



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SINTONIZACIÓN EN FIBRA ÓPTICA  
BIRREFRINGENTE MEDIANTE SU ESTRECHAMIENTO,  
VARIACIÓN DE TEMPERATURA Y APLICACIÓN DE  
ESTRÉS LONGITUDINAL, DEL ESPECTRO DEL ESTADO  
DE DOS FOTONES GENERADO POR MEZCLADO DE  
CUATRO ONDAS ESPONTÁNEO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

CÉSAR BERTONI OCAMPO



TUTOR:

DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Apellido paterno Bertoni  
Apellido materno Ocampo  
Nombre(s) César  
Teléfono (55) 15 42 20 47  
Universidad Nacional Autónoma de México Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias Facultad de Ciencias  
Carrera Física  
Número de cuenta 309111223

2. Datos del tutor  
Grado Dr.  
Nombre(s) Alfred Barry  
Apellido paterno U´Ren  
Apellido materno Cortés

3. Datos del sinodal 1  
Grado Dr.  
Nombre(s) Jorge Gustavo  
Apellido paterno Hirsch  
Apellido materno Ganievich

4. Datos del sinodal 2  
Grado Dr.  
Nombre(s) Asaf  
Apellido paterno Paris  
Apellido materno Mandoki

5. Datos del sinodal 3  
Grado Dr.  
Nombre(s) Fernando  
Apellido paterno Ramírez  
Apellido materno Martínez

6. Datos del sinodal 4  
Grado Dr.  
Nombre(s) Jesús  
Apellido paterno Garduño  
Apellido materno Mejía

6. Datos del trabajo escrito  
Título Sintonización en fibra óptica birrefringente mediante su estrechamiento, variación de temperatura y aplicación de estrés longitudinal, del espectro del estado de dos fotones generado por mezclado de cuatro ondas espontáneo  
Número de páginas 157 p  
Año 2018

Dedicado a la memoria de Joaquín Crisanto Bertoni Montoya.

1934 – 2016



## RESUMEN

---

La modificación espectral del estado de dos fotones generados por mezclado espontáneo de cuatro ondas (SFWM) puede ser complicada al implicar la fabricación de guías de onda con una estructura determinada, lo que puede resultar no práctico y de alto costo. En este documento se exploraron tres mecanismos de sintonización del espectro conjunto de parejas de fotones generados por SFWM, que fueron la fabricación de múltiples muestras de fibra óptica estrechada, la variación de temperatura y la aplicación de estrés longitudinal todo esto sobre fibra óptica birrefringente. Se desarrolló el modelo teórico para el primero de estos métodos que se generalizó para los subsecuentes, se obtuvieron además resultados experimentales empleando dichas técnicas, y se identificó el origen del corrimiento espectral del estado de dos fotones en el cambio del radio del núcleo y la birrefringencia de la fibra para la primera de las técnicas mencionada y sólo de la birrefringencia para las demás. Se encontró que el mayor de los desplazamientos espectrales se logró con fibras ópticas estrechadas<sup>1</sup> ( $\approx 18\text{nm}$ ), si bien los otros dos métodos resultaron más flexibles en su aplicación al usar un único espécimen de fibra adecuadamente controlado en las variables de interés.

---

<sup>1</sup> Ver el [Capítulo 6](#) para ver el dato exacto y sus condiciones.



*Nox processit, dies autem appropriavit. Abiciamus ergo opera tenebrarum et induamur arma lucis.*  
*Rom 13:12*

## AGRADECIMIENTOS

---

A mi familia y en particular a mis padres, Elia y Julio César, que me han apoyado incansablemente todos estos años en todo ámbito y por su buen ejemplo que tanto me ha servido; y también a mis hermanos, Santos y Ana Paola compinches y camaradas recíprocos.

A mis abuelos todos y en particular a mi abuelo Joaquín de quién la honradez, objetividad y gusto musical y artístico de algún modo heredé, y quien si bien ya no nos acompaña, le estoy profundamente agradecido. ¡Gracias abuelo!

A mis profesores, quienes de un modo u otro pusieron algo de sí en mí, y que de tantos no cabrían en esta página. En particular Dr. Alfred U'Ren por su tiempo, paciencia y conocimiento adquirido. También al Dr. Héctor Cruz Ramírez por su incomparable y valiosísimo apoyo técnico otorgado en el laboratorio y especialmente por el desarrollo del programa de adquisición de datos. Y finalmente a la Dra. Karina Gray Palmett, cuyas discusiones tanto me ayudaron a mejorar mis códigos.

A Erasto, Daniel y Jorge de los cuales aprendí y sigo aprendiendo en el laboratorio. Y a tantos más del laboratorio de óptica cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares de los que he recibido ayuda en múltiples ocasiones.

Y finalmente a mis amigos, si bien pocos, saben ustedes que me son caros.



# ÍNDICE GENERAL

---

<b>I</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1	INTRODUCCIÓN	3
1.1	Propuesta y Objetivos . . . . .	4
1.2	Estructura de la Tesis . . . . .	5
<b>II</b>	<b>MARCO TEÓRICO</b>	<b>7</b>
2	ÓPTICA NO LINEAL	9
2.1	Consideraciones sobre los medios . . . . .	11
2.2	Fenómenos no lineales de Segundo Orden . . . . .	12
2.2.1	Generación de segundo armónico . . . . .	12
2.2.2	Generación de suma y resta de frecuencias . . . . .	13
2.2.3	Conversión paramétrica descendente . . . . .	14
2.3	Fenómenos no lineales de Tercer Orden . . . . .	16
2.3.1	Generación de tercer armónico . . . . .	16
2.3.2	Índice de refracción dependiente de la intensidad . . . . .	17
2.3.3	Interacciones de tercer orden . . . . .	18
3	GUIADO DE LUZ EN FIBRA ÓPTICA	21
3.1	Contexto Histórico . . . . .	21
3.2	Características de las Fibras Ópticas . . . . .	23
3.3	El campo electromagnético . . . . .	24
3.4	Las soluciones de U y del campo electromagnético . . . . .	31
3.4.1	Razones de amplitud de las componentes del campo . . . . .	41
3.5	Condiciones para los modos HE, EH, TE Y TM . . . . .	43
3.5.1	Los modos TE y TM . . . . .	46
3.6	Dispersión Cromática . . . . .	50
3.7	Fibras Ópticas Birrefringentes . . . . .	53
3.8	Tapers . . . . .	55
4	MEZCLADO ESPONTÁNEO DE CUATRO ONDAS	57
4.1	El hamiltoniano de interacción de cuatro ondas . . . . .	58
4.2	El estado de dos fotones en tapers de guías de onda . . . . .	61
<b>III</b>	<b>DESARROLLO EXPERIMENTAL</b>	<b>65</b>
5	DESARROLLO EXPERIMENTAL	67
5.1	Fabricación y caracterización de fibra óptica estrechada	70
<b>IV</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>73</b>
6	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	75
6.1	Resultados . . . . .	75
6.1.1	Temperatura . . . . .	75
6.1.2	Estrés . . . . .	76
6.1.3	Tapers . . . . .	77

6.2	Discusión . . . . .	78
6.2.1	Temperatura . . . . .	78
6.2.2	Estrés longitudinal . . . . .	79
6.2.3	Tapers . . . . .	81
6.2.4	Comparativas generales . . . . .	84
<b>V</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>91</b>
<b>VI</b>	<b>APÉNDICES</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>APÉNDICE MATEMÁTICO</b>	<b>95</b>
A.1	Equivalencia de la fórmula (187) con la mostrada en [83]	95
A.2	La divergencia de un rotacional es cero . . . . .	97
A.3	Cuantización del campo eléctrico . . . . .	98
A.3.1	El oscilador armónico cuántico . . . . .	107
A.3.2	El campo electromagnético en términos de operadores . . . . .	114
A.4	Derivación de la fórmula (308) . . . . .	117
<b>B</b>	<b>CÓDIGOS</b>	<b>121</b>
B.1	Tapers . . . . .	121
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>131</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1	Generación de Segundo Armónico . . . . .	13
Figura 2	Generación de Suma de Frecuencias . . . . .	14
Figura 3	Generación de Diferencia de Frecuencias . . . . .	15
Figura 4	Generación de Tercer Armónico . . . . .	17
Figura 5	Sistema cilíndrico de coordenadas . . . . .	24
Figura 6	Perfil de fibra óptica . . . . .	25
Figura 7	Funciones de Bessel . . . . .	36
Figura 8	Solución gráfica para modos EH ( $m = 1$ ) . . . . .	47
Figura 9	Solución gráfica para modos HE ( $m = 1$ ) . . . . .	48
Figura 10	Solución gráfica para modos TE . . . . .	50
Figura 11	Solución gráfica para modos TM . . . . .	51
Figura 12	Dependencia de $n$ y $n_g$ respecto de $\lambda$ . . . . .	52
Figura 13	Fibras ópticas birrefringentes . . . . .	55
Figura 14	Perfil de fibra óptica estirada . . . . .	56
Figura 15	Mezclado de Cuatro Ondas no degenerado . . . . .	59
Figura 16	Mezclado de Cuatro Ondas degenerado . . . . .	59
Figura 17	Montaje experimental . . . . .	67
Figura 18	Perfiles de tapers . . . . .	72
Figura 19	Espectros experimentales y teóricos de los espectros de Spontaneous Four Wave Mixing (SFWM) generados dependientes de la temperatura de la fibra. . . . .	75
Figura 20	Espectros experimentales y teóricos de los espectros de SFWM generados dependientes de la elongación de la fibra. . . . .	76
Figura 21	Espectros experimentales y teóricos de los espectros de SFWM generados dependientes del diámetro de la cintura. . . . .	77
Figura 22	Resultados experimentales y teóricos para la dependencia en la temperatura. . . . .	80
Figura 23	Resultados experimentales y teóricos para la dependencia en la temperatura. . . . .	82
Figura 24	Diagrama de empatamiento de fases con birrefringencia constante y cambiando el radio de la fibra. . . . .	84
Figura 25	Resultados experimentales y teóricos para la dependencia en la temperatura. . . . .	85
Figura 26	Comparativa de los tres medios de sintonización. . . . .	86
Figura 27	JSI teóricas. . . . .	88

## ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1	Coefficientes de la ecuación de Sellmeier . . . .	51
Tabla 2	Parámetros de la fibra HB800C . . . . .	68
Tabla 3	Parámetros de los tapers fabricados . . . . .	71
Tabla 4	Comparativa de corrimientos espectrales. . . .	87

## CÓDIGOS

---

Código 1	Código para las gráficas de los perfiles de tapers. Se coloca el script de ejemplo para el caso de reducción al 60% del diámetro original. El lenguaje usado es Julia en versión 0.5.1. . . . .	121
----------	---	-----

## ACRÓNIMOS

---

APD	Avalanche Photodiode
BP	Band Pass (filter)
CCD	Charge-Coupled Device
CT	Control de Temperatura
DFG	Difference-Frequency Generation
DM	Dichroic Mirror
FWHM	Full Width at Half Maximum
FWM	Four Wave Mixing
GDV	Group Velocity Dispersion
GTP	Glan-Thompson Polarizer
HWP	Half Wave Plate
JSA	Joint Spectral Amplitude
JSI	Joint Spectral Intensity
MB	Microblock
MMF	Multi Mode Filter
NIM	Nuclear Instrumentation Module
OR	Optical Rectification
PBF	Prism-based spectral Bandpass Filter
PDC	Parametric Down Conversion
PMD	Polarization-Mode Dispersion
PMF	Polarization-Maintaining Fiber
PPKTP	Periodically Poled Potassium Titanyl Phosphate
PPLN	Periodically Poled Lithium Niobate
RMS	Root-Mean-Square
SFG	Sum-Frequency Generation
SFWM	Spontaneous Four Wave Mixing

SHG Second Harmonic Generation

SPDC Spontaneous Parametric Down Conversion

SPM Self-Phase Modulation

TE Transversal Eléctrica

THG Third Harmonic Generation

Ti:Sa Láser de titanio-safiro

TM Transversal Magnética

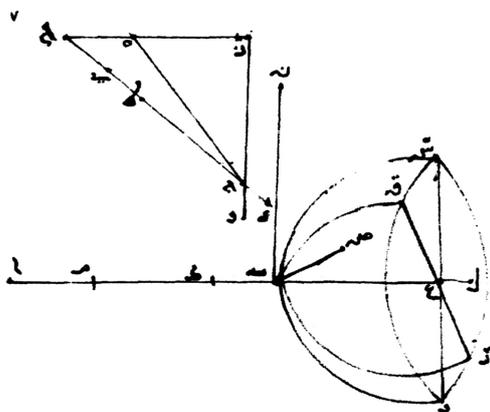
TOSPDC Third-Order Spontaneous Parametric Down Conversion

XPM Cross-Phase Modulation



## Parte I

### INTRODUCCIÓN



لانه ان ماتة عليها سطح مستوي غيره فلان هذا السطح يتقطع سطحين  
على نقطة ت كلابر من ان يتقطع احد خطي ب ن بص فليكن ذلك  
الخط مبصر والفصل المشرك بين هذا السطح وبين سطح قطع ق ر  
خط مبش فلان هذا السطح ياتر مسيطر على نقطة ت فخط  
ب ش يقطع ق ر على نقطة ت وكذلك خط مبصر وهذا الحال  
فلا ياتر مسيطر على نقطة ت سطح مستوي غيره سطح ب ن ص

Diagramas de refracción y lente plano convexa del libro «Sobre los instrumentos incendiarios» de Ibn Sahl, ca. 984 DC. [40]<sup>2</sup>

Pues veis que no me han dado algún soneto  
que ilustre de este libro la portada,  
venid vos, pluma mía mal cortada,  
y hacedle, aunque carezca de discreto.

Haréis que excuse el temerario aprieto  
de andar de una en otra encrucijada,  
mendigando alabanzas, excusada  
fatiga e impertinente, yo os prometo.

Todo soneto y rima allá se avenga,  
y adonde los umbrales de los buenos,  
aunque la adulación es de ruin casta;

Y dadme vos que este viaje tenga  
de sal un panecillo por lo menos;  
que yo os le marco por vendible, y basta.

Miguel de Cervantes Saavedra (1547–1616)



## INTRODUCCIÓN

---

Los insospechados beneficios de las tecnologías computacionales acaecidos principalmente a partir de la segunda mitad del siglo XX con el desarrollo de los circuitos integrados, nos han llevado a una antes inexistente necesidad de mejorar continuamente las capacidades de procesamiento y almacenaje de la información. La respuesta de la otrora nueva industria de los semiconductores, intentó dar caza a las predicciones impuestos por la ley de Moore<sup>1</sup> y que ha sido ajustada en más de una ocasión ante la cada vez mayor dificultad de los fabricantes de seguirla al pie de la letra. Es así que se preveé que los límites de la actual tecnología basada en el silicio lleguen en la próxima década, imponiéndose como barrera (teórica) transistores de dos a tres nanómetros de tamaño [79], causada por la prevalencia de fenómenos cuánticos como el tunelamiento de electrones o por el aumento en la temperatura de los procesadores [45].

Resulta imperativo entonces buscar una solución al cuello de botella que dicho límite impondrá, y es la mecánica cuántica la que abrirá la brecha, si bien no sin el sacrificio del uso de los bien conocidos *bits* clásicos, que están sólo en un estado determinado, 0 o 1; por los mucho más exóticos *qubits*, que en su estado puro se pueden representar como un vector [81],  $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ , tal que  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , donde  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ; es decir, el *qubit* consta de la superposición de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . La generación de estas nuevas unidades de información,  $|\Psi\rangle$ , y su uso como tales es tema aparte, pero en el fotón se haya un candidato de *qubit* fotónico. En este sentido existen ya propuestas para su uso en sistemas de cómputo cuántico [41], si bien su empleo no se restringe a este ámbito al poder ser implementados en criptografía cuántica [43], teletransporte cuántico [80], metrología cuántica [31] o en comunicaciones cuánticas [32].

Dichas implementaciones prácticas de *qubits* fotónicos requieren de fuentes de parejas de fotones usualmente generados mediante procesos paramétricos espontáneos [20], predominando su generación mediante la conversión paramétrica descendente en cristales no lineales a segundo orden y, últimamente, mediante el mezclado espontáneo de cuatro ondas en fibra óptica [24][69][71][23]; si bien se ha propuesto el uso no sólo de parejas de fotones sino el de tripletas [17][18] existiendo ya avances en la materia [36][35][44][9].

Interesan en particular para nuestros objetivos explorar la modificación de los fotones generados por mezclado de cuatro ondas espon-

---

<sup>1</sup> Más que una ley, se trata de una observación sobre el camino que debía perseguir la industria en pos de mantener su competitividad.

táneo. Sobre esto, es sabido que el estado de estos fotones depende de la dispersión que las cuatro ondas involucradas experimentan en una guía de onda [27], es así que la fabricación de fibras ópticas especiales con determinadas estructuras y propiedades de dispersión internas se realiza para inducir la generación de parejas de fotones dentro de cierto rango espectral deseado. Entre las técnicas empleadas, se haya el uso de distintos tipos de fibras ópticas como las de cristal fotónico [51], de vidrio calcogenuro [53], de una alta no linealidad [14] o de múltiples recubrimientos [55]. La fabricación de estos tipos de fibra puede resultar complicada a la vez que cara, reduciendo su factibilidad práctica. Así, la sintonización espectral del estado de dos fotones es quizá la manera más simple de modificar el estado sin afectar el grado de correlación de los mismos.

Esta sintonización espectral puede ser útil si se desea maximizar la detección de los fotones en los detectores puestos a tal propósito<sup>23</sup>, para que los fotones alcancen la energía de las transiciones electrónicas en átomos o puntos cuánticos, o si es requerido que alcancen la condición de empatamiento de fase óptima si interactúan con otros campos. Estas fuentes de fotones pueden ser implementadas en dispositivos de tomografía cuántica [65], fuentes anunciadas de fotones individuales [62], para mejorar la sincronización de relojes, cancelar la dispersión en interferómetros; o para mejorar mediciones de tiempo o para probar a la misma mecánica cuántica mediante la medición de desigualdades de Bell; todo esto al aprovechar el entrelazamiento en frecuencia de las parejas de fotones generados en estos procesos [71]<sup>45</sup>. Por lo que el acometer la sintonización a través de la manipulación de muestras de fibra óptica cada vez que se requiera una condición espectral en particular de los fotones es deseable.

### 1.1 PROPUESTA Y OBJETIVOS

Es así que para lograr la sintonización del estado de dos fotones generados por el mezclado espontáneo de cuatro ondas en una fibra óptica birrefringente se explorarán tres mecanismos: mediante el estrechamiento de la fibra, su calentamiento y con la aplicación de un estrés longitudinal. Se desarrollará a su vez la teoría de generación de parejas de fotones en fibra óptica estrechada generalizando este

- 
- 2 Los detectores de un solo fotón no son igual de eficientes en su detección para cualquier longitud de onda; es propio de los fabricantes de estos dispositivos informar de esta dependencia en la eficiencia de detección y del usuario de revisar las especificaciones reportadas en pos de realizar adecuadamente su cometido.
  - 3 Otras veces esta sintonización también puede ser usada para ajustar el espectro de los fotones a las bandas de transmisión de los filtros disponibles en el laboratorio.
  - 4 A los procesos a los que nos referimos son la generación de fotones mediante mezclado espontáneo de cuatro ondas en particular.
  - 5 Todas estas últimas aplicaciones son mencionadas en el artículo [71], del cual se recomienda ampliamente su consulta, pues enlaza a otros artículos que abundan con mayor detalle estos temas.

modelo a las otras dos técnicas de sintonización, e identificando a su vez los parámetros relevantes que son modificados en la guía óptica que originan el corrimiento espectral esperado.

Hay que hacer hincapié en que el uso de fibra óptica estrechada ha sido propuesto e implementado para la generación de espectros supercontinuos [15][8], para la generación de tercer armónico [48] y para la generación también de parejas de fotones mediante mezclado de cuatro ondas [21].

## 1.2 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Se comenzará hablando de fenómenos ópticos no lineales, con el fin de dar una pauta apropiada para comprender la generación de fotones en medios ópticos. Proseguiremos después a la descripción del guiado de luz en fibra óptica, introduciéndonos en sus principales características y desarrollando las ecuaciones de campo electromagnético dentro de estas, explorando las condiciones de confinamiento y sobre todo de propagación, que serán usadas en la sección siguiente que tratará de la generación del estado de dos fotones mediante mezclado espontáneo de cuatro ondas en fibra óptica estrechada, generalizando esta descripción a los otros dos métodos de sintonización. Si bien la teoría desarrollada en este capítulo se acondicionó al tipo de fibras que se pueden fabricar en el laboratorio de óptica cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares de la Universidad Nacional Autónoma de México, se puede adaptar dicho modelo para predecir el estado de dos fotones generado en fibras de perfil longitudinal de radio variable más general [77].

Finalmente se presentarán los resultados experimentales logrados con las tres técnicas de sintonización, no sin antes hacer una descripción del montaje experimental realizado, y se disertará sobre estos comparándolos con los modelos teóricos e identificando el cambio en los parámetros internos de las fibras ópticas causantes en la modificación de las propiedades de dispersión de las mismas.

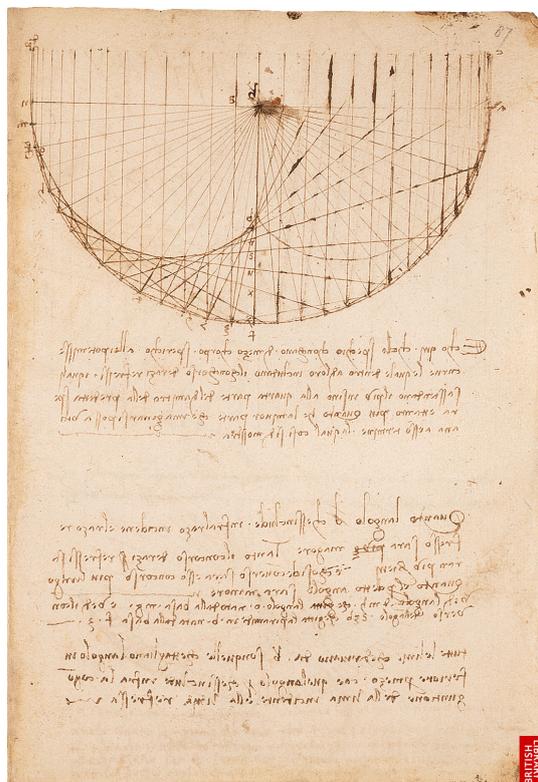
Al término del texto se coloca una sección de apéndices con las observaciones y aclaraciones que se dejaron pendientes, pero que se consideraron pertinentes tanto para no alargar innecesariamente la lectura como para dejar claros los puntos ahí tratados.

Así sin más dilación se prosigue avante.



## Parte II

### MARCO TEÓRICO



Estudios de Leonardo Da Vinci sobre espejos cóncavos como fuentes de calor.<sup>6</sup>

Aunque es clara del Cielo la luz pura,  
clara la Luna y claras las Estrellas,  
y claras las efímeras centellas  
que el aire eleva y el incendio apura;

aunque es el rayo claro, cuya dura  
producción cuesta al viento mil querellas,  
y el relámpago que hizo sus huellas  
medrosa luz en la tiniebla obscura;

todo el conocimiento torpe humano  
se estuvo obscuro sin que las mortales  
plumas pudiesen ser, con vuelo ufano,

Ícaros de discursos racionales,  
hasta que el tuyo, Eusebio soberano,  
les dio luz a las Luces celestiales.

Sor Juana Inés de la Cruz (1648–1695)

<sup>6</sup> British Library. Turning the pages.



En este capítulo se tratará de forma general a los fenómenos ópticos surgidos de una interacción no lineal. Se hará un hincapié especial en el fenómeno conocido como Mezclado Espontáneo de Cuatro Ondas, al ser este el origen de los fotones medidos en el experimento.

El fin de la óptica es la descripción de «la generación, composición, transmisión e interacciones de la luz, e intenta relacionarlos con otros fenómenos físicos» [5]. En otras palabras, es el estudio de las interacciones de las ondas electromagnéticas con la materia en rededor de la región visible del espectro electromagnético, no siendo exclusiva de su estudio esta región pues se incluyen las zonas del infrarrojo y ultravioleta al poseer características similares que pueden ser estudiadas casi con la misma facilidad.

La longitud de onda de las regiones del espectro que la óptica estudia son tan pequeñas, que su tratamiento se puede hacer usualmente con funciones continuas<sup>1</sup> y la óptica geométrica<sup>23</sup> resulta de tanta utilidad que muchas veces se pueden obviar los fenómenos de difracción inherentes a cualquier sistema óptico.<sup>4</sup> En la aproximación lineal de interacción de la luz con la materia, esta linealidad encontrada en las ecuaciones de campo electromagnético permite que la suma de dos o más soluciones a las ecuaciones diferenciales del campo sea también una solución, lo que da pie a afirmar que una combinación lineal de soluciones es también solución; es este pues el principio de superposición. Sin embargo, el tratamiento lineal es tan sólo una aproximación, mas una muy buena, ya que los términos no lineales son tan pequeños que sólo se hacen evidentes a magnitudes muy altas del campo. La no linealidad en otros fenómenos físicos no es algo nuevo, por ejemplo, en la acústica y en el estudio de los medios deformables.

- 1 Refiriéndonos con esto a funciones continuas desde el punto de vista del cálculo, a veces, se les suele llamar «bien comportadas» si además su derivada también es continua, esto vuelve a la función continuamente diferenciable, en este texto se supondrá que las funciones empleadas son por lo menos funciones continuamente diferenciables dos veces, o de clase  $\mathcal{C}^2$ , se recomienda la consulta del texto [19], donde se ahonda con mucha más profundidad dicho tópico.
- 2 «La óptica geométrica estudia el comportamiento de los instrumentos ópticos y de sus elementos bajo la hipótesis simplificadora de que existen rayos de luz representables por líneas». [64]
- 3 En otras palabras, la óptica geométrica «estudia la manipulación controlada de los frentes de onda (o rayos) por medio de la interposición de cuerpos reflectantes y/o refractantes, despreciando cualquier efecto de difracción.»[33]
- 4 La aproximación dada por la óptica geométrica es útil siempre que la luz no presente fenómenos de difracción, interferencia o polarización; fenómenos que son propios del campo de estudio de la óptica física, donde el tamaño de los medios con los que la luz interactúa, polarización ni longitud de onda han de ser despreciados. [33][60]

La óptica no lineal se fue sembrando durante el desarrollo de la teoría electromagnética, la de dispersión electrónica y la teoría cuántica. En particular bajo las primeras observaciones de fenómenos relacionados con la actividad óptica y la doble refracción. La observación de que campos electromagnéticos muy fuertes inducen en algunos medios originalmente isotrópicos una doble refracción en los efectos Kerr y Pockels, el desdoblamiento de las líneas espectrales mediante un campo magnético en el efecto Zeeman, fueron de las primeras evidencias del comportamiento no lineal de la materia a los campos electromagnéticos. Sin embargo, la explicación completa a estos fenómenos se halla con métodos propios de la mecánica cuántica. Del mismo modo, la aparición de nuevas frecuencias características causadas por las vibraciones de la estructura molecular en el efecto Raman no se podían explicar a través de la aproximación de que los medios eran lineales.

La no linealidad de un medio se presenta en un cambio de las propiedades ópticas de este como función de la intensidad de luz que lo causa, o por fenómenos observados al hacer incidir una o más ondas de luz. Existen, en general, dos tipos de no linealidades

**INTRÍNSECAS:** Violaciones al principio de superposición que surgen de respuestas no lineales de moléculas individuales o de celdas unitarias a dos o más ondas. Se pueden presentar incluso para un mismo haz, pues este se puede representar como la suma de haces con la misma polarización, frecuencia y dirección.[5]

**EXTRÍNSECAS:** Cambio en las propiedades ópticas relacionado con un cambio en la composición del medio resultando en la absorción o emisión de luz. Los cambios se pueden deber al cambio relativo en las poblaciones de los estados excitados y basales o en el número de electrones ópticamente efectivos. El historial de exposición así como la intensidad instantánea a la que es sometido el medio determina su comportamiento óptico.[5]

El que no veamos fenómenos ópticos no lineales cotidianamente se debe a la intensidad de las ondas de luz a las que estamos diariamente expuestos y que fueron por mucho tiempo las mismas utilizadas en el desarrollo de la óptica. En un día cualquiera la intensidad eléctrica de la luz es del orden de  $600\text{V/m}$ , que es mucho menor a los  $5 \times 10^{11}\text{V/m}$  de la intensidad eléctrica que enlaza al electrón de dispersión en el átomo de hidrógeno [5], por lo que los efectos no lineales nunca acaecerían, aparte de los debidos a la presencia de campos magnéticos y eléctricos externos aplicados al medio que no por la intensidad misma de la luz que los atraviesa. No fue sino hasta la invención del láser en que se logró tener haces con la suficiente inten-

sidad y coherencia para ver un nuevo impulso en el desarrollo de la óptica no lineal.

## 2.1 CONSIDERACIONES SOBRE LOS MEDIOS

Como ya se había mencionado los medios ópticos varían su respuesta de acuerdo a la intensidad del campo electromagnético que los atraviesa. Dicho comportamiento óptico no lineal surge de la anarmonicidad de la respuesta oscilatoria de los electrones de enlace del material al campo electromagnético de la onda. Para caracterizar dicha respuesta hacemos uso de la dependencia del momento dipolar por unidad de volumen o polarización<sup>5</sup>,  $\mathbf{P}$ , respecto del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , se tiene pues en general que [2][10]

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right), \quad (1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y  $\chi^{(j)}$  es la susceptibilidad eléctrica del medio de  $j$ -ésimo orden y es un tensor de rango  $j + 1$ .<sup>6</sup>

El término  $\chi^{(1)}$  es responsable de toda la respuesta óptica lineal,  $\chi^{(2)}$  se asocia a fenómenos de segundo orden como la generación de segundo armónico, y el término  $\chi^{(3)}$  se asocia a fenómenos como la generación de tercer armónico y mezclado de cuatro ondas<sup>7</sup>.

Desde una aproximación escalar, para materia condensada los términos de susceptibilidad eléctrica son del orden de las siguientes magnitudes [10]

$$\chi_{(1)} \simeq 1, \quad (2)$$

$$\chi_{(2)} \simeq 1.94 \times 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}, \quad (3)$$

$$\chi_{(3)} \simeq 3.78 \times 10^{-24} \frac{\text{m}^2}{\text{V}^2}. \quad (4)$$

Esta observación resulta útil para apreciar la magnitud de la contribución de las respuestas no lineales del medio y de la necesidad del uso de campos electromagnéticos muy intensos para hacer evidente la presencia de una respuesta no lineal.

Sin embargo, hay que recordar que son cantidades tensoriales y la sola simplificación de los términos de susceptibilidad en términos

<sup>5</sup> A veces, para evitar confusiones con las dos acepciones de «polarización» usadas en el texto, se empleará el término «polarización inducida» en vez de simplemente «polarización» para diferenciar el término asociado a la dirección de oscilación del campo eléctrico de cuando se usa como referencia al momento dipolar por unidad de volumen.

<sup>6</sup> En general se puede mostrar que cada término  $\mathbf{E}$  en la ecuación (1) se puede considerar de distinta frecuencia, al poder expandir en general a cualquier campo eléctrico incidente en el material como la suma de ondas planas monocromáticas, si bien se recomienda el estudio de las ecuaciones de onda acopladas para seguir más a fondo este argumento. En este sentido pueden ser de utilidad las referencias [10],[70] o [4].

<sup>7</sup> Four Wave Mixing (FWM).

escalares no es suficiente, pues la misma dependerá de la orientación del campo eléctrico y de condiciones internas del material considerado. Entre estas condiciones se encuentran que los fenómenos a segundo orden ocurren en materiales cristalinos sin centrosimetría, mientras que los de tercer orden aparecen en todos los medios ópticos, sean isotrópicos o no [10].<sup>8</sup>

Hay que considerar además que pueden suceder dos tipos de procesos, los llamados paramétricos y no paramétricos.

Un proceso paramétrico es aquel en donde los estados cuánticos iniciales y finales de un sistema son idénticos, además, sus susceptibilidades pueden ser escritas en términos de números reales. Debe considerarse también a la conservación de la energía de los fotones en estos procesos, por lo que no hay transferencia de energía al medio, además las poblaciones que median la interacción del proceso son removidas de su estado basal a un estado virtual en un tiempo del orden  $\hbar/\delta E$  con  $\delta E$  la diferencia de energía entre el estado virtual y el estado real más cercano.

En los procesos no paramétricos sí hay transferencia de energía al medio, las poblaciones se mueven entre estados reales, las susceptibilidades son escritas en números complejos y no se conserva la forma del estado cuántico.

## 2.2 FENÓMENOS NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Exploraremos brevemente algunos fenómenos ópticos no lineales de segundo orden como motivación para proseguir posteriormente con los de tercer orden.

Si consideramos la forma escalar de (1)

$$\tilde{P}(t) = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \tilde{E}(t) + \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t) + \chi^{(3)} \tilde{E}^3(t) + \dots \right), \quad (5a)$$

$$= \tilde{P}^{(1)}(t) + \tilde{P}^{(2)}(t) + \tilde{P}^{(3)}(t), \quad (5b)$$

tomemos el segundo término de (5b)

$$\tilde{P}^{(2)} = \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t), \quad (6)$$

que será el responsable de los fenómenos no lineales de segundo orden que estamos estudiando.

### 2.2.1 Generación de segundo armónico

Sea un haz de luz con una intensidad de campo eléctrico

$$\tilde{E}(t) = E \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} \quad (7)$$

<sup>8</sup> No quiere decir que no se puedan observar fenómenos de segundo orden en medios anisotrópicos, pero resulta que en estos últimos el efecto cuadrupolar y de dipolo magnético presentan una tasa de conversión muy baja.[2]

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación del campo,  $E$  su amplitud y c.c el complejo conjugado del primer término de la ecuación (7). Se puede calcular que

$$\tilde{E}^2(t) = E^2 \exp(-i2\omega t) + E^{*2} \exp(i2\omega t) + 2EE^*, \quad (8)$$

$$= 2EE^* + (E^2 \exp(-i2\omega t) + \text{c.c.}), \quad (9)$$

con lo que (6) queda

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = 2\epsilon_0\chi^{(2)}EE^* + (E^2 \exp(-i2\omega t) + \text{c.c.}). \quad (10)$$

El primer término de la ecuación (10) no posee término de frecuencia, por lo que no genera radiación, pero sí un campo eléctrico a lo largo de un cristal, proceso conocido como «rectificación óptica»<sup>9</sup>. El segundo término contiene contribuciones con una frecuencia  $2\omega$  respecto a la del campo original  $\omega$ , indicando que se genera radiación con el doble de la frecuencia de la luz incidente, que llamaremos de bombeo. A este proceso se le conoce como «generación de segundo armónico»<sup>10</sup>. Desde el punto de vista cuántico lo podemos ver como el intercambio de dos fotones de frecuencia  $\omega$  que son destruidos y se crea otro de frecuencia  $2\omega$ .

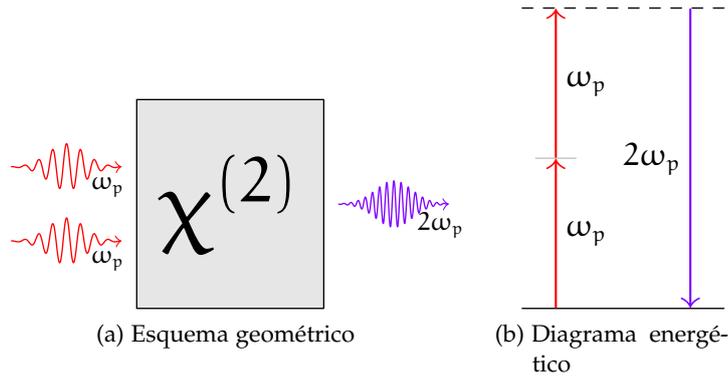


Figura 1: Diagrama de generación de segundo armónico.

### 2.2.2 Generación de suma y resta de frecuencias

Ahora consideremos un campo incidente

$$\tilde{E}(t) = E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t) + \text{c.c.} \quad (11)$$

haciendo el cálculo para  $\tilde{E}^2(t)$  se puede llegar luego de sustituir en (6)

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(2)}(t) &= \epsilon_0\chi^{(2)}(E_1^2 \exp(-2i\omega_1 t) + E_2^2 \exp(-2i\omega_2 t) \\ &\quad + 2E_1 E_2 \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)t) + 2E_1 E_2^* \exp(-i(\omega_1 - \omega_2)t) + \text{c.c.}) \\ &\quad + 2\epsilon\chi^{(2)}(E_1 E_1^* + E_2 E_2^*), \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>9</sup> Optical Rectification (OR).

<sup>10</sup> Second Harmonic Generation (SHG).

donde podemos identificar varios términos si desarrollamos a  $\tilde{P}^{(2)}(t)$  como

$$\tilde{P}^{(2)}(t) = \sum_n P(\omega_n) \exp(-i\omega_n t), \quad (13)$$

donde se puede observar que

$$P(2\omega_1) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_1^2, \quad (14)$$

$$P(2\omega_2) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_2^2, \quad (15)$$

$$P(\omega_1 + \omega_2) = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} E_1 E_2, \quad (16)$$

$$P(\omega_1 - \omega_2) = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} E_1 E_2^*, \quad (17)$$

$$P(0) = 2\epsilon_0 \chi^{(2)} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*), \quad (18)$$

donde las ecuaciones (14) y (15) se asocian al SHG, el término (16) con la generación de una suma de frecuencias<sup>11</sup>, el término (17) con la generación de una resta de frecuencias<sup>12</sup> y el término (18) con OR.

Si bien se habría de considerar los términos como  $-\omega_1 - \omega_2$ , et-cétera; estos pertenecen a la parte compleja conjugada, y luego no es necesario tomarlos en cuenta explícitamente. No todos estos procesos se dan a la vez pues han de satisfacerse condiciones de empatamiento de fases, que serán explicadas con más detenimiento después. En la práctica esto dependerá de seleccionar la polarización de la radiación incidente y la orientación del cristal no lineal.

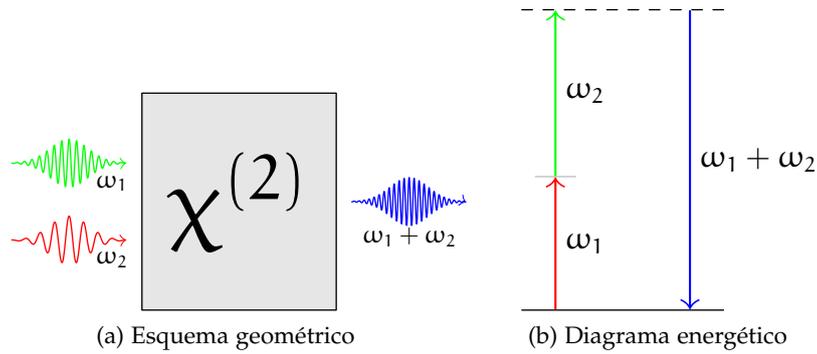


Figura 2: Diagrama de generación de suma de frecuencias.

### 2.2.3 Conversión paramétrica descendente

Considerado el proceso inverso de la generación espontánea de suma de frecuencias, en el cual la adición coherente de luz de cada uno de los fotones tiene interferencia constructiva, sólo en ciertas direcciones y polarizaciones para lograr el empatamiento de fase, con lo que

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (19)$$

<sup>11</sup> Sum-Frequency Generation (SFG).

<sup>12</sup> Difference-Frequency Generation (DFG).

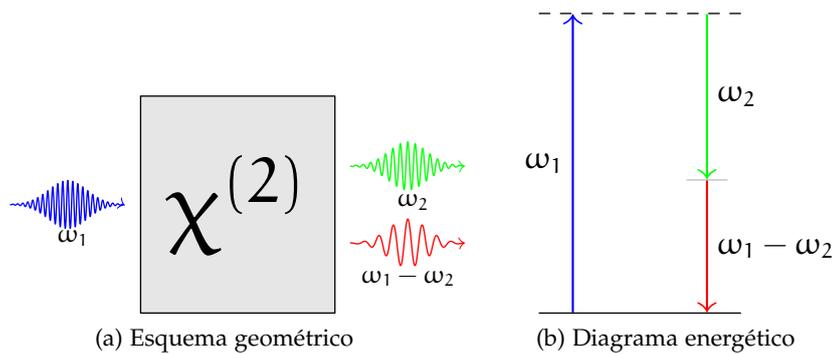


Figura 3: Diagrama de generación de diferencia de frecuencias.

En la conversión paramétrica descendente<sup>13</sup> un cristal es bombardeado con luz a cierta frecuencia,  $\omega_p$ , y se separa en otras dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfaciendo las condiciones de conservación de energía y momento en la transformación. Por ejemplo en un cristal BBO<sup>14</sup>, bajo una incidencia de un láser de 405nm se generan dos conos de luz traslapados cada uno con polarización distinta y correlacionada entre ellos a 810nm. Cada uno de los haces generados se llaman, como ya viene siendo costumbre, señal y acompañante. Una de las desventajas de este proceso como fuente de fotones es la corta longitud del medio activo lo que limita la cantidad de fotones generados y la estructura espacial de los mismos limita su utilización al ser difícil su acoplamiento a fibra óptica, a través de las cuales son llevados a detectores diversos o a otro tipo de sistemas para alguna aplicación en específico.

Este proceso en su régimen espontáneo<sup>15</sup> es usado ampliamente en fuentes de dos fotones, sin embargo en general las condiciones de emparejamiento de fases obedecen fuertemente a la dirección de los haces involucrados. Para saltar la dificultad que supone esta dependencia, es con frecuencia que se emplean cristales periódicamente polarizados de  $\text{KTiOPO}_4$ , conocidos por sus siglas en inglés como PPKTP<sup>16</sup>, o los de niobato de litio o PPLN<sup>17</sup> por sus siglas en inglés.

Estos cristales se emplean en un proceso llamado cuasi emparejamiento de fases en donde se utiliza una modulación espacial de las propiedades no lineales, en este proceso se deja hacer el emparejamiento de fase en una cierta región del cristal, revirtiendo en la región siguiente del mismo las interacciones que propicien una dirección de propagación incorrecta. [57][61]

Empleando alguno de estos cristales tal que la dirección de propagación sea a lo largo del eje del cristal, se puede entrar en el régimen

<sup>13</sup> Parametric Down Conversion (PDC).

<sup>14</sup> Beta Bario Borato.

<sup>15</sup> Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC).

<sup>16</sup> Periodically Poled Potassium Titanyl Phosphate.

<sup>17</sup> Periodically Poled Lithium Niobate.

de empatamiento de fases no crítico,<sup>18</sup> donde los haces interactúan a lo largo de alguno de los ejes cristal birrefringente y se minimiza la función de empatamiento de fases<sup>19</sup> tal que la velocidad de fase de las ondas sea igual. [56] Esto es porque se requiere que la relación de fase entre los fotones sea constante a lo largo del cristal en pos de eficientar las conversiones no lineales dentro del mismo. En las regiones del cristal que están invertidas en su polarización se generan fotones que están 180° fuera de fase respecto a las regiones no invertidas. Al elegir la periodicidad del cristal correctamente, los fotones generados siempre estarán interfiriendo constructivamente con los previamente generados, incrementando la eficiencia de generación.

Las condiciones de empatamiento de fase dependen en general de un factor de expansión térmico del material, lo que hace posible en este régimen, y sin tener desviaciones del haz, una sintonización espectral de los fotones resultantes, la cual se mantiene tan constante como lo sea el control de la temperatura sobre el medio no lineal. Al respecto se han reportado dependencias en la temperatura de sintonización espectral para SPDC de 0.198nm/°C en PPKTP[47] y de ~ 0.77nm/°C en PPLN[76]

Configuraciones combinadas de cristales PPKTP y PPLN se han usado en la generación de tripletas de fotones entrelazados en tiempo y energía.[68]

### 2.3 FENÓMENOS NO LINEALES DE TERCER ORDEN

El origen de estos fenómenos lo podemos encontrar en el tercer término de la ecuación (1)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{EEE}, \quad (20)$$

que en su forma escalar se puede escribir como

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \tilde{\mathbf{E}}^3(t). \quad (21)$$

Exploraremos con brevedad algunos de los fenómenos asociados a este término de la polarización inducida.

#### 2.3.1 Generación de tercer armónico

Considerando una onda monocromática

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathcal{E} \cos(\omega t), \quad (22)$$

<sup>18</sup> *Noncritical phase matching*, también se conoce como empatamiento de fases dependiente de la temperatura o empatamiento de fases a 90°.

<sup>19</sup> Como se verá en el Capítulo 4, al minimizar dicha función se optimiza la generación de fotones, esta condición apela a la conservación de la energía y el momento en la conversión.

como  $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \cos(\omega t)$ , (21) quedaría

$$\tilde{P}^{(3)} = \frac{1}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \cos(3\omega t) + \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \cos(\omega t). \quad (23)$$

En donde el primer término se refiere a la emisión en un tercer armónico de la frecuencia de bombeo original. Desde la perspectiva cuántica tres fotones de frecuencia  $\omega$  se eliminan y se produce otro de frecuencia  $3\omega$ . A este proceso se lo conoce como generación de tercer armónico<sup>20</sup>

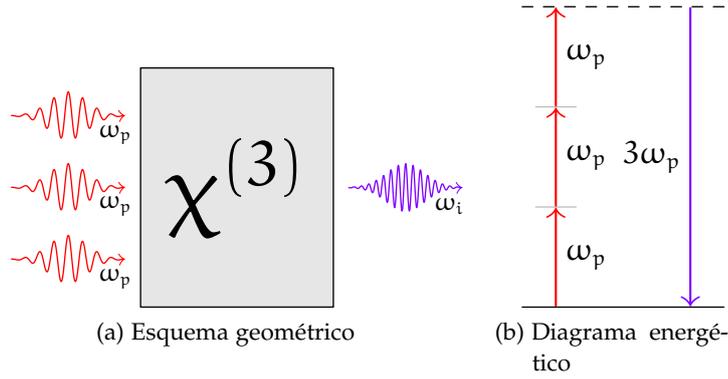


Figura 4: Diagrama de la generación de tercer armónico.

### 2.3.2 Índice de refracción dependiente de la intensidad

El segundo término de (23) se refiere a una contribución a  $\tilde{P}^{(3)}$  con una frecuencia igual a la de bombeo, la cual se asocia a una dependencia en el índice de refracción del medio con la intensidad de la luz que lo atraviesa. En términos de la amplitud del campo eléctrico el índice de refracción se puede escribir como<sup>21</sup>

$$\tilde{n}(n, E) = n(\omega) + \bar{n}_2(\omega) |E|^2, \quad (24)$$

donde  $n(\omega)$  está dado por la ecuación (267) y

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n\omega} \text{Re}(\chi_{xxx}^{(3)}). \quad (25)$$

<sup>20</sup> Third Harmonic Generation (THG).

<sup>21</sup> Esta expresión se puede encontrar también escrita en términos de la intensidad de la onda incidente

$$I(\omega) = \frac{1}{2} n(\omega) \epsilon_0 c E^2,$$

donde  $E$  es la amplitud de campo eléctrico con lo que (24) se puede escribir como

$$\tilde{n}(\omega, I) = n(\omega) + n_2 I.$$

En fibras ópticas muchos de los fenómenos ópticos no lineales surgen por esta contribución, conocida también como efecto Kerr óptico. Dentro de los fenómenos surgidos de esta dependencia se encuentra el auto-enfoque, en donde un material con una  $\bar{n}_2 > 0$  actúa ante un haz luminoso con una distribución de intensidad transversal no uniforme como una lente positiva, causando que los rayos del haz se curven hacia sí logrando en algunos casos que en el punto de enfoque la intensidad sea tal que puede ocasionar un daño óptico.

Otro fenómeno surgido de la dependencia en la intensidad del índice de refracción es el de auto-modulación de fase<sup>22</sup> que explica el desfase auto-inducido que experimenta el campo óptico en las fibras ópticas, la magnitud de esta fase inducida está dada por

$$\phi = \tilde{n}k_0L = (n + \bar{n}_2|E|^2)k_0L, \quad (26)$$

donde  $k_0 = 2\pi/\lambda$  y  $L$  es la longitud de la fibra, donde se considera a  $\phi_{NL} = \bar{n}_2|E|^2k_0L$  a la parte no lineal de este desfase. Este fenómeno se relaciona con el ensanchamiento espectral de pulsos ultracortos y con la formación de solitones ópticos en fibras de régimen de dispersión anómalo.

También relacionado al fenómeno que intitula esta parte del texto, se haya la modulación de fase cruzada<sup>23</sup>, que es el desfase inducido por otro campo con distinta longitud de onda, dirección o estado de polarización. Para dos campos eléctricos linealmente co-polarizados, de amplitud  $E_1$  y  $E_2$  el desfase no lineal es

$$\phi_{NL} = \bar{n}_2k_0L(|E_1|^2 + 2|E_2|^2), \quad (27)$$

para dos campos de igual intensidad pero distinta longitud de onda la contribución de corrimiento de fase no lineal debida al XPM duplica a la del SPM. Al XPM se le debe el ensanchamiento espectral asimétrico de pulsos ópticos.

### 2.3.3 Interacciones de tercer orden

Continuaremos estudiando la ecuación (21). Si se considera un campo aplicado.<sup>24</sup>

$$\tilde{E}(t) = \sum_{j=1}^3 E_j \exp(-i\omega_j t) + c.c, \quad (28)$$

se vuelve considerablemente más engorroso el cálculo de  $\tilde{E}^3(t)$ , pues se obtendría una expresión con 44 términos de frecuencia que se redu-

<sup>22</sup> Self-Phase Modulation (SPM).

<sup>23</sup> Cross-Phase Modulation (XPM).

<sup>24</sup> Por simplicidad se omiten los términos asociados a las constantes de propagación en fibra.

cen a 22 al considerar los términos de frecuencia negativa y positiva distintos. Representando la polarización no lineal

$$\tilde{P}^{(3)}(t) = \sum_n P(\omega_n) \exp(-i\omega_n t), \quad (29)$$

se pueden encontrar expresiones para cada una de las  $P(\omega_n)$  que se relacionan con procesos que involucran la suma o diferencia de frecuencias de los campos involucrados. [10]<sup>25</sup>

Existen otros fenómenos relacionados con la no linealidad a tercer orden de la polarización inducida como la Conversión Paramétrica Descendente de Tercer Orden<sup>26</sup>, el esparcimiento Raman estimulado o el Mezclado de Cuatro Ondas, este último al ser el origen de los fotones en el experimento y dado el peso que esto conlleva dentro del texto, tendrá su propio capítulo dentro del cual se estudiará más a fondo dicho proceso con particular hincapié a las condiciones establecidas durante el experimento.

---

25 Se recomienda observar las ecuaciones 1.2.17 de la referencia aquí citada, si se quieren conocer estas expresiones, que se omiten al ser 22 ecuaciones que extenderían innecesariamente el texto.

26 Third-Order Spontaneous Parametric Down Conversion (TOSPDC).



En este capítulo se hablará de la propagación de la luz en una fibra óptica, para lo cual se resolverá el campo electromagnético en ella. Se considerará a la fibra óptica como una guía de onda dieléctrica caracterizada por el índice de refracción de sus partes (núcleo y recubrimiento) y se usará a una onda electromagnética viajando en dirección  $z$ , paralela al eje de la fibra.

En las fibras ópticas se puede encontrar un infinito número de soluciones, a cada una de estas las llamaremos «modos de propagación» o simplemente «modos», sin embargo para ciertas condiciones en las constantes electromagnéticas del material (y últimamente de sus índices de refracción) y de las dimensiones de sus elementos, sucede que se puede encontrar un número finito de estos modos cuyos campos se localizan en la vecindad del núcleo. Podemos identificar cada uno de estos modos con una distribución coherente de luz que se propaga por la fibra gracias a la reflexión total interna y que poseen una velocidad de fase bien definida.[73]

Será pues el fin último de este capítulo obtener una descripción de dichos modos de propagación y obtener un modelo para la caracterización de una fibra óptica de acuerdo con los modos que esta es capaz de transmitir.

### 3.1 CONTEXTO HISTÓRICO

El emplear luz como medio de comunicación no es algo nuevo, ya en el año 400 a.C se empleaban antorchas para transmitir mensajes entre las torres de vigía en la gran muralla china[74] y mucho después con el fonógrafo de Bell[6]. Por otra parte el corte de piezas de vidrio para hacer lucir su brillo ya era conocido en el antiguo Egipto y el mismo principio fue usado en el corte de otras piedras preciosas como los diamantes.

La conjunción de la fabricación de material translúcido y su uso como guía de luz se dio ya entrado el siglo XIX. Con base en el conocimiento de las leyes de refracción y de previas observaciones de Felix Savart, Daniel Colladon demostró en 1841 en la universidad de Génova la posibilidad de guiar luz en agua. [16] Jacques Babinet más o menos por la misma fecha extendió esta idea a guías de luz rígidas hechas de vidrio. El guiado de luz en agua se usó en la feria mundial de 1889 en París en unas fuentes iluminadas que resultaron de tal atractivo que rivalizaban con la recién inaugurada torre Eiffel [38].

Hacia la década de los ochenta del siglo XIX, un ingeniero estadounidense, William Wheeler patentó [82] lo que llamó «tuberías de luz» de tal manera que se aprovechara la mayor cantidad de luz de las lámparas de arco eléctrico de la época, un invento todavía novedoso en aquellos años. Las fibras de vidrio comenzaron de una forma más frívola como elementos decorativos para el vidrio soplado, pequeñas artesanías e incluso para la decoración de sombreros. No fue sino hasta los trabajos de Charles Vernon Boys hacia 1887, que tuvieron su primer uso no mundano como alambres para balanzas de torsión. [13] Si bien su fabricación no se masificó y tomó la forma de hilo continuo hasta 1935, producto de un proyecto conjunto de «The Corning Glass Works» y de la «Owes-Illinois Glass Company» para formar la compañía «Owens-Corning Fiberglass Corporation» que fabricó fibra de vidrio para su uso textil.[38] Tristemente no había aún mucho interés en el estudio de sus propiedades ópticas, aunque el guiado de luz en medios dieléctricos había avanzado un poco en paralelo del incipiente desarrollo de la televisión y el telefoto, no sin mencionar su uso como forma de iluminación para dentistas y médicos.

Posteriormente se descubrió la utilidad de tener fibras ópticas con un recubrimiento con un índice de refracción distinto al del núcleo hacia la década de los cincuenta del siglo XX, habiendo una guerra de patentes de por medio y su posterior fabricación masiva destinada sobre todo a guías de luz coherentes empleadas en endoscopios. Su uso como vía de comunicación debía competir con las guías de ondas confocales<sup>1</sup> y la baja transparencia del vidrio empleado.<sup>2</sup>

No fue sino hasta la década de los setenta en que la compañía Corning consigue fabricar fibras con pérdidas debajo de los 20dB/Km<sup>3</sup>, ya para 1979 las pérdidas llegaban a 0.2dB/Km@ $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ . [26][39] Su uso en la óptica no lineal no es lejano a la fecha de invención del láser, tan sólo una década después, en 1972, se emplearon los láseres en el estudio de los procesos de dispersión de Raman y Brillouin en fibra [75][37][72]. En 1980 fueron observados solitones [52] gracias al desarrollo en la generación de pulsos ultracortos. Ya en 1996 surgen las fibras de cristal fotónico y en los primeros años del siglo XXI la dispersión Raman y el mezclado de cuatro ondas son empleados en el desarrollo de amplificadores ópticos. [2]

Es pues que el desarrollo de la fibra óptica no sólo ha rendido sus frutos en el campo de las telecomunicaciones, en particular en las conexiones a Internet de gran ancho de banda; o en la imagenología médica, mas ahora como una fuente de fotones y estados cuánticos

<sup>1</sup> Estas constaban de una serie de lentes colocadas una después de la otra confocalmente.

<sup>2</sup> Mucha y más información relacionada con la historia de la fibra óptica se puede encontrar en [38].

<sup>3</sup>  $1\text{dB/Km} = \frac{10}{L_0} \log\left(\frac{P_{\text{entrada}}}{P_{\text{salida}}}\right)$ .

cuya implementación en cómputo y criptografía cuántica se torna viable y donde sus beneficios quizá todavía son insospechados.

### 3.2 CARACTERÍSTICAS DE LAS FIBRAS ÓPTICAS

Las fibras ópticas son guías ópticas hechas de un material dieléctrico, usualmente hechas de vidrio al fundir  $\text{SO}_2$ , con materiales disueltos que lo dopan como el  $\text{GeO}_2$  o  $\text{P}_2\text{O}_5$  para cambiar su índice de refracción [2]. Constan de un núcleo y un recubrimiento, ambos por lo general de vidrio de sílice y que poseen un distinto índice de refracción, esto si consideramos una fibra óptica de perfil escalonado; si bien también existen fibras ópticas con un perfil de índices de refracción gradual donde el cambio de este índice en la interfaz de las regiones de la fibra no exhiben una discontinuidad. Además de que el núcleo está rodeado por un recubrimiento, este a su vez está cubierto con una película plástica a modo de protección. Un parámetro importante para su caracterización es la diferencia relativa de índices de refracción entre el núcleo y su recubrimiento

$$\Delta = \frac{n_n - n_c}{n_n}, \quad (30)$$

donde  $n_n$  es el índice de refracción del núcleo y  $n_c$  de su recubrimiento. Y también importante es la apertura numérica

$$\text{NA} = \sqrt{n_n^2 - n_c^2}. \quad (31)$$

Uno u otro de estos valores es indicado por los fabricantes en las especificaciones de sus fibras ópticas y son de utilidad para conocer, en función del radio del núcleo y de la longitud de onda del haz acoplado dentro de estas, si la fibra tendrá un comportamiento monomodal<sup>4</sup>, y para determinar, por ejemplo, la distancia focal de las lentes a usar para acoplar y desacoplar un haz de luz dentro de ellas.

Desde el punto de vista de la óptica geométrica, las fibras ópticas aprovechan el fenómeno de la reflexión total interna, existiendo un confinamiento del haz si este viaja con un ángulo menor al ángulo crítico,  $\theta_c$ , y que se define a través de la ley de Snell y está dado por

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_c}{n_n}, \quad (32)$$

donde<sup>5</sup>  $n_n > n_c$ . Sin embargo en este texto no usaremos la aproximación geométrica, sino que se empleará la descripción electromagnética, ya que requerimos para nuestro trabajo del cálculo de constantes de propagación que no pueden hacerse de otra manera. A continuación nos dedicaremos a resolver las ecuaciones de campo electromagnético dentro de la fibra óptica.

<sup>4</sup> Más adelante se explicará este punto.

<sup>5</sup> Más adelante se demuestra desde el punto de vista electromagnético este hecho.

## 3.3 EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Se comenzará con las ecuaciones de Maxwell en un medio dieléctrico con permeabilidad magnética  $\mu$  y constante dieléctrica  $\epsilon$ . Como nos interesa el estudio de una onda viajera monocromática, con frecuencia angular  $\omega$ , en la guía de onda, podemos fijar a la densidad volumétrica de carga como  $\rho = 0$ , a su vez podemos hacer lo mismo con la densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J} = 0$ . Con lo que tenemos que las ecuaciones de Maxwell quedan como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (34)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (36)$$

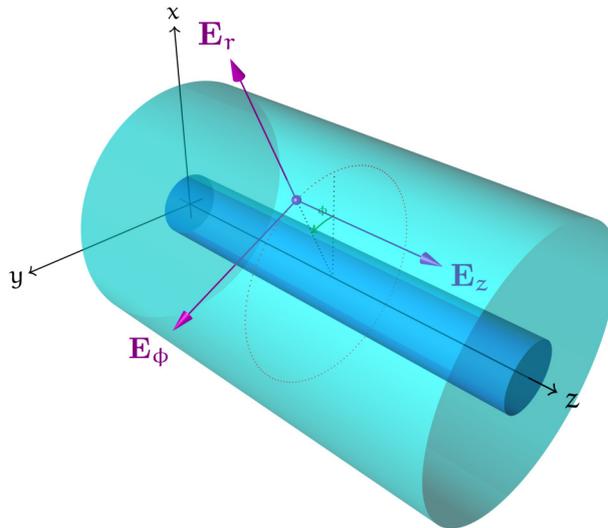


Figura 5: Sistema cilíndrico de coordenadas referido a una fibra óptica. El núcleo de la fibra óptica se indica en un color más oscuro que el de su recubrimiento.

Debido a la simetría del problema es conveniente emplear coordenadas cilíndricas que se pueden escribir respecto de las cartesianas como sigue:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (37)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (38)$$

$$z = z. \quad (39)$$

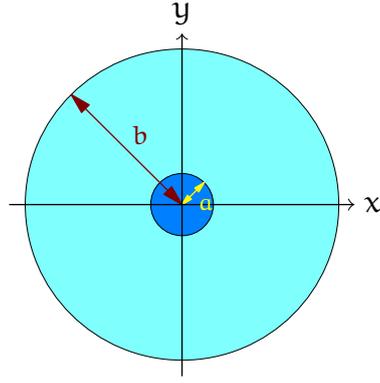


Figura 6: Perfil de una fibra óptica, el núcleo se presenta con un radio  $a$  y su recubrimiento con un radio  $b$ .

Bajo este sistema de coordenadas se cumplen las siguientes relaciones,

$$\nabla\Psi = \hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\mathbf{u}}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{u}}_z \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} A_\phi + \frac{\partial}{\partial z} A_z, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \hat{\mathbf{u}}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\phi \right) + \hat{\mathbf{u}}_\phi \left( \frac{\partial}{\partial z} A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z \right) \\ & + \hat{\mathbf{u}}_z \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi} A_r \right), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}, \quad (43)$$

con  $\vec{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  y  $\Psi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , ambas continuamente diferenciables dos veces; y donde  $|\hat{\mathbf{u}}_{(r,\phi,z)}| = 1$ .

Considerando ondas con propagación sobre el eje  $z$ , en términos de coordenadas cilíndricas se tendrá para el campo eléctrico y magnético

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(r, \phi) \exp(i(\omega t - \beta z)), \quad (44)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(r, \phi) \exp(i(\omega t - \beta z)), \quad (45)$$

donde  $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$ ,  $\omega = 2\pi\nu$  con  $\nu$  la frecuencia de oscilación de la onda y  $\beta$  una constante de propagación.

Ya que  $\hat{\mathbf{u}}_r$  y  $\hat{\mathbf{u}}_\phi$  no son vectores constantes a pesar de ser unitarios se puede comenzar por facilidad estudiando las componentes del campo en dirección  $z$  y utilizar las ecuaciones de Maxwell para obtener las demás componentes. Con ayuda de las relaciones vectoriales ya mencionadas escribiremos a las componentes de los campos

en direcciones  $\phi$  y  $r$  en términos de las componentes en dirección  $z$ . Así para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  por (42) se tendrá lo siguiente

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_\phi \right) + \quad (46a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\phi \left( \frac{\partial}{\partial z} H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z \right) + \quad (46b)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_z \frac{1}{z} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} H_r \right). \quad (46c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_\phi \right) + \quad (47a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\phi \left( \frac{\partial}{\partial z} E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z \right) + \quad (47b)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_z \frac{1}{z} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} E_r \right). \quad (47c)$$

Para la derivada temporal y respecto de  $z$  de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  según las expresiones (44) y (45) respectivamente se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= i\omega \mathbf{E}(r, \phi) \exp(i(\omega t - \beta z)), \\ &= i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\vec{\mathbf{r}}, t) &= i\omega \mathbf{H}(r, \phi) \exp(i(\omega t - \beta z)), \\ &= i\omega \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (-i\beta) \mathbf{E}(r, \phi) \exp(i(\omega t - \beta z)), \\ &= -i\beta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i\beta \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ &= -\beta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= (-i\beta) \mathbf{H}(r, \phi) \exp(i(\omega t - \beta z)), \\ &= -i\beta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= -i\beta \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \\ &= -\beta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (53)$$

Sustituyendo en (34) a (48) y (46) donde corresponde

$$i\omega\epsilon\mathbf{E} = \hat{\mathbf{u}}_r \left( i\beta H_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z \right), \quad (54a)$$

$$+ \hat{\mathbf{u}}_\phi \left( -i\beta H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z \right), \quad (54b)$$

$$+ \hat{\mathbf{u}}_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_r \right). \quad (54c)$$

Análogamente sustituyendo en (35) a (49) y (47) donde corresponde

$$-i\omega\mu\mathbf{H} = \hat{\mathbf{u}}_r \left( i\beta\mathbf{E}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z \right), \quad (55a)$$

$$+ \hat{\mathbf{u}}_\phi \left( -i\beta E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z \right), \quad (55b)$$

$$+ \hat{\mathbf{u}}_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_r \right). \quad (55c)$$

De (54a), (54b), (55a) y (55b) despejamos a  $E_r$ ,  $E_\phi$ ,  $H_r$  y  $H_\phi$  en términos de  $E_z$  y  $H_z$ .

Así para obtener a  $E_r$  tomamos a (54a) y (55b)

$$i\omega\epsilon E_r = i\beta H_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z, \quad (56a)$$

$$-i\omega\mu H_\phi = -i\beta E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (56b)$$

y despejando a  $H_\phi$

$$H_\phi = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_r - \frac{1}{i\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z, \quad (57a)$$

$$H_\phi = \frac{\beta}{\omega\mu} E_r - \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial r} E_z. \quad (57b)$$

Igualando a (57a) y (57b) y agrupando

$$\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_r - \frac{1}{i\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z = \frac{\beta}{\omega\mu} E_r - \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (58)$$

$$\left( \frac{\omega\epsilon}{\beta} - \frac{\beta}{\omega\mu} \right) E_r = \frac{1}{i\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z - \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (59)$$

$$\left( \frac{\omega^2\epsilon\mu - \beta^2}{\beta\omega\mu} \right) E_r = -\frac{i}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z - \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (60)$$

$$E_r = \frac{\beta\omega\mu}{\omega^2\epsilon\mu - \beta^2} \left( -\frac{i}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z - \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial r} E_z \right), \quad (61)$$

$$E_r = \frac{-i\beta}{\omega^2\epsilon\mu - \beta^2} \left( \frac{\omega\mu}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z + \frac{\partial}{\partial r} E_z \right). \quad (62)$$

Para obtener a  $E_\phi$  tomamos a (54b) y (55a)

$$i\omega\epsilon E_\phi = -i\beta H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (63a)$$

$$-i\omega\mu H_r = i\beta E_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z, \quad (63b)$$

despejando a  $H_r$

$$H_r = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_\phi + \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (64a)$$

$$H_r = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_\phi + \frac{i}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z, \quad (64b)$$

e igualando a (64a) y (64b), y agrupando

$$-\frac{\beta}{\omega\mu} E_\phi + \frac{i}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_\phi + \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (65)$$

$$\left(-\frac{\beta}{\omega\mu} + \frac{\omega\epsilon}{\beta}\right) E_\phi = \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z - \frac{i}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z, \quad (66)$$

$$\left(\frac{-\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon}{\omega\mu\beta}\right) E_\phi = i\left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z - \frac{1}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z\right), \quad (67)$$

$$E_\phi = \frac{i\omega\mu\beta}{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z - \frac{1}{\omega\mu r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z\right), \quad (68)$$

$$E_\phi = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z - \frac{\omega\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z\right). \quad (69)$$

Ahora se obtendrá a  $H_\phi$  para lo cual tomaremos a (54a) y (55b)

$$i\omega\epsilon E_r = i\beta H_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z, \quad (70a)$$

$$-i\omega\mu H_\phi = -i\beta E_r - \frac{\partial}{\partial r} E_z. \quad (70b)$$

Despejando a  $E_r$

$$E_r = \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\phi - \frac{i}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z, \quad (71a)$$

$$E_r = \frac{\omega\mu}{\beta} H_\phi + \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (71b)$$

e igualando (71a) y (71b), y agrupando

$$\frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\phi - \frac{i}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial\phi} H_z = \frac{\omega\mu}{\beta} H_\phi + \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (72)$$

$$\left( \frac{\beta}{\omega\epsilon} - \frac{\omega\mu}{\beta} \right) H_\phi = \frac{i}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial\phi} H_z + \frac{i}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z, \quad (73)$$

$$\left( \frac{\beta^2 - \omega^2\epsilon\mu}{\omega\epsilon\beta} \right) H_\phi = i \left( \frac{1}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial\phi} H_z + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z \right), \quad (74)$$

$$H_\phi = \frac{i\omega\epsilon\beta}{\beta^2 - \omega^2\epsilon\mu} \left( \frac{1}{\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial\phi} H_z + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z \right), \quad (75)$$

$$H_\phi = \frac{-i\beta}{\omega^2\epsilon\mu - \beta^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} H_z + \frac{\omega\epsilon}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z \right). \quad (76)$$

Ahora solo falta conocer a  $H_r$ , tomamos a (54b) y (55a)

$$i\omega\epsilon E_\phi = -i\beta H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (77a)$$

$$-i\omega\mu H_r = i\beta H_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z. \quad (77b)$$

Despejando a  $E_\phi$

$$E_\phi = \frac{-\beta}{\omega\epsilon} H_r - \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (78a)$$

$$E_\phi = -\frac{\omega\mu}{\beta} H_r + \frac{i}{\beta r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z, \quad (78b)$$

e igualando a (78a) y (78b), y agrupando

$$-\frac{\beta}{\omega\epsilon} H_r + \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} H_z = -\frac{\omega\mu}{\beta} H_r + \frac{i}{\beta r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z, \quad (79)$$

$$\left( -\frac{\beta}{\omega\epsilon} + \frac{\omega\mu}{\beta} \right) H_r = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} H_z + \frac{i}{\beta r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z, \quad (80)$$

$$\left( \frac{-\beta^2 + \omega^2\mu\epsilon}{\omega\epsilon\beta} \right) H_r = i \left( -\frac{1}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} H_z + \frac{1}{\beta r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z \right), \quad (81)$$

$$H_r = \frac{i\omega\beta\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} \left( -\frac{1}{\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} H_z + \frac{1}{\beta r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z \right), \quad (82)$$

$$H_r = \frac{-i\beta}{\omega^2\mu\epsilon - \beta^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} H_z - \frac{\omega\epsilon}{\beta r} \frac{\partial}{\partial\phi} E_z \right). \quad (83)$$

Faltará entonces conocer las soluciones para  $E_z$  y  $H_z$  para conocer todas las otras componentes del campo electromagnético, para esto necesitamos una ecuación que nos ayude a resolverlas.

Si consideramos la propiedad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (84)$$

que aplicaremos tanto a  $\mathbf{E}$  como a  $\mathbf{H}$ , es así que tenemos que para  $\mathbf{E}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (85)$$

por (35)

$$-\nabla \times \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (86)$$

por (33)

$$\nabla \times \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (87)$$

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (88)$$

por (34)

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (89)$$

$$-\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (90)$$

*Ecuación de onda  
para el campo  
eléctrico*

así

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0. \quad (91)$$

Ahora para  $\mathbf{H}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (92)$$

por (34)

$$\epsilon \nabla \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (93)$$

por (36) y ordenando

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{H}, \quad (94)$$

por (35)

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \right) = -\nabla^2 \mathbf{H}, \quad (95)$$

$$-\epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}, \quad (96)$$

*Ecuación de onda  
para el campo  
magnético*

así

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0. \quad (97)$$

Ambos campos varían en el tiempo como  $\exp(-i\omega t)$  como se observa de (44) y (45), para no hacer explícita la dependencia en  $z$  reescribimos estas ecuaciones como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t), \quad (98)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t), \quad (99)$$

donde

$$\mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} = \mathbf{E}(r, \phi, z) = \mathbf{E}(r, \phi) \exp(-i\beta z), \quad (100)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} = \mathbf{H}(r, \phi, z) = \mathbf{H}(r, \phi) \exp(-i\beta z), \quad (101)$$

con lo que sustituyendo a (98) y (99) en (91) y (97) respectivamente se tiene que

$$-\nabla^2(\mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t)) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t)) = 0, \quad (102)$$

$$\exp(-i\omega t) \nabla^2 \mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} - \mu\epsilon (-i\omega)^2 \mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t) = 0, \quad (103)$$

así

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} + \mu\epsilon \omega^2 \mathbf{E}_{\mathbf{r}\cancel{t}} = 0, \quad (104)$$

del mismo modo

$$-\nabla^2(\mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t)) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t)) = 0, \quad (105)$$

$$\exp(-i\omega t) \nabla^2 \mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} - \mu\epsilon (-i\omega)^2 \mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} \exp(-i\omega t) = 0, \quad (106)$$

y así

$$\nabla^2 \mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} + \mu\epsilon \omega^2 \mathbf{H}_{\mathbf{r}\cancel{t}} = 0, \quad (107)$$

de (104) y (107) vemos que la forma funcional de la ecuación a resolver componente a componente es

$$(\nabla^2 + k^2)U(r, \phi, z) = 0, \quad (108)$$

donde  $k^2 = \epsilon\mu\omega^2$ .

### 3.4 LAS SOLUCIONES DE U Y DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Ya que el sistema que nos atañe estudiar posee como datos conocidos a la frecuencia de la onda que viaja por la fibra óptica y los índices de refracción, ha de llevar a la expresión de  $k$  a términos relacionados con dichas variables del sistema. Primeramente recordamos que  $\omega = 2\pi\nu$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de oscilación del campo como ya se había mencionado. Por otra parte es conocido [59] que la velocidad de fase en un medio está relacionada con  $\mu$  y  $\epsilon$  como sigue

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (109)$$

Por otra parte se definen las cantidades [59]

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad \text{permitividad eléctrica relativa;} \quad (110)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \text{permeabilidad magnética relativa;} \quad (111)$$

donde  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío. Por otra parte, se conoce que la velocidad de la luz se relaciona con  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  mediante

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (112)$$

con lo que (109) tomaría la forma

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}, \quad (113)$$

$$= \frac{c}{n'}, \quad (114)$$

con  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , el índice de refracción del medio. Así con esto en mente

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n'}, \quad (115)$$

$$\left(\frac{n}{c}\right)^2 = \epsilon \mu, \quad (116)$$

por lo que

$$k = \frac{n\omega}{c}. \quad (117)$$

Por otra parte se sabe que

$$\lambda v = c, \quad (118)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda, con lo que despejando en términos de  $1/\lambda$  y multiplicando por  $2\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{c}. \quad (119)$$

Recordando que  $\omega = 2\pi v$  y que el número de onda se define como

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \quad (120)$$

con lo que se puede reescribir a  $k$  como

$$k = nk_0. \quad (121)$$

Regresando a las soluciones de la ecuación (108), notemos que por (43)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} U \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} U + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U + k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} U = 0, \quad (122)$$

sería ahora la ecuación a resolver en coordenadas cilíndricas. Si se propone como solución, mediante separación de variables a

$$U(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z), \quad (123)$$

con lo que sustituyendo a (123) en (122) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (R(r)\Phi(\phi)Z(z)) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (R(r)\Phi(\phi)Z(z)) \\ + k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (R(r)\Phi(\phi)Z(z)) = 0, \end{aligned} \quad (124)$$

que se puede escribir como

$$\Phi Z \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{\Phi Z}{r} \frac{d}{dr} R + \frac{RZ}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + R\Phi \frac{d^2}{dz^2} Z + k^2 Z\Phi R = 0, \quad (125)$$

dividiendo entre U

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z + k^2 = 0. \quad (126)$$

Notamos que si separamos la ecuación en términos de z e igualamos a una constante, que convenientemente será igual a  $\beta^2$ , tendremos que

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z = \beta^2, \quad (127)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} Z = -Z\beta^2, \quad (128)$$

$$\frac{d^2}{dZ^2} + \beta^2 Z = 0, \quad (129)$$

donde la solución a (129) para la dependencia en  $z \propto \exp(i\beta z)$ , con lo que podemos proponer como solución a

$$Z(z) = a_1 \exp(i\beta z), \quad \text{con } a_1, \beta \in \mathbb{R}; \quad (130)$$

que sustituyendo en (129)

$$\frac{d^2}{dz^2} (a_1 \exp(i\beta z)) + \beta^2 a_1 \exp(i\beta z) = 0, \quad (131)$$

$$a_1 (i\beta)^2 \exp(i\beta z) + \beta^2 \exp(i\beta z) = 0, \quad (132)$$

$$a_1 (-\beta^2 + \beta^2) \exp(i\beta z) = 0, \quad (133)$$

$$0 = 0, \quad (134)$$

con lo que (126) queda

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi - \beta^2 + k^2 = 0. \quad (135)$$

Definiendo  $\eta^2 := k^2 - \beta^2$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + \eta^2 = 0, \quad (136)$$

y multiplicando por  $r^2$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2}{dR^2} R + \frac{r}{R} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + \eta^2 r^2 = 0, \quad (137)$$

ahora separando en  $\Phi$  tal que

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = m^2, \quad (138)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = \phi m^2, \quad (139)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + m^2 \Phi = 0. \quad (140)$$

La dependencia en  $\phi$  debe tener solución periódica con periodo  $2\phi$  por simetría azimutal en la fibra óptica, con lo que podemos proponer como solución a

$$\Phi(\phi) = a_2 \exp(im\phi), \quad \text{con } m \in \mathbb{Z} \text{ y } a_2 \in \mathbb{R}; \quad (141)$$

donde sustituyendo a (141) en (140) vemos que

$$\frac{d^2}{d\phi^2} (a_2 \exp(im\phi)) + m^2 a_2 \exp(im\phi) = 0, \quad (142)$$

$$a_2 (im)^2 \exp(im\phi) + m^2 a_2 \exp(im\phi) = 0, \quad (143)$$

$$a_2 (-m^2 + m^2) \exp(im\phi) = 0, \quad (144)$$

$$0 = 0. \quad (145)$$

Así (136) se puede escribir como

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{r}{R} \frac{d}{dr} R - m^2 - \eta^2 r^2 = 0, \quad (146)$$

ya que

$$\frac{r}{R} \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) \right) = \frac{r}{R} \left( \frac{d}{dr} R + r \frac{d^2}{dr^2} R \right), \quad (147a)$$

$$= \frac{r}{R} \frac{d}{dr} R + \frac{r^2}{R} \frac{d^2}{dr^2} R, \quad (147b)$$

con lo que (146) quedaría

$$\frac{r}{R} \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) \right) + \eta^2 r^2 - m^2 = 0, \quad (148)$$

y multiplicando por R

$$r \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) \right) + (\eta^2 r - m^2) R = 0. \quad (149)$$

Por otra parte vemos que  $m \in \mathbb{Z}$ , pero por simetría azimutal las soluciones en  $\phi$  están degeneradas para  $\pm m$ , entonces es válido considerar aquellas donde  $m \geq 0$ , con lo que  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Por definición  $r \geq 0$ , así que falta explorar el valor de  $\eta^2$ . Por como definimos  $\eta^2$ , vemos que pueden suceder dos casos, el primero en el que  $k^2 > \beta^2 \implies \eta^2 > 0$  y el segundo donde  $\beta^2 < k^2 \implies \eta^2 < 0$ . Para el caso en el que  $\eta^2 > 0$ , (149) quedaría con la misma forma, y para tal caso la soluciones en  $r$  estarían dadas por una combinación lineal de funciones de Bessel de primer ( $J_m$ ) y segundo ( $Y_m$ ) tipo de orden  $m$ .

$$R(r) = A J_m(\eta r) + B Y_m(\eta r), \quad \text{para } \eta^2 > 0, \quad \{A, B\} \in \mathbb{R}^+; \quad (150)$$

donde A y B son las amplitudes reales. Podemos definir por comodidad a

$$\eta_+ := \sqrt{k^2 - \beta^2}, \quad (151a)$$

$$\eta_- := \sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad (151b)$$

donde si  $\eta^2 > 0$  usaremos que  $\eta^2 = \eta_+^2$ , mientras que si  $\eta^2 < 0$  usaremos que  $\eta^2 = -\eta_-^2$ , esto con el fin de que  $\eta_+^2, \eta_-^2 > 0$ . Utilizando estas nuevas definiciones vemos que usando  $\eta_+$ , (149) tomaría la forma para  $\eta^2 > 0$

$$r \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) \right) + (\eta_+^2 r^2 - m^2) R = 0, \quad (152)$$

y (150) se escribiría

$$R(r) = A J_m(\eta_+ r) + B Y_m(\eta_+ r), \quad (153)$$

mientras que (149) con  $\eta_-$  tomaría la forma para  $\eta^2 < 0$

$$r \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) \right) + (\eta_-^2 - m^2) R = 0, \quad (154)$$

$$r \left( \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R \right) \right) - (\eta_-^2 + m^2) R = 0. \quad (155)$$

La ecuación (155) tiene como solución a la combinación lineal de las funciones de Bessel modificadas de primer ( $I_m$ ) y segundo ( $K_m$ ) tipo de orden  $m$

$$R(r) = C I_m(\eta_- r) + D K_m(\eta_- r), \quad (156)$$

donde C y D son las amplitudes reales. Así en principio ya tenemos las soluciones de (149), (152) y (156), sin embargo aun no sabemos a qué parte del espacio en  $r$  corresponden.

Debemos notar que dentro del núcleo queremos soluciones no divergentes, pues esperamos que dentro de él viaje la mayor parte de la onda y que en el recubrimiento la amplitud de la misma disminuya rápidamente. Es decir queremos una propagación confinada al núcleo. Podemos deducir el comportamiento que deseamos a partir de las gráficas de cada una de las funciones de Bessel, presentadas en la figura 7.

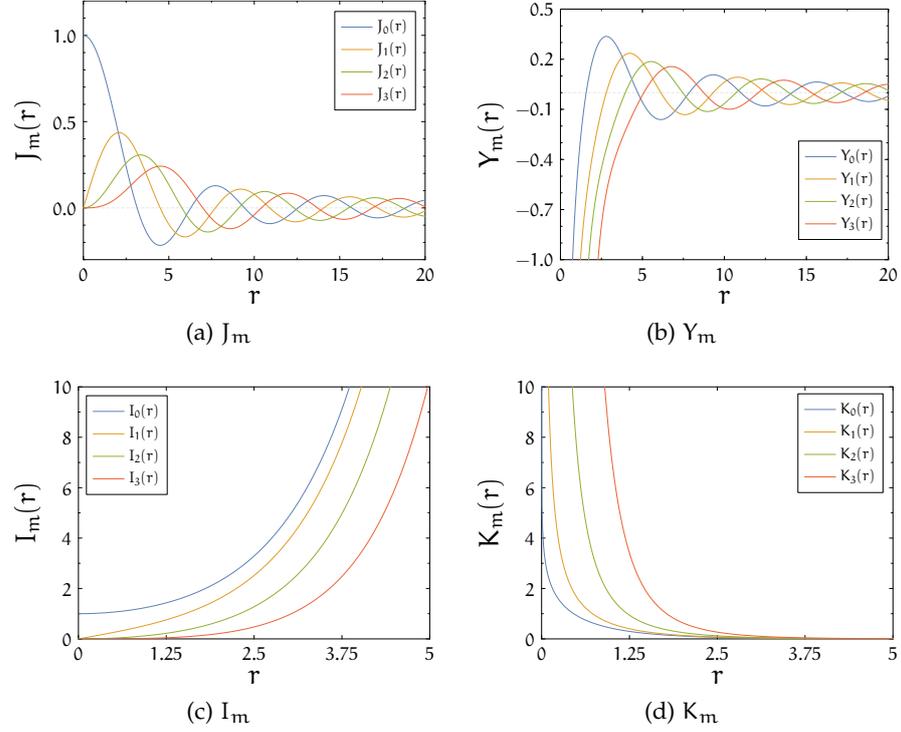


Figura 7: Funciones de Bessel de ordenes  $m = \{0, 1, 2, 3\}$

Como queremos que en  $r > a$  la amplitud de los campos decaiga rápidamente y que en  $r < a$ , la amplitud tenga un valor finito, es decir, que no diverja conforme  $r \rightarrow 0$ , esto implica que para  $r > a$  nos sirve la ecuación (156) con  $C = 0$ , y para  $r < a$  funciona la ecuación (153) con  $B = 0$ .

Como la función que nos define el índice de refracción de la fibra óptica, que consideramos de perfil escalonado, es

$$n(r) = \begin{cases} n_1, & \text{para } r < a; \\ n_2, & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (157)$$

Si definimos

$$k_1 = n_1 k_0, \quad (158a)$$

$$k_2 = n_2 k_0. \quad (158b)$$

y a su vez

$$\eta_1^2 = k_1^2 - \beta^2, \quad (159a)$$

$$\eta_2^2 = \beta^2 - k_2^2, \quad (159b)$$

tendríamos que

$$\begin{aligned} r < a \implies (\eta_+^2 = \eta_1^2) > 0 &\implies k_1^2 > \beta^2 \implies n_1^2 k_0^2 > \beta^2 \\ &\implies \frac{2\pi n_1}{\lambda} > \beta, \\ r > a \implies (\eta_-^2 = \eta_2^2) < 0 &\implies k_2^2 < \beta^2 \implies n_2^2 k_0^2 < \beta^2 \\ &\implies \frac{2\pi n_2}{\lambda} < \beta, \end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{2\pi n_2}{\lambda} < \beta < \frac{2\pi n_1}{\lambda} \implies n_2 < \frac{\lambda\beta}{2\pi} < n_1 \implies n_2 < n_1.$$

Así ha de cumplirse que  $n_2 < n_1$  para tener una propagación confinada al núcleo. Por lo que las ecuaciones a resolver serían

$$R(r) = \begin{cases} AJ_m(\eta_1 r), & \text{para } r < a; \\ DK_m(\eta_2 r), & \text{para } r > a. \end{cases} \quad (160a)$$

$$(160b)$$

Así empleando la fórmula (123) y sustituyendo donde corresponde a (160a), (130) y (141)

$$U(r, \phi, z) = \begin{cases} a_1 a_2 AJ_m(\eta_1 r) \exp(i(m\phi - \beta z)), & \text{para } r < a; \quad (161) \\ a_1 a_2 DK_m(\eta_2 r) \exp(i(m\phi - \beta z)), & \text{para } r > a; \quad (162) \end{cases}$$

que habíamos dicho es la forma funcional de  $\mathbf{E}_{r\cancel{z}}$  y  $\mathbf{H}_{r\cancel{z}}$ . Retomando esta idea podemos escribir a  $E_z$  y  $H_z$  de la siguiente manera, para  $r < a$

$$E_z(r, \phi, z) = MJ_m(\eta_1 r) \exp(i(\omega t + m\phi + \beta z)), \quad (163a)$$

$$H_z(r, \phi, z) = NJ_m(\eta_1 r) \exp(i(\omega t + m\phi + \beta z)), \quad (163b)$$

y para  $r > a$

$$E_z(r, \phi, z) = OK_m(\eta_2 r) \exp(i(\omega t + m\phi + \beta z)), \quad (164a)$$

$$H_z(r, \phi, z) = PK_m(\eta_2 r) \exp(i(\omega t + m\phi + \beta z)), \quad (164b)$$

donde M, N, O y P son amplitudes para los campos correspondientes. Notemos antes que las ecuaciones (62), (69), (76) y (83) por la definición de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  se pueden reescribir como

Para  $r < a$

$$E_r = \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{\omega\mu_1}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z + \frac{\partial}{\partial r} E_z \right), \quad (165a)$$

$$E_\phi = \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z - \frac{\omega\mu_1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z \right), \quad (165b)$$

$$H_r = \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} H_z - \frac{\omega\epsilon_1}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z \right), \quad (165c)$$

$$H_\phi = \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z + \frac{\omega\epsilon_1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z \right). \quad (165d)$$

como  $\epsilon\mu = (n/c)^2$

$$\begin{aligned} & \omega^2 \epsilon\mu - \beta^2, \\ = & \omega^2 \left( \frac{n}{c} \right)^2 - \beta^2, \\ = & \left( \frac{\omega}{c} n \right)^2 - \beta^2, \\ = & (k_0 n)^2 - \beta^2, \\ = & k^2 - \beta^2, \\ = & \eta^2. \end{aligned}$$

de ahí las  
sustituciones  
correspondientes en  
el denominador de  
los primeros  
términos  
fraccionarios de cada  
una de las  
ecuaciones.

Para  $r > a$

$$E_r = \frac{-i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{\omega\mu_2}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z + \frac{\partial}{\partial r} E_z \right), \quad (166a)$$

$$E_\phi = \frac{-i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z - \frac{\omega\mu_2}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} H_z \right), \quad (166b)$$

$$H_r = \frac{-i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} H_z - \frac{\omega\epsilon_2}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z \right), \quad (166c)$$

$$H_\phi = \frac{-i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z + \frac{\omega\epsilon_2}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} E_z \right). \quad (166d)$$

Sustituyendo a (163) en (165a)

$$\begin{aligned} E_r = & \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{\omega\mu_1}{\beta r} N J_m(\eta_1 r) (im) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right. \\ & \left. + M \eta_1 \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right), \quad (167) \end{aligned}$$

$$= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{i\omega\mu_1 m}{\beta r} N J_m(\eta_1 r) + M \eta_1 J'_m(\eta_1 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)). \quad (168)$$

Sustituyendo a (163) en (165b)

$$\begin{aligned} E_\phi = & \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{1}{r} M J_m(\eta_1 r) (im) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right. \\ & \left. - \frac{\omega\mu_1}{\beta} N \eta_1 J'_m(\eta_1 r) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right), \quad (169) \end{aligned}$$

$$= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{im}{r} M J_m(\eta_1 r) - \frac{\omega\mu_1}{\beta} N \eta_1 J'_m(\eta_1 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)). \quad (170)$$

Reemplazando a (163) en (165c)

$$\begin{aligned} H_r = & \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( N \eta_1 J'_m(\eta_1 r) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right. \\ & \left. - \frac{\omega\epsilon_1}{\beta r} M J_m(\eta_1 r) (im) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right), \quad (171) \end{aligned}$$

$$= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( N \eta_1 J'_m(\eta_1 r) - \frac{i\omega\epsilon_1 m}{\beta r} M J_m(\eta_1 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)). \quad (172)$$

Reemplazando a (163) en (165d)

$$H_\phi = \frac{i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{1}{r} J_m(\eta_1 r) (im) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right. \\ \left. + \frac{\omega\epsilon_1}{\beta} \eta_1 M J'_m(\eta_1 r) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) \right), \quad (173)$$

$$= \frac{-i\beta}{\eta_1^2} \left( \frac{im}{r} N J_m(\eta_1 r) + \frac{\omega\epsilon_1}{\beta} M \eta_1 J'_m(\eta_1 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (174)$$

donde  $J'_m(\eta_1 r) = \frac{dJ_m(\eta_1 r)}{d\eta_1 r}$ . Del mismo modo al sustituir a (164) en cada una de las ecuaciones (166), se obtiene lo siguiente

$$E_R = \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{i\omega\mu_2 m}{\beta r} P K_m(\eta_2 r) + O \eta_2 K'_m(\eta_2 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (175)$$

$$E_\phi = \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{im}{r} O K_m(\eta_2 r) - \frac{\omega\mu_2}{\beta} P \eta_2 K'_m(\eta_2 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (176)$$

$$H_r = \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left( P \eta_2 K'_m(\eta_2 r) - \frac{i\omega\epsilon_2 m}{\beta r} O K_m(\eta_2 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (177)$$

$$H_\phi = \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{im}{r} P K_m(\eta_2 r) + \frac{\omega\epsilon_2}{\beta} O \eta_2 K'_m(\eta_2 r) \right) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (178)$$

donde  $K'_m = \frac{dK_m(\eta_2 r)}{d\eta_2 r}$ .

Se espera que los campos  $E_z$ ,  $E_\phi$ ,  $H_z$  y  $H_\phi$  sean continuos en  $r = a$ , por lo que igualando a (163a) con (164a) y a (163b) con (163b) para  $r = a$ , se tiene

$$M J_m(\eta_1 a) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) = O K_m(\eta_2 a) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (179)$$

$$M J_m(\eta_1 a) = O K_m(\eta_2 a). \quad (180)$$

$$N J_m(\eta_1 a) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)) = P K_m(\eta_2 a) \exp(i(\omega t + m\phi - \beta z)), \quad (181)$$

$$N J_m(\eta_1 a) = P K_m(\eta_2 a). \quad (182)$$

Del mismo modo igualando a (170) con (176) y a (174) con (178)

$$\frac{-i\beta}{\eta_1^2 a} \left( \frac{im}{a} M J_m(\eta_1 a) - \frac{\omega\mu_1}{\beta} N \eta_1 J'_m(\eta_1 a) \right) = \\ \frac{i\beta}{\eta_2^2} \left( \frac{im}{a} O K_m(\eta_2 a) - \frac{\omega\mu_2}{\beta} \eta_2 P K'_m(\eta_2 a) \right), \quad (183)$$

así

$$\begin{aligned} & -M \frac{i m}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1) + N \frac{\omega \mu_1}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a) \\ & -O \frac{i m}{\eta_2^2 a} K_m(\eta_2 a) + P \frac{\omega \mu_2}{\beta \eta_2} K'_m(\eta_2 a) = 0, \end{aligned} \quad (184)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} & -\frac{i \beta}{\eta_1^2 a} \left( \frac{i m}{a} N J_m(\eta_1 a) + \frac{\omega \epsilon_1}{\beta} M \eta_1 J'_m(\eta_1 a) \right) = \\ & \frac{i \beta}{\eta_1^2} \left( \frac{i m}{a} P K_m(\eta_2 a) + \frac{\omega \epsilon_2}{\beta} O \eta_2 K'_m(\eta_2 a) \right), \end{aligned} \quad (185)$$

así

$$\begin{aligned} & N \frac{i m}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1 a) + M \frac{\omega \epsilon_1}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a) + \\ & P \frac{i m}{\eta_2^2 a} K_m(\eta_2 a) + O \frac{\omega \epsilon_2}{\eta_2 \beta} K'_m(\eta_2 a) = 0. \end{aligned} \quad (186)$$

Vemos entonces que las ecuaciones (180), (182), (184) y (186) forman un sistema de ecuaciones no triviales para M, N, O y P, siempre y cuando el determinante de sus coeficientes se iguale a cero [11].

De dicho determinante se puede obtener la siguiente expresión<sup>67</sup> [83][12][73][1], que será junto con (151) y la condición ya mostrada de que  $n_1 k_0 > \beta > n_2 k_0$ , una función trascendental de  $\beta$  para cada m.

*Ecuación de eigenvalores para una fibra óptica*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1 a J_m(\eta_1 a)} + \frac{K'_m(\eta_2 a)}{\eta_2 a J_m(\eta_1 a)} \right) \left( \frac{n_1^2 J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1 a J_m(\eta_1 a)} + \frac{n_2^2 K'_m(\eta_2 a)}{\eta_2 a J_m(\eta_1 a)} \right) \\ & = m^2 \left( \frac{\beta}{k_0} \right)^2 \left( \left( \frac{1}{\eta_1 a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\eta_2 a} \right)^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (187)$$

en donde se usó que al estar hecha la fibra óptica de materiales dieléctricos y con muy baja interacción magnética<sup>8</sup> ( $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$  [67]).

Se puede con (187) encontrar los valores de  $\beta$  para una  $\omega$  y m dadas. A continuación se calcularán las razones entre las amplitudes N/M, O/M y P/M.

6 La expresión en [83] presenta errores en el argumento de las  $K_m$ , se presenta aquí la versión corregida.

7 En el anexo A.1 se muestra a partir del determinante de coeficientes para el sistema de ecuaciones propuesto para M, N, O y P, que la expresión obtenida directamente del cálculo de este es equivalente a la mostrada en [83].

8 Dígase de los materiales paramagnéticos.

## 3.4.1 Razones de amplitud de las componentes del campo

Redefiniendo los coeficientes del sistema de ecuaciones como

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= J_m(\eta_1), & a_{12} &= 0, \\
 a_{12} &= 0, & a_{22} &= J_m(\eta_1 a), \\
 a_{31} &= -\frac{im}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1 a), & a_{32} &= \frac{\omega \mu_1}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a), \\
 a_{41} &= \frac{\omega \epsilon_1}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a), & a_{42} &= \frac{im}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1 a), \\
 a_{13} &= -K_m(\eta_2 a), & a_{14} &= 0, \\
 a_{23} &= 0, & a_{24} &= -K_m(\eta_2 a), \\
 a_{33} &= -\frac{im}{\eta_2^2 a} K_m(\eta_2 a), & a_{34} &= \frac{\omega \mu_2}{\beta \eta_2} K'_m(\eta_2 a), \\
 a_{43} &= \frac{\omega \epsilon_2}{\eta_2 \beta} K'_m(\eta_2 a), & a_{44} &= \frac{im}{\eta_2^2 a} K_m(\eta_2 a).
 \end{aligned}$$

Observamos que  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{13} = a_{24}$ ,  $a_{33} = -a_{44}$  y que  $a_{31} = -a_{42}$ , por lo que se puede definir por conveniencia

$$\alpha_1 = a_{11}, \quad (188)$$

$$\alpha_2 = a_{13}, \quad (189)$$

$$\alpha_3 = a_{44}, \quad (190)$$

$$\alpha_4 = a_{42}. \quad (191)$$

Notamos además que si definimos

$$\alpha_5 = \frac{\omega}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a), \quad (192)$$

$$\alpha_6 = \frac{\omega}{\eta_2 \beta} K'_m(\eta_2 a), \quad (193)$$

se cumple que

$$a_{32} = \mu_0 \alpha_5, \quad (194a)$$

$$a_{41} = \epsilon_1 \alpha_5, \quad (194b)$$

$$a_{43} = \epsilon_2 \alpha_6, \quad (194c)$$

$$a_{34} = \mu_0 \alpha_6. \quad (194d)$$

Por lo que el sistema de ecuaciones formado por (180), (182), (184) y (186) lo podemos reescribir como

$$M\alpha_1 + O\alpha_2 = 0, \quad (195a)$$

$$N\alpha_2 + P\alpha_3 = 0, \quad (195b)$$

$$M(-\alpha_4) + N\mu\alpha_5 + O(-\alpha_3) + P\mu_2\alpha_6 = 0, \quad (195c)$$

$$M\epsilon_1\alpha_5 + N\alpha_4 + O\epsilon_2\alpha_6 + P\alpha_3 = 0. \quad (195d)$$

De (195a) vemos que

$$M\alpha_1 = -O\alpha_2, \quad (196)$$

$$\therefore \frac{O}{M} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (197)$$

y de (195b) se aprecia que

$$N\alpha_1 = -P\alpha_2, \quad (198)$$

$$\therefore \frac{P}{N} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (199)$$

mientras que de (197) y (199) se ve que

$$\frac{P}{N} = \frac{O}{M'} \quad (200)$$

dividiendo a ambos entre M

$$\frac{P}{MN} = \frac{O}{M'} \quad (201)$$

y

$$\therefore \frac{P}{M} = \frac{O}{M} \frac{N}{M'}. \quad (202)$$

Dividiendo ahora (195c) entre M y usando (202) para que así reescribamos (195c) como sigue

$$-\alpha_4 + \mu\alpha_5 \frac{N}{M} - \alpha_3 \frac{O}{M} + \alpha_6 \mu \frac{O}{M} \frac{N}{M'} = 0, \quad (203)$$

por (197)

$$-\alpha_4 + \mu\alpha_5 \frac{N}{M} + \alpha_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \alpha_6 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \mu \frac{M}{N} = 0, \quad (204)$$

$$\frac{M}{N} (\mu\alpha_5 - \mu\alpha_6 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}) = \alpha_4 - \alpha_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (205)$$

$$\frac{N}{M} = \frac{\alpha_4 - \alpha_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{\alpha_5 - \alpha_6 \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}. \quad (206)$$

Desarrollamos la expresión del numerador de (206)

$$\alpha_4 - \alpha_3 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{im}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1 a) + \frac{im}{\eta_2^2 a} \frac{J_m(\eta_1 a)}{K_m(\eta_2 a)}, \quad (207)$$

$$= \frac{im}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1 a) + \frac{im}{\eta_2^2 a} J_m(\eta_1 a). \quad (208)$$

Ahora se la expresión de denominador de (206)

$$\alpha_5 - \alpha_6 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\omega}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a) + \frac{\omega}{\eta_2 \beta} \frac{J_m(\eta_1 a)}{\eta_2 a}. \quad (209)$$

Así que (206) iría quedando

$$\frac{N}{M} = \frac{\frac{im}{\eta_1^2 a} J_m(\eta_1 a) + \frac{im}{\eta_2^2 a} J_m(\eta_1 a)}{\frac{\omega}{\eta_1 \beta} J'_m(\eta_1 a) + \frac{\omega}{\eta_2 \beta} \frac{J_m(\eta_1 a)}{\eta_2 a}}, \quad (210)$$

$$= \frac{\frac{i\omega\beta}{\omega\mu} \left( a J_m(\eta_1 a) \left( \frac{1}{\eta_1^2 a^2} + \frac{1}{\eta_2^2 a^2} \right) \right)}{\frac{J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1} + \frac{K'_m(\eta_2 a) J_m(\eta_1 a)}{\eta_2 K_m(\eta_1 a)}}, \quad (211)$$

$$= \frac{\frac{im\beta}{\omega\mu} \left( \frac{1}{(\eta_1 a)^2} + \frac{1}{(\eta_2 a)^2} \right)}{\frac{1}{a J_m(\eta_1 a)} \left( \frac{J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1} + \frac{k'_m(\eta_2 a) J_m(\eta_1 a)}{\eta_2 K_m(\eta_1 a)} \right)}, \quad (212)$$

$$\therefore \frac{N}{M} = \frac{\frac{im\beta}{\omega\mu} \left( \frac{1}{(\eta_1 a)^2} + \frac{1}{(\eta_2 a)^2} \right)}{\frac{J'_m(\eta_1 a)}{\eta_1 a J_m(\eta_1 a)} + \frac{k'_m(\eta_1 a)}{a \eta_2 K_m(\eta_2 a)}}, \quad (213)$$

donde vemos que  $N/M$  es la cantidad relativa entre los campos  $E_z$  y  $H_z$ , dentro del núcleo por como los definimos en (163), mientras que  $O/M$  es la cantidad relativa de campo  $E_z$  que hay fuera del núcleo respecto a lo que hay dentro de él, y  $P/N$  representa esto mismo para  $H_z$ , según se infiere de (163) y (164).

### 3.5 CONDICIONES PARA LOS MODOS HE, EH, TE Y TM

Notemos que la fórmula (187) es cuadrática para  $\frac{J'_m(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)}$ , así podemos pasar a resolverla definiendo las siguientes cantidades

$$\delta_1 = \frac{1}{\eta_1 a}, \quad (214a)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\eta_2 a}, \quad (214b)$$

$$\kappa = \frac{K'_m(\eta_2 a)}{K_m(\eta_2 a)}, \quad (214c)$$

$$\iota = \frac{J'_m(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)}, \quad (214d)$$

$$\zeta = \frac{\beta}{k_0}, \quad (214e)$$

sustituyendo (214) en (187) esta última se puede escribir como

$$(\delta_1 \iota + \delta_2 \kappa)(n_1^2 \delta_1 \iota + n_2^2 \delta_2 \kappa) = m^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \zeta^2, \quad (215)$$

$$n_1^2 \delta_1^2 \iota^2 + (n_2^2 \delta_1 \delta_2 + n_1^2 \delta_1 \delta_2) \kappa \iota + n_2^2 \delta_2^2 \kappa^2 - m^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \zeta = 0. \quad (216)$$

Recordando que un polinomio de segundo grado de la forma  $a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$  tiene como soluciones

$$x = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1} = -\frac{a_2}{2a_1} \pm \sqrt{\left( \frac{a_2}{2a_1} \right)^2 - \frac{a_3}{a_1}}, \quad (217)$$

podemos resolver a  $\iota$

$$\iota = -\frac{(n_1^2 + n_2^2)\delta_1\delta_2\kappa}{2n_1^2\delta_1^2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{(n_1^2 + n_2^2)\delta_1\delta_2\kappa}{2n_1^2\delta_1}\right)^2}{n_2^2\delta_2^2\kappa^2 - m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2} - \frac{1}{n_1^2\delta_1^2}} \quad (218)$$

$$= -\frac{(n_1^2 + n_2^2)\delta_2\kappa}{2n_1^2\delta_1} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{(n_2^2 + n_1^2)\delta_2\kappa}{2n_1^2\delta_1}\right)^2}{n_2^2\delta_2^2\kappa^2 - m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2} - \frac{1}{n_1^2\delta_1^2}} \quad (219)$$

Despejando a  $\delta_1$

$$\delta_1\iota = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\delta_2\kappa \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\right)^2(\delta_2\kappa)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2(\delta_2\kappa)^2}{n_1^2} + \frac{m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2}{n_1^2}} \quad (220)$$

$$= -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\delta_2\kappa \pm \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\right)^2 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right](\delta_2\kappa)^2}{n_1^2} + \frac{m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2}{n_1^2}} \quad (221)$$

$$= -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2}\delta_2\kappa \pm \sqrt{\frac{(n_1^2 + n_2^2)^2 n_1^2 - 2^2 n_1^2 n_1^2 n_2^2 (\delta_2\kappa)^2}{2^2 n_1^2 n_1^2 n_1^2} + \frac{m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2}{n_1^2}} \quad (222)$$

$$= -\frac{(n_1^2 + n_2^2)}{2n_1^2}\delta_2\kappa \pm \sqrt{\frac{\frac{n_1^4 + n_2^4 + 2n_1^2 n_2^2 - 4n_1^2 n_2^2}{(2n_1^2)^2}(\delta_2\kappa)^2}{n_1^2} + \frac{m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2}{n_1^2}} \quad (223)$$

$$= -\frac{(n_1^2 + n_2^2)}{2n_1^2}\delta_2\kappa \pm \sqrt{\frac{\frac{n_1^4 + n_2^4 - 2n_1^2 n_2^2}{(2n_1^2)^2}(\delta_2\kappa)^2}{n_1^2} + \frac{m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2}{n_1^2}} \quad (224)$$

$$= -\frac{(n_1^2 + n_2^2)}{2n_1^2}\delta_2\kappa \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\right)^2(\delta_2\kappa)^2 + \frac{m^2(\delta_1^2 + \delta_2^2)^2\zeta^2}{n_1^2}}{n_1^2}} \quad (225)$$

si

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\right)^2 (\delta_2 \kappa)^2 + \frac{m^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2)^2 \zeta^2}{n_1^2}}, \quad (226)$$

entonces

$$\delta_1 \iota = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa \pm \Gamma. \quad (227)$$

Regresemos  $\iota$  a su expresión en términos de las  $J_m$ 's, entonces

$$\delta_1 \frac{J'_m(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa \pm R. \quad (228)$$

Utilizaremos ahora las siguientes propiedades[3]

$$J_{m+1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J'_m(x), \quad (229a)$$

$$J_{m-1}(x) = \frac{m}{x} J_m(x) + J'_m(x). \quad (229b)$$

Sustituyendo  $J'_m(\eta_1 a)$  por su equivalente dado por (229a) en (228) para la raíz positiva

$$\delta_1 \frac{\delta_1 J_m(\eta_1 a) - J_{m+1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa + \Gamma, \quad (230)$$

$$\delta_1^2 m - \frac{\delta_1 J_{m+1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa + \Gamma, \quad (231)$$

$$\delta_1 \frac{J_{m+1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa + \delta_1^2 m - \Gamma, \quad (232)$$

Del mismo modo sustituyendo  $J'_m(\eta_1 a)$  por su equivalente dado por (229b) en (228) para la raíz negativa

$$\delta_1 \frac{J_{m-1}(\eta_1 a) - m \delta_1 J_m(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa - \Gamma, \quad (233)$$

$$\delta_1 \frac{J_{m-1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} - m \delta_1^2 = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa - \Gamma, \quad (234)$$

$$\delta_1 \frac{J_{m-1}(\eta_1 a)}{J_m(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa + m \delta_1^2 - \Gamma. \quad (235)$$

El fin de usar las fórmulas (229) es para obtener dos ecuaciones con una mnemotecnica conveniente al notar que el índice  $m$  de la función de Bessel  $J$  es restado o sumado según la proveniencia de la ecuación resultante de acuerdo al signo de la raíz tomado.

Para facilitar un poco la evaluación de las ecuaciones (232) y (235), notemos lo siguiente

$$(\eta_1 a)^2 + (\eta_2 a)^2 = a^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2), \quad (236)$$

$$= a^2 (k_1^2 - \beta^2 + \beta^2 - k_2^2), \quad (237)$$

$$= a^2 (n_1^2 k_0^2 - n_2^2 k_0^2), \quad (238)$$

$$= a^2 (n_1^2 - n_2^2) k_0^2, \quad (239)$$

*Ecuación de  
eigenvalores para los  
modos EH*

*Ecuación de  
eigenvalores para los  
modos HE*

así

$$(\eta_2 a)^2 = (ak_0)^2(n_1^2 - n_2^2) - (\eta_1 a)^2, \quad (240)$$

Al parámetro  $V$  también se lo conoce como «frecuencia normalizada»

definiendo

$$V := ak_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (241)$$

con lo que (240) quedaría

$$(\eta_2 a)^2 = V^2 - (\eta_1 a)^2. \quad (242)$$

Otra sustitución útil será dada por (159a), donde despejando  $\beta$  se tiene que

$$\beta^2 = k_1^2 - \eta_1^2, \quad (243)$$

con lo que el cuadrado de (214e), luego de multiplicar y dividir por  $a^2$  quedaría

$$\zeta^2 = \frac{\beta^2}{k_0^2} = \frac{(ak_1)^2 - (a\eta_1)^2}{(ak_0)^2}. \quad (244)$$

Así podemos utilizar a (242) y (244) para evaluar las ecuaciones (232) y (235) en sus lados derechos así estas sólo dependerán de  $\eta_1 a$ . Asumiendo esta dependencia, podemos resolverlas gráficamente [1][83][73].

### 3.5.1 Los modos TE y TM

Comencemos ahora el estudio de algunos caso particulares, pero de mucha importancia, en particular cuando  $m = 0$ . En este régimen las expresiones del campo no dependen de  $\phi$ , con lo que las componentes de este se vuelven radialmente simétricas. Regresando a la definición de  $\Gamma$  en (226) vemos que

$$\Gamma|_{m=0} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa, \quad (245)$$

con lo que usando esta expresión en (232) y no olvidando que  $m = 0$

$$\delta_1 \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = \frac{n_1^2 - n_2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa - \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa, \quad (246)$$

$$= \frac{n_1^2}{n_1^2} \delta_2 \kappa, \quad (247)$$

$$= \delta_2 \kappa. \quad (248)$$

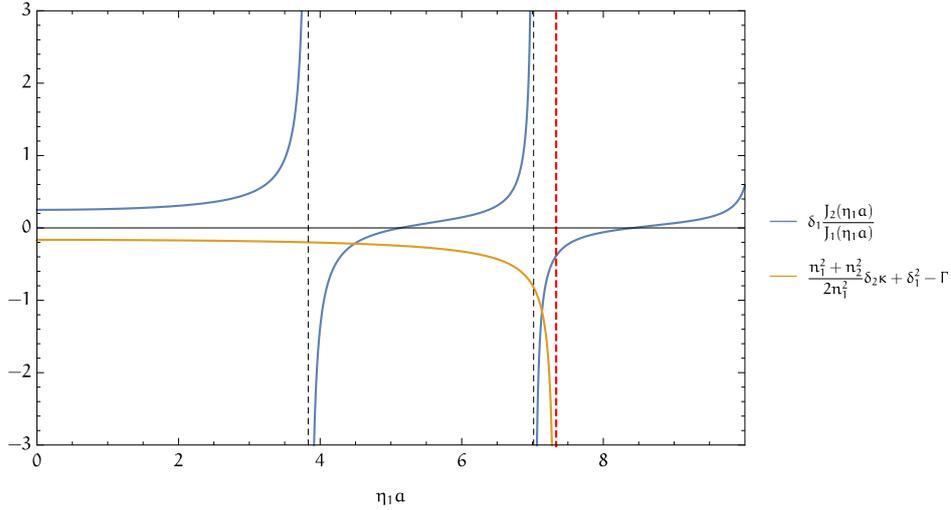


Figura 8: Solución gráfica para la fórmula (232) propia de los modos EH. La línea punteada roja representa el valor de V. Se considera  $n_1 = 1.4628$ ,  $n_2 = 1.46$ ,  $\lambda = 1.55005\mu\text{m}$ ,  $V = 7.33403$ ,  $m = 1$ . Las cantidades empleadas son a modo de ejemplo, de haber empleado los valores de la fibra óptica empleada en los experimentos que competen a este documento, no se apreciaría con tanta claridad la presencia de múltiples intersecciones entre las gráficas de las ecuaciones, típicas de fibras multimodales. Esta observación también ha de considerarse en las otras soluciones gráficas para los otros modos.

Regresando a  $\kappa$  a una expresión en términos de las funciones de Bessel K, y como  $K'_0(x) = -K_1(x)$  [3], se tendrá que

$$\delta_1 \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = -\delta_2 \frac{K_1(\eta_2 a)}{K_0(\eta_2 a)}. \tag{249}$$

*Ecuación de eigenvalores para los modos TE*

Ahora si sustituimos (245) en (235) recordando nuevamente que  $m = 0$

$$\delta_1 \frac{J_{-1}(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = -\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_2^2} \delta_2 \kappa + \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \delta_2 \kappa, \tag{250}$$

$$= -\frac{2n_2^2}{2n_1^2} \kappa. \tag{251}$$

Nuevamente regresamos a  $\kappa$  a términos de las funciones de Bessel K, empleamos la propiedad de las K's que antes utilizamos y usamos que  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$  [3]

$$-\delta_1 \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \delta_2 \left( -\frac{K_1(\eta_2 a)}{K_0(\eta_2 a)} \right), \tag{252}$$

*Ecuación de eigenvalores para los modos TH*

$$\delta_1 \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} = -\delta_2 \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K_1(\eta_2 a)}{K_0(\eta_2 a)}. \tag{253}$$

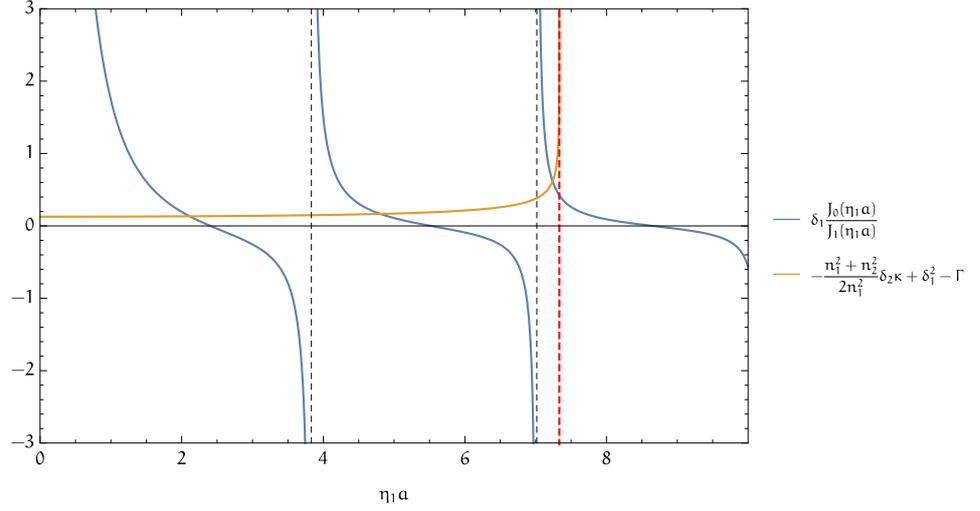


Figura 9: Solución gráfica para la fórmula (235) propia de los modos HE. La línea punteada roja representa el valor de  $V$ . Se considera  $n_1 = 1.4628$ ,  $n_2 = 1.46$ ,  $\lambda = 1.55005\mu\text{m}$ ,  $V = 7.33403$ ,  $m = 1$ .

Consideremos  $m = 0$  sobre el sistema de ecuaciones (195) regresando las expresiones escritas con  $\alpha$ 's a sus términos originales, dicho sistema se escribe como

$$NJ_0(\eta_1 a) = PK_0(\eta_2 a), \quad (254a)$$

$$MJ_0(\eta_1 a) = OK_0(\eta_2 a), \quad (254b)$$

$$N \frac{\omega \mu_1}{\eta_1 \beta} J_0'(\eta_1 a) + P \frac{\omega \mu_2}{\beta \eta_2} K_0'(\eta_2 a), \quad (254c)$$

$$N \frac{\omega \epsilon_1}{\eta_1 \beta} J_0'(\eta_1 a) + O \frac{\omega \epsilon_2}{\eta_2 \beta} K_0'(\eta_2 a) = 0. \quad (254d)$$

Considerando que  $K_0'(x) = -K_1(x)$  y por (229a)  $J_0'(x) = -J_1(x)$ , eliminando los factores comunes  $\omega/\beta$  en (254c) y (254d), utilizando que  $(\mu_1 \approx \mu_2) \approx \mu$  como ya se había hecho, multiplicando por  $\mu$  a (254d) y notando que por (116)  $\epsilon_i \mu = (n_i/c)^2$ ; se pueden reescribir a (254c) y (254d), luego de dividir las entre  $aJ_0(\eta_1 a)$ , como

$$\frac{N}{a\eta_1} \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} + \frac{P}{a\eta_2} \frac{K_1(\eta_2 a)}{J_0(\eta_1 a)}, \quad (255a)$$

$$\frac{M}{a\eta_1} \frac{J_1(\eta_1 a)}{J_0(\eta_1 a)} + \frac{O}{a\eta_2} \frac{n_2^2 K_1(\eta_2 a)}{n_1^2 J_0(\eta_1 a)} = 0. \quad (255b)$$

Utilizando (249) en (255a)

$$-\frac{N}{a\eta_2} \frac{K_1(\eta_2 a)}{K_0(\eta_1 a)} + \frac{P}{a\eta_2} \frac{K_1(\eta_2 a)}{J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (256)$$

$$-\frac{N}{K_0(\eta_1 a)} + \frac{P}{J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (257)$$

$$NJ_0(\eta_1) = PK_0(\eta_1 a). \quad (258)$$

Utilizando (253) en (255b)

$$-\frac{Mn_1^2 K_1(\eta_2 a)}{a\eta_2 K_0(\eta_2 a)} + \frac{O n_2^2 K_1(\eta_2 a)}{a\eta_2 n_1^2 J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (259)$$

$$-\frac{M}{K_0(\eta_2 a)} + O \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (260)$$

$$MJ_0(\eta_1 a) = O \frac{n_2^2}{n_1^2} K_0(\eta_2 a). \quad (261)$$

Observemos que volvemos a obtener la ecuación (254a) en (258), con lo que el sistema (254) se indetermina para P y N, ie. no hay solución única, y viendo a (254b) y (261), se cae en la conclusión que sólo puede suceder que  $M = O = 0$ . Así observando las ecuaciones (163), (164), (168), (170), (172), (174), (175), (176), (177) y (178), bajo la consideración  $m = 0$  vemos que  $E_r = E_z = H_\phi = 0$ , condición que se conoce como Transversal Eléctrica (TE).

Ahora utilizando (253) en (255a)

$$-\frac{N n_2^2 K_1(\eta_2 a)}{a\eta_2 n_1^2 K_0(\eta_1 a)} + \frac{P K_1(\eta_2 a)}{a\eta_2 J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (262)$$

$$N \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{K_0(\eta_2 a)} - P \frac{1}{J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (263)$$

$$NJ_0(\eta_1 a) = \frac{n_1^2}{n_2^2} PK_0(\eta_2 a). \quad (264)$$

Sustituyendo (249) en (255b)

$$-\frac{M n_2^2 K_1(\eta_2 a)}{a\eta_2 n_1^2 K_0(\eta_2 a)} + \frac{O n_2^2 K_1(\eta_2 a)}{a\eta_2 n_1^2 J_0(\eta_1 a)} = 0, \quad (265)$$

$$MJ_0(\eta_1 a) = OK_0(\eta_2 a), \quad (266)$$

donde se observa que se vuelve a obtener la ecuación (254b), con lo que el sistema de ecuaciones (254) no tiene solución única para M y O, mientras que observando a (264) y (254a) se aprecia que sólo puede suceder que  $N = P = 0$ . Así de nuevo se aprecia a partir de las ecuaciones (163), (164), (168), (170), (172), (174), (175), (176), (177) y (178), y considerando  $m = 0$  como se ha venido haciendo, que  $E_\phi = H_r = H_z = 0$ , condición que se conoce como Transversal Magnética (TM).

Para cada una de estas soluciones, TE y TM, existen una serie de eigenvalores  $\beta_n$ , con  $n \in \mathbb{R}^+$ , ordenados de menor a mayor. Se acostumbra a nombrar a la solución asociada a cada  $\beta_n$  como  $TE_{0n}$  y  $TM_{0n}$ , dicha notación se sigue también para los modos híbridos,  $EH_{mn}$  y  $HE_{mn}$ .

Podemos ver de las figuras 10 y 11 que los lados izquierdos de las ecuaciones (249) y (253) divergen en cada uno de los ceros de la  $J_0(\eta_1 a)$ , de hecho este mismo comportamiento se repite para los

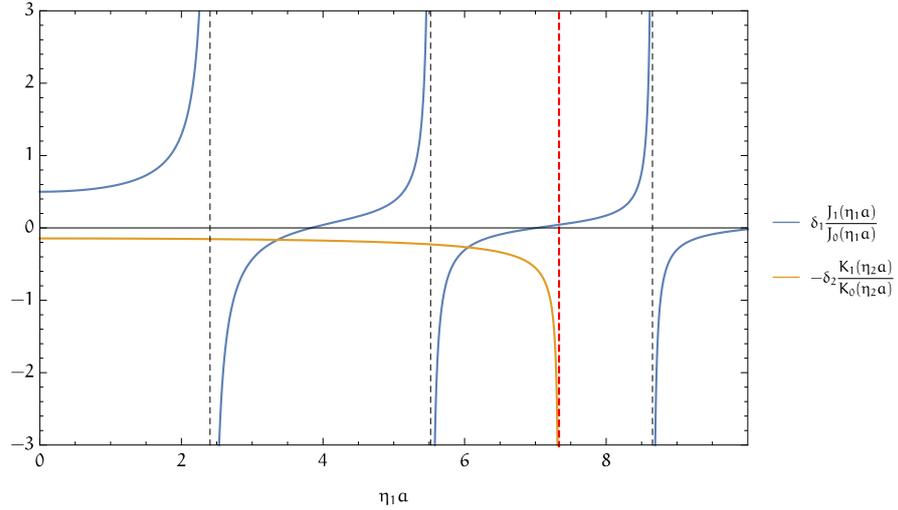


Figura 10: Solución gráfica para la fórmula (249) propia de los modos TE. La línea punteada roja representa el valor de  $V$ . Se considera  $n_1 = 1.4628$ ,  $n_2 = 1.46$ ,  $\lambda = 1.55005\mu\text{m}$ .  $V = 7.33403$

lados izquierdos de las ecuaciones (232) y (235), mientras que los lados izquierdos de (232), (235), (249) y (253) divergen en  $\eta_1 a = V$ , esto por como definimos a  $\eta_1 a$  en términos de  $V$  en (242), con lo que el lado derecho de las ecuaciones queda bien definido en  $\mathbb{R}$  con  $0 \leq \eta_1 a \leq V$ .<sup>9</sup>[83]

De hecho se puede observar que si  $V < 2.404883$ ,<sup>10</sup> entonces sólo habrá una solución para el campo, el modo  $HE_{11}$  con lo que la fibra óptica se conocería como «monomodal».

### 3.6 DISPERSIÓN CROMÁTICA

Está claro que hasta ahora tan sólo se ha supuesto que el índice de refracción en la fibra óptica es independiente de la frecuencia de la luz, sin embargo, esto no es cierto ya que la interacción de los electrones de enlace del medio con una onda electromagnética depende de la frecuencia de la misma. Dicha respuesta se relaciona con las frecuencias de resonancia características en las que el medio absorbe radiación por medio de las oscilaciones de los electrones de enlace. Lejos de estas frecuencias, se puede modelar el índice de refracción por medio de la ecuación de Sellmeier[2]

$$n(\omega)^2 = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \tag{267}$$

<sup>9</sup> Estos resultados son válidos en general independientemente de los parámetros que se consideren para dentro de la fibra óptica, siempre y cuando se respete que  $n_1 > n_2$ .

<sup>10</sup> El valor del primer cero la función de Bessel  $J_0$ .

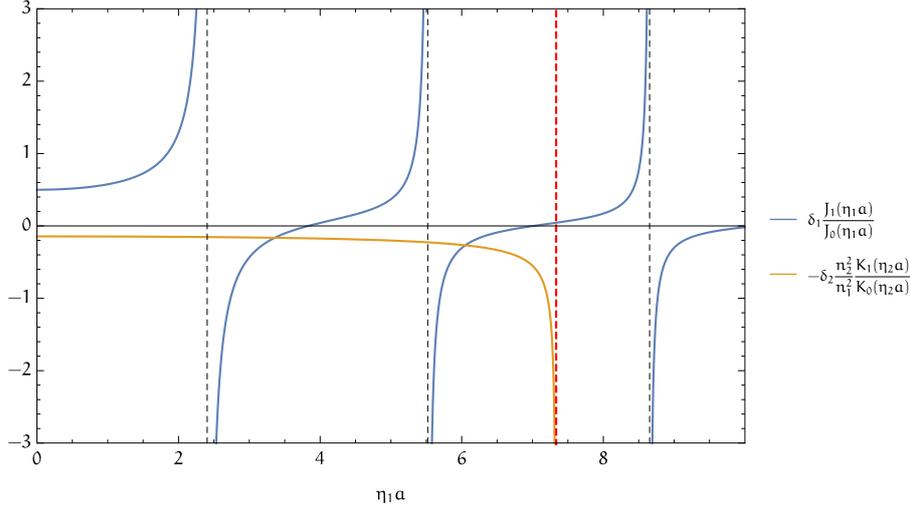


Figura 11: Solución gráfica para la fórmula (253) propia de los modos TM. La línea punteada roja representa el valor de  $V$ . Se considera  $n_1 = 1.4628$ ,  $n_2 = 1.46$ ,  $\lambda = 1.55005\mu\text{m}$ .  $V = 7.33403$

donde  $\omega_j$  es la frecuencia de resonancia  $j$ -ésima y  $B_j$  es su intensidad. Dichos valores se obtienen experimentalmente, para el sílice se encuentran los valores para los coeficientes correspondientes según lo indicado en la tabla 1 [2]

$j$	$B_j$	$\lambda_j [\mu\text{m}]$
1	0.6961663	0.0684043
2	0.4079426	0.1162414
3	0.8974794	9.896161

Tabla 1: Coeficientes de la ecuación de Sellmeier para  $\text{SiO}_2$ . [50]

Hay que recordar que podemos usar la ecuación (120) para encontrar las frecuencias en términos de la longitud de onda.

La dispersión cromática en la fibra es importante para entender la propagación de pulsos cortos ya que cada componente espectral asociada al pulso se verá afectada por este fenómeno.<sup>11</sup>

Como ya sabemos, la constante de propagación del modo  $\beta$  depende del índice de refracción, en todo caso podemos expandirla como una serie de Taylor centrada en  $\omega_0$ , frecuencia donde se encuentra el pico del pulso

$$\beta(\omega) \approx n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2, \quad (268)$$

<sup>11</sup> Una introducción al desarrollo espectral de funciones se puede ver en el capítulo dedicado a las transformadas de Fourier de [3].

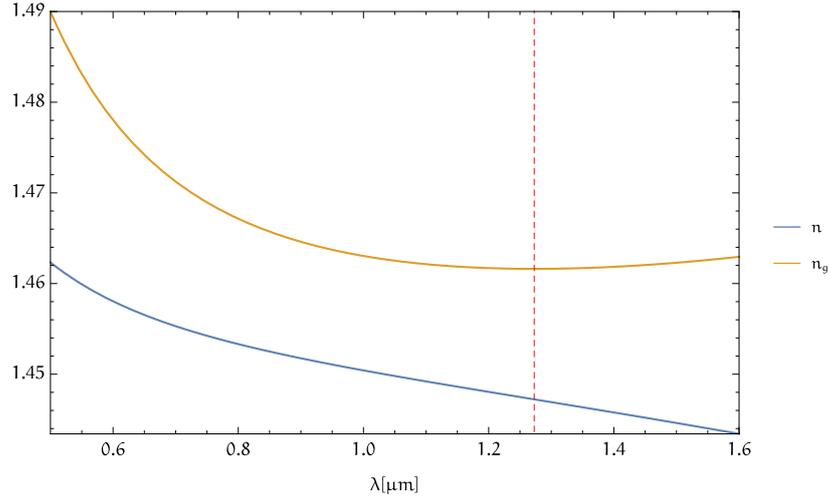


Figura 12: Cambio del índice de refracción,  $n$ , y del índice de refracción de grupo,  $n_g$ , respecto de la longitud de onda. La línea roja punteada se coloca sobre  $\lambda_D$  que resulta ser igual a  $1.27275\mu\text{m}$ .

con

$$\beta_{m \in \mathbb{Z}^+} = \left( \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}, \quad (269)$$

donde se observa en particular que

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right), \quad (270)$$

y que

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right), \quad (271)$$

donde  $n_g$  y  $v_g$  son las velocidades e índices de refracción de grupo respectivamente<sup>12</sup>, donde se cumple que

$$v_g = \frac{c}{n_g}. \quad (272)$$

Sucede pues que la envolvente del pulso se mueve con una velocidad de grupo, donde  $\beta_2$  representa la dispersión de esta velocidad. A este fenómeno se le llama «dispersión de velocidad de grupo»<sup>13</sup> y

<sup>12</sup> El índice de refracción de grupo de un material,  $n_g$ , se define como la razón entre la velocidad de la luz en el vacío  $c$  y la velocidad de grupo en el medio  $v_g$

$$n_g = \frac{c}{v_g} = c \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega n(\omega)) = n(\omega) + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}.$$

Se la emplea en el cálculo del tiempo de retardo en los pulsos ultracortos, o en el rango espectral libre de un resonador que contiene un medio dispersivo.[58] La figura 12 compara el índice de refracción dependiente de la longitud de onda, según la ecuación (267), con la anteriormente presentada.

<sup>13</sup> Group Velocity Dispersion (GDV).

es caracterizado por  $\beta_2$ . Por otra parte el parámetro de dispersión se define como

$$D := \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2. \quad (273)$$

Los parámetros  $\beta_2$  y  $D$  se igualan a cero en la longitud de onda de dispersión cero,  $\lambda_D$ . Esto no quiere decir que para  $\lambda = \lambda_D$  no haya dispersión, pues habría que considerar contribuciones de mayor orden, las cuales son necesarias en el estudio de pulsos ultracortos.

Por otra parte,  $D$  también es dependiente de parámetros de la fibra como el radio o la diferencia de índices de refracción entre el núcleo y el recubrimiento lo que da la oportunidad de sintonizar  $\lambda_D$ .

Si bien en este capítulo no hablaré de fenómenos ópticos no lineales, es preciso apuntar que dichos fenómenos se comportan cualitativamente de distinto modo según el signo de parámetro  $GDV$ . Sucede pues que si  $\lambda < \lambda_D$  y  $\beta_2 < 0$ , se está en el régimen de «dispersión normal»; por otra parte si  $\lambda > \lambda_D$  y  $\beta_2 < 0$ , se encontrará en lo que se conoce como régimen de «dispersión anómala».

Para la dispersión normal las componentes de alta frecuencia se mueven más lento que las componentes de más baja frecuencia del mismo pulso, en el anómalo sucede lo contrario. Puede pasar incluso que este desempatamiento en las velocidades de grupo cause que entre dos pulsos sucesivos lo suficientemente cercanos, ocurra eventualmente un traslape entre estos.

### 3.7 FIBRAS ÓPTICAS BIRREFRINGENTES

Decir que una fibra es monomodal no es del todo acertado ya que un mismo modo puede estar degenerado en polarización. Sin embargo, esta degeneración se puede romper al inducir algún tipo de anisotropía en el material de la fibra. Supongamos que tenemos dos modos degenerados, uno con polarización paralela al eje  $x$  y otro polarizado en dirección  $y$ . Resulta que el efecto de la ruptura de esta degeneración se observa en el cambio del parámetro  $\beta$  de propagación para cada una de las polarizaciones, a esto se le conoce como birrefringencia modal y se caracteriza mediante su magnitud definida como [2]

$$B_m := \frac{|\beta_x - \beta_y|}{k_0}, \quad (274)$$

$$= |n_x - n_y|, \quad (275)$$

donde  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son las constantes de propagación modales para cada una de las polarizaciones con  $n_x$  y  $n_y$ , los respectivos índices de refracción modales. Los modos intercambian su intensidad periódicamente según el parámetro

$$L_B = \frac{2\pi}{|\beta_x - \beta_y|} = \frac{\lambda}{B_m}, \quad (276)$$

donde  $L_B$  se conoce como longitud de batimento.

Se identifican así dos ejes de propagación, el «eje rápido» y el «eje lento», haciendo alusión a la velocidad de grupo del modo.<sup>14</sup>

Para fibras ópticas normales<sup>15</sup>  $B_m$  no es constante a lo largo de la fibra y no representa ningún problema para la transmisión de ondas continuas, el problema viene si se transmite un haz pulsado pues sucederá una dispersión cromática irregular, si son excitados ambos componentes de polarización, a lo que se conoce como «dispersión de modos polarizados»<sup>16</sup>. Se estima el ensanchamiento sufrido por el pulso mediante el retraso temporal,  $\Delta T$ , entre las componentes de polarización. Sea una fibra de longitud  $L$  y constante de birrefringencia  $B_m$ .

$$\Delta T = \left| \frac{L}{v_{gx}} - \frac{L}{v_{gy}} \right| = L |\beta_{1x} - \beta_{1y}| = L(\Delta\beta_1), \quad (277)$$

donde  $\Delta\beta_1$  se relaciona con el desempate de velocidades de grupo. Por otra parte, se caracteriza  $\Delta T$  mediante su valor cuadrático medio<sup>17</sup>[2]

$$\sigma_T = \langle (\Delta T)^2 \rangle, \quad (278)$$

$$= 2(\Delta\beta_1 l_c)^2 \left[ \exp\left(-\frac{L}{l_c}\right) + \frac{L}{l_c} - 1 \right], \quad (279)$$

donde  $\Delta\beta_1 \equiv \Delta\tau/L$ ,  $\Delta\tau$  es la diferencia del retraso sobre los principales estados de polarización y  $l_c$  es la longitud dentro de la cual los estados permanecen correlacionados, usualmente  $l_c \sim 10m$ .

Es a veces deseable contar con fibras que mantengan la polarización. Para que esto suceda, son inducidas, mediante cambios en la forma del núcleo o la aplicación de estrés, birrefringencias muy grandes, de tal modo que las pequeñas fluctuaciones de la misma, producto natural de defectos de fabricación, se vean enmascaradas.

En particular en las fibras birrefringentes mediante estrés inducido, esto se logra con la colocación de dos barras<sup>18</sup> de borosilicato a los lados del núcleo durante su fabricación. Estas fibras se nombran según la figura que se observa en ellas transversalmente, como se aprecia en la figura 13. Si la polarización es paralela ya sea al eje rápido o lento de la fibra, esta se mantiene; sin embargo, si está angulada, los cambios en la polarización se dan de forma cíclica, con un periodo igual a la longitud de batimento.

<sup>14</sup> Recordemos que  $v_g = c/n$ , con lo que a índices de refracción mayores  $v_g$  disminuye y viceversa.

<sup>15</sup> Nos referimos por fibras ópticas normales, a aquellas que no preservan la polarización. El apelativo se lo ganan al ser las más fáciles de encontrar en el mercado.

<sup>16</sup> Polarization-Mode Dispersion (PMD).

<sup>17</sup> Root-Mean-Square (RMS).

<sup>18</sup> También conocidas por su anglicismo, *rods*.

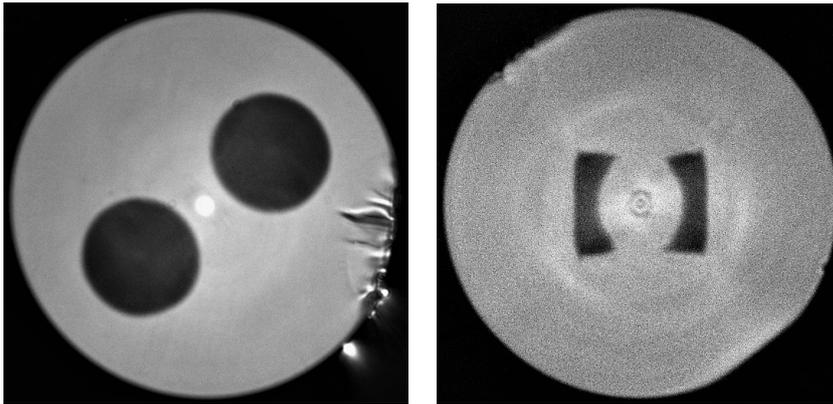
(a) Fibra óptica tipo *panda*.(b) Fibra óptica tipo *bowtie*.

Figura 13: Corte transversal de fibras ópticas birrefringentes, se aprecia al centro el núcleo y a sus lados las barras de estrés que le otorgan no sólo el nombre sino también sus propiedades ópticas.

### 3.8 TAPERS

La fibra óptica estrechada o *taper* por su nombre en inglés es una clase de micro y nano cable de fibra óptica, de la cual se presenta un esquema de su perfil en la figura 14, donde de igual manera se identifican cada una de sus partes.<sup>19</sup> Dentro de sus propiedades se encuentran la presencia de campos evanescentes en su exterior, un comportamiento óptico altamente no lineal<sup>20</sup> y un fuerte confinamiento. Este tipo de fibras fabricadas mediante la fusión de las mismas en rededor de su punto medio permite que los extremos de las misma queden inalterados, lo que facilita su empleo en conjunto con sistemas ópticos convencionales. Sus principales aplicaciones se encuentran donde se busque aprovechar el campo evanescente, o si se quiere aprovechar las condiciones dadas en la región de transición de la fibra<sup>21</sup> o si se busca explotar la no linealidad de la misma.

Son de interés para los propósitos de esta tesis su mención, ya que fueron una de las fuentes de fotones empleadas en el experimento explotando el cambio de las propiedades no lineales de una fibra óptica causadas por la región estrechada de estas. A propósito de su caracterización y fabricación, resulta conveniente revisar el texto [54] pues la fabricación de las fibras empleadas se basó en los procedimientos ahí expuestos, donde además se explora más a profundidad dicho tópico.

<sup>19</sup> Esta identificación de cada una de las regiones del *taper* se empleará en el [Capítulo 4](#).

<sup>20</sup> Si bien esto depende del grado de estrechamiento.

<sup>21</sup> Filtrado de modos.

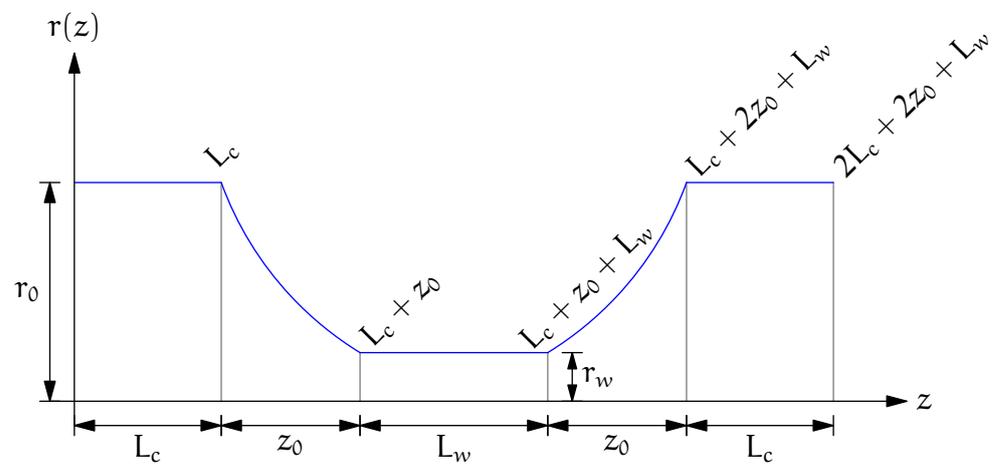


Figura 14: Perfil de una fibra óptica estirada, se presentan las regiones sin estirar con una longitud  $L_c$  y un radio  $r_0$ , las regiones de transición  $z_0$  y la región estirada de longitud  $L_w$  y radio  $r_w$ .

## MEZCLADO ESPONTÁNEO DE CUATRO ONDAS

Dentro de los procesos paramétricos de tercer orden que involucran la interacción de cuatro ondas se encuentra el Mezclado de Cuatro Ondas y la generación de tercer armónico. Como se había dicho en el [Capítulo 2](#) el término a tercer orden de la polarización inducida

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \epsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}. \quad (280)$$

Dicho proceso es dependiente de la polarización del campo eléctrico, aunque es válido hacer una aproximación escalar considerando a las cuatro ondas polarizadas sobre el eje principal de una fibra birrefringente. Sean cuatro ondas con frecuencias  $\{\omega_i\}_{i \in [1,4], i \in \mathbb{N}}$ , linealmente polarizados a lo largo del mismo eje  $x$ , se escribe el campo total como la suma de cada uno de los campos.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 E_j \exp(i(\beta_j z - \omega_j t)) + \text{c.c.}, \quad (281)$$

donde  $\beta_j = \tilde{n}_j \omega_j / c$  es una constante de propagación y  $\tilde{n}_j$  es el índice de refracción asociado a dicho modo. Sustituyendo (281) en (280),  $\mathbf{P}_{\text{NL}}$  toma la forma

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 P_j \exp(i(\beta_j z - \omega_j t)) + \text{c.c.} \quad (282)$$

donde los términos  $P_j$  constan de términos que involucran productos de los campos eléctricos. En particular el término  $P_4$  se puede escribir como

$$P_4 = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} [ |E_4|^2 E_4 + 2(|E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2) E_4 + 2E_1 E_2 E_3 \exp(i\theta_+) + 2E_2 E_2 E_3 \exp(i\theta_-) + \dots ], \quad (283)$$

con

$$\theta_+ = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4)z - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)t, \quad (284)$$

$$\theta_- = (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)z - (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)t. \quad (285)$$

Los procesos relacionados con  $\theta_+$  y  $\theta_-$  se refieren a una suma y diferencia de frecuencias respectivamente, el qué tan eficiente sea dicha conversión depende de que el desempate de fases sea mínimo. El [FWM](#) sucede cuando los fotones de una o más ondas se aniquilan y se crean otros con diferentes frecuencias pero conservando la energía y momento netos de sus fotones padres, que de forma simplificada se

presentan, en los casos no degenerado y degenerado, en las figuras 15 y 16 respectivamente. Las condiciones de empatamiento de fase en el FWM dependen de la selección correcta de los parámetros de la fibra y longitudes de onda de los campos para que dicho proceso se genere maximizando su eficiencia.

Observando el término  $\theta_+$  vemos que trata de un caso que ya habíamos estudiado, pues si  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 (= \omega)$ , entonces  $\omega_4 = 3\omega$ , con lo que se tendría la generación de un tercer armónico. Mientras que  $\theta_-$  refiere al caso en donde dos fotones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se aniquilan y dan origen a dos fotones  $\omega_3$  y  $\omega_4$  tales que

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2. \quad (286)$$

La condición de empatamiento de fase requiere también que  $\Delta k = 0$  con

$$\Delta k = \beta_3 + \beta_4 - \beta_1 - \beta_2, \quad (287)$$

$$= (\tilde{n}_3\omega_3 + \tilde{n}_4\omega_4 - \tilde{n}_1\omega_1 - \tilde{n}_2\omega_2), \quad (288)$$

donde  $\tilde{n}_j$  es el índice de refracción efectivo para la frecuencia  $\omega_j$ .

Pueden suceder dos casos, en el que  $\omega_1 \neq \omega_2$ , conocido como «no degenerado» y en el que  $\omega_1 = \omega_2 (= \omega_p)$ , el llamado caso «degenerado», donde se generan dos campos simultáneamente desplazados de la frecuencia de bombeo  $\omega_p$  con un corrimiento de frecuencia<sup>1</sup>

$$\Omega_s = \omega_p - \omega_3 = \omega_4 - \omega_p. \quad (289)$$

Cada uno de las señales generadas posee un nombre; el de más alta frecuencia se conoce como «Stokes» y el de más baja frecuencia como «anti-Stokes», que también son llamados «señal»<sup>2</sup> y «acompañante»<sup>3</sup> respectivamente.

Al proceso de FWM se lo considera un proceso paramétrico al no haber transferencia de energía al material.

#### 4.1 EL HAMILTONIANO DE INTERACCIÓN DE CUATRO ONDAS

La energía total del campo electromagnético contenida en un volumen está dada por

$$H = \int (w_e + w_m) dV, \quad (290)$$

donde  $w_e$  es la densidad de energía eléctrica y  $w_m$  es la densidad de energía magnética, y donde se tiene que  $w_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$  y  $w_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$  donde

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (291)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (292)$$

<sup>1</sup>  $\Omega_s > 0 \Rightarrow \omega_3 < \omega_4$

<sup>2</sup> En inglés *signal*, se indica con una «s».

<sup>3</sup> En inglés *idler*, se indica con una «i».

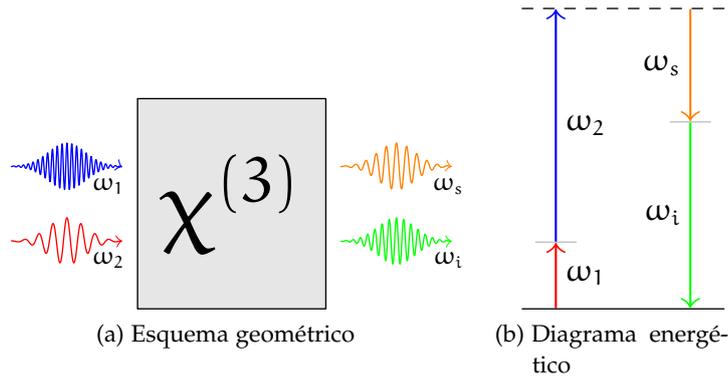


Figura 15: Diagrama del mezclado de cuatro ondas no degenerado.

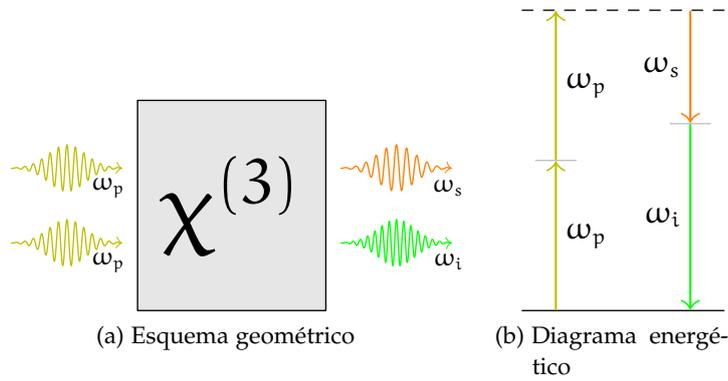


Figura 16: Diagrama del mezclado de cuatro ondas degenerado.

donde  $\mathbf{D}$  es el vector de desplazamiento eléctrico,  $\mathbf{P}$  la polarización,  $\mathbf{B}$  el vector de desplazamiento magnético y  $\mathbf{M}$  la densidad de magnetización<sup>4</sup>. Como usamos fibra óptica el vector de polarización está dado por

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \chi^{(3)} : \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E}. \quad (293)$$

Consideraremos que los campos de bombeo  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  son clásicos, mientras que los campos generados  $\mathbf{E}_s$  y  $\mathbf{E}_i$  son cuánticos, las expresiones de los mismos se escribirán más adelante. Por otra parte los campos de bombeo se consideran ortogonalmente polarizados a los fotones generados con lo que la respuesta no lineal es asociada con el elemento  $\chi_{xxxy}^{(3)}$  [29].<sup>5</sup>

Así pues a partir de ahora seguiremos nuestro análisis de forma escalar, en donde el campo eléctrico dentro de la fibra está dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i. \quad (294)$$

<sup>4</sup>  $\mathbf{M} = 0$  para materiales dieléctricos

<sup>5</sup> El emplear una fibra birefringente permite que el corrimiento espectral sea mayor respecto al bombeo, lo que permite tener un mejor filtrado del espectro generado por dispersión Raman.[71]

Cada uno de estos campos lo podemos separar en términos de componentes de frecuencia positiva y negativa

$$E_{\mu} = \frac{1}{2} \left( E_{\mu}^{(+)} + E_{\mu}^{(-)} \right), \quad (295)$$

con  $\mu = 1, 2, s, i$ . A partir de todas estas consideraciones y empleando sólo los términos asociados al FWM se llega a que[29]

$$D = \frac{1}{2} \left[ \epsilon \left( E_1^{(+)} + E_1^{(-)} \right) + \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \left( 2E_2^{(+)} E_s^{(-)} E_i^{(-)} + 2E_2^{(-)} E_s^{(+)} E_i^{(+)} \right) \right], \quad (296)$$

en donde  $\epsilon = \epsilon_0 \kappa_e$  que es la permitividad eléctrica del medio con  $\kappa_e$  es la constante dieléctrica tal que

$$\kappa_e = 1 + \chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} (|E_1|^2 + 2|E_2|^2) = n^2, \quad (297)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio dado por

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2(\omega) (|E_1|^2 + 2|E_2|^2), \quad (298)$$

con

$$n_2(\omega) = \frac{3}{8} \frac{1}{n(\omega)} \operatorname{Re} \left\{ \chi_{xxxx}^{(3)} \right\}, \quad (299)$$

que se conoce como el índice de refracción no lineal.<sup>6</sup> Así

$$w_e = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} E_1^{(+)} E_2^{(+)} E_s^{(-)} E_i^{(-)}. \quad (300)$$

Por otra parte  $w_e \propto w_m$ , lo que es más, como el campo eléctrico y magnético están acoplados a través de las ecuaciones de Maxwell, se puede mostrar que en efecto  $w_e = w_m$ , así y considerando la cuantización de los campos  $s$  e  $i$ , se tiene que el hamiltoniano de interacción es [29][25]

$$\hat{H}_{\text{SFWM}} = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \int \left( E_1^{(+)} E_2^{(+)} E_s^{(-)} E_i^{(-)} \right) dV, \quad (301)$$

en donde los bombeos  $E_1$  y  $E_2$  se consideran clásicos y escritos en su expansión de frecuencias toman la forma

$$E_{\nu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = A_{\nu} f_{\nu}(x, y, z) \int d\omega_{\nu} \alpha(\omega_{\nu}) \exp\{-i[\omega_{\nu} t - k_{\nu}(\omega_{\nu}, z)z]\}, \quad (302)$$

donde  $\nu = 1, 2$ ,  $A_{\nu}$  es la amplitud del campo y  $f_{\nu}$  es la distribución transversal del campo<sup>7</sup> y está normalizada<sup>8</sup>. Además  $E_{\nu}^{(-)} = \left( E_{\nu}^{(+)} \right)^*$ .

<sup>6</sup> Esto ya se había tratado con anterioridad en el [Capítulo 2](#)

<sup>7</sup> Dígase del modo espacial, véase el capítulo de fibras.

<sup>8</sup> Se puede definir una función  $B$  tal que

$$B(x, y, z) := Mf(x, y, z),$$

Por otra parte, como ya se había mencionado,  $E_s$  y  $E_i$  se suponen cuantizados[29][22][49]

$$E_{\mu}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\delta k} f_{\mu}(x, y, z) \sum_{k_{\mu}} l(k_{\mu}, z) \exp(-i[\omega_{\mu} t - k_{\mu}(\omega_{\mu}, z)z]) \hat{a}(k_{\mu}), \quad (303)$$

donde  $f_{\mu}$  es la distribución transversal normalizada del campo y donde

$$\delta k = \frac{2\pi}{L_Q}, \quad (304)$$

con  $L_Q$  la longitud de cuantización y

$$l(\omega) = M \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\pi \epsilon_0 n^2(\omega)}}. \quad (305)$$

#### 4.2 EL ESTADO DE DOS FOTONES EN TAPERS DE GUÍAS DE ONDA

El interés principal de hacer el análisis en *tapers* radica en que los otros casos estudiados en esta tesis se generalizan a partir de este. Es pues que considerando ahora un análisis perturbativo a primer orden en el tiempo, y ya conociendo el hamiltoniano de interacción se tiene que el estado de dos fotones está dado por [25]

$$|\Psi\rangle = \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H_{\text{SFWM}}(t')\right) |0\rangle_s |0\rangle_i, \quad (306)$$

$$= |0\rangle_s |0\rangle_i + |\Psi_2\rangle, \quad (307)$$

donde  $|\Psi_2\rangle$  está dado por

$$|\Psi_2\rangle = 2\pi i \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{\hbar} \frac{3}{4} \delta k \int dz J(z) \sum_{k_s} \sum_{k_i} G(k_s, k_i, z) \hat{a}^{\dagger}(k_s) \hat{a}^{\dagger}(k_i), \quad (308)$$

con

$$G(k_s, k_i, z) = l(\omega_s, z) l(\omega_i, z) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega) \exp(i\Delta k(z)z), \quad (309)$$

---

y que

$$\int dx \int dy \int dz |B(x, y, z)|^2 = 1.$$

Así

$$M = \frac{1}{\sqrt{\int dx \int dy \int dz |f(x, y, z)|^2}}.$$

y

$$J(z) = A_1(z)A_2(z)F_{\text{eff}}(z) \int dx \int dy f_1(x, y, z) f_2(x, y, z) f_s^*(x, y, z) f_i^*(x, y, z). \quad (310)$$

Hay que precisar que al hacer las cuentas para la derivación de (306), aparece en algún momento una delta de Dirac que impone la condición de conservación de energía<sup>9</sup>

$$\omega_2 = \omega_s + \omega_i - \omega_1, \quad (311)$$

mientras que el desempatamiento de fases se define como (ya empleando la conservación de energía)

$$\Delta k(z) = k_1(\omega_1, z) + k_2(\omega_s + \omega_i - \omega_1, z) - k_s(\omega_s, z) - k_i(\omega_i, z) - \Phi_{\text{NL}}, \quad (312)$$

donde  $\Phi_{\text{NL}}$  es un término de fase inducida por fenómenos no lineales de la refracción del medio debidos a SPM y XPM.

Notamos que la integral dentro del desarrollo de la ecuación (306) a partir de la figura 14 se puede dividir en 5 partes tal que

$$\begin{aligned} \int_0^L dz &= \int_0^{L_c} dz + \sum_i = 2^N \int_{L_c}^{L_c+(i-1)\delta L} dz + \int_{L_c+z_0}^{L_c+z_0+L_w} dw \\ &+ \sum_{i=2}^N \int_{L_c+z_0+L_w+(i-2)\delta L}^{L_c+z_0+L_w+(i-1)\delta L} dw + \int_{L_c+2z_0+L_w}^{2L_c+2z_0+L_w} dz, \end{aligned} \quad (313)$$

donde se considera que regiones de longitud  $\delta L$  en las zonas de transición, el radio de la fibra es constante, así al fijar el radio en el tratamiento de  $\Delta k(z)$ , está ya no dependerá de  $z$ , pero si del radio local de la fibra. Con lo que haciendo las cuentas con cuidado se llega a que

$$|\Psi_2\rangle = |\Psi_2\rangle_{r_0}^{\downarrow} + |\Psi_2\rangle_{r_0}^{\uparrow} + |\Psi_2\rangle_{r_w} + |\Psi_2\rangle_{z_0}^{\uparrow} + |\Psi_2\rangle_{r_0}^{\uparrow}, \quad (314)$$

en donde los subíndices y superíndices indican la parte del taper a la que hacen referencia y donde cada una de las anteriores expresiones están dadas por

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{r_0}^{\downarrow, \uparrow} &= i(2\pi) \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{\hbar} \delta k L_c J_{r_0} \\ &\times \sum_{k_s} \sum_{k_i} G_{r_0}^{\downarrow, \uparrow}(k_s, k_i) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) |0\rangle_{k_s} |0\rangle_{k_i}, \end{aligned} \quad (315)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle_{r_w} &= i(2\pi) \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{\hbar} \delta k L_w J_{r_w} \\ &\times \sum_{k_s} \sum_{k_i} G_{r_w}(k_s, k_i) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) |0\rangle_{k_s} |0\rangle_{k_i} \end{aligned} \quad (316)$$

<sup>9</sup> Ver Sección A.4.

$$\begin{aligned}
 |\Psi_2\rangle_{z_0}^{\downarrow\uparrow} &= i(2\pi) \frac{3}{4} \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{\hbar} \delta L \delta k \sum_{i=2}^N J_{r_i} \\
 &\times \sum_{k_s} \sum_{k_i} G_{r_i}^{\downarrow\uparrow}(k_s, k_i) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) |0\rangle_{k_s} |0\rangle_{k_i}, \quad (317)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 G_{r_0}^\downarrow(k_s, k_i) &= l_{r_0}(\omega_s) l_{r_0}(\omega_i) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega) \\
 &\times \text{sinc}\left(\frac{L_c \Delta k_{r_0}}{2}\right) \exp\left(i \frac{L_c}{2} \Delta k_{r_0}\right), \quad (318)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{r_i}^\downarrow(k_s, k_i) &= l_{r_i}(\omega_s) l_{r_i}(\omega_i) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega) \\
 &\times \text{sinc}\left(\frac{\delta L \Delta k_{r_i}}{2}\right) \exp\left(i \frac{\delta L}{2} \Delta k_{r_i}\right) \\
 &\times \exp(i(L_c + (i-2)\delta L) \Delta k_{r_i}), \quad (319)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{r_w}(k_s, k_i) &= l_{r_w}(\omega_s) l_{r_w}(\omega_i) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega) \\
 &\times \text{sinc}\left(\frac{L_w \Delta k_{r_w}}{2}\right) \exp\left(i \frac{L_w}{2} \Delta k_{r_w}\right) \\
 &\times \exp(i(L_c + z_0) \Delta k_{r_w}), \quad (320)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{r_i}^\uparrow(k_s, k_i) &= l_{r_i}(\omega_s) l_{r_i}(\omega_i) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega_i) \\
 &\times \text{sinc}\left(\frac{\delta L \Delta k_{r_i}}{2}\right) \exp\left(i \frac{\delta L}{2} \Delta k_{r_i}\right) \\
 &\times \exp(i(L_c + L_w + z_0 + (i-2)\delta L) \Delta k_{r_i}), \quad (321)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{r_0}^\uparrow(k_s, k_i) &= l_{r_0}(\omega_s) l_{r_0}(\omega_i) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega) \\
 &\times \text{sinc}\left(\frac{L_c \Delta k_{r_0}}{2}\right) \exp\left(i \frac{L_c}{2} \Delta k_{r_0}\right) \\
 &\times \exp(i(L_c + L_w + 2z_0) \Delta k_{r_0}), \quad (322)
 \end{aligned}$$

en donde se usa que

$$r_i = \frac{r^{(i)} + r^{(i-1)}}{2}, \quad (323)$$

es decir que el radio  $r_i$  que se emplea es el promedio del radio del elemento  $\delta L$   $i$ -ésimo.

A la función  $G_{r_\mu}$  correspondiente a cada una de las partes de *taper* se la conoce como la función espectral conjunta<sup>10</sup> de los fotones, la **JSA** total es la suma de las **JSA** parciales y así

$$\begin{aligned}
 G(k_s, k_i) &= G_{r_0}^\downarrow(k_s, k_i) + G_{r_i}^\downarrow(k_s, k_i) + G_{r_i}^\downarrow(k_s, k_i) + G_{r_w}(k_s, k_i) \\
 &+ G_{r_i}^\uparrow(k_s, k_i) + G_{r_0}^\uparrow(k_s, k_i). \quad (324)
 \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Joint Spectral Amplitude (**JSA**).

A partir de esta función se puede obtener la intensidad espectral conjunta<sup>11</sup>  $|G(\omega_s, \omega_i)|^2$ , que corresponde a la distribución de la probabilidad bidimensional de generación de una pareja de fotones de frecuencias  $\omega_i$  y  $\omega_s$ . [85] El espectro de los fotones, o espectro marginal, se puede obtener a partir de la JSI del siguiente modo

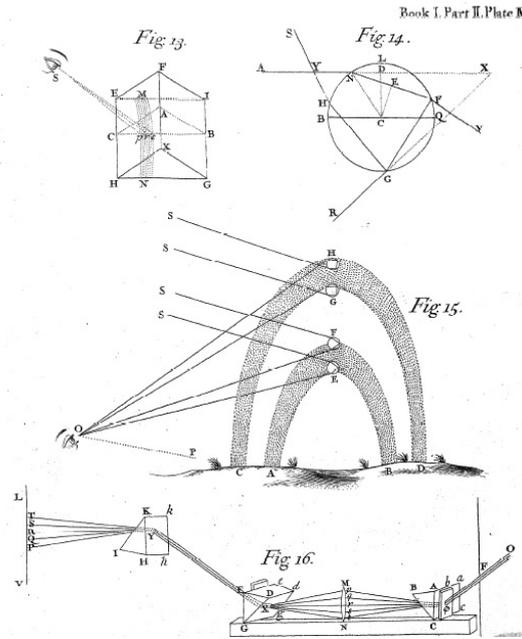
$$\mathcal{F}(\omega_s) = \int d\omega_i |G(\omega_s, \omega_i)|^2. \quad (325)$$

---

<sup>11</sup> Joint Spectral Intensity (JSI).

### Parte III

## DESARROLLO EXPERIMENTAL



Arreglos ópticos e ilustraciones del tratado de óptica «Optiks» (1704) de Isaac Newton.

Cayó la torre que en el viento hacían  
mis altos pensamientos castigados  
que yacen por el suelo derribados  
cuando con sus extremos competían.

Atrevidos al sol al llegar querían  
y morir en sus rayos abrasados,  
de cuya luz contentos y engañados  
como la ciega mariposa ardían.

¡Oh siempre aborrecido desengaño,  
amado al procurarte, odioso al verte,  
que en lugar de sanar abres la herida!

Pluguiera a Dios duraras, dulce engaño,  
que si ha de dar un desengaño muerte,  
mejor es un engaño que da vida.

**Lope de Vega (1562–1635)**



## DESARROLLO EXPERIMENTAL

El montaje realizado es una adaptación a las particularidades de los espectros generados y de la disposición de las muestras empleadas, de otro experimento llevado a cabo con anterioridad en el laboratorio de óptica cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares y cuyos resultados fueron publicados en [28].

En el esquema contra-polarizado que se realizó en el experimento, los fotones producidos por SFWM se generaron con la polarización cruzada a los fotones de bombeo, de ahí la necesidad de emplear como fuente de fotones una fibra óptica que mantuviera la polarización (PMF)<sup>1</sup> de los mismos. Para ello se empleó fibra óptica tipo Bowtie (HB800C) de Fibercore Ltd. En esta los fotones de bombeo viajaron paralelos al eje lento de la misma y los generados por SFWM viajaron paralelos al eje rápido de la misma.

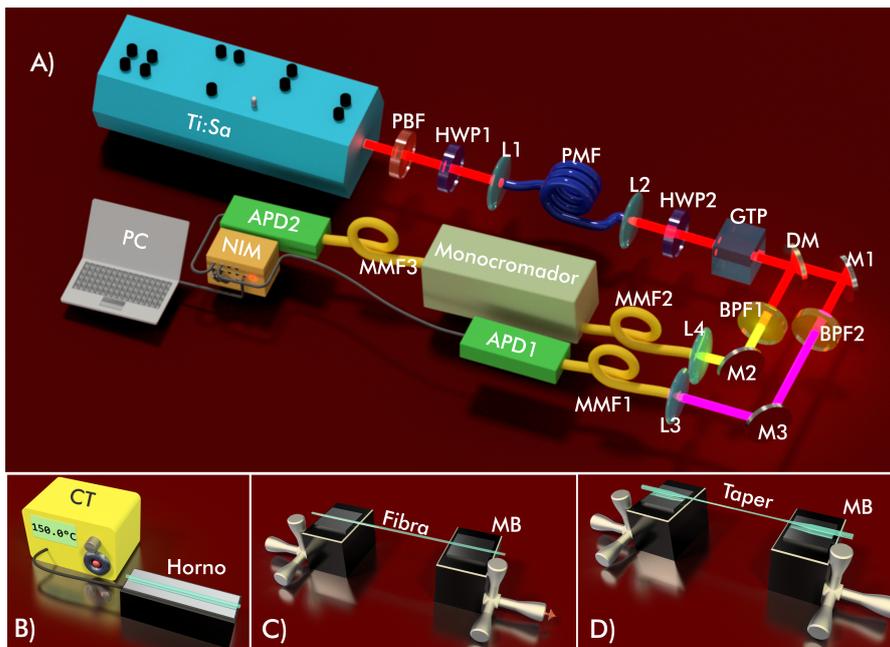


Figura 17: Montaje experimental. La fibra óptica (PMF) fue dispuesta entre las lentes L<sub>1</sub> y L<sub>2</sub> en las configuraciones B), C) y D) para la medición de los espectros marginales de SFWM ante cambios de temperatura de la fibra, la aplicación de estrés longitudinal y mediante el estrechamiento de la fibra. Se indica en la figura C) la dirección de estiramiento mediante una flecha sobre uno de los micrómetros de las monturas mecánicas.

<sup>1</sup> Polarization-Maintaining Fiber (PMF)

r	1.45 $\mu$ m
NA	0.2
$\Delta$	$2.38 \times 10^{-4}$

Tabla 2: Parámetros de la fibra HB800C de Fibercore Ltd. empleada en el experimento. r es el radio del núcleo de la fibra, NA su apertura numérica y  $\Delta$  su birrefringencia.

El montaje experimental se observa en la figura 17, tal que permitió la medición del espectro marginal del SFWM en las tres configuraciones que se realizaron: cambiando el radio de la cintura de un *taper*, calentando y variando la temperatura de una fibra óptica y aplicando un estrés longitudinal y cambiando el mismo sobre una fibra óptica. Como fuente de fotones de bombeo se empleó un láser pulsado (mediante «mode-locking») de titanio-zafiro<sup>2</sup> centrado en 715nm con ancho de banda  $\sim 0.5$ nm y tasa de repetición de 76MHz.

La luz del haz de bombeo proveniente del láser fue filtrada con un filtro pasabandas de prismas<sup>3</sup> (PBF)<sup>4</sup>, la polarización del haz fue luego rotada y puesta en paralelo al eje de la fibra con una lámina de media onda (HWP<sub>1</sub>)<sup>5</sup>, luego el haz fue acoplado a la fibra con lentes esféricas de 8mm de distancia focal (L<sub>1</sub>). Posteriormente los fotones generados se recuperaron de la fibra con otra lente de 8mm de distancia focal (L<sub>2</sub>), apoyándose para efectos de acoplamiento y desacoplamiento de la luz a la fibra de monturas 3D tipo «microblock» (MB) (Thorlabs MAX350D).

Al salir de la fibra, los fotones generados seguían acompañados de los fotones del haz de bombeo (procurando una potencia de acoplamiento a la salida de la fibra de 40mW), estos últimos fueron eliminados empleando primero otra lámina de media onda (HWP<sub>2</sub>) para luego pasar a un polarizador de Glan-Thompson (GTP)<sup>6</sup>, con lo que se logró reducir la potencia del haz de bombeo por un factor de  $10^{-5}$  de la original. Como los fotones producidos por SFWM fueron no degenerados en frecuencia, se separaron con un espejo dicróico (DM)<sup>7</sup>, cada uno de los haces resultantes se hizo cruzar a través de filtros pasabandas (BP<sub>1</sub> y BP<sub>2</sub>)<sup>8</sup> para suprimir aún más a los fotones de bombeo. Posteriormente cada uno de estos brazos<sup>9</sup> se recolectaron en fi-

<sup>2</sup> Láser de titanio-safiro (Ti:Sa)

<sup>3</sup> El espectro del haz láser proveniente del aparato empleado presentaba bandas de emisión no deseadas para los fines del experimento, por lo que fue necesario limpiar el espectro mediante el filtro pasabandas de prismas.

<sup>4</sup> Prism-based spectral Bandpass Filter (PBF)

<sup>5</sup> Half Wave Plate (HWP)

<sup>6</sup> Glan-Thompson Polarizer (GTP)

<sup>7</sup> Dichroic Mirror (DM)

<sup>8</sup> Band Pass (filter) (BP)

<sup>9</sup> Nos referiremos a «brazos», como a cada uno de los haces resultantes del proceso de separación espectral derivado del paso del haz original por el espejo dicróico (DM).

bra óptica multimodal (**MMF<sub>1</sub>** y **MMF<sub>2</sub>**)<sup>10</sup> de nuevo con lentes esférica de 8mm de longitud focal (L<sub>3</sub> Y L<sub>4</sub>) en conjunto de un sistema de montura 3D tipo microblock del mismo modelo que el anteriormente mencionado.

Para la detección de los fotones de cada uno de los brazos primero uno de ellos (**MMF<sub>1</sub>** o **MMF<sub>2</sub>**) fue conectado a un fotodiodo de avalancha de silicio (**APD<sub>1</sub>**)<sup>11</sup>, mientras que el otro se conectó a un monocromador, con resolución de 0.1nm, para su filtrado espectral de donde salió mediante otra fibra óptica (**MMF<sub>3</sub>**) a otro fotodiodo de avalancha (**APD<sub>2</sub>**). Habiendo obtenido el espectro en uno de los brazos se intercambiaron las direcciones de las fibras **MMF<sub>1</sub>** y **MMF<sub>2</sub>** para obtener el espectro del otro brazo y con lo que se obtuvieron así los espectros marginales de ambos brazos que se nombraron como «señal» y «acompañante» para identificarlos.

Las señales generadas en los **APD** se mandaron a un módulo de instrumentación nuclear (**NIM**)<sup>12</sup> que se empleó como circuito de coincidencias para enviar sus señales a un contador de pulsos electrónicos. Como los espectros se midieron en coincidencias, es decir, se midieron las señales que el módulo **NIM** reconocía como que habían llegado al mismo tiempo<sup>13</sup>(y luego la pareja de fotones que los generaron surgieron del mismo proceso); fue necesario conocer el nivel de ruido (o cuentas espurias) que el sistema reconocía en cada medición. Esto se logró aplicando un retraso temporal o «delay» electrónico a una de las señales provenientes de los **APD**, tomando primero una señal con el «delay» óptimo (13.5ns), ie. con el máximo de coincidencias, y otra con el «delay» con el mínimo (2.5ns)de coincidencias posibles como registro de los niveles de ruido. La incorporación de un «delay» electrónico de esta naturaleza cumplió con dos propósitos, el primero para conocer los niveles de ruido de las mediciones como ya se dijo, y el segundo fue para compensar la diferencia de caminos ópticos entre ambos brazos, sobre todo al atravesar uno de estos por el camino extra que representó el monocromador.

El mecanismo de detección en los tres casos que interesaron en el experimento mantienen este mismo esquema de detección, cambiando únicamente el estado de configuración de la fibra óptica.

Para la temperatura se cortó un trozo de fibra óptica de 4.5cm de longitud colocada en un horno y se elevó la temperatura desde la temperatura ambiente hasta los 200°C mediante el control de temperatura (**CT**) del horno; se precisó de tal longitud de fibra óptica para cubrir toda la longitud del horno, mientras que la temperatura final alcanzada, se determinó al ser el límite superior impuesto por el control del horno.

<sup>10</sup> Multi Mode Filter (**MMF**)

<sup>11</sup> Avalanche Photodiode (**APD**)

<sup>12</sup> Nuclear Instrumentation Module (**NIM**)

<sup>13</sup> Dentro de una ventana de coincidencias de 10ns.

Para la aplicación de estrés longitudinal, un trozo de fibra de 17.2cm fue pegado a sus extremos sobre dos monturas mecánicas respectivamente, estirando mediante el micrómetro de una de ellas, logrando una elongación máxima de  $10.7\mu\text{m}$ , o un 0.06 % de la longitud original. En este procedimiento se procuró corregir el acoplamiento de la luz hacia la fibra y la colección de la misma, cuidando de mantener las mismas condiciones de potencia acoplada de la luz incidente en la muestra de fibra, como de las fibras de colección. La elongación máxima alcanzada se determinó durante el experimento al no existir la certeza que el pegamento empleado soportara la tensión aplicada y con esto se despegara la muestra de la montura, o que la misma fibra no soportara la tensión y fuera dañada en el proceso.

En el caso de los *tapers* su montaje fue similar al del anterior caso con la salvedad que la fibra se encontraba libre de tensión longitudinal aplicada y que no estaba pegada a las monturas, sin embargo es necesario hablar de la fabricación y caracterización de los mismos.

### 5.1 FABRICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE FIBRA ÓPTICA ESTRECHADA

La fabricación de fibras ópticas estrechadas (*tapered fiber*) se realizó mediante el barrido de una flama a lo largo de las mismas y estirándolas en el proceso. Las fibras se estrecharon procurando que estuvieran libres de torsión mediante su colocación sobre monturas rotatorias ajustando la posición de las barras estresoras, tal que su posición coincidiera, cuidando que dicha orientación reflejara la mínima torsión posible al colocar primero sobre una de las monturas uno de los extremos de la fibra, orientándola horizontalmente respecto del eje transversal de las fibras estresoras. Posteriormente el otro extremo libre se colocó sobre la otra montura rotatoria, sin girarlo, antes de pisarla con la misma para evitar alguna torsión inducida por el hecho de rotar la montura sin estar seguro de que la fibra fuera primeramente posada de forma relajada sobre la montura. Habiendo hecho esto se realizó un fino ajuste en la orientación de la fibra para lograr, de igual manera como se hizo con el otro extremo, una posición horizontal de las barras estresoras. Cabe aclarar que si la fibra fue correctamente colocada sobre la segunda montura, el ajuste era pequeño y no involucraba más de un cuarto de vuelta rotando hacia la posición horizontal más cercana. La observación de los extremos de la fibra se hizo con un microscopio con un objetivo 40X y una cámara CCD<sup>14</sup>.

Posteriormente la fibra fue colocada en un dispositivo disponible en el laboratorio para la fabricación de *tapers*, el cual consiste en dos motores que mueven las monturas que sostienen a la fibra en direcciones opuestas a una velocidad constante estirándola, mientras

<sup>14</sup> Charge-Coupled Device (CCD)

que debajo de ella un mechero con una flama de oxígeno-butano barre longitudinalmente la fibra calentándola homogéneamente con la que se consigue estrecharla. La razón oxígeno/butano en la mezcla de gases fue de 2.6, la velocidad del mechero fue de 3mm/s mientras que los motores de estirado se movieron en direcciones opuestas a 6mm/min. Todas las muestras fabricadas tuvieron una longitud de cintura  $L_w = 2.5\text{cm}$ . El diámetro sin estirar de la fibra fue de  $D_0 = 80\mu\text{m}$  y reduciéndolo 5% en cada muestra, hasta el 70% del diámetro original usándose seis trozos de fibra en total. Los perfiles de las zonas de transición de los *tapers* se describen con funciones exponenciales respecto de su coordenada longitudinal  $z$ . Los parámetros de cada una de las fibras se muestran en la tabla 3 y en la figura 18 se presentan algunas de las gráficas de los perfiles de las muestras obtenidos con este método.

%	$r_w[\mu\text{m}]$	$z_0[\text{cm}]$	$L_c[\text{cm}]$	$L[\text{cm}]$
70	1.01	0.89	10.36	25
75	1.09	0.72	9.53	23
80	1.16	0.56	8.69	21
85	1.23	0.41	9.84	23
90	1.30	0.26	8.54	20.1
95	1.38	0.13	7.42	17.6
100	1.45	-	-	11.3

Tabla 3: Parámetros de los *tapers* fabricados. El radio de la fibra sin estirar fue de  $r_0 = 1.45\mu\text{m}$ . La longitud de todas las cinturas de los *tapers* fue de  $L_w = 2.5\text{cm}$ . % representa el porcentaje del diámetro de la fibra respecto de la original sin estrechar.  $r_w$  representa el radio de la cintura correspondiente al porcentaje al que se redujo el radio original de la fibra.  $L_c$  es la longitud de la región de transición.  $L$  es la longitud total de la muestra de fibra.

Los perfiles de los *tapers* se obtuvieron mediante un sistema de microscopio compuesto de un objetivo 40X y una cámara CCD montados sobre dos motores lineales, uno para el enfoque y otro para el desplazamiento paralelo a la fibra. Mediante un programa para el procesamiento (Sección B.1) de las imágenes se obtuvieron los perfiles de los *tapers* con una precisión de  $\pm 1\mu\text{m}$ . Se puedan comparar los perfiles medidos con el modelo de [7].

En este apartado han de resaltarse las técnicas de fabricación desarrolladas en el laboratorio de Óptica Cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares, y que son mostradas en la referencia [54] con mucho

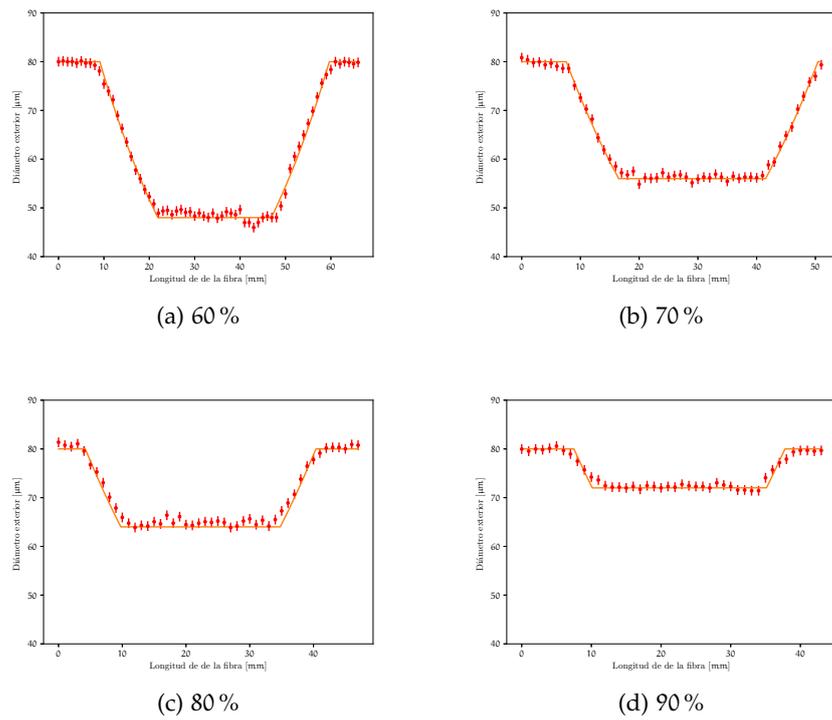
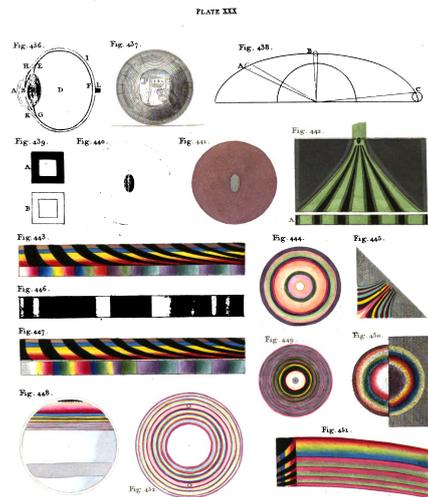


Figura 18: Algunos de los perfiles de los *tapers* obtenidos con el método descrito en el texto.

más detalle, y que fue de gran ayuda al momento de elaborar las muestras.<sup>15</sup>

<sup>15</sup> Por no menoscabar la incomparable ayuda del autor de dicha referencia al aportar su experiencia en la elaboración de los *tapers*.

Parte IV  
RESULTADOS



Estudios ópticos de Thomas Young publicados en 1807, la figura 442 muestra la interferencia de la luz al pasar por una doble rendija.[84]

Mariposa, no sólo no cobarde,  
mas temeraria, fatalmente ciega,  
lo que la llama el Fénix aún le niega,  
quiere obstinada que a sus alas guarde:

pues en su daño arrepentida tarde,  
del esplendor solicitada, llega  
a lo que luce, y ambiciosa entrega  
su mal vestida pluma a lo que arde.

¡Yace gloriosa en la que dulcemente  
huesa le ha prevenido abeja breve,  
suma felicidad a yerro sumo!

No a mi ambición contrario tan luciente,  
menos activo, si cuanto más leve,  
cenizas la hará, si abrasa el humo.

Luis de Góngora y Argote (1561–1627)



## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentan los resultados, y la discusión de los mismos, para las tres técnicas de sintonización exploradas. Se finaliza esta sección con comparativas y observaciones generales para estas técnicas de sintonización.

### 6.1 RESULTADOS

#### 6.1.1 Temperatura

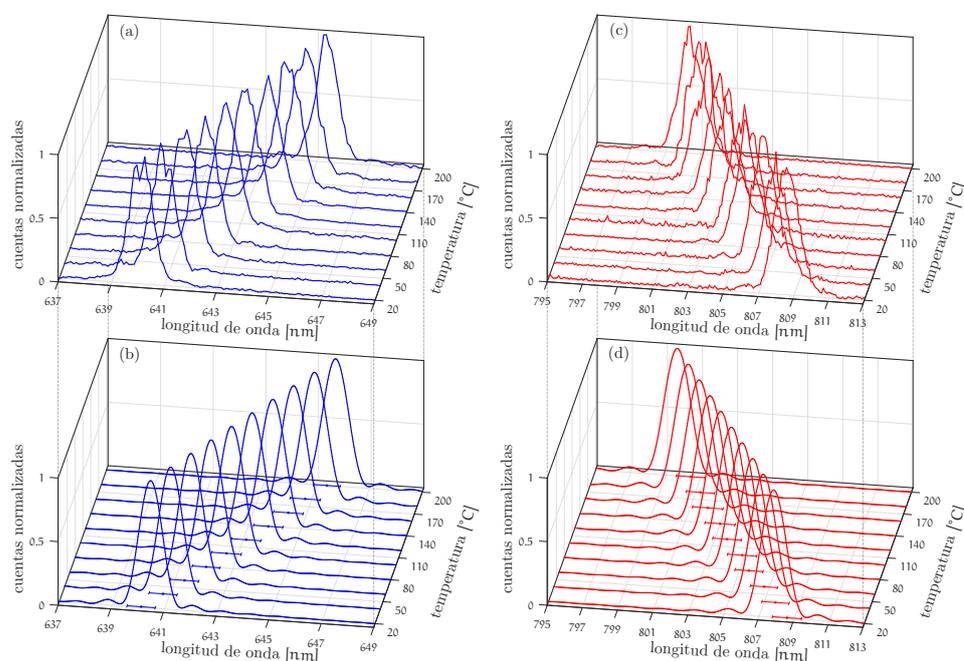


Figura 19: Espectros experimentales y teóricos de los espectros de SFWM generados dependientes de la temperatura de la fibra. (a) Espectro medido «acompañante». (b) Espectro teórico «acompañante». (c) Espectro medido «señal». (d) Espectro teórico «señal».

Se muestran en la figura 19 los espectros de los brazos señal y acompañante experimentales y teóricos en función de la temperatura, los últimos derivados según lo ya desarrollado en el Capítulo 4. Se observó un desplazamiento espectral máximo respecto de la temperatura ambiente ( $20^{\circ}\text{C}$ ) para el espectro de los fotones  $s$  de  $\sim 8.2\text{nm}$  presentando un desplazamiento espectral respecto de la temperatura de  $2.5 \times 10^{-2}\text{nm}/^{\circ}\text{C}$ . Mientras que para los fotones  $i$  este fue de

$\sim 5.1\text{nm}$ , con un desplazamiento espectral respecto de la temperatura de  $4.1 \times 10^{-2}\text{nm}/^\circ\text{C}$ .

Notamos nuevamente a partir de la figura 19 que el resultado de calentar la fibra sobre el espectro de los fotones *s* e *i* respecto de la longitud de onda de bombeo, es el de acercarse a esta; es decir, que con el aumento de la temperatura la separación espectral de los brazos *s* e *i* se reduce.

### 6.1.2 Estrés

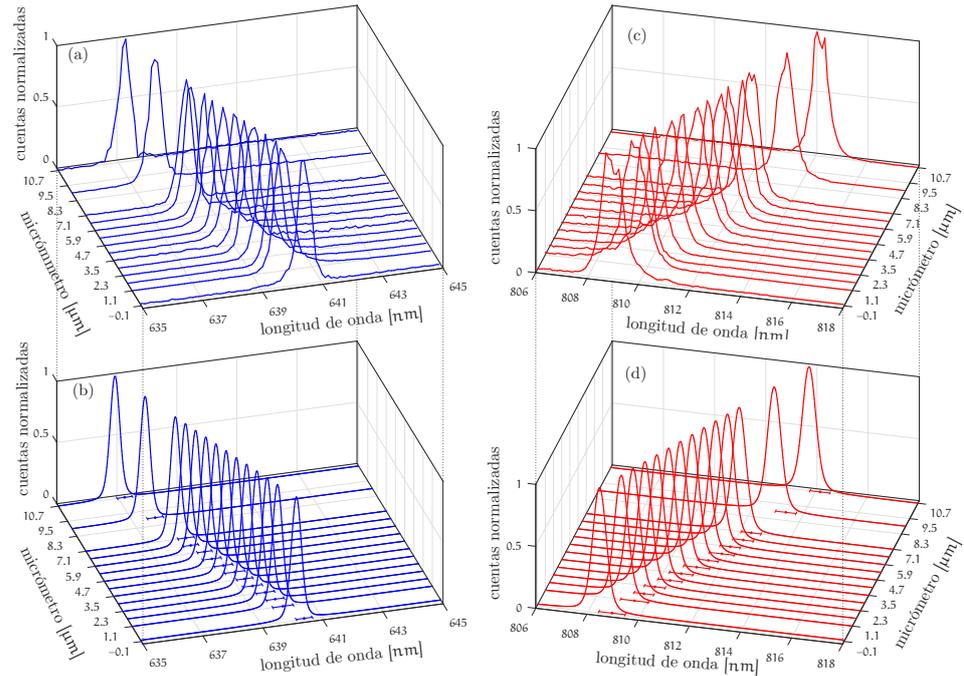


Figura 20: Espectros experimentales y teóricos de los espectros de SFWM generados dependientes de la elongación de la fibra. (a) Espectro medido «acompañante». (b) Espectro teórico «acompañante». (c) Espectro medido «señal». (d) Espectro teórico «señal».

Se muestran en la figura 20 los espectros experimentales y teóricos de los brazos señal y acompañante, los últimos derivados nuevamente del desarrollo teórico realizado en el capítulo Capítulo 4. En estas mediciones se observó un desplazamiento espectral máximo, respecto de la posición original del micrómetro<sup>1</sup> ( $0.0\mu\text{m}$ ) y correspondiente a la máxima elongación aplicada a la fibra ( $17.7\mu\text{m}$ ), de  $\sim 5.3\text{nm}$  para los fotones *s*, correspondiente a un corrimiento espectral por unidad de elongación de  $0.44\text{nm}/\mu\text{m}$ ; y de  $\sim 3.2\text{nm}$  para los espectros de los fotones *i*, que corresponde a un corrimiento espectral por unidad de longitud de  $0.30\text{nm}/\mu\text{m}$ .

<sup>1</sup> Dígase de la fibra en su posición relajada.

Notamos de nueva cuenta a partir de la figura 20 que la aplicación de un estrés longitudinal a la fibra óptica corre el espectro de los fotones *s* e *i* lejos de la longitud de onda del bombeo aplicado, es decir, que al aplicar un estrés longitudinal en la fibra, la separación espectral de los brazos *s* e *i* se incrementa proporcionalmente a éste.

### 6.1.3 Tapers

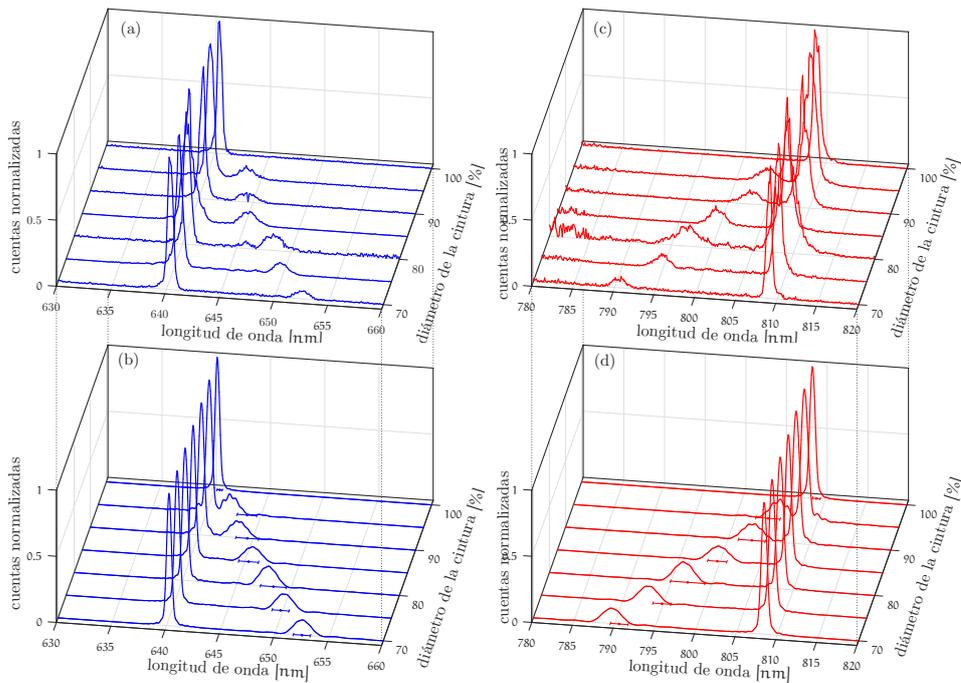


Figura 21: Espectros experimentales y teóricos de los espectros de SFWM generados dependientes del diámetro de la cintura de la fibra. (a) Espectro medido «acompañante». (b) Espectro teórico «acompañante». (c) Espectro medido «señal». (d) Espectro teórico «señal».

Se presenta en la figura 21 a los espectros experimentales y teóricos de los brazos señal y acompañante, estos últimos obtenidos del desarrollo teórico según lo indicado en el capítulo Capítulo 4, y sin hacer la aproximación, como en los otros dos casos de sintonización, en los que se puede considerar que longitud de la cintura de la fibra mide cero. El radio del núcleo de la cintura se puede expresar como  $r_w = S r_0$  donde  $r_0 = 1.45$  y  $0.7 \leq S \leq 1.0$  donde  $S$  se relaciona con el porcentaje del radio original del núcleo de la fibra al que este fue reducido.

Se apreció en los espectros medidos en la figura 21 que para  $S < 1$  el pico original de la fibra sin estirar se divide en dos picos cuya separación espectral se incrementa en modo inverso al decremento en  $S$ . Por otra parte el pico principal del espectro se mantiene en la misma longitud de onda y es independiente al estrechamiento de la fibra, mientras que el pico secundario se desplaza en función al

estrechamiento de ésta, es así que se puede asociar *a priori* al pico principal con la parte sin estirar de la fibra y al secundario con la cintura de la misma.<sup>2</sup>

Se midió un desplazamiento espectral máximo del pico secundario, respecto del pico principal de  $\sim 18\text{nm}$  para el espectro de los fotones del brazo *s* y de  $\sim 12\text{nm}$  para el espectro de los fotones del brazo *i*; para una reducción al 70% de  $r_0$  para el radio de la cintura  $r_w$ .

De los espectros medidos de la figura 21, observamos que el estrechamiento de la fibra hace que el corrimiento espectral de los picos secundarios para ambos brazos, se reduzca al incrementar el parámetro  $S$ , es decir, que los picos de los espectros de los brazos *s* e *i* se acerquen a la longitud de onda de bombeo al reducir el radio del núcleo de la fibra.

En el proceso de fabricación de *tapers*, en algún momento debe suceder que el material del núcleo y del recubrimiento se fusionen en uno solo, haciendo que el recubrimiento real de la fibra sea el aire,[34] con lo que debe acaecer un brusco cambio en las condiciones de empatajamiento de fases del SFWM. Además, durante este proceso, la estructura interna de la fibra causante de su birrefringencia, díganse los *rods* de la fibra *bowtie*, es vulnerable; pues si consideramos que la fibra óptica no está en torsión, las estructuras de los *rods* y el núcleo forman un plano, que en otro caso,<sup>3</sup> al estrechar la estructura generadora de la birrefringencia puede ser degradada o de plano eliminada. Si bien en la fabricación de los *tapers* se cuidó de eliminar la torsión, se comenzó a observar que para valores de  $S < 0.7$  a causa de los defectos en la fabricación, el haz de bombeo a la salida de la fibra se despolarizó, haciendo imposible su supresión mediante la rotación del HWP<sub>2</sub> obteniendo un espectro medido ruidoso, es por esto que el rango de estrechamiento corresponde al intervalo de valores de  $S$  ya mencionado.

## 6.2 DISCUSIÓN

### 6.2.1 Temperatura

Como se observó en la presentación de los resultados, el calentar la fibra óptica *bowtie* hizo que los espectros del SFWM obtenidos se corrieran. Si bien el índice de refracción del vidrio de sílice depende de la temperatura, esperando así un desplazamiento en los espectros

<sup>2</sup> Las razones de intensidad de los picos se observaron proporcionales a las longitudes de la cintura del *taper* y de la región sin estirar. Bajo esta observación, se intentó en algún momento lograr un *plateau*, o meseta en los espectros generados, lo que se consiguió parcialmente al intentar fabricar una muestra con regiones de transición comparables con la región no estirada, sin embargo, limitantes en la dimensiones de las monturas empleadas y en la longitud mínima de recorrido para el mechero de la máquina utilizada imposibilitaron el éxito de la tarea.

<sup>3</sup> En presencia de alguna torsión.

del SFWM debido a esto,[30] su efecto es despreciable, pues se verificó que dicho corrimiento es menor a 0.8nm si se considera únicamente la dependencia en la temperatura al calentar desde los 20°C a los 200°C.

Por otra parte, el núcleo de la fibra también se somete a una expansión térmica, por lo que su radio se incrementa, sin embargo, su coeficiente de expansión es muy pequeño ( $0.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )[66], con lo que al considerar el rango de temperaturas del experimento se produce un incremento de radio menor a  $1.5 \times 10^{-4}\mu\text{m}$ , lo que provoca un corrimiento espectral de los picos del SFWM despreciable. Todo esto sugiere que el origen del corrimiento se haya el cambio de la birrefringencia de la fibra al calentarla.

En las simulaciones se modificó el valor de la birrefringencia,  $\Delta$ , para cada valor de la temperatura hasta que el espectro teórico ajustase lo mejor posible al experimental. Se muestra en la figura 22c el valor de las birrefringencias obtenidas con este método, a las que se les realizó una regresión lineal, con lo que la dependencia de la birrefringencia con la temperatura para la fibra óptica empleada está dada por

$$\Delta(T) = -2.09 \times 10^{-7}T + 2.48 \times 10^{-4}, \quad (326)$$

donde T, la temperatura, está medida en °C. Hay que notar que el proceso de optimización usado empleó los valores de los picos de los espectros s, calculando el ajuste para los picos de los espectros i mediante conservación de la energía. Es pues de la relación (326) que notamos que sucede una reducción en la birrefringencia conforme aumenta la temperatura. En lo referente al ajuste teórico realizado en las figuras 22a y 22b, se calcularon los espectros s e i para los que el desempatamiento de fases es perfecto, dígase, cuando  $\Delta\kappa = 0$ . La discrepancia de los datos teóricos y experimentales para los espectros acompañantes de la figura 22a, son menores a 1nm y se atribuyen a una ligera descalibración del monocromador.<sup>4</sup>

### 6.2.2 Estrés longitudinal

De acuerdo a las mediciones correspondientes mostradas en la figura 20 el aplicar una tensión longitudinal a la fibra óptica *bow-tie* empleada, sintonizó los espectros de los fotones generados por SFWM[46][42]. Hay que hacer notar que se hizo la consideración de que el radio del núcleo de la fibra se mantuvo constante, pues para la elongación máxima aplicada, que fue de  $10.7\mu\text{m}$  para una fibra que originalmente media 17.2cm, la reducción del radio producto de este proceso es del orden de  $4.5 \times 10^{-5}\mu\text{m}$ , lo que para efectos en las condiciones de *phase matching* del SFWM es despreciable. Análogamente

<sup>4</sup> Esta ligera descalibración hará patente sus efectos también en los otros métodos de sintonización.

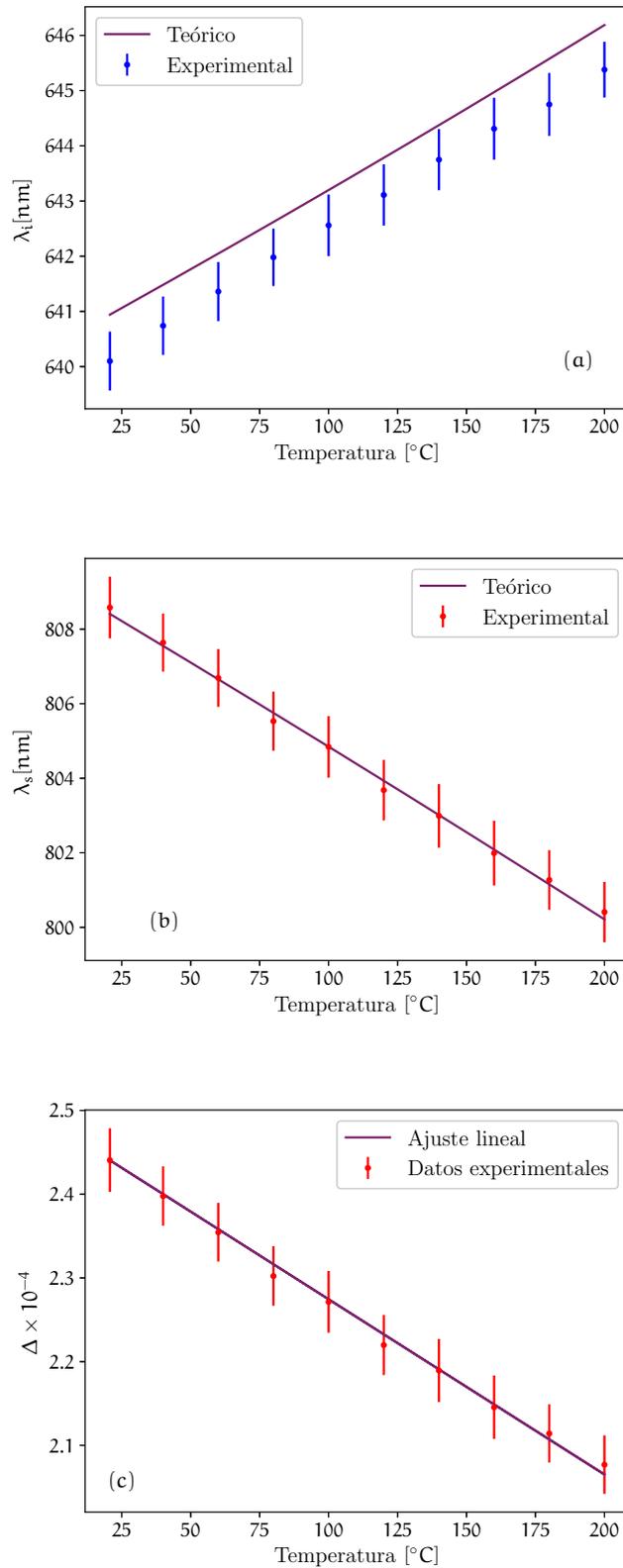


Figura 22: (a) Longitud de onda de los fotones «acompañante» dependientes de la temperatura de la fibra. (b) Longitud de onda de los fotones «señal» dependientes de la temperatura de la fibra. Las barras de error indican el ancho de banda de generación. (c) Birrefringencia de la fibra.

al caso anterior, en el que la variable modificada fue la temperatura, se identificó el origen de la sintonización de los espectros de las parejas de fotones con el cambio en la birrefringencia de la fibra. La medición de esta birrefringencia se hizo de la misma manera que el caso de la variación de la temperatura; modificando el valor de la birrefringencia  $\Delta$  para cada valor de alargamiento en las simulaciones hasta que el espectro teórico ajustase óptimamente al experimental. Se muestran en la figura 23c los valores de las birrefringencias obtenidas mediante dicha técnica.

A los valores de birrefringencia obtenidos se les realizó una regresión lineal, con lo que se encontró una relación entre el valor de la elongación y el valor de la birrefringencia tal que

$$\Delta(\delta z) = 2.35 \times 10^{-6} \delta z + 2.45 \times 10^{-4}, \quad (327)$$

donde  $\delta z$ , el valor del alargamiento, está medido en  $\mu\text{m}$ . Nuevamente se acota que para el proceso de optimización se emplearon los valores de los picos de los espectros del brazo  $s$ , obteniendo mediante conservación de energía el ajuste para los picos de los espectros en las figuras 23a y 23b. Conociendo la relación (327) se calcularon las longitudes de onda de los espectros  $s$  e  $i$  para los que la condición de desempatamiento de fases cumple que  $\Delta\kappa = 0$ , dichos resultados se presentan en las figuras 23a y 23b.

Hay que apreciar que la aplicación de un estrés longitudinal lleva a un aumento en la birrefringencia de la fibra, lo cual tiene sentido si este estrés agudiza el ya preexistente causado por las estructuras estresoras de la fibra. Además se aprecia que la separación espectral de los fotones  $s$  e  $i$  se incrementa, contrario a lo que sucede con el incremento de la temperatura.

### 6.2.3 Tapers

Las condiciones de *phase matching* en una fibra óptica son dependientes tanto de las propiedades de dispersión del material, como de contribuciones debidas al guiado de ondas dentro de la fibra[2], estas últimas son muy dependientes del radio del núcleo de la guía de onda, como se aprecia en la teoría desarrollada en el Capítulo 3, así que la separación espectral entre los fotones  $s$  e  $i$ ,  $\Omega_s$  es parcialmente dependiente del radio. Por otra parte, si se considera el perfil de los tapers, como es mostrado en la figura 18, se cae en la cuenta de la existencia de un continuo de radios que van desde  $r_0$  a  $r_w$  existiendo pues un continuo de separaciones espectrales dentro de las zonas de transición; sin embargo, ya que estas regiones son cortas respecto de las partes con radio  $r_w$  y  $r_0$  de la fibra, su contribución se puede considerar despreciable; es luego que esto provoca que las eficiencias de conversión no son las mismas para todo el ancho de banda esperado tras considerar un continuo de  $\Omega_s$ . Es así que aparecen dos

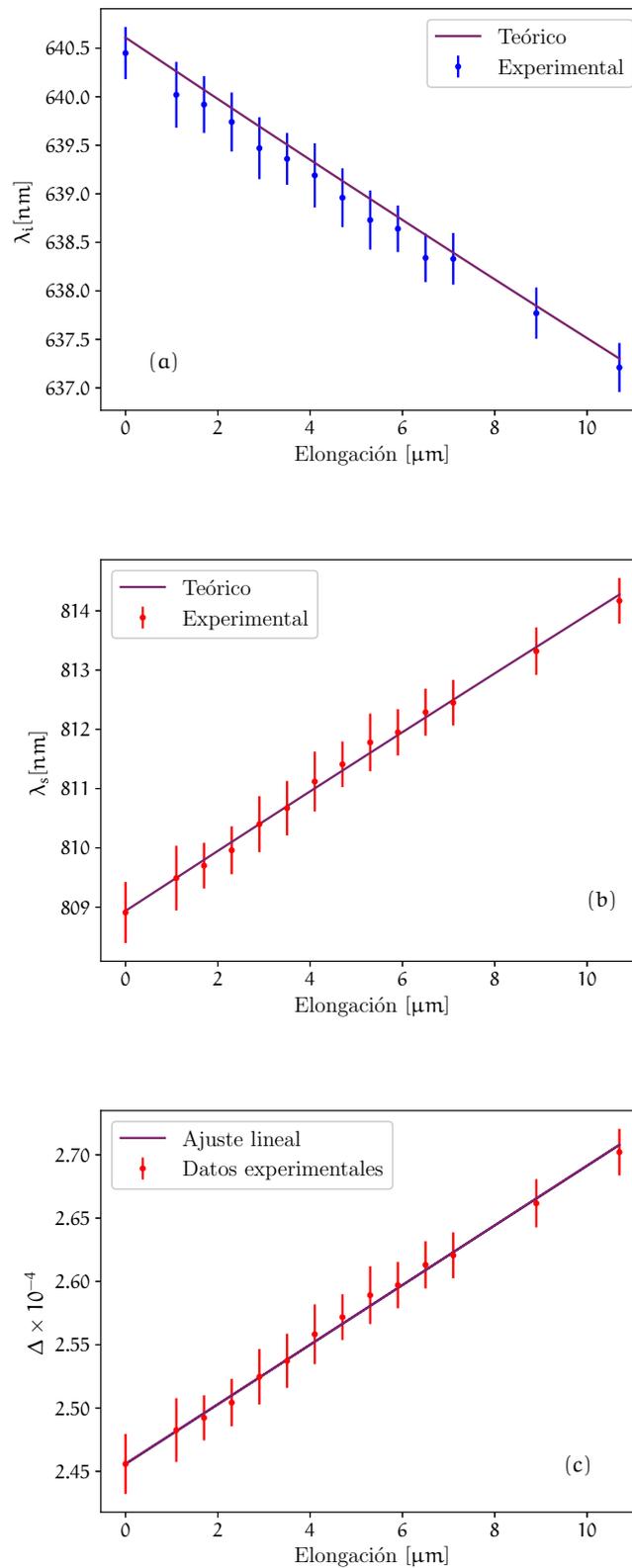


Figura 23: (a) Longitud de onda de los fotones «acompañante» dependientes de la elongación de la fibra. (b) Longitud de onda de los fotones «señal» dependientes de la elongación de la fibra. Las barras de error indican el ancho de banda de generación. (c) Birrefringencia de la fibra.

picos, uno que se mantiene constante y está asociado a la región de radio constante,  $r_0$ , y sin estirar de la fibra; y otro propio de la región también de radio constante pero reducido mediante el proceso de estrechamiento a  $r_w$ .

Se observa además en los espectros medidos, que la tasa de generación es dependiente de la longitud total de cada una de las regiones a considerar de la fibra, ya que en los *tapers* fabricados la región con radio  $r_0$  se mantuvo por una longitud  $2L_c$  y la zona de la cintura de la fibra por una longitud  $L_w$ , tales que  $2L_c > L_w$ , con lo que los picos generados en el volumen sin estirar de las fibras dominan sobre los producidos en la cinturas de la mismas; mientras que como las regiones de transición mantienen su radio en una pequeña fracción de la suma de las longitudes de estas dos regiones,  $2z_0$ , luego es que no hay una contribución apreciable al espectro debida a cada una de estas regiones. Sin embargo, si se consideraran regiones de transición muy largas, su contribución puede dejar de ser despreciable y se obtendría una meseta en el espectro del SFWM, generada por todos los corrimientos espectrales entre  $\Omega_s(r_0)$  y  $\Omega_s(r_w)$ , esperando pues un diagrama de empatamiento de fases para distintos bombeos y un continuo de radios desde  $r_0$  y  $r_w$ , donde se cumpla que  $\kappa = 0$  similar al mostrado en la figura 24.

Observando la figura 24 y comparando con el desplazamiento espectral del pico secundario de las figuras 25a y 25b, se observa que el desplazamiento espectral experimental es mayor al teórico, de sólo considerar a la variación en el radio del núcleo como origen del corrimiento. Ahora bien, hay que considerar que en el experimento se empleó una fibra óptica birrefringente, en la cual las barras estresoras aplican, valga la redundancia, un estrés mecánico sobre el núcleo induciendo una birrefringencia, resultando plausible que durante la fabricación de los *tapers* dicha estructura se vea alterada, afectando el valor de la birrefringencia de la fibra, y modificando a su vez las condiciones de empatamiento de fases del SFWM.

Es así que, como se ha hecho anteriormente, se obtuvo el valor de la birrefringencia,  $\Delta$  para cada valor del parámetro  $S$ , modificando  $\Delta$  hasta que el espectro teórico ajustase lo mejor posible al experimental, encontrando que la birrefringencia depende del radio de la fibra según la relación

$$\Delta(r) = 1.43 \times 10^{-4}r + 0.10 \times 10^{-4}, \quad (328)$$

con el radio,  $r$ , medido en  $\mu\text{m}$ . Donde se precisa que durante el proceso de optimización se usaron los picos de los espectros  $s$ , obteniendo el ajuste de los espectros  $i$  mediante conservación de energía. El ajuste teórico es mostrado en la figura 25c

Se aprecia que al disminuir el valor de la birrefringencia conforme disminuye el radio del núcleo de la fibra, ha de suceder un proceso de relajación dentro de la misma, disminuyendo con esto la aplicación de estrés mecánico en el núcleo.

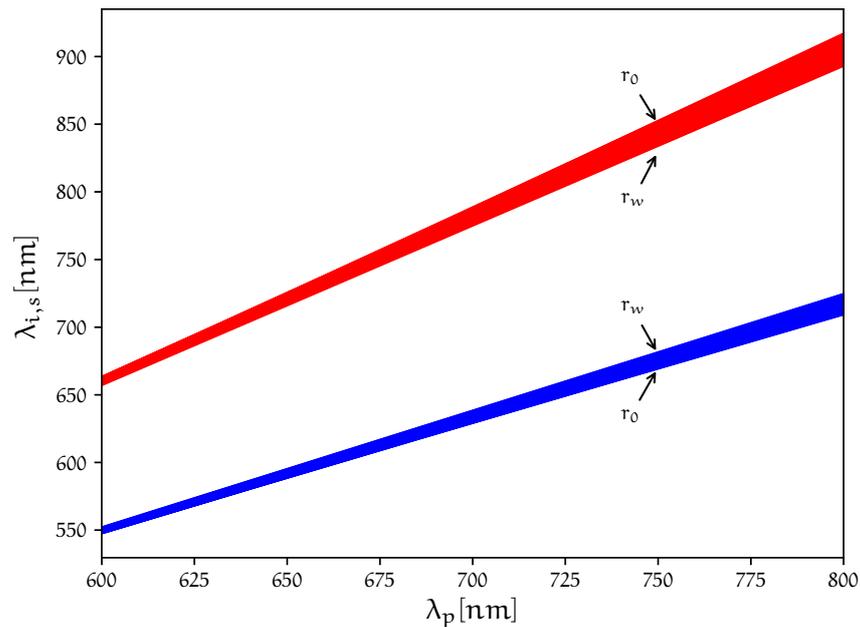


Figura 24: Diagrama de empatamiento de fases considerando un valor de la birrefringencia constante y cambiando el radio de la fibra óptica, para cada una de las longitudes de onda indicadas en el eje x. Se muestran las longitudes de onda de los fotones s e i, tales que se cumple que  $\kappa = 0$ . En rojo para los fotones señal y en azul para los acompañante.

Con todo esto en mente se puede decir que los cambios en los efectos de dispersión en la fibra se deben tanto a la modificación del radio de su núcleo, como al cambio en la birrefringencia.

#### 6.2.4 Comparativas generales

Como se aprecia de las comparativas proporcionadas por la figura 26 y la tabla 4, la mayor sintonización espectral se logró con la reducción del radio de la fibra óptica, seguido por el cambio de temperatura y de la aplicación de estrés longitudinal.

Si bien como se aprecia, el «sentido» de la sintonización resultó contrario en la aplicación de estrés longitudinal, que como ya se explicó, tiene su origen en el incremento del valor de la birrefringencia en la fibra óptica empleada.

Hay que mencionar que este proceso de sintonización también se emplea cotidianamente en materiales no lineales de segundo orden; en particular en procesos de generación de fotones por SPDC, en donde se encuentra típicamente que la sintonización espectral para SPDC de  $0.198\text{nm}/^\circ\text{C}$  en PPKTP[47] y de  $\sim 0.77\text{nm}/^\circ\text{C}$  en PPLN[76], como ya se había mencionado en Capítulo 2, y que resultan de un orden

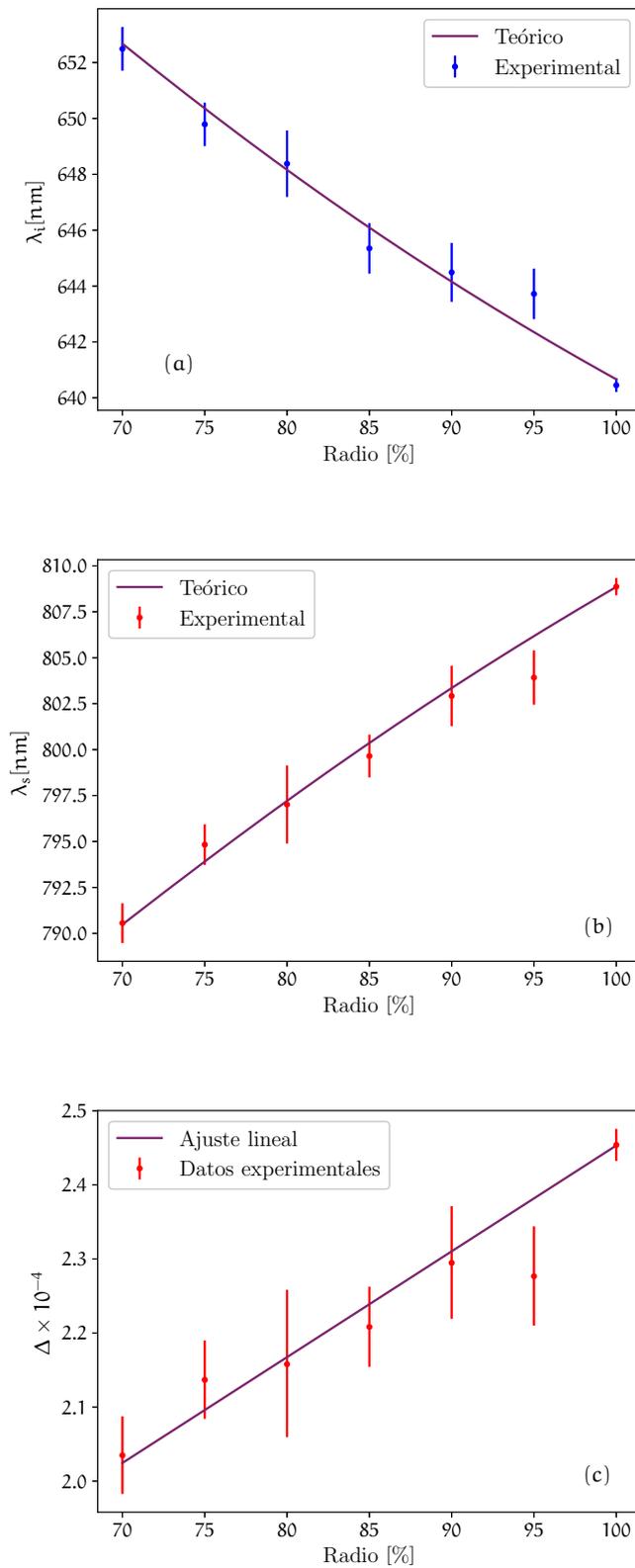


Figura 25: (a) Longitud de onda de los fotones «acompañante» dependientes del radio del núcleo de la fibra. (b) Longitud de onda de los fotones «señal» dependientes del radio del núcleo de la fibra. Las barras de error indican el ancho de banda de generación. (c) Birrefringencia de la fibra.

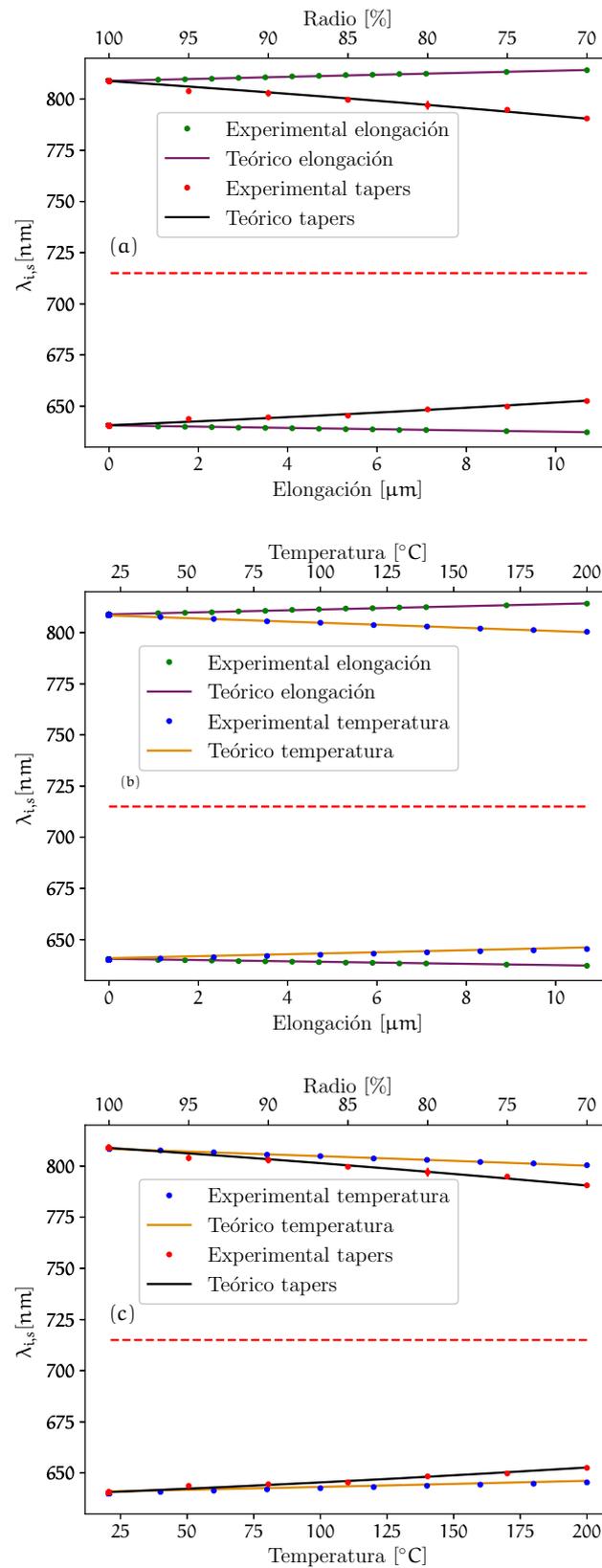


Figura 26: Comparativa de los picos de los espectros obtenidos entre las tres técnicas. (a) Estrés longitudinal vs. *tapers*. (b) Estrés longitudinal vs. temperatura. (c) Temperatura vs. *tapers*. Se marca con una línea punteada roja la longitud de onda de bombeo.

Técnica	$\Delta\lambda$
<i>Taper</i>	$-18.31 \pm 1.08\text{nm}$
Estrés	$5.26 \pm 0.51\text{nm}$
Temperatura	$-8.17 \pm 0.83\text{nm}$

Tabla 4: Corrimientos espectrales máximos para los fotones  $s$ , generados por SFWM para cada una de las técnicas de sintonización empleadas, medidos desde la longitud de onda de los fotones generados en las muestras de referencia ( $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $S = 1$ , elongación =  $0\mu\text{m}$ ).

de magnitud mayores respecto a la sintonización espectral mediante temperatura y de magnitud semejante a lo logrado con estrés longitudinal y *tapers*, si bien en este último se logró un mayor desplazamiento espectral, equivalente a un cambio en la temperatura de  $\sim 92.5^\circ\text{C}$  en PPKTP de  $\sim 24.8^\circ\text{C}$  para PPLN, y de  $\sim 26.6^\circ\text{C}$  en PPKTP de  $\sim 6.8^\circ\text{C}$  en Periodically Poled Lithium Niobate (PPLN) al comparar para el estrés longitudinal.<sup>5 6</sup>

Esto hace de una magnitud semejante la sintonización de los fotones lograda con *tapers* y estrés longitudinal comparables con los valores típicos de sintonización mediante el cambio de temperatura de cristales no lineales.<sup>7</sup>

Por otra parte si bien en principio es posible llegar más lejos en la sintonización de los espectros de los fotones con estos métodos, en el caso de la temperatura, se corre el riesgo al seguir aumentando la misma de llegar a un punto de no retorno, en el cual el vidrio de la misma comience a fusionarse, deteriorando su estructura interna; mientras que para la aplicación de estrés longitudinal, de ser posible ignorar la resistencia del pegamento o de las monturas mismas, al aplicar esta tensión se corre el riesgo de deformar el material más allá de su punto de fluencia,<sup>[78]</sup> deformando irremediablemente a la fibra, si no es que rompiéndola.

Es pertinente mencionar que para todas las gráficas mostradas en este texto, la incertidumbre reportada corresponde al ancho de los picos medidos a la mitad de sus alturas<sup>8</sup> y de las birrefringencias calculadas para los extremos indicados por estas incertidumbres.

Finalmente cabe destacar que si bien en esta serie de experimentos no se midió directamente la JSI, y se empleó su cálculo como medio para obtener los espectros teóricos, destaca que en todos los casos

<sup>5</sup> No se colocan las equivalencias para el caso de la sintonización mediante temperatura pues la comparativa es directa.

<sup>6</sup> Que el desplazamiento espectral logrado en la temperatura sea mayor al del estrés longitudinal, no quiere decir que ante la variable modificada sea más fácil correr el espectro.

<sup>7</sup> Es redundante, pero resulta importante notar que son del mismo orden de magnitud.

<sup>8</sup> Este valor se conoce por sus siglas en inglés como Full Width at Half Maximum (FWHM).

de sintonización por lo mostrado en la figura 27, que el tipo de correlaciones espectrales permaneció sin cambios ante los tres casos de sintonización, mostrando un corrimiento espectral de la distribución de probabilidad; salvo en el caso de los *tapers*, donde se apreció la aparición de una distribución de probabilidades secundaria siendo esta la que presenta el corrimiento espectral y se asocia a la generación de fotones en las regiones estrechadas de la fibra, mientras que la región de la *JSI* correspondiente a las regiones sin estirar se mantuvo sin cambios entre las muestras.

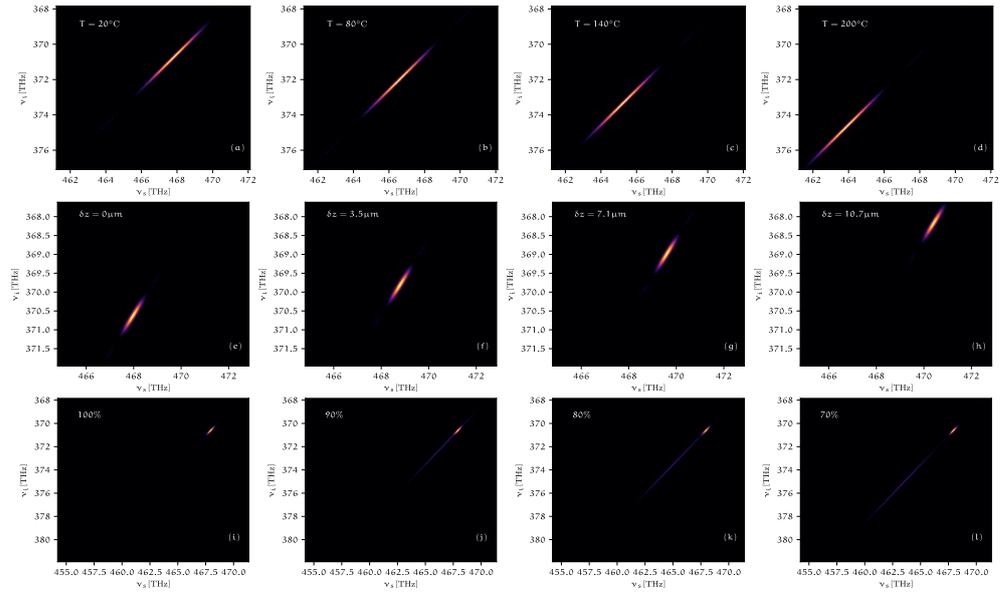
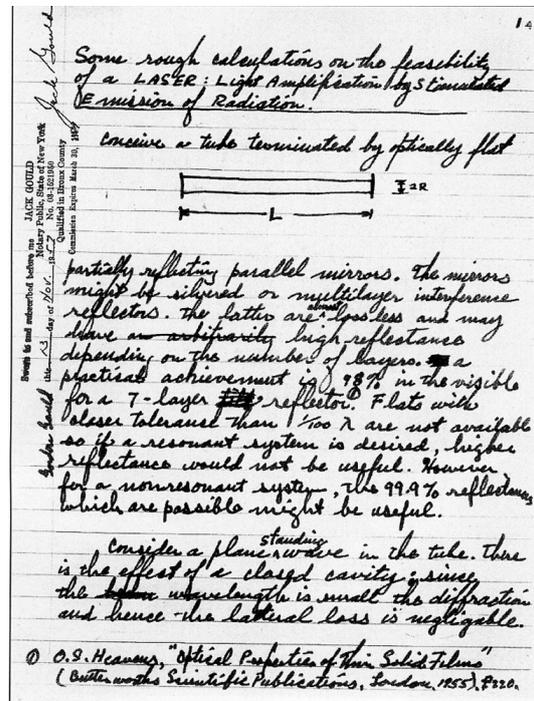


Figura 27: *JSI* teóricas en términos de frecuencias, para las tres técnicas de sintonización exploradas, (a-d) para variación de temperatura, (e-h) para aplicación de estrés longitudinal, (i-l) para *tapers*. Se emplearon los parámetros experimentales de cada una de las muestras de fibra.

## Parte V

### CONCLUSIONES



Notas de Gordon Gould donde se utiliza por primera vez las siglas LASER con observaciones para su construcción en 1957.<sup>9</sup>

¡Oh niebla del estado más sereno,  
Furia infernal, serpiente mal nacida!  
¡Oh ponzoñosa víbora escondida  
De verde prado en oloroso seno!

¡Oh entre el néctar de Amor mortal veneno,  
Que en vaso de cristal quitas la vida!  
¡Oh espada sobre mí de un pelo asida,  
De la amorosa espuela duro freno!

¡Oh cielo, del favor verdugo eterno!  
Vuélvete al lugar triste donde estabas,  
O al reino (si allá cabes) del espanto;

Mas no cabrás allá, que pues ha tanto  
Que comes de ti mismo y no te acabas,  
Mayor debes ser que el mismo infierno.

Luis de Góngora y Argote (1561–1627)

<sup>9</sup> Bright Idea: The First Lasers. American Institute of Physics.



## CONCLUSIONES

---

Se presentaron en este trabajo tres maneras de lograr la sintonización del espectro del estado de dos fotones generado por el mezclado espontáneo de cuatro ondas. Se comenzó con una breve introducción a los fenómenos ópticos no lineales y se desarrolló la teoría necesaria para comprender la propagación de las ondas electromagnéticas en fibras ópticas. A partir de esto se llegó al cálculo de los coeficientes de propagación  $\beta$ ; necesarios en el cómputo de las condiciones de empatamiento de fases del SFWM, del cual se desarrolló la teoría para el cálculo de los espectros observados de los fotones generados por dicho fenómeno en una fibra óptica birrefringente estrechada como primer método de sintonización. Se exploraron además otros dos métodos de sintonización: la aplicación de un estrés longitudinal y el cambio de la temperatura de la fibra. Se observó que para el caso de los *tapers* la sintonización se logra al explotar los cambios en la dispersión óptica sufridos por las cuatro ondas involucradas, y que depende no sólo del cambio en el radio del núcleo de la fibra, sino también del valor de la birrefringencia, misma que se ve modificada en el proceso de la fabricación de este tipo de fibras. Mientras, en las otras dos técnicas de sintonización, esta se logró fundamentalmente con el cambio del valor de la birrefringencia al ser esta dependiente de la temperatura de la fibra y del estrés inducido por el alargamiento de la guía de onda empleada.

De los métodos de sintonización explorados en los experimentos, el que presentó el mayor corrimiento espectral fue el realizado mediante la fabricación de *tapers*. Sin embargo, las otras dos técnicas fueron mucho más fáciles de implementar al no involucrar la fabricación ni verificación de muestras especiales, y al requerir cada una de ellas, un único espécimen de fibra adecuadamente controlado en las variables de interés respectivas. Se mostró además que la sintonización espectral lograda con los *tapers* y la aplicación de estrés longitudinal es semejante a las logradas en cristales no lineales ante el cambio de su temperatura.

Es así que la implementación en algún sistema de una fuente de estados de dos fotones que requiera de su sintonización espectral, es posible mediante cualquiera de estas técnicas, y la decisión última de cuál de ellas emplear se verá inducida en el propósito y requisitos del sistema óptico cuántico que considere la incorporación de dichas fuentes.



## Parte VI

### APÉNDICES

Si el mundo amaneciera cuerdo un día,  
pobres anocheieran los plateros,  
que las guijas nos venden por luceros  
y en migajas de luz gigote al día.

La vidriosa y breve hipocresía  
del oriente nos truncan a dineros,  
conócelos, Licinio, por pedreros,  
pues el caudal los siente artillería.

Si la verdad los cuenta, son muy pocos  
los cuerdos que en la corte no se estragan,  
si ardiente el diamantón les hace cocos.

Advierte cuerdo, si a tu bolsa amagan,  
que hay locos que echan cantos, y otros locos,  
que recogen los cantos, y los pagan.

**Francisco de Quevedo (1580–1645)**



## APÉNDICE MATEMÁTICO

---

En este apéndice se colocarán las aclaraciones matemáticas necesarias en cuanto a las operaciones algebraicas realizadas a lo largo del documento, y que en pos de preservar su concisión y fluidez, son colocadas en esta sección de apéndices.

### A.1 EQUIVALENCIA DE LA FÓRMULA (187) CON LA MOSTRADA EN [83]

En el notebook de Mathematica se omitieron por comodidad el uso de subíndices para indicar el orden de las funciones  $j$  y  $k$  que representan las funciones de Bessel correspondientes. Se comenzó declarando cada una de las entradas de la matriz de coeficientes.

```
In[1]:=
a11=j[η1a];

a21=0;

a31=- (im)j[η1a]
        η1²a
;
a42= (im)j[η1a]
        η1²a
;

a12=0;

a22=j[η1a];

a32= (ωμ1)j'[η1a]
        η1 β
;
a41= (ωε1)j'[η1a]
        η1 β
;

a13=-k[η2a];

a23=0;

a33=- (im)k[η2a]
        η2² a
;
a44= (im)k[η2a]
        η2² a
;

a14=0;
```

$$a_{24} = -k[\eta_2 a];$$

$$a_{34} = \frac{(\omega \mu_2) k'[\eta_2 a]}{\beta \eta_2};$$

$$a_{43} = \frac{(\omega \epsilon_2) k'[\eta_2 a]}{\eta_2 \beta};$$

Se empleó la aproximación  $((\mu_1 \approx \mu_2) \approx \mu_0)$  para las permeabilidades magnéticas en el caso de dieléctricos

In[2]:=

$$\mu_1 = \mu_0;$$

$$\mu_2 = \mu_0;$$

Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes.

In[3]:=

$$ad = \text{Det}[\{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}\}, \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}\}\}];$$

Se hacen las correspondientes sustituciones y se simplifica la expresión igualada a cero.

In[4]:=

$$ad = ad /. \{\epsilon_1 \mu_0 \rightarrow (\frac{n_1}{c})^2, \epsilon_2 \mu_0 \rightarrow (\frac{n_2}{c})^2\};$$

$$ad = ad /. \{(\frac{n_1 \omega}{c})^2 \rightarrow (k_0 n_1)^2, (\frac{n_2 \omega}{c})^2 \rightarrow (k_0 n_2)^2\};$$

$$l = \text{FullSimplify}[ad == 0, a > 0 \& \& \eta_1 > 0 \& \& \eta_2 > 0 \& \& \beta \neq 0 \& \& n_1 > 0 \& \& n_2 > 0]$$

Out[4]=

$$j[\eta_1 a]^2 (m^2 \beta^2 k[\eta_2 a]^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 - a^2 k_0^2 n_2^4 \eta_1^2 k'[\eta_2 a]^2) == 2k[\eta_2 a] k_0^2 \eta_1^2 \eta_2^3 j'[\eta_1 a] (k[\eta_2 a] n_1^2 \eta_2 j'[\eta_1 a] + j[\eta_1 a] (\eta_1^2 + \eta_2^2) \eta_1 k'[\eta_2 a])$$

Se toma la expresión del libro [83] corregida en los argumentos de las funciones de Bessel  $K_m$ 's, toda ella igualada a cero y se la expresa tal que todo esté sobre un mismo denominador, como esta expresión está igualada a cero, se puede eliminar el denominador de la expresión y se toma solo el numerador. Dicha expresión la igualamos a cero en la función de Mathematica y se simplifica del mismo modo que se hizo para el determinante que se calculo con anterioridad.

$$In[5]:= f = \text{Numerator}[\text{Together}[(\frac{j'[\eta_1 a]}{\eta_1 a j[\eta_1 a]} + \frac{k'[\eta_2 a]}{\eta_2 a k[\eta_2 a]})(\frac{n_1^2 j'[\eta_1 a]}{\eta_1 a j[\eta_1 a]} + \frac{n_2^2 k'[\eta_2 a]}{\eta_2 a k[\eta_2 a]}) - 2((\frac{1}{\eta_1 a})^2 + (\frac{1}{\eta_2 a})^2)(\frac{\beta}{k_0})^2]]];$$

`f=FullSimplify[f==0,a>0&&η1>0&&η2>0&&β≠0&&η1>0&&η2>0]`

Out[5]=

$$a^2 k[\eta_2] k_0^2 \eta_1^2 \eta_2^3 j'[\eta_1] (k[\eta_2] \eta_1^2 \eta_2 j'[a \eta_1] + j[\eta_1] (\eta_1^2 + \eta_2^2) \eta_1 k'[\eta_2]) == 2(m^2 \beta^2 k[\eta_2]^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 - a^2 k_0^2 \eta_2^4 \eta_1^2 k'[\eta_2]^2)$$

Se observan las expresiones resultantes en cada uno de los casos y vemos que sólo hay un cambio de signo, falta comprobar que ambas sean iguales para verificar que tanto las cuentas realizadas por la computadora como la expresión obtenida de [83] concuerdan.

In[6]:=

$$\mathbf{l}[[1]] - \mathbf{l}[[2]] == -\mathbf{f}[[1]] + \mathbf{f}[[2]]$$

Out[6]=

True

## A.2 LA DIVERGENCIA DE UN ROTACIONAL ES CERO

**Definición A.2.1.** Sean  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $f$  es una función de clase  $\mathcal{C}^k$  en  $U$  si existen todas las derivadas parciales de orden  $k$  de  $f$  en cada punto de  $U$ , y además estas derivadas parciales son continuas en cada punto de  $U$ . [63]

**Teorema 1** (de Gauss). Sean,  $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $U$ , y  $\Omega \subset U$  un conjunto Jordan-medible tal que  $S = \text{Fr}(\Omega) = \delta\Omega$  es una superficie continua por pedazos y  $\omega \cup S \subset U$  entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d^3 r = \int_{\omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d^3 r, \quad (329)$$

$$= \int_{S=\delta\Omega} \mathbf{F} \cdot d\hat{\sigma}, \quad (330)$$

donde  $\hat{\sigma}$  es una parametrización simple de  $S$  que induce vectores normales que apuntan hacia «afuera» de  $\Omega$ . [63]

**Teorema 2** (de Stokes). Sean,  $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada por  $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $\mathcal{C}^2$ ,  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización de  $\delta A$  (el borde de  $A$ , una curva cerrada simple) que lo recorre (una vez) en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y  $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $U$  entonces

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\hat{\sigma} = \int_{\delta_\sigma S} \mathbf{F} \cdot d\tilde{\gamma}, \quad (331)$$

en donde  $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y  $\delta_\sigma S = \sigma(\delta A)$  (el borde de  $S$  inducido por  $\sigma$ ). [63]

**Proposición 1.** Sea  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  entonces

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) = 0, \quad (332)$$

*Demostración.* Considerando un volumen  $V \subset U \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto Jordan-medible encerrado por una superficie  $S = \delta V$  entonces por teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) d^3r = \int_{S=\delta V} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta \hat{\sigma}. \quad (333)$$

Sea  $\sigma$  una parametrización de un la superficie  $S$  y  $\gamma$  una parametrización en sentido antihorario de  $\delta A$  donde  $A$  es el lugar geométrico generado por  $\sigma$ , podemos aplicar el teorema de Stokes

$$\int_{S=\delta V} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta \hat{\sigma} = \int_{\delta_\sigma S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\tilde{\gamma}. \quad (334)$$

El término del lado derecho de la ecuación 334 es una integral de trayectoria, pero como la función  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  es continua y está parametrizada por una curva cerrada suave por pedazos, entonces

$$\int_{\delta_\sigma S} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\tilde{\gamma} = 0, \quad (335)$$

por lo que

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) d^3r = 0, \quad (336)$$

como se sigue esto para cualquier volumen, entonces sucede que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) = 0. \quad (337)$$

□

### A.3 CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO

Comenzamos como ya viene siendo costumbre con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (338)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}, \quad (339)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma, \quad (340)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (341)$$

donde los campos eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) y magnético ( $\mathbf{B}$ ) se pueden escribir en términos del potencial vectorial ( $\mathbf{A}$ ) y del potencial escalar  $\varphi$ .

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (342)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (343)$$

Por lo mostrado en el anexo A.2 dada la ecuación (342) se cumple automáticamente la ecuación (341), mientras que la ecuación (338) se sigue de las fórmulas (342) y (343). Así sustituyendo las fórmulas (342) y (343) en la igualdad (343) se tiene que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \epsilon_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mu \mathbf{J}. \quad (344)$$

Utilizaremos la siguiente propiedad

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (345)$$

con lo que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi - \epsilon_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu \mathbf{J}. \quad (346)$$

Como  $\epsilon_0 \mu = 1/c^2$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}, \quad (347)$$

sustituimos a la ecuación (343) en la (340)

$$-\epsilon_0 \nabla \cdot \left( -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \sigma, \quad (348)$$

$$-\nabla \cdot \left( \nabla\varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (349)$$

$$-\nabla^2 \varphi - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (350)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (351)$$

Utilizaremos ahora las transformaciones de norma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \nabla\psi, \quad (352)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (353)$$

Sustituimos ahora la ecuación (352) en la ecuación (342)

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}_0 - \nabla\psi), \quad (354)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A}_0 - \nabla \times \nabla\psi, \quad (355)$$

$$= \nabla \times \mathbf{A}_0, \quad (356)$$

donde se usa que el rotacional de un gradiente es cero. Por otra parte sustituyendo (352) y (353) en la (343)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (357)$$

$$= -\nabla\left(\varphi_0 + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_0 - \nabla\psi), \quad (358)$$

$$= -\nabla\varphi_0 - \nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_0 + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi, \quad (359)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_0 - \nabla\varphi_0 - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi}, \quad (360)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_0 - \nabla\varphi_0. \quad (361)$$

Con lo que se muestra que los campos electromagnéticos son invariantes ante cambios de norma ya que hay una infinitud de potenciales que son solución a los campos. Elegiremos por comodidad la norma de Coulomb.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (362)$$

con lo que por la ecuación (353)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}_0 - \nabla\psi) = 0, \quad (363)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_0 - \nabla^2\psi = 0, \quad (364)$$

así usando a la fórmula (362) en (347) y (351)

$$-\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\mathbf{J}, \quad (365)$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (366)$$

La ecuación (366) es conocida como la ecuación de Poisson que es útil para resolver todos los problemas de la electrostática, sin embargo esto no nos interesa en el problema y seguiremos trabajando con la ecuación (365).

Descompondremos por conveniencia el término de densidad de corriente eléctrica en una parte longitudinal ( $\mathbf{J}_L$ ) y otra transversal ( $\mathbf{J}_T$ ), tales que

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T, \quad (367)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0, \quad (368)$$

$$\nabla \times \mathbf{J}_L = 0. \quad (369)$$

Aplicando la divergencia a la ecuación (339)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{E} + \mu_0\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (370)$$

y por lo mostrado en A.2

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (371)$$

$$0 = \mu \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mu \nabla \cdot (\mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T), \quad (372)$$

$$0 = \mu \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mu \nabla \cdot \mathbf{J}_L, \quad (373)$$

$$0 = \mu \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mu \nabla \cdot \mathbf{J}_L, \quad (374)$$

con lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (375)$$

como  $\nabla \times \mathbf{J}_L = 0$  con lo que podemos escribir en términos de un gradiente de alguna función  $\zeta$  así

$$\mathbf{J}_L = \nabla \zeta, \quad (376)$$

con lo que la ecuación (375) queda

$$\nabla \cdot (\nabla \zeta) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (377)$$

$$\nabla^2 \zeta = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (378)$$

Derivando la ecuación (366) (de Poisson) en el tiempo

$$\nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (379)$$

$$\epsilon_0 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (380)$$

e igualando (378) con (380)

$$\epsilon_0 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla^2 \zeta, \quad (381)$$

con lo que

$$\zeta = \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (382)$$

así

$$\mathbf{J}_L = \nabla \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (383)$$

$$= \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi. \quad (384)$$

Ahora podemos regresar a la ecuación (365)

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \cancel{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}, \quad (385)$$

$$= \mu (\mathbf{J}_T + \mathbf{J}_L), \quad (386)$$

$$= \mu (\mathbf{J}_T + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi), \quad (387)$$

$$= \mu_0 \mathbf{J}_T + \cancel{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi}, \quad (388)$$

con lo que llegamos a

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{J}_T, \quad (389)$$

que es conocida como la ecuación de onda.

Ahora aplicamos la misma idea de separar al campo eléctrico como hicimos con la densidad de corriente tal que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L, \quad (390)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0, \quad (391)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_L = 0, \quad (392)$$

aplicamos el rotacional a ambos lados de la ecuación (343)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (393)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L) = -\nabla \times \left( \nabla \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \right), \quad (394)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = -\cancel{\nabla \times (\nabla \varphi)} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (395)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (396)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = \nabla \times -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}, \quad (397)$$

$$(398)$$

con lo que

$$\mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (399)$$

y aplicamos ahora la operación divergencia a ambos lados de la ecuación (343)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (400)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L = -\nabla \cdot \nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (401)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = -\nabla \cdot \nabla \varphi, \quad (402)$$

donde en el último paso se empleo la norma de Coulomb. Así con esto se tiene que

$$\mathbf{E}_L = -\nabla \varphi. \quad (403)$$

Se observa además que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}_L$ . Por la fórmula (340) notamos además que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (404)$$

aplicando un gradiente a la ecuación (403) regresamos nuevamente a la ecuación de Poisson (366).

Hacemos ahora la separación en las componentes transversales y longitudinales del campo magnético  $\mathbf{B}$ , tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_T, \quad (405)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_T = 0, \quad (406)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_L = 0. \quad (407)$$

Aplicando la operación divergencia a ambos lados de (405) y empleando la fórmula (341)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_T), \quad (408)$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{B}_L = 0, \quad (409)$$

con lo que  $\mathbf{B}_L = 0$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T$ , y además por la ecuación (343) se tiene que

$$\mathbf{B}_T = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (410)$$

de las ecuaciones (399) y (343), al aplicar un rotacional se tendrá que

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = \nabla \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right), \quad (411)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (412)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (413)$$

así con lo que se ha desarrollado hasta ahora se tendría que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0, \quad (414)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B}_T = 0, \quad (415)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_T. \quad (416)$$

Por otra parte si sucede que  $\mathbf{J}_T = 0$  como en los materiales dieléctricos y el vacío la ecuación (389) quedaría escrita como

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (417)$$

La solución a la ecuación de onda (417) es cualquier función periódica, pero consideraremos funciones periódicas a la frontera tales que

$$f(z=0) = f(z=L), \quad (418)$$

definimos ahora el número de onda como

$$\mathbf{K} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (419)$$

y definimos además a  $n$  como

$$n \equiv \frac{L}{n'}, \quad (420)$$

con lo que podemos definir

$$K_n = \frac{2\pi}{L}n. \quad (421)$$

Esta idea se puede generalizar coordenada a coordenada

$$K_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad (422)$$

$$K_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad (423)$$

$$K_z = \frac{2\pi}{L}n_z, \quad (424)$$

$$(425)$$

generando un vector tal que

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z). \quad (426)$$

Propondremos como solución una onda de la forma

$$\mathbf{A}_K(t) \exp\{(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\}, \quad (427)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición. En general la solución tomaría la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} (\mathbf{A}_K(t) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{A}_K^*(t) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})). \quad (428)$$

El conjunto sobre el que corre la suma es sobre todos los valores posibles de  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  recordando que  $n_{x,y,z} \in \mathbb{Z}$ . Utilizaremos ahora la fórmula (417) sobre cada una de las  $\mathbf{A}_K$ , así

$$-\nabla^2 \mathbf{A}_K + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_K}{\partial t^2}. \quad (429)$$

Consideramos además las siguientes propiedades, sea  $\mathbf{x} = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\hat{\mathbf{x}})$  con  $\hat{\mathbf{x}}$  un vector unitario

$$\nabla \cdot \mathbf{x} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}, \quad (430)$$

$$\nabla^2 \mathbf{x} = -k^2 \mathbf{x}, \quad (431)$$

Utilizando las propiedades anteriores se tiene

$$-K^2 \mathbf{A}_K + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_K}{\partial t^2} = 0, \quad (432)$$

$$-(kc)^2 \mathbf{A}_K + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_K}{\partial t^2} = 0. \quad (433)$$

Considerando la relación de dispersión  $k = \omega/c$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular

$$-\omega^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K}} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K}}}{\partial t^2} = 0, \quad (434)$$

que tiene una solución armónica en el tiempo

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \exp(-i\omega_{\mathbf{K}}t), \quad (435)$$

donde  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}$  es un vector constante y  $\omega_{\mathbf{K}}$  la frecuencia angular asociada al modo  $\mathbf{K}$ , con lo que la solución completa a la ecuación de onda sería

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}))). \quad (436)$$

Como estábamos considerando las componentes transversales, de las ecuaciones (399) y (410), cambiando tan sólo la notación para hacer referencia al modo  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{K}} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{K}}}{\partial t}, \quad (437)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{K}} = \nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{K}}. \quad (438)$$

Para cada uno de los modos  $\mathbf{K}$  de la ecuación (436)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})), \quad (439)$$

sustituyendo (439) en (437)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{K}} = i\omega_{\mathbf{K}} (\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}))), \quad (440)$$

y calculando el cuadrado de su norma da

$$|\mathbf{E}_{\mathbf{K}}|^2 = \mathbf{E}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{K}}^*, \quad (441)$$

$$= (i\omega_{\mathbf{K}})(-i\omega_{\mathbf{K}}) (\mathbf{A}_{\mathbf{v}b\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{v}b\mathbf{A}_{\mathbf{v}b\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}))) \cdot (\mathbf{A}_{\mathbf{v}b\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{v}b\mathbf{A}_{\mathbf{v}b\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}))), \quad (442)$$

$$= \omega_{\mathbf{K}}^2 (\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} - \underbrace{\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^2 \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}))}_{\text{prom}=0} - \underbrace{\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^{*2} \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}))}_{\text{prom}=0}), \quad (443)$$

$$= \omega_{\mathbf{K}}^2 (\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}). \quad (444)$$

Ahora sustituyendo (439) en (438)

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times (\mathbf{A}_{\mathbf{K}}) = \nabla \times (\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))),$$

(445)

haciendo esta cuenta se puede llegar a que

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}) (\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \exp(i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))). \quad (446)$$

Calculando la norma al cuadrado del campo magnético se obtiene que

$$|\mathbf{B}_{\mathbf{K}}|^2 = 2K^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^*. \quad (447)$$

Ahora calcularemos la energía del modo  $\mathbf{K}$  integrando la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética en el volumen.<sup>12</sup>

$$\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = \frac{1}{2} \int d^3r \left( \epsilon_0 |\mathbf{E}_{\mathbf{K}}|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_{\mathbf{K}}|^2 \right), \quad (448)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \left( 2\epsilon_0 \omega_{\mathbf{K}}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* + 2 \frac{1}{\mu} K^2 \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \right), \quad (449)$$

$$= \int d^3r \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \left( \epsilon_0 \omega_{\mathbf{K}}^2 + \frac{K^2}{\mu} \right), \quad (450)$$

$$\epsilon_0 \mu = c^{-2}$$

así

$$\frac{K^2}{(\epsilon_0 \mu)} = K^2 c^2$$

además se

tiene que

$$\omega_{\mathbf{K}} = K^2 c^2$$

$$= \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \epsilon_0 \int d^3r \left( \omega_{\mathbf{K}}^2 + \frac{K^2}{\epsilon_0 \mu} \right), \quad (451)$$

$$= \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \epsilon_0 \int d^3r (\omega_{\mathbf{K}}^2 + \omega_{\mathbf{K}}^2), \quad (452)$$

$$= 2 \mathbf{A}_{\mathbf{K}0} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* \epsilon_0 \omega_{\mathbf{K}}^2 \int d^3r, \quad (453)$$

$$= 2 |\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}|^2 \epsilon_0 \omega_{\mathbf{K}}^2 V, \quad (454)$$

donde  $V$  representa el volumen de integración. Consideramos ahora la introducción de las variables canónicas  $P_r$  y  $Q_r$  tales que

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}0} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}}} (\omega_{\mathbf{K}} Q_r + iP_r) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (455)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}}} (\omega_{\mathbf{K}} Q_r - iP_r) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (456)$$

<sup>1</sup>  $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$

<sup>2</sup> Estrictamente hablando, para cada una de las dimensiones, los modos «viven» en cajas de lados  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$ , y la integral a realizar sería

$$V = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} dx dy dz$$

Sin embargo, por comodidad se sobreentienden los límites de integración y las coordenadas de las mismas.

así

$$\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^* = \frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}} (\omega_{\mathbf{K}} Q_{\mathbf{r}} + iP_{\mathbf{r}})(\omega_{\mathbf{K}} Q_{\mathbf{r}} - iP_{\mathbf{r}}), \quad (457)$$

$$= \frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}} (\omega_{\mathbf{K}}^2 Q_{\mathbf{r}}^2 + P_{\mathbf{r}}^2 + i\omega_{\mathbf{K}} Q_{\mathbf{r}} P_{\mathbf{r}} - i\omega_{\mathbf{K}} Q_{\mathbf{r}} P_{\mathbf{r}}), \quad (458)$$

$$= \frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}} (\omega_{\mathbf{K}}^2 Q_{\mathbf{r}}^2 + P_{\mathbf{r}}^2), \quad (459)$$

y sustituyendo (459) en (454)

$$\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = 2 \frac{1}{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}} (\omega_{\mathbf{K}}^2 Q_{\mathbf{r}}^2 + P_{\mathbf{r}}^2) \epsilon_0 \omega_{\mathbf{K}}^2 V, \quad (460)$$

$$= \frac{1}{2} (\omega_{\mathbf{K}}^2 Q_{\mathbf{r}}^2 + P_{\mathbf{r}}^2). \quad (461)$$

Con lo que la energía de cada modo es equivalente a la de un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_{\mathbf{K}}$ , trabajamos a partir de aquí con el fin de cuantizar (459) con el oscilador armónico cuántico.

### A.3.1 El oscilador armónico cuántico

Consideramos al hamiltoniano de un oscilador armónico de masa unitaria

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2), \quad (462)$$

donde  $\hat{p}$  es el operador momento y  $\hat{q}$  es operador posición, que son variables canónicas conjugadas, ie.

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar,$$

Introducimos ahora a los operadores aniquilación y creación en términos de  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  como sigue

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (464)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (465)$$

donde  $\hbar = h/2\pi$  y  $h$  es la constante de Planck. Sumando (464) y (465)

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \frac{2}{\sqrt{2\hbar\omega}} \omega\hat{q}, \quad (466)$$

$$= \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} \hat{q}. \quad (467)$$

con lo que

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (468)$$

también sucede que

$$\hat{p} = \hat{p}^\dagger,$$

$$\hat{q} = \hat{q}^\dagger.$$

y restando (465) a (464) da

$$\hat{a} - \hat{a}^\dagger = i\sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\hat{p}, \quad (469)$$

con lo que

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (470)$$

Escribiremos el hamiltoniano en términos de los operadores creación y aniquilación, para esto notamos que

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega\hat{q} - i\hat{p})(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (471)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 - i\omega\hat{p}\hat{q} + i\omega\hat{q}\hat{p}), \quad (472)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + i\omega[\hat{q}, \hat{p}]), \quad (473)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + i\omega(i\hbar)), \quad (474)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 - \omega\hbar), \quad (475)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left( \frac{1}{2}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2) - \frac{1}{2}\hbar\omega \right), \quad (476)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left( \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \right), \quad (477)$$

con lo que

$$\hbar\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (478)$$

así

$$\hat{H} = \omega\hbar\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (479)$$

ahora

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega\hat{q} + i\hat{p})(\omega\hat{q} - i\hat{p}), \quad (480)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 - i\omega\hat{q}\hat{p} + i\omega\hat{p}\hat{q}), \quad (481)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + (i\omega)(\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p})), \quad (482)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + (i\omega)[\hat{p}, \hat{q}]), \quad (483)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + (i\omega)(-i\hbar)), \quad (484)$$

$$= \frac{1}{2\hbar\omega}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + \omega\hbar), \quad (485)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left( \frac{1}{2}(\omega^2\hat{q}^2 + \hat{p}^2) + \frac{1}{2}\omega\hbar \right), \quad (486)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left( \hat{H} + \frac{1}{2}\omega\hbar \right), \quad (487)$$

así

$$\hbar\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{H} + \frac{1}{2}\omega\hbar, \quad (488)$$

con lo que

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\omega\hbar. \quad (489)$$

Calculemos ahora el conmutador a partir de (477) y (487)

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (490)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left( \hat{H} + \frac{1}{2}\omega\hbar \right) - \frac{1}{\hbar\omega} \left( \hat{H} - \frac{1}{2}\omega\hbar \right), \quad (491)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad (492)$$

$$= 1. \quad (493)$$

Consideremos ahora otro operador nuevo

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (494)$$

que llamaremos operador número, suponemos ahora que existe un eigenestado de  $\hat{H}$ ,  $|n\rangle$ , tal que tenga un eigenvalor  $\mathcal{E}_n$

$$\hat{H}|n\rangle = \mathcal{E}_n|n\rangle, \quad (495)$$

con lo que usando (479)

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (496)$$

$$= \mathcal{E}_n|n\rangle. \quad (497)$$

Multiplicamos la ecuación anterior por la izquierda por  $\hat{a}^\dagger$ , así

$$\hat{a}^\dagger\hat{H}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle, \quad (498)$$

$$= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger \right) |n\rangle, \quad (499)$$

$$= \hat{a}^\dagger\mathcal{E}_n|n\rangle. \quad (500)$$

Utilizaremos el resultado mostrado en (493)

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1, \quad (501)$$

con lo que

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1. \quad (502)$$

Usando este resultado en la ecuación (479), esta queda

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1) + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (503)$$

así multiplicando por la izquierda por  $\hat{a}^\dagger$  y por la derecha por  $|n\rangle$

$$\hat{a}^\dagger \hat{H} |n\rangle = \left( \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle, \quad (504)$$

$$= \left( \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger) - \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle, \quad (505)$$

$$= \hbar\omega \left( (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger) |n\rangle - \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger |n\rangle \right), \quad (506)$$

por otra parte

$$\hat{a}^\dagger \hat{H} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \mathfrak{E}_n |n\rangle, \quad (507)$$

así

$$\hbar\omega \left( (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger) |n\rangle - \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger |n\rangle \right) = \hat{a}^\dagger \mathfrak{E}_n |n\rangle. \quad (508)$$

Ahora sumemos a cada lado de (508) a  $\hbar\omega \hat{a}^\dagger |n\rangle$ , así

$$\hbar\omega \left( (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger) - \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger |n\rangle \right) + \hbar\omega \hat{a}^\dagger |n\rangle = \hat{a}^\dagger \mathfrak{E}_n |n\rangle + \hbar\omega \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (509)$$

$$\hbar\omega \left( (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger) |n\rangle + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger |n\rangle \right) = (\mathfrak{E}_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (510)$$

$$\hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle = (\mathfrak{E}_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (511)$$

$$\hat{H} \hat{a}^\dagger |n\rangle = (\mathfrak{E}_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (512)$$

por lo que si existe  $|n\rangle$  y tiene un eigenvalor  $\mathfrak{E}_n$  entonces ha de existir un eigenestado  $\hat{a}^\dagger |n\rangle$  con un eigenvalor  $\mathfrak{E}_n + \hbar\omega$ . Ahora multiplicamos (496) por la izquierda por  $\hat{a}$  así

$$\hat{a} \hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a} |n\rangle, \quad (513)$$

$$= \mathfrak{E}_n \hat{a} |n\rangle. \quad (514)$$

Restaremos a ambos lados  $\hbar\omega \hat{a} |n\rangle$  de (513)

$$\hbar\omega \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a} |n\rangle - \hbar\omega \hat{a} |n\rangle = \mathfrak{E}_n \hat{a} |n\rangle - \hbar\omega \hat{a} |n\rangle, \quad (515)$$

a partir del conmutador  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  se tiene que  $\hat{a} \hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$  con lo que

$$\hbar\omega (1 + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \hat{a} |n\rangle - \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a} |n\rangle = (\mathfrak{E}_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle, \quad (516)$$

$$\frac{1}{2} \hbar\omega \hat{a} |n\rangle + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} |n\rangle = (\mathfrak{E}_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle, \quad (517)$$

$$\hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \hat{a} |n\rangle = (\mathfrak{E}_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle, \quad (518)$$

$$\hat{H} \hat{a} |n\rangle = (\mathfrak{E}_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle. \quad (519)$$

Con lo que si existe un eigenestado  $|n\rangle$ , ha luego de existir un eigenestado  $\hat{a}|n\rangle$  con eigenvalor  $\mathcal{E}_n - \hbar\omega$ . Como vemos la aplicación sucesiva del operador  $\hat{a}$  disminuye la energía del estado por un factor  $\hbar\omega$ , sin embargo esto no puede suceder indefinidamente, por lo que hay que encontrar algún estado de energía mínima, a este estado lo nombraremos  $|0\rangle$  tal que

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad (520)$$

con lo que

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle, \quad (521)$$

$$= \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle \right), \quad (522)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle, \quad (523)$$

y la mínima energía es entonces  $\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ , observamos así el origen de los nombres de aniquilación y creación de los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  respectivamente. Sin embargo, todavía falta imponer condiciones de normalización, y además notamos la conveniencia de emplear la notación  $|n\rangle$  donde  $n \in \mathbb{N}$  pues

$$\hat{H}\hat{a}^n|n\rangle = (\mathcal{E}_0 - n\hbar\omega)|n\rangle, \quad (524)$$

y además notamos que

$$\hat{H}\hat{a}^{\dagger n}|0\rangle = (\mathcal{E}_0 + n\hbar\omega)|0\rangle, \quad (525)$$

Ahora hay que imponer condiciones de normalización, por lo que para los siguientes estados hay que obtener  $\mathcal{A}_n$  y  $\mathcal{B}_n$  donde

$$|n+1\rangle = \mathcal{A}_n \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (526)$$

$$|n-1\rangle = \mathcal{B}_n \hat{a} |n\rangle, \quad (527)$$

así imponiendo la condición de normalización se tendrá que

$$(\mathcal{A}_n^* \langle n| \hat{a}) (\mathcal{A}_n \hat{a}^\dagger |n\rangle) = \mathcal{A}_n^* \mathcal{A}_n \langle n| \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle = 1, \quad (528)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 \langle n| \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle = 1. \quad (529)$$

Empleando nuevamente la relación de conmutación de los operadores aniquilación y creación, de donde se obtiene

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (530)$$

así

$$|\mathcal{A}_n|^2 \langle n| (1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}) |n\rangle = 1, \quad (531)$$

de (477)

$$|\mathcal{A}_n|^2 \langle n | \left( 1 + \frac{1}{\hbar\omega} \hat{H} - \frac{1}{2} \right) = 1, \quad (532)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 \langle n | \left( \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \right) = 1, \quad (533)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 \left( \langle n | \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} |n\rangle + \langle n | \frac{1}{2} |n\rangle \right) = 1, \quad (534)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 \left( \frac{1}{\hbar\omega} \left( \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + n \right) \right) + \frac{1}{2} \right) = 1, \quad (535)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n \right) = 1, \quad (536)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 (1 + n) = 1, \quad (537)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 = \frac{1}{1+n}, \quad (538)$$

$$|\mathcal{A}_n|^2 = \frac{1}{\sqrt{1+n}}, \quad (539)$$

con lo que en general salvo por una fase global  $\exp(-i\theta)$

$$\mathcal{A}_n = \frac{\exp(-i\theta)}{\sqrt{1+n}}, \quad (540)$$

y así

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \exp(-i\theta) \sqrt{1+n} |n+1\rangle. \quad (541)$$

Cabe aclarar que omitiremos en adelante la inclusión de la fase global pues esta no afectará en lo posterior a las cuentas, con esto en mente

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{1+n} |n+1\rangle. \quad (542)$$

Notamos que

$$\hat{a}^\dagger |1\rangle = \sqrt{2} |2\rangle, \quad (543)$$

$$\hat{a}^{\dagger 2} |1\rangle = \hat{a} \sqrt{2} |2\rangle = \sqrt{2} \sqrt{3} |3\rangle, \quad (544)$$

y en general se aprecia que

$$\hat{a}^{\dagger n} |1\rangle = \sqrt{n!} |n+1\rangle. \quad (545)$$

Falta hacer lo mismo pero ahora con el operador aniquilación

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = \mathcal{B}_n^* \mathcal{B}_n \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = 1, \quad (546)$$

$$= |\mathcal{B}_n|^2 \langle n | (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1) | n \rangle = 1, \quad (547)$$

$$= |\mathcal{B}_n|^2 \langle n | \left( \frac{1}{\hbar\omega} \left( \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right) - 1 \right) | n \rangle = 1, \quad (548)$$

$$= |\mathcal{B}_n|^2 \langle n | \left( \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} - 1 \right) | n \rangle = 1, \quad (549)$$

$$= |\mathcal{B}_n|^2 \left( \langle n | \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} | n \rangle - \langle n | \frac{1}{2} | n \rangle \right) = 1, \quad (550)$$

$$= |\mathcal{B}_n|^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{\hbar\omega} + n \frac{\hbar\omega}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) = 1, \quad (551)$$

$$= |\mathcal{B}_n|^2 n = 1, \quad (552)$$

así

$$|\mathcal{B}_n|^2 = \frac{1}{n}, \quad (553)$$

$$|\mathcal{B}_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (554)$$

que salvo por una fase global

$$\mathcal{B}_n = \frac{\exp(-i\theta)}{\sqrt{n}}, \quad (555)$$

que omitiremos por las mismas razones que la vez anterior, así

$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle. \quad (556)$$

Teniendo presente la ecuación (556) como condición de normalización, tendremos que

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} | 0 \rangle, \quad (557)$$

que son los llamados «estados de Fock» o de «número». El operador número lo definimos como sigue

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (558)$$

que opera como sigue

$$\hat{n} | n \rangle = \hat{a}^\dagger \hat{n} | n \rangle, \quad (559)$$

$$= \sqrt{n} \hat{a}^\dagger | n-1 \rangle, \quad (560)$$

$$= \sqrt{n} \sqrt{n} | n \rangle, \quad (561)$$

$$= n | n \rangle, \quad (562)$$

y vemos que  $|n\rangle$  es eigenestado simultáneo de  $\hat{H}$  y  $\hat{n}$ , además observamos que podemos escribir el hamiltoniano de la ecuación (477) como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (563)$$

Hay que apuntar que  $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ , al eigenvalor de energía del estado  $|0\rangle$  se conoce como energía de punto cero, lo cual indica la existencia de energía incluso sin la existencia de radiación electromagnética en el medio. Además, los operadores creación y aniquilación crean o aniquilan un cuanto de energía  $\hbar\omega$  que son llamados fotones y tienen vector de onda  $\mathbf{K}$ .

### A.3.2 El campo electromagnético en términos de operadores

Recordamos que pudimos escribir las amplitudes de los campos vectoriales  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}^*$  y  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}0}$  en términos de las variables canónicas  $P_r$  y  $Q_r$ , y que a partir se pudo escribir la energía de los modos de oscilación como la de un oscilador armónico, convertiremos ahora a los campos vectoriales en operadores, identificando  $Q_r$  con el operador posición  $\hat{q}$  y a  $P_r$  con el operador momento, así tendremos dos nuevos operadores

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} (\omega_{\mathbf{K}} \hat{q}_{\mathbf{K}} + i \hat{p}_{\mathbf{K}}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (564)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} (\omega_{\mathbf{K}} \hat{q}_{\mathbf{K}} - i \hat{p}_{\mathbf{K}}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (565)$$

donde hay que apuntar que  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}$  es un vector unitario y no un operador como la notación podría sugerir y que los subíndices  $\mathbf{K}$  hacen referencia a dicho modo. Recordamos ahora las expresiones de  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  en términos de los operadores creación y aniquilación ya obtenidas en las expresiones (470) y (468), siendo consistentes con la notación

que ahora estamos usando identificando a los operadores con un sub-índice  $\mathbf{K}$ . Así para la ecuación (564)

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} \left( \omega_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{K}}}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) + i \left( -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} - \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) \right) \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (566)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} \left( \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) + \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} - \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (567)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} 2\hat{a}_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (568)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}}} \hat{a}_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{K}}. \quad (569)$$

Del mismo modo lo hacemos para la ecuación (565)

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} \left( \omega_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{K}}}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) - i \left( -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} - \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) \right) \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (570)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} \left( \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) - \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{K}} - \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger) \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (571)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}^2}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2}} 2\hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (572)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}}} \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (573)$$

con lo que  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  en su forma de operador quedaría como

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{K}}}} \left( \hat{a}_{\mathbf{K}} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger \exp(i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (574)$$

y podemos hacer el equivalente en términos de operadores del campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  a partir de 440, así

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V}} \left( \hat{a}_{\mathbf{K}} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \hat{a}_{\mathbf{K}}^\dagger \exp(i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (575)$$

y por 446 se tendrá que el campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  estará dado en términos de operadores por

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}) \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon V \omega_{\mathbf{K}}}} \left( \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{a}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \exp(i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) \right). \quad (576)$$

Si definimos  $a \gg \equiv \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|}$ , y empleando que  $K = \frac{\omega_{\mathbf{K}}}{c}$  entonces se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} (\gg \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}) \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon V}} \left( \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} \exp(-i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) + \mathbf{a}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \exp(i(\omega_{\mathbf{K}} t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})) \right). \quad (577)$$

Calcularemos ahora la energía del modo  $\mathbf{K}$ , que estará dada por

$$\epsilon_{\mathbf{K}} = \frac{1}{2} \int d^3 r \langle n_{\mathbf{K}} | \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} + \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} | n_{\mathbf{K}} \rangle, \quad (578)$$

definamos por comodidad al argumento dentro del exponencial como  $\vartheta \equiv (\omega_{\mathbf{K}} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  y con esto en mente pasamos a calcular primero la parte de la energía asociada al campo eléctrico

$$\langle n_{\mathbf{K}} | \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} | n_{\mathbf{K}} \rangle = \langle n_{\mathbf{K}} | \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V} \left( \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} \exp(-i\vartheta) - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \exp(i\vartheta) \right) \left( \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \exp(i\vartheta) - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} \exp(-i\vartheta) \right) | n_{\mathbf{K}} \rangle, \quad (579)$$

$$= \langle n_{\mathbf{K}} | \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V} \left( \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} + \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^2 \exp(-2i\vartheta) - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger 2} \exp(2i\vartheta) \right) | n_{\mathbf{K}} \rangle, \quad (580)$$

$$\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} = 1 + \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}}$$

$$= \langle n_{\mathbf{K}} | \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V} \left( 1 + 2\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^2 \exp(-i\vartheta) - \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger 2} \exp(i\vartheta) \right) | n_{\mathbf{K}} \rangle, \quad (581)$$

$$= \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V} \left( \langle n_{\mathbf{K}} | 1 + 2\hat{n}_{\mathbf{K}} | n_{\mathbf{K}} \rangle - \langle n_{\mathbf{K}} | \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^2 | n_{\mathbf{K}} \rangle \exp(-i\vartheta) - \langle n_{\mathbf{K}} | \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{K}}^{\dagger 2} | n_{\mathbf{K}} \rangle \exp(i\vartheta) \right), \quad (582)$$

$$= \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V} \left( 1 + 2n_{\mathbf{K}} - \sqrt{n_{\mathbf{K}}} \sqrt{n_{\mathbf{K}} - 1} \langle n_{\mathbf{K}} | n_{\mathbf{K}} - 2 \rangle \exp(-i\vartheta) - \sqrt{n_{\mathbf{K}} + 1} \sqrt{n_{\mathbf{K}} + 2} \langle n_{\mathbf{K}} | n_{\mathbf{K}} + 2 \rangle \exp(i\vartheta) \right), \quad (583)$$

$$= \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0 V} (1 + 2n_{\mathbf{K}}), \quad (584)$$

$$= \frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{\epsilon_0 V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right). \quad (585)$$

Claramente las cuentas a realizar son análogas para la parte del campo magnético con lo que

$$\langle n_{\mathbf{K}} | \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}^\dagger | n_{\mathbf{K}} \rangle = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{c^2\epsilon_0V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right), \quad (586)$$

con lo que

$$\langle n_{\mathbf{K}} | \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}}^\dagger + \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{K}}^\dagger | n_{\mathbf{K}} \rangle = \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}\epsilon_0}{\epsilon_0V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right) + \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{c^2\mu\epsilon_0V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right), \quad (587)$$

$$= \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right) + \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{\epsilon_0^2V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right), \quad (588)$$

$$= 2 \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right), \quad (589)$$

así

$$\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = \int d^3r \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{V} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right), \quad (590)$$

$$= \hbar\omega_{\mathbf{K}} \left( \frac{1}{2} + n_{\mathbf{K}} \right), \quad (591)$$

con lo que

$$\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = \mathcal{E}_{n_{\mathbf{K}}}. \quad (592)$$

Hay que considerar que es usual encontrar en la literatura que [575](#) se puede escribir en términos de  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  y  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ , tal que  $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}$  y donde

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{K}} \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0V} \right) (\hat{a}_{\mathbf{K}} \exp(-i\vartheta)) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{K}}, \quad (593)$$

y

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \left( \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right)^\dagger, \quad (594)$$

y lo mismo se puede hacer para  $\hat{\mathbf{B}}$ .

#### A.4 DERIVACIÓN DE LA FÓRMULA (308)

En este anexo se deriva la fórmula (308) para la expresión de  $|\Psi_2\rangle$  en términos de la [JSA](#), mostrada en el [Capítulo 4](#).

Comenzamos con el hamiltoniano de interacción en la fibra

$$\hat{H}_{\text{SFWM}} = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)} \int \left( E_1^{(+)} E_2^{(+)} E_s^{(-)} E_i^{(-)} \right) dV, \quad (595)$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son clásicos y escritos en su expansión de frecuencias quedan como

$$E_v^{(+)}(\mathbf{r}, t) = A_v f_v(x, y, z) \int d\omega_v \alpha(\omega_v) \exp\{-i[\omega_v t - k_v(\omega_v, z)z]\}, \quad (596)$$

con  $v = 1, 2$  y donde  $A_v = A_v(z)$  es la amplitud del campo, mientras que  $f_v$  es la distribución transversal del campo tal que al definir una función  $B$ , sucede que

$$B(x, y, z) := Mf(x, y, z), \quad (597)$$

del tal manera que  $B$  esté normalizada, es decir

$$\int dx \int dy \int dz |B(x, y, z)|^2 = 1, \quad (598)$$

con lo que

$$M = \frac{1}{\sqrt{\int dx \int dy \int dz |f(x, y, z)|^2}}. \quad (599)$$

Por otra parte  $E_s$  y  $E_i$  se suponen cuantizados

$$E_\mu^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\delta k} f_\mu(x, y, z) \sum_{k_\mu} l(k_\mu, z) \exp(-i[\omega_\mu t - k_\mu(\omega_\mu, z)z]) \hat{a}(k_\mu), \quad (600)$$

con  $\mu = s, i$  y donde  $f_\mu$  es la distribución transversal normalizada del campo y donde

$$\delta k = \frac{2\pi}{L_Q}, \quad (601)$$

con  $L_Q$  la longitud de cuantización y

$$l(\omega) = M \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi\epsilon_0 n^2(\omega)}}. \quad (602)$$

Sustituyendo las expresiones de los campos en (595), y considerando que  $E_{v,\mu}^{(-)} = (E_{v,\mu}^{(+)})^*$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{SFWM}} = & -\frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)} \int dz A_1(z)A_2(z) \int dx \int dy f_1(x, y, z)f_2(x, y, z) \\ & \times f_s^*(x, y, z)f_i^*(x, y, z) \sum_{k_s} \sum_{k_i} l(k_s, z)l(k_i, z) \\ & \times \int d\omega_1 \int d\omega_2 \alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2) \exp(-i[\omega_1 + \omega_2 - \omega_s - \omega_i]t) \\ & \times \exp(i[k_1(\omega_1, z) + k_2(\omega_2, z) - k_s(\omega_s, z) - k_i(\omega_i, z)]z) \\ & \times \hat{a}^\dagger(k_s)\hat{a}^\dagger(k_i). \end{aligned} \quad (603)$$

Definimos ahora a la integral de traslape

$$F_{\text{eff}}(z) := \int dx \int dy f_1(x, y, z) f_2(x, y, z) f_s^*(x, y, z) f_i^*(x, y, z), \quad (604)$$

y al término  $\Delta k$  como

$$\Delta k(z) := k_1(\omega_1, z) + k_2(\omega_2, z) - k_s(\omega_s, z) - k_i(\omega_i, z), \quad (605)$$

con lo que  $\hat{H}_{\text{SFWM}}$  se reescribiría como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{SFWM}} = & -\frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \int dz A_1(z) A_2(z) F_{\text{eff}}(z) \sum_{k_s} \sum_{k_i} l(k_s, z) l(k_i, z) \\ & \times \int d\omega_1 \int d\omega_2 \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_2) \exp(-i[\omega_1 + \omega_2 - \omega_s - \omega_i]t) \\ & \times \exp(i\Delta k(z)z) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i). \end{aligned} \quad (606)$$

Mediante un análisis perturbativo a primer orden podemos escribir al estado de dos fotones como

$$|\Psi\rangle = \left( 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H_{\text{SFWM}}(t') \right) |0\rangle_s |0\rangle_i, \quad (607)$$

$$= |0\rangle_s |0\rangle_i + |\Psi_2\rangle, \quad (608)$$

donde

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle = & i \frac{3}{4} \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{\hbar} \delta k \int dz A_1(z) A_2(z) F_{\text{eff}}(z) \\ & \times \sum_{k_s} \sum_{k_i} l(k_s, z) l(k_i, z) \int d\omega_1 d\omega_2 \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_2) \\ & \times \int_0^t dt' \exp(-i[\omega_1 + \omega_2 - \omega_s - \omega_i]t') \exp(i\Delta k(z)z) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i), \end{aligned} \quad (609)$$

donde observamos que

$$\int dt' \exp(-i[\omega_1 + \omega_2 - \omega_s - \omega_i]t') = 2\pi \delta(\omega_2 - [\omega_s + \omega_i - \omega_1]), \quad (610)$$

lo que impone la condición de conservación de energía  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_s - \omega_i$ . Esto nos permite reescribir a  $\Delta k(z)$  como

$$\Delta k(z) = k_1(\omega_1, z) + k_2(\omega_s + \omega_i - \omega_1, z) - k_s(\omega_s, z) - k_i(\omega_i, z), \quad (611)$$

y a  $|\Psi_2\rangle$  como

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle = & i \frac{3}{4} (2\pi) \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{\hbar} \delta k \int dz A_1(z) A_2(z) F_{\text{eff}}(z) \\ & \times \sum_{k_s} \sum_{k_i} l(k_s, z) l(k_i, z) \int d\omega_1 \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega_1) \\ & \times \exp(i\Delta k(z)z) \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i). \end{aligned} \quad (612)$$

Definimos ahora

$$J(z) := A_1(z)A_2(z)F_{\text{eff}}(z), \quad (613)$$

con esto en mente, reescribimos a  $|\Psi_2\rangle$  como

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= i\frac{3}{4}(2\pi)\frac{\epsilon_0\chi^{(3)}}{\hbar}\delta\mathbf{k} \int dz J(z) \sum_{\mathbf{k}_s} \sum_{\mathbf{k}_i} l(\mathbf{k}_s, z) l(\mathbf{k}_i, z) \\ &\quad \times \int d\omega_1 \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega_1) \exp(i\Delta\mathbf{k}(z)z) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_i), \end{aligned} \quad (614)$$

donde si definimos<sup>3</sup>

$$G(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i, z) := l(\omega_s, z) l(\omega_i, z) \int d\omega_1 \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_s + \omega_i - \omega_1) \exp(i\Delta\mathbf{k}(z)z). \quad (615)$$

Finalmente llegamos a que

$$|\Psi_2\rangle = 2\pi i \frac{\epsilon_0\chi^{(3)}}{\hbar} \frac{3}{4} \delta\mathbf{k} \int dz J(z) \sum_{\mathbf{k}_s} \sum_{\mathbf{k}_i} G(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i, z) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_i). \quad (616)$$

<sup>3</sup> En el [Capítulo 4](#), se omitió la notación  $\omega_1$  al ser la única integral que quedaba en el espacio de frecuencias.

## CÓDIGOS

En este apéndice se colocarán los códigos empleados tanto para la elaboración de las gráficas como para el análisis de resultados.

## B.1 TAPERS

Código referente a la obtención de las gráficas de los perfiles de *tapers*.

Código 1: Código para las gráficas de los perfiles de *tapers*. Se coloca el script de ejemplo para el caso de reducción al 60% del diámetro original. El lenguaje usado es Julia en versión 0.5.1.

```

1 #***** César Bertoni Ocampo. 2017 *****#
2 #***** perfilAutomatico.jl *****#
3 #*****#
4 #El programa mide de forma automática el ancho del perfil#
5 #de tapers, mediante fotografías de los mismos, el script#
6 #ha de ser colocado en la misma carpeta que contiene las #
7 #fotografías de la fibra. El programa es sensible a motas#
8 #de polvo, que pueden ser detectadas como un falso posi- #
9 #tivo. Si los bordes de la fotografía no están bien defi-#
10 #nidos o enfocados, el programa no podrá detectarlos co- #
11 #rrectamente. Se ha de experimentar con el valor de la #
12 #línea de píxeles central de la medición para evitar di- #
13 #chos inconvenientes, también es útil experimentar con #
14 #los valores de las líneas laterales promediadas. #
15 #Durante la ejecución del programa pueden aparecer adver-#
16 #tencias causadas por los paquetes empleados en el códi- #
17 #go, estas han de ser ignoradas. #
18 #El programa fue probado con julia 0.5.2. #
19 #*****#
20
21 using Images, Colors, FixedPointNumbers, ImageView, PyPlot;
22
23 #Función de importación de archivos
24 function importador(n)
25     if n<10
26         a = load("o$n.bmp")
27     elseif n>=10
28         a = load("$n.bmp")
29     end
30     return a
31 end
32
33 function matrizEspacio(noFotos,noInic)

```

```

34     #Se crea una matriz de ceros con las dimensiones
35     #del lado más corto de las fotografías y del
36     #número de fotos
37     ys = size(importador(noInic))[1]
38     xs = size(importador(noInic))[2]
39     return zeros(min(xs,ys),noFotos)
40 end
41
42 function orientacion(noInic)
43     #Determina la orientación de las fotografías.
44     ys = size(importador(noInic))[2]
45     xs = size(importador(noInic))[1]
46     mini = min(xs,ys)
47     if mini == xs #Regresa 1 si es horizontal
48         return 1
49     elseif mini == ys #Regresa 0 si es vertical
50         return 0
51     end
52 end
53
54 function nivel(perfil,por)
55     #Recibe una lista de datos, si el valor de estos es
56     #mayor al valor asignado en "por", entonces los deja
57     #sin cambios, de lo contrario los vuelve a cero. Se
58     #emplea para eliminar los valores de ruido en la
59     #detección de los perfiles.
60     n = length(perfil)
61     por = maximum(perfil)*por
62     thr = zeros(n)
63     for i in 1:n
64         if perfil[i]<por
65             thr[i] = 0
66         elseif perfil[i]>=por
67             thr[i] = perfil[i]
68         end
69     end
70     return thr
71 end
72
73 function anchoN(perfil)
74     #Mide el ancho de los perfiles de las fotografías, acepta
75     #una lista de datos para una línea de píxeles, en "pda" se va
76     #calculando la diferencia entre el valor del píxel i
77     #respecto del i-1, si el valor se vuelve negativo, entonces
78     #el paso i-1 fue el máximo de la medición y se considera como
79     #la posición del borde. En "pdb" se registra lo mismo pero en
80     #dirección contraria. La diferencia en las posiciones "pda" y
81     #"pdb"
82     #es el ancho del perfil en píxeles.
83     n = length(perfil)
84     k = 0
85     l = 0

```

```

85     pda = 0
86     pdb = 0
87     for i in 2:n
88         da = perfil[i]-perfil[i-1]
89         if da<0
90             pda = i-1
91             break
92         end
93     end
94     for i in 1:n
95         k=n-i
96         l = n-(i-1)
97         db = perfil[k]-perfil[l]
98         if db<0
99             pdb = l
100            break
101        end
102    end
103    return pdb-pda
104 end
105
106 function autoBorde(c, f, linea, pixeles, por, k = 1)
107     #Definición de los Kernels a usar y del espacio
108     #de los mismos.
109     PrewittX= [-1 0 1;-1 0 1;-1 0 1]
110     PrewittY= [1 1 1;0 0 0;-1 -1 -1]
111     SobelX= [-1 0 1;-2 0 2; -1 0 1]
112     SobelY= [1 2 1;0 0 0; -1 -2 -1]
113     kernX = zeros(3,3)
114     kernY = zeros(3,3)
115
116     #Definición de los espacios de operación y variables
117     #para la operación del programa. Las fotos deben
118     #tener todas el mismo tamaño y orientación, por eso
119     #se usa a la primera (c) como referencia.
120     NoFotos = f-c+1
121     esp = matrizEspacio(NoFotos,c)
122     ori = orientacion(NoFotos)
123     b = zeros(maximum(size(esp)))
124     b0 = b
125     perf = zeros(NoFotos)
126     r = 1
127
128     #Selección del kernel de la detección de bordes.
129     if k == 1
130         kernX = PrewittY
131         kernY = PrewittX
132     elseif k == 2
133         kernX = SobelY
134         kernY = SobelX
135     end
136     img = importador(c) #Se importa la primera imagen

```

```

137     #Filtrado de la primera imagen en dirección X para generación
        de espacio.
138     ix = map(Images.Clamp01NaN(imfilter(img,kernX)), imfilter(img
        ,kernX))
139     #Filtrado de la segunda imagen en dirección Y para generación
        de espacio.
140     iy = map(Images.Clamp01NaN(imfilter(img,kernY)), imfilter(img
        ,kernY))
141     #Conversión de los espacios anteriores a arreglos enteros y
        del tamaño necesario.
142     #La función separate convierte las matrices de las entradas "
        ix" e "iy"
143     #de valores RGB a matrices enteras.
144     bx=(separate(ix)[: ,2+pixeles])*0
145     by=(separate(iy)[2+pixeles, :])*0
146     for i in c:f
147         img = importador(i) #se importa la imagen i.
148         if ori ==1 #Si la orientación es horizontal
149             #Se hace la detección de bordes.
150             ix = map(Images.Clamp01NaN(imfilter(img,kernX)),
                imfilter(img,kernX))
151             for j in -pixeles:pixeles
152                 #promedio de los perfiles laterales a la línea
                central
153                 bx+=(separate(ix)[: ,línea+j,1])/(2*pixeles+1)
154             end
155             esp[:,r]=bx #El resultado se guarda en una arreglo.
156         elseif ori ==0 #si la orientación es vertical
157             iy = map(Images.Clamp01NaN(imfilter(img,kernY)),
                imfilter(img,kernY))
158             for j in -pixeles:pixeles
159                 by+=separate(iy)[línea+j, :,1]/(2*pixeles+1)
160             end
161             esp[:,r]==by
162         end
163         r+=1 #se sigue a la fotografía siguiente y se repite el
            proceso
164         bx = bx*0
165         by = by*0
166     end
167     #Se aplica el nivel (threshold) a los datos medidos
168     #y luego se mide el ancho del perfil, se guarda el valor
169     #en la variable perf.
170     m = 1
171     for i in c:f
172         esp[:,m] = nivel(esp[:,m],por)
173         perf[m] = anchoN(esp[:,m])
174         m+=1
175     end
176     return perf
177
178 end

```

```

179
180 function numerofinalfoto()
181     #Esta función cuenta el número de archivos con extensión .bmp
182     #en la carpeta y pide el número de la última foto a medir,
183     #si valor otorgado no es entero o supera el valor del número
184     #de archivos .bmp en la carpeta, se emplea por defecto el
185     #valor total de archivos de imagenes en la carpeta.
186     nomaxfotos = (length(filter!(r"\.bmp$",readdir())));
187     println("Escriba el número final de la fotografía (:)")
188     entnofotos = readline()
189     entnofotos1 = 0
190     try
191         entnofotos1 = parse(Int64,entnofotos)
192
193         if entnofotos1 >= nomaxfotos
194             entnofotos1 = nomaxfotos
195         end
196
197     catch
198         entnofotos1 = nomaxfotos
199     end
200
201     return entnofotos1
202 end
203
204 function numeroinicialfoto()
205     #Esta función cuenta el número de archivos con extensión .bmp
206     #en la carpeta y pide el número de la primera foto a medir,
207     #si el valor otorgado no es entero o supera el valor del nú
208     #mero
209     #de archivos .bmp en la carpeta, se emplea por defecto el
210     #primer valor en el nombre de los archivos de imágenes en la
211     #carpeta, se supone que el primero siempre será "01.bmp"
212     nomaxfotos = (length(filter!(r"\.bmp$",readdir())));
213     println("Escriba el número inicial de la fotografía (:)")
214     entnofotos = readline()
215     entnofotos1 = 0
216
217     try
218         entnofotos1 = parse(Int64,entnofotos)
219         if entnofotos1 >= nomaxfotos
220             entnofotos1 = 1
221         end
222     catch
223         entnofotos1 =1
224     end
225
226     return entnofotos1
227 end
228 function numerolineacentral()
229     #Se solicita la linea central desde donde se hará el análisis

```

```

230 #de borde en cada una de las imágenes. En caso de no ingresar
231 #un número válido se regresa por defecto 1.
232 println("Escriba el número de línea central del análisis de
      borde:")
233 línea = readline()
234 línea1 = 1
235 or = orientacion(1)
236
237 try
238     línea1 = parse(Int64,línea)
239     if or == 1 && línea1>1920
240         línea1 = 1
241         error()
242     elseif or == 0 && línea1>1080
243         línea1 = 1
244         error()
245     end
246 catch
247     println("Ingrese un número entero para la línea.")
248
249     if or == 1
250         println("***Es HORIZONTAL***")
251         println("Si las fotografías son HORIZONTALES, el
              valor es de 1 a 1920.")
252     elseif or == 0
253         println("***Es VERTICAL***")
254         println("Si la fotografíaas son VERTICALES, el valor
              es de 1 a 1080.")
255     end
256
257 end
258
259 return línea1
260 end
261
262 function lineaslaterales()
263     #Pide la cantidad de líneas a la derecha e izquierda
264     #de la línea central en la toma de los anchos.
265     println("Escriba el número de líneas a la izquierda y derecha
            que")
266     println("serán promediadas, respecto a la línea central.")
267     líneas = readline()
268     líneas1 = 0
269     try
270         líneas1 = parse(Int64,líneas)
271     catch
272         println("Ingrese un número entero para la línea.")
273     end
274     return líneas1
275 end
276
277 function porcentaje()

```

```

278     #Pide el porcentaje de discriminacion para eliminar el
279     #ruido de los datos y sirve como filtro ante ruido en
280     #la detección de borde. Acepta valores de 0 a 1.
281     #Por defecto regresa 1.
282     println("Escriba el porcentaje de filtrado")
283     porcentaje0 = readline()
284     porcentaje1 = 1
285     try
286         porcentaje1 = parse(Float64,porcentaje0)
287     catch
288         println("Ingrese un número entre 0 y 1.")
289     end
290     return porcentaje1
291 end
292
293 function metodo()
294     #Pide el número del Kernel del filtro de detección de bordes
295     #a utilizar. 1 para Prewitt o 2 para Sobel, se usa por
296     #defecto Sobel
297     println("Ingrese 1 para Prewitt o 2 para Sobel:")
298     metodo0 = readline()
299     metodo1 = 2
300     try
301         metodo1 = parse(Int64,metodo0)
302         if metodo1 != 1 && metodo1 != 2
303             error()
304         end
305     catch
306         println("Ingrese 1 o 2.")
307         println("Seleccionado modo 2 por defecto.")
308     end
309     return metodo1
310 end
311
312 function reduccion()
313     #Pide el porcentaje de reducción del taper, ha
314     #de ser un valor entre 0 y 100, 100 representa
315     #una fibra del ancho original
316     println("Escriba el porcentaje de reducción de la fibra")
317     porcentaje = readline()
318     porcentaje1 = 1
319     try
320         porcentaje1 = parse(Float64,porcentaje)
321         if porcentaje1>100
322             error()
323         elseif porcentaje1<0
324             error()
325         end
326     catch
327         println("Ingrese un número entre 0 y 100.")
328         porcentaje1=100

```

```

329     end
330     return porcentaje1/100
331 end
332
333 rb(z,z0) = r0*exp(-(z-z0)/lw) #Exponencial de la primera transición.
334 rs(z,z0) = r0*exp((z-(z0+lw+2dl))/lw) #Exponencial de la segunda
    transición.
335
336 function modeloTaper(z,z0)
337     if z<= z0
338         r0
339     elseif z>z0 && z<(z0+dl)
340         rb(z,z0)
341     elseif z>=(z0+dl) && z<=(z0+dl+lw)
342         rw
343     elseif z>(z0+dl+lw) && z<=(z0+2dl+lw)
344         rs(z,z0)
345     elseif z>(z0+2dl+lw)
346         r0
347     end
348 end
349
350 ##Ejemplo de valores que funcionaron para HB800C-60
351 ##línea central 685
352 ##promediar (líneas) 15
353 ##porcentaje .35
354 ##metodo 2 (Sobel)
355
356 redu = reduccion() #porcentaje de reducción de la fibra respecto
    del original.
357 nofotoi = numeroinicialfoto() #número de fotografía inicial.
358 nofotof = numerofinalfoto() #número de fotografía final.
359 lineacentral = numerolineacentral() #número de la línea cenral.
360 linlat = lineaslaterales() #número de líneas laterales a cada
    lado a promediar.
361 porc = porcentaje() #valor del threshold de ruido, debajo de tal
    valor todo es cero.
362 kern = metodo() #kernel usado para la detección de bordes.
363
364 r0 = 80 #Diámetro por defecto para la HB800C.
365 rw = 80 * redu
366 lw = 25 #Longitud de la cintura por defecto para toda la serie
    de tapers.
367 dl = lw*log(r0/rw) #Longitud del área de transición.
368
369 #Medición de los anchos y escalado a micrometros
370 img = autoBorde(nofotoi,nofotof,lineacentral,linlat,porc,kern);
371 numfotostot = size(img)[1] #Número total de fotografías
    analizadas
372 prom = mean(img[1:6])
373 esc = r0./prom

```

```

374
375 equis = 0:1:(numfotostot-1);
376 dataplot = [equis img*esc]
377 tabmodnum = collect(1.0:1:length(equis))
378 z0s=collect(0:0.1:(length(equis)/2))
379 desvi=zeros(z0s)
380
381 for j in 1:length(z0s)
382     for i in 1:length(tabmodnum)
383         tabmodnum[i]= modeloTaper(equis[i],z0s[j])
384     end
385
386     desvi[j]=std(tabmodnum-dataplot[:,2])
387 end
388
389 z0 = z0s[indmin(desvi)]    #Valor del origen donde se minimiza la
                             #diferencia de
390
                             #los valores del modelo y los medidos,
                             #de acuerdo a la
391
                             #desviación estándar de esta
                             #diferencia.
392 for i in 1:length(tabmodnum)
393     tabmodnum[i] = modeloTaper(equis[i],z0)
394 end
395
396 equisg = collect(0:0.01:(numfotostot-1)); #Valores de x para grá
                             #fica del modelo
397 tabmodnumg = equisg*z0    #Espacio para valores
                             #de y de dicha gráfica
398
399 for i in 1:length(tabmodnumg)
400     tabmodnumg[i] = modeloTaper(equisg[i],z0)
401 end
402
403 #Preámbulos de entorno de graficación
404 PyPlot.matplotlib[:rc]("text.latex",preamble="\usepackage{euler}
")
405 PyPlot.matplotlib[:rcParams]["text.latex.unicode"] = true
406 PyPlot.matplotlib[:rc]("font", family="serif")
407 PyPlot.matplotlib[:rc]("text", usetex=true)
408
409 #Gráfica de la evolución de la desviación estándar de los datos
                             #medidos
410 #con los del modelo respecto del cambio en el origen z0 del
                             #modelo.
411 plot(collect(0:0.1:(length(equis)/2)),desvi)
412 xlabel(L"$z_o \ : [mm]$")
413 ylabel(L"Desviaci\on est\'andar $ $")
414 savefig("HB8ooC-6o-desv.eps")
415
416 #Gráfica del perfil.
417 imgp = errorbar(dataplot[:,1],dataplot[:,2],yerr=1,fmt="r.")

```

```
418 plot(equisg,tabmodnumg)
419 ylim([40,90])
420 xlabel(L"Longitud de de la fibra [mm]")
421 ylabel(L"Diámetro exterior [μm]")
422 savefig("HB800C-60.eps")
423
424 #Se escriben los datos graficados en un archivo
425 writedlm("HB800C-60-exp.dat",dataplot)
426
427 #Se sale de kernel de julia.
428 exit()
```

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] M. Abele. «Teoria della propagazione di un campo elettro-magnetico lungo una guida dielettrica a sezione circolare». En: *Il Nuovo Cimento (1943-1954)* 5.4 (1948), págs. 274-284. ISSN: 1827-6121. DOI: [10.1007/BF02784461](https://doi.org/10.1007/BF02784461). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02784461>.
- [2] Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Quinta edición. Academic Press, Elsevier, 2013. ISBN: 09780123970237.
- [3] George B. Arfken y Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Sexta edición. Elsevier Academic Press, 2005. ISBN: 0120885840.
- [4] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing y P. S. Pershan. «Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric». En: *Phys. Rev.* 127 (6 1962), págs. 1918-1939. DOI: [10.1103/PhysRev.127.1918](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.1918). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.1918>.
- [5] George C. Baldwin. *An Introduction to Nonlinear Optics*. Primera edición. Plenum Press, 1974. ISBN: 9780306200045.
- [6] A.G. Bell. *Photo phone-transmitter*. US Patent 235,496. 1880. URL: <https://www.google.com/patents/US235496>.
- [7] T. A. Birks e Y. W. Li. «The shape of fiber tapers». En: *Journal of Lightwave Technology* 10.4 (1992), págs. 432-438. ISSN: 0733-8724. DOI: [10.1109/50.134196](https://doi.org/10.1109/50.134196).
- [8] T. A. Birks, W. J. Wadsworth y P. St. J. Russell. «Supercontinuum generation in tapered fibers». En: *Opt. Lett.* 25.19 (2000), págs. 1415-1417. DOI: [10.1364/OL.25.001415](https://doi.org/10.1364/OL.25.001415). URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-25-19-1415>.
- [9] N A Borshchevskaya, K G Katamadze, S P Kulik y M V Fedorov. «Three-photon generation by means of third-order spontaneous parametric down-conversion in bulk crystals». En: *Laser Physics Letters* 12.11 (2015), pág. 115404. URL: <http://stacks.iop.org/1612-202X/12/i=11/a=115404>.
- [10] Robert Boyd. *Nonlinear Optics*. Tercera edición. Academic Press, 2008. ISBN: 9780123694706.
- [11] Martin Braun. «Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics». En: Cuarta. Vol. 11. Text in Applied Mathematics. Springer-Verlag NewYork, 1993, pág. 329. ISBN: 0387978941.

- [12] Yeh C. y Shimabukuro F.I. «The Essence of Dielectric Waveguides». En: Springer US, 2008, pág. 143. ISBN: 9780387497990. DOI: [10.1007/978-0-387-49799-0](https://doi.org/10.1007/978-0-387-49799-0).
- [13] «Charles Vernon Boys, 1855-1944». En: *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society* 4.13 (1944), págs. 771-788. ISSN: 1479-571X. DOI: [10.1098/rsbm.1944.0021](https://doi.org/10.1098/rsbm.1944.0021). eprint: <http://rsbm.royalsocietypublishing.org/content/4/13/771.full.pdf>. URL: <http://rsbm.royalsocietypublishing.org/content/4/13/771>.
- [14] D. Chen, B. Sun e Y. Wei. «Multi-wavelength laser source based on enhanced four-wave-mixing effect in a highly nonlinear fiber». En: *Laser Physics* 20.8 (2010), págs. 1733-1737. ISSN: 1555-6611. DOI: [10.1134/S1054660X10150065](https://doi.org/10.1134/S1054660X10150065). URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S1054660X10150065>.
- [15] Aurélien Coillet, Guillaume Vienne y Philippe Grelu. «Potentialities of glass air-clad micro- and nanofibers for nonlinear optics». En: *J. Opt. Soc. Am. B* 27.3 (2010), págs. 394-401. DOI: [10.1364/JOSAB.27.000394](https://doi.org/10.1364/JOSAB.27.000394). URL: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-27-3-394>.
- [16] D. Colladon. «Fountain Colladon». En: *Scientific American* LI.23 (1884), pág. 359. DOI: [10.1038/scientificamerican12061884-357](https://doi.org/10.1038/scientificamerican12061884-357). URL: <http://www.nature.com/scientificamerican/journal/v51/n23/index.html>.
- [17] María Corona, Karina Garay-Palmett y Alfred B. U'Ren. «Experimental proposal for the generation of entangled photon triplets by third-order spontaneous parametric downconversion in optical fibers». En: *Opt. Lett.* 36.2 (2011), págs. 190-192. DOI: [10.1364/OL.36.000190](https://doi.org/10.1364/OL.36.000190). URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-36-2-190>.
- [18] María Corona, Karina Garay-Palmett y Alfred B. U'Ren. «Third-order spontaneous parametric down-conversion in thin optical fibers as a photon-triplet source». En: *Phys. Rev. A* 84 (3 2011), pág. 033823. DOI: [10.1103/PhysRevA.84.033823](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.033823). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.033823>.
- [19] Richard Courant. *Introducción al cálculo y al análisis matemático II / Introduction To Calculus and Analysis, Volume II (Spanish Edition)*. Editorial Limusa S.A. De C.V., 2005. ISBN: 9681806409.
- [20] Hector Cruz-Ramirez, Roberto Ramirez-Alarcon, Maria Corona, Karina Garay-Palmett y Alfred B. U'Ren. «Spontaneous Parametric Processes in Modern Optics». En: *Opt. Photon. News* 22.11 (2011), págs. 36-41. DOI: [10.1364/OPN.22.11.000036](https://doi.org/10.1364/OPN.22.11.000036). URL: <http://www.osa-opn.org/abstract.cfm?URI=opn-22-11-36>.

- [21] Liang Cui, Xiaoying Li, Cheng Guo, Y. H. Li, Z. Y. Xu, L. J. Wang y Wei Fang. «Generation of correlated photon pairs in micro/nano-fibers». En: *Opt. Lett.* 38.23 (2013), págs. 5063-5066. DOI: [10.1364/OL.38.005063](https://doi.org/10.1364/OL.38.005063). URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-38-23-5063>.
- [22] Lu-Ming Duan y Guang-Can Guo. «Alternative approach to electromagnetic field quantization in nonlinear and inhomogeneous media». En: *Phys. Rev. A* 56 (1 1997), págs. 925-930. DOI: [10.1103/PhysRevA.56.925](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.925). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.925>.
- [23] Bin Fang, Offir Cohen y Virginia O. Lorenz. «Polarization-entangled photon-pair generation in commercial-grade polarization-maintaining fiber». En: *J. Opt. Soc. Am. B* 31.2 (2014), págs. 277-281. DOI: [10.1364/JOSAB.31.000277](https://doi.org/10.1364/JOSAB.31.000277). URL: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-31-2-277>.
- [24] M. Fiorentino, P. L. Voss, J. E. Sharping y P. Kumar. «All-fiber photon-pair source for quantum communications». En: *IEEE Photonics Technology Letters* 14.7 (2002), págs. 983-985. ISSN: 1041-1135. DOI: [10.1109/LPT.2002.1012406](https://doi.org/10.1109/LPT.2002.1012406).
- [25] M. Fiorentino, P. L. Voss, J. E. Sharping y P. Kumar. «All-fiber photon-pair source for quantum communications». En: *IEEE Photonics Technology Letters* 14.7 (2002), págs. 983-985. ISSN: 1041-1135. DOI: [10.1109/LPT.2002.1012406](https://doi.org/10.1109/LPT.2002.1012406).
- [26] W. G. French, J. B. Macchesney, P. B. O'Connor y G. W. Tasker. «B.S.T.J. brief: Optical waveguides with very low losses». En: *The Bell System Technical Journal* 53.5 (1974), págs. 951-954. ISSN: 0005-8580. DOI: [10.1002/j.1538-7305.1974.tb02778.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1974.tb02778.x).
- [27] K. Garay-Palmett, H. J. McGuinness, Offir Cohen, J. S. Lundeen, R. Rangel-Rojo, A. B. U'Ren, M. G. Raymer, C. J. McKinstrie, S. Radic e I. A. Walmsley. «Photon pair-state preparation with tailored spectral properties by spontaneous four-wave mixing in photonic-crystal fiber». En: *Opt. Express* 15.22 (2007), págs. 14870-14886. DOI: [10.1364/OE.15.014870](https://doi.org/10.1364/OE.15.014870). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-15-22-14870>.
- [28] K. Garay-Palmett, D. Cruz-Delgado, F. Dominguez-Serna, E. Ortiz-Ricardo, J. Monroy-Ruz, H. Cruz-Ramirez, R. Ramirez-Alarcon y A. B. U'Ren. «Photon-pair generation by intermodal spontaneous four-wave mixing in birefringent, weakly guiding optical fibers». En: *Phys. Rev. A* 93 (3 2016), pág. 033810. DOI: [10.1103/PhysRevA.93.033810](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.033810). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033810>.

- [29] Karina Garay Palmett. «PROPIEDADES DE ENLAZAMIENTO ESPECTRAL DE PAREJAS DE FOTONES GENERADAS POR MEZCLADO DE CUATRO ONDAS ESPONTÁNEO EN FIBRA ÓPTICA». Tesis doctoral. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, 2009.
- [30] G. Ghosh, M. Endo y T. Iwasaki. «Temperature-dependent Sellmeier coefficients and chromatic dispersions for some optical fiber glasses». En: *Journal of Lightwave Technology* 12.8 (1994), págs. 1338-1342. ISSN: 0733-8724. DOI: [10.1109/50.317500](https://doi.org/10.1109/50.317500).
- [31] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd y Lorenzo Maccone. «Advances in quantum metrology». En: *Nat Photon* 5.4 (2011), págs. 222-229. ISSN: 1749-4885. DOI: [10.1038/nphoton.2011.35](https://doi.org/10.1038/nphoton.2011.35). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2011.35>.
- [32] Nicolas Gisin y Rob Thew. «Quantum communication». En: *Nat Photon* 1.3 (2007), págs. 165-171. ISSN: 1749-4885. DOI: [10.1038/nphoton.2007.22](https://doi.org/10.1038/nphoton.2007.22). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2007.22>.
- [33] Eugene Hecht. *Óptica*. 3.<sup>a</sup> ed. Pearson Educacion, 2000. ISBN: 978-84-7829-025-7.
- [34] Jonathan E. Hoffman, Fredrik K. Fatemi, Guy Beadie, Steven L. Rolston y Luis A. Orozco. «Rayleigh scattering in an optical nanofiber as a probe of higher-order mode propagation». En: *Optica* 2.5 (2015), págs. 416-423. DOI: [10.1364/OPTICA.2.000416](https://doi.org/10.1364/OPTICA.2.000416). URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-2-5-416>.
- [35] Tianye Huang, Zhifang Wu, Xuguang Shao, Jing Zhang, Lam Quoc Huy, Huizi Li y Ping Shum. «Generation photon triplets in mid-infrared by third order spontaneous parametric down conversion in micro-fiber». En: *Asia Communications and Photonics Conference 2013*. Optical Society of America, 2013, ATh3C.5. DOI: [10.1364/ACPC.2013.ATh3C.5](https://doi.org/10.1364/ACPC.2013.ATh3C.5). URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ACPC-2013-ATh3C.5>.
- [36] Hannes Hubel, Deny R. Hamel, Alessandro Fedrizzi, Sven Ramelow, Kevin J. Resch y Thomas Jennewein. «Direct generation of photon triplets using cascaded photon-pair sources». En: *Nature* 466.7306 (2010), págs. 601-603. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/nature09175](https://doi.org/10.1038/nature09175). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature09175>.
- [37] E.P. Ippen y R.H. Stolen. «Stimulated Brillouin scattering in optical fibers». En: *Applied Physics Letters* 21.11 (1972), págs. 539-541. DOI: [10.1063/1.1654249](https://doi.org/10.1063/1.1654249). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1654249>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1654249>.
- [38] Hecht Jeff. *City of Light: The Story of Fiber Optics*. Oxford University Press, 1999. ISBN: 0195108183.

- [39] F. P. Kapron, D. B. Keck y R. D. Maurer. «RADIATION LOSSES IN GLASS OPTICAL WAVEGUIDES». En: *Applied Physics Letters* 17.10 (1970), págs. 423-425. DOI: [10.1063/1.1653255](https://doi.org/10.1063/1.1653255). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1653255>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1653255>.
- [40] Sameen Ahmed Khan. «Arab Origins of the Discovery of the Refraction of Light». En: *Optics and Photonics News* (2007), págs. 22-23.
- [41] E. Knill, R. Laflamme y G. J. Milburn. «A scheme for efficient quantum computation with linear optics». En: *Nature* 409.6816 (2001), págs. 46-52. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/35051009](https://doi.org/10.1038/35051009). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/35051009>.
- [42] Jeakwon Ko, Kwang Jo Lee y Byoung Yoon Kim. «Spectral shaping of an all-fiber torsional acousto-optic tunable filter». En: *Appl. Opt.* 53.36 (2014), págs. 8499-8506. DOI: [10.1364/AO.53.008499](https://doi.org/10.1364/AO.53.008499). URL: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-53-36-8499>.
- [43] Pieter Kok, W. J. Munro, Kae Nemoto, T. C. Ralph, Jonathan P. Dowling y G. J. Milburn. «Linear optical quantum computing with photonic qubits». En: *Rev. Mod. Phys.* 79 (1 2007), págs. 135-174. DOI: [10.1103/RevModPhys.79.135](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.79.135). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.135>.
- [44] Stephan Krapick, Benjamin Brecht, Harald Herrmann, Viktor Quiring y Christine Silberhorn. «On-chip generation of photon-triplet states». En: *Opt. Express* 24.3 (2016), págs. 2836-2849. DOI: [10.1364/OE.24.002836](https://doi.org/10.1364/OE.24.002836). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-3-2836>.
- [45] S. Kumar. «Fundamental Limits to Moore's Law». En: *ArXiv e-prints* (nov. de 2015). arXiv: [1511.05956](https://arxiv.org/abs/1511.05956) [cond-mat.mes-hall].
- [46] Kwang Jo Lee, In-Kag Hwang, Hyun Chul Park y Byoung Yoon Kim. «Axial strain dependence of all-fiber acousto-optic tunable filters». En: *Opt. Express* 17.4 (2009), págs. 2348-2357. DOI: [10.1364/OE.17.002348](https://doi.org/10.1364/OE.17.002348). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-4-2348>.
- [47] Sang Min Lee, Heonoh Kim, Myoungsik Cha y Han Seb Moon. «Polarization-entangled photon-pair source obtained via type-II non-collinear SPDC process with PPKTP crystal». En: *Opt. Express* 24.3 (2016), págs. 2941-2953. DOI: [10.1364/OE.24.002941](https://doi.org/10.1364/OE.24.002941). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-3-2941>.
- [48] Timothy Lee, Yongmin Jung, Christophe A. Codemard, Ming Ding, Neil G. R. Broderick y Gilberto Brambilla. «Broadband third harmonic generation in tapered silica fibres». En: *Opt. Express* 20.8 (2012), págs. 8503-8511. DOI: [10.1364/OE.20.008503](https://doi.org/10.1364/OE.20.008503).

- URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-8-8503>.
- [49] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light*. OUP Oxford, 2000. ISBN: 9780191589782.
- [50] I. H. Malitson. «Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica»,†». En: *J. Opt. Soc. Am.* 55.10 (1965), págs. 1205-1209. DOI: [10.1364/JOSA.55.001205](https://doi.org/10.1364/JOSA.55.001205). URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-55-10-1205>.
- [51] H. J. McGuinness, M. G. Raymer, C. J. McKinstrie y S. Radic. «Quantum Frequency Translation of Single-Photon States in a Photonic Crystal Fiber». En: *Phys. Rev. Lett.* 105 (9 2010), pág. 093604. DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.093604](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.093604). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.093604>.
- [52] F. M. Mitschke y L. F. Mollenauer. «Discovery of the soliton self-frequency shift». En: *Opt. Lett.* 11.10 (1986), págs. 659-661. DOI: [10.1364/OL.11.000659](https://doi.org/10.1364/OL.11.000659). URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-11-10-659>.
- [53] T. M. Monro, Y. D. West, D. W. Hewak, N. G. R. Broderick y D. J. Richardson. «Chalcogenide holey fibres». En: *Electronics Letters* 36.24 (2000), págs. 1998-2000. ISSN: 0013-5194. DOI: [10.1049/el:20001394](https://doi.org/10.1049/el:20001394).
- [54] Erasto Ortíz Ricardo. «CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE ELABORACIÓN DE FIBRAS ÓPTICAS ESTRECHADAS». Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [55] Fufei Pang, Wenchao Xiang, Hairun Guo, Na Chen, Xianglong Zeng, Zhenyi Chen y Tingyun Wang. «Special optical fiber for temperature sensing based on cladding-mode resonance». En: *Opt. Express* 16.17 (2008), págs. 12967-12972. DOI: [10.1364/OE.16.012967](https://doi.org/10.1364/OE.16.012967). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-17-12967>.
- [56] R. Paschotta. «noncritical phase matching». En: *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. October 2008. 1. Wiley-VCH. URL: ["https://www.rp-photonics.com/quasi\\_phase\\_matching.html"](https://www.rp-photonics.com/quasi_phase_matching.html).
- [57] R. Paschotta. «quasi-phase matching». En: *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. October 2008. 1. Wiley-VCH. URL: ["https://www.rp-photonics.com/quasi\\_phase\\_matching.html"](https://www.rp-photonics.com/quasi_phase_matching.html).
- [58] R. Paschotta. *Group index*. 2008. URL: [https://www.rp-photonics.com/group\\_index.html](https://www.rp-photonics.com/group_index.html).
- [59] Dale Corson Paul Lorrain. *Electromagnetism: principles and applications*. 2.<sup>a</sup> ed. W.H.Freeman & Co Ltd, 1979. ISBN: 9780716700647.

- [60] Leno Pedrotti. «Basic Physical Optics». En: *Fundamentals of Photonics*. SPIE, págs. 117-168. DOI: [10.1117/3.784938.ch4](https://doi.org/10.1117/3.784938.ch4). URL: <https://doi.org/10.1117/3.784938.ch4>.
- [61] W. H. Peeters y M. P. van Exter. «Optical characterization of periodically-poled KTiOPO<sub>4</sub>». En: *Opt. Express* 16.10 (2008), págs. 7344-7360. DOI: [10.1364/OE.16.007344](https://doi.org/10.1364/OE.16.007344). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-10-7344>.
- [62] Wang Peng-Xiang, Zhou Qiang, Zhang Wei, Huang Yi-Dong y Peng Jiang-De. «High-quality fiber-based heralded single-photon source at 1.5  $\mu\text{m}$ ». En: *Chinese Physics Letters* 29.5 (2012), pág. 054215.
- [63] Javier Páez Cárdenas. *Cálculo integral de varias variables*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2012. ISBN: 978-607-02-3045-5.
- [64] Manuel Jiménez Redondo, ed. *Diccionario de Física*. México: Ediciones Rioduero / EDIPLESA, 1979.
- [65] Christian Reimer, Michael Kues, Piotr Roztock, Benjamin Wetzel, Fabio Grazioso, Brent E Little, Sai T Chu, Tudor Johnston, Yarion Bromberg, Lucia Caspani y col. «Generation of multiphoton entangled quantum states by means of integrated frequency combs». En: *Science* 351.6278 (2016), págs. 1176-1180.
- [66] Rustum Roy, Dinesh K Agrawal y Herbert A McKinstry. «Very low thermal expansion coefficient materials». En: *Annual Review of Materials Science* 19.1 (1989), págs. 59-81.
- [67] Francis W. Sears y Zemansky Mark W. «College Physics: Electricity and Magnetism, Light, and Atomic Physics». En: Tercera edición. Addison-Wesley World Student Series. Addison-Wesley, 1971, pág. 680.
- [68] L. K. Shalm, D. R. Hamel, Z. Yan, C. Simon, K. J. Resch y T. Jennewein. «Three-photon energy-time entanglement». En: 9 (2012), pág. 19. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2492>.
- [69] Jay E. Sharping, Kim Fook Lee, Mark A. Foster, Amy C. Turner, Bradley S. Schmidt, Michal Lipson, Alexander L. Gaeta y Prem Kumar. «Generation of correlated photons in nanoscale silicon waveguides». En: *Opt. Express* 14.25 (2006), págs. 12388-12393. DOI: [10.1364/OE.14.012388](https://doi.org/10.1364/OE.14.012388). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-14-25-12388>.
- [70] Y.R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Pure & Applied Optics Series: 1-349. Wiley, 1984. ISBN: 9780471889984. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=qYIpAQAAAJ>.
- [71] Brian J. Smith, P. Mahou, Offir Cohen, J. S. Lundeen e I. A. Walmsley. «Photon pair generation in birefringent optical fibers». En: *Opt. Express* 17.26 (2009), págs. 23589-23602. DOI: [10.1364/OE.17.023589](https://doi.org/10.1364/OE.17.023589). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-26-23589>.

- [72] R. G. Smith. «Optical Power Handling Capacity of Low Loss Optical Fibers as Determined by Stimulated Raman and Brillouin Scattering». En: *Appl. Opt.* 11.11 (1972), págs. 2489-2494. DOI: [10.1364/AO.11.002489](https://doi.org/10.1364/AO.11.002489). URL: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-11-11-2489>.
- [73] E. Snitzer. «Cylindrical Dielectric Waveguide Modes\*». En: *J. Opt. Soc. Am.* 51.5 (1961), págs. 491-498. DOI: [10.1364/JOSA.51.000491](https://doi.org/10.1364/JOSA.51.000491). URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-51-5-491>.
- [74] «Military Communitations: From Ancient Times to the 21st Century». En: ed. por Christopher H. Sterling. ABS-CLIO, 2008, pág. 197. ISBN: 9781851097326.
- [75] R. H. Stolen, E. P. Ippen y A. R. Tynes. «Raman Oscillation in Glass Optical Waveguide». En: *Applied Physics Letters* 20.2 (1972), págs. 62-64. DOI: [10.1063/1.1654046](https://doi.org/10.1063/1.1654046). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1654046>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1654046>.
- [76] Wakana Ueno, Fumihiko Kaneda, Hirofumi Suzuki, Shigehiro Nagano, Atsushi Syouji, Ryosuke Shimizu, Koji Suizu y Keiichi Edamatsu. «Entangled photon generation in two-period quasi-phase-matched parametric down-conversion». En: *Opt. Express* 20.5 (2012), págs. 5508-5517. DOI: [10.1364/OE.20.005508](https://doi.org/10.1364/OE.20.005508). URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-5-5508>.
- [77] O. Vanvincq, J. C. Travers y A. Kudlinski. «Conservation of the photon number in the generalized nonlinear Schrödinger equation in axially varying optical fibers». En: *Phys. Rev. A* 84 (6 2011), pág. 063820. DOI: [10.1103/PhysRevA.84.063820](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.063820). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.063820>.
- [78] Fermín Alberto Viniegra Heberlein. *Mecánica de los cuerpos deformables*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2011. ISBN: 978-607-02-2102-6.
- [79] M. Mitchell Waldrop. «The chips are down for Moore's law». En: *Nature* 530.7589 (2016), págs. 144-147. DOI: [10.1038/530144a](https://doi.org/10.1038/530144a). URL: <https://doi.org/10.1038/530144a>.
- [80] D.F. Walls y Gerard J. Milburn, eds. *Quantum Optics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. DOI: [10.1007/978-3-540-28574-8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-28574-8). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-28574-8>.
- [81] Stephanie Wehner y Nelly Ng. *Lecture Notes, edX Quantum Cryptography: Week 0*. 2016.
- [82] W. Wheeler. *Apparatus for lighting dwellings or other structures*. US Patent 247,229A. 1881. URL: <https://www.google.com/patents/US235496>.

- [83] Amnon Yariv y Pochi Yeh. *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. Cuarta edición. Oxford University Press, 2006. ISBN: 0195179463.
- [84] Thomas Young. *A Course On Natural Philosophy And The Mechanical Arts*. Plenum Press, 1807. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=YPRZAAAAYAAJ&pg=PR1#v=onepage&q&f=false>.
- [85] Kevin Zielnicki, Karina Garay-Palmett, Daniel Cruz-Delgado, Hector Cruz-Ramirez, Michael F. O'Boyle, Bin Fang, Virginia O. Lorenz, Alfred B. U'Ren y Paul G. Kwiat. *Joint Spectral Characterization of Photon-Pair Sources*. 2018. eprint: [arXiv:1801.01195](https://arxiv.org/abs/1801.01195).



## COLOFÓN

Esté documento se escribió usando la apariencia tipográfica `classicthesis` desarrollada por André Miede para el sistema de composición de textos  $\text{\LaTeX}$ .

*Versión Final* al 29 de enero de 2018 (`classicthesis` version 4.2).