UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conjuntos Chebyshev y su convexidad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Díaz Antúnez Omar Francisco

TUTOR

M. en C. Fernando García Ruiz

Hoja de Datos del Jurado
Datos del alumno Díaz Antúnez Omar Francisco Tel.: 55-1395-9802 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 304280683
Datos del tutor M. en C. Fernando García Ruiz
Datos del sinodal 1 Dr. Julián Fernando Chagoya Saldaña
Datos del sinodal 2 Dra. Carmen Martínez Adame Isais
Datos del sinodal 3 Dr. Jefferson Edwin King Dávalos
Datos del sinodal 4 M. en C. Julio César Cedillo Sánchez
Datos del trabajo escrito. Conjuntos Chebyshev y su convexidad 98 2018

Índice general

Introducción.

La teoría de la aproximación es una rama importante del análisis funcional, iniciada por Chebyshev a mitad del siglo XIX, cuando demostró que toda función continua sobre un cerrado admite una *única* mejor aproximación por polinomios de grado a lo más n. En la época actual la importancia de esta teoría se ha incrementado en especial por sus aplicaciones a la ingeniería, la computación y el análisis. Los fundamentos de la teoría de la mejor aproximación en espacios normados fue establecida alrededor de 1920 por uno de los fundadores del análisis funcional, S. Banach. Entre 1930 y 1950 las ideas de Banach fueron desarrolladas y sistematizadas por matemáticos como S. M. Nicolescu, M. G. Krein, N. I. Achieser, A. I. Markushevich, J. L. Walsh y A. N. Kolmogorov ([2], [38], [42], [43]).

Uno de los métodos de aproximación más extendidos es el método de los mínimos cuadrados, desarrollado por Gauss para calcular las órbitas celestes de planetas y cometas. Este método de aproximación es muy útil cuando no buscamos un polinomio que pase por ciertos puntos sino entre ellos, lo cual puede ser deseable si la información de la que disponemos tiene muchos errores. En principio las órbitas elípticas quedan determinadas por cinco parámetros, sin embargo, debido a lo impreciso de las medidas, ya sea por error en los instrumentos o error humano, el cálculo de una órbita a partir de 5 observaciones es poco precisa, la solución correcta se alcanza cuando se aplica el método de los mínimos cuadrados a un número grande de observaciones. Este método también se aplica en la solución de sistemas de ecuaciones lineales sobre determinados o incompatibles en los que, en general, no existe una solución exacta, por lo que debemos buscar un vector que, en algún sentido, sea la mejor aproximación de la solución.

El problema básico en la teoría de la mejor aproximación es: "Dado un punto x y un conjunto K en un espacio métrico $(X, \|\cdot\|)$, determinar cúando existen puntos $k \in K$ para los que la distancia entre x y K es mínima, es decir, son los elementos $k \in K$ tal que $d_K(x) = \inf_{k \in K} \|x - k\|$". Si sólo se puede encontrar un elemento $k_0 \in K$ con la propiedad anterior a éste punto k_0 se le llama la mejor aproximación.

Algunas utilidades de la teoría de la mejor aproximación son, por ejemplo, aproximar una función arbitraria por términos de otras funciones más simples o bien con propiedades especiales (reflexivas, periódicas, continuas, integrables, etc.). Al obtener la expansión en serie de potencias de una función, tratamos de representar la función en términos de polinomios, llamándolos sumas parciales. Estas representaciones nos permiten obtener información sobre la función original que, tal vez, no podría obtenerse de otra forma. En el estudio de la existencia, unicidad y caracterización de los elementos de la mejor aproximación y problemas relacionados subyacentes a los espacios lineales normados o espacios de Hilbert se pueden encontrar muchas referencias ([54], [11], [17], etc.). Considerar problemas de aproximación en espacios más generales (Espacios métricos lineales, espacios vectoriales topológicos, espacios métricos, etc.) que son un reto mucho mayor aunque iniciado hace tiempo por autores como G. C. Ahuja, N. V. Effimov, V. Klee, T. D. Narang, Ivan Singer, S. B. Steckin y otros ([19], [36], [55]), no ha llegado a resultados tan buenos como en el caso de los espacios normados lineales.

El primer capítulo se divide en 3 secciones, la primera está dedicada a la introducción de los conceptos básicos, notación y resultados que serán usados en el resto de la tesis. En la segunda sección demostramos algunas condiciones para que un conjunto sea proximinal, y caracterizamos los espacios de dimensión finita y reflexivos en términos de estos conjuntos. La última sección está dedicada al estudio de condiciones para que un conjunto K sea Chebyshev y se presentan algunos espacios importantes que cumplen estas condiciones. Al final de esta sección veremos algunas propiedades que se cumplen en los espacios de Hilbert.

En los espacios euclidianos de dimensión finita todo conjunto Chebyshev es cerrado y convexo, para demostrar esta afirmación se necesita que la proyección métrica sobre el conjunto sea continua, por lo que ésta se vuelve un concepto de estudio en los espacios de dimensión infinita. En [58] Vlasov demuestra que en los espacios de Banach estrictamente convexos los conjuntos con proyección métrica continua son Chebyshev. Un análisis en profundidad de su demostración muestra que esta condición se puede debilitar, esto se estudia en la primer sección del segundo capítulo, además de la relación que existe entre la propiedad de que una norma y la norma del dual sean localmente uniformemente rotundas y la existencia de una formula para el cálculo de la distancia entre un punto y un subconjunto cerrado. La convexidad ha comenzado a ser un objeto de estudio debido a que, al igual que la compacidad, dota a los conjuntos de propiedades que permiten la aplicación de métodos y algoritmos para facilitar su análisis. Esta propiedad se estudia en la segunda sección y se da una respuesta parcial a la conjetura de si todo conjunto Chebyshev en un espacio de Hilbert es convexo, que es uno de los problemas abiertos más importantes en la teoría de la mejor aproximación.

1 Conjuntos proximinales y de Chebyshev

1.1 Preliminares

En 1853 P. L. Chebyshev trabajaba en como mejorar el paralelogramo de Watt, que es un mecanismo para convertir el movimiento circular de un motor de vapor en uno rectilíneo. Esto lo resuelve en [15], para ello tuvo que considerar el siguiente problema:

Dada una función continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$ y un número natural n, se puede "representar" f como un polinomio de grado a lo más n, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, tal que el error, definido por $\sup_{x\in[a,b]} \left\{|f(x) - p(x)|\right\}$, alcance su mínimo.

De este problema surgen otras cuestiones, que Chebyshev no estudió, por ejemplo:

- ¿Se puede construir?,
- ¿El polinomio es único? y
- ¿Qué pasa si cambiamos la manera de calcular el error?

Chebyshev demostró que este polinomio siempre existe, iniciando así la teoría de la mejor aproximación. Ésta ha tenido un desarrollo importante en los últimos años, en particular, debido a sus aplicaciones en la ingeniería, el análisis funcional y la computación.

Nos dedicaremos al estudio de la mejor aproximación en los espacios vectoriales normados y completos no triviales (espacios de Banach) sobre el campo de los números reales.

Vamos a denotar a:

- $B[a,r] = \{x \in X : \|a - x\| \leq r\}$,
- $B(a,r) = \{x \in X : \|a - x\| < r\}$,
- $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y

◇ $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Comencemos dando algunas definiciones:

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x, y \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple

◇ $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

◇ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

◇ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Entonces la función $\|\cdot\|$ es llamada *norma*, al par $(X, \|\cdot\|)$ se le llama *espacio normado*.

Definición 1.2. Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado completo, es decir, un espacio donde toda sucesión de Cauchy converge.

Una clase especial de espacios de Banach son los espacios de Hilbert:

Definición 1.3. Un *producto interior* en un espacio vectorial X sobre los reales es una función $\langle\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

◇ $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

◇ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

◇ $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

El par $(X, \langle\cdot\rangle)$ se llama *espacio pre-Hilbert*.

Todo producto interior en un espacio vectorial define una norma si consideramos, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, en los espacios pre-Hilbert tenemos la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz la cual asegura que para todo $x, y \in X$, se cumple $\left|\langle x, y \rangle\right| \leq \|x\| \left\|y\right\|$. Si un espacio pre-Hilbert es completo se llamará *espacio de Hilbert*.

Toda norma en X induce una función distancia definida por $d(x, y) = \left\|x - y\right\|$. Por distancia entre un punto y un conjunto entendemos

Definición 1.4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $K \subset X$ un conjunto no vacío. La *distancia* entre K y x es

$$d_K(x) = d(x, K) := \inf_{y \in K} \Big\{ \|y - x\| \Big\}.$$

Definición 1.5. La *proyección métrica* de x sobre un conjunto K no vacío es el conjunto $P_K(x) \subset X$ tal que

$$P_K(x) := \Big\{ k \in K : \|x - k\| = d(x, K) \Big\}.$$

Definición 1.6. Una sucesión $\{x_n\} \subset K$ se dice que es *minimizante* para $x \in X \setminus K$ si $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = d(x, K)$.

Definición 1.7. Un conjunto K no vacío es *proximinal* (respectivamente *Chebyshev*) si $P_K(x) \neq \emptyset$ $\Big($respectivamente $\Big|P_K(x)\Big| = 1\Big)$ para todo $x \in X$.

Definición 1.8. Sean $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|')$ y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es *localmente acotada* en X si para todo $x_0 \in X$ existen $r, M > 0$ tal que si $\|x_0 - x\| \leq r$, entonces $\|f(x)\|' \leq M$.

Una propiedad importante de la función distancia inducida por una norma.

Proposición 1.9. *Sea K un subconjunto no vacío de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Entonces la función distancia para el conjunto K es no expansiva, es decir $\Big|d_K(x) - d_K(y)\Big| \leq \Big\|x - y\Big\|$, por lo que también es continua.*

Demostración. $x, y \in X$ y $k \in K$. Por la desigualdad del triángulo

$$d_K(x) \leq \|x - k\| \leq \Big\|x - y\Big\| + \Big\|y - k\Big\|.$$

Por lo que $d_K(x) - \Big\|x - y\Big\| \leq \Big\|y - k\Big\|$, como k era arbitraria y el lado izquierdo de esta desigualdad no depende de k, entonces $d_K(x) - \Big\|x - y\Big\| \leq d_K(y)$.

Análogamente $d_K(y) - \Big\|x - y\Big\| \leq d_K(x)$, por lo que $\Big|d_K(x) - d_K(y)\Big| \leq \Big\|x - y\Big\|$. Concluimos que la función distancia es no expansiva. □

Demostraremos ahora propiedades básicas de la proyección métrica y la distancia en espacios normados.

Lema 1.10. *Sea K un subconjunto no vacío de un espacio vectorial normado, $(X, \|\cdot\|)$, entonces la proyección métrica es localmente acotada en X.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ fijo y sea $r := 1$ y $M := d_K(x_0) + \|x_0\| + 2$; $y \in P_K(B(x_0, r))$, es decir, $y \in P_K(x)$ para algún $x \in B(x_0, r)$. Considerando que la función distancia al conjunto K es una función no expansiva y la desigualdad del triángulo, tenemos las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
\|y\| = \|y - 0\| &\leq \|y - x_0\| + \|x_0\| \\
&\leq \|y - x\| + \|x - x_0\| + \|x_0\| \\
&= d_K(x) + \|x - x_0\| + \|x_0\| \\
&\leq d_K(x_0) + \|x - x_0\| + \|x - x_0\| + \|x_0\| \\
&< d_K(x_0) + 2 + \|x_0\| = M,
\end{aligned}
$$

entonces $P_K(B(x_0, r)) \subset MB_Y$ y la proyección métrica es localmente acotada en X. □

Proposición 1.11. *$d_K(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{K}$, en consecuencia $P_K(x) = \emptyset$ para toda $x \in \overline{K} \setminus K$.*

Demostración. Sea $x \in \overline{K}$ entonces existe una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ contenida en K que converge a x, luego para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in K$ tal que $\|k_n - x\| < \frac{1}{n}$, entonces $0 = \inf\limits_{y \in K} \{\|y - x\|\}$.

Por otro lado, si $0 = \inf_{y \in K} \{\|y - x\|\}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in K$ tal que $\|k_n - x\| < \frac{1}{n}$, estas k_n forman una sucesión contenida en K que converge a x, por lo tanto $x \in \overline{K}$. □

Proposición 1.12. *Todo conjunto proximinal o Chebyshev es cerrado.*

Demostración. Sea K un subconjunto no cerrado de X, entonces existe una sucesión convergente $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ contenida en K, pero $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = x \notin K$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $d_K(x) \leq \|k_m - x\| < \dfrac{1}{n}$, por lo tanto $d_K(x) = 0$, sin embargo para todo $y \neq x$, $d(x, y) > 0$, por lo que el conjunto no es proximinal ni Chebyshev. □

Es importante observar que sólo debemos analizar los puntos que no están en K ya que para toda $x \in K$, $d_K(x) = 0$ y $\{k\} = P_K(x)$. Una primer cuestión sobre los subconjuntos de X, es si para todo $x \in X \setminus K$ se debe cumplir $P_K(x) \neq \emptyset$, la cual tiene una respuesta negativa, de hecho hay conjuntos para los que $P_K(x) = \emptyset$ para todo $x \in X \setminus K$, estos conjuntos son llamados *antiproximinales*, como la bola abierta de radio uno en el plano euclidiano con la norma usual.

Para aclarar un poco estos conceptos se enlistan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Si $X = \mathbb{R}^2$ con la norma usual, $K = B(0,1)$ no es un conjunto proximinal por no ser cerrado.

Ejemplo 2. Si $X = \mathbb{R}^2$ con la norma usual, $K = B_X$ es un conjunto Chebyshev, ya que para todo $x \in X \setminus K$ y $k \in K$ sabemos que $\|x\| > 1 \geq \|k\|$, por lo tanto

$$\|x-k\| \geq \left|\|x\| - \|k\|\right| = \|x\| - \|k\| \geq \|x\| - 1.$$

De ahí que $d_K(x) \geq \|x\| - 1$, por otro lado $\frac{x}{\|x\|} \in K$ y

$$\left\|x - \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\|x\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| \left|\|x\| - 1\right| = \|x\| - 1.$$

Entonces $\frac{x}{\|x\|} \in P_K(x)$, es decir, K es proximinal, para ver que es Chebyshev supongamos que existe $\frac{x}{\|x\|} \neq y \in K$ para el cual $\|x-y\| = \|x\| - 1$. La norma de y debe ser uno porque $\|x\| - 1 = \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$, lo que implica que $1 \leq \|y\|$, pero $y \in B_X$, así $\|y\| = 1$.

Como $\|x-y\| = \|x\| - 1 = \|x\| - \|y\|$, entonces $\|x-y\| + \|y\| = \|x\| = \|x-y+y\|$, sabemos que eso sucede en $\mathbb{R}^n$ con la norma usual sólo si $x - y = \alpha y$ para alguna α, es decir $x = (\alpha - 1)y$, escribiendo $\beta = \alpha - 1$, entonces $x = \beta y$, por lo que $\|x\| = \left|\beta\right|\left\|y\right\| = \left|\beta\right|$, lo que implica que $\beta = \pm\|x\|$. Como $\frac{x}{\|x\|} \neq y$ entonces $\beta = -\|x\|$ y $y = -\frac{x}{\|x\|}$.Pero en ese caso

$$\begin{aligned} 2\left(\|x\| - 1\right) &= \|x-y\| + \left\|x - \frac{x}{\|x\|}\right\| \\ &\geq \left\|2x - \left(y + \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \\ &= 2\|x\|. \end{aligned}$$

Lo que no es posible, por lo tanto el conjunto es Chebyshev.

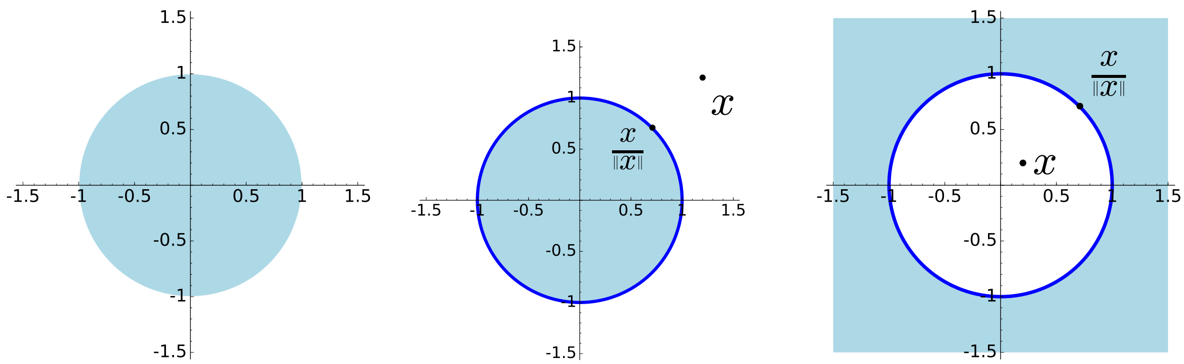
Ejemplo 3. Si $X = \mathbb{R}^2$ con la norma usual, $K = \mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)$, entonces K es proximinal no Chebyshev. Sea $k \in K$ y $x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, entonces $0 \leq \|x\| \leq \|k\|$, por lo tanto

$$\|x-k\| \geq \left|\|x\| - \|k\|\right| = \|k\| - \|x\| \geq 1 - \|x\|.$$

Entonces $d_K(x) \geq 1 - \|x\|$, además para todo $x \neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|} \in K$ y

$$\left\| x - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \|x\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| |1 - \|x\|| = 1 - \|x\|.$$

Así que la distancia se alcanza en $\dfrac{x}{\|x\|}$, pero el conjunto no es Chebyshev porque para $x = 0$, $d_K(0) \geq 1 - \|0\| = 1$ y $\|h - 0\| = 1$ para toda $h \in S_X$.

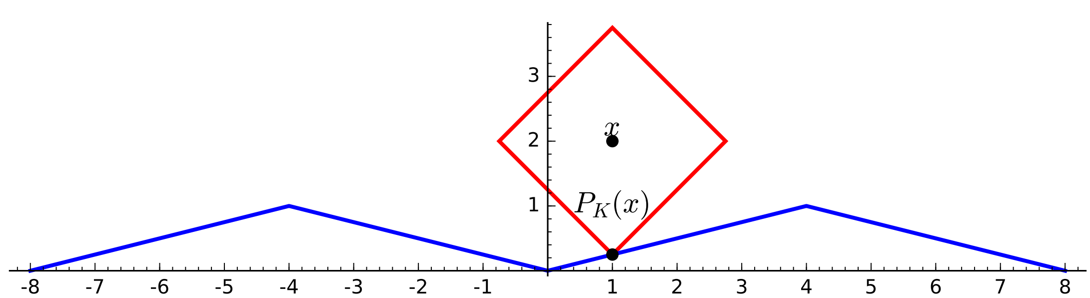


(a) Ejemplo 1. (b) Ejemplo 2. (c) Ejemplo 3.

Ejemplo 4. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(a,b)\| = |a| + |b|$ y

$$K = \left\{ (x,y) : y = \frac{x}{4} - \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \text{ si } x \in [8m, 8m+4) \text{ o } y = 1 - \frac{x}{4} + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \text{si } x \in [8m+4, 8m), m \in \mathbb{Z} \right\},$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x, entonces K es Chebyshev.



(d) Ejemplo 4.

Veamos primero que si $(x_0, y_0) \notin K$ y $x_0 \in [8m, 8m+4]$ entonces $d_K(x_0, y_0) = \left| y_0 - \frac{x_0}{4} + \left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor \right|$, para demostrar estos es suficiente considerar las h tales que $\left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x_0+h}{4} \right\rfloor$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| (x_0, y_0) - \left(x_0 + h, \frac{x_0+h}{4} - \left\lfloor \frac{x_0+h}{4} \right\rfloor \right) \right\| &= |h| + \left| y_0 - \left(\frac{x_0+h}{4} - \left\lfloor \frac{x_0+h}{4} \right\rfloor \right) \right| \\
&= |h| + \left| y_0 - \frac{x_0}{4} + \left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor - \frac{h}{4} \right| \\
&\geq |h| + \left| \left| y_0 - \frac{x_0}{4} + \left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor \right| - \left| \frac{h}{4} \right| \right| \\
&\geq \left| \left| y_0 - \frac{x_0}{4} + \left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor \right| + \left| \frac{3h}{4} \right| \right| \\
&\geq \left| y_0 - \frac{x_0}{4} + \left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor \right|
\end{aligned}$$

Y la igualdad se alcanza cuando $h = 0$. El caso cuando $x_0 \in [8m+4, 8m]$ y $d_K(x_0, y_0) = \left| y_0 - 1 + \frac{x_0}{4} - \left\lfloor \frac{x_0}{4} \right\rfloor \right|$ es similar. Por lo tanto K es Chebyshev.

1.1.1 Convexidad

Una condición muy importante en el presente estudio es la de convexidad

Definición 1.13. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial y K un subconjunto de X. K es *convexo* si para cualquier $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$ se cumple $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$, definida sobre un conjunto convexo K, es *convexa* si para todo $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$; f es *estrictamente convexa* si la desigualdad es estricta para todo $x \neq y$ y $\lambda \in (0,1)$.

Proposición 1.14. *Si K es convexo, entonces $P_K(x)$ es un conjunto convexo.*

Demostración. El resultado es claro si $P_K(x) = \emptyset$ ó $P_K(x)$ consta de un solo elemento. Sean $k_1 \neq k_2$ tal que $k_1, k_2 \in P_K(x)$, entonces $\|x - k_1\| = \|x - k_2\| = d_K(x) > 0$. Si $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \|x - (\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2)\| &= \|x - \lambda k_1 - k_2 + \lambda k_2\| \\ &= \|x - \lambda k_1 - k_2 + \lambda k_2 - \lambda x + \lambda x\| \\ &= \|\lambda(x - k_1) + (1-\lambda)(x - k_2)\| \\ &\leq \lambda \|x - k_1\| + (1-\lambda)\|x - k_2\| \\ &= \lambda d_K(x) + (1-\lambda) d_K(x) \\ &= d_K(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 \in P_K(k)$. □

Corolario 1.15. *Si hay dos elementos distintos en $P_K(x)$ y K es un conjunto convexo, entonces $P_K(x)$ tiene una infinidad de elementos.*

El estudio de la convexidad de conjuntos y funciones, tiene especial relevancia a la hora de la búsqueda de máximos y/o mínimos, así como en el desarrollo de los algoritmos de resolución de los problemas de optimización ya que, como casi todas las funciones convexas se pueden expresar como el supremo puntual de funciones afines, es posible aplicar métodos de resolución eficientes para los problemas de optimización como el del descenso infinito, selección de paso o criterios de tipo "backtracking"([52] y [33]).

En el Ejemplo 4 tenemos un conjunto Chebyshev que no es convexo. Considerando la ventaja de trabajar sobre conjuntos convexos, surge la pregunta ¿bajo qué condiciones un conjunto Chebyshev es convexo? Esta cuestión es uno de los problemas abiertos más importantes en la teoría de la mejor aproximación, para la que se han dado algunas respuestas parciales que se estudiarán más adelante.

La primer restricción que impondremos a las esferas unitarias es que, geométricamente, no contengan segmentos de recta, para ello definimos:

Definición 1.16. Un punto x de un conjunto K es un *punto extremo* de K si no existen $x_1, x_2 \in K$ diferentes y $\lambda \in (0,1)$ tales que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. El conjunto de todos los puntos extremos de K se denotará como $\mathrm{Ext}(K)$.

De la definición es inmediato que todo conjunto K convexo cumple que, si $K \setminus x$ es convexo y $x \in K$, entonces x es un punto extremo.

Definición 1.17. Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es *estrictamente convexo* si $\mathrm{Ext}(B_X) = S_X$.

En la práctica es usual usar algunas definiciones equivalentes a la propiedad de ser estrictamente convexo:

Proposición 1.18. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Es equivalente:*

i) $(X, \|\cdot\|)$ *es estrictamente convexo.*

ii) *Si $x, y \in S_X$ son tales que $\left\|x+y\right\| = 2$, entonces $x = y$.*

iii) *Si $x, y \in X$ y $2\|x\|^2 + 2\left\|y\right\|^2 - \left\|x+y\right\|^2 = 0$, entonces $x = y$.*

iv) *Si $x, y \neq 0$ cumplen $\left\|x+y\right\| = \|x\| + \left\|y\right\|$, entonces $x = \lambda y$ para alguna $\lambda > 0$.*

v) *Para cualesquiera $x \neq y$ y $r, R > 0$ tales que $R + r = \left\|x-y\right\|$, se cumple que*

$$B[x,r] \cap B[y,R] = \{z\}.$$

Donde $z = \left(\dfrac{R}{R+r}\right)x + \left(\dfrac{r}{R+r}\right)y.$

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$: Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo y existen $x_1, x_2 \in S_X$ tales que $x_2 \neq x_1$ y $\left\|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right\| = 1$, entonces $\dfrac{x_1+x_2}{2} \in S_X$ y $\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{x_2}{2} \in B_X$, por definición $x_1, x_2 \notin \mathrm{Ext}(B_X)$ lo que es una contradicción.

$ii) \Rightarrow i)$: Debido a que todo $x \in B_X \setminus (S_X \cup \{0\})$ cumple que

$$x = \|x\| \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + (1 - \|x\|)\, 0,$$

si $x = 0$, para cualquier $y \in S_X$, $0 = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2}(-y)$, entonces $\operatorname{Ext}(B_X) \subset S_X$.

Si existe $x \in S_X$ que no es un punto exterior de B_X entonces existen $x_1, x_2 \in B_X$ diferentes y $\alpha \in (0,1)$ tales que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$, ya que $x \in S_X$ se debe tener que $\|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\| = 1$. Si $x_1 \notin S_X$ o $x_2 \notin S_X$, $\|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\| \leq \alpha \|x_1\| + (1-\alpha)\|x_2\| < \alpha + (1-\alpha) = 1$, que es imposible, luego $x_1, x_2 \in S_X$. Además se cumple $\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| = 1$, ya que:

Si $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y definimos $\beta = 2\alpha - 1 \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta \|x_1\| + (1-\beta) \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| &\geq \left\| \beta x_1 + (1-\beta) \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \\
&= \left\| x_1(2\alpha - 1) + 2(1-\alpha) \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \\
&= \|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\| = 1. \\
&\Rightarrow \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \geq \frac{1 - \beta\|x_1\|}{1-\beta} = 1
\end{aligned}$$

Si $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\beta = 1 - 2\alpha \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta \|x_2\| + (1-\beta) \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| &\geq \left\| \beta x_2 + (1-\beta) \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \\
&= \left\| x_2(1 - 2\alpha) + (2\alpha) \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \\
&= \|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\| = 1. \\
&\Rightarrow \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \geq \frac{1 - \beta\|x_2\|}{1-\beta} = 1
\end{aligned}$$

Por lo que $\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \geq 1$, pero $1 = \frac{1}{2}\|x_1\| + \frac{1}{2}\|x_2\| \geq \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|$, por lo tanto $\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| = 1$. Lo anterior es una contradicción con $ii)$, por tanto $\operatorname{Ext}(B_X) = S_X$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Notemos que

$$\begin{aligned}
2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 &\geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \\
&= \left(\|x\| - \|y\|\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Es decir, si $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 = 0$, entonces $\|x\| = \|y\|$.

Si $2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2=0$ y $x\neq 0$, entonces $\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|x\|}\in S_X$ y

$$2\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2+2\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|^2=0,$$

por lo que

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|=\left(2\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|^2+2\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right)^{1/2}=2.$$

De $ii)$ $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$, además $\|x\|=\|y\|$, por tanto $x=y$.

$iii)\Rightarrow ii)$: Sean $x,y\in S_X$ tales que $\|x+y\|=2$, entonces

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2=4-\|x+y\|^2=4-4=0$$

por lo que $x=y$.

$iv)\Rightarrow ii)$: Si $x,y\in S_X$ y $\|x+y\|=2$; entonces $\|x\|+\|y\|=\|x+y\|$, de esto $x=\lambda y$ con $\lambda>0$, como x y y son de norma uno, entonces $\lambda=1$. Por lo tanto $x=y$.

$ii)\Rightarrow iv)$: Sean $x,y\neq 0$ tales que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0<\|x\|\leq\|y\|$. Entonces

$$\begin{aligned}
2&\geq\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\\
&\geq\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|x\|}\right\|-\left\|\frac{y}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|\\
&=\left(\frac{1}{\|x\|}\right)\|x+y\|-\|y\|\left(\frac{1}{\|x\|}-\frac{1}{\|y\|}\right)\\
&=\left(\frac{1}{\|x\|}\right)(\|x\|+\|y\|)-\|y\|\left(\frac{1}{\|x\|}-\frac{1}{\|y\|}\right)\\
&=2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|=2$ y $\frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$.

$ii) \Rightarrow v)$: Sean $x, y \in X$ distintos y $r, R > 0$ tales que $R + r = \|x - y\|$, entonces

$$\|z - x\| = \left\| \left(\frac{R}{R + r} \right) x + \left(\frac{r}{R + r} \right) y - x \right\| = \left(\frac{r}{R + r} \right) \|x - y\| = r,$$

$$\|z - y\| = \left\| \left(\frac{R}{R + r} \right) x + \left(\frac{r}{R + r} \right) y - y \right\| = \left(\frac{R}{R + r} \right) \|x - y\| = R.$$

Por lo que $z \in B[x, r] \cap B[y, R]$. Supongamos que existen distintos $u, v \in B[x, r] \cap B[y, R]$ y sea $w := \dfrac{u + v}{2}$.

Como $u, v \in B[x, r]$ y $u, v \in B[y, R]$, entonces $\|x - u\| \leq r$, $\|x - v\| \leq r$, $\|y - u\| \leq R$ y $\|y - v\| \leq R$. Si $\|x - u\| < r$ entonces $\|x - y\| \leq \|x - u\| + \|y - u\| < r + R = \|x - y\|$ lo que es una contradicción, por lo tanto $\|x - u\| = r$, análogamente $\|x - v\| = r$.

Ya que $\|x - v\| = \|x - u\| = r$, entonces $\left\| \dfrac{x - u}{r} \right\| = \left\| \dfrac{x - v}{r} \right\| = 1$, $\dfrac{x - v}{r} \neq \dfrac{x - u}{r}$. De $ii)$ tenemos que si $a, b \in S_X$ y $a \neq b$, se tiene que $\|a\| + \|b\| > \|a + b\|$, entonces

$$\left\| \frac{x - w}{r} \right\| = \left\| \frac{x - \frac{u+v}{2}}{r} \right\| = \left\| \frac{\frac{x-v}{r} + \frac{x-u}{r}}{2} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \frac{x - v}{r} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \frac{x - u}{r} \right\| = 1.$$

De lo anterior $\|x - w\| < r$, análogamente podemos probar que $\|y - w\| < R$ y

$$\|x - y\| \leq \|x - w\| + \|w - y\| < r + R = \|x - y\|,$$

que no es posible. Por lo tanto la intersección no puede tener más de un punto y $\{z\} = B[x, r] \cap B[y, R]$.

$v) \Rightarrow ii)$: Supongamos que existen $x \neq y$ en X tales que $\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$ entonces

$$\left\| \frac{x - y}{2} - x \right\| = \left\| \frac{-x - y}{2} \right\| = 1 \text{ y } \left\| \frac{x - y}{2} + y \right\| = \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = 1.$$

Por lo tanto $\left\{ 0, \dfrac{x - y}{2} \right\} \subset B[x, 1] \cap B[-y, 1]$. Por lo que el espacio no cumple $v)$. $\square$

En 1936 Clarkson introdujo el concepto de uniformemente convexo para la norma de los espacios de Banach. Geométricamente una norma es uniformemente convexa si el punto medio de una cuerda de longitud variable en B_X tiende a cero cuando la cuerda se aproxima a la frontera.

Definición 1.19. Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice *uniformemente convexo* si para todo ϵ, $0 < \epsilon \leq 2$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x, y \in B_X$,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta \text{ implica que } \left\|x-y\right\| < \epsilon$$

o, equivalentemente

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta \text{ cuando } \left\|x-y\right\| \geq \epsilon.$$

Un concepto más débil que el anterior es ser localmente uniformemente estrictamente convexo, en términos geométricos es similar a ser uniformemente convexo pero con uno de los extremos de la cuerda fijo en la frontera.

Definición 1.20. La norma $\|\cdot\|$ de un espacio de Banach es *localmente uniformemente convexa o localmente uniformemente rotunda (LRU)* si para todo $x \in S_X$ y $\{x_n\} \subset B_X$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x+x_n\|^2\right) = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.

Es claro que si la norma es LRU entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ cuando $x_n, x \in S_X$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n + x\| = 2$. Por lo que todo espacio LRU es estrictamente convexo. Sin embargo el recíproco no es válido.

Ejemplo 5. Definamos la norma $|||\cdot|||$ en $C[0,1]$ como $|||x|||^2 = \|x\|_\infty^2 + \|x\|_2^2$, con $\|\cdot\|_\infty$ la norma del supremo en $C[0,1]$ y $\|\cdot\|_2$ la norma de $L_2[0,1]$. Esta norma no es LRU en $C[0,1]$ ya que si consideramos la función $x(t) = 1$ y las funciones $x_n(t)$ que se forman al ‶pegar″el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ y el que une $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ con $(1,1)$, entonces

$$\sup_{t\in[0,1]} x(t) = \sup_{t\in[0,1]} x_n(t) = 1, \ \sup_{t\in[0,1]} (x(t) + x_n(t)) = 2, \ \sup_{t\in[0,1]} (x_n(t) - x(t)) = 1,$$

$$\int_0^1 x_n^2(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2t^2dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 1dt = \left.\frac{n^2t^3}{3}\right|_{t=0}^{\frac{1}{n}} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{3n},$$

$$\int_0^1 \left(x(t) + x_n(t)\right)^2(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} (nt+1)^2\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 2^2dt = \left.\left(\frac{n^2t^3}{3} + nt^2 + t\right)\right|_{t=0}^{\frac{1}{n}} + 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 4 - \frac{5}{3n}, \quad \text{y}$$

$$\int_0^1 \left(x_n(t)-x(t)\right)^2(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} (nt-1)^2\,dt = \left(\frac{n^2t^3}{3} - nt^2 + t\right)\Bigg|_{t=0}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3n}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} 2|||x|||^2 + 2|||x_n|||^2 - |||x+x_n|||^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(2(2) + 2\left(2-\frac{2}{3n}\right) - \left(8-\frac{5}{3n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = 0,\end{aligned}$$

sin embargo $\lim_{n\to\infty} |||x_n - x||| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right) = 1$.

Por otro lado, si $2|||x|||^2 + 2|||y|||^2 - |||x+y|||^2 = 0$, entonces $2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 - \|x+y\|_2^2 = 0$ y como $\|\cdot\|_2$ es estrictamente convexa porque $L_2[0,1]$ es un espacio de Hilbert [17], $x = y$. Por la Proposición 1.18 *iii*), la norma $|||\cdot|||$ es estrictamente convexa.

Una equivalencia muy útil a ser uniformemente convexo en términos de sucesiones es.

Proposición 1.21. *Un espacio de Banach* $(X,\|\cdot\|)$ *es uniformemente convexo si y sólo si para todo par de sucesiones* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *en* B_X *si* $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - y_n\right\| = 0.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que el espacio es uniformemente convexo y $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$. Si $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-y_n\right\| \neq 0$, existen subsucesiones $\left\{x_{n_k}\right\}\subset\{x_n\}$ y $\left\{y_{n_k}\right\}\subset\{y_n\}$ tales que $\left\|x_{n_k}-y_{n_k}\right\| \geq \epsilon$ para alguna $\epsilon > 0$. Ya que el espacio es uniformemente convexo, existe $\delta > 0$ tal que para toda n_k a partir de un cierto índice $\left\|\frac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2}\right\| \leq 1-\delta$, por lo tanto

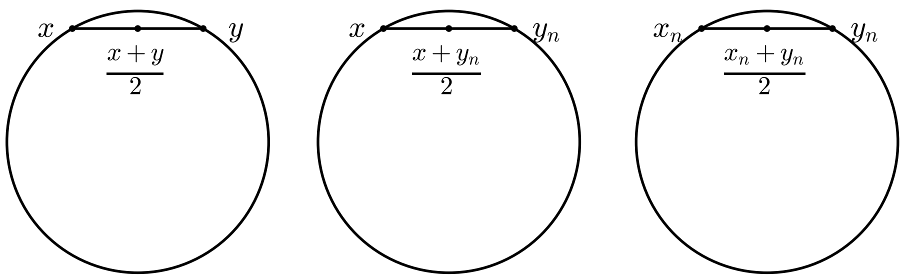
$$\lim_{n_k\to\infty}\left\|\frac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2}\right\| \leq 1-\delta < 1$$

lo que es una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que $(X,\|\cdot\|)$ no es uniformemente convexo, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ existen x_n, $y_n \in B_X$ tales que

$$\left\|x_n-y_n\right\| \geq \epsilon \text{ y } \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| > 1-\delta_n = 1-\frac{1}{n}.$$

Con estos puntos podemos definir las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, éstas cumplen $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| = 1$, además para toda $n\in\mathbb{N}$ $\left\|x_n-y_n\right\| > \epsilon$, por lo que $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-y_n\right\| \geq \epsilon \neq 0$. □



(a) Estrictamente convexo. (b) LRU. (c) Uniformemente convexo.

Con esta equivalencia podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.22. *Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo. Todo espacio estrictamente convexo y de dimensión finita es uniformemente convexo.*

Demostración. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio uniformemente convexo y $x_0, y_0 \in X$ tales que

$$\|x_0\| = \|y_0\| = \left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\| = 1.$$

Supongamos que $x_0 \neq y_0$, sea $\epsilon > 0$ tal que $\|x_0 - y_0\| > \epsilon$, existe $\delta > 0$ con la propiedad de que para todo $x, y \in S_X$,

$$\|x-y\| \geq \epsilon \text{ implica que } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

Como $\|x_0 - y_0\| > \epsilon$ se cumple que $\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\| \leq 1-\delta < 1$, pero esto es contradictorio, por tanto el espacio es estrictamente convexo.

Por otro lado, sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de dimensión finita estrictamente convexo y $\{x_n\}, \{y_n\} \subset B_X$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$. Como X es de dimensión finita B_X es compacto, por lo que existen subsucesiones $\{x_{n_k}\}$ y $\{y_{n_k}\}$ convergentes a x y y respectivamente. Entonces $\lim\limits_{n_k\to\infty} \|x_{n_k} + y_{n_k}\| = \|x+y\| = 2$.

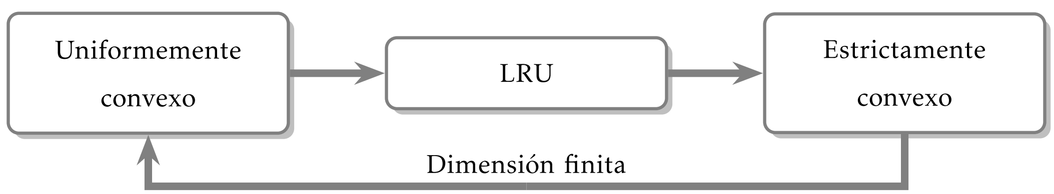
$$2 = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2.$$

Por lo que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| = 2$, es decir $\|x\| = \|y\| = 1$. Como el espacio es estrictamente convexo $y = x$, por lo que $\lim\limits_{n_k\to\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0$.

Si suponemos que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|$ no es cero, entonces existen $\epsilon > 0$ y subsucesiones $\{x_{n_i}\}$ y $\{y_{n_i}\}$ tales que $\left\|x_{n_j} - y_{n_j}\right\| > \epsilon$ para $j \in \mathbb{N}$, pero al tomar subsubsucesiones convergentes, éstas deben converger a x' y y', con un desarrollo análogo al anterior tenemos que esos límites deben ser iguales, que es una contradicción con el hecho de que $\left\|x_{n_j} - y_{n_j}\right\| > \epsilon$, luego $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

□

La relación entre los diferentes tipos de convexidad se observa en el siguiente diagrama.



1.1.2 Compacidad

Desde principios del siglo XX se trató de extender algunas propiedades de los intervalos cerrados y acotados que eran cruciales para la demostración de ciertos teoremas como el de valor medio o la continuidad uniforme. De este modo surge el concepto de compacidad que en espacios métricos está determinado por sucesiones.

Definición 1.23. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y K un subconjunto de X. K es *compacto* si toda sucesión $\{k_n\}$ contenida en K contiene una subsucesión convergente a un punto $k \in K$.

Un concepto relacionado con la compacidad que surge en el estudio de la mejor aproximación es el siguiente:

Definición 1.24. Un conjunto K es *aproximativamente compacto* si para toda $x \in X$ y toda sucesión $\{x_n\}$ contenida en K tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = d_K(x)$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_m}\right\}$ que converge a un elemento $k_0 \in K$.

De las definiciones tenemos que todo compacto es aproximativamente compacto. Sin embargo la inversa no es, en general, verdadera. Por ejemplo:

Ejemplo 6. Consideremos el conjunto $X = \mathbb{Z}$ con la norma $\|x - y\| = \left|x - y\right|$.

Esta norma genera la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Consideremos $K = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces para $x < 1$

$$d_K(x) = \inf_{n\in K} \left\{\|x - n\|\right\} = \|x - 1\|.$$

Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión minimizante en K, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \|x - 1\|$. Pero si $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\|x - m\| = \|x - 1\| + \|1 - m\| \geq \|x - 1\| + 1,$$

por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ se cumple que $x_n = 1$ y la sucesión converge a $1 \in K$.

Si $m \in K$, como la distancia entre m y K es cero y $\|n - m\| \geq 1$ para todo $n \in K \setminus \{m\}$, toda sucesión minimizante debe ser constante eventualmente.

Por lo tanto K es aproximativamente compacto, pero K es un conjunto no acotado en $\mathbb{Z}$ con la topología discreta, por lo que no puede ser compacto.

Definición 1.25. Un subconjunto K es *acotadamente compacto* si para toda $r \in \mathbb{R}$ positiva $K \cap B[0,r]$ es compacto.

Es claro que compacto implica acotadamente compacto, si consideramos al conjunto $\mathbb{R}$ con la norma usual, es acotadamente compacto, pero no es compacto, además:

Proposición 1.26. *Todo conjunto K acotadamente compacto es aproximativamente compacto.*

Demostración. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $x \in X$ y $\{x_n\} \subset K$ una sucesión minimizante para x, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es acotada, sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\} \subset B[0,M]$, como K es acotadamente compacto, $K \cap B[0,M]$ es compacto, al tener una sucesión contenida en un compacto, entonces debe tener una subsucesión convergente. □

De la definición es claro que todo conjunto aproximativamente compacto es proximinal, sin embargo, no todo conjunto proximinal es aproximativamente compacto como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7. Consideremos al espacio $X = \ell^2 = \left\{ \{x_n\} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ con el producto interno definido por $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ y la norma $\|\cdot\|_2$ inducida por este producto interno. Si $K = \left\{ x = \{x_n\} \in \ell^2 : \|x\|_2 = 1 \right\}$, entonces K es proximinal ya que

$$d_K(0) = \inf_{y \in K} \{\|0 - y\|_2\} = \inf_{y \in K} \{\|y\|_2\} = 1.$$

Así $P_K(0) = K$. Si $x \neq 0$ y $x \notin K$, entonces $\frac{x}{\|x\|_2} \in K$ y

$$\left\| x - \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \left| 1 - \frac{1}{\|x\|_2} \right| \|x\|_2 = \big| \|x\|_2 - 1 \big|.$$

Si consideramos $-\dfrac{x}{\|x\|_2} \in K$

$$\left\| x - \left(-\frac{x}{\|x\|_2} \right) \right\|_2 = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \big(\|x\|_2 + 1 \big) \right\|_2$$
$$\geq \big| \|x\|_2 - 1 \big|.$$

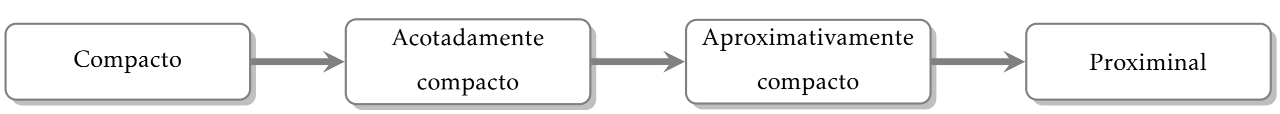
Finalmente si $y \in K$ y $y \neq \pm \dfrac{x}{\|x\|_2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| x - y \right\|_2 &= \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)} \\
&= \sqrt{\|x\|_2^2 - 2(x\cdot y) + \left\| y \right\|_2^2} \\
&\geq \sqrt{\|x\|_2^2 - 2\left| x \cdot y \right| + 1} \\
&\geq \sqrt{\|x\|_2^2 - 2\|x\|_2 \left\| y \right\|_2 + 1} \\
&= \sqrt{\|x\|_2^2 - 2\|x\|_2 + 1} \\
&= \sqrt{(\|x\|_2 - 1)^2} \\
&= \big| \|x\|_2 - 1 \big|.
\end{aligned}$$

Así concluimos que $d_K(x) = \big| \|x\|_2 - 1 \big|$, por lo que K es proximinal.

Sin embargo K no es aproximativamente compacto, basta considerar la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0 \ldots)$ donde el 1 está en la n-ésima posición, $\|x_n\|_2 = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|0 - x_n\|_2 = 1 = d_K(0)$,es decir, la sucesión es minimizante, pero no tiene una subsucesión convergente ya que para cualesquiera $n \neq m$ se tiene $\|x_n - x_m\|_2 = \sqrt{2}$.

De las proposiciones y ejemplos anteriores tenemos



1.1.3 Topología débil y dualidad

El espacio de las funciones lineales continuas tiene estructura de espacio vectorial con la suma y producto definidos punto a punto, es decir:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Para este espacio tenemos la siguiente proposición:

Teorema 1.27. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces el espacio vectorial de las funciones lineales continuas $x^* : X \to \mathbb{R}$ es un espacio normado, con la norma*

$$\|x^*\|_* = \sup_{x \in S_X} \left|x^*(x)\right|.$$

Este espacio se denota X^*, y se le llama el espacio dual de X.

Demostración. La continuidad de x^* nos asegura que $\|x^*\|_*$ está bien definida, ya que $(x^*)^{-1}(-1,1)$ es un abierto V alrededor de 0, por lo que existe $r > 0$ tal que $B[0,r] \subset B(0,2r) \subset V$. Si $\|x\| \leq r$, entonces $\|x^*(x)\|_* \leq 1$. En particular $\left\| \frac{xr}{\|x\|} \right\| = r$, por lo que $\left\| x^* \left(\frac{xr}{\|x\|} \right) \right\|_* = \frac{r}{\|x\|} \|x^*(x)\|_* \leq 1$, por lo tanto $\|x^*(x)\|_* \leq \frac{\|x\|}{r}$ para toda $x \in X$.

La propiedad $\|\lambda x^*\|_* = \left|\lambda\right| \cdot \|x^*\|_*$ es inmediata de la definición. La subaditividad de los supremos asegura la desigualdad del triángulo, y por último, si $\|x^*\|_* = 0$ entonces $x^*(x) = 0$ para todo $x \in S_X$, y por la linealidad de x^*, para todo $x \in X \setminus \{0\}$

$$x^*(x) = \|x\| \, x^* \left(\frac{x}{\|x\|} \right) = 0.$$

se sigue que $x^* = 0$. □

Cuando no se preste a confusión usaremos la notación $\|x^*\|_* = \|x^*\|$. Además la norma del espacio dual cumple que

$$\left|x^*(x)\right| = \left| x^* \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| \cdot \|x\| \leq \sup_{x \in S_X} \left|x^*(x)\right| \cdot \|x\| = \|x^*\|_* \cdot \|x\|. \tag{1.1}$$

Un teorema importante en el estudio de conjuntos convexos es el Teorema de Hahn-Banach [48].

Teorema 1.28. *(Hahn 1927-Banach 1929) Sea X un espacio vectorial, provisto de una función $v : X \to \mathbb{R}$ que verifica*

- ◇ $v(x+y) \leq v(x) + v(y)$ *para todo* $x, y \in X$,
- ◇ $v(rx) = rv(x)$ *para todo* $r > 0$ *y* $x \in X$.

Sea M un subespacio vectorial de X y $g : M \to \mathbb{R}$ una función lineal en M tal que $g(m) \leq v(m)$ para todo $m \in M$. Entonces existe un funcional lineal $f : X \to \mathbb{R}$ en X que extiende a g, es decir, $f(m) = g(m)$ para toda $m \in M$ y $f(x) \leq v(x)$ para toda $x \in X$.

Si v es una norma, se tiene $|f(x)| \leq v(x)$ para toda $x \in X$.

Como consecuencia de este teorema tenemos:

Proposición 1.29. *Si$(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $x \in X$, entonces existe una función lineal continua x^* tal que $x^*(x) = \|x\|$ y $\|x^*\|_* = 1$.*

Demostración. El resultado es claro si $x = 0$. Sean $x \neq 0$ y M el subespacio generado por x, definimos $g : M \to \mathbb{R}$ como $g(\lambda x) = \lambda\|x\|$; y $v(x) = \|x\|$ para todo $x \in X$, por el Teorema 1.28 existe x^* tal que $x^*(x) = g(x)$ para toda $x \in M$ y $x^*(x) \leq \|x\|$ para toda $x \in X$, es decir $\|x^*\|_* = 1$. □

Y las versiones geométricas del mismo:

Definición 1.30. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y un funcional lineal $x^* \in X^*$, no nulo y no necesariamente acotado, se define el *hiperplano* afín H como $H_\alpha = H_{\alpha,x^*} := \{x \in X : x^*(x) = \alpha\}$.

Teorema 1.31. *(Teorema de Hahn-Banach/Primera versión geométrica) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $A, B \subset X$ subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, tales que A es abierto. Entonces existen una función lineal $x^*(x)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el hiperplano $x^*(x) = \alpha$ separa ampliamente a A y B, es decir*

$$x^*(a) \leq \alpha \text{ para todo } a \in A \quad y \quad x^*(b) \geq \alpha \text{ para todo } b \in B.$$

Teorema 1.32. *(Teorema de Hahn-Banach/Segunda versión geométrica) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $A, B \subset X$ subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, tales que A es cerrado y B es compacto. Entonces existen* *una función lineal $x^*(x)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el hiperplano $x^*(x) = \alpha$ separa estrictamente A y B, es decir, existe $\epsilon > 0$*

$$x^*(a) \leq \alpha - \epsilon \text{ para todo } a \in A \quad y \quad x^*(b) \geq \alpha + \epsilon \text{ para todo } b \in B.$$

Así como se ha definido el dual de un espacio normado, también podemos definir el dual del dual (el bidual o doble dual):

$$(X^*)^* = X^{**}.$$

Este espacio es importante debido a que existe una función isométrica del espacio X en X^{**}

Proposición 1.33. *Si $x \in X$ y $x^* \in X^*$, entonces el elemento x define una función lineal $\varphi_x \in X^{**}$ que actúa sobre el punto x^* como $\varphi_x(x^*) = x^*(x)$.*

Más aun, la función $J_X : X \to X^{**}$ tal que $J_X(x) = \varphi_x$ es una isometría.

Demostración. Es claro que φ_x es lineal, para ver que es continua supongamos que x_n^* converge a x^* en X^*, entonces la desigualdad (1.1) nos asegura que

$$\left|\varphi_x(x_n^*) - \varphi_x(x^*)\right| = \left|x_n^*(x) - x^*(x)\right| = \left|(x_n^* - x^*)(x)\right| \leq \|x_n^* - x^*\| \cdot \|x\|.$$

Que tiende a cero cuando n tiende a infinito, de lo que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_x(x_n^*) = \varphi_x(x^*) = \varphi_x\left(\lim_{n\to\infty} x_n^*\right).$$

Por lo tanto $\varphi_x \in X^{**}$, además

$$\|\varphi_x\| = \sup_{x^* \in S_{X^*}} \left|\varphi_x(x^*)\right| \leq \sup_{x^* \in S_{X^*}} \|x^*\| \cdot \|x\|_X = \|x\|_X$$

lo que implica que $\|\varphi_x\| \leq \|x\|_X$. Pero el teorema de Hahn-Banach 1.29 nos asegura que existe una función $x^* \in X^*$ con $\|x^*\|_* = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$, lo que prueba que el supremo se alcanza y por ende $\|\varphi_x\| = \|x\|_X$. □

La función J_X Se llama *inclusión canónica* de X en X^{**}. Esta funcióm no tiene porque ser sobreyectiva.

Definición 1.34. Un espacio de Banach es *reflexivo* cuando la inclusión canónica es una función sobreyectiva, es decir J_X es un isomorfismo isométrico entre X y X^{**}.

Aquí hay que aclarar que la isometría entre X y su dual debe ser la canónica, en 1951 James [28] presentó un ejemplo de espacio de Banach que es isométricamente isomorfo a su bidual, pero no es reflexivo. El conjunto de funciones lineales de un espacio en el campo sobre el que actúa induce una topología:

Definición 1.35. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La topología inducida por el dual, es decir la topología más débil para la cual todos los elementos de X^* son continuos. Ésta se trata de la topología engendrada por la familia $\tau := \left\{(x^*)^{-1}(U) : \ x^* \in X^*, U \text{ abierto en } \mathbb{R}\right\}$, que no es otra que la formada por uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de τ, es decir V es un abierto en esta topología si

$$V = \left\{y \in X : \left|x_i^*(y-x)\right| < \epsilon, i \in I\right\},$$

donde $x_i^* \in X^*$, $\epsilon > 0$ e I un conjunto finito. Esta topología se llama *topología débil*. Se suele denotar a este espacio topológico como X_w, a sus abiertos se les llama débilmente abiertos, a sus cerrados débilmente cerrados, etc.

Como está definida la topología débil en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, decimos que una sucesión $\{x_n\}$ contenida en X converge débilmente a x si para cualquier abierto débil, V, de x existe N tal que para toda $n \geq N$, $x_n \in V$, aunque esta es la definición de convergencia débil, no es usual trabajar con ella. Una equivalencia de ésta es:

Proposición 1.36. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, x_n una sucesión contenida en X, y $x \in X$. Decimos que x_n converge débilmente a x y lo denotamos $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $x^*(x_n)$ converge a $x^*(x)$ para toda $x^* \in X^*$.*

Demostración. $\Rightarrow$) sea $x^* \in X^*$, como x^* es continua respecto a la topología débil, que x_n converja débilmente a x implica que $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(\lim_{n\to\infty} x_n) = x^*(x)$.

$\Leftarrow$) Sea V un débilmente abierto de x en X_w. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$V = \left\{y \in X : \left|x_i^*(y-x)\right| < \epsilon, i \in I\right\}$$

donde $\epsilon > 0$, I un conjunto finito, y $x_i^* \in X^*$ para toda $i \in I$. Como $\lim_{n\to\infty} x_i^*(x_n) = x_i^*(x)$ para cada $i \in I$, tenemos que para $i \in I$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $\left|x_i^*(x_n - x)\right| < \epsilon$ para cada $n \geq N_i$. Sea $N = \max_{i\in I}\{N_i\}$. Entonces $x_n \in V$ para todo $n \geq N$, por lo que x_n converge débilmente a x. $\square$

Otra topología importantes es:

Definición 1.37. La *topología débil estrella* en el espacio dual X^* es la topología más pequeña que contiene como abiertos a todos los conjuntos de la forma

$$U = \left\{x^* \in X^* : \left|(x^* - x_0^*)(x_i)\right| < \epsilon, i \in I\right\},$$

donde $x_0^* \in X^*$, $x_i \in X$, $\epsilon > 0$ e I un conjunto finito de índices.

De manera análoga a la Proposición 1.36 se puede demostrar que

Proposición 1.38. *$\{x_n^*\} \in X^*$ converge en la topología débil estrella $\left(x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*\right)$ si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x),$$

es decir, la topología débil estrella es lo mismo que la convergencia puntual.

La principal utilidad de las topología débil y débil estrella radica en que tienen muchos conjuntos compactos, esto al coste de disminuir el número de conjutos abiertos, en particular, en [13] tenemos:

Teorema 1.39. *(Banach-Alaoglu) En un espacio de Banach, $(X, \|\cdot\|)$, B_{X^*} es compacta con la topología w^*.*

Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea cerrado con la topología débil estrella y acotado en norma es compacto con la topología débil estrella. Combinando el teorema anterior con [22]:

Teorema 1.40. *(Eberlein-Š̃mulian) Sea A un subconjunto de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces es equivalente:*

- *A es débilmente compacto.*
- *A es débilmente secuencialmente compacto (si dada una sucesión $\{x_n\}$ en A, existe una subsucesión $\{x_{n_m}\}$ que converge débilmente a un punto de A)*
- *A es débilmente contablemente compacto (todo recubrimiento abierto y contable de A es reducible a un recubrimiento finito)*

se puede demostrar que

Corolario 1.41. *Un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si la bola unitaria es débilmente compacta.*

1.1.4 Diferencial y derivada

Ahora nos interesa incorporar el concepto de dierivabilidad para funciones definidas sobre espacios de Banach.

Definición 1.42. Sean un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, un abierto U en X, $x \in U$, $h \in S_X$ y una función $f : U \to \mathbb{R}$. Si el límite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

existe y es finito, éste se conoce como la Gâteaux derivada direccional de f en x con dirección h y lo denotaremos como $f'(x,h)$. Si $f'(x,h)$ existe para toda $h \in S_X$ y $f'(x,h)$ es una función lineal continua, f es Gâteaux diferenciable en x y a $f'(h) = f'(x,h)$ la llamaremos la Gâteaux diferencial de f en x.

En la definición anterior es inmediato demostrar que si f es Gâteaux diferenciable en x, entonces la diferencial es homogénea, es decir $f'(\alpha h) = \alpha f'(h)$, de este modo podemos extender el concepto de Gâteaux diferenciabilidad a todo el espacio.

Definición 1.43. Sean un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, un abierto U en X, $x \in U$ y una función $f : U \to \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciable, si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

es uniforme para $h \in S_X$. Llamamos a $f'(h)$ la Fréchet diferencial de f en x.

En particular la norma es una función que puede ser Fréchet o Gâteaux diferenciable en $X \setminus \{0\}$.

Ejemplo 8. El espacio de las sucesiones de números reales $\ell^1 := \left\{ x = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}, x_n \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$ con la norma $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Veamos que la norma es una función Gâteaux diferenciable en x si y sólo si todas las coordenadas de x son no nulas, además, la norma no es Fréchet diferenciable.

En efecto, tomemos los vectores canónicos $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Si la norma es Gâteaux diferenciable en un punto $x \in \ell^1$ entonces la función $\varphi_k(t) : \|x + te_k\| = |x_k + t| + \sum_{i \neq k} |x_i|$ es Gâteaux diferenciable en $t = 0$, por lo tanto x_k debe ser diferente de cero para cada k.

Ahora veamos que si $x \in \ell^1$ es un punto con todas las entradas no nulas, entonces la norma en x es Gâteaux diferenciable. Como la norma no se ve afectada si cambiamos el signo de alguna de las entradas de x, podemos suponer que x_i es positivo para toda $i \in \mathbb{N}$. Fijemos un punto $u \in S_{\ell^1}$, para todo $t > 0$ tenemos

$$\frac{\|x+tu\|-\|x\|}{t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i + tu_i| - |x_i|}{t}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $0 < t < \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, como $|u_i| \leq 1$, entonces $0 \leq t|u_i| \leq t < x_i$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces $x_i + tu_i > 0$. Esto nos permite escribir

$$\frac{\|x+tu\|-\|x\|}{t} = \sum_{i=1}^{n} u_i + \epsilon_n(t),$$

donde $\epsilon_n(t) = \displaystyle\sum_{i>n} \frac{|x_i + tu_i| - x_i}{t}$. Observemos que $|\epsilon_n(t)| \leq \displaystyle\sum_{i>n} \frac{|x_i + tu_i - x_i|}{t} = \sum_{i>n} |u_i|$, tomando limite cuando t tiende a cero tenemos $f'(x,u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \lambda_n$ con $\lambda_n = \lim\limits_{t \to 0^+} \epsilon_n(t)$. Es claro que λ_n tiende a cero cuando n tiende a infinito, por lo que $f'(x,u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

Nos resta demostrar que la norma no es Fréchet diferenciable para toda x. Consideremos el vector $h_n = -2x_n e_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y observemos que $\|h_n\| = 2x_n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, si $\|\cdot\|$ fuera Fréchet diferenciable en x, entonces tendríamos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x+h_n\| - \|x\| - f'(x,h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|-x_n| - x_n + 2x_n}{2x_n} = 1,$$

lo que es una contradicción.

Lema 1.44. *Si f es una función convexa, entonces* $\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$ *es no decreciente para* $t>0$

Demostración. Sean f convexa y $0<t_1<t_2$, como

$$x+t_1h=\left(\frac{t_2-t_1}{t_2}\right)x+\left(\frac{t_1}{t_2}\right)(x+t_2h) \text{ y } \left(\frac{t_2-t_1}{t_2}\right)+\frac{t_1}{t_2}=1,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x+t_1h) &\le \left(\frac{t_2-t_1}{t_2}\right)f(x)+\frac{t_1}{t_2}f(x+t_2h) \Leftrightarrow \\ f(x+t_1h)-f(x) &\le \frac{-t_1f(x)+t_1f(x+t_2h)}{t_2} \Leftrightarrow \\ f(x+t_1h)-f(x) &\le \frac{t_1}{t_2}\left(f(x+t_2h)-f(x)\right) \Leftrightarrow \\ \frac{f(x+t_1h)-f(x)}{t_1} &\le \frac{f(x+t_2h)-f(x)}{t_2}. \end{aligned}$$

Por lo que la función $\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$ es no decreciente para $t>0$. □

Si aplicamos este lema a $-h\in S_X$, entonces $-\dfrac{f(x-th)-f(x)}{t}$ es una función no creciente para $t>0$, además, ya que f es convexa, se tiene que $f(x)\le\dfrac{f(x-th)}{2}+\dfrac{f(x+th)}{2}$, por lo tanto $2f(x)\le f(x-th)+f(x+th)$, reordenando y dividiendo entre t tenemos

$$-\frac{f(x-th)-f(x)}{t}\le\frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Por lo que los límites laterales $F^+(h)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$ y $F^-(h)=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$ existen y son finitos, además $F^+(h)\ge F^-(h)$ y $\dfrac{f(x+th)+f(x-th)-2f(x)}{t}\ge0$ para todo $t>0$.

Lema 1.45. *Sea f una función convexa sobre un subconjunto abierto U de un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ continua en un punto $x\in U$. Entonces f es Fréchet diferenciable en x si y solo si*

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+th)+f(x-th)-2f(x)}{t}=0$$

uniformemente para $h\in S_X$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es Fréchet diferenciable, se cumple que $F^+(h)=F^-(h)$ para toda $h\in S_X$, si $t>0$ entonces

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t}-\frac{f(x-th)-f(x)}{-t}=\frac{f(x+th)+f(x-th)-2f(x)}{t}$$

de lo que podemos afirmar que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+th)+f(x-th)-2f(x)}{t} = F^+(h)-F^-(h) = 0$$

uniformemente para $h \in S_X$.

$\Leftarrow$) Si el límite es 0, entonces $F^+ = F^-$. Así $F = F^+ = F^-$ es un funcional. Debemos probar que es acotado, como f es continuo en x, existe $\delta, \epsilon > 0$ tal que $f(z) \leq \epsilon$ cuando $z \in x + \delta B_X$. Para toda $h \in S_X$ y $\left|t\right| \leq \delta$, por el Lema 1.44

$$\frac{f(th+x)-f(x)}{t} \leq \frac{f(\delta h+x)-f(x)}{\delta} < \frac{\epsilon - f(x)}{\delta}.$$

Entonces $F(h) \leq \dfrac{\epsilon - f(x)}{\delta}$ para toda $h \in S_X$. $\square$

Análogamente se puede demostrar el siguiente lema.

Lema 1.46. *Sea f una función convexa sobre un conjunto abierto U de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ continua en un punto $x \in U$. f es Gâteaux diferenciable si y sólo si para toda $h \in S_X$ $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+th)+f(x-th)-2f(x)}{t} = 0$.*

Usando el hecho de que la Fréchet diferencial es uniforme en S_X y el cambio de variable $y = th$ nos permite escribir

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = F(h) \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - F(h) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)-tF(h)}{t} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-F(y)}{\|y\|} = 0.$$

Que es otra forma de escribir la Fréchet diferencial. Ahora podemos demostrar el siguiente teorema

Teorema 1.47. *(Šmulian) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $x \in S_X$.*

i) Es equivalente

1. *$\|\cdot\|$ es Fréchet diferenciable en x.*
2. *Si $x_n^*,\ y_n^* \in S_{X^*}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \left\|x_n^* - y_n^*\right\| = 0$.*
3. *Si $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 1$ y $\{x_n^*\} \subset S_{X^*}$, entonces $\{x_n^*\}$ es una sucesión convergente .*

ii) Es equivalente

1. $\|\cdot\|$ *es Gâteaux diferenciable en* x.

2. *Si* $x_n^*,\ y_n^* \in S_{X^*}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$, *entonces* $x_n^* - y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ *en* X^*.

3. *Existe una única* $x^* \in S_{X^*}$ *tal que* $x^*(x) = 1$.

Demostración. *i*) $1 \Rightarrow 2$) Sea $\|\cdot\|$ una norma Fréchet diferenciable en $x \in S_X$, $\epsilon > 0$, por el Lema 1.45 existe $\delta > 0$ tal que $\|x+h\| + \|x-h\| \leq 2 + \epsilon\|h\|$ cuando $\|h\| \leq \delta$.

Sean $x_n^*,\ y_n^* \in S_{X^*}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$. Si tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ se cumple que $\max\left\{|x_n^*(x)-1|, \left|y_n^*(x)-1\right|\right\} < \epsilon\delta$, entonces, para $n > n_0$ y $\|h\| \leq \delta$ tenemos

$$\begin{aligned}
(x_n^* - y_n^*)(h) &= x_n^*(x+h) + y_n^*(x-h) - x_n^*(x) - y_n^*(x) \\
&\leq \|x+h\| + \|x-h\| - x_n^*(x) - y_n^*(x) \\
&\leq 2 - x_n^*(x) - y_n^*(x) + \epsilon\|h\| \\
&\leq |1 - x_n^*(x)| + \left|1 - y_n^*(x)\right| + \epsilon\|h\| \leq 3\epsilon\delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $n > n_0$ se cumple

$$\left\|x_n^* - y_n^*\right\| = \sup_{\|u\|=1} (x_n^* - y_n^*)(u) = \sup_{\|u\|=1} \frac{(x_n^* - y_n^*)(\delta u)}{\delta} \leq \frac{3\epsilon\delta}{\delta} = 3\epsilon$$

y ya que ϵ era arbitrario $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|x_n^* - y_n^*\right\| = 0$.

$2 \Rightarrow 1$) Por contradicción, si suponemos que $\|\cdot\|$ no es Fréchet diferenciable en $x \in S_X$. Ya que $\dfrac{\|x+th\| + \|x-th\| - 2}{t} > 0$ para toda $t > 0$ y, por el Lema 1.45, existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $\delta > t_\delta > 0$ y $h_\delta \in S_X$ tales que

$$\frac{\|x + t_\delta h_\delta\| + \|x - t_\delta h_\delta\| - 2}{t_\delta} \geq \epsilon,$$

podemos construir una sucesión $\{t_n h_n\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} |t_n| = 0$ y $h_n \in S_X$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x + t_n h_n\| + \|x - t_n h_n\| \geq 2 + \epsilon\|t_n h_n\|$,

Por el Teorema 1.29, podemos elegir $x_n^*,\ y_n^* \in S_{X^*}$ tales que $x_n^*(x + t_n h_n) = \|x + t_n h_n\|$ y $y_n^*(x - t_n h_n) = \|x - t_n h_n\|$. Notemos que $|x_n^*(t_n h_n)| \leq |t_n|$ y $\left|\|x + h_n\| - \|x\|\right| \leq |t_n|$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así $x_n^*(t_n h_n)$ tiende a 0 y $\|x + t_n h_n\|$ a 1 cuando n tiende a infinito. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x_n^*(x + t_n h_n) - x_n^*(t_n h_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\|x + t_n h_n\| - x_n^*(t_n h_n)\right) = 1.$$

Análogamente $\lim_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$.

Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} \left\|x_n^* - y_n^*\right\| = 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned}(x_n^* - y_n^*)(t_n h_n) &= x_n^*(x + t_n h_n) + y_n^*(x - t_n h_n) - (x_n^* + y_n^*)(x)\\ &\geq \|x + t_n h_n\| + \|x - t_n h_n\| - 2 \geq \epsilon \|t_n h_n\|.\end{aligned}$$

De lo que concluimos $\left\|x_n^* - y_n^*\right\| \geq \epsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

$2 \Rightarrow 3)$ Sea una sucesión $\{x_n^*\} \subset S_{X^*}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 1$, por el Teorema (1.29), existe $y^* \in X^*$ tal que $y^*(x) = 1$ y $\left\|y^*\right\| = 1$. Sea la sucesión $\{y_n^*\} \subset S_{X^*}$ tal que $y^* = y_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando la hipótesis, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x_n^* - y_n^*\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|x_n^* - y^*\right\| = 0.$$

Por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n^* = y^*$.

$3 \Rightarrow 2)$ consideremos dos sucesiones $x_n^*,\ y_n^* \in S_{X^*}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$, definamos la sucesión $\{h_n\}$ tal que $h_n(y) = x^*_{\frac{n+1}{2}}(y)$ para valores impares de n y $h_n = y^*_{\frac{n}{2}}$ para valores pares de n, de este modo

$$h_{2n} = y_n^* \in S_{X^*} \qquad \text{y} \qquad h_{2n-1} = x_n^* \in S_{X^*}.$$

Lo anterior implica que $h_n \in S_{X^*}$, y $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$, por la hipótesis, existe una función $h(x) \in S_{X^*}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\| = 0$. Entonces

$$\left\|x_n^* - y_n^*\right\| = \|h_{2n-1} - h_{2n}\| \leq \|h_{2n-1} - h\| + \|h_{2n} - h\|$$

que converge a cero cuando n tiende a infinito.

ii) $1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene Gâteaux diferencial en $x \in S_X$. Fijemos $y \in S_X$ y $\epsilon > 0$. Por el Lema 1.46, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t \leq \delta$, entonces

$$\left\|x + ty\right\| + \left\|x - ty\right\| < 2 + \epsilon t.$$

Sean $x_n^*,\ y_n^* \in S_X$, $n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$, entonces

$$x_n^*(x + ty) + y_n^*(x - ty) \leq \left\|x + ty\right\| + \left\|x - ty\right\| < 2 + \epsilon t. \tag{1.2}$$

Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, $\max\left\{\left|1 - x_n^*(x)\right|, \left|1 - y_n^*(x)\right|\right\} \leq \epsilon\delta$. Entonces, despejando en (1.2)

$$t\left(x_n^*(y) - y_n^*(y)\right) < -x_n^*(x) - y_n^*(x) + 2 + \epsilon t + \leq 3\epsilon\delta.$$

Por lo tanto $\left(x_n^*(y) - y_n^*(y)\right) \leq 3\epsilon$.

Análogamente $\left(y_n^*(y) - x_n^*(y)\right) \leq 3\epsilon$, de este modo $\left|x_n^*(y) - y_n^*(y)\right| \leq 3\epsilon$.

Por lo que para y fija, $\lim_{n\to\infty}\left(y_n^*(y) - x_n^*(y)\right) = 0$. Como eso se cumple para cada $y \in S_X$, $y_n^* - x_n^* \overset{w^*}{\to} 0$.

$2 \Rightarrow 1$) Por contradicción, si suponemos que $\|\cdot\|$ no es Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$. El Lema 1.45 nos asegura que existen $\epsilon > 0$, $y \in S_X$ y una sucesión $\left\{t_n\right\}$ de términos positivos que converge a cero, tales que

$$\left\|x + t_n y\right\| + \left\|x - t_n y\right\| \geq 2 + \epsilon t_n.$$

Elegimos x_n^*, $y_n^* \in S_{X^*}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$x_n^*(x + t_n y) \geq \|x + t_n y\| - \frac{t_n}{n} \qquad \text{y} \qquad y_n^*(x - t_n y) \geq \|x + t_n y\| - \frac{t_n}{n}.$$

Por lo tanto

$$x_n^*(x + t_n y) + y_n^*(x - t_n y) \geq 2 + \epsilon t_n - 2\frac{t_n}{n} \geq 2 + \left(\epsilon - \frac{2}{n}\right)t_n.$$

Esto implica que

$$t_n(x_n^* - y_n^*)(y) \geq 2 - x_n^*(x) - y_n^*(x) + \left(\epsilon - \frac{2}{n}\right)t_n \geq \left(\epsilon - \frac{2}{n}\right)t_n,$$

de donde podemos concluir que

$$\left(x_n^* - y_n^*\right)(y) \geq \epsilon - \frac{2}{n} > \epsilon. \tag{1.3}$$

Por otro lado, ya que

$$1 \geq x_n^*(x) = x_n^*(x + t_n y) - x_n^*(t_n y) \geq \|x + t_n y\| - \frac{t_n}{n} - x_n^*(t_n y) \geq 1 - t_n\|y\| - \frac{t_n}{n} - t_n\|y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

obtenemos que $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 1$. De manera análoga, $\lim_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1$. Lo anterior es una contradicción entre la hipótesis y (1.3).

$2 \Rightarrow 3$) Sea $x \in S_X$, el teorema de Hahn Banach 1.29 nos garantiza que existe un funcional $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. Sea $y^* \in S_{X^*}$ tal que $y^*(x) = 1$, tomemos $x_n^* = x^*$ y $y_n^* = y^*$ para cada

$n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 1 = \lim_{n\to\infty} y_n^*(x)$, por hipótesis $\lim_{n\to\infty} (x^* - y^*)(z) = 0$ para cada $z \in S_X$, por lo tanto $x^* = y^*$.

$3 \Rightarrow 2$) Consideremos $\left\{x_n^*\right\}$ y $\left\{y_n^*\right\}$ sucesiones contenidas en S_{X^*} tales que

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n^*(x) = 1.$$

Por hipótesis existe una única $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$, por lo que $\left\{x_n^*\right\}$ y $\left\{y_n^*\right\}$ deben converger a x^*, así para toda $y \in X$, $\lim_{n\to\infty} (x_n^* - y_n^*)(y) = x^*(y) - x^*(y) = 0$. Entonces $x_n^* - y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. $\square$

Definición 1.48. Un espacio $(X, \|\cdot\|)$ es *suave* si para cada $x \in S_X$ existe un único $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$.

Una aplicación directa del Teorema (1.47), es el siguiente resultado:

Proposición 1.49. *Es equivalente ser suave y que la norma sea Gâteaux diferenciable en todo vector no nulo.*

Por lo que se suele decir que la norma es suave si es Gâteaux diferenciable en todo vector no nulo.

Corolario 1.50. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\|\cdot\|^*$ su norma dual. Si $\|\cdot\|^*$ es estrictamente convexo (suave), entonces $\|\cdot\|$ es suave (estrictamente convexo).*

Demostración. Primero supongamos que $\|\cdot\|^*$ es estrictamente convexo. Debemos probar que para $x \in S_X$ existe un único $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. Sea $x \in S_X$ y $x^*, y^* \in S_{X^*}$ tales que $x^*(x) = y^*(x) = 1$. Observemos que

$$2 \geq \left\|x^* + y^*\right\| \geq (x^* + y^*)(x) = 2,$$

entonces $\left\|x^* + y^*\right\|^* = 2$. Por la convexidad estricta de $\|\cdot\|^*$ concluimos que $x^* = y^*$.

Ahora supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ no es estrictamente convexo, entonces existen $x \neq y$ tales que $\|x\| = \left\|y\right\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Por el Teorema de Hahn-Banach 1.31 existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$. Por lo tanto $1 = x^*\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x^*(x)}{2} + \frac{x^*(y)}{2}$. Como $x^*(x) \leq 1$ y $x^*(y) \leq 1$, entonces $x^*(x) = x^*(y) = 1$.

Sean $\varphi_x, \varphi_y \in S_{X^{**}}$ funciones definidas como en la Proposición 1.33, éstas cumplen que

$$\varphi_x(x^*) = x^*(x) = 1 = x^*(y) = \varphi_y(x^*).$$

Como $\varphi_x \neq \varphi_y$ y ambos están en $S_{x^{**}}$, entonces el espacio no puede ser suave. $\square$

Corolario 1.51. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio Banach reflexivo. Entonces* $(X, \|\cdot\|)$ *es estrictamente convexo (suave) si y sólo si* $(X, \|\cdot\|^*))$ *es suave (estrictamente convexo).*

Corolario 1.52. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\|\cdot\|^*$ *la norma del dual de* X*. Si* $\|\cdot\|^*$ *es LRU, entonces* $\|\cdot\|$ *es Fréchet diferenciable.*

Demostración. Sea $x \in S_X$, y escojamos $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. Sean $x_n^* \in S_{X^*}$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = 1$. Tenemos

$$2 \geq \|x^* + x_n^*\|^* \geq (x^* + x_n^*)(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \left(2\|x_n^*\|^{*2} + 2\|x^*\|^{*2} - \|x^* + x_n^*\|^{*2}\right) = 0$ y por ser $\|\cdot\|^*$ LRU, $\lim_{n\to\infty} \|x_n^* - x^*\|^* = 0$. Por el Teorema 1.47 $\|\cdot\|$ es Fréchet diferenciable. □

1.2 Conjuntos proximinales

Como dijimos en la Proposición 1.12 un conjunto proximinal debe ser cerrado, el recíproco, que demostraremos más adelante, se cumple en todo conjunto cerrado no vacío de un espacio de Minkoswki (espacio de Banach de dimensión finita), de hecho esta es una caracterización de estos espacios. Aparte de este resultado solo se tiene el Teorema 2.36, que nos asegura que en ciertos espacios los conjuntos cerrados no vacíos son casi proximinales, es decir el conjunto de puntos que no tiene mejor aproximación es de medida nula. Por lo que, en general, se necesita más que ser un conjunto cerrado para ser proximinal. En esta sección estudiamos algunas condiciones de suficiencia para que un conjunto K sea proximinal.

Proposición 1.53. *Todo conjunto no vacío aproximativamente compacto de un espacio normado es proximinal.*

Demostración. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $K \subset X$ un subconjunto no vacío aproximativamente compacto. Consideremos $x \in X \setminus K$, por la definición de $d_K(x)$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset K$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = d_K(x)$, como K es aproximativamente compacto podemos extraer una subsucesión $\left\{x_{n_m}\right\}$ que converge a un elemento $y \in K$, de esto y que la norma sea continua tenemos

$$\left\|y - x\right\| = \left\|\lim_{m\to\infty} x_{n_m} - x\right\| = \lim_{m\to\infty} \left\|x_{n_m} - x\right\| = d_K(x).$$

□

Corolario 1.54. *Todo conjunto acotadamente compacto es proximinal, en particular todo conjunto compacto es proximinal.*

De este corolario se sigue que todo subconjunto no vacío y cerrado de un espacio de Banach de dimensión finita es proximinal, porque en estos espacios todas las bolas cerradas son compactas y la intersección de un cerrado con un compacto es vacía o compacta.

Corolario 1.55. *Sea un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subset X$ el subespacio vectorial generado por los elementos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, sea $x \in X \setminus K$, entonces existe la mejor aproximación de x con respecto a K .*

Demostración. Sea K' es espacio vectorial generado por $K \cup \{k\}$, entonces K es cerrado en K' que es un espacio de dimensión finita. □

Una consecuencia de este hecho es que en el espacio de las funciones continuas

$$C([a,b]) := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

siempre existe la mejor aproximación a un subespacio de dimensión finita, como lo es el espacio de los polinomios de grado a lo más n.

Teorema 1.56. *(Teorema clásico de Riesz.) Sea Y un subespacio propio cerrado de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|x - y\| > \frac{1}{2}$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $x' \in X \setminus Y$, por ser Y cerrado $\inf_{y \in Y} \|y - x'\| = d > 0$. Sea $y_0 \in Y$ tal que $\|x' - y_0\| < 2d$. Definimos $y' = x' - y_0$. Entonces $\|y'\| < 2d$, además $\|y' - y\| \geq d$ para todo $y \in Y$, por lo que $\|y' - y\| \geq d > \frac{\|x' - y_0\|}{2}$ es decir

$$\left\| \frac{x' - y_0}{\|x' - y_0\|} - \frac{y}{\|x' - y_0\|} \right\| = \frac{\|y' - y\|}{\|x' - y_0\|} > \frac{1}{2}.$$

Entonces $x = \frac{x' - y_0}{\|x' - y_0\|}$ cumple que $\|x\| = 1$ y $\|x - y\| > \frac{1}{2}$ para todo $y \in Y$. □

Corolario 1.57. *En todo espacio de dimensión infinita existe una sucesión $\{x_n\} \subset S_X$, tal que $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ para todo $n \neq m$.*

Teorema 1.58. *En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe un conjunto cerrado no vacío K y un punto $x \in X \setminus K$ tal que x no tiene un punto más cercano en K.*

Demostración. Del Corolario 1.57 sabemos que existe una sucesión de elementos $\{x_n\}$ de norma uno tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$. Sea

$$K := \{(1 + 2^{-n})x_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}\},$$

El conjunto K es cerrado porque para todo $2 < n < m$

$$\begin{aligned}
\|(1 + 2^{-m})x_m - (1 + 2^{-n})x_n\| &= \|(1 + 2^{-m})x_m - (1 + 2^{-n})x_n + (2^{-m})x_n - (2^{-m})x_n\| \\
&= \|(1 + 2^{-m})(x_m - x_n) - (2^{-n} - 2^{-m})x_n\| \\
&\geq \left| (1 + 2^{-m})\|(x_m - x_n)\| - (2^{-n} - 2^{-m})\|x_n\| \right| \\
&\geq (1 + 2^{-m})\frac{1}{2} - (2^{-n} - 2^{-m}) \\
&> \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} > \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Así que toda sucesión convergente de elementos de K es constante a partir de un momento. Pero, para toda $n \in \mathbb{N}$, $d_K(0) = \inf \|(1 + 2^{-n})x_n\| = 1 < \|0 - (1 + 2^{-n})x_n\|$. □

Corolario 1.59. *Todo espacio de Banach es finito dimensional si y sólo si todo subconjunto no vacío cerrado es proximinal.*

Proposición 1.60. *Todo subespacio reflexivo de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es proximinal.*

Demostración. Consideremos un subespacio reflexivo $K \subset X$, sea $x \notin K$ y $\{k_n\} \subset K$ una sucesión minimizante para x, la sucesión $\left\{\|k_n - x\|\right\}$ es una sucesión convergente, por lo que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|k_n - x\| \leq M$. De la desigualdad

$$\|k_n\| \leq \|k_n - x\| + \|x\| \leq M + \|x\|$$

tenemos que $\{k_n\} \subset B[0, M + \|x\|]$. Ya que el subespacio es reflexivo, por el Corolario 1.41 la bola $B[0, M + \|x\|]$ es débilmente compacta. Entonces existe un y_0 al cuál converge una subsucesión de la sucesión minimizante, y_0 es un punto de mejor aproximación para x desde K. $\square$

Ahora vamos a caracterizar los espacios de Banach reflexivos en términos de sus subconjuntos débilmente cerrados que son proximinales, para ello veamos algunos resultados preliminares. En 1950 R. C. James anunció que un espacio de Banach X con base de Schauder es reflexivo si tiene la propiedad de que cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo en la bola unitaria cerrada de todas las normas equivalentes. El mismo año, V. Klee demostró este resultado sin requerir la existencia de una base. En 1957, James encontró una prueba sofisticada de que si B_X es la bola unitaria de un espacio de Banach separable X, entonces B_X es débilmente compacto (y, por el Corolario 1.41, X es reflexivo) si, y sólo si, cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo en B_X. En 1962, Klee conjeturó que esta propiedad podría caracterizar los conjuntos débilmente cerrados de un espacio de Banach (separable) que son débilmente compactos. Finalmente, en 1964, James publicó el siguiente resultado [13]

Teorema 1.61. *(James, 1964) En un espacio localmente convexo cuasicompleto E (es decir, que todo conjunto cerrado y acotado es completo), un conjunto débilmente cerrado A es débilmente compacto si, y sólo si, todos los funcionales $x^* \in E^*$ alcanzan su supremo en A.*

En particular de este teorema se desprende:

Teorema 1.62. *Un conjunto débilmente cerrado K de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es débilmente compacto si y sólo si todos los $x^* \in X^*$ alcanzan su máximo en K.*

Cuya demostración se puede encontrar en [22].

En 1933, S. Mazur observó que, dado un funcional $x^* \in S_{X^*}$, el hiperplano $H_1 = \{x \in X : x^*(x) = 1\}$ tiene elemento de norma mínima si y sólo si x^* alcanza su supremo en S_X, para demostrarlo veamos que:

Lema 1.63. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $x^* \in S_{X^*}$. Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\inf_{x^*(y)=1} \left\{\|y\|\right\} = \sup_{\|x\|=1} \left\{x^*(x)\right\} = \sup_{\|x\|\leq 1} \left\{x^*(x)\right\} = 1.$$

Demostración. La segunda igualdad es clara, para la primera consideremos $y \in X$ tal que $1 = x^*(y)$, entonces, de la desigualdad 1.1, se tiene que

$$1 = x^*(y) \leq \|x^*\|_* \|y\| = \|y\|.$$

De la definición de norma, para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in S_X$ tal que

$$x^*\left(\frac{x_\epsilon}{x^*(x_\epsilon)}\right) = 1 \quad \text{y} \quad \left\|\frac{x_\epsilon}{x^*(x_\epsilon)}\right\| \leq \frac{1}{1-\epsilon}.$$

Como ϵ fue arbitrario, se sigue que $\inf\limits_{x^*(y)=1} \left\{\|y\|\right\} = \sup\limits_{\|x\|=1} \left\{x^*(x)\right\}$. □

Lema 1.64. *Sea X un espacio normado y $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *x^* alcanza su supremo en B_X*

b) *Para un (y en consecuencia para cada) $\alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano $H_\alpha = \{x \in X : x^*(x) = \alpha\}$ es proximinal*

Demostración. Tomemos $x_0 \notin H_\alpha$ y $z \in H_\alpha$, sea

$$y = \frac{x_0 - z}{x^*(x_0) - \alpha}, \tag{1.4}$$

aplicando norma

$$\left\|y\right\| = \left\|\frac{x_0 - z}{x^*(x_0) - \alpha}\right\| = \frac{\|x_0 - z\|}{|x^*(x_0) - \alpha|},$$

por lo que

$$\left\|y\right\| |x^*(x_0) - \alpha| = \|x_0 - z\|.$$

Como $x^*(z) = \alpha$, aplicando x^* a la igualdad (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} x^*(y) = x^*\left(\frac{x_0 - z}{x^*(x_0) - \alpha}\right) &= \frac{x^*(x_0 - z)}{x^*(x_0) - \alpha} \\ = \frac{x^*(x_0) - x^*(z)}{x^*(x_0) - \alpha} &= \frac{x^*(x_0) - \alpha}{x^*(x_0) - \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado si suponemos que $x^*(y) = 1$ y $z \in X$, de la igualdad (1.4), tenemos

$$1 = x^*(y) = x^*\left(\frac{x_0 - z}{x^*(x_0) - \alpha}\right) = \frac{x^*(x_0) - x^*(z)}{x^*(x_0) - \alpha},$$

entonces $\alpha = x^*(z)$, es decir, $z \in H_\alpha$.

De lo anterior deducimos que

$$\inf_{x^*(z)=\alpha}\left\{\|x_0 - z\|\right\} = \inf_{x^*(y)=1}\left\{\left|x^*(x_0) - \alpha\right|\|y\|\right\} = \left|x^*(x_0) - \alpha\right| \inf_{x^*(y)=1}\left\{\|y - 0\|\right\}.$$

Por lo tanto, la existencia de la mejor aproximación para x_0 en H_α equivale a la existencia de la mejor aproximación de 0 a H_1. De esta observación y el Lema 1.63 la demostración se sigue inmediatamente. □

Como corolario del Lema 1.64 y el Teorema 1.62 tenemos:

Corolario 1.65. *Para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Todos los subconjuntos débilmente cerrados de X son proximinales.*

ii) *Todos los hiperplanos cerrados de X son proximinales.*

iii) *X es reflexivo.*

Demostración. Es claro que *i)⇒ ii)*.

ii)⇒ iii) Por el Lema 1.64 se tiene que todo funcional $x^* \in X^*$ alcanza su norma en B_X, por el Teorema 1.62, B_X es débilmente compacta y, por lo tanto, $(X, \|\cdot\|)$ es reflexivo.

iii ⇒ i) Si consideramos un conjunto débilmente cerrado Y de X, $x \in X \setminus Y$ y un punto $y_0 \in Y$ tal que $\|x - y_0\| \geq d(x, Y)$, entonces los puntos de mejor aproximación de x a Y están contenidos en la bola $B\left[x, \|x - y_0\|\right]$. Sea $\{y_n\}$ una sucesión minimizante, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B\left[x, \|x - y_0\|\right]$ para toda $n > N$; por el Teorema 1.41, $B\left[x, \|x - y_0\|\right]$ es compacto, por lo que y_n tiene una subsucesión convergente a un punto y, este punto y es una mejor aproximación de x a Y. □

Como corolario del Teorema 1.62 también tenemos:

Corolario 1.66. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, si la norma del espacio dual es Fréchet diferenciable entonces X es reflexivo.*

Demostración. Considerando el encaje definido en la Proposición 1.33, si $x^* \in S_{X^*}$ y $x_n \in S_X$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_{x_n}(x^*) = 1$, por el Teorema 1.47, $\{\varphi_{x_n}\}$ es convergente en X^{**} por lo que $\{x_n\}$ es convergente en X, es decir x^* alcanza su norma y, por el Teorema 1.62, X es reflexivo. □

En particular los subespacios de dimensión finita son reflexivos por ser su propio dual, por lo tanto son proximinales. También lo son los subespacios cerrados de un espacio reflexivo.

Sabemos que no todos los subespacios tienen porque ser cerrados, por ejemplo los números racionales como subespacio de los reales sobre el campo de los racionales son un subespacio que no es cerrado. Otro ejemplo de un subespacio que no es cerrado es:

Ejemplo 9. Sea c_0 el espacio de las sucesiones $x = \{x_n\}$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ con la norma $\|x\| = \max_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$. Consideremos el subespacio K de c_0 de las x tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} = 0$, entonces K no es un subespacio proximinal en c_0.

Para probar la afirmación consideremos $y = \{y_n\} \in c_0 \setminus K$, llamemos $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|y\|}{2^i} = \|y\| < \infty$. Tomemos

$$z_i = \frac{-2^i}{2^i - 1}(\underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{i \text{ entradas}}, 0, 0, \ldots) + \{y_n\}.$$

Primero veamos que $z_i \in K$. La suma de los elementos definida por z_i es

$$\sum_{j=1}^{i} \left(\frac{-2^i}{2^i - 1}\right)\frac{\lambda}{2^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{2^j} = \left(\frac{-2^i}{2^i - 1}\lambda\right)\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^j} + \lambda = \left(\frac{-2^i}{2^i - 1}\lambda\right)\frac{2^i - 1}{2^i} + \lambda = 0.$$

Además $\lim_{i\to\infty} \|z_i - y\| = \lim_{i\to\infty} \frac{2^i}{2^i - 1}|\lambda| = |\lambda|$, de esto $d_K(y) \leq |\lambda|$. Supongamos que existe $x = \{x_i\} \in K$ tal que $\|x - y\| \leq |\lambda|$, como $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty}\{y_n\} = 0$, podemos encontrar N

suficientemente grande tal que para todo $i \geq N$ se cumple que $\left|x_i - y_i\right| \leq \frac{|\lambda|}{2}$. En ese caso

$$|\lambda| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i}\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - x_i + x_i}{2^i}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - x_i}{2^i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - x_i}{2^i}\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i - x_i}{2^i}\right| + \left|\sum_{i=N}^{\infty} \frac{y_i - x_i}{2^i}\right| \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\left|y_i - x_i\right|}{2^i} + \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\left|y_i - x_i\right|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\lambda|}{2^i} + \sum_{i=N}^{\infty} \frac{|\lambda|}{2^i(2)} =$$

$$|\lambda|\left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}}\right) < |\lambda|.$$

Por lo tanto K es un subespacio no es cerrado ni proximinal.

Otra consecuencia del Corolario 1.65 es que todo subconjunto cerrado y convexo K de un espacio de Banach reflexivo es proximinal, para demostrar esto basta ver que estos conjuntos son débilmente cerrados.

Lema 1.67. *Sea K un subconjunto convexo cerrado de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces K es débilmente cerrado*

Demostración. Si K es vacío o $K = X$ entonces es débilmente cerrado, por lo que supondremos que $\emptyset \neq K \neq X$. Sea $x_0 \in X \setminus K$, como K es cerrado y convexo y $x_0 \notin K$ por el Teorema de Hahn-Banach 1.32 existe una $f_{x_0} \in X^*$ tal que

$$f_{x_0}(x_0) > \sup_{x \in K} f_{x_0}(x).$$

Entonces

$$x_0 \in f_{x_0}^{-1}\left(\sup_{x \in K}\left(f_{x_0}(x)\right), \infty\right)$$

es decir, x_0 está en la imagen inversa de un abierto del funcional f_{x_0} (por lo que x_0 está en un débilmente abierto), como la unión arbitraria de débilmente abiertos es débilmente abierta y

$$X \setminus K = \bigcup_{x_0 \in X \setminus K} f_{x_0}^{-1}\left(\sup_{x \in K}\left(f_{x_0}(x), \infty\right)\right),$$

entonces, $X \setminus K$ es débilmente abierto. □

Corolario 1.68. *Todo conjunto cerrado convexo de un espacio de Banach reflexivo es proximinal.*

1.3 Conjuntos Chebyshev

En 1961, Efimov y Stechkin demostraron que todo conjunto débil* cerrado y convexo de un espacio de Banach con dual LRU es Chebyshev [19], posteriormente Day demuestra que todo conjunto cerrado y convexo en un espacio estrictamente convexo es Chebyshev, resultado que podemos encontrar en [50], esta es una de las propiedades más usadas para saber cuando un conjunto es Chebyshev. Esto también es cierto si sustituimos ser estrictamente convexo por uniformemente convexo, la importancia de esta afirmación recae en el amplio uso de espacios uniformemente y estrictamente convexos, por ejemplo:

Proposición 1.69. *Todo espacio con producto interior es uniformemente convexo*

Demostración. Sean $(X, \langle\cdot\rangle)$ un espacio con producto interior y $\epsilon > 0$. Si $x, y \in B_X$ y $\|x-y\| \geq \epsilon$, como $\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2$, entonces $\epsilon \leq 2$. Tomemos $\delta := 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4-\epsilon^2} > 0$. Por la ley del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2,$$

por lo tanto

$$\|x+y\|^2 \leq 4 - \|x-y\|^2 \leq 4 - \epsilon^2 = 4(1-\delta)^2,$$

entonces, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$, y $(X, \langle\cdot\rangle)$ es uniformemente convexo. □

Corolario 1.70. *Todos los espacios de Hilbert son uniformemente convexos.*

Otros espacios importantes con esta propiedad son los espacios vectoriales de las sucesiones de números reales que convergen. Para $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio ℓ^p como

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n : n \in \mathbb{N}\},\ x_n \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Éstos son espacios de Banach cuando se les dota de la norma $\|\cdot\|_p$ definida por $\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para toda $x = \{x_n\} \in \ell^p$.

Muy relacionados con estos, tenemos a los espacios L^p. Considerando que dos funciones son iguales si lo son salvo en un conjunto de medida nula, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de medida finita en el sentido Lebesgue y $1 \leq p < \infty$ definimos

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f\ f \text{ Lebesgue integable}, \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}.$$

Estos espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach con la norma $\|\cdot\|_p$

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para toda } f \in L^p(\Omega).$$

En [34] se demuestra que los espacios ℓ^p y L^p con $1 < p < \infty$ son espacios reflexivos con duales ℓ^q y L^q, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Para demostrar que estos espacios son uniformemente convexos utilizaremos las desigualdades de Clarkson [26].

Lema 1.71. *(Desigualdades de Clarkson) Sean $1 < p, q < \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Si $f, g \in \left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$, entonces

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) \text{ si } 2 \leq p < \infty \tag{1.5}$$

y

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{q-1} \text{ si } 1 < p \leq 2. \tag{1.6}$$

Si $x, y \in \ell^p$, entonces

$$\left\|x+y\right\|_p^p + \left\|x-y\right\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|x\|_p^p + \left\|y\right\|_p^p\right) \text{ si } 2 \leq p < \infty,$$

y

$$\left\|x+y\right\|_p^q + \left\|x-y\right\|_p^q \leq 2\left(\|x\|_p^p + \left\|y\right\|_p^p\right)^{q-1} \text{ si } 1 < p \leq 2.$$

Lema 1.72. *(Clarkson) Sea $1 < p < \infty$. Los espacios $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ y los espacios $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ son uniformemente convexos.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $f, g \in B_{L^p}$ tales que $\|f-g\|_p \geq \epsilon$ y $\epsilon \leq 2$.

Si $p \geq 2$ y $\delta := 1 - \sqrt[p]{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p} > 0$, por la desigualdad (1.5) se cumple que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) - \|f-g\|_p^p \\
&\leq 2^p - \|f-g\|_p^p \\
&\leq 2^p - \epsilon^p \\
&= 2^p(1-\delta)^p.
\end{aligned}$$

Si $1 < p \leq 2$ y $\delta := 1 - \sqrt[q]{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^q} > 0$, por la desigualdad (1.6) se cumple que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^q &\leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{q-1} - \|f-g\|_p^q \\
&\leq 2^q - \|f-g\|_p^q \\
&\leq 2^q - \epsilon^q \\
&= 2^q (1-\delta)^q .
\end{aligned}$$

En ambos casos tenemos que $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1-\delta$, por lo que el espacio L^p es uniformemente convexo. El caso de los espacios ℓ^p es análogo. □

Los espacios L^p son ampliamente utilizados en las matemáticas por ejemplo en las transformadas de Fourier, los espacios de Hilbert (que son fundamentales para muchas aplicaciones, desde la mecánica cuántica hasta el cálculo estocástico), en estadísticas donde las medidas de tendencia central y dispersión, como la media , la mediana y la desviación estándar , se definen en términos de L^p-*métricas*, etc.

Dado el amplio número y uso de espacios de Banach estrictamente o uniformemente convexos las Proposiciones 1.73 y 1.74 tienen especial interés.

Proposición 1.73. *Todo subconjunto convexo y proximinal K de un espacio de Banach estrictamente convexo $(X, \|\cdot\|)$ es Chebyshev.*

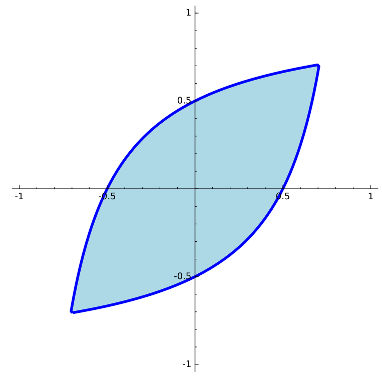
Demostración. Supongamos que $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in P_K(X)$ para alguna $x \in X$. Entonces $\|k_1 - x\| = \|k_2 - x\| = d_K(x)$, de lo que

$$\left\|\frac{1}{2}(k_1+k_2) - x\right\| \leq \frac{1}{2}\|k_1 - x\| + \frac{1}{2}\|k_2 - x\| = d_K(x).$$

Como K es convexo, $\frac{1}{2}(k_1+k_2) \in K$, entonces $\left\|\frac{1}{2}(k_1+k_2) - x\right\| \geq d_K(x)$. Por lo tanto $\frac{k_1+k_2}{2} \in P_K(x)$.

De esta forma $\frac{k_1 - x}{\|k_1 - x\|} \neq \frac{k_2 - x}{\|k_2 - x\|}$ y $\frac{k_1 - x}{\|k_1 - x\|}, \frac{k_2 - x}{\|k_2 - x\|} \in S_X$, pero $\frac{\frac{1}{2}(k_1+k_2) - x}{\left\|\frac{1}{2}(k_1+k_2) - x\right\|} = 1$ por lo que la norma no es estrictamente convexa. □

Ejemplo 10. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\| = |x-y| + \sqrt{x^2+y^2}$ y K la bola cerrada de norma uno. Por la Proposición 1.68, K es un conjunto proximinal, además es un subconjunto de un espacio con norma estrictamente convexa, por la Proposición 1.73, K es un conjunto Chebyshev en X.



Proposición 1.74. *Todo subconjunto K no vacío, convexo y proximinal de un espacio de Banach uniformemente convexo $(X, \|\cdot\|)$, es Chebyshev.*

Demostración. Inmediato de las Proposiciones 1.73 y 1.22. □

De estos resultados, por ejemplo, se tiene que todo conjunto cerrado, no vacío y convexo en un espacio de dimensión finita estrictamente convexo es Chebyshev.

Otra condición que garantiza que un conjunto proximinal es Chebyshev está relacionada con el complemento métrico, el cuál fue utilizado por Day cuando mostró que ℓ^∞ no tiene una norma suave equivalente a su norma usual, su demostración se basa, en parte, a las propiedades del conjunto de vectores unitarios en el complemente métrico del conjunto c_0 definido en el Ejemplo 9. Argumentos usuales han sido usados para estudiar la existencia de una norma equivalente suave en algunos espacios.

Definición 1.75. Sea K un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, el *complemento métrico*, $\widehat{K}$ es el conjunto

$$\widehat{K} := \left\{x \in X : \|x\| = d_K(x)\right\}.$$

Ejemplo 11. Sean el espacio $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\|_1$ definida como $\left\|(x,y)\right\|_1 = |x| + \left|y\right|$ y $K = \{(x,y) : y = x\}$.

Dado que $\left\|(x,y)\right\|_1 = \left\|(x,y) - (0,0)\right\|_1 = |x| + \left|y\right|$ y $(0,0) \in K$ entonces $d_K((x,y)) \le \left\|(x,y)\right\|_1$.

Si $x \geq 0 \geq y$ o $y \geq 0 \geq x$, entonces para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\left\|(x,y)\right\|_1 = |x| + \left|y\right| = \left|x - y\right| \leq |x - \alpha| + \left|y - \alpha\right|$$

en particular para la α que minimiza la distancia de (x,y) a K $\left(d_K(x) = \left\|(\alpha,\alpha) - (x,y)\right\|_1\right)$, que debe existir porque K es proximinal por ser cerrado y no vacío en un espacio de dimensión finita, luego $\left\|(x,y)\right\|_1 \leq d_K((x,y))$, es decir $\left\|(x,y)\right\|_1 = d_K((x,y))$.

Si $x,\ y > 0$ o $x,\ y < 0$, entonces

$$\begin{aligned}\left\|(x,y)\right\|_1 &= |x| + \left|y\right| = \left|x + y\right| > \left|x - y\right| \\ &= \left\|(0, x - y)\right\|_1 = \left\|(x,x) - (x,y)\right\|_1 \geq d_K((x,y)).\end{aligned}$$

Así que $\widehat{K} = \left\{(x,y) : xy \leq 0\right\}$.

Proposición 1.76. *Sean un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *y un subespacio* $K \subset X$ *, si* $x \in X$*,* $k \in K$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces* $P_K(\lambda x + k) = \lambda P_K(x) + \{k\}$*. En particular si* $P_K(x) = \emptyset$*, entonces* $\lambda P_K(x) + \{k\} = \emptyset$*.*

Demostración. Sean $x \in X$, $k \in K$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, primero observemos que

$$d_K(\lambda x + k) = \inf_{y \in K} \left\|(\lambda x + k) - y\right\| = \left|\lambda\right| \inf_{z \in K} \left\|x - z\right\| = \left|\lambda\right| d_K(x).$$

Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial, supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} y \in P_K(\lambda x + k) &\Leftrightarrow \|y - (\lambda x + k)\| = d_K(\lambda x + k) \\ &\Leftrightarrow |\lambda| \left\|\left(\frac{y - k}{\lambda}\right) - x\right\| = |\lambda| d_K(x) \\ &\Leftrightarrow \left\|\left(\frac{y - k}{\lambda}\right) - x\right\| = d_K(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{y - k}{\lambda} \in P_K(x) \\ &\Leftrightarrow y \in \lambda P_K(x) + k. \end{aligned}$$

□

Lema 1.77. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* K *un subespacio de* X, $\widehat{K}$ *cumple:*

i) $K \cap \widehat{K} = \{0\}$.

ii) $\widehat{K}$ *es cerrado.*

iii) K *es un conjunto Chebyshev si y sólo si para todo* $x \in X$ *existen únicos* $k \in K$ *y* $\widehat{k} \in \widehat{K}$ *tales que* $x = k + \widehat{k}$.

Demostración. i) Sea $x \in K \cap \widehat{K}$, como $x \in K$ y $x \in \widehat{K}$ entonces $d_K(x) = 0 = \|x\|$ y $x = 0$.

ii) Sea $\{x_n\} \subset \widehat{K}$ una sucesión convergente a un $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n\| \\
&= \|x - x_n\| + d_K(x_n) \\
&\leq \|x - x_n\| + \|x_n - k\|,
\end{aligned}$$

para toda $k \in K$, tomando límite

$$\|x\| \leq \lim_{n \to \infty} (\|x - x_n\| + \|x_n - k\|) = \|x - k\|,$$

de lo que $\|x\| \leq d_K(x)$. Por otro lado $\|x\| = \|x - 0\| \geq d_K(x)$. Por lo tanto $x \in \widehat{K}$.

iii) $\Rightarrow$) Para $x \in X$ existe un único $k \in K$ tal que $d_K(x) = \|x - k\|$, considerando $\lambda = 1$ y $-k \in K$ en la Proposición 1.76 tenemos

$$P_K(x - k) = P_K(x) - k = \{k\} - k = \{0\},$$

de lo que se tiene que $0 \in P_K(x - k)$ y $d_K(x - k) = \|x - k\|$. Entonces $x = k + (x - k)$, $k \in K$ y $x - k \in \widehat{K}$. Por lo tanto $X = K + \widehat{K}$.

Supongamos que existen $k_1 \in K$ y $\widehat{k_1} \in \widehat{K}$ tales que $x = k_1 + \widehat{k_1}$, de ahí se tiene

$$\begin{aligned}
P_K(x) &= P_K\left(k_1 + \widehat{k_1}\right) \\
&= P_K\left(\widehat{k_1}\right) + k_1 && \text{por la Proposición 1.76} \\
&= k && \text{porque } P_K(x) = \{k\}.
\end{aligned}$$

Como $\widehat{k_1} \in \widehat{K}$, $P_K\left(\widehat{k_1}\right) = 0 = k - k_1$, por lo tanto $k_1 = k$, es decir la representación de x en términos de K y $\widehat{K}$ es única.

$\Leftarrow$) Ya que para todo $x \in X \setminus K$ existen únicos $k \in K$ y $\widehat{k} \in \widehat{K}$ tales que $x = k + \widehat{k}$, entonces $\widehat{k} = x - k$ y $\|x - k\| = \left\|\widehat{k}\right\|$ por lo que

$$\|0 - (x-k)\| = \|x - k\| = d_K(x-k) \quad \text{y} \quad 0 \in P_K(x-k) = P_K(x) - k,$$

entonces $k \in P_K(x)$. De lo que tenemos que el conjunto K es proximinal.

Para ver que es Chebyshev supongamos que existen $k_1, k_2 \in K$, $k_1 \neq k_2$ tales que $\|k_1 - x\| = \|k_2 - x\| = d_K(x)$, entonces

$$0 \in P_K(x - k_i) \quad \text{y} \quad \|x - k_i\| = d_K(x - k_i),$$

por lo que $\widehat{k_i} := x - k_i \in \widehat{K}$ para $i \in \{1,2\}$. Concluimos que $x = k_1 + \widehat{k_1} = k_2 + \widehat{k_2}$, lo que es una contradicción porque la representación de x en términos de K y $\widehat{K}$ es única.

$\square$

Con los resultados anteriores podemos asegurar cuando un conjunto es Chebyshev en términos del complemento métrico.

Proposición 1.78. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subespacio proximinal de X para el cual $\widehat{K}$ es convexo, entonces K es Chebyshev.*

Demostración. Supongamos que $k_1, k_2 \in P_K(x)$ para algún $x \in X \setminus K$. Si definimos $\widehat{k_1} := x - k_1$, y $\widehat{k_2} := x - k_2$ entonces $\|x - k_1\| = d_K(x) \leq \|x - k_1 - k\|$ para todo $k \in K$, por lo tanto $\|x - k_1\| \leq d_K(x - k_1)$, pero $\|x - k_1 - 0\| = \|x - k_1\| \geq d_K(x - k_1)$. Es decir $\widehat{k_1} = x - k_1 \in \widehat{K}$, análogamente , $-\widehat{k_2} = -x + k_2 \in \widehat{K}$. Como $\dfrac{\widehat{k_1} - \widehat{k_2}}{2} \in \widehat{K}$ y $\dfrac{\widehat{k_1} - \widehat{k_2}}{2} = \dfrac{k_2 - k_1}{2} \in K$, entonces $\left\|\dfrac{k_2 - k_1}{2}\right\| = 0$ y $k_2 = k_1$. $\square$

Centrando nuestra atención en los espacios de Hilbert, de las Proposiciones 1.74 y 1.69, sabemos que todo conjunto cerrado, no vacío y convexo es Chebyshev, por lo que podemos denotar $\{p_x\} = P_K(x)$ a la única mejor aproximación. En estos espacios se cumple:

Lema 1.79. *Sea K un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio de Hilbert $\left(X, \langle\cdot\rangle\right)$, se cumple*

i) Si $x \in X \setminus K$, entonces $p_x \in Fr(K)$.

ii) Para cada $x \in X$ y toda $k \in K$, tenemos que $\langle x - p_x, k - p_x\rangle \leq 0$.

iii) Si K es un subespacio cerrado de X, entonces para cada $x \in X$ el vector $x - p_x$ es ortogonal a K.

Demostración. i) Sea $x \notin K$, definimos el punto $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)p_x \in X$, entonces se cumple $\|x - x_\lambda\| = (1-\lambda)\|x - p_x\| < \|x - p_x\|$ para cada $\lambda \in (0,1)$. Si p_x fuera un punto interior de K, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B[p_x, \epsilon] \subset K$, por otro lado $\|x_\lambda - p_x\| = \lambda\|x - p_x\|$. Si tomamos $\lambda \leq \dfrac{\epsilon}{\|x - p_x\|}$, entonces $x_\lambda \in K$ y $\|x - x_\lambda\| < \|x - p_x\|$, lo que es un contradicción. Por lo tanto $p_x \in \mathrm{Fr}(K)$.

ii) Sea $x \in X$, $k \in K$ y $\lambda \in (0,1)$. Sabemos que p_x cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\|x - p_x\|^2 &\leq \|x - [\lambda k + (1-\lambda)p_x]\|^2 \\ &= \|(x - p_x) - \lambda(k - p_x)\|^2 \\ &= \|x - p_x\|^2 - 2\lambda\langle x - p_x, k - p_x\rangle + \lambda^2\|k - p_x\|^2 .\end{aligned}$$

Por lo que $-2\langle x - p_x, k - p_x\rangle + \lambda^2\|k - p_x\|^2 \geq 0$ para todo $\lambda \in (0,1)$, entonces $-2\langle x - p_x, k - p_x\rangle \geq 0$, es decir $\langle x - p_x, k - p_x\rangle \leq 0$.

iii) Fijemos $k \in K$. Como K es un subespacio vectorial, $p_x \pm \lambda(k) \in K$ para toda $\lambda > 0$. Entonces

$$\|x - p_x\|^2 \leq \|x - (p_x \pm \lambda(k))\|^2 = \|x - p_x\|^2 \mp 2\lambda\langle x - p_x, k\rangle + \lambda^2\|k\|^2 ,$$

es decir $\pm 2\lambda\langle x - p_x, k\rangle \leq \lambda^2\|k\|^2$ para toda $\lambda > 0$. De esta manera $\pm\langle x - p_x, k\rangle \leq \dfrac{\lambda}{2}\|k\|^2$ para toda $\lambda > 0$, tomando el límite cuando λ tiende a cero $\pm\langle x - p_x, k\rangle \leq 0$ por lo que $\langle x - p_x, k\rangle = 0$ para toda $k \in K$.

□

El inciso ii) nos dice que si $x \notin K$, entonces el hiperplano que pasa por p_x con vector normal $x - p_x$, que es el conjunto $\left\{z \in X : \langle x - p_x, z\rangle = \langle x - p_x, p_x\rangle\right\}$, separa fuertemente a x de K.

Además podemos caracterizar la norma dual de un espacio de Hilbert.

Corolario 1.80. *(F. Riesz-Fréchet) Si* $(X,\langle,\rangle)$ *es un espacio de Hilbert y* $x^* \in X^*$, *entonces existe un único vector* $y_{x^*} \in X$ *tal que* $x^*(x) = \langle x, y_{x^*}\rangle$ *para todo* $x \in X$.

Demostración. Si $x^* \equiv 0$ entonces $y_{x^*} = 0$. Si $x^* \neq 0$ podemos hacer $K = \ker x^*$, entonces K es un subespacio cerrado propio de X, por el inciso iii) del Lema 1.79 existe un vector unitario $z \in X$ tal que $\langle k, z\rangle = 0$ para todo $k \in K$. Como $z \notin K$ y para cada $x \in X$ tenemos

$$x^*\left(x - \frac{x^*(x)}{x^*(z)}z\right) = x^*(x) - \frac{x^*(x)}{x^*(z)}x^*(z) = 0,$$

entonces $x - \frac{x^*(x)}{x^*(z)}z \in K$. Por lo tanto $\left\langle x - \frac{x^*(x)}{x^*(z)}z, z\right\rangle = 0$, es decir $x^*(x) = \langle x, x^*(z)z\rangle$ para toda $x \in X$, así $y_{x^*} = x^*(z)z$.

Para la unicidad consideremos $x^* \in X$. Si $x^*(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para toda $x \in X$, entonces $\langle x, y - z\rangle = 0$ para toda $x \in X$, en particular para $x = y - z$, por lo que $\left\|y - z\right\| = 0$ de lo cual se debe cumplir que $y = z$. Por lo que el vector debe ser único. □

Además, por la Proposición 1.33 y el Corolario de 1.80, la función $x^* \mapsto y_{x^*}$ es una isometría lineal sobreyectiva por lo que podemos escribir $X^* \equiv X$.

2 Convexidad de los conjuntos Chebyshev

2.1 Proyección métrica

En 1934 Bunt, Motzkin en 1935 y Kritikos en 1938 demuestran de forma independiente que en los espacio euclidianos, todo conjunto Chebyshev es convexo. Jessen lo demuestra en $\mathbb{R}^n$, Busemann extiende las ideas de Jessen y demuestra que en un espacio normado, lineal, suave y estrictamente convexo de dimensión finita todo conjunto Chebyshev es convexo. Klee también logró hacer la demostración de Busemann y dio una caracterización de los conjuntos Chebyshev en estos espacios, más adelante demuestra que la convexidad estricta no es necesaria. En la demostración de la convexidad de los conjuntos Chebyshev en espacios finitos con norma estrictamente convexa se utiliza que la proyección métrica es continua, por lo que resulta natural estudiar las consecuencias de que la proyección métrica sea continua en los espacios de dimensión infinita. Vlasov demostró que si la proyección métrica para un conjunto Chebyshev es continua y el dual es estrictamente convexo, entonces el conjunto es convexo.

En 1972 Oshman estudiaba la relación entre la propiedad de ser un conjunto aproximativamente compacto no vacío y la continuidad de la proyección métrica, en 2010 Guirao y Montesinos encontraron un ejemplo en el que existe un espacio de Banach localmente uniforme de punto medio y un subconjunto K no vacío, cerrado y convexo Chebyshev de X tal que la proyección métrica sobre él no es continua; casi al mismo tiempo Zhang y Shi demostraron que, en un espacio de Banach fuertemente convexo, un conjunto no vacío cerrado y convexo es Chebyshev y la proyección métrica es continua si y sólo si el conjunto es aproximativamente compacto. Aún sigue abierta la siguiente importante cuestión: ¿En un espacio de Hilbert la proyección métrica sobre un conjunto Chebyshev es continua?.

En esta sección estudiaremos la continuidad de la proyección métrica generada por un conjunto cerrado no vacío y su relación con la convexidad de un conjunto Chebyshev. Como la proyección métrica es una función que puede ser multivaluada hay que aclarar lo que significa ser continua para esta clase de funciones.

Definición 2.1. Sea K un subconjunto no vacío de un espacio de Banach, se dice que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ es *continua* en x si $\{y\} = P_K(x)$ y para toda sucesión $\{x_n\}$ que converja a x, entonces toda sucesión $\{y_n\}$ con $y_n \in f(x_n)$ converge a y.

De esta definición se observa que una función multivaluada es continua en x si para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a x, entonces $f(x_n)$ converge a $f(x)$, sin embargo la inversa de está afirmación, en general, no es verdadera [16].

Si consideramos un punto $x \in X \setminus K$ y una de sus mejores aproximaciones p_x, entonces todos los puntos entre x y p_x tienen como mejor aproximación, al menos, a p_x como se muestra a continuación:

Proposición 2.2. *Sea K un subconjunto no vacío de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Si $x \in X \setminus K$ y $p_x \in P_K(x)$, entonces para toda $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)p_x$ con $\lambda \in (0,1)$, $p_x \in P_K(x_\lambda)$.*

Demostración. Supongamos que $x \in X$, $p_x \in P_K(x)$, $w \in K$ y $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)p_x$. Como x, p_x y x_λ son colineales y $w \in K$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_\lambda - p_x\| &= \|x - p_x\| - \|x - x_\lambda\| \\ &\leq \|x - w\| - \|x - x_\lambda\| \\ &\leq \|x_\lambda - w\|. \end{aligned}$$

Por lo que $d_K(x_\lambda) = \|x_\lambda - p_x\|$, es decir $p_x \in P_K(x_\lambda)$. □

El resultado anterior es válido en los espacios métricos, donde el segmento entre x y y se define como el conjunto $\{z : d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)\}$ [41]. El siguiente paso para el estudio del comportamiento de la proyección métrica sería probar que su gráfica para un conjunto Chebyshev es continua, sin embargo esto no tiene que ser cierto, existen espacios de Banach reflexivos donde la proyección métrica de un conjunto Chebyshev no es continua [27]. Lo que sí cumple la proyección métrica es una propiedad un poco más débil.

Proposición 2.3. *Sea K un conjunto proximinal en el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Si $\{x_n\}, \{y_n\}$ son sucesiones tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ y $y_n \in P_K(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $y \in P_K(x)$.*

Demostración. Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y $y_n \in P_K(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. K es cerrado por ser proximinal, por lo que $y \in K$, además la función distancia es no expansiva, de esto

$$\left| \left\| x_n - y_n \right\| - d_K(x) \right| = |d_K(x_n) - d_K(x)| \leq \|x_n - x\|$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, tomando límite tenemos que $\left| \left\| x - y \right\| - d_K(x) \right| \leq 0$, de ahí que $\left\| x - y \right\| = d_K(x)$, por lo que $y \in P_K(x)$. $\square$

Recordemos un tipo particular de funciones que nos será útil.

Definición 2.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es *semicontinua inferiormente* si, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado.

En particular tenemos:

Lema 2.5. *En todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, la norma es semicontinua inferiormente respecto a la topología débil.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para probar la afirmación debemos mostrar que el conjunto $A := \{x \in X : \|x\| \leq \alpha\}$ es cerrado con respecto a la topología débil. Es inmediato ver que A es convexo y, dado que la norma es continua,

$$A = \|\cdot\|^{-1}([0, \alpha])$$

es cerrado con respecto a la topología de la norma, por el Lema 1.67 también es débilmente cerrado. $\square$

Otra propiedad que cumplen algunos espacios importantes y que ayuda a verificar la continuidad de la proyección métrica es la siguiente.

Definición 2.6. Diremos que la norma de un espacio de Banach tiene la propiedad *Kadec-Klee*, si para toda sucesión x_n en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ con respecto a la topología débil y $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

La propiedad Kadec-Klee primero fue probada para los espacios L^p con $1 < p < \infty$ por Riesz (1928) y Radon (1913), por eso también se le conoce como propiedad de *Radon-Riesz*.

Proposición 2.7. *Los espacios con norma uniformemente convexa tienen la propiedad Kadek-Klee.*

Demostración. Es inmediato cuando $x = 0$.

Sea x_n una sucesión que converge a x y $x \neq 0$, a partir de una $N \in \mathbb{N}$ podemos asegurar que $x_n \neq 0$ para toda $n > N$, por lo que vamos a suponer que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hagamos $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ y $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$. Es claro que si x_n converge débilmente a x entonces y_n converge débilmente a y, también lo es que si $\|x_n - x\|$ tiende a cero también lo hace $\left\|y_n - y\right\|$.

Observemos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|x\| \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\|x\|}{\|x_n\|} x_n - x \right\| = \|x - x\|,$$

por el teorema de Hahn Banach 1.29, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(y) = 1$. Entonces

$$\left| x^* \left(\frac{y_n + y}{2} \right) \right| \leq \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq 1.$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} x^* \left(\dfrac{y_n + y}{2} \right) = 1$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \left\| \dfrac{y_n + y}{2} \right\| = 1$. Por la propiedad de ser uniformemente convexa y la Proposición 1.21, entonces $\left\|y_n - y\right\| = 0$. □

En los espacios de dimensión finita las topologías fuerte y débil son equivalentes, por lo que estos espacios tienen la propiedad Kadec-Klee.

Los conjuntos acotadamente compactos cumplen la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *Sea K un subconjunto acotadamente compacto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Si $P_K(x)$ es un singulete para alguna $x \in X$, entonces la proyección métrica es continua en x.*

Demostración. Sea $x \in X$, supongamos que $P_K(x) = \{p_x\}$ para algún $p_x \in K$ y tomemos una sucesión x_n que converja a x, supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x_n\} \subset B[x, r]$ para alguna $r > 0$. Por la Proposición 1.53, K es proximinal por lo que existe $y_n \in P_K(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por el Lema 1.10 la proyección métrica es localmente acotada, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $P_K(B[x, r]) \subset MB_X$, como K es acotadamente compacto $K \cap MB_X$ es compacto, por lo que y_n tiene una subsucesión convergente a algún $y \in K$. De la Proposición 2.3 sabemos que $y \in P_K(x)$ de lo que $y = p_x$. □

Corolario 2.9. *Sea K un conjunto proximinal en un espacio normado de dimensión finita $(X, \|\cdot\|)$. Si $P_K(x)$ es un singulete para alguna $x \in X$, entonces la proyección métrica es continua en x.*

Demostración. Por la Proposición 1.12, K es cerrado, en dimensión finita las bolas cerradas son compactas, por lo que los cerrados son acotadamente compactos y, por la Proposición anterior, la proyección métrica es continua en x. □

Corolario 2.10. *La proyección métrica para un conjunto Chebyshev en un espacio normado de dimensión finita es continua.*

La propiedad Kadec-Klee sumada a ser reflexivo nos permite asegurar la continuidad de la proyección métrica para todo conjunto Chebyshev débilmente cerrado.

Teorema 2.11. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo con norma Kadec-Klee y K un subconjunto Chebyshev débilmente cerrado, entonces K tiene proyección métrica continua.*

Demostración. Sean $x \in X$, $\{p_x\} = P_K(x)$, $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\{p_{x_n}\} = P_K(x_n)$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$d_K(x) = \|x - p_x\| \le \left\|x - p_{x_n}\right\| \le \|x - x_n\| + \left\|x_n - p_{x_n}\right\| = \|x - x_n\| + d_K(x_n).$$

De la Proposición 1.9 tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} d_K(x_n) + \|x - x_n\| = d_K(x)$. Por lo tanto

$$d_K(x) = \lim_{n\to\infty} d_K(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left\|x - p_{x_n}\right\| = \lim_{n\to\infty} d_K(x_n) + \|x - x_n\| = d_K(x).$$

Por lo que la sucesión $\left\{\left\|x - p_{x_n}\right\|\right\}$ converge, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left\|x - p_{x_n}\right\| < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si consideramos la bola $B[x, M]$, por el Corolario 1.41, ésta es débilmente compacta, por lo que existe una subsucesión $\left\{p_{x_{n_m}}\right\}$ que converge débilmente a algún $y \in X$, como K es débilmente cerrado $y \in K$.

Ahora veamos que $\left\|x - y\right\| \le d_K(x)$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \ge M$ se tiene que $\left\|x - p_{x_{n_m}}\right\| \le d_K(x) + \epsilon$, esto es equivalente a que para toda $m \ge M$

$$x - p_{x_{n_m}} \in \left\{y \in X : \left\|y\right\| \le d_K(x) + \epsilon\right\}.$$

Ya que la norma es débilmente semicontinua inferiormente, este conjunto es débilmente cerrado, por lo que contiene sus puntos límite con la convergencia débil. Entonces, $\left\|x - y\right\| \le d(x, K) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ era arbitrario, podemos concluir que $\left\|x - y\right\| \le d(x, K)$ y, como K es Chebyshev, $y = p_x$, es decir $y \in P_K(x)$. Además como la norma es Kadec-Klee y

$$\lim_{m\to\infty} \left\|x - p_{x_{n_m}}\right\| = \|x - p_x\|,$$

debido a que $x - p_{x_{n_m}}$ converge débilmente a $x - p_x$, lo hace también en norma. Por lo tanto $\left\{p_{x_{n_m}}\right\}$ converge a p_x en norma, de lo que la proyección métrica es continua. $\square$

Como ya se mencionó, Vlasov demostró que si K es un conjunto Chebyshev con proyección métrica continua en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ con dual estrictamente convexo, entonces K es convexo. Sin embargo, la continuidad de la proyección métrica no es necesaria, basta con pedir que la función distancia generada por el conjunto K cumpla que

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1$$

para todo $x \in X \setminus K$. Veamos que si la proyección métrica es continua se cumple esta propiedad.

Lema 2.12. *Sea un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subset X$ un conjunto proximinal. Para $x \in X \setminus K$, $y \in P_K(x)$ y $\lambda > 0$ definamos $x_\lambda := x + \lambda(x - y)$, si $y_\lambda \in P_K(x_\lambda)$, entonces*

$$d_K(x_\lambda) \geq d_K(x) + \|x_\lambda - x\| \left(1 - \frac{\left\|y - y_\lambda\right\|}{\left\|x - y\right\|}\right).$$

Demostración. Si definimos $\alpha := \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$, entonces $1 - \alpha = \dfrac{1}{1+\lambda}$, de lo cual

$$\begin{aligned}
x_\lambda = x + \lambda(x - y) &\Rightarrow x_\lambda - y = (1+\lambda)(x - y) \\
&\Rightarrow \frac{1}{1+\lambda}(x_\lambda - y) = x - y \\
&\Rightarrow (1-\alpha)(x_\lambda - y) = x - y \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} = \frac{\left\|x_\lambda - y\right\|}{\left\|x - y\right\|},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
x_\lambda = x + \lambda(x - y) &\Rightarrow \lambda y = x - x_\lambda + \lambda x \\
&\Rightarrow \lambda y - \lambda x_\lambda = x - x_\lambda + \lambda x - \lambda x_\lambda \\
&\Rightarrow \lambda(y - x_\lambda) = (1+\lambda)(x - x_\lambda) \\
&\Rightarrow \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{\|x - x_\lambda\|}{\left\|y - x_\lambda\right\|}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Si consideramos al punto $w := \alpha y_\lambda + (1-\alpha) x_\lambda$ entre x_λ y y_λ, este cumple que $\left\|w - y_\lambda\right\| = (1-\alpha)\left\|x_\lambda - y_\lambda\right\|$ y como

$$x_\lambda = x + \lambda(x - y) \Leftrightarrow \lambda y = (1+\lambda)x - x_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda y}{1+\lambda} = x - \frac{1}{1+\lambda} x_\lambda$$
$$\Leftrightarrow \alpha y = x - (1-\alpha) x_\lambda$$

entonces

$$\|x-\omega\| = \left\|-\alpha y_\lambda + x - (1-\alpha) x_\lambda\right\| = \alpha \left\|y - y_\lambda\right\|.$$

Finalmente, ya que $y_\lambda \in K$ y usando la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} \left\|x-y\right\| &\leq \left\|x - y_\lambda\right\| \\ &\leq \|x-w\| + \left\|w - y_\lambda\right\| \\ &= \alpha \left\|y - y_\lambda\right\| + (1-\alpha) \left\|x_\lambda - y_\lambda\right\|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Usando (2.1), (2.2) y (2.3)

$$\begin{aligned} d_K(x_\lambda) &= \left\|x_\lambda - y_\lambda\right\| \\ &\geq \frac{1}{1-\alpha} \left\|x-y\right\| - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\|y - y_\lambda\right\| \\ &= \left\|x_\lambda - y\right\| - \frac{\|x - x_\lambda\|}{\left\|x-y\right\|} \left\|y - y_\lambda\right\| \\ &= \left(\|x_\lambda - x\| + \left\|x-y\right\| \right) - \frac{\|x - x_\lambda\|}{\left\|x-y\right\|} \left\|y - y_\lambda\right\| \\ &= d_K(x) + \|x_\lambda - x\| \left(1 - \frac{\left\|y - y_\lambda\right\|}{\left\|x-y\right\|} \right). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.13. *Sea un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subset X$ un conjunto proximinal. Si la proyección métrica es continua en $x \in X \setminus K$ entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\left\|x_\lambda - y_\lambda\right\| - \left\|x-y\right\|}{\|x_\lambda - x\|} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{d_K(x_\lambda) - d_K(x)}{\|x_\lambda - x\|} = 1,$$

donde $\{y\} = P_K(x)$, $x_\lambda := x + \lambda(x-y)$ y $y_\lambda \in P_K(x_\lambda)$ para toda $\lambda > 0$.

Demostración. Sea $\lambda > 0$, usando que la función distancia es no expansiva y el Lema anterior tenemos

$$1 = \frac{\|x_\lambda - x\|}{\|x_\lambda - x\|} \geq \frac{d_K(x_\lambda) - d_K(x)}{\|x_\lambda - x\|} \geq 1 - \frac{\left\|y - y_\lambda\right\|}{\left\|x-y\right\|}.$$

Como la proyección métrica es continua en x, entonces $\lim_{\lambda\to 0^+} y_\lambda = y$ y la parte derecha de la desigualdad anterior converge a 1 cuando λ tiende a cero por la derecha, concluimos que

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{d_K(x_\lambda) - d_K(x)}{\|x_\lambda - x\|} = 1.$$

□

Ya que la función distancia es no expansiva

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} \leq \limsup_{\|y\|\to 0} \frac{\left\|y\right\|}{\|y\|} = 1.$$

Además, del corolario anterior, si la proyección métrica es continua en x, entonces

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} \geq \limsup_{\|x_\lambda - x\|\to 0} \frac{d_K(x+x_\lambda - x) - d_K(x)}{\|x_\lambda - x\|} \geq \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{d_K(x_\lambda) - d_K(x)}{\|x_\lambda - x\|} = 1,$$

por lo tanto

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1. \tag{2.4}$$

La proyección métrica continua es una condición más restrictiva que pedir la condición

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1,$$

por lo que podemos estudiar nuevas condiciones que aseguren la convexidad de los conjuntos Chebyshev. Por ejemplo:

Lema 2.14. *Sean un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subset X$ un subconjunto cerrado y no vacío. Si $x \in X \setminus K$ es un punto tal que $d_K(x)$ es Gâteaux diferenciable en x y $y \in P_K(x)$, entonces $\left\|d_K'(x)\right\| = 1$, $d_K'(x-y) = \left\|x-y\right\| = d_K(x)$.*

Demostración. Como $x \in X \setminus K$ y K es cerrado, $d_K(x) = \left\|x-y\right\| > 0$. Para toda $0 \leq t \leq 1$ definimos el punto $x + t(y-x)$, como este punto está entre x y y, por la Proposición 2.2, $y \in P_K(x + t(y-x))$ por lo que $d_K(x + t(y-x)) = \left\|x + t(y-x) - y\right\| = (1-t)\left\|y-x\right\|$, entonces

$$\begin{aligned} d_K'(x, y-x) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{d_K(x+t(y-x)) - d_K(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1-t)\left\|y-x\right\| - \left\|y-x\right\|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-t\left\|y-x\right\|}{t} = -\left\|y-x\right\| \end{aligned}$$

y ya que la Gâteaux diferencial es lineal, entonces $d_K'(x, x-y) = \left\|y - x\right\|$. Por la Proposición 1.9 tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|d_K'(x,z)\right\| &= \left|\lim_{t\to 0^+} \frac{d_K(x+tz) - d_K(x)}{t}\right| \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left|\frac{d_K(x+tz) - d_K(x)}{t}\right| \\
&\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+tz-x\|}{|t|} = \|z\|.
\end{aligned}$$

Así que $\left\|d_K'(x)\right\| = 1$. □

Lema 2.15. *Sea K un subconjunto cerrado y no vacío de un espacio de Banach, si d_K es Fréchet diferenciable en x, entonces* $\limsup_{\|y\|\to 0} \dfrac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1.$

Demostración. Como d_K es Fréchet diferenciable también es Gâteaux diferenciable, por lo que basta demostrar que $\left\|d_K'(x)\right\| = 1$ y utilizar el Lema 2.14. Tomemos α_n una sucesión de términos positivos que converge a cero y $y_n \in K$ tal que $\alpha_n^2 > \left\|x - y_n\right\| - d_K(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para $t \in (0,1)$ se tiene que

$$d_K\left(x + t\left(y_n - x\right)\right) \leq \left\|x + t(y_n - x) - y_n\right\| = (1-t)\left\|x - y_n\right\| < (1-t)\left(\alpha_n^2 + d_K(x)\right)$$

porque $y_n \in K$, entonces $t d_K(x) - 2\alpha_n^2 \leq d_K(x) - d_K(x + t(y_n - x))$.

Sea $\epsilon > 0$, como $d_K(x)$ es Fréchet diferenciable entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{d_K(x+y) - d_K(x) - d_K'(x)}{\|y\|}\right| < \epsilon$$

para toda $\left\|y\right\| < \delta$. Si n es suficientemente grande se cumple que $\alpha_n > \alpha_n^2 > \left\|x - y_n\right\| - d_K(x) > 0$ y $\alpha_n = \left\|\dfrac{x - y_n}{\left\|x - y_n\right\|}\right\| \alpha_n < \delta$, considerando la sucesión $\{t_n\}$ con $t_n = \dfrac{\alpha_n}{\left\|x - y_n\right\|}$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_n \epsilon &> \left| d_k\left(x + \alpha_n \frac{y_n - x}{\left\|x - y_n\right\|}\right) - d_K(x) - d'\left(x, \alpha_n \frac{y_n - x}{\left\|x - y_n\right\|}\right)\right| \\
&\geq -d_k\left(x + \alpha_n \frac{y_n - x}{\left\|x - y_n\right\|}\right) + d_K(x) + d'\left(x, \alpha_n \frac{y_n - x}{\left\|x - y_n\right\|}\right).
\end{aligned}$$

Despejando

$$\alpha_n\epsilon - d'\left(x, \alpha_n \frac{y_n - x}{\left\|x - y_n\right\|}\right) > -d_k\left(x + \alpha_n \frac{y_n - x}{\left\|x - y_n\right\|}\right) + d_K(x)$$
$$\geq t_n d_K(x) - 2\alpha_n^2,$$

concluimos que

$$d'\left(x, \frac{x - y_n}{\left\|x - y_n\right\|}\right) \geq \frac{-\epsilon\alpha_n - 2\alpha_n^2 + t_n d_K(x)}{\alpha_n}$$
$$= -\epsilon - 2\alpha_n + \frac{d_K(x)}{\left\|x - y_n\right\|}..$$

Como ϵ fue arbitrario, α_n tiende a cero y porque $1 \geq \limsup\limits_{\|y\|\to 0} \dfrac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|}$, entonces

$$1 \geq \liminf_{n\to\infty} d'\left(x, \frac{x - y_n}{\left\|x - y_n\right\|}\right) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{d_K(x)}{\left\|x - y_n\right\|} = 1,$$

y $\limsup\limits_{\|y\|\to 0} \dfrac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1$ como se quería. □

Continuando con la demostración de que si la función distancia generada por un conjunto cerrado no vacío K cumple $\limsup\limits_{\|y\|\to 0} \dfrac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1$ para todo $x \in X \setminus K$ y la norma del espacio dual es estrictamente convexa, entonces K es convexo, necesitamos el siguiente teorema del cálculo variacional [10].

Teorema 2.16. *(Teorema primitivo de Ekeland) Sea $(X, d(\cdot,\cdot))$ un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente, acotada inferiormente. Dado $\epsilon > 0$ y $x_1 \in X$ entonces existe $x_0 \in X$ tal que*

i) $f(x_0) + \epsilon d(x_0, x_1) \leq f(x_1)$,

ii) $f(y) > f(x_0) - \epsilon d(x_0, y)$, *para toda* $y \in X \setminus \{x_0\}$.

Lema 2.17. *Sea un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subset X$ un subconjunto cerrado no vacío que genera una función distancia que cumple $\limsup\limits_{\|y\|\to 0} \dfrac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1$ para todo $x \in X \setminus K$. Dado $x \in X \setminus K$, $r > 0$ y $\sigma > 1$ existe $x_0 \in X$ tal que*

i) $d_K(x) + \dfrac{\|x - x_0\|}{\sigma} \leq d_K(x_0)$,

ii) $d_K(y) < d_K(x_0) + \dfrac{\left\|y - x_0\right\|}{\sigma}$, *para toda* $y \in B[x, r] \setminus \{x_0\}$,

iii) $\|x - x_0\| = r$.

Demostración. Sean $x \in X \setminus K$, $r > 0$ y $\sigma > 1$ dados. Consideremos la función $f : B[x,r] \to \mathbb{R}$ definida por $f(y) := -d_K(y)$. Como X es completo, $B[x,r]$ también. Además la función distancia es no expansiva, así que f es continua y acotada por abajo. Por el Teorema Primitivo de Ekeland existe un $x_0 \in B[x,r]$ tal que

$$f(x_0) + \frac{\|x - x_0\|}{\sigma} \leq f(x) \quad \text{y} \quad f(y) > f(x_0) - \frac{\|y - x_0\|}{\sigma},$$

para toda $y \in B[x,r] \setminus \{x_0\}$. Entonces

$$d_K(x_0) \geq d_K(x) + \frac{\|x - x_0\|}{\sigma} \quad \text{y} \quad d_K(y) < d_K(x_0) + \frac{\|y - x_0\|}{\sigma},$$

para toda $y \in B[x,r] \setminus \{x_0\}$, lo que prueba los incisos $i)$ y $ii)$. De $i)$ tenemos que $d_K(x_0) \geq d_K(x) > 0$, lo que implica que $x_0 \notin K$. Supongamos que $\|x - x_0\| < r$, como $\limsup_{\|y\| \to 0} \frac{d_K(x_0 + y) - d_K(x_0)}{\|y\|} = 1$ sabemos que existe $y_0 \in X$, $0 \leq \|y_0\| < r - \|x - x_0\|$ tal que

$$\frac{d_K(x_0 + y_0) - d_K(x_0)}{\|y_0\|} > \frac{1}{\sigma}.$$

Como $y_0 + x_0 \in B[x,r]$, de $ii)$ tenemos que

$$d_K(y_0 + x_0) < d_K(x_0) + \frac{\|y_0 + x_0 - x_0\|}{\sigma},$$

por lo tanto

$$\frac{d_K(y_0 + x_0) - d_K(x_0)}{\|y_0\|} \leq \frac{1}{\sigma}.$$

Lo que es una contradicción, por lo tanto $\|x - x_0\| = r$. $\square$

Demostrar la convexidad de un conjunto puede ser difícil, a veces resulta mejor demostrar una propiedad un poco más débil:

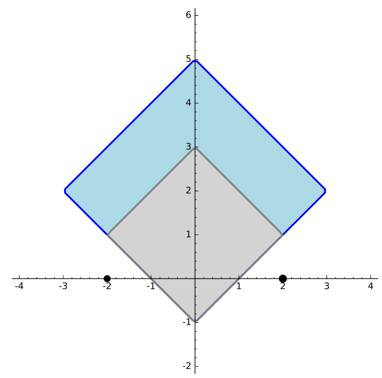
Definición 2.18. Un subconjunto K cerrado de un espacio de de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es *casi convexo* si, para toda bola cerrada $B[x,r] \subseteq X \setminus K$ y $N > 0$, existe $x' \in X$ y $r' > N$ tal que

$$B[x,r] \subseteq B[x',r'] \subseteq X \setminus K.$$

Ejemplo 12. El conjunto de los puntos $\{(-2,0),(2,0)\}$ con la norma $\|(a,b)\|_1 = |a|+|b|$ es casi convexo, ya que si $y \geq 0$ y $(x_0,y_0) \in B[(x,y),r]$, entonces $|x-x_0| + \left|y-y_0\right| \leq r$, además

$$|x-x_0| + \left|(y+r)-y_0\right| \leq |x-x_0| + \left|y-y_0\right| + r \leq 2r,$$

es decir $B[(x,y),r] \subset B[(x,y+r),2r]$ y si $(\pm 2,0) \notin B[(x,y),r]$ entonces $|x \pm 2| + \left|y\right| > r$ por lo que $|x \pm 2| + \left|y+r\right| = |x \pm 2| + y + r > 2r$, es decir $(\pm 2,0) \notin B[(x,y+r),2r]$, del mismo modo si $y \leq 0$, entonces $B[(x,y),r] \subset B[(x,y-r)),2r]$ y si $(\pm 2,0) \notin B[(x,y),r]$ entonces $(\pm 2,0) \notin B[(x,y-r)),2r]$, siguiendo este proceso siempre se puede construir una bola de radio arbitrariamente grande contenida en $X \setminus K$. Pero $(X,\|\cdot\|)$ no es un conjunto convexo.



Proposición 2.19. *Sea K un conjunto cerrado no vacío en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$. Si la función distancia cumple* $\limsup\limits_{\|y\|\to 0} \dfrac{d_K(x+y)-d_K(x)}{\|y\|} = 1$ *para todo $x \in X \setminus K$, entonces K es casi convexo.*

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ y supongamos que $B[x,r'] \subseteq X \setminus K$ para alguna $x \in X$ y $r' > 0$. De esto $x \notin K$ y $r' < d_K(x)$, consideremos $\alpha > \text{máx}\{d_K(x),N\}$. Ya que $\alpha - d_K(x) < \alpha - r'$, por el Lema 2.17 $i)$ y $iii)$, para $\sigma > 1$, $r > 0$ tales que

$$\sigma\Big(\alpha - d_K(x)\Big) < r < \alpha - r',$$

existe $x_0 \in X$ tal que $r = \|x-x_0\| \leq \sigma\Big(d_K(x_0) - d_K(x)\Big)$.

Como $\|x-x_0\| = r < \alpha - r'$, entonces $B[x,r'] \subseteq B[x_0,\alpha]$. Además

$$\sigma\Big(\alpha - d_K(x)\Big) < r \leq \sigma\Big(d_K(x_0) - d_K(x)\Big),$$

por lo que $\alpha < d_K(x_0)$, es decir $B[x_0,\alpha] \subseteq X \setminus K$. $\square$

En [27] encontramos el siguiente teorema

Teorema 2.20. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach con dual estrictamente convexo. Entonces todo subconjunto casi convexo es convexo.*

De esta forma podemos enunciar el Teorema de Vlasov

Teorema 2.21. *(Vlasov) Sea K un subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ con dual estrictamente convexo, si la función distancia al conjunto cumple que* $\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y)-d_K(x)}{\|y\|} = 1$, *entonces K es convexo.*

Demostración. Inmediata del Teorema 2.20 y la Proposición 2.19. □

Corolario 2.22. *Todo conjunto Chebyshev en un espacio de Hilbert con proyección métrica continua es convexo.*

Demostración. Inmediata de la ecuación 2.4 y los Teoremas 2.21(Vlasov) y 2.11. □

Corolario 2.23. *Todo conjunto Chebyshev en un espacio L^p, $1 < p < \infty$, que tenga proyección métrica continua es convexo.*

Demostración. Inmediata de la ecuación 2.4 y los Teoremas 2.21 (Vlasov) y 2.11. □

Corolario 2.24. *Todo conjunto Chebyshev en un espacio de dimensión finita estrictamente convexo es convexo.*

Demostración. Inmediata de la ecuación 2.4 y los Teoremas 2.21 (Vlasov) y 2.11. □

Corolario 2.25. *Todo conjunto Chebyshev tal que $d_K(x)$ es Gâteaux diferenciable y $\left\|d'_K(x)\right\| = 1$ para toda $x \in X \setminus K$ es convexo.*

Demostración. Inmediata del Teorema 2.21 (Vlasov), la Proposición 1.12 y el Lema 2.14. □

Corolario 2.26. *Todo conjunto Chebyshev tal que $d_K(x)$ es Fréchet diferenciable para toda $x \in X \setminus K$ es convexo.*

Demostración. Inmediata del Teorema 2.21 (Vlasov), la Proposición 1.12 y el Lema 2.15. □

El cálculo diferencial es una herramienta importante en el análisis, pero se necesita la derivada o la diferencial de la función. Muchos problemas se definen sobre funciones que no son diferenciables, por lo que se extendió el concepto de derivada tratando de conservar algunas propiedades de la función. Un ejemplo de esta situación es la teoría de distribuciones, donde la propiedad que se pretende preservar es la regla de integración por partes. En el caso del análisis convexo orientado a problemas de minimización tenemos:

Definición 2.27. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $x \in X$ y $x^* \in X^*$. x^* es llamada *subgradiente* de una función $f : X \to \mathbb{R}$ en x si $x^*(y-x) \leq f(y) - f(x)$, para todo $y \in X$. El conjunto de todos los subgradientes de f en x es denotado por $\partial f(x)$ y se le llama *subdiferencial de Fenchel* o simplemente *subdiferencial*.

Cuando el subdiferencial es un singulete podemos dar algunas equivalencias a ser un conjunto Chebyshev convexo, con ese fin veamos los siguientes lemas.

Lema 2.28. *Sea un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $K \subset X$. K es convexo si y sólo si es convexo de punto medio, es decir para todo $k_1, k_2 \in K$ se tiene que $\dfrac{k_1 + k_2}{2} \in K$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Es inmediata.

$\Leftarrow$) Si K es convexo de punto medio y $k_1, k_2 \in K$, por inducción tenemos que para toda $i \in \mathbb{N}$ y $t \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k\}$ se cumple que $k_1 + \dfrac{t}{2^k}(k_2 + k_1) \in K$, como K es cerrado y $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{t}{2^k} : t \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 2^k\right\} \right\}$ es denso en $[0, 1]$ se sigue que $k_1 + \lambda(k_2 - k_1) \in K$. $\square$

Lema 2.29. *Si K es un subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces d_K es una función convexa si y sólo si K es convexo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si K no es convexo entonces no es convexo de punto medio por lo que existen $k_1, k_2 \in K$ tales que $\dfrac{k_1 + k_2}{2} \notin K$, como K es cerrado $d_k\left(\dfrac{k_1 + k_2}{2}\right) > 0$ pero $d_k(k_1) = d_K(k_2) = 0$ por lo que d_K no es convexa.

$\Leftarrow$) Si K es convexo, dados $x, y \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ y $\epsilon > 0$. Por la definición de la función distancia, existen k_x y k_y tales que

$$\|x - k_x\| < d_K(x) + \epsilon \quad \text{y} \quad \left\|y - k_y\right\| < d_K(y) + \epsilon.$$

Como K es convexo, entonces

$$\begin{aligned} d_K(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (\lambda k_x + (1 - \lambda k_y))\| \\ &= \|\lambda(x - k_x) + (1 - \lambda)(y - k_y)\| \\ &\leq \lambda\|x - k_x\| + (1 - \lambda)\|y - k_y\| \\ &< \lambda d_K(x) + (1 - \lambda)d_K(y) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ era arbitrario, entonces la función distancia es convexa. $\square$

En [44] se demuestra:

Teorema 2.30. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua en una vecindad de $x \in X$. $\partial f(x)$ es un singulete si y sólo si f es Gâteaux diferenciable en x, y en ese caso $f'(x) = \partial f(x)$.*

Con las proposiciones anteriores se cumple la siguiente equivalencia a ser convexo para un conjunto Chebyshev cuando $\partial f(x)$ es un singulete.

Teorema 2.31. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con norma dual estrictamente convexa, K un conjunto Chebyshev, $x \in X \setminus K$ y $\partial d_K(x)$ un singulete, entonces es equivalente:*

i) *K es convexo,*

ii) *d_K es convexa,*

iii) *d_K es Gâteaux diferenciable en x,*

iv) *existe $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{d_K(x+tz) - d_K(x)}{t} = 1$,*

v) $\displaystyle\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} = 1.$

Demostración. $i) \Leftrightarrow ii)$ Por el Lema 2.29.

$ii) \Rightarrow iii)$ Por el Teorema 2.30.

$iii) \Rightarrow iv)$ Por el Lema 2.14.

$iv) \Rightarrow v)$ Como d_K es no expansiva, tenemos que $\displaystyle\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|} \leq 1$, además para cada $u \in S_X$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{d_K(x+tu) - d_K(x)}{t} \leq \limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|}.$$

En particular para $u = z$ en $iv)$ tenemos $1 \leq \displaystyle\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{d_K(x+y) - d_K(x)}{\|y\|}$.

$v) \Rightarrow i)$ Por el Teorema 2.21. □

Para finalizar esta sección vamos a estudiar algunas de las implicaciones de que la norma y la norma dual sean LRU , así que denotaremos

$$E(K) := \{x \in X : \text{ existe } k \in K \text{ tal que } d_K(x) = \|x - k\|\},$$

$$E'(K) := \{x \in X : \text{Toda sucesión minimizante para } x \text{ converge a un único punto más cercano } k \in K\} \text{ y}$$

$$P_K(x,\delta) := \{k \in K : \|x-k\| < d_K(x)+\delta\}.$$

Diremos que $K \subset X$ es casi proximinal si $E(K)$ es denso en $X \setminus K$. Si la norma de un espacio de Banach es LRU y K es un conjunto casi proximinal, entonces se cumple que $E'(K)$ es un conjunto denso en $X \setminus K$, para demostrarlo veamos primero que

Proposición 2.32. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $K \subset X$ un subconjunto cerrado.*

i) $x \in E'$ si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $diam\{P_K(x,\delta)\} < \epsilon$.

ii) Si $x \in E'(K)$, entonces la proyección métrica es univaluada y continua en x.

iii) $E'(K)$ es un conjunto G_δ (intersección numerable de abiertos) en X.

Demostración. $i) \Rightarrow)$ Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, $diam\{P_K(x,\delta)\} \geq \epsilon$. Sean $x_n, y_n \in \left\{P_K(x, \frac{1}{n})\right\}$ tales que $\left\|x_n - y_n\right\| \geq \epsilon$, entonces $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son dos sucesiones minimizantes que no pueden converger al mismo punto.

$\Leftarrow)$ Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones minimizantes y $\epsilon > 0$. Entonces existen $\delta > 0$ tal que $\mathrm{diam}\{P_K(x,\delta)\} < \epsilon$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$ entonces $\|x_m - x\| - d_K(x) < \delta$, $\left\|y_m - x\right\| - d_K(x) < \delta$, $\left\|y_n - x\right\| - d_K(x) < \delta$ y $\|x_n - x\| - d_K(x) < \delta$, por lo que $\left\|x_m - y_m\right\|, \|x_m - x_n\|, \left\|y_n - y_m\right\| \leq \epsilon$. Concluimos que las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son de Cauchy, por lo que convergen y como el $diam\{P_K(x,\delta)\}$ tiende a cero deben converger al mismo punto.

$ii)$ Que $P_K(x) = \{p_x\}$ sea un singulete se sigue de la definición de $E'(K)$, para demostrar la continuidad tomemos $\{x_n\}$ una sucesión convergente a x. Si tomamos $k_n \in P_K(x_n)$ para toda x_n, entonces $\{k_n\}$ es una sucesión minimizante para x porque

$$\|x - p_k\| \leq \|k_n - x\| \leq \|k_n - x_n\| + \|x_n - x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x - p_k\|,$$

como el lado derecho de la segunda desigualdad tiende a $\|x - p_k\|$, entonces $\lim_{n\to\infty} k_n = k$.

$iii)$ Para cada $n \geq 1$, consideremos el conjunto

$$G_n = \left\{x \in X \setminus K : \text{ existe } \delta > 0, \text{ tal que el diám}\{P_K(x,\delta)\} < 1/n\right\}.$$

De $i)$ se sigue que $E'(K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, lo único que resta es ver que G_n es abierto.

Sea $x \in G_n$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{diam}\{P_K(x,\delta)\} < 1/n$. Tomemos $0 < \alpha < \delta/2$ y $\beta = \delta - 2\alpha$. Entonces para $y \in X \setminus K$, $\|y - x\| < \alpha$ y $k \in P_K(y,\beta)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|x-k\| &\le \|x-y\| + \|y-k\| \\
&< \alpha + \|y-k\| \\
&\le d_K(y) + \beta + \alpha \\
&\le d_K(x) + \beta + 2\alpha \\
&= d_K(x) + \delta,
\end{aligned}$$

por lo tanto $P_K(y,\beta) \subset P_K(x,\delta)$ y $diam\{P_K(y,\beta)\} \le diam\{P_K(x,\delta)\} < 1/n$, es decir $y \in G_n$. Por lo tanto G_n es abierto. $\square$

Teorema 2.33. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con norma LRU y K un conjunto casi proximinal en X. Entonces $E'(K)$ es un denso G_δ en $X \setminus K$.*

Demostración. Por el Teorema 2.32 solo hay que demostrar que $E'(K)$ es denso en $E(K)$. Si $x \in E(K)$ y $k_0 \in P_K(x)$.

Sea $x_0 = x - \epsilon(x - k_0)$ para $0 < \epsilon < 1/3$, por la Proposición 2.2 $k_0 \in P_K(x_0)$ y se cumple que

$$d_K(x_0) = \|k_0 - x_0\| = \|k_0 - x + \epsilon(x - k_0)\| = (1-\epsilon)d_K(x).$$

Tomemos una sucesión minimizante $\{x_n\} \subset K$ de $d_K(x_0)$, por lo que $\lim_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\| = d_K(x_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
d_K(x) \le \|x_n - x\| &= \|x_n - x_0 - \epsilon(x - k_0)\| \\
&\le \|x_n - x_0\| + \epsilon\|x - k_0\| \\
&= \|x_n - x_0\| + \epsilon d_K(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} d_K(x)
\end{aligned}$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = d_K(x)$. Además

$$\|x_n - x + \epsilon(x - k_0)\| \ge (1-\epsilon)d_K(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x + \epsilon(x-k_0)\| = (1-\epsilon)d_K(x).$$

Como

$$\begin{aligned}
1 - \epsilon = \frac{\|x_n - x\|}{\|x - x_n\|} - \epsilon\frac{\|k_0 - x\|}{d_K(x)} &\le \left\| \frac{x_n - x}{\|x - x_n\|} - \epsilon\frac{k_0 - x}{d_K(x)} \right\| \\
&\le \frac{1}{d_K(x)}\|x_n - x - \epsilon(k_0 - x)\| + \|x_n - x\|\left(\frac{1}{d_K(x)} - \frac{1}{\|x - x_n\|}\right),
\end{aligned}$$

entonces
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n-x}{\|x-x_n\|}-\epsilon\frac{k_0-x}{d_K(x)}\right\|=1-\epsilon.$$

Hagamos $u_n=\dfrac{x_n-x}{\|x_n-x\|}$, $u_0=\dfrac{k_0-x}{d_K(x)}$ y $\lambda=\dfrac{1-2\epsilon}{1-\epsilon}$, entonces $\dfrac{1}{2}<\lambda<1$, $\|u_n\|=\|u_0\|=1$ y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|2u_n-(\lambda u_n+(1-\lambda)u_0)\| &= \lim_{n\to\infty}\left\|2\frac{x_n-x}{\|x_n-x\|}-\frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon}\frac{x_n-x}{\|x_n-x\|}+\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{k_0-x}{d_K(x)}\right\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{1-\epsilon}\frac{x_n-x}{\|x_n-x\|}+\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\frac{k_0-x}{d_K(x)}\right\|\\ &= \frac{1}{1-\epsilon}\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n-x}{\|x_n-x\|}+\epsilon\frac{k_0-x}{d_K(x)}\right\|=1.\end{aligned}$$

Por otro lado, ya que

$$\|2u_n-(\lambda u_n+(1-\lambda)u_0)\|\geq 2-\|\lambda u_n+(1-\lambda)u_0\|\geq 1,$$

entonces $\lim_{n\to\infty}\|\lambda u_n+(1-\lambda)u_0\|=1$. Definamos la función $f_n:\left[\frac{1}{2},1\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f_n(\lambda)=1-\|\lambda u_n+(1-\lambda)u_0\|$.

$$\begin{aligned}\|\lambda u_n+(1-\lambda)u_0\| &= \|(1-\lambda)(u_0+u_n)+\lambda u_n-(1-\lambda)u_n\|\\ &= \|(1-\lambda)(u_0+u_n)+2\lambda u_n-u_n\|\\ &\leq \|(1-\lambda)(u_0+u_n)\|+(2\lambda-1)\|u_n\|\\ &\leq 2(1-\lambda)\left\|\frac{u_0+u_n}{2}\right\|+2\lambda-1.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}f_n(\lambda) &= 1-\|\lambda u_n+(1-\lambda)u_0\|\\ &\geq 1-\left(2(1-\lambda)\left\|\frac{u_0+u_n}{2}\right\|+2\lambda-1\right)\\ &= -2(1-\lambda)\left\|\frac{u_0+u_n}{2}\right\|+2(1-\lambda))\\ &= 2(1-\lambda)\left(1-\left\|\frac{u_0+u_n}{2}\right\|\right))\\ &= 2(1-\lambda)f_n\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda)=0$, entonces $\lim_{n\to\infty}f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, es decir $\lim_{n\to\infty}\|u_n+u_0\|=2$ y ya que X es LRU, u_n tiende a u_0 y por lo tanto x_n tiende a k_0. Concluimos que $x_0\in E'(K)$ y $\|x_0-x\|\leq\epsilon d_K(x)$, que se puede hacer tan pequeño como uno quiera. □

Más adelante veremos que bajo ciertas condiciones la densidad de $E'(K)$ se puede asegurar para todo conjunto cerrado no vacío. La densidad de $E'(K)$ ayuda al estudio de las mejores aproximaciones porque nos permite encontrar formulas para encontrar la distancia entre K y un punto $x \in X \setminus K$.

Si además de la norma, la norma dual es LRU , entonces podemos asegurar la continuidad de la proyección métrica lo que nos permite, en este caso, establecer una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de Chebyshev sea convexo. Para ello vamos a extender el concepto de subdiferencial de Fenchel con la subdiferencial generalizada de Clarke, la cual denotaremos $\widehat{\partial} d_K(x)$ y que se define como:

$$\widehat{\partial} d_K(x) = \left\{ x^* \in X^* : f(y) \leq \limsup_{z \to x, t \to 0} \frac{d_K(z+ty) - d_K(z)}{t} \right\}.$$

Las dos subdiferenciales son equivalentes cuando el conjunto es convexo, resultado que podemos encontrar en [18] junto a la siguiente proposición

Proposición 2.34. *Supongamos que la norma de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es LRU y Fréchet diferenciable. Entonces para un conjunto Chebyshev K y $x \in X \setminus K$, la proyección métrica es continua en x si y solo si $\widehat{\partial} d_K(x)$ es un singulete.*

De lo que tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.35. *Supongamos que las normas de X y X^* son LRU . Entonces un conjunto Chebyshev, K, es convexo si y solo si $\widehat{\partial} d_K(x)$ es un singulete para toda $x \in X \setminus K$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si K es convexo entonces $\widehat{\partial} d_K(x)$ coincide con la subdiferencial usual y, por el Lema 2.29, $d_K(x)$ es una función convexa, como la norma de X^* es LRU por el Corolario 1.52 la norma es Fréchet diferenciable lo que implica que $d_K(x)$ es Fréchet diferenciable para todo $x \in X \setminus K$, la Fréchet diferenciabilidad implica la Gâteaux diferenciabilidad y, por el Teorema 2.30, $\partial d_K(x)$ es un singulete y, por lo tanto, $\widehat{\partial} d_K(x)$ también.

$\Leftarrow$) Si $\widehat{\partial} d_K(x)$ es un singulete para cada $x \in X \setminus K$, por la proposición anterior, la proyección métrica en K es continua y por el Teorema 2.21 (Vlasov) K es convexo. □

2.2 Espacios de Hilbert y conjuntos Chebyshev

Algunos de los resultados que hemos estudiado hasta ahora se pueden mejorar si el espacio cumple con condiciones más restrictivas, por ejemplo:

Teorema 2.36. *[9] (Lau-Konjagin) En todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es equivalente*

i) X es reflexivo y la norma es Kadec-Klee.

ii) Todo subconjunto no vacío cerrado K es casi proximinal.

iii) Para todo subconjunto no vacío cerrado K, $E(K)$ es un G_δ denso en $X \setminus K$, es decir K es casi proximinal.

Sin embargo la existencia de los conjuntos Chebyshev depende mucho de la estructura que impone la norma y el espacio sobre el conjunto mismo, incluso en dimensión finita, por ejemplo, tenemos el siguiente resultado de los trabajos de Tsarkov

Teorema 2.37. *[3] Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión finita y H un hiperplano con dimensión mayor o igual que 3. Entonces existe una norma en X tal que todo conjunto Chebyshev $M \subset H$ acotado con respecto a esta norma es convexo, pero existe uno que no es convexo ni acotado.*

Esto es porque estas normas equivalentes no tienen "buenas" propiedades, como la diferenciabilidad o la suavidad. El Teorema 2.36, La Proposición 2.7 y el Corolario 1.70 nos aseguran que en los espacios de Hilbert todo conjunto cerrado tiene muchos puntos con mejor aproximación, sin embargo no podemos asegurar que todos los puntos tengan mejor aproximación, de hecho muchos matemáticos creen que existe un espacio de Hilbert con un subconjunto Chebyshev no convexo. Por ejemplo, Klee demostró que en todo espacio de Hilbert existe un subconjunto casi Chebyshev cerrado no convexo, también consideró el problema de un subconjunto Chebyshev con complemento convexo (que hoy se conocen como cavernas de Klee). Más adelante, Asplaund demostraría que la existencia de estos conjuntos es equivalente a que exista un conjunto Chebyshev no convexo.

Por estos motivos, sigue sin ser claro si todo conjunto Chebyshev es convexo o no, incluso en los espacios de Hilbert que son ricos en propiedades deseables como la diferenciabilidad de la norma o ser espacios LRU. Los primeros resultados respecto a esta cuestión de la convexidad en los espacios de Hilbert, condujeron a un nuevo concepto:

Definición 2.38. Un conjunto Chebyshev K es llamado sol si, para todo $x \in X$, $P_K\Big(\lambda x + (1-\lambda)P_K(x)\Big) = P_K(x) = \{p_x\}$ para todo $\lambda \geq 0$.

Este concepto fue introducido para los espacios normados lineales en 1953, sin embargo el término sol fue propuesto por Efimov y Steckin en 1958. Vlasov desarrolló este concepto para demostrar el Teorema 2.21. Phelps demostró que la convexidad de los conjuntos Chebyshev en los espacios de Hilbert es equivalente a que la proyección métrica sea no expansiva. Si denotamos $[x,y] := \{z : z = \lambda y + (1-\lambda)x,\ \lambda \in [0,1]\}$, entonces:

Proposición 2.39. *Sea K un conjunto Chebyshev en un espacio de Hilbert $(X, \langle\cdot\rangle)$, entonces es equivalente*

i) *K es convexo.*

ii) *K es un sol.*

iii) *Para todo $x \in X$, $P_K(x) = P_{\{[y,p_x]\}}(x)$ para toda $y \in K$.*

iv) *P_K es no expansiva.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Si K no es un sol, entonces existe $x \in X$ y $\lambda > 0$ tal que $y_\lambda := x + \lambda(x - p_x)$ cumple que $P_K(y_\lambda) \neq P_K(x)$. Por la Proposición 2.2 todos los puntos entre x y p_x tienen como mejor aproximación a p_x. Entonces existe $y \in K$ tal que $\left\|y_\lambda - y\right\| < \left\|y_\lambda - p_x\right\|$. Dividiendo entre $1+\lambda$ tenemos

$$\left\|x - \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}p_x + \frac{1}{1+\lambda}y\right)\right\| = \frac{\left\|y_\lambda - y\right\|}{1+\lambda} < \frac{\left\|y_\lambda - p_x\right\|}{1+\lambda} = \|x - p_x\|.$$

De este modo si K fuera convexo, entonces $\frac{\lambda}{1+\lambda}p_x + \frac{y}{1+\lambda}$ sería una mejor aproximación de x a K, lo que contradice a la definición de p_x, por lo que K no es convexo.

$ii) \Rightarrow iii)$ Si suponemos que existen $x \in X$ y $y \in K$ tales que $P_K(x) \neq P_{\{[y,p_x]\}}(x)$, entonces existe $0 < \lambda \leq 1$ tal que $x_\lambda := \lambda y + (1-\lambda)p_x \in P_{\{[y,p_x]\}}(x)$ y

$$\|x - x_\lambda\| < \|x - p_x\|.$$

Dividiendo entre λ, tenemos

$$\left\|x + \frac{1-\lambda}{\lambda}(x - p_x) - y\right\| < \left\|\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}p_x\right\| = \left\|x + \frac{1-\lambda}{\lambda}(x - p_x) - p_x\right\|.$$

Por lo que y es una mejor aproximación a $x + \frac{1-\lambda}{\lambda}(x - p_x)$ que p_x, es decir K no es un sol.

$iii) \Rightarrow iv)$ Sea $x, y \in X$. Por $iii)$ tenemos $P_K(x) = P_{\{[p_x, p_y]\}}(x)$ y $P_K(y) = P_{\{[p_x, p_y]\}}(y)$, aplicando el Lema 1.79 al segmento formado por los puntos $P_K(x)$ y $P_K(y)$, entonces $\left\langle x - p_x, p_y - p_x \right\rangle \leq 0$ y $\left\langle y - p_y, p_x - p_y \right\rangle \leq 0$. Equivalentemente,

$$\left\langle x - p_x, p_x - p_y \right\rangle \geq 0 \text{ y } \left\langle p_y - y, p_x - p_y \right\rangle \geq 0.$$

Sumando tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - y + p_y - p_x, p_x - p_y \right\rangle \\ &= \left\langle x - y, p_x - p_y \right\rangle - \left\| p_x - p_y \right\|^2 \\ &\leq \left\| x - y \right\| \left\| p_x - p_y \right\| - \left\| p_x - p_y \right\|^2, \end{aligned}$$

por lo que P_K es no expansiva.

$iv) \Rightarrow i)$ Supongamos que K no es un conjunto convexo, por el Lema 2.28 existen $x, y \in K$ tales que $z := \dfrac{x+y}{2} \notin K$. Ahora observemos que

$$\text{máx}\left\{ \|x - p_z\|, \left\| y - p_z \right\| \right\} \geq \frac{\|x - p_z\| + \left\| y - p_z \right\|}{2} \geq \frac{\left\| x - y \right\|}{2}.$$

Si la igualdad se alcanzará, entonces $\|x - p_z\| + \left\| y - p_z \right\| = \left\| x - y \right\|$, por lo que existe $\alpha > 0$ tal que $x - p_z = \alpha\left(p_z - y\right)$ y como $\|x - p_z\| = \dfrac{\left\| x - y \right\|}{2} = \left\| y - p_z \right\|$, entonces $\alpha = 1$ y

$$p_z = \frac{x+y}{2} \notin K,$$

que es una contradicción.

Por lo que $\text{máx}\left\{ \|x - p_z\|, \left\| y - p_z \right\| \right\} > \dfrac{\left\| x - y \right\|}{2}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\|x - p_z\| > \dfrac{\left\| x - y \right\|}{2}$. Pero como $x \in K$, se debe tener que $\{x\} = p_x$ y $\dfrac{\left\| x - y \right\|}{2} = \|x - z\|$ es decir

$$\|p_x - p_z\| > \|x - z\|.$$

Por lo que la proyección métrica no es no expansiva. □

También sabemos que todo conjunto débilmente cerrado en un espacio de Hilbert es proximinal, si éstos conjuntos fueran Chebyshev se puede demostrar que son convexos; para demostrar esta afirmación necesitamos algunos resultados extra. De ahora en adelante vamos a identificar el espacio de Hilbert con su dual, así podemos escribir las funciones lineales continuas como $x^*(y)$, $x(y)$ o $\langle y, x \rangle$ indistintamente. Una definición importante en el análisis convexo es el de la conjugada:

Definición 2.40. Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. La *conjugada (de Fenchel)* de la función f es la función $f^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in X} \Big\{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \Big\}.$$

Observemos que podemos definir la conjugada de $g : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g^* : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$g^*(x) := \sup_{x^* \in X^*} \Big\{ \langle x, x^* \rangle - g(x^*) \Big\}.$$

Lema 2.41. *Sea un espacio de Hilbert $(X, \langle \cdot \rangle)$ y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. La conjugada de Fenchel $f^*(y)$ cumple:*

i) Es semicontinua inferiormente.

ii) Es convexa.

iii) Para toda $x \in X$ y $y^* \in X^*$ se tiene que $f(x) + f^*(y^*) \geq \langle x, y^* \rangle$, esta desigualdad se conoce como la desigualdad Young-Fenchel.

iv) $f^{**}(x) \leq f(x)$.

Demostración. *i)* Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $y_n^* \in \{y^* \in X^* : f^*(y^*) \leq \alpha\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^* = y^*$, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x, y_n^* \rangle = \langle x, y^* \rangle$ para todo $x \in X$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq f^*(y_n^*) \\
&= \sup_{x \in X} \Big\{ \langle x, y_n^* \rangle - f(x) \Big\} \\
&\geq \langle z, y_n^* \rangle - f(z),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} (\langle z, y_n^* \rangle - f(z)) = \langle z, y^* \rangle - f(z) \leq \alpha.$$

Concluimos que $f^*(y^*) \leq \alpha$, por tanto f^* es semicontinua inferiormente.

ii) De la definición de conjugada tenemos para $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}
\alpha f^*(y^*) + (1-\alpha) f^*(z^*) &= \sup_{x \in X} \Big\{ \alpha \langle x, y^* \rangle - \alpha f(x) \Big\} + \sup_{x \in X} \Big\{ (1-\alpha)(\langle x, z^* \rangle - (1-\alpha) f(x) \Big\} \\
&\geq \sup_{x \in X} \Big\{ \alpha \langle x, y^* \rangle - \alpha f(x) + (1-\alpha) \langle x, z^* \rangle - (1-\alpha) f(x) \Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x\in X}\Big\{\langle x, \alpha y^* + (1-\alpha)z^*\rangle - f(x)\Big\} \\
&= f^*(\alpha y^* + (1-\alpha)z^*).
\end{aligned}
$$

Por tanto f^* es convexa.

iii) Es inmediato de la definición de f^*.

iv) De la definición de conjugada de una función $f^* : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tenemos:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*} \{\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*)\} \leq \sup_{x^*\in X^*} \Big\{\langle x, x^*\rangle - \Big(\langle x, x^*\rangle - f(x)\Big)\Big\} = f(x).$$

□

De este lema tenemos que f^{**} es una función convexa y semicontinua inferiormente menor o igual que f, más aún, f^{**} es la mayor función con esas propiedades [4], por lo tanto:

Proposición 2.42. *Si f es convexa y semicontinua inferiormente, entonces $f^{**} = f$.*

Proposición 2.43. *Sea $(X, \langle\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces es equivalente*

i) $y^* \in \partial f(x)$

ii) $f(x) + f^*(y^*) \leq \langle x, y^*\rangle$

iii) $f(x) + f^*(y^*) = \langle x, y^*\rangle$

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Dado $z \in X$ tenemos, por hipótesis, que $f(x) + \langle z - x, y^*\rangle \leq f(z)$, lo que equivale a $f(x) + \langle z, y^*\rangle - f(z) \leq \langle x, y^*\rangle$. Como esta desigualdad se cumple para todo $z \in X$, entonces $f(x) + f^*(y^*) \leq \langle x, y^*\rangle$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Es inmediata con la desigualdad de Young-Fenchel.

$iii) \Rightarrow i)$ $\langle x, y^*\rangle = f(x) + f^*(y^*) \geq f(x) + \langle z, y^*\rangle - f(z)$ para todo $z \in X$, por lo tanto $f(z) - f(x) \geq \langle z - x, y^*\rangle$. Por lo que $y^* \in \partial f(x)$. □

Ahora veamos un ejemplo, calculemos la conjugada de la función $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$.

Ejemplo 13. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Denotemos por $\|\cdot\|_*$ la norma dual. Para $p > 1$ consideramos la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$, entonces $f^*(x^*) = \frac{1}{q}\|x^*\|^{\frac{1}{q}}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En efecto, de la definición de la conjugada

$$
\begin{aligned}
f^*(x^*) &= \sup_{y\in X}\left\{\langle y, x^*\rangle - \frac{1}{p}\|y\|^p\right\} \\
&= \sup_{t>0}\left\{\sup_{\|y\|=t}\left\{t\left\langle \frac{y}{t}, x^*\right\rangle - \frac{1}{p}t^p\right\}\right\} \\
&= \sup_{t>0}\left\{t\|x^*\|_* - \frac{1}{p}t^p\right\}.
\end{aligned}
$$

Esta función depende sólo de t. Definimos la función $h : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(t) = t\|x^*\|_* - \frac{1}{p}t^p,$$

entonces $h'(t) = \|x^*\|_* - t^{p-1}$ y $h'' < 0$, por lo que h alcanza su máximo en t si y sólo si $h'(t) = 0$. Entonces tenemos un máximo en $t = \|x^*\|_*^{\frac{1}{p-1}}$. Además,

$$f^*(x^*) = \sup_{t>0}\left\{t\|x^*\|_* - \frac{1}{p}t^p\right\} = \|x^*\|_*^{\frac{1}{p-1}}\|x^*\|_* - \frac{1}{p}\left(\|x^*\|_*^{\frac{1}{p-1}}\right)^p = \left(1-\frac{1}{p}\right)\|x^*\|_*^q = \frac{1}{q}\|x^*\|_*^q.$$

En particular, $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ es su propia conjugada en los espacios de Hilbert.

Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, dos funciones convexas $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, la *convolución infimal* de f_1 y f_2, que denotaremos como $f_1 \square f_2$, se define como:

$$(f_1 \square f_2)(x) := \inf_{x_1+x_2=x}\left\{f_1(x_1) + f_2(x_2)\right\}.$$

Proposición 2.44. *Sean f, g dos funciones convexas, entonces su convolución infimal, $f \square g$, es convexa.*

Demostración. Consideremos la función $h : X \to \mathbb{R}$ con $h(x) = \inf_{y \in X} \left\{ f(x-y) + g(y) \right\}$. Basta ver que h es una función convexa, sean $x_1, x_2 \in X$, $\alpha \in (0,1)$, $k_1 > h(x_1)$ y $k_2 > h(x_2)$. Entonces existen $y_1, y_2 \in X$ tales que $f(x_1 - y_1) + g(y_1) < k_1$ y $f(x_2 - y_2) + g(y_2) < k_2$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
h(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &\leq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - \alpha y_1 - (1-\alpha)y_2) + g(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \\
&\leq \alpha f(x_1 - y_1) + (1-\alpha) f(x_2 - y_2) + \alpha g(y_1) + (1-\alpha) g(y_2) \\
&= \alpha (f(x_1 - y_1) + g(y_1)) + (1-\alpha)(f(x_2 - y_2) + g(y_2)) \\
&< \alpha k_1 + (1-\alpha) k_2.
\end{aligned}
$$

Tomando límite cuando k_1 y k_2 tienden a $h(x_1)$ y $h(x_2)$ respectivamente tenemos que $h(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha h(x_1) + (1-\alpha) h(x_2)$. □

Proposición 2.45. *Sean $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, entonces $(f_1 \square f_2)^*(x^*) = f_1^*(x^*) + f_2^*(x^*)$*

Demostración. De la definición de convolución infimal y la de conjugada de Fenchel:

$$
\begin{aligned}
(f_1 \square f_2)^*(x^*) &= \sup_{x \in X} \left\{ \langle x, x^* \rangle - (f_1 \square f_2)(x) \right\} \\
&= \sup_{x \in X} \left\{ \langle x, x^* \rangle - \inf_{x_1 + x_2 = x} \{ f_1(x_1) + f_2(x_2) \} \right\} \\
&= \sup_{x \in X} \left\{ \langle x, x^* \rangle + \sup_{x_1 + x_2 = x} \{ -f_1(x_1) - f_2(x_2) \} \right\} \\
&= \sup_{x \in X} \sup_{x_1 + x_2 = x} \left\{ \langle x_1 + x_2, x^* \rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2) \right\} \\
&= \sup_{x \in X} \sup_{x_1 + x_2 = x} \left\{ \langle x_1, x^* \rangle - f_1(x_1) + \langle x_2, x^* \rangle - f_2(x_2) \right\} \\
&= \sup_{x_2, x_1 \in X} \left\{ \langle x_1, x^* \rangle - f_1(x_1) + \langle x_2, x^* \rangle - f_2(x_2) \right\} \\
&= \sup_{x_1 \in X} \left\{ \langle x_1, x^* \rangle - f_1(x_1) \right\} + \sup_{x_2 \in X} \left\{ \langle x_2, x^* \rangle - f_2(x_2) \right\} \\
&= (f_1^* + f_2^*)(x^*).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 2.46. *Sean $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $x_1, x_2 \in X$ tales que $(f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, entonces $\partial(f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) = \partial f_1(x_1) \cap \partial f_2(x_2)$.*

Demostración. De la proposición 2.43 tenemos

$$\begin{aligned} y^* \in \partial(f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) &\Leftrightarrow (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) + (f_1 \square f_2)^*(y^*) = \langle x_1 + x_2, y^* \rangle \\ &\Leftrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_1^*(y^*) + f_2^*(y^*) = \langle x_1, y^* \rangle + \langle x_2, y^* \rangle \\ &\overset{\star}{\Leftrightarrow} f_1(x_1) + f_1^*(y) - \langle x_1, y^* \rangle = 0 \text{ y } f_2(x_2) + f_2^*(y) - \langle x_2, y^* \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in \partial f_1(x_1) \cap \partial f_2(x_2). \end{aligned}$$

En $\star$ utilizamos la desigualdad de Young-Fenchel. □

Proposición 2.47. *Sean f_1, f_2, x_1 y x_2 como en la Proposición anterior. Si f_1 es Gâteaux (Fréchet) diferenciable en x_1 , entonces $(f_1 \square f_2)$ es Gâteaux (Fréchet) diferenciable en x_1.*

Demostración. Sea $x^* \in \partial(f_1 \square f_2)(x_1 + x_2)$, entonces para toda $y \in S_X$

$$\begin{aligned} \langle y, x^* \rangle &\leq (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2 + y) - (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) \\ &\leq f_1(x_1 + y) + f_2(x_2) - f_1(x_1) - f_2(x_2) \\ &= f_1(x_1 + y) - f_1(x_1). \end{aligned}$$

Si f_1 es Gâteux diferenciable en x_1, por la Proposición anterior $x^* \in \partial f_1(x_1)$ y por el Teorema 2.30 $\langle y, x^* \rangle = f_1'(x_1, y)$ para todo $y \in S_X$. Además, si cambiamos y por ty, dividimos entre $t > 0$ y sacamos límite cuando t tiende a cero por la derecha en

$$\langle y, x^* \rangle \leq\leq (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2 + y) - (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2) \leq f_1(x_1 + y) - f_1(x_1),$$

tenemos

$$\langle y, x^* \rangle \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{\leq (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2 + ty) - (f_1 \square f_2)(x_1 + x_2)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f_1(x_1 + ty) - f_1(x_1)}{t} = f_1'(x_1, y),$$

lo que implica que $(f_1 \square f_2)'(x_1 + x_2, y) = f_1'(x_1, y)$ para todo $y \in S_X$, por lo que $(f_1 \square f_2)$ es Gâteaux diferenciable en $x_1 + x_2$. Si f_1 es Fréchet diferenciable $f_1'(x_1, y)$ es uniforme para $y \in S_X$ por lo tanto $(f_1 \square f_2)'(x_1 + x_2, y)$ también, así la función $(f_1 \square f_2)$ es Fréchet diferenciable en $x_1 + x_2$. □

En este contexto es útil introducir la *función indicatriz* del conjunto K, δ_K, definida por $\delta_K(x) = 0$ si $x \in K$ y $\delta_K(x) = \infty$ si $x \notin K$, de este modo tenemos

Proposición 2.48. *Si K es un subconjunto convexo cerrado de un espacio de Hilbert $(X, \langle\cdot\rangle)$, entonces δ_K es convexa y semicontinua inferiormente.*

Demostración. Si $\alpha < 0$, entonces $\delta_K^{-1}(\alpha) = \emptyset$, si $\alpha \geq 0$ tenemos que $\delta_k^{-1}(\alpha) = K$. En ambos casos la imagen inversa es un cerrado por lo que δ_K es semicontinua inferiormente.

Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in (0,1)$, si $x \notin K$ ó $y \notin K$, es claro que $\infty = \alpha\delta_K(x) + (1-\alpha)\delta_K(y) \geq d_K\Big(\alpha x + (1-\alpha)y\Big)$. Si $x, y \in K$, como K es convexo, $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$ por lo que $0 = \alpha\delta_K(x) + (1-\alpha)\delta_K(y) \geq d_K\Big(\alpha x + (1-\alpha)y\Big) = 0$. □

Proposición 2.49. *Sea K un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert $\Big(X, \langle\cdot\rangle\Big)$, entonces $\frac{1}{2}d_k^2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_k^*(x)$.*

Demostración. Por definición de la convolución infimal y la función indicatriz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_k^*(x) &= \inf_{y \in X}\left\{\frac{1}{2}\|x-y\|^2 + \delta_k^*(y)\right\} \\
&= \inf_{y \in K}\left\{\frac{1}{2}\|x-y\|^2 + \delta_k^*(y)\right\} \\
&= \inf_{y \in K}\left\{\frac{1}{2}\|x-y\|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}d_k^2(x).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.50. *Sean K un subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Hilbert, y $f(y) := \frac{1}{2}\left\|y\right\|^2 + \delta_K(y)$. Entonces $d_K^2(y) = \left\|y\right\|^2 - 2f^*(y)$.*

Demostración. De la definición de f

$$\begin{aligned}
f^*(y) &= \sup_{x \in X}\{\langle x, y\rangle - f(x)\} \\
&= \sup_{x \in X}\left\{\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \delta_K(x)\right\} \\
&= \sup_{x \in X}\left\{\frac{1}{2}\langle y, y\rangle + \Big(\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle x, x\rangle\Big) - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle - \delta_K(x)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\langle y, y\rangle + \sup_{x \in X}\left\{-\frac{1}{2}\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle y, y\rangle - \delta_K(x)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\inf_{x \in X}\Big\{\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \delta_K(x)\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\inf_{x\in X}\left\{(\langle x-y, x-y\rangle)^2 + \delta_K(x)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\inf_{x\in K}\left\{(\langle x-y, x-y\rangle)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}d_K^2(y).
\end{aligned}
$$

De lo que se sigue el resultado. □

En [60] podemos encontrar el siguiente teorema

Teorema 2.51. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función no idénticamente igual a ∞, con $\{x : \partial f^*(x) \neq \emptyset\}$ no vacío y abierto. Considerando la dualidad (X^*, X^{**}), si*

i) f es semicontinua inferiormente y f^* es Fréchet diferenciable para todo $x^* \in dom\ \partial f^*$ o

ii) X es débilmente secuencialmente completo, f es débilmente semicontinua inferiormente y f^* es Gâteaux diferenciable para todo $x^* \in \partial f^*$,

entonces f es una función convexa.

Como estamos trabajando en espacios de Hilbert, la dualidad se puede escribir como (X^*, X). Con el fin de demostrar que si K es un conjunto cerrado no vacío, entonces d_K^2 es Fréchet diferenciable si y sólo si K es convexo demostremos el siguiente lema:

Lema 2.52. *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función convexa y semicontinua inferiormente no idénticamente ∞. Para cualquier $u \in X$ fijo la función $g(x) := \frac{1}{2}\|x-u\|^2 + f(x)$ tiene un único mínimo.*

Demostración. Las funciones f y $\frac{1}{2}\|x-u\|^2$ son débilmente semicontinuas inferiormente, entonces g también lo es. Por otro lado como f es convexa semicontinua inferiormente, entonces existen $y \in X$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que para toda $x \in X$ se cumple que $\langle x, y\rangle - \beta \leq f(x)$, entonces

$$
\begin{aligned}
g(x) = \frac{1}{2}\|x-u\|^2 + f(x) &\geq \frac{1}{2}\|x-u\|^2 + \langle x, y\rangle - \beta \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle x-u, x-u\rangle + 2\langle x, y\rangle + 2\langle u, y\rangle - 2\langle u, y\rangle + \langle y, y\rangle - \langle y, y\rangle\Big) - \beta \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle x-(u-y), x-(u-y)\rangle + 2\langle u, y\rangle - \langle y, y\rangle\Big) - \beta \\
&= \frac{1}{2}\|x-(u-y)\|^2 - \langle u, y\rangle - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \beta.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis existe $b \in X$ tal que $f(b) < \infty$, por lo que podemos tomar $\rho > 0$ tal que si $\|x-(u-y)\| > \rho$ entonces $g(u) > g(b)$. Si consideramos una bola cerrada, $B[u-y,r]$ con $r > \rho$ que contenga a b y una sucesión no creciente $\lambda_n \leq g(b)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \inf(g)$, como g es semicontinua inferiormente los conjuntos $K_n := \{x : g(x) \leq \lambda_n\}$ son cerrados y están contenidos en $B[u-y,r]$ por lo que son débilmente compactos, como g es convexa K_n también, además $K_{n+1} \subset K_n$ por lo que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es no vacío y convexo, es decir g tiene un mínimo en $B[u-y,r]$. Para todo $x \notin B[u-y,r]$ se cumple que $g(x) \geq g(b)$ por lo tanto los mínimos en $B[u-y,r]$ son mínimos globales.

Finalmente g es estrictamente convexo por ser la suma de una función convexa y una estrictamente convexa, si existieran dos puntos diferentes x_1, x_2 que minimizaran a g, entonces $g(x_1) \leq g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}g(x_1) + \frac{1}{2}g(x_2) = g(x_1)$, que no es posible, por lo que el mínimo es único. $\square$

Teorema 2.53. *Sea $(X, \langle\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y K un conjunto cerrado no vacío. Entonces K es convexo si y sólo si d_K^2 es Fréchet diferenciable.*

Demostración. Consideremos $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \delta_K(x)$, de la Proposición 2.50 sabemos que $f^*(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}d_K^2(x)$ para toda $x \in X$, de lo que $d_K^2(x) = \|x\|^2 - 2f^*(x)$ y f^* es continua en X, que es un conjunto abierto. La Fréchet diferenciabilidad de la norma es consecuencia del Corolario 1.52. Como la suma de dos funciones Fréchet diferenciables es Fréchet diferenciable, f^* es Fréchet diferenciable si y sólo si d_K^2 lo es.

$\Rightarrow$) Primero veamos que $f^*(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K^*(x)$.

Por la Proposición 2.49 sabemos que $\frac{1}{2}d_K^2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K(x)$. Por la desigualdad del triángulo: $\alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \geq \|\alpha x + (1-\alpha)y\|$ para todo $\alpha \in (0,1)$ y todo $x, y \in X$, es decir, la norma es convexa, como K es cerrado y convexo, por la Proposición 2.2, δ_K es convexa. Por la Proposición 2.44 la función $\frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K(x)$ es convexa. También sabemos que d_k es continua, por lo que d_K^2 también, en particular es semicontinua inferiormente, por lo tanto $\frac{1}{2}d_K^2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K(x)$ es semicontinua inferiormente y convexa, de lo que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}d_K^2(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K(x) &= \left(\frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K(x)\right)^{**} && \text{Por la Proposición 2.42.}\\
&= \left(\left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right)^{*} + (\delta_K(x))^{*}\right)^{*} && \text{Por la Proposición 2.45}\\
&= \left(\frac{1}{2}\|x\|^2 + \delta_K^{*}(x)\right)^{*} && \text{Por el Ejemplo 13}\\
&= \sup_{y\in X}\left\{\langle y,x\rangle - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta_K^{*}(y)\right\}\\
&= \sup_{y\in X}\left\{\langle y,x\rangle - \frac{1}{2}\Big(\langle y,y\rangle\Big) - \delta_K^{*}(y)\right\}\\
&= \sup_{y\in X}\left\{\langle y,x\rangle - \frac{1}{2}\Big(\langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle\Big) - \delta_K^{*}(y)\right\}\\
&= \sup_{y\in X}\left\{\langle y,x\rangle - \frac{1}{2}\Big(\langle x-y,x-y\rangle + 2\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle\Big) - \delta_K^{*}(y)\right\}\\
&= \sup_{y\in X}\left\{\langle y,x\rangle - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \langle x,y\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \delta_K^{*}(y)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \inf_{y\in X}\left\{\frac{1}{2}\|x-y\|^2 + \delta_K^{*}(y)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \left(\frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K^{*}(x)\right).
\end{aligned}
$$

Por lo que $\frac{1}{2}\|x\|^2 \square \delta_K^{*}(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}d_K^2(x) = f^{*}(x)$. Por el Lema 2.41, la función $f^{*}(x)$ es convexa y semicontinua inferiormente. El ínfimo de la convolución se alcanza porque la función $g(u) = \frac{1}{2}\|x-u\|^2 + \delta_K^{*}(u)$ tiene un mínimo por el Lema 2.52. Por la Proposición 2.47 $f^{*}(x)$ es Fréchet diferenciable, así que d_K^2 también lo es.

$\Leftarrow$) Como $d_K^2(x)$ es Fréchet diferenciable también lo es $f^{*}(x)$. Por el Lema 2.5 la norma es semicontinua inferiormente, por la Proposición 2.2 δ_K también lo es. Como la norma y la indicatriz con semicontinuas inferiormente y $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \delta_k$, entonces $f(x)$ también. i) del Teorema 2.51 implica que $f(x)$ es convexa, en particular es convexa para toda $x \in X$ tal que $f(x) < \infty$, pero $f(x)$ es finita sólo cuando $x \in K$, es decir K es convexo. □

Finalmente demostraremos uno de los mejores resultados en la convexidad de los conjuntos Chebyshev en los espacios Hilbert.

Teorema 2.54. *Sea $(X, \langle\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert, K un conjunto no vacío débilmente cerrado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *K es convexo,*

ii) *K es un conjunto Chebyshev,*

iii) *d_K^2 es Gâteaux diferenciable,*

iv) *d_K^2 es Fréchet diferenciable.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Como el espacio es reflexivo y K débilmente cerrado, por el Teorema 1.65, K es proximinal, además el espacio es uniformemente convexo por el Teorema 1.69. Usando la Proposición 1.74 concluimos que K es Chebyshev.

$i) \Leftrightarrow iv)$ es consecuencia del Teorema 2.53.

$iv) \Rightarrow iii)$ es inmediato.

$iii) \Rightarrow i)$ Tomando f como en el Teorema 2.50 e identificando X con X^*: Como K es débilmente cerrado, f es débilmente inferiormente semicontinua. como d_K^2 es Gâteaux diferenciable y $d_K^2(y) = \left\|y\right\|^2 - 2f^*(y)$, entonces f^* es Gâteaux diferenciable en $X^* = X$. Como X es un espacio de Hilbert es débilmente secuencialmente completo. Por el Teorema 2.51 $ii)$ tenemos que $f(x)$ es convexa, por el Lema 2.29 K es convexo.

$ii) \Rightarrow iii)$ Supongamos que K es un conjunto Chebyshev, $x \in X$ y p_x su mejor aproximación. Como $d_K^2(x) = \|x\|^2 - 2f^*(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x - p_x\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle x, x\rangle - \langle x - p_x, x - p_x\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle + 2\langle x, p_x\rangle - \langle p_x, p_x\rangle\right) \\ &= \langle x, p_x\rangle - \frac{1}{2}\|p_x\|^2 \\ &= \langle x, p_x\rangle - f(p_x), \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle x, p_x\rangle = \langle p_x, x\rangle = f(p_x) + f^*(x) \geq f^{**}(p_x) + f^*(x),$$

por la Proposición 2.43, $p_x \in \partial f^*(x)$ para todo $x \in X$.

Si fijamos $x \in X$, $y \in \partial f^*(x)$ y tomamos $x_n = x + \dfrac{y - p_x}{n}$, es claro que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Si $\{p_{x_n}\} = P_K(x_n)$, sabemos del Teorema 2.11 que se debe cumplir que p_{x_n} converge débilmente a p_x. Dado que $y, p_{x_n} \in \partial f^*$ entonces

$$\left\langle x_n - x, p_{x_n} \right\rangle \leq f^*(x_n) - f^*(x) \quad \text{ y } \quad \langle x - x_n, y \rangle \leq f^*(x) - f^*(x_n)$$

de lo que se sigue que $\left\langle x_n - x, p_{x_n} \right\rangle + \langle x - x_n, y \rangle = \left\langle x_n - x, p_{x_n} \right\rangle - \langle x_n - x, y \rangle \leq 0$, es decir

$$\left\langle x_n - x, p_{x_n} - y \right\rangle = \frac{1}{n} \left\langle y - p_x, p_{x_n} - y \right\rangle \leq 0,$$

por lo tanto $\left\langle y - p_x, p_{x_n} - y \right\rangle \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando el límite cuando n tiende a infinito, $-\left\| y - p_x \right\| \geq 0$, es decir $y = p_x$, así para todo $x \in X$, $\partial f^*(x) = \{p_x\}$, f^* es una función continua ya que la norma y la función distancia son continuas y $f^*(x) = \dfrac{\|x\|^2 - d_K^2(x)}{2}$, además la conjugada es una función convexa, entonces f^* es continua y convexa, por el Teorema 2.30, f^* es Gâteaux diferenciable, por lo que también lo es d_K^2. $\square$

Conclusiones

La Teoría de Aproximación, representa una de las áreas del Análisis Numérico que recientemente ha mostrado su gran utilidad práctica y eficiencia en algunos campos de la ingeniería y la computación, especialmente en la implementación de procesos y algoritmos para disminuir los costes computacionales y, así, poder aplicar éstos a sistemas más complejos o reducir el tiempo para la obtención de los resultados.

Por otro lado el estudio de la convexidad se ha desarrollado desde los tiempos de Euclides, sin embargo su desarrollo sistemático vino hasta 1934 de la mano de Bonnesen y Fenchel, en los años siguientes se descubrieron importantes y numerosas aplicaciones, especialmente en la optimización geométrica. El trabajar sobre un conjunto convexo con una función convexa nos permite asegurar que los puntos críticos son mínimos. Muchos problemas derivan, de manera natural, en optimización de funciones convexas y algunas se definen sobre conjuntos convexos (Como las funciones lineales, el método simplex, compresión de imágenes, manejo de señales, etc.).

Por las razones antes citadas, es usual que las condiciones o restricciones impuestas a un problema deriven en la optimización sobre conjuntos convexos, en particular en los espacios de Hilbert (por sus importantes aplicaciones en la teoría de las representaciones, ecuaciones diferenciales parciales, análisis espectral de funciones, mecánica cuántica, etc.), y aunque se han dado grandes pasos para la solución del problema de la convexidad de los conjuntos Chebyshev aún falta mucho para alcanzar esa meta. Este trabajo es una introducción tanto al estudio de los conjuntos proximinales y Chebyshev como de algunos de los métodos con los que se han estudiado y pretende ser una introducción para un estudio más formal del tema.

En los últimos años se han empezado a estudiar nuevas ideas sobre como construir conjuntos Chebyshev no convexos, a mí parecer, la más importante y que puede ser una buena línea de futuros estudios, se da en [20] donde Faraci y Iannizzotto construyen un conjunto Chebyshev no convexo en un espacio pre-Hilbert, no es claro como llevar este conjunto a un espacio de Hilbert, pero su trabajo ha conducido a nuevas ideas para la construcción de un conjunto Chebyshev no convexo en un espacio de Hilbert, una de ellas debida a Biagio [8] en la que considera el problema: Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente tal que para todo $y \in X$ y $\lambda > 0$ la función $x \longmapsto \|x-y\|^2 + \lambda f(x)$ tiene un único mínimo global, entonces ¿f es convexa? La respuesta a esta pregunta, en dimensión finita, es afirmativa, sin embargo si suponemos que en dimensión infinita no se cumple esto, entonces se puede construir, en $L^2([0,1],X)$, un conjunto Chebyshev no convexo.

Bibliografía

[1] Abatzouglou, *The metric projection on C^2 manifolds in Banach spaces*, J. Approximation theory 26 (1979).

[2] Achieser N.I., *Theory of Approximation*, Frederick Ungar, New York (1956)

[3] Alimov A. R., *Convexity of Chebyshev sets in finite-dimensional spaces*, Mat. Notes 78 (2005).

[4] Álvarez Felipe, Escobar Juan y Peypouquet Juan, *Análisis convexo y dualidad*. Departamento de ingeniería matemática, Universidad de Chile. (2005).

[5] Andrés Sambarino Álvaro Rovella, *Análisis Funcional*, 31 de agosto de 2005.

[6] Arkhangel A.V., FedorchukV.V., *Basic concepts and constructions of general topology*, Encyclopedia of the Mathematical Sciences 17, Springer (1990).

[7] Assadi; Haghshenas; Narang T. D., *A look at proximinal and chebyshev sets in Banach spaces.* Le matematiche vol. LXIX (2014).

[8] Biagio Ricceri, *A conjecture implying the existence of non-convex Chebyshev set in infinite dimensional Hilbert spaces*, AMS Le matematiche Vol. LXV (2010).

[9] Borwein J. M., Fitzpatrick, *Existence of nearest points in Banach spaces*, Can. J. Math. XLI (1989).

[10] Borwein J. M., J. Vanderwerff, *Convex functions, constructions, charectarizations and counterexamples*, Cambridge University Press, (2010).

[11] Braess D. *Nonlinear approximation theory*, Springer-Verlag, Berlin (1986).

[12] Brondsted A., *Convex sets and Chebyshev sets*, Math Scand 17 (1965).

[13] Cascales y Troyanski *Fundamentos de Análisis Matemático 2007*, Universidad de Murcia.

[14] Cabello Piñar, *Análisis funcional* Universidad de Granada (2009).

[15] Chebyshev P. L., *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, Mém. des sav. étr. prés. à l'Acad. de St. Pétersb. 7 (1854).

[16] Denkowski Zdzislaw, *An introduction to nonlinear analysis; theory*, institute of computer science. (1961).

[17] Deutsch F. *Best approximation in innner product spaces*, Springer-Verlag, New York (2001).

[18] Dutta S., *Generalized dubdiferential of the distance function.* American mathematical society, vol. 133. (2005).

[19] Efimov N. V., Stechkin S. B., *Approximative compactness and Chebyshev sets*, Soviet Math, Dokl 2 (1961).

[20] Faraci F., Iannizzotto A., *Well possed optimiztion problems and non.convex Chebyshev sets in Hilbert spaces*, SIAM J. Optim. 19 (2008).

[21] Fitzpatrick S., *Metric projections and the differentiability of distance function*, Bull. Austral. Math. Soc. 22 (1980).

[22] Floret K., *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring (1978).

[23] Gabriel N. Gática, *Introducción al Análisis Funcional:Teoría y Aplicaciones. Parte 1 (Version Preliminar)* Centro de Investigación en Ingeniería Matemática Universidad de Concepción.

[24] Gérard Leobourg, *Valeur moyenne pour gradient généralisé*, C.R. Acad. Sci. Paris ser. A 281 (1975).

[25] Guirao Sánchez Antonio José, *Clasificación topológica de los espacios de Banach.* Tesina de licenciatura. Universidad de Murcia, octubre de (2005).

[26] James A. Clarkson. *Uniformly convex spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., 40(3):396414 (1936).

[27] James Fletcher, Warren B. Moors *The Chebyshev set problem*, Departament or Mathematics, University of Auckland (2013).

[28] James R. C., *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*. Proc. Nat.Acad. Sci. U.S.A. 37 (1951).

[29] Jiang M., *On Jhonson´s example of a non-convex Chebyshev set*, J. Approximation theory 74 (1993).

[30] John R. Giles. *Convex analysis with application in the differentiation of convex functions*, volume 58 of Research notes in mathematics. Pitman (Advanced publishing program), Boston, Mass (1982).

[31] Jhonson G. G., *A non-convex set wich has the unique nearest point property*, J. Approximation theory 51 (1987).

[32] Jhonson G. G., *Clousure in a Hilbert space of a prheHilbert space Chebyshev set*, Topology and its applications 153 (2005).

[33] Josefa Cánovas Cánovas, Víctor Huertas Navarro, María Sempere Orts, *Optimización matemática aplicada. Enunciados, ejercicios y aplicaciones del mundo real con MATLAB*. Ed. Club Universitario (2010).

[34] Martín Gómez José, *Análisis funcional y optimización*, Universida de Granada, apuntes del curso 2010.

[35] KleeV. L., *The support property of a convex set in a linear normed space*, Duke Math, J. 15 (1948).

[36] Klee V. L., *Convexity in Chebyshev sets*, Math Ann. 142 (1961).

[37] Ka-Sing Lau, *Almost chebyshev subsets in reflexive Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978).

[38] Markusevich A. I., *Theory of analytinc functions*, Gostekhizdat (1950).

[39] Moreau J. J., *Proximité et dualité dans un espace hilbertein*, Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965).

[40] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, *Functional Analysis and Infinite-dimensional Geometry*, CMS (2001).

[41] Narag T. D., *Best approximation in metric spaces*, Pub. Mat. UAB, vol. 27 (1983).

[42] Nicolescu M., *Sur la meilleure approximation d'une fonction donnée par les fonctions dúne famille donnée*, Bull. Fac. Sti. Cernauti (1938).

[43] Nikolskii S. M., *On the best approximation of functions satisfying a Lipsxhitz condition by polynomials*, Izv Akad. Nauk. USSR (1946).

[44] *Differentiability of convex functions, subdifferential*, Università degli Studi di Milano, Dipartimento di Matematica "F. Enriques".

[45] Maalek Ghaini F. M., *Quasi-orthogonality of the best approximant sets*, Nonlinear analisys (2006).

[46] Mira López J. A., *Lecciones sobre la teoría de la medida e integración*, Universidad de Alicante.

[47] Motzkin T. S., *Sur quelques properietes cracteristiques des ensembles bornes non convexes*, Rend. Reale acad. Lincei, Mat Nat. (1935) .

[48] Payá Albert Rafael, *Apuntes de análisis funcional*, Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada.

[49] Phelps R. R., *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation*, Tran Amer. Math Soc. 95 (1960).

[50] Phelps R.R., *Convex functions, monotone operators and fifferentiability*, Lecture notes in mathematics, Springer, Berlin, Germany (1989).

[51] Phelps R.R., *Convexs sets and nearests points*, Proc. Amer. Math. Soc. (1957).

[52] Precupanu Teodor, Viorel Barbu, *Convexity and optimization in Banach spaces.* Springer monographs in mathematics. 2010.

[53] Tsarkov I. G., *Bounded chebyshev sets contained in a subspace*, Math. Zamtki [Math notes] (1984).

[54] Singer Ivan, *The best approximation in normed spaces by elements of linear subespaces*, Springer-Verlag, New York (1970).

[55] Singer Ivan, *The theory of best approximation and functional analysis*, Society for industrial an dapplied mathematics, Philadelphia, (1974).

[56] Triloki Nath, *Differentiability of distance function and the proximinal condition impliying convexity*. Departament of mathematics and statics schoool of mathematical and physical sciences, (2015).

[57] Vlasov L. P., *Chebyshev sets in Banach spaces*, Soviet math. Dokl 3 (1962).

[58] Vlasov L. P., *Almost convexity and Chebyshev sets* Math notes Acad. USRR (1967).

[59] Werner Gähler, Horst Herrlich, *Recent developments of general topology and its applications*, Berlín (1992).

[60] C. Zalinescu, *Convex analysis in general vector spaces*, Faculty of Mathematics, Romania, (2002).