UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CONEXIDAD Y TOPOLOGÍA DE FELL

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
IVÁN AXELL GÓMEZ RAMOS

DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE DE 2017

CONEXIDAD Y TOPOLOGÍA DE FELL

IVÁN AXELL GÓMEZ RAMOS

Índice

1. Introducción

Dado un conjunto X con cierta estructura, por ejemplo la de un espacio métrico, un espacio topológico, o bien un espacio de probabilidad, entre otras, es común considerar familias de subconjuntos de X a las que también se les dota de una estructura matemática similar. Luego se suelen obtener propiedades de las familias, a través de propiedades del conjunto X que las originó. También, y esto es lo interesante, se suelen obtener propiedades de X, a través de propiedades de alguna de sus familias asociadas. Cuando X es un espacio topológico, las familias más comúnes asociadas a X, son 2^X y $CL(X)$, las de los subconjuntos cerrados de X y las de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. La estructura asociada a dichas familias es la topológica y, entre todas las topologías que le podemos dar a 2^X y a $CL(X)$, las más populares son las llamadas *topología de Vietoris* τ_V y *topología de Fell* τ_F, que introducimos en las secciones 3 y 4, respectivamente.

Si X es un espacio topológico y tenemos una función cerrada $f\colon X \to X$, entonces podemos considerar las funciones $2^f\colon 2^X \to 2^X$ y $CL(f)\colon CL(X) \to CL(X)$ definidas, para cada $A \in 2^X$ y toda $B \in CL(X)$, como $2^f(A) = f(A)$ y $CL(f)(B) = f(B)$. Dotando a 2^X y a $CL(X)$ de la topología de Vietoris, o bien de la topología de Fell, es natural preguntarse por condiciones, bajo las cuales, la continuidad de f implica la continuidad de 2^f y/o de $CL(f)$. Después de lograr esto, es común verificar si cuando a f se le pide una propiedad topológica o bien una propiedad dinámica, entonces alguna de 2^f o de $CL(f)$ posee la misma, o bien otra, propiedad topológica o dinámica. También se suele verificar si cuando a 2^f o a $CL(f)$ se le impone alguna propiedad topológica o dinámica, sucede que la función f posee la misma, o bien otra propiedad topológica o dinámica. En este aspecto, algunos de los artículos más recientes en donde la topología de Fell juega un papel importante, son [8], [18] y [19].

Si X es un espacio topológico y P es una propiedad topológica, es común preguntarse si cuando X posee la propiedad P, alguno o los dos hiperespacios 2^X y $CL(X)$ también poseen la propiedad P, o bien otra propiedad topológica, digamos Q. El problema inverso también es interesante, es decir, si cuando alguno de 2^X y $CL(X)$ posee una propiedad P, se sigue que X también posee la propiedad P, o bien otra propiedad. Existe bastante literatura al respecto cuando a 2^X se le equipa la topología de Vietoris y el lector interesado puede consultar sobre ello, principalmente [7] y [13]. Cuando a 2^X se le da la topología de Vietoris o la de Fell, se pueden consultar textos como [1], [2], [3], [9] y [11], siendo el primero y el tercero artículos centrados en la topología de Fell.

Como se indica en [6], la topología de Fell tiene aplicaciones en la Teoría de Optimización, el Análisis Complejo, en la Economía y en la Teoría de la Probabilidad, entre otras. Como muestra de ello se pueden consultar las referencias dadas en [1]. En 2014 se presentó la Tesis de Licenciatura [5], trabajo en el que se prueban propiedades fundamentales de la familia 2^X equipada con la topología de Fell, y donde también se estudia el problema planteado en el segundo párrafo, es decir, la relación entre una propiedad impuesta a f y si la preservan 2^f o $CL(f)$. Se estudia también la situación inversa, es decir, si una propiedad impuesta en alguno de 2^f o $CL(f)$ la preserva f. En [5] también se estudian algunas propiedades topológicas P, para las cuales, el problema descrito en el tercer párrafo tiene solución. La conexidad local es una de las propiedades que, por cuestiones de tiempo y porque las correspondientes demostraciones presentan un grado de complejidad mayor al que se requiere para una Tesis de Licenciatura, no se incluyó en [5] y es presentada aquí en la Sección 8, siendo la Proposición 8.10 y el Teorema 8.11, los resultados principales del presente trabajo.

2. Nociones y Notación Preliminar

Para un espacio topológico (X, τ) y $A \subseteq X$, denotamos por $\mathrm{cl}_X(A)$ y por $\mathrm{int}_X(A)$ a la cerradura y al interior de A en X, respectivamente. Cuando sea necesario expresar la topología del espacio con respecto al que se está tomando la cerradura o el interior, usamos la notación extendida $\mathrm{cl}_{(X,\tau)}(A)$ o $\mathrm{int}_{(X,\tau)}(A)$, según corresponda. Si $B \subseteq Y \subseteq X$, entonces B es un subconjunto compacto (respectivamente, conexo) del subespacio Y de X, si y sólo si B es un subconjunto compacto (respectivamente, conexo) de X. Este resultado se utilizará con frecuencia en el presente trabajo, principalmente en la Sección 8.

Considerando todos los subconjuntos cerrados de X, se define la familia:

$$2^X = \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado en } X\}.$$

Notemos que $\emptyset \in 2^X$. Podemos excluir de la definición de 2^X al conjunto vacío, para así obtener la familia:

$$CL(X) = \{F \in 2^X \mid F \neq \emptyset\}.$$

También consideramos la colección de los subconjuntos compactos y no vacíos de X:

$$K(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es compacto de } X \text{ y } A \neq \emptyset\}.$$

Para darle una topología a 2^X y a $CL(X)$, utilizamos los conjuntos que se definen a continuación.

Notación 2.1. Sea $\mathcal{H}$ una familia finita de subconjuntos de X. Denotamos por $\langle\mathcal{H}\rangle$ al conjunto de todos los subconjuntos cerrados de X, contenidos en la unión de los elementos de $\mathcal{H}$, y que intersectan a cada miembro de $\mathcal{H}$, es decir:

$$\langle\mathcal{H}\rangle = \left\{F \in 2^X \mid F \subseteq \bigcup \mathcal{H} \text{ y } F \cap H \neq \emptyset, \text{ para cada } H \in \mathcal{H}\right\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia finita de subconjuntos de X, escribimos $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$, en lugar de $\langle\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}\rangle$. Notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada familia finita $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de subconjuntos de X, sucede que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subseteq 2^X$. Por otro lado si $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia finita de subconjuntos de X, entonces es fácil probar que se cumplen las siguientes propiedades:

a) si para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sucede que $U_i = \emptyset$, entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \emptyset$;

b) si X es T_1 y $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \emptyset$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $U_i = \emptyset$.

Más aún, como el vacío es un conjunto finito, es posible que la familia $\mathcal{H}$ de la Notación 2.1 sea vacía. En ese caso, el conjunto $\langle\mathcal{H}\rangle$ es la colección de los subconjuntos cerrados de X, contenidos en $\bigcup\emptyset = \emptyset$ y que intersectan a cada elemento de $\mathcal{H}$. Por vacuidad, todo cerrado intersecta a cualquier elemento de $\mathcal{H}$. Sin embargo, el único cerrado que está contenido en la unión de $\mathcal{H}$ es el vacío. Así, cuando $\mathcal{H}$ es la familia vacía, $\langle\mathcal{H}\rangle = \{\emptyset\}$. A lo largo del presente trabajo, el símbolo $\mathcal{F}_\emptyset$ denota la familia vacía. Luego, $\langle\mathcal{F}_\emptyset\rangle = \{\emptyset\}$.

En el siguiente resultado enunciamos otras propiedades fundamentales de los conjuntos anteriormente definidos.

Proposición 2.2. *Sean X un espacio topológico no vacío, $n, m \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m \subseteq X$. Si $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^m V_j$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $\langle X\rangle = CL(X)$;

b) $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m\rangle$.

Demostración. Para probar a), notemos que $\langle X\rangle \subseteq CL(X)$. Supongamos ahora que $F \in CL(X)$. Entonces $F \subseteq X$, así que $F \cap X = F \neq \emptyset$. Por tanto $F \in \langle X\rangle$. Esto muestra a).

Para probar b), notemos que

$$\bigcup_{i=1}^n (U_i \cap V) = \left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right) \cap V = U \cap V \quad \text{y} \quad \bigcup_{j=1}^m (V_j \cap U) = \left(\bigcup_{j=1}^m V_j\right) \cap U = V \cap U.$$

Entonces

$$\left(\bigcup_{i=1}^n (U_i \cap V)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m (V_j \cap U)\right) = U \cap V. \tag{1}$$

Supongamos ahora que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle \neq \emptyset$. Sea

$$F \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle.$$

Entonces $F \in 2^X$, $F \subseteq U$, $F \subseteq V$ y $F \cap U_i \neq \emptyset \neq F \cap V_j$, para toda $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$. Así

$$F \subseteq U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^n (U_i \cap V)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m (V_j \cap U)\right).$$

Como $F\cap U_i\neq\emptyset$ y $F\subseteq V$, entonces $\emptyset\neq F\cap U_i\subseteq F\cap(V\cap U_i)$ para toda $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Análogamente $\emptyset\neq F\cap V_j\subseteq F\cap(U\cap V_j)$, para cada $j\in\{1,2,\ldots,m\}$. Usando lo anterior y (1) se tiene que

$$F\in\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle.$$

Esto prueba que $\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle\neq\emptyset$ y que, además,

$$\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle\subseteq\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle.$$

Ahora supongamos que $\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle\neq\emptyset$. Sea

$$F\in\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle.$$

Luego $F\in 2^X$ y $\emptyset\neq F\cap(V\cap U_i)\subseteq F\cap U_i$ para cada $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. También $\emptyset\neq F\cap(U\cap V_j)\subseteq F\cap V_j$ para toda $j\in\{1,2,\ldots,m\}$. Además, por definición,

$$F\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}(V\cap U_i)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}(U\cap V_j)\right).$$

Usando (1) obtenemos que $F\subseteq U\cap V$. En consecuencia, $F\subseteq U$, $F\subseteq V$, $F\cap U_i\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ y $F\cap V_j\neq\emptyset$ para toda $j\in\{1,2,\ldots,m\}$. Por tanto $F\in\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$. Esto prueba que $\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle\neq\emptyset$ y que, además,

$$\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle\subseteq\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle.$$

De esta manera probamos que

$$\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle=\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle.$$

□

3. La Topología de Vietoris

De la Proposición 2.2 se deduce el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *La familia*

$$\mathcal{B}_V=\{\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\mid\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}\ \textit{es una colección finita de abiertos de}\ X\}$$

es base para una topología τ_V de 2^X.

Demostración. Usando la parte a) de la Proposición 2.2, así como el hecho de que $\mathcal{F}_\emptyset$ y $\{X\}$ son colecciones finitas de abiertos en X, tenemos que $CL(X)=\langle X\rangle\in\mathcal{B}_V$ y $\{\emptyset\}=\langle\mathcal{F}_\emptyset\rangle\in\mathcal{B}_V$. Luego $2^X=CL(X)\cup\{\emptyset\}=\langle X\rangle\cup\langle\mathcal{F}_\emptyset\rangle$. Esto muestra que la unión de los elementos de $\mathcal{B}_V$ es 2^X.

Si una familia finita es $\mathcal{F}_\emptyset$, es claro que la intersección de $\langle\mathcal{F}_\emptyset\rangle$ con cualquier otro elemento de $\mathcal{B}_V$ tiene que estar contenido en $\{\emptyset\}$. Por tanto, tal intersección es vacía o es el unitario del vacío. Si la intersección es vacía, se puede ver como $\langle X,\emptyset\rangle$. Si la intersección es el unitario del vacío, se puede ver como $\langle\mathcal{F}_\emptyset\rangle$. Ambas opciones son elementos de $\mathcal{B}_V$. Podemos entonces suponer que $\langle U_1,U_2\ldots,U_n\rangle$ y $\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$ son elementos de $\mathcal{B}_V$. Entonces cada uno de los conjuntos U_i y V_j es abierto en X. Luego los conjuntos $U=\bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V=\bigcup_{j=1}^m V_j$ son abiertos en X. Esto implica que cada uno de los conjuntos $V \cap U_i$ y $U \cap V_j$ es abierto en X. Aplicando el inciso b) de la Proposición 2.2, deducimos que la intersección

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$$

es un elemento de $\mathcal{B}_V$. Esto muestra que la intersección de cada dos elementos de $\mathcal{B}_V$ es, de nueva cuenta, un elemento de $\mathcal{B}_V$. Por consiguiente, $\mathcal{B}_V$ es base de alguna topología en 2^X. □

Como $CL(X) \subseteq 2^X$ y τ_V es una topología para 2^X, una manera natural de darle una topología a $CL(X)$, es considerar la topología relativa de 2^X a $CL(X)$. Dicha topología la denotaremos también por τ_V, en lugar de $(\tau_V)_{|CL(X)}$. Los elementos básicos de $CL(X)$ son los de la familia

$$\mathcal{B}'_V = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X) \mid \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \in \mathcal{B}_V\}.$$

Definición 3.2. La topología τ_V indicada en el Teorema 3.1, y aplicada a 2^X o bien a $CL(X)$, se llama la *topología de Vietoris*. A los básicos de dicha topología, es decir a los elementos de $\mathcal{B}_V$ y a los de $\mathcal{B}'_V$, se les llama *vietóricos* de 2^X o bien de $CL(X)$, según corresponda. Si $\tilde{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \in \mathcal{B}_V$ o bien $\tilde{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle \cap CL(X) \in \mathcal{B}'_V$, entonces los conjuntos V_i, con $1 \leq i \leq m$, se llaman las *entradas* de $\tilde{V}$.

La topología de Vietoris fue definida en 1921 por Leopold Vietoris. Suele definirse, por lo general, para $CL(X)$ y también se le llama la *topología finita* de $CL(X)$. A los espacios topológicos $(2^X, \tau_V)$ y $(CL(X), \tau_V)$ se les llama *hiperespacios* de X.

En el siguiente lema se muestra que, sin perder generalidad, siempre podemos suponer que dos vietóricos poseen el mismo número de entradas.

Lema 3.3. *Sea X un espacio topológico. Si $\tilde{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\tilde{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ son dos vietóricos de 2^X, entonces podemos escribir $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ de tal forma que tengan el mismo número de entradas. La misma conclusión obtenemos si suponemos que $\tilde{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X)$ y $\tilde{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \cap CL(X)$ son vietóricos de $CL(X)$.*

Demostración. Si tomamos a $\tilde{U}$ y queremos aumentarle la cantidad de entradas, basta con tomar cualquiera de ellas y repetirla. De ese modo

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \langle U_1, U_2 \ldots, U_n, U_n, \ldots, U_n \rangle,$$

donde la entrada U_n se repite un número finito de veces. Así, tomando $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$, sin perder generalidad supongamos que $n < m$. Repitiendo $m - n$ veces la entrada U_n, podemos escribir ambos vietóricos con el mismo número de entradas. □

4. La Topología de Fell

Ahora indicamos una notación que facilitará la redacción.

Notación 4.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. A cada $A \subseteq X$ le asignamos los siguientes subconjuntos de 2^X:

$$A^- = \{F \in 2^X \mid A \cap F \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad A^+ = \{F \in 2^X \mid F \subseteq A\}.$$

Notemos que $\emptyset^- = \emptyset$, $\emptyset^+ = \{\emptyset\}$,

$$X^- = \{F \in 2^X \mid F = X \cap F \neq \emptyset\} = CL(X) \quad \text{y} \quad X^+ = \{F \in 2^X \mid F \subseteq X\} = 2^X.$$

Además si $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$, entonces $X \in A^- \subset CL(X)$. Para una colección no vacía α, de subconjuntos de X, definimos

$$\alpha^- = \{F \in 2^X \mid F \cap U \neq \emptyset, \text{ para todo } U \in \alpha\}. \tag{2}$$

Notemos que $\emptyset \in A^+$, para cada $A \subseteq X$. Además, en términos de los subconjuntos de 2^X definidos en la Notación 2.1, los elementos A^- y A^+ se pueden escribir como sigue:

$$A^- = \langle X, A\rangle \quad \text{y} \quad A^+ = \langle A\rangle \cup \{\emptyset\}.$$

Si $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$, entonces

$$A^- = \langle X, A\rangle \cap CL(X) \quad \text{y} \quad A^+ = \{\emptyset\} \cup (\langle A\rangle \cap CL(X)).$$

Si $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$, puede suceder que el conjunto vacío sea el único subconjunto cerrado de X, que está contenido en A. En dicha situación, tenemos que $A^+ = \langle A\rangle = \{\emptyset\}$.

En el caso de $CL(X)$, lo correcto es escribir $A^- \cap CL(X)$ y $A^+ \cap CL(X)$, para referirse a los conjuntos $\{F \in CL(X) \mid A \cap F \neq \emptyset\}$ y $\{F \in CL(X) \mid F \subseteq A\}$, respectivamente. Sin embargo, a menos que pueda causar confusión, escribimos A^- y A^+ en lugar de $A^- \cap CL(X)$ y $A^+ \cap CL(X)$, respectivamente. De tal modo, dados un subconjunto abierto U de X y un subconjunto compacto K de X, tenemos que

$$\langle X, U\rangle = \left\{F \in 2^X \mid F \cap U \neq \emptyset\right\} = U^-$$

y

$$\langle X \setminus K\rangle \cup \{\emptyset\} = \left\{F \in 2^X \mid F \subseteq X \setminus K\right\} = (X \setminus K)^+.$$

Con los conjuntos de la forma U^- y $(X \setminus K)^+$, donde U es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto compacto de X, podemos crear la topología que describimos a continuación.

Definición 4.2. Sea X un espacio topológico. La *topología de Fell* en 2^X, denotada por τ_F, es aquella que tiene como subbase la familia $\mathcal{S}_F$ de los conjuntos U^- y $(X \setminus K)^+$, donde U es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto compacto de X.

Notemos que los elementos subbásicos de τ_F, son las colecciones formadas por los subconjuntos cerrados de X que “le pegan” (en inglés, “hit”) a un abierto de X, junto con aquellos “que esquivan” (en inglés, “miss”) a un subconjunto compacto de X. Por esta razón, se dice en inglés que τ_F es una topología hit-and-miss de 2^X. Como hicimos con la topología de Vietoris en $CL(X)$, para simplificar la notación, la topología de Fell en el subespacio $CL(X)$ de 2^X se denotará por τ_F, en lugar de $(\tau_F)_{|CL(X)}$. Los elementos subbásicos de $CL(X)$, con la topología de Fell, describen la familia $\mathcal{S}'_F$ de los conjuntos

$$\langle X, U\rangle \cap CL(X) = \{F \in CL(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\}$$

y

$$\langle X \setminus K\rangle \cap CL(X) = \{F \in CL(X) \mid F \subseteq X \setminus K\},$$

donde U es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto compacto de X. A los espacios topológicos $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ se les llama *hiperespacios* de X.

La topología de Fell también se conoce como la *H-topología*, la *topología de Choquet-Matheron* o la *topología débil de Vietoris* de 2^X. Fue formalmente definida en [4] por James

M. G. Fell en 1962, como la H-topología de 2^X, aunque en un artículo publicado en 1961 la utiliza para resolver una aplicación particular del Análisis Funcional en la Teoría de las C^*-álgebras. En 2008 Ji-Chen y Paolo Vitolo presentaron, en [3], un estudio sistemático de la topología de Fell en 2^X. Muchos de los resultados que probamos, tanto en [5] como en el presente capítulo, fueron formulados originalmente en [3].

Vamos ahora a obtener una base para $(2^X, \tau_F)$. Usando la definición de la familia α^- que dimos en (2), así como el inciso b) de la Proposición 2.2, para cualesquiera dos subconjuntos U_1 y U_2 de X sucede que:

$$U_1^- \cap U_2^- = \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle = \{U_1, U_2\}^-.$$

En general si $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$, entonces

$$U_1^- \cap U_2^- \cap \cdots \cap U_n^- = \langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^-. \tag{3}$$

Supongamos ahora que $K_1, K_2 \subseteq X$ y que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces

$$\begin{aligned}(X \setminus K_1)^+ \cap (X \setminus K_2)^+ = (\langle X \setminus K_1 \rangle \cup \{\emptyset\}) \cap (\langle X \setminus K_2 \rangle \cup \{\emptyset\}) = \\ (\langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle) \cup \{\emptyset\} = \langle (X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2) \rangle \cup \{\emptyset\} = \\ = \langle X \setminus (K_1 \cup K_2) \rangle \cup \{\emptyset\} = \langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\} = (X \setminus K)^+.\end{aligned}$$

Es decir, $(X \setminus K_1)^+ \cap (X \setminus K_2)^+ = (X \setminus K)^+$. En general, si $m \in \mathbb{N}$, $K_1, K_2, \ldots, K_m \subset X$ y $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$, entonces

$$(X \setminus K_1)^+ \cap (X \setminus K_2)^+ \cap \cdots \cap (X \setminus K_m)^+ = \langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\} = (X \setminus K)^+. \tag{4}$$

Notemos que si cada conjunto K_i es compacto, entonces la unión $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$ es un subconjunto compacto de X. Ahora bien, si $\mathcal{U}$ es un básico no vacío de $(2^X, \tau_F)$, entonces $\mathcal{U}$ es una intersección finita de elementos en $\mathcal{S}_F$. Dicha intersección la podemos dividir del siguiente modo: en la intersección de elementos que son de la forma U^-, con U abierto en X, y la intersección de elementos que son de la forma $(X \setminus K)^+$, con K compacto en X. Utilizando (3) y (4), $\mathcal{U}$ es de una de las tres formas siguientes:

a) $\langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ y cada U_i abierto en X (si en la intersección, que define a $\mathcal{U}$, no hay elementos de la forma $(X \setminus L)^+$, con L compacto de X).
b) $\langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\}$ con K un compacto de X (si en la intersección, que define a $\mathcal{U}$, no hay elementos de la forma U^-, con U abierto en X).
c) $\langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap (\langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\})$ con $n \in \mathbb{N}$, U_i abierto en X para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y K compacto (si en la intersección, que define a $\mathcal{U}$, hay tanto elementos de la forma U^- con U abierto en X, como elementos de la forma $(X \setminus L)^+$, con L compacto de X).

Como $\langle X \rangle = CL(X)$, los elementos descritos en a), b) y c) pueden resumirse en un único tipo, a saber los de la forma c). En efecto, a partir de un elemento de la forma c) con $K = \emptyset$, obtenemos uno de la forma a) y, haciendo $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = X$, obtenemos uno de la forma b). Naturalmente si $\mathcal{U} = \emptyset$, entonces $\mathcal{U}$ satisface a) con $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = \emptyset$. Como $\emptyset \in \langle X \setminus K \rangle$, tenemos que

$$\langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap (\langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\}) = \langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle.$$

Con esto hemos probado el siguiente resultado, que aparece originalmente en [4].

Teorema 4.3. *Sea X un espacio topológico. Una base para la topología τ_F de 2^X, es la familia:*

$$\mathcal{B}_F = \{\langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle \mid K \subseteq X \textit{ es compacto, } n \in \mathbb{N} \textit{ y } U_i \subseteq X \textit{ es abierto en } X, \textit{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Notemos que los conjuntos de la forma a) se pueden escribir como $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^-$, donde $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X. Los de la forma b) se pueden escribir como $(X \setminus K)^+$, donde K es un subconjunto compacto de X y, los de la forma c), como $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap (X \setminus K)^+$, donde $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X y K es un subconjunto compacto de X. De esta manera, la base $\mathcal{B}_F$ se puede describir como sigue:

$$\mathcal{B}_F = \{\alpha^- \cap (X \setminus K)^+ \mid \alpha \text{ es una familia finita de abiertos en } X \text{ y } K \text{ es un subconjunto compacto de } X\}.$$

Terminamos la presente sección indicando que la topología de Vietoris, para $CL(X)$, se puede describir en términos de una subbase.

Teorema 4.4. *Sea X un espacio topológico. Entonces una subbase para la topología de Vietoris τ_V en $CL(X)$, es la familia*

$$\mathcal{S}_V = \{U^- \mid U \textit{ es abierto en } X\} \cup \{V^+ \mid V \textit{ es abierto en } X\}.$$

***Demostración*.** Notemos que, en $CL(X)$, $V^+ = \langle V\rangle$, para cada $V \subseteq X$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ así como n subconjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X. Hagamos $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Vamos a probar que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap CL(X) = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U\rangle. \tag{5}$$

Tomemos $F \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap CL(X)$. Entonces $F \in CL(X)$ y $F \subseteq U$. Por tanto $F \in \langle U\rangle$. Además $F \cap U_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego $F \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^-$. Se sigue que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subseteq \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U\rangle$. Supongamos ahora que $A \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U\rangle$. Entonces $A \in CL(X)$, $A \subseteq U$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap CL(X)$. De esta manera, $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U\rangle \subseteq \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$, mostrando así (5).

Combinando (3) con (5), tenemos que

$$CL(X) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = U_1^- \cap U_2^- \cap \cdots \cap U_n^- \cap U^+.$$

Entonces cada elemento de la base $\mathcal{B}'_V$ de τ_V en $CL(X)$, es una intersección finita de elementos de la familia $\mathcal{S}_V$. Por otra parte, cada elemento de la familia $\mathcal{S}_V$ pertenece a $\mathcal{B}'_V$, pues $U^- = \langle X, U\rangle$ y $V^+ = \langle V\rangle$. Además, por la parte b) de la Proposición 2.2, la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}'_V$ es un elemento de $\mathcal{B}'_V$. Por consiguiente, cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{S}_V$ es un miembro de $\mathcal{B}'_V$. Esto prueba que la familia $\mathcal{B}'_V$ es justo la de las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}_V$. Por tanto, $\mathcal{S}_V$ es una subbase para τ_V. $\square$

Del teorema anterior se infiere que los elementos subbásicos de τ_V, son las colecciones formadas por los subconjuntos cerrados de X que “le pegan” a un abierto de X, junto con las colecciones formadas por cerrados que “esquivan” a un subconjunto cerrado de X. En este sentido se tiene que τ_V es una topología hit-and-miss de $CL(X)$.

5. Comparando τ_V y τ_F

Ya que hemos escrito las subbases de τ_V y de τ_F, en términos de la subbase de la otra topología, un pensamiento que surge inmediatamente es el querer saber si existe alguna relación entre la topología de Fell y la de Vietoris. Afortunadamente sí existe tal relación y lo único que necesitamos es la siguiente definición.

Definición 5.1. Un espacio topológico X es KC, si todo subconjunto compacto de X es cerrado en X.

No es díficil encontrar ejemplos de espacios KC gracias al siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [17, Teorema 17.5].

Proposición 5.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *si Y es cerrado en X y X es compacto, entonces Y es compacto;*
2) *si Y es compacto y X es T_2, entonces Y es cerrado en X.*

La propiedad KC se encuentra entre los axiomas de separación T_2 y T_1. En efecto, por la parte 2) de la Proposición 5.2, en un espacio T_2 todo subconjunto compacto es cerrado. En otras palabras, los espacios T_2 son KC. Por otro lado si X es KC y $x \in X$, entonces como $\{x\}$ es compacto dicho conjunto también es cerrado en X. Luego $\{x\}$ es cerrado en X, para cada $x \in X$. De esta manera X es T_1. Esto muestra que los espacios KC son T_1. Más adelante utilizaremos con frecuencia la Proposición 5.2, incluso sin hacer referencia explícita a ella. Concretamente usaremos que, en un espacio T_2, el complemento de cualquier subconjunto compacto, es abierto.

El siguiente resultado aparece probado originalmente en [4].

Teorema 5.3. *En 2^X las siguientes afirmaciones se cumplen:*

a) *si X es un espacio KC, entonces $\tau_F \subseteq \tau_V$;*
b) *si X es un espacio compacto, entonces $\tau_V \subseteq \tau_F$.*

Demostración. Para probar a), recordemos que los elementos de $\mathcal{S}_F$, los subbásicos de τ_F, tienen la forma U^- o bien $(X \setminus K)^+$, donde K es un compacto y U es abierto en X. Si K es un compacto en X, entonces K es cerrado en X, pues X es KC, de donde $X \setminus K$ es abierto en X. Por tanto $(X \setminus K)^+ = \langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\} = \langle X \setminus K \rangle \cup \langle \mathcal{F}_\emptyset \rangle$ es la unión de dos elementos en $\mathcal{S}_V$, la subbase de τ_V. Luego $(X \setminus K)^+ \in \tau_V$. Como también $U^- = \langle X, U \rangle$ está en la subbase de τ_V, para cada abierto U de X, tenemos que $\mathcal{S}_F \subseteq \tau_V$, implicando que $\tau_F \subseteq \tau_V$.

Para probar b), sea V un abierto en X. Entonces $K = X \setminus V$ es cerrado en el espacio compacto X. Luego, por la Proposición 5.2, K es compacto, así que $(X \setminus K)^+ = V^+ \in \mathcal{S}_F$. También $U^- \in \mathcal{S}_F$, para todo abierto U de X, por lo que $\mathcal{S}_V \subseteq \mathcal{S}_F$. Deducimos así que $\tau_V \subseteq \tau_F$. $\square$

De los resultados anteriores, sucede que si X compacto y KC, entonces $\tau_F = \tau_V$. Entonces, para trabajar con algo distinto a la topología de Vietoris, en adelante trataremos con espacios topológicos que no cumplan al mismo tiempo ser KC y compactos.

6. Admisibilidad

En la Teoría de Hiperespacios, considerando en $CL(X)$ la topología de Vietoris, es bastante conocido que si X es un espacio T_1, entonces $CL(X)$ contiene una copia de X, es decir, un subconjunto homeomorfo a X. Dicha copia se denota por $F_1(X)$ y se define como sigue:

$$F_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Cuando a las familias 2^X y $CL(X)$ se les dan otras topologías, se busca que éstas satisfagan propiedades que no se alejen tanto de las que se conocen para la topología de Vietoris. En nuestro caso, buscamos topologías en 2^X y $CL(X)$ que, en cierto sentido, posean a X como subconjunto. Dichas topologías reciben el nombre que se indica en la siguiente definición.

Definición 6.1. Sea X un espacio topológico. Una topología τ en 2^X es *admisible* si la función $i\colon X \to (2^X, \tau)$ definida, para cada $x \in X$ como $i(x) = \mathrm{cl}_X(\{x\})$, es un encaje (es decir, un homeomorfismo de X en $i(X)$).

Si X es un espacio T_1, entonces la función i definida anteriormente es la que a cada $x \in X$ le asigna su unitario $\{x\}$. En tal situación, $i(X) = F_1(X)$. Además, cuando X es T_1 resulta que $F_1(X) \subseteq 2^X$. Para la topología de Fell, es razonable desear conocer condiciones que deben cumplirse, para que dicha topología sea admisible, y también cuáles son las diferencias que se pueden establecer con la topología de Vietoris. Esto queda resuelto en la siguiente proposición, probada originalmente en [3].

Proposición 6.2. *Sea X un espacio T_1. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*
a) *τ_V es admisible;*
b) *τ_F es admisible si y sólo si X es KC.*

Demostración. Como X es T_1, para cualquier $x \in X$ se cumple $i(x) = \{x\} \in F_1(X)$. Además es claro que i es biyectiva, como función de X en $F_1(X)$. Para probar a) vamos a mostrar primero que i, como función de X a $F_1(X)$, es continua. Sea $U \subseteq X$. Entonces

$$U^+ \cap F_1(X) = \{A \in F_1(X) \mid A \subseteq U\} = \{A \in F_1(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\} = U^- \cap F_1(X).$$

Además

$$i^{-1}\left(U^+ \cap F_1(X)\right) = \{x \in X \mid i(x) \in U^+ \cap F_1(X)\} = \{x \in X \mid \{x\} \subseteq U\} = U.$$

Si U es un abierto en X, deducimos que $U^+ \cap F_1(X)$ es un abierto subbásico de $F_1(X)$ (que coincide con $U^- \cap F_1(X)$). Notemos que $i^{-1}\left(U^+ \cap F_1(X)\right) = U$, entonces i es continua.

Ahora, para $i\colon X \to F_1(X)$, consideremos su función inversa g, definida para $\{x\} \in F_1(X)$ como $g(\{x\}) = x$. Si U es un subconjunto de X, tenemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) = \{\{x\} \in F_1(X) \mid g(\{x\}) \in U\} = \{\{x\} \in F_1(X) \mid x \in U\} = \\ = \{\{x\} \in F_1(X) \mid U \cap \{x\} \neq \emptyset\} = U^- \cap F_1(X). \end{aligned}$$

Si U es abierto de X, es obvio que $U^- \cap F_1(X)$ es un subbásico de $F_1(X)$. Como $g^{-1}(U) = U^- \cap F_1(X)$, deducimos que g es continua. De donde $i\colon X \to F_1(X)$ y su inversa son funciones continuas. Esto prueba que i es un homeomorfismo y, por consiguiente, τ_V es admisible.

Para probar b), supongamos que X es KC y sean V, K un abierto y un compacto de X, respectivamente. Como X es KC, tenemos que $U = X \setminus K$ es abierto en X. Siguiendo el proceder del inciso anterior es fácil observar que

$$i^{-1}\left(V^- \cap F_1(X)\right) = i^{-1}\left(V^+ \cap F_1(X)\right) = V.$$

Sustituyendo V por $U = X \setminus K$, obtenemos

$$i^{-1}\left((X \setminus K)^+ \cap F_1(X)\right) = i^{-1}\left(U^+ \cap F_1(X)\right) = U = X \setminus K.$$

En ambos casos, la imagen inversa de un subbásico de $F_1(X)$ es abierto, por tanto $i\colon X \to (F_1(X), \tau_F)$ es continua. Consideremos una vez más a g, la inversa de i, definida como $g(\{x\}) = x$ para cualquier $\{x\} \in F_1(X)$. Si $U \subseteq X$, al igual que en el inciso anterior $g^{-1}(U) = U^- \cap F_1(X)$. Luego, si U es un abierto en X, deducimos que g es continua y, por tanto, i es un homeomorfismo.

Finalmente, supongamos que τ_F es admisible. Mostraremos que X es un espacio KC. Sea K un compacto de X, por tanto $(X \setminus K)^+ \cap F_1(X)$ es abierto en $(F_1(X), \tau_F)$. Ya que τ_F es admisible, la función $i\colon X \to (F_1(X), \tau_F)$ es un encaje. En particular, i es continua. Lo anterior significa que $i^{-1}\left((X \setminus K)^+ \cap F_1(X)\right) = X \setminus K$ es abierto en X, de donde K es cerrado en X. Esto prueba que X es KC. $\square$

Como ya indicamos, el inciso a) del Teorema 6.2 implica que si X es T_1, entonces X es homeomorfo a $(F_1(X), \tau_V)$. A su vez, b) implica que X es homeomorfo a $(F_1(X), \tau_F)$ si y sólo si X es KC. Esto da una idea de la importancia de pedir que el espacio que estudiemos sea al menos KC. De tal modo al trabajar 2^X con la topología τ_F, la "copia" de X en 2^X que vimos se puede obtener, permite conocer características de X. Obviamente si X es T_2, automáticamente tenemos que τ_F es admisible.

Si X es T_2, es conocido que $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$. Dicho resultado también es cierto cuando consideramos la topología de Fell. De manera más general, para un espacio topológico X y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_n(X) = \{F \in CL(X) \mid F \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

Si X es T_1, entonces $F_n(X) \neq \emptyset$ y, como $F_n(X) \subseteq CL(X) \subseteq 2^X$, en $F_n(X)$ podemos considerar tanto la topología de Vietoris como la de Fell. En [11, Teorema 2.4.2, p. 156] se prueba que si X es T_2 y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$. Cuando utilizamos la topología de Fell el resultado se mantiene cierto e, incluso, la demostración que presentamos a continuación, para la topología de Fell, también aplica para la topología de Vietoris.

Teorema 6.3. *Si X es un espacio T_2 y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$.*

Demostración. Sea $E \in CL(X) \setminus F_n(X)$. Entonces E es un subconjunto cerrado en X que posee más de n elementos. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ un subconjunto de E con exactamente $n+1$ elementos. Como X es T_2, existe una familia finita $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\}$ de subconjuntos abiertos de X, ajenos dos a dos, tales que $x_i \in V_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Entonces $\langle X, V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\rangle$ es un abierto en $(CL(X), \tau_F)$ tal que $E \in \langle X, V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\rangle$. Más aún, si $A \in \langle X, V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\rangle$, entonces $A \in CL(X)$ y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, existe $y_i \in A \cap V_i$. Como los elementos de la familia $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\}$ son ajenos dos a dos, A posee al menos $n+1$ elementos, de donde $A \in CL(X) \setminus F_n(X)$. Tenemos, así, que $\langle X, V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\rangle$ es un abierto de $(CL(X), \tau_F)$ tal que $E \in \langle X, V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\rangle \subset CL(X) \setminus F_n(X)$. Esto prueba que $F_n(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$. $\square$

Si X es T_2, entonces es KC. Luego, por el Teorema 6.2, τ_F es admisible. Entonces X es homeomorfo a $F_1(X)$. Por el Teorema 6.3, $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$. Esto significa que X se puede “dibujar” dentro de $CL(X)$, como un subconjunto cerrado.

Ahora vamos a probar que, en los espacios KC, se cumple el recíproco del Teorema 6.3, en el caso $n = 1$.

Teorema 6.4. *Sea X un espacio KC. Si $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$, entonces X es T_2.*

Demostración. Para ver que X es T_2, sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Como X es KC, los subconjuntos finitos de X son cerrados en X. En particular $\{a, b\}$ es cerrado en X. Luego $\{a, b\} \in CL(X) \setminus F_1(X)$. Como el conjunto $CL(X) \setminus F_1(X)$ es abierto en $(CL(X), \tau_F)$, existe un abierto básico $\mathcal{A}$ en $(CL(X), \tau_F)$ tal que $\{a, b\} \in \mathcal{A} \subseteq CL(X) \setminus F_1(X)$. Entonces $\mathcal{A} = \alpha^- \cap (X \setminus K)^+$, donde $\alpha = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, y K es un subconjunto compacto de X. Puesto que X es KC, el conjunto K es cerrado en X. Como $\{a, b\} \in (X \setminus K)^+$, tenemos que $\{a, b\} \subseteq X \setminus K$. Además $\{a, b\} \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. En vista de que $\mathcal{A} \cap F_1(X) = \emptyset$, no puede suceder que a se encuentre en todos los conjuntos U_i, y tampoco puede suceder que b se encuentre en todos los conjuntos U_i. Para probar esto supongamos, por el contrario, que $a \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces

$$\{a\} \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{A} \subset CL(X) \setminus F_1(X).$$

Si $b \in U_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces

$$\{b\} \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{A} \subset CL(X) \setminus F_1(X).$$

Ambas situaciones son una contradicción. Con esto probamos que existen $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $a \notin U_{i_1}$ y $b \notin U_{i_2}$. Como $\{a, b\} \cap U_{i_1} \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$, resulta que $b \in U_{i_1}$ y $a \in U_{i_2}$. Consideremos ahora los conjuntos

$$U = (X \setminus K) \cap \left(\bigcap\{U \in \alpha \colon a \in U\right) \quad \text{y} \quad V = (X \setminus K) \cap \left(\bigcap\{U \in \alpha \colon b \in U\right).$$

Es claro que U y V son abiertos en X tales que $a \in U$ y $b \in V$. Si existe $z \in U \cap V$, entonces $\{z\} \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{A} \subset CL(X) \setminus F_1(X)$. Esto es una contradicción, así que $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, X es T_2. $\square$

Corolario 6.5. *Sea X un espacio KC. Entonces X es T_2 si y sólo si $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$.*

7. Conexidad Local

A partir de ahora, utilizamos con frecuencia espacios T_2 y localmente compactos. En la presente sección daremos la definición de compacidad local y de otros tipos de conexidad, como la conexidad local y la conexidad en pequeño. Hablaremos también de cadenas simples. Todo esto será utilizado en la siguiente sección, donde tratamos la conexidad y la conexidad local de algunos subespacios de $(CL(X), \tau_F)$, particularmente la del subespacio de los elementos de $CL(X)$ que son conexos, y la de los que son conexos y compactos. Conviene recordar que si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces una *vecindad de x en X* es un subconjunto V de X, para el cual existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset V$. Si V es una vecindad de x y, además, V es abierto en X, entonces decimos que V es una *vecindad abierta de x en X*.

Definición 7.1. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es

1) *localmente compacto en x*, si para todo abierto V de X con $x \in V$, existe una vecindad compacta G de x tal que $G \subseteq V$;
2) *localmente conexo en x*, si para todo abierto V de X con $x \in V$, existe una vecindad abierta y conexa G de x tal que $G \subseteq V$;
3) *conexo en pequeño en x*, si para todo abierto V de X con $x \in V$, existe una vecindad abierta G de x tal que $G \subseteq V$ y, para cada $y, z \in G$, existe un subconjunto conexo C de X tal que $y, z \in C \subseteq V$;
4) *localmente compacto* si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos;
5) *localmente conexo* si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Definición 7.2. Un *continuo* es un espacio no vacío, compacto, conexo y T_2. Si X es T_2, entonces un *subcontinuo* de X, es un subconjunto compacto, conexo y no vacío de X.

Notemos que si X es localmente conexo en un punto $x \in X$, entonces X es conexo en pequeño en x. En [14] se construye un continuo X que posee un punto donde es conexo en pequeño, pero no localmente conexo. La prueba formal de esto aparece en [14, Theorem 7.6, p. 71–75] . Así pues, la conexidad local y la conexidad en pequeño, localmente son conceptos distintos. Sin embargo, globalmente, son el mismo concepto pues, como se indica en [17, Teorema 27.16], un espacio X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos si y sólo si X es localmente conexo.

Recordemos que si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces la *componente conexa de x en X*, es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que tienen al punto x. Decimos que $C \subseteq X$ es una *componente conexa* de X, si existe $x \in X$ tal que C es la componente conexa de x en X. Cada componente conexa de X, es un subconjunto cerrado y conexo de X ([17, Teorema 26.12]). Cuando el espacio X es localmente conexo, cada componente conexa también es un subconjunto abierto de X, según indica el siguiente resultado.

Proposición 7.3. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si, las componentes conexas de los subconjuntos abiertos en X, son subconjuntos abiertos en X.*

Demostración. Primero supongamos que X es localmente conexo y que U es un abierto en X. Sean C una componente conexa de U y $x \in C$. Como X es localmente conexo y $x \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V de X, tal que $x \in V \subseteq U$. Como V es un subconjunto conexo de U que tiene a x, y C es la unión de todos los subconjuntos conexos de U que tienen a x, se sigue que $V \subseteq C$. Hemos probado, así, que para cada $x \in C$, existe un abierto V en X tal que $x \in V \subseteq C$, por lo que C es abierto en X.

Ahora supongamos que las componentes conexas de cada subconjunto abierto de X, son abiertas en X. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Sea C la componente conexa de U que tiene a x. Entonces C es un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in C \subseteq U$. Luego X es localmente conexo en x y, como lo que probamos es válido para cada punto de X, sucede que X es localmente conexo. $\square$

Corolario 7.4. *Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X. Si X es localmente conexo, entonces U es localmente conexo.*

Demostración. Sean V un subconjunto abierto de U y C una componente conexa de V. Como U es abierto en X y V es abierto en U, sucede que V es abierto en X. Luego, por la proposición anterior, C es abierto en X y, como $C \subseteq V \subseteq U$, sucede que C es abierto en U. Esto muestra, aplicando de nuevo la proposición anterior, que U es localmente conexo. $\square$

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 7.5. Sean a y b dos puntos de un espacio X. Una *cadena simple de a a b en X*, es una colección $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de subconjuntos abiertos en X tales que U_1 es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene al punto a, U_n es el único elemento de $\mathcal{U}$ que tiene al punto b y, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Si X es un espacio topológico y $a, b \in X$, se dice que a y b se pueden conectar por una cadena simple en X, si existe una cadena simple de a a b en X. Como lo indica el siguiente resultado, en un espacio conexo, cualesquiera dos de sus puntos se pueden conectar por una cadena simple.

Proposición 7.6. *Si X es conexo y $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de X, entonces para cada dos puntos a y b de X, existe una cadena simple $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de a a b en X, de modo que $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $a \in X$ y A el conjunto de los puntos de X, que se pueden conectar con a por medio de una cadena simple, cuyos elementos son de $\mathcal{C}$. Si probamos que A es no vacío y tanto abierto como cerrado en X entonces, por la conexidad de X, tendremos que $A = X$. De esta manera, si $b \in X$, existe una cadena simple de a a b en X, cuyos elementos son de $\mathcal{C}$, y el resultado quedará probado.

Para probar que A es no vacío notemos que, como $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $a \in U$. Luego $\{U\}$ es una cadena simple de a a a en X, cuyos elementos son de $\mathcal{U}$. Luego $a \in A$, de donde $A \neq \emptyset$. Ahora mostraremos que A es abierto en X. Para esto, sean $x \in A$ y $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{C}$ una cadena simple de a a x en X. Entonces $a \in U_1$ y $x \in U_n$. Notemos que, para cada $y \in U_n$ la familia $\mathcal{U}$ es una cadena simple de a a y en X, por lo que $U_n \subset A$. Esto implica que A es abierto en X.

Para probar que A es cerrado en X, tomemos $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U$. Entonces U es un subconjunto abierto en X, que tiene al punto x que se encuentra en la cerradura de A en X. Luego existe $b \in U \cap A$ y, por la definición de A, podemos tomar una cadena simple $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{C}$ de a a b en X. Si existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in U_k$, entonces escogemos el k más pequeño con la propiedad de que $x \in U_k$ y, por tanto, $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{C}$ es una cadena simple de a a x en X. Luego $x \in A$. Supongamos ahora que $x \in X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n)$. Como $b \in U \cap U_n$, tenemos que $U \cap U_n \neq \emptyset$. Sea

$$s = \text{mín}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid U \cap U_i \neq \emptyset\}.$$

Entonces $U \cap U_s \neq \emptyset$, por lo que $\{U_1, U_2, \ldots, U_s, U\} \subseteq \mathcal{C}$ es una cadena simple de a a x en X. Luego $x \in A$. Esto prueba que $\mathrm{cl}_X(A) \subset A$ y, como la otra contención también se cumple, $\mathrm{cl}_X(A) = A$, probando así que A es cerrado en X. $\square$

Dado un espacio conexo X, es razonable el deseo de encontrar una familia, suficientemente manejable, de abiertos con los que podemos formar cadenas simples que conecten a cualesquiera dos puntos dados de X. Lo anterior es bastante simple si pedimos que X sea compacto y conexo. En efecto, si X es compacto y conexo, a partir de cualquier cubierta abierta de X, extraemos una subfamilia finita que cubra a X y, a partir de esa subcubierta finita, formamos las cadenas simples que conectan a los puntos de X. Así hemos obtenido un número finito, y por tanto manejable, de abiertos con los que podemos conectar por una cadena simple, a los puntos de X. Ese tipo de construcción será utilizado en el siguiente resultado, probado originalmente en [6, Lema 2.4]..

Proposición 7.7. *Sea X un espacio conexo, localmente compacto, localmente conexo y T_2. Entonces cada subconjunto compacto y no vacío de X, está contenido en el interior de algún subcontinuo de X.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto y no vacío de X. Para cada $x \in K$, por la compacidad local de X, existe una vecindad compacta G_x de x. Como X es T_2, cada compacto G_x es cerrado en X. También K es un subconjunto cerrado de X. Para toda $x \in K$, por ser G_x una vecindad de x, existe un abierto H_x en X tal que $x \in H_x \subset G_x$ y, como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo U_x de X tal que $x \in U_x \subset H_x$. Notemos que $\mathcal{G} = \{U_x \colon x \in K\}$ es una familia de abiertos en X tales que $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$. Como K es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ de modo que si $U = \bigcup_{l=1}^{n} U_{x_l}$, entonces U es un abierto en X tal que $K \subseteq U$. Notemos que, para cada $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, U_{x_l} es un subconjunto abierto, conexo y no vacío de X, tal que

$$x_l \in U_{x_l} \subseteq \mathrm{cl}_X(U_{x_l}) \subseteq \mathrm{cl}_X(H_{x_l}) \subseteq \mathrm{cl}_X(G_{x_l}) = G_{x_l}.$$

Luego cada $\mathrm{cl}_X(U_{x_l})$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto G_{x_l}. Así, para toda $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathrm{cl}_X(U_{x_l})$ es compacto. Además, $\mathcal{C} = \{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}, X \setminus K\}$ es una cubierta abierta del subconjunto conexo X. Esto implica, por la Proposición 7.6, que cualesquiera dos puntos de K, se pueden conectar por una cadena simple, cuyos elementos se encuentran en $\mathcal{C} \setminus \{X \setminus K\} = \{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$. En particular, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, existe una cadena simple $\mathcal{C}_i = \{V_{i,i_1}, V_{i,i_2}, \ldots, V_{i,i_k}\} \subseteq \mathcal{C} \setminus \{X \setminus K\}$ de x_1 a x_i. Como $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C} \setminus \{X \setminus K\}$, para toda $(i, j) \in \{2, 3, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, k\}$, V_{i,i_j} es un subconjunto abierto, conexo y no vacío de X tal que $\mathrm{cl}_X\big(V_{i,i_j}\big)$ es compacto. Además, para toda $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $x_1 \in V_{i,i_1}$ y $x_i \in V_{i,i_k}$. Para cada $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, definimos

$$V_i = \bigcup_{j=1}^{k} V_{i,i_j}.$$

Sea $V = \bigcup_{i=2}^{n} V_i$. Dada $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $x_1, x_i \in V_i$ y V_i es una unión de abiertos en X, así que V_i es abierto en X. Entonces V es abierto en X. Como los elementos de $\mathcal{C}_i$ son conexos que se intersectan dos a dos, V_i es conexo. Además x_1 es un elemento de cada V_i, por lo que V es un subconjunto conexo de X. Notemos que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. Ahora bien, para cada $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, U_{x_l} y V son subconjuntos conexos de X tales que $x_l \in U_{x_l} \cap V$. Luego V es un subconjunto conexo de X y, cada elemento de la familia $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$, es un subconjunto conexo de X que intersecta a V. De esta manera,

$$V \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n} U_{x_l} \right) = V \cup U$$

es un subconjunto conexo de X. También $V \cup U$ es un subconjunto abierto de X. Además $K \subseteq U \subseteq V \cup U$. Como

$$\mathrm{cl}_X(V \cup U) = \mathrm{cl}_X(V) \cup \mathrm{cl}_X(U) = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{i=2}^{n} V_i\right) \cup \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{l=1}^{n} U_{x_l}\right) = \left(\bigcup_{i=2}^{n} \mathrm{cl}_X(V_i)\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n} \mathrm{cl}_X(U_{x_l})\right)$$

es una unión finita de subconjuntos compactos de X, $\mathrm{cl}_X(V \cup U)$ es compacto. Por ser además la cerradura de un subconjunto conexo de X, $\mathrm{cl}_X(V \cup U)$ es un subconjunto conexo de X. Luego $\mathrm{cl}_X(V \cup U)$ es un subcontinuo de X tal que $K \subseteq V \cup U \subseteq \mathrm{cl}_X(V \cup U)$. Esto termina la demostración. $\square$

8. Conexidad y Conexidad Local en Hiperespacios

Dado un espacio topológico X, recordemos que $K(X)$ es la colección de los subconjuntos compactos y no vacíos de X. Además $CL(X)$ es la familia de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Si X es T_2 entonces, por la parte 2) de la Proposición 5.2, $K(X) \subset CL(X)$. Otros subconjuntos de $CL(X)$ que utilizaremos, son los siguientes:

$$C(X) = \{F \in CL(X) \mid F \text{ es conexo}\}, \quad C_K(X) = C(X) \cap K(X),$$
$$F_n(X) = \{F \in CL(X) \mid F \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$$

y

$$F(X) = \{F \in CL(X) \mid F \text{ es finito}\}.$$

Notemos que

$$C_K(X) = \bigcup_{A \in C_K(X)} C(A). \tag{6}$$

Para ver esto, sea $A \in C_K(X)$. Entonces A es un subconjunto cerrado de A, conexo y no vacío, así que $A \in C(A)$. Entonces $C_K(X) \subseteq \bigcup_{A \in C_K(X)} C(A)$. Supongamos ahora que $B \in \bigcup_{A \in C_K(X)} C(A)$. Entonces existe $A \in C_K(X)$ tal que $B \in C(A)$. Por tanto, B es un subconjunto cerrado de A y, como A es un subconjunto cerrado en X, tenemos que B es cerrado en X. Además $B \neq \emptyset$ y B es conexo, de donde $B \in C(X)$. Como B es un subconjunto cerrado del compacto A, B es compacto. Luego $B \in C_K(X)$, probando así que $\bigcup_{A \in C_K(X)} C(A) \subset C_K(X)$. Esto muestra (6).

El siguiente resultado habla de la conexidad de algunos hiperespacios de X.

Proposición 8.1. *Si X es un continuo entonces $(CL(X), \tau_V)$ y $(C(X), \tau_V)$ son espacios conexos y compactos.*

En [10, p. 1209] aparece una demostración de la Proposición 8.1, la cual utiliza la siguiente propiedad de $(C(X), \tau_V)$, probada en [10]:

($\star$) para cada $A \in C(X)$, el conjunto $\mathcal{L}_A = \{F \in C(X) \mid A \subseteq F\}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $(C(X), \tau_V)$.

Observación 8.2. Si X es un espacio T_2, entonces X es KC. Luego, por el Teorema 5.3, $\tau_F \subseteq \tau_V$. Por tanto,

a) si $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $(CL(X), \tau_V)$, entonces $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $(CL(X), \tau_F)$;
b) si $\mathcal{D}$ es denso en $(CL(X), \tau_V)$, entonces también es denso en $(CL(X), \tau_F)$.

Como una aplicación de la observación anterior, tenemos el siguiente resultado, probado originalmente en [6, Proposición 2.1].

Proposición 8.3. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un espacio T_2 y conexo. Entonces cada uno de los hiperespacios $(F_n(X), \tau_F)$, $(F(X), \tau_F)$, $(K(X), \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Como X es conexo, por [11, Teorema 4.10], cada uno de los hiperespacios $(F_n(X), \tau_V)$, $(F(X), \tau_V)$, $(K(X), \tau_V)$ y $(CL(X), \tau_V)$ es conexo. Como X es T_2, por el Teorema 5.3, $\tau_F \subseteq \tau_V$. Entonces, por la parte a) de la Observación 8.2, cada uno de los hiperespacios $(F_n(X), \tau_F)$, $(F(X), \tau_F)$, $(K(X), \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ es conexo. $\square$

En la presente sección, analizaremos la relación entre la conexidad local en un hiperespacio de X, con la conexidad local en X. Veremos, por tanto, condiciones bajo las cuales la unión de los elementos de un subconjunto abierto (respectivamente, conexo) en un hiperespacio de X, es un subconjunto abierto (respectivamente, conexo) de X. Nos basamos en el artículo [6], para la prueba de los resultados presentados en esta sección. Conviene indicar que no se incluyen todos los resultados de [6], incluso algunos de los que están relacionados con alguna variante de conexidad local en un hiperespacio de X. Para no extender el presente trabajo hemos dejado fuera, por ejemplo, la Proposición 2.3 de [6], la cual dice que si X es un espacio conexo y T_2, entonces el hiperespacio $(CL(X), \tau_F)$ es localmente conexo en X. También no incluimos aquí la Proposición 2.9 de [6], la cual dice que en un espacio X localmente compacto y T_2 el hecho de que X sea conexo en pequeño en un punto $x \in X$, es equivalente tanto a que el hiperespacio $(C_K(X), \tau_F)$ sea conexo en pequeño en $\{x\}$, como a que el hiperespacio $(C(X), \tau_F)$ sea conexo en pequeño en $\{x\}$.

El siguiente aparece en [6, Proposición 1.5].

Proposición 8.4. *Sea X un espacio T_2 entonces:*

a) *si $\mathcal{U}$ es abierto en cualquiera de los espacios $(CL(X), \tau_F)$, $(F(X), \tau_F)$ o $(K(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \{E \mid E \in \mathcal{U}\}$ es abierto en X;*

b) *si X es localmente compacto, $\mathcal{U}$ es abierto en $(C_K(X), \tau_F)$ o bien en $(C(X), \tau_F)$ y $\{x\} \in \mathcal{U}$, entonces existe una vecindad abierta V de x en X tal que $V \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.*

Demostración. Para probar a), sea $\Lambda(X)$ cualquiera de los espacios $CL(X)$, $F(X)$ o $K(X)$, con la topología τ_F. Basta mostrar que si $\mathcal{B}$ es un abierto básico de $(CL(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup (\mathcal{B} \cap \Lambda(X)) = \bigcup \{E \mid E \in \mathcal{B} \cap \Lambda(X)\}$ es abierto en X. Sea $\mathcal{B} = \langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle$ un abierto básico de $(CL(X), \tau_F)$, donde V_i es abierto en X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y K es compacto en X. Mostraremos que $\bigcup (\mathcal{B} \cap \Lambda(X)) = X \setminus K$. Notemos que cada $F \in \mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X, que está contenido en el complemento de K e intersecta a cada V_i, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $x_i \in V_i \setminus K$. Para toda $x \in X \setminus K$ definimos $E_x = \{x_1, \ldots, x_n, x\}$. Notemos que cada conjunto E_x es una unión finita de subconjuntos unitarios del espacio X, que es T_2. Por tanto cada E_x es un subconjunto cerrado, finito y compacto de X. Es claro que $E_x \in \mathcal{B} \cap \Lambda(X)$. Hemos probado que, para todo $x \in X \setminus K$, $x \in E_x \in \mathcal{B} \cap \Lambda(X)$. Luego, $X \setminus K \subseteq \bigcup (\mathcal{B} \cap \Lambda(X))$.

Para probar la otra contención, sea $x \in \bigcup (\mathcal{B} \cap \Lambda(X))$, entonces $x \in E$ para alguna

$$E \in (\langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle) \cap \Lambda(X).$$

Luego $E \in \langle X \setminus K \rangle$, es decir $x \in E \subseteq X \setminus K$, de donde $\bigcup (\mathcal{B} \cap \Lambda(X)) \subseteq X \setminus K$. Tenemos, así, que $\bigcup (\mathcal{B} \cap \Lambda(X)) = X \setminus K$. Como X es T_2 y K es compacto, sucede que K es cerrado en X, por lo que el conjunto $X \setminus K$ es abierto en X. Luego $\bigcup(\mathcal{B} \cap \Lambda(X))$ es abierto en X. Esto prueba a).

Antes de probar b) notemos que si $x \in X$ y $\mathcal{U}$ es un abierto en cualquiera de los espacios $(CL(X), \tau_F)$, $(F(X), \tau_F)$ o $(K(X), \tau_F)$ con $\{x\} \in \mathcal{U}$ entonces, por a), $V = \bigcup \mathcal{U}$ es una vecindad abierta de x en X tal que $V \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Lo que hemos de probar en b), es que lo anterior permanece válido, suponiendo que X es localmente compacto y que $\mathcal{U}$ es un abierto en cualquiera de los espacios $(C_K(X), \tau_F)$ o $(C(X), \tau_F)$, en donde no tenemos garantizado que la unión $\bigcup \mathcal{U}$ sea una vecindad abierta de x en X, pero sí una vecindad de x, pues esto es justo lo que vamos a demostrar.

Para probar b), sean X un espacio localmente compacto y $x \in X$. Supongamos primero que $\mathcal{U}$ es un abierto en $(C(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$. Entonces existe un abierto básico $\mathcal{O}$ de $(C(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{O} \subset \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{B} = \langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle$ un abierto básico de $(CL(X), \tau_F)$ tal que $\mathcal{B} \cap C(X) = \mathcal{O}$. Entonces cada conjunto V_i es abierto en X y K_1 es compacto en el espacio X, que es T_2, así que K_1 es cerrado en X. Como $\{x\} \in \mathcal{O}$ tenemos que $\{x\} \subseteq X \setminus K_1$. De esta manera, $X \setminus K_1$ es un subconjunto abierto en X tal que $x \in X \setminus K_1$. Usando la compacidad local de X, existen un subconjunto compacto D de x y un abierto U en X, de modo que $x \in U \subseteq D \subseteq X \setminus K_1$. Sea

$$V = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \right) \cap U.$$

Como $\{x\} \in \mathcal{B}$, tenemos que $\{x\} \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ y $x \in U$, por lo que V es un subconjunto abierto y no vacío de X tal que $x \in V$. Entonces V es una vecindad abierta de x en X. Vamos a probar que existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $V = \bigcup \mathcal{W}$. Para ver esto, notemos que

$$\{x\} \in \langle X, V \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle \subseteq \langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle = \mathcal{B}.$$

Así, $\mathcal{V} = (\langle X, V \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle) \cap C(X)$ es una vecindad abierta de $\{x\}$ en $C(X)$, tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}$. Recordemos que $x \in V \subseteq U \subseteq D \subseteq X \setminus K_1$. Definamos $K_2 = D \setminus V$. Notemos que $K_2 = D \cap (X \setminus V)$. Como $X \setminus V$ es cerrado en X, $D \cap (X \setminus V)$ es cerrado en el conjunto compacto D, así que K_2 es compacto. Definimos ahora

$$K = K_1 \cup K_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = (\langle X, V \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle) \cap C(X).$$

Como $x \in V \subseteq D$, es claro que $x \notin D \setminus V$, de donde $x \notin K_2$. Luego $\{x\} \subseteq X \setminus K_2$. También $\{x\} \subseteq X \setminus K_1$, por lo que

$$\{x\} \subseteq (X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2) = X \setminus (K_1 \cup K_2) = X \setminus K.$$

Además

$$\{x\} \in (\langle X, V \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle) \cap C(X) \subseteq (\langle X, V \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle) \cap C(X).$$

Es decir, $\{x\} \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Notemos que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Ahora veremos que $V = \bigcup \mathcal{W}$. Tomemos primero $E \in \mathcal{W}$. Entonces $E \subseteq X \setminus K = (X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2)$, por lo que

$$E \subseteq X \setminus K_2 = X \setminus (D \setminus V) = V \cup (X \setminus D).$$

Es importante observar que, al estar V contenido en el compacto D, resulta que E está contenido en la unión disjunta de los abiertos V y $X \setminus D$. Más aún, como $E \in \mathcal{W}$, E es un conexo e intersecta a V, de donde $E \subseteq V$. Esto prueba que

$$\bigcup \mathcal{W} = \bigcup \{E \mid E \in \mathcal{W}\} \subseteq V.$$

Tomemos ahora $y \in V$. Entonces $\{y\}$ es un subconjunto cerrado de X tal que $\{y\} \in \langle X, V\rangle$. También $y \in V \subseteq U \subseteq D \subseteq X \setminus K_1$, por lo que $y \notin K_1$. Como $K_2 \subseteq X \setminus V$, tenemos que $y \in X \setminus K_2$. Luego $y \in (X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2) = X \setminus K$, de donde $\{y\} \in \langle X \setminus K\rangle$. Como $\{y\}$ es conexo, sucede que $\{y\} \in (\langle X, V\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C(X) = \mathcal{W}$. Luego $y \in \{y\} \in \mathcal{W}$, de donde $y \in \bigcup \mathcal{W}$. Así, $V \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y, como la otra contención también es cierta, deducimos que $V = \bigcup \mathcal{W}$.

Ahora bien, como $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$, tenemos que $V = \bigcup \mathcal{W} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Esto termina la prueba en el caso en que $\mathcal{U}$ es un abierto en $(C(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ es un abierto en $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$, la prueba es similar. $\square$

Para el hiperespacio $F_n(X)$, con la topología de Fell, tenemos el siguiente resultado, el cual aparece probado originalmente en [6, Proposición 1.5.1].

Proposición 8.5. *Sea X espacio T_2. Si $\mathcal{U}$ es abierto en $(F_n(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto en X. En particular, si*

$$\mathcal{O} = (\langle X, V_1, \ldots, V_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap F_n(X),$$

es un abierto básico en $(F_n(X), \tau_F)$, donde $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos en X, ajenos dos a dos, y K es un subconjunto compacto de X, entonces $\bigcup \mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{n}(V_i \setminus K)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{O}$ es un abierto básico de $(F_n(X), \tau_F)$. Entonces existen una familia finita $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$, de subconjuntos abiertos de X, y un subconjunto compacto K de X, de modo que

$$\mathcal{B} = \langle X, V_1, \ldots, V_m\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle$$

es un abierto básico de $(CL(X), \tau_F)$ tal que $\mathcal{B} \cap F_n(X) = \mathcal{O}$. Sean $O = \bigcup \mathcal{O}$ y $x \in U$. Tomemos $E \in \mathcal{O}$ tal que $x \in E$. Como $E \in F_n(X)$, existen $p \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ tales que $p \leq n$ y $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Además $E \subseteq X \setminus K$ y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $E \cap V_i \neq \emptyset$. Como $x \in E$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $x = x_1$. Definimos un subconjunto W de X como sigue: si $x \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m$, entonces $W = X \setminus K$. Si, por otro lado, existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $x \in V_i$, entonces

$$W = \bigcap \{V_i \in \mathcal{V} \mid x \in V_i\} \cap (X \setminus K).$$

En cualquier situación, W es un abierto en X tal que $x \in W$, ya sea porque W es el complemento del conjunto cerrado K, o bien por que es una intersección finita de abiertos en X. Afirmamos que $W \subseteq O$. Para ver esto, sean $y \in W$ y E_y el subconjunto de X, que se obtiene al cambiar en E el punto x_1 por y, es decir, $E_y = \{y, x_2, \ldots, x_p\}$. Vamos a probar que, independientemente de la definición de W, sucede que $E_y \in \mathcal{O}$. Si $W = X \setminus K$, entonces $y \in X \setminus K$ y, como $E \in \mathcal{B}$ y $x \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m$, tenemos que $\{x_2, x_3, \ldots, x_p\} \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Luego $E_y \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como también $E_y \subseteq X \setminus K$, resulta que $E_y \in \mathcal{B} \cap F_n(X) = \mathcal{O}$. Si $W = \bigcap\{V_i \in \mathcal{V} \mid x \in V_i\} \cap (X \setminus K)$, también tenemos que $E_y \subseteq X \setminus K$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $j \in \{1, 2 \ldots, p\}$ tal que

$x_j \in V_i$. Si $j \geq 2$, entonces $x_j \in E_y$. Si $j = 1$, como $y \in W$ sucede que $y \in V_i$. Esto prueba que $E_y \cap V_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, por lo que $E_y \in \mathcal{B} \cap F_n(X) = \mathcal{O}$.

La afirmación $E_y \in \mathcal{O}$ implica que $E_y \subseteq \bigcup \mathcal{O} = O$. Como $y \in E_y$, sucede que $y \in O$. Esto prueba que $W \subseteq O$. Hemos probado que W es un abierto en X tal que $x \in W \subseteq O$, por lo que O es abierto de X. De esta manera si $\mathcal{O}$ es un abierto básico en $(F_n(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{O}$ es abierto en X. Esto implica que si $\mathcal{U}$ es abierto en $(F_n(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es abierto en X, y termina la primera parte de la prueba de la proposición.

Para probar la segunda parte, supongamos que

$$\mathcal{O} = (\langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle) \cap F_n(X),$$

es un abierto básico en $(F_n(X), \tau_F)$, donde $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos en X, ajenos dos a dos, y K es un subconjunto compacto de X. Sean $A = \bigcup_{i=1}^{n}(V_i \setminus K)$ y $U = \bigcup \mathcal{O}$. Es claro que A es abierto en X. Tomemos $E \in \mathcal{O}$. Entonces $E \subseteq X \setminus K$ y E intersecta a cada V_i. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $x_i \in V_i \cap E$. Dados $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $y \in V_i \setminus K$, el cerrado $E_y = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ es un elemento de $\mathcal{O}$. Luego $y \in E_y \subseteq \bigcup \mathcal{O}$. Esto prueba que $V_i \setminus K \subseteq \bigcup \mathcal{O}$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego $A = \bigcup_{i=1}^{n}(V_i \setminus K) \subseteq \bigcup \mathcal{O} = U$.

Para probar la otra contención, sea $x \in U$. Entonces existe $E \in \mathcal{O}$ tal que $x \in E$. Como $E \in \mathcal{O}$, tenemos que $E \subseteq X \setminus K$ y E intersecta a cada V_i. Como $E \in F_n(X)$ y los n elementos del conjunto $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ son ajenos dos a dos, E tiene exactamente n elementos. Entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in V_i$. Luego $x \in V_i \setminus K \subseteq A$. Esto prueba que $U \subseteq A$. □

Vamos a mostrar ahora algunas condiciones que garantizan un tipo de conexidad de los hiperespacios $(C(X), \tau_F)$ y $(C_K(X), \tau_F)$. Probaremos que, si X es localmente compacto y T_2, entonces $(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo si y sólo si X es localmente conexo (Proposición 8.10). El siguiente resultado aparece probado originalmente en [6, Proposición 2.7], suponiendo que X es compacto y T_2, afirmación que no es necesaria.

Proposición 8.6. *Sea X espacio topológico. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $(C(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de X. En particular, si $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de $(C_K(X), \tau_F)$, entonces $\bigcup \mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de X.*

Demostración. Como lo subconjuntos conexos de $C_K(X)$, son subconjuntos conexos de $C(X)$, basta probar la primera parte del enunciado. Supongamos, por el contrario, que $\bigcup \mathcal{B}$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos no vacíos A_1 y A_2 de X, tales que

$$\bigcup \mathcal{B} = A_1 \cup A_2 \quad \text{y} \quad \mathrm{cl}_X(A_1) \cap A_2 = \emptyset = A_1 \cap \mathrm{cl}_X(A_2).$$

Sean $\mathcal{C}_1 = \{E \in \mathcal{B} \mid E \cap A_1 \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{E \in \mathcal{B} \mid E \cap A_2 \neq \emptyset\}$. Dada $a \in A_1 \subseteq \bigcup \mathcal{B}$, existe $E \in \mathcal{B}$, tal que $a \in E$. Luego $E \cap A_1 \neq \emptyset$, por lo que $\mathcal{C}_1 \neq \emptyset$. De manera similar se prueba que $\mathcal{C}_2 \neq \emptyset$. Notemos que cada elemento E de $\mathcal{B}$, es un subconjunto conexo contenido en la unión $A_1 \cup A_2$, de los conjuntos mutuamente separados A_1 y A_2. Luego $E \subseteq A_1$ o bien $E \subseteq A_2$. Luego E intersecta a A_1 o bien a A_2, pero no a ambos. Por tanto $E \in \mathcal{C}_1$ si y sólo si $E \subseteq A_1$, mientras que $E \in \mathcal{C}_2$ si y sólo si $E \subseteq A_2$. Esto prueba que $\mathcal{B} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Supongamos que existe $F \in \mathcal{C}_1 \cap \mathrm{cl}_{(C(X),\tau_F)}(\mathcal{C}_2)$. Entonces $F \cap A_1 \neq \emptyset$, por lo que existe $x \in F \cap A_1$. Vamos a probar que $x \in \mathrm{cl}_X(A_2)$. Para ver esto, sea V una vecindad abierta de x. Entonces $\langle X, V\rangle$ es un abierto en $(CL(X), \tau_F)$ tal que $F \in \langle X, V\rangle$. Como $F \in \mathrm{cl}_{(C(X),\tau_F)}(\mathcal{C}_2)$, esto implica que $\langle X, V\rangle \cap \mathcal{C}_2 \neq \emptyset$. Sea $E \in \mathcal{C}_2 \cap \langle X, V\rangle$. Entonces $E \cap A_2 \neq \emptyset$ y $E \cap V \neq \emptyset$. Como los conjuntos A_1 y A_2 están mutuamente separados y $E \cap A_2 \neq \emptyset$, tenemos que $E \subseteq A_2$. Luego $V \cap A_2 \neq \emptyset$. Esto prueba que $x \in \mathrm{cl}_X(A_2)$ y, como también $x \in A_1$, resulta que $A_1 \cap \mathrm{cl}_X(A_2) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $\mathcal{C}_1 \cap \mathrm{cl}_{(C(X),\tau_F)}(\mathcal{C}_2) = \emptyset$. De manera similar se muestra que $\mathcal{C}_2 \cap \mathrm{cl}_{(C(X),\tau_F)}(\mathcal{C}_1) = \emptyset$. Luego $\mathcal{B}$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Por tanto $\bigcup \mathcal{B}$ es conexo. $\square$

El siguiente resultado aparece probado originalmente en [6, Proposición 2.8], suponiendo que X es compacto y T_2 y, por tanto $\tau_F = \tau_V$. Como veremos, es suficiente pedir que X sea T_2.

Proposición 8.7. *Sea X un espacio T_2. Entonces X es conexo si y sólo si $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos primero que X conexo. Por la Proposición 8.3, $(F_1(X), \tau_F)$ es conexo. Además $F_1(X) \subseteq C_K(X) \subseteq CL(X)$. Para cada $A \in C_K(X)$, A es subconjunto compacto, conexo y no vacío de X. Entonces A es un subcontinuo de X. Como ser T_2 es una propiedad hereditaria, A es un continuo. Luego, por la Proposición 8.1, $(C(A), \tau_V)$ es compacto y conexo. Entonces $C(A)$ es un subconjunto conexo de $(CL(X), \tau_V)$ y, por la parte a) de la Observación 8.2, $C(A)$ es un un subconjunto conexo de $(CL(X), \tau_F)$. Aplicando (6), sucede que $C_K(X)$ es una unión de subconjuntos conexos de $(CL(X), \tau_F)$, que intersectan al subconjunto conexo $F_1(X)$ de $(CL(X), \tau_F)$. Entonces $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo.

Supongamos ahora que $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo. Por la segunda parte de la Proposición 8.6, $\bigcup C_K(X)$ es un subconjunto conexo de X. Dada $x \in X$, como X es T_2, $\{x\}$ es un elemento de $C_K(X)$ que tiene a x. Luego $x \in \bigcup C_K(X)$. Esto prueba que $X = \bigcup C_K(X)$. Por tanto, X es conexo. $\square$

El siguiente resultado, y su corolario, aparecen probados originalmente en [6, Proposición 2.10 y Corolario 2.10.1].

Teorema 8.8. *Sea X un espacio localmente compacto, localmente conexo y T_2. Entonces $(C_K(X), \tau_F)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} = (\langle X, U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C(X)$ un abierto básico y no vacío de $(C(X), \tau_F)$, y $E \in \mathcal{U}$. Entonces cada conjunto U_i es abierto y no vacío en X, mientras que K es un subconjunto compacto de X. Como X es localmente conexo y $X \setminus K$ es un subconjunto abierto de X, que contiene al subconjunto conexo E de X, por la Proposición 7.3, la componente conexa C de $X \setminus K$ que contiene a E, es un subconjunto abierto en X. Como ser T_2 es una propiedad hereditaria, C es T_2. Además, como X es localmente conexo y C es abierto en X, por el Corolario 7.4, C es localmente conexo. Puesto que X es localmente compacto y C es abierto en X, por [12, Corolario 29.3], C es localmente compacto. Por tanto, C es conexo, localmente compacto, localmente conexo y T_2. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $V_i = U_i \cap C$. Definimos

$$\mathcal{V} = (\langle X, V_1, \ldots, V_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C(X).$$

Notemos que cada V_i es abierto en X. Además, como $E \in \mathcal{U}$, $\emptyset \neq E \cap U_i \subseteq C \cap U_i = U_i$. Entonces $E \cap V_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como también $E \subseteq X \setminus K$, se sigue que $E \in \mathcal{V}$. También $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea $x_i \in V_i$. Definimos $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Como F es un subconjunto compacto y no vacío de C, por la Proposición 7.7, existe un subcontinuo M de C tal que $F \subseteq \operatorname{int}_C(M)$. Notemos que M es un subconjunto compacto de C y, por tanto, también un subconjunto compacto de X, el cual es T_2, así que M es cerrado en X. Como M es un subconjunto conexo y no vacío de X, $M \in C_K(X)$. También $M \subseteq C \subseteq X \setminus K$ y, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \in F \cap V_i \subseteq M \cap V_i$. Luego $M \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Esto prueba que $\mathcal{U} \cap C_K(X) \neq \emptyset$, de donde $C_K(X)$ es denso en $C(X)$. □

Corolario 8.9. *Sea X un espacio localmente compacto, localmente conexo y T_2. Entonces X es conexo si y sólo si $(C(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Si X es conexo entonces, por la Proposición 8.7, $(C_K(X), \tau_F)$ es conexo. Además, por el Teorema 8.8, $C_K(X)$ es denso en $C(X)$. Esto implica, debido a que la cerradura de un conexo es conexa, que $(C(X), \tau_F)$ es conexo.

Ahora supongamos que $(C(X), \tau_F)$ es conexo. Por la primera parte de la Proposición 8.6, $\bigcup C(X)$ es un subconjunto conexo de X. Como para todo $x \in X$, el conjunto unitario $\{x\}$ es un elemento de $C(X)$ que tiene a x, sucede que $\bigcup C(X) = X$. Entonces X es conexo. □

Estamos en condiciones de probar uno de los resultados principales de la presente sección, el cual aparece originalmente probado en [6, Proposición 2.11].

Proposición 8.10. *Sea X un espacio localmente compacto y T_2. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sea $E \in C_K(X)$ y tomemos un abierto básico $\mathcal{U} = (\langle X, U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle) \cap C_K(X)$ de $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $E \in \mathcal{U}$. Entonces K es un subconjunto compacto de X y, por tanto cerrado en X, mientras que cada U_i es un subconjunto abierto y no vacío de X. Como E es un conjunto conexo contenido en $X \setminus K$, podemos considerar la componente C de $X \setminus K$ que contiene a E. Como X es localmente conexo y $X \setminus K$ es abierto en X, por la Proposición 7.3, C es abierto en X. Como hicimos ver en la prueba del Teorema 8.8, C es conexo, localmente compacto, localmente conexo y T_2. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos $V_i = U_i \cap C$. Notemos que $\emptyset \neq E \cap U_i \subseteq C \cap U_i = V_i$, por lo que cada V_i es un subconjunto abierto y no vacío de X. Definimos

$$\mathcal{V} = (\langle X, V_1, \dots, V_n \rangle \cap \langle X \setminus K \rangle) \cap C_K(X).$$

Es claro que $E \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Vamos a probar que $\mathcal{V}$ es un subconjunto conexo de $(C_K(X), \tau_F)$. Para esto es suficiente hacer ver que, para cada $F \in \mathcal{V}$, existe un subconjunto conexo $\mathcal{M}_F$ de $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $E, F \in \mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{V}$ pues, de esta manera, $\mathcal{V} = \bigcup_{F \in \mathcal{V}} \mathcal{M}_F$ es una unión de subconjuntos conexos de $\mathcal{V}$ que tienen a E como punto común y, por tanto, es un conjunto conexo. Tomemos, por tanto, $F \in \mathcal{V}$. Entonces F es un subconjunto conexo de $X \setminus K$ que intersecta a cada abierto V_i. Como $V_i \subseteq C$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $F \cap C \neq \emptyset$. En vista de que C es un subconjunto conexo maximal en $X \setminus K$, se sigue que $F \subseteq C$. Como $E \cup F$ es compacto no vacío y está contenido en C, por la Proposición 7.7, existe un subcontinuo M de C tal que $E \cup F \subseteq \operatorname{int}_C(M)$. Notemos que $E, F \in C(M)$. Consideremos ahora las siguientes familias:

(7) $\quad \mathcal{L}_E = \{G \in C(M) \mid E \subseteq G\}, \quad \mathcal{L}_F = \{G \in C(M) \mid F \subseteq G\} \quad$ y $\quad \mathcal{M}_F = \mathcal{L}_E \cup \mathcal{L}_F.$

Claramente $E \in \mathcal{L}_E$ y $F \in \mathcal{L}_F$, por lo que $E, F \in \mathcal{M}_F$. Como M es un continuo, por la Proposición 8.1, $(C(M), \tau_V)$ es compacto, conexo y, por la afirmación ($\star$) que aparece después de la Proposición 8.1, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son subconjuntos cerrados y conexos de $(C(M), \tau_V)$. Por la parte a) de la Observación 8.2, $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$ son subconjuntos conexos de $(C(M), \tau_F)$. Como $M \in \mathcal{L}_E \cap \mathcal{L}_F$, $\mathcal{M}_F$ es un subconjunto conexo de $(C(M), \tau_F)$.

Vamos a probar que $\mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{V}$. Para esto, tomemos $G \in \mathcal{L}_E$. Entonces G es un subconjunto cerrado del compacto M, así que G es compacto y, como X es T_2, G es cerrado en X. Además $\emptyset \neq E \subseteq G$, por lo que $G \in C_K(X)$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $\emptyset \neq E \cap V_i \subseteq G \cap V_i$ y, también, $G \subseteq M \subseteq C \subseteq X \setminus K$. Luego $G \in \mathcal{L}_E$, por lo que $\mathcal{L}_E \subseteq \mathcal{V}$. De manera similar, $\mathcal{L}_F \subseteq \mathcal{V}$. Esto prueba que $\mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{V}$. Por tanto, $\mathcal{M}_F$ es un subconjunto conexo de $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $E, F \in \mathcal{M}_F \subseteq \mathcal{V}$. Esto implica, como ya hicimos ver, que $\mathcal{V}$ es conexo. Por tanto, $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo.

Ahora supongamos que $(C_K(X), \tau_F)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Por la compacidad local de X, existen un abierto V en X y un subconjunto compacto D de X, tales que $x \in V \subseteq D \subseteq U$. Sea $K = D \setminus V$. Como X es T_2, D es cerrado en X, por lo que $K = D \cap (X \setminus V)$ es un subconjunto cerrado del compacto D y, por tanto, K es compacto. Notemos que

$$X \setminus K = X \setminus (D \cap (X \setminus V)) = (X \setminus D) \cup (X \setminus (X \setminus V)) = V \cup (X \setminus D). \tag{8}$$

Además $V \cap (X \setminus D) = \emptyset$ y $V \subseteq X \setminus K$. Esto implica que

$$\mathcal{V} = (\langle X, V\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C_K(X)$$

es un subconjunto abierto de $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V}$. Por la conexidad local de $(C_K(X), \tau_F)$ en $\{x\}$, existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{W}$ de $(C_K(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Notemos que $x \in \bigcup \mathcal{W}$. Además $\bigcup \mathcal{W} \subseteq V$. Para probar la contención, tomemos $y \in \bigcup \mathcal{W}$ y $E \in \mathcal{W}$ tal que $y \in E$. Como $E \in \mathcal{V}$, sucede que E es un subconjunto, compacto, conexo y no vacío de X tal que $E \cap V \neq \emptyset$ y $E \subseteq X \setminus K = V \cup (X \setminus D)$. Como E es conexo, intersecta a V y los conjuntos V y $X \setminus D$ son ajenos, tenemos que $E \subseteq V$ y, así, $y \in V$. Esto prueba que $\bigcup \mathcal{W} \subseteq V$.

Ahora bien, por la parte b) de la Proposición 8.4, existe un abierto G de X tal que $x \in G \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. La segunda parte de la Proposición 8.6, indica que $\bigcup \mathcal{W}$ es conexo en X. Notemos que G es una vecindad abierta de x, tal que $G \subseteq U$. Además, para cada $z_1, z_2 \in G$, el conjunto $\bigcup \mathcal{W}$ es un subconjunto conexo de X tal que $z_1, z_2 \in \bigcup \mathcal{W} \subseteq U$. Entonces X es conexo en pequeño en x y, como x es un punto arbitrario de X, deducimos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Luego, por [17, Teorema 27.16], X es localmente conexo. $\square$

Por último, el siguiente resultado muestra una relación entre la conexidad local de un espacio X, con la conexidad local del hiperespacio $C(X)$, equipado con la topología de Fell.

Teorema 8.11. *Sea X un espacio localmente compacto y T_2. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) *X es localmente conexo;*
b) *$(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo;*
c) *$(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo en cada $E \in C_K(X)$.*

Demostración. Como es claro que b) implica c), basta mostrar que a) implica b) y que c) implica a). Para probar que a) implica b), supongamos que X es localmente conexo. Sea $E \in C(X)$ y tomemos un abierto básico $\mathcal{U} = (\langle X, U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C(X)$ de $(C(X), \tau_F)$ tal que $E \in \mathcal{U}$. Entonces K es un subconjunto compacto de X y, por tanto cerrado en X, mientras que cada U_i es un subconjunto abierto y no vacío de X. Como E es un conjunto conexo contenido en $X \setminus K$, podemos considerar la componente C de $X \setminus K$ que contiene a E. Como X es localmente conexo y $X \setminus K$ es abierto en X, por la Proposición 7.3, C es abierto en X. Como hicimos ver en la prueba del Teorema 8.8, C es conexo, localmente compacto, localmente conexo y T_2. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos $V_i = U_i \cap C$. Notemos que $\emptyset \neq E \cap U_i \subseteq C \cap U_i = V_i$, por lo que cada V_i es un subconjunto abierto y no vacío de X. Definimos

$$\mathcal{V} = (\langle X, V_1, \ldots, V_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C(X).$$

Es claro que $E \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{V} \cap C_K(X) \neq \emptyset$. Vamos a probar que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es un subconjunto conexo de $(C(X), \tau_F)$, haciendo ver que cualesquiera dos de sus elementos, se encuentran en un subconjunto conexo de $\mathcal{V} \cap C_K(X)$. Tomemos $F_1, F_2 \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Entonces F_1 es un subconjunto conexo de $X \setminus K$ que intersecta a cada abierto V_i. Como $V_i \subseteq C$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $F_1 \cap C \neq \emptyset$. En vista de que C es un subconjunto conexo maximal en $X \setminus K$, se sigue que $F_1 \subseteq C$. Analógamente $F_2 \subseteq C$. Como $F_1 \cup F_2$ es compacto no vacío y está contenido en C, por la Proposición 7.7, existe un subcontinuo M de C tal que $F_1 \cup F_2 \subseteq \operatorname{int}_C(M)$. Notemos que $F_1, F_1 \in C(M)$. Consideremos ahora las siguientes familias:

$$\mathcal{L}_1 = \{G \in C(M) \mid F_1 \subseteq G\}, \quad \mathcal{L}_2 = \{G \in C(M) \mid F_2 \subseteq G\} \quad \text{y} \quad \mathcal{M} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

Claramente $F_1 \in \mathcal{L}_1$ y $F_2 \in \mathcal{L}_F$, por lo que $F_1, F_2 \in \mathcal{M}$. La misma demostración que dimos en la prueba de la Proposición 8.10, para mostrar que las familias $\mathcal{L}_E$ y $\mathcal{L}_F$, definidas en (7), son subconjuntos conexos de $(C(M), \tau_V)$, hace ver que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son subconjuntos conexos de $(C(M), \tau_V)$. Como $M \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}$ es un subconjunto conexo de $(C(M), \tau_F)$. Notemos ahora que si $F \in \mathcal{L}_1$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces

$$F_1 \subseteq F \subseteq M \subseteq C \subseteq X \setminus K \quad \text{y} \quad \emptyset \neq F_1 \cap V_i \subseteq F \cap V_i.$$

Por tanto, $F \in \mathcal{V}$. También F es un subconjunto cerrado del conjunto compacto M, así que $F \in C_K(X)$. Esto muestra que $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De manera similar, $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{V} \cap C_K(X)$, por lo que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V} \cap C_K(X)$. De esta manera, $\mathcal{M}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ que contiene a los elementos F_1 y F_2. Esto prueba que $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es conexo.

Ahora bien, por el Teorema 8.8, $C_K(X)$ es denso en $(C(X), \tau_F)$. Por tanto, $\mathcal{V} \cap C_K(X)$ es denso en $\mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{V}$ contiene un subconjunto denso y conexo, a saber $\mathcal{V} \cap C_K(X)$. Luego, $\mathcal{V}$ es conexo. Hemos probado, así, que el abierto básico $\mathcal{U}$ que tiene a E, contiene un conjunto abierto y conexo que también tiene a E. Esto muestra que $(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo, y termina la prueba de que a) implica b).

Para probar que c) implica a), sean $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in X$. Como X es localmente compacto, existen un subconjunto abierto U de X y un subconjunto compacto D de X, tales que $x \in V \subseteq D \subseteq U$. Sea $K = D \setminus V$. Entonces K es compacto y, como indicamos en (8), $X \setminus K = V \cup (X \setminus D)$, $V \cap (X \setminus D) = \emptyset$ y $V \subseteq X \setminus K$. Esto implica que

$$\mathcal{V} = (\langle X, V\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle) \cap C(X)$$

es un subconjunto abierto de $(C(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \cap C_K(X)$. Como $(C(X), \tau_F)$ es localmente conexo en $\{x\}$, existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{W}$ de $(C(X), \tau_F)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. La misma prueba que dimos en la Proposición 8.10, hace ver que $\bigcup \mathcal{W}$ es un subconjunto de V que tiene a x. Por la parte b) de la Proposición 8.4, existe un abierto G de X tal que $x \in G \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. La segunda parte de la Proposición 8.6, indica que $\bigcup \mathcal{W}$ es conexo en X. Notemos que G es una vecindad abierta de x, tal que $G \subseteq U$. Además, para cada $z_1, z_2 \in G$, el conjunto $\bigcup \mathcal{W}$ es un subconjunto conexo de X tal que $z_1, z_2 \in \bigcup \mathcal{W} \subseteq U$. Entonces X es conexo en pequeño en x y, como x es un punto arbitrario de X, deducimos X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Luego, por [17, Teorema 27.16], X es localmente conexo. Esto termina la prueba de que c) implica a). $\square$

Referencias

[1] G. Beer, *On the Fell topology*, Set-Valued Analysis 1 (1993), 69–80.

[2] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London. 1993.

[3] Ji-Chen, P. Vitolo, *Fell topology on the hyperspace of a non-Hausdorff space*, Ricerce Math. 57 (2008), 111–125.

[4] J. M. G. Fell, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 472–476.

[5] I. A. Gómez Ramos, *Dinámica y Topología de Fell*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. 2014.

[6] K. Hur, J. R. Moon, C. J. Rhee, *Local connectedness in Fell topology.* J. Korean Math. Soc. 36 (6) (1999), 1047–1059.

[7] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Results.* Marcel Dekker, Inc. New York, Basel. 1999.

[8] J. Li, P. Oprocha, *Furstenberg families, sensitivity and the space of probability measures*, Nonlinearity 30 (3) (2017).

[9] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, Toronto. 1975.

[10] M. M. McWaters, *Arcs, semigroups, and hyperspaces.* Canadian J. Math 20 (1968), 1207–1210.

[11] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets.* Transactions of the American Mathematical Society, 71 (1951), 152–182.

[12] J. Munkres, *Topology.* Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall, Inc. 2000.

[13] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets.* Marcel Dekker, Inc. New York, Basel. 1978.

[14] Y. Pachecho-Juárez, *Propiedades del Producto de Espacios Topológicos.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. 2009.

[15] Y. Wang, G. Wei, W. H. Campbell, S. Bourquin, *A framework of induced hyperspace dynamical systems equipped with the hit-or-miss topology*, Chaos, Solitons & Fractals 41 (4) (2009), 1708–1717.

[16] A. Wilansky, *Between T_1 and T_2.* Amer. Math. Monthly, 74 (1967), 261–266.

[17] S. Willard, *General Topology.* Addison-Wesley Series In Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1970.

[18] X. Wu, J. Wang y G. Chen, *$\mathcal{F}$-sensitivity and multi-sensitivity of hyperspatial dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl. 429 (1)(2015), 16–26.

[19] X. Wu, *Chaos of transformations induced onto the space of probability measures*, Int. J. Bifurcation Chaos 26, 1650227 (2016).