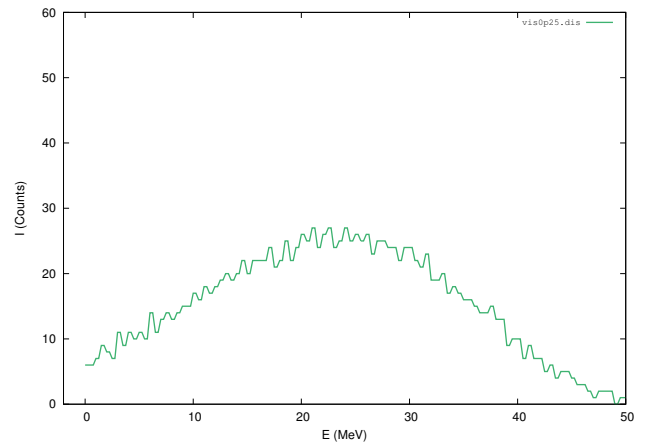


Figura 6.42: Distribución de energía para $\chi = 0,25$.

de interacción. Se puede observar en las distribuciones de conteos de estados, que como se ha mencionado, si el valor de interacción es pequeño se tiene un patrón de interferencia perceptible con una visibilidad de 1, lo cual corrobora que los estados en el régimen de interacciones cuadrupolares pequeñas $0,005 < \chi < 0,04$ presenta

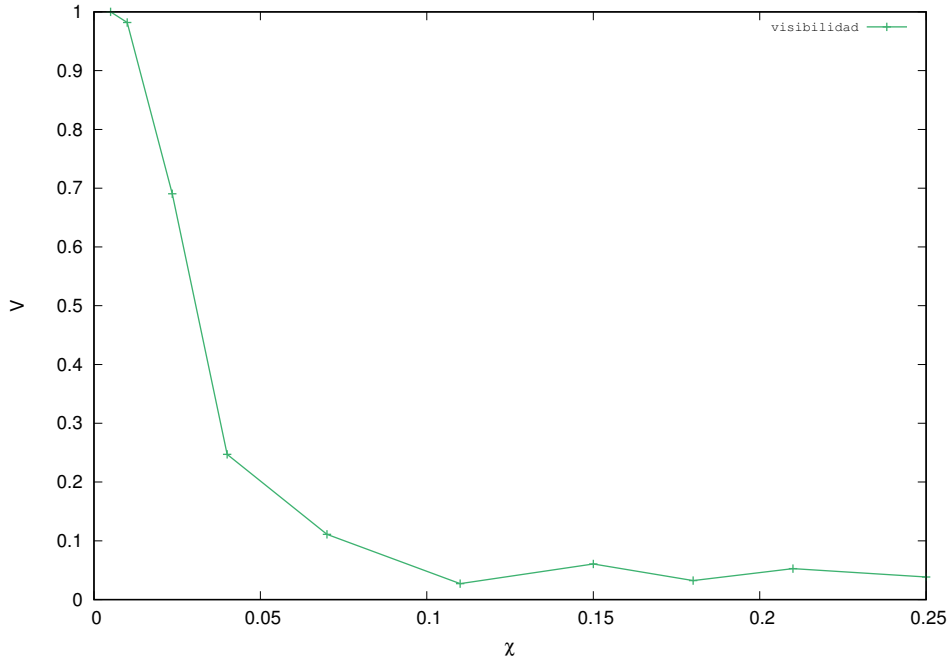


Figura 6.43: Visibilidad en función de la interacción cuadrupolar χ .

un patrón de interferencia distinguible con valores de visibilidad en decremento mientras χ aumenta. Por otra parte para $0,07 < \chi < 0,25$ el patrón de interferencia desaparece y de igual manera el valor de la visibilidad V disminuye y es cercano a 0.

En la sección 6.1 y 6.2 se observó en el primer caso cómo es que el parámetro de correlación en el espectro de frecuencias va cambiando respecto al parámetro de interacción cuadrupolar notando de acuerdo con la teoría del ruido $1/f$ y la conjetura BGS transiciones en el espectro de potencias del tipo $1/f^\beta$ donde β se encuentra acotado por $1 < \beta < 2$ mostrando las transiciones anteriormente señaladas entre el ruido $1/f$ y $1/f^2$. Lo anterior corrobora la literatura debido a que en ella se puede encontrar que los espectros de potencias asociados a GDE de acuerdo con la teoría de matrices aleatorias tienen un parámetro de correlación correspondiente a ruido Browniano es decir $\beta = 2$ y en los resultados obtenidos en esta tesis se observa que para $0,005 < \chi < 0,01$ el parámetro de correlación es $\beta \approx 2$, por otra parte también se sabe que el espectro de potencias asociado a GOE se tiene $\beta = 1$ es decir ruido $1/f$ que en nuestros resultados obtenemos para $0,07 < \chi < 0,25$ el valor de β tiende a 1 es decir $\beta \approx 1$ corroborando lo que se encuentra en la literatura tanto para GDE Y GOE.

En la sección 6.2 se estudiaron las distribuciones de probabilidad de corto alcance (distribución de la separación de energías a primeros vecinos) en donde se obtuvieron las distribuciones de probabilidad para cada valor de la interacción cuadrupolar, para ello se toma lo establecido por la RMT donde se sabe que para GDE la distribución de probabilidad asociada es una distribución de Poisson mientras que para GOE se tiene una distribución de Wigner, además de que la presencia de una distribución de Poisson es característica de sistemas integrables. Por otra parte la distribución de Wigner ésta asociada con sistemas no integrables así con base en lo anterior se sabe que por una parte el ruido encontrado para GDE es ruido del tipo $1/f^2$ donde $\beta = 2$ y para GOE se tiene ruido $1/f$ donde $\beta = 1$.

Por lo que se pudo verificar que existe una transición estadística en el núcleo del ^{48}Ca que podemos caracterizar por las transiciones entre el ruido $1/f^2$ y $1/f$ y por las distribuciones asociadas Poisson y Wigner estando estas dos partes en acuerdo debido a que para $0,005 < \chi < 0,01$ se pueden ajustar distribuciones de Poisson a los estados nucleares correspondientes mostrando así evidencia de un comportamiento integrable por otra parte para $0,04 < \chi < 0,25$ se pueden ajustar distribuciones de Wigner lo cual nos da evidencia de un comportamiento no integrable (caótico), aún más, en la sección 3.2 se aborda el tema de los billares clásicos y cuánticos en donde se muestran algunos resultados de la literatura que dicen que las distribuciones de probabilidad asociada a billares regulares siguen una distribución de Poisson y los billares con un comportamiento caótico siguen una distribución de Wigner lo cual la respalda de otra forma lo obtenido en los casos anteriores que para el núcleo

de ^{48}Ca los niveles de energía tienen una transición entre un comportamiento estadístico clásico a uno caótico siendo este un sistema cuántico

En la sección 3.2.1 se toma como evidencia el artículo de Cassati Prosen donde mediante un billar cuántico con una geometría en principio con comportamiento regular y posteriormente un comportamiento caótico (no regular) simulan numéricamente el experimento de la doble rendija donde observan que para el caso en que cambian la geometría del billar, es decir, hacen que su comportamiento sea caótico el patrón de interferencia obtenido desaparece mientras que para el billar triangular el patrón de interferencia está presente por lo cual por una parte dan evidencia de un comportamiento caótico en un sistema cuántico mostrando como evidencia de un comportamiento caótico la desaparición del patrón de interferencia. En el caso de esta tesis se estudia el núcleo atómico, el cual esté compuesto por nucleones que interactúan entre si siguiendo lo establecido por el modelo de capas, en este caso, en la presente sección se llevó a cabo un análisis de la visibilidad en los estados nucleares de acuerdo a lo dicho en el inicio del presente capítulo obteniendo para $0,005 < \chi < 0,04$ los estados nucleares presentan un patrón de interferencia por otra parte para $0,07 < \chi < 0,25$ el patrón de interferencia desaparece notando por una parte la pérdida de coherencia es decir mientras que para valores pequeños de χ se tiene una visibilidad cercana a 1 para valores mas grandes la visibilidad tiende a 0, lo cual muestra que los estados nucleares se encuentran más puros mientras que χ es pequeño y mientras este crece los estados se empiezan a mezclar.

Capítulo 7

Conclusiones

Se utilizaron tres métodos de análisis para la identificación de caos cuántico en los estados nucleares de ^{48}Ca . De acuerdo con el análisis de los espectros de potencias obtenidos para los diversos espectros de energías, muestran que las fluctuaciones de la energía siguen un ruido Browniano para interacciones pequeñas, y un ruido caótico para valores más grandes de la interacción cuadrupolar, notando así que existe una transición cuantificable asociada a las fluctuaciones en la energía del presente núcleo.

Los espectros de energía analizados cuentan con una geometría, que da información acerca de la presencia de alguna interacción entre los estados. La geometría obtenida en forma de s invertida es la misma para cada uno de los espectros analizados, pero presenta pequeñas variaciones observadas para pequeños valores de χ . Dichas variaciones se pueden notar como pequeños bloques a lo largo de todas las energías del espectro, donde dichos bloques corresponden a pequeños subconjuntos de niveles energéticos agrupados, y cuando χ aumenta dichos bloques desaparecen del espectro de energías.

Por otra parte mediante el análisis de las distribuciones de probabilidad de los espectros, se estudiaron las propiedades estadísticas de las fluctuaciones espectrales, en particular la distribución del espaciamiento de energías entre primeros vecinos $P(s)$. Se observó que para espectros cuya interacción cuadrupolar χ es pequeña (cercana a 0,005), las distribuciones asociadas a cada espectro de energías se pueden ajustar con una distribución de Poisson; indicando de acuerdo con la teoría de matrices aleatorias (RMT) que para dichos valores de χ se tiene una estadística equivalente a la de un sistema integrable GDE. Por otra parte, al aumentar el valor de χ las distribuciones de probabilidad de los espectros a primeros vecinos se ajustan con una distribución de Wigner la cual establece que las fluctuaciones de espaciamientos están de acuerdo con lo establecido por GOE verificando la presencia de un comportamiento caótico (no integrable).

Por último, con el análisis de visibilidad se observó que para valores de χ pequeños se obtiene un patrón de interferencia en los estados del núcleo, y de manera contraria, mientras la interacción cuadrupolar χ va aumentando se pierde el patrón de interferencia en los estados nucleares, es decir, mientras se varía el parámetro de interacción cuadrupolar, en un inicio los estados se aglomeran y bajo el aumento de la interacción χ éstos pierden coherencia. Lo cual se pudo observar de manera clara debido a que la visibilidad es de cierta medida un parámetro para cuantificar la coherencia. Con base en los resultados para los valores de interacción pequeños, los estados nucleares que presentan interferencia cuentan con una visibilidad cercana a 1, mientras que al aumentar χ la interferencia desaparece y por consecuencia la visibilidad tiende a cero. Y se sabe que cuando la visibilidad es cercana a 1 se cuenta con el máximo de coherencia mientras, que cuando la visibilidad es cero se tiene el mínimo de coherencia. Por lo cual se puede decir que los estados nucleares van perdiendo coherencia, o dicho de otra manera, éstos se mezclan mientras la interacción cuadrupolar aumenta.

Podemos concluir que se obtuvo un comportamiento caótico en el sistema estudiado. Por una parte se confirma la presencia del caos cuántico en los estados nucleares del ^{48}Ca a través de los valores de correlación β obtenidos, (valores cercanos a 2 para interacciones cuadrupolares pequeñas y cercano a $\beta = 1$ cuando se aumentó el valor de χ), corroborando lo encontrado en la literatura que establece que las fluctuaciones espectrales de sistemas cuánticos regulares presentan ruido $1/f^2$ y las fluctuaciones de sistemas cuánticos caóticos constituyen ruido $1/f$. Esto que a su vez está de acuerdo con el análisis de las distribuciones de probabilidad obtenidas, en las que se observó que para interacciones débiles en el Hamiltoniano nuclear esquemático, la estadística de los estados pasa de una estadística tipo Poisson a una estadística correspondiente al caso de GOE de la conjetura

de Wigner para las interacciones a partir de $\chi = 0,04$ en adelante se ajustan distribuciones de probabilidad de Wigner. Según la conjetura BGS, los sistemas que presentan caos cuántico siguen una estadística tipo GOE es decir se ajustan con una distribución de Wigner. Por lo que se respalda lo obtenido en la visibilidad de estados nucleares teniendo en primera instancia un patrón de interferencia para una interacción cuadrupolar débil que indica la presencia de estados más puros, y por consecuencia, una estadística clásica de acuerdo con el análisis a primeros vecinos. Por otra parte, la desaparición del patrón de interferencia en los estados nucleares debida al aumento del parámetro de interacción cuadrupolar χ da origen a la presencia de la dinámica caótica en los niveles energéticos, es decir en términos de la visibilidad de los estados, éstos se van mezclando concluyendo así que la dinámica de los estados es compleja.

Así entonces, podemos decir que los métodos de análisis de estados nucleares son adecuados para la identificación de transiciones entre un sistema cuántico regular a uno caótico. Debido a que la idea principal de este trabajo es mostrar que el núcleo de ^{48}Ca se comporta como un billar cuántico, es primordial obtener transiciones estadísticas que sustenten el comportamiento regular y caótico en el núcleo, lo cual pudo observarse de manera clara con los métodos de identificación de caos cuántico que muestran resultados consistentes. Esto en el sentido de que al considerar la interacción cuadrupolar en el Hamiltoniano de modelo de capas el núcleo cambia de una forma esférica a una forma prolata teniendo de esta manera una transición a un comportamiento caótico en su dinámica.

El estudio de las fluctuaciones en el espectro de energías mediante el la rectificación del espectro de energías y la obtención del espectro de potencias está en concordancia con el análisis a primeros vecinos realizado para la identificación estadística del caos cuántico. Por otra parte, el análogo de interferencia de estados nucleares respalda la mezcla de estados o pérdida de coherencias con un comportamiento caótico en los estados nucleares. Además de obtener un resultado que está de acuerdo con lo que obtuvieron Casati y Prosen [4] ver sección 3.2.1, la interferencia en el experimento de la doble rendija desaparece al realizar la simulación con un billar caótico. En el caso de los estados nucleares la interferencia desaparece cuando la interacción cuadrupolar aumenta, y está respaldada por el hecho de que las distribuciones de energías a primeros vecinos para el mismo intervalo del parámetro de interacción están de acuerdo a la RMT con GOE (distribuciones de Wigner), y los valores obtenidos para el espectro de potencias, por lo que podemos concluir que la presencia de una dinámica caótica hace que desaparezca el patrón de interferencia. Mostrando así que el núcleo de ^{48}Ca se comporta como un billar cuántico, debido a que presenta una transición en las fluctuaciones espectrales que va de una estadística regular a una caótica y sus efectos observados están de acuerdo con lo mostrado en [4].

Apéndice A

Espectro de energías

Los espectros de energía se obtuvieron mediante el código ANTOINE, que es un código escrito en FORTRAN 77 el cual trabaja con las funciones de onda del modelo de capas. La diagonalización de matrices se lleva a cabo mediante el método Lanczos.

A.1. Método Lanczos

El método de Lanczos consiste en la construcción de una base ortonormal, por la ortogonalización de los estados $H^n|1\rangle$, obtenida por la acción repetida del Hamiltoniano sobre un estado pivote $|1\rangle$. De este procedimiento resulta una matriz tridiagonal.

En el primer paso:

$$H|1\rangle = E_{11}|1\rangle + E_{12}|2\rangle, \quad (\text{A.1})$$

con E_{11} el valor esperado de H en el estado $|1\rangle$ y E_{12} se obtiene por normalización

$$E_{12}|2\rangle = H|1\rangle - E_{11}|1\rangle = (H - E_{11})|1\rangle. \quad (\text{A.2})$$

En el segundo paso

$$H|2\rangle = E_{21}|1\rangle + E_{22}|2\rangle + E_{23}|3\rangle \quad (\text{A.3})$$

y como H es Hermitiano

$$E_{21} = E_{12}. \quad (\text{A.4})$$

De igual manera E_{23} es obtenida por normalización

$$E_{23}|3\rangle = (H - E_{22})|2\rangle - E_{21}|1\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Y así sucesivamente hasta el paso número N

$$H|N\rangle = E_{NN-1}|N-1\rangle + E_{NN}|N\rangle + E_{NN+1}|N+1\rangle. \quad (\text{A.6})$$

$$E_{N-1N} = E_{N-1N}, E_{NN} = \langle N|H|N\rangle. \quad (\text{A.7})$$

$$E_{NN+1}|N+1\rangle = (H - E_{NN})|N\rangle - E_{NN-1}|N-1\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Así, se obtiene la matriz tridiagonal

$$\langle I|H|J\rangle = \langle J|H|I\rangle = 0 \quad (\text{A.9})$$

si $|I - J| > 1$.

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{32} & E_{33} & E_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{43} & E_{44} & E_{45} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Bibliografía

- [1] H. S. Camarda F. Rahn W. W. Havens, G. Hacken. Neutron resonance spectroscopy. ix. the separated isotopes of samarium and europium*. *Physical Review C*, 6(1), 1972.
- [2] Nikolai Chernov and Roberto Markarian. *Chaotic Billiards*.
- [3] D Ullmo and S Tomsovic. Introduction to Quantum Chaos. 5(7):1035–1048, 2014.
- [4] Giulio Casati and Toma Prosen. Quantum chaos and the double-slit experiment. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 72(3), 2005.
- [5] K. Heyde. *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics: An Introductory Approach*. CRC Press, 1998.
- [6] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation Laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1–4, 1984.
- [7] A. Poves and A. Zuker. Theoretical spectroscopy and the fp shell. *Physics Reports*, 70(4):235–314, apr 1981.
- [8] E. Caurier, A.P. Zuker, A. Poves, and G Martinez. Full pf shell model study of A=48 nuclei. *Physical Review C - Nuclear Physics*, 50(1):12, 1994.
- [9] Madan Lal Metha. *Random Matrices*. 1991.
- [10] L. Benet, F. Leyvraz, and T. Seligman. Wigner-Dyson statistics for a class of integrable models. *Physical Review E*, 68(4):045201, 2003.
- [11] H. G. Schuster and Wolfram Just. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2005.
- [12] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James a. Yorke, and J. D. Crawford. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, volume 50. 1997.
- [13] D. Rafael Alejandro Molina Fernández. *Caos cuántico en sistemas hamiltonianos de muchos cuerpos*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2001.
- [14] R. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*, 2000.
- [15] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*, volume 1. Addison-Wesley, 2001.
- [16] Hans-Jürgen Stöckmann. *Quantum Chaos: An Introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [17] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. *An Introduction to Random Matrices*. Cambridge University Press, 2009.
- [18] V Zelevinsky. Quantum Chaos and Complexity in Nuclei. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 46(1):237–279, 1996.
- [19] D. Gapon E., Iwanenko. Zur Bestimmung der isotopenzahl. 20, 1932.
- [20] Maria Goeppert-Mayer. Nobel Lecture, The Shell Model. *Nobel*, 1963.

- [21] Kenneth S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. Wiley, 1988.
- [22] A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, J. Retamosa, and E. Faleiro. Quantum Chaos and $1/f$ Noise. *Physical Review Letters*, 89(24):244102, 2002.
- [23] Gerardo Fernández, Edna M Hernández, M Hautefeuille, E Landa, I O Morales, V Velázquez, R Fossion, C E Vargas, and a Frank. Quantum interference vs. quantum chaos in the nuclear shell model. *Journal of Physics: Conference Series*, 578:012014, 2015.
- [24] J. M G Gómez, K. Kar, V. K B Kota, R. A. Molina, A. Relaño, and J. Retamosa. Many-body quantum chaos: Recent developments and applications to nuclei. *Physics Reports*, 499(4-5):103–226, 2011.
- [25] P Manimaran, P Anantha Lakshmi, and Prasanta K Panigrahi. Spectral fluctuation characterization of random matrix ensembles through wavelets. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(42):L599–L604, 2006.
- [26] M. S. Santhanam, Jayendra N. Bandyopadhyay, and Dilip Angom. Quantum spectrum as a time series: Fluctuation measures. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 73(1):1–4, 2006.
- [27] E. Landa, Irving O. Morales, R. Fossion, P. Stránský, V. Velázquez, J. C. López Vieyra, and A. Frank. Criticality and long-range correlations in time series in classical and quantum systems. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 84(1):1–5, 2011.
- [28] E Landa, I Morales, C Hernandez, J C L Vieyra, A Frank, and V Velazquez. Scale invariance and criticality in nuclear spectra. *Revista Mexicana De Fisica*, 54(3):48–55, 2008.
- [29] Ru U. Haq, a. Pandey, and O. Bohigas. Fluctuation Properties of Nuclear Energy levels: Do Theory and Experiment Agree? *Physical Review Letters*, 48(16):1086–1089, 1982.
- [30] M. V. Berry and Michael Tabor. Level Clustering in the Regular Spectrum, 1977.
- [31] Eugene P. Wigner. On a class of analytic functions from the quantum theory of collisions. *Annals of Mathematics*, 53(1):36–67, 1951.
- [32] V Velázquez, E Landa, C E Vargas, R Fossion, J C López-Vieyra, I Morales, and A Frank. Self similitude in the power spectra of nuclear energy levels. *Journal of Physics: Conference Series*, 475(1):12014, 2013.
- [33] R. F. Casten. *Nuclear Structure From A Simple Perspective*. Oxford University Press, Inc., 1990.
- [34] R. Fossion, E. Landa, P. Stránský, V. Velázquez, J. C. López Vieyra, I. Garduño, D. García, and A. Frank. Scale invariance as a symmetry in physical and biological systems: Listening to photons, bubbles and heartbeats. *AIP Conference Proceedings*, 1323:74–90, 2010.