Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

REYES Y HEREDEROS EN TORNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Daniel Gregorio Longino

TUTORA

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2018

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
Gregorio
Longino
Daniel
55 4539 6572
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
414014129

2. Datos del tutor.
Mat.
Laura
Pastrana
Ramírez

3. Datos del sinodal 1.
Dra.
Hortensia
Galeana
Sánchez

4. Datos del sinodal 2.
Dra.
María del Rocío
Sánchez
López

5. Datos del sinodal 3.
M. en C.
Germán
Benítez
Bobadilla

6. Datos del sinodal 4.
Mat.
Gerardo Miguel
Tecpa
Galván

7. Datos de la tesis.
Reyes y herederos en torneos
163 p.
2018

Agradecimientos

A mis padres por ser mi pilar y estar conmigo en todo momento.

A mi asesora Laura Pastrana Ramírez por su apoyo y compromiso en la elaboración de esta tesis.

A mis sinodales por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo: Dra. Hortensia Galeana Sánchez, Dra. María del Rocío Sánchez López, M. en C. Germán Benítez Bobadilla y Mat. Gerardo Miguel Tecpa Galván.

Índice general

Introducción

Los torneos comprenden una amplia e importante clase de digráficas, algunas de las áreas de aplicación en las cuales los torneos surgen como modelos incluyen dominación en algunas sociedades de animales, round robin, teoría de votaciones, teoría de la selección social y redes de comunicación [10]. Muchas de las propiedades importantes de los torneos fueron investigadas primeramente por H. G. Landau con el propósito de modelar relaciones de dominación entre gallinas.

En 1980 Stephen B. Maurer publicó un artículo bajo el título *The king chicken theorems* [19], en el cual estableció a un torneo como modelo matemático para el estudio de las relaciones de dominación entre pollos. La idea de Landau era permitir la dominación en dos pasos, así como directamente en uno. Landau no introdujo un término para su concepto, pero Maurer sí lo hizo. De esta manera Maurer acuñó el término de rey para referirse a un vértice de un torneo que alcanza a cualquier otro vértice en uno o dos pasos, y con base a su definición presentó nuevos resultados, siendo uno de los principales el siguiente: para cualesquiera enteros positivos n y k con $n \geq k \geq 1$, excepto para $k = 2$ y $k = n = 4$, existe un torneo con n vértices y con k reyes (teorema de Maurer).

Una observación que realizó Maurer en [19] fue la siguiente: un rey en un torneo es un vértice que alcanza a los demás vértices en a los más dos pasos, ¿qué pasa si reemplazamos el dos por el tres o por cualquier otro número entero mayor o igual a uno? esta pregunta lo llevó a dar la siguiente definición: sean T un torneo y r un entero positivo, un vértice x es un r-rey T, si para cualquier $y \in V(T)$ existe una (x, y)-trayectoria de longitud menor o igual a r.

Siguiendo con la idea de rey de un torneo, Kim A.S. Factor y Larry J. Langley en [9] introducen el concepto de heredero en un torneo T, para referirse a un vértice h que tiene la propiedad de no ser un rey del torneo T, pero sí ser un rey del torneo $T - \{x\}$, donde x es algún rey de T. Ellos denominan a h un heredero del rey x. A partir de los conceptos de rey y heredero, los autores consideran un torneo T con exactamente n vértices y con reyes etiquetados $x_1, \ldots, x_m$, y se plantean las siguientes preguntas ¿cuál puede ser el valor de m?, ¿cuántos herederos puede tener el rey x_i? y ¿cuántos vértices puede tener T que no sean reyes ni herederos?. Con el objetivo de resolver cada una de las anteriores cuestiones ellos definen la secuencia real del torneo T como $[m; h_1, \ldots, h_m; s]$, donde m es el número de reyes distintos de T, para cada i en $\{1, \ldots, m\}$ h_i representa el número de herederos del rey x_i y s el número de vértices de T que no son reyes ni herederos. De esta manera las preguntas anteriores pueden ser resumidas en una única pregunta en términos de secuencias de la siguiente forma: dada una secuencia $[m'; h'_1, \ldots, h'_m; s']$ ¿existe un torneo que tenga tal secuencia como su secuencia real?. Son los mismos autores quienes contestan esta última cuestión determinando exactamente cuáles secuencias son secuencias reales de algún torneo.

Por otro lado, en la teoría de gráficas una técnica que se usa para demostrar o generalizar diversos resultados es construir una gráfica a partir de otra. Bajo esta idea Fisher, Lundgren, Merz y Reid en [20] definen la gráfica dominante de una digráfica y caracterizan todas las gráficas que pueden ser las gráficas dominantes de torneos. Posteriormente Kim A.S. Factor y Larry J. Langley en [7] y [9] definen la gráfica $(1,2)$-dominante y la gráfica $(2,2)$-dominante de una digráfica respectivamente, y caracterizan todas las gráficas conexas que pueden ser las gráficas $(1,2)$-dominantes de torneos, así como todas las gráficas que pueden ser las gráficas $(2,2)$-dominantes de torneos.

Dado un torneo T, la gráfica $(2,2)$-dominante de T es $dom_{2,2}(T)$, donde $V(dom_{2,2}(T)) = V(T)$ y $uv \in A(dom_{2,2}(T))$ si para cualquier vértice w en $V(T) - \{u, v\}$ existe una (u, w)-trayectoria y una (v, w)-trayectoria ambas de longitud menor o igual a dos en T. Resulta que $dom_{2,2}(T)$ tiene una relación muy importante con reyes y herederos, y es que, $a = uv$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$ si y sólo si u y v son reyes de T o u es un heredero de v. Esta relación junto con el estudio de las secuencias reales es lo que nos permitirá conocer exactamente la estructura de dicha gráfica.

El trabajo que Maurer realizó sobre los reyes es lo que nos motiva a definir para $r \geq 2$ un r-heredero, la r-secuencia real de un torneo y la gráfica (r,r)-dominante de un torneo. Sea T un torneo, un r-heredero de T es un vértice h que tiene la propiedad de no ser un r-rey del torneo T, pero sí ser un r-rey del torneo $T-\{x\}$, donde x es algún r-rey de T. La r-secuencia real T es $[m; h_1, \ldots, h_m; s]_r$, donde m representa el número de r-reyes distintos de T, para cada i en $\{1, \ldots, m\}$ h_i representa el número de r-herederos del r-rey x_i y s el número de vértices de T que no son r-reyes ni r-herederos. $dom_{r,r}(T)$ es la gráfica (r,r)-dominante de T, donde $V(dom_{r,r}(T)) = V(T)$ y $uv \in A(dom_{r,r}(T))$ si para cualquier vértice w en $V(T) - \{u,v\}$ existe una (u,w)-trayectoria y una (v,w)-trayectoria ambas de longitud menor o igual a r en T.

Siguiendo con la línea de investigación de los autores antes mencionados, los objetivos de esta tesis son para $r \geq 2$ estudiar la existencia de torneos con un número específico de r-reyes. Dada una r-secuencia $[m; h_1, \ldots, h_m; s]_r$, determinar si ésta es r-secuencia real de algún torneo o no. Para $r \geq 2$ estudiar la gráfica (r,r)-dominante de un torneo. Y finalmente dar una aplicación de las r-secuencias reales de torneos para encontrar $(2,r)$-soluciones ajenas dos a dos en la digráfica de líneas de un torneo.

En el primer capítulo se presentan las definiciones básicas de la teoría de gráficas y digráficas, así como algunos resultados que utilizaremos.

El segundo capítulo está dedicado a mostrar una serie de proposiciones sobre reyes en torneos, relacionados especialmente con la existencia de torneos con un número específico de reyes.

El tercer capítulo tiene como objetivo detallar los resultados presentes en el artículo *Kings and Heirs: A characterization of the* $(2,2)$*-domination graphs of tournaments* [9], el cual está orientado a dar una caracterización estructural de la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo. Especialmente nos enfocamos al estudio de las secuencias reales de torneos.

En el cuarto capítulo, primero contestamos la pregunta, dado un entero $r \geq 3$ ¿para cuáles enteros n y m, existe un torneo con n vértices tal que exactamente m de éstos sean r-reyes?. Después para $r \geq 2$ definimos la gráfica (r, r)-dominante de torneos, y nos dedicamos a su estudio para el caso en que r es mayor o igual que tres. Para ello recurrimos a las r-secuencias reales.

En el quinto capítulo mostramos una aplicación de las r-secuencias reales para encontrar $(2, r)$-soluciones ajenas dos a dos en la digráfica de líneas de un torneo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones básicas de la teoría de gráficas y digráficas, así como algunos resultados, con la finalidad de sentar los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de esta tesis. Los siguientes conceptos pueden ser consultados en [3] y [5].

1.1. Gráficas

Definición 1.1.1. Una **gráfica** o **gráfica no dirigida** $G = (V, A)$ consiste de un conjunto de elementos finito y no vacío $V = V(G)$, donde los elementos de $V(G)$ son llamados **vértices**, y un conjunto finito $A = A(G)$ de parejas no ordenadas de distintos vértices llamadas **aristas**. Llamamos a $V(G)$ y $A(G)$ el conjunto de vértices y el conjunto de aristas de G, respectivamente. En otras palabras, una arista $\{x, y\}$ es un subconjunto de dos elementos de $V(G)$. Denotamos a la arista $\{x, y\}$ por xy.

Notemos que en la definición anterior de gráfica, no permitimos lazos (es decir, parejas que consisten de un mismo vértice) o aristas paralelas (es decir, parejas múltiples con exactamente los mismos vértices).

Una gráfica G puede ser representada en el plano por un diagrama donde cada vértice de G es representado por un punto, y una arista xy es representada por un segmento de línea o curva que une a los correspondientes puntos del diagrama. Por ejemplo, la gráfica G con conjunto de vértices $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ y conjunto de aristas $A(G) = \{uv, uy, vx, vy, wy, xy\}$

se muestra en la figura 1.1. Aunque las aristas vx y wy se crucen en la figura 1.1, su punto de intersección no es un vértice de G.

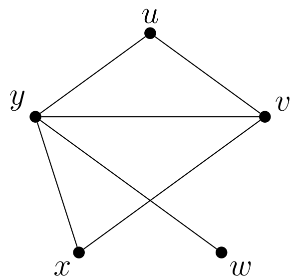

Figura 1.1. Diagrama de una gráfica G.

Sea G una gráfica, si $xy \in A(G)$ entonces decimos que los vértices x y y son **adyacentes** y llamamos a x y a y los **vértices extremos** de la arista xy. Para la gráfica G de la figura 1.1, los vértices u y v son adyacentes en G, mientras que los vértices u y x no son adyacentes. A dos vértices adyacentes se les denomina vértices **vecinos**. El conjunto de vértices vecinos de un vértice v es llamado la **vecindad abierta** de v o la **vecindad** de v y es denotado por $N_G(v)$ o $N(v)$ si la gráfica G es sobreentendida. En la gráfica de la figura 1.1 $N(y) = \{u, v, x, w\}$. Al conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ se le llama la **vecindad cerrada** de v. Para un conjunto S, la **cardinalidad** de S es el número de elementos de S y se simboliza por $|S|$. El **grado** de v es denotado por $\delta_G(v)$ o $\delta(v)$ y representa el número de elementos de $N_G(v)$, es decir, $\delta_G(v) = |N_G(v)|$. Decimos que v es un **vértice final** si $\delta_G(v) = 1$, y v es llamado un **vértice aislado** si $\delta_G(v) = 0$. En la gráfica G de la figura anterior $\delta_G(w) = 1$ y por lo tanto es un vértice final de G.

El siguiente resultado relaciona el grado de los vértices con el número de aristas de una gráfica.

Teorema 1.1.2. *Si G es una gráfica, entonces*

$$\sum_{v \in V(G)} \delta(v) = 2\,|A(G)|.$$

Demostración. Al sumar los grados de los vértices de G, estamos contando cada arista dos veces, una por cada vértice extremo de la arista.

■

Sea G una gráfica, el número de vértices de G es el **orden** de G y el número de aristas es el **tamaño** de G. El orden de la gráfica G de la figura 1.1 es 5 y su tamaño es 6. Una gráfica de orden 1 es llamada la **gráfica trivial**. Una **gráfica no trivial** tiene, por lo tanto, dos o más vértices. Una **gráfica completa** es una gráfica en la cual cada par de vértices distintos son adyacentes. La gráfica completa de orden n es denotada por K_n.

Para cada n en $\{1, \ldots, 5\}$ la gráfica completa K_n se muestra en la figura 1.2.

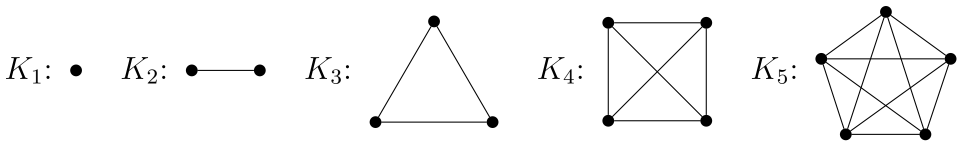

Figura 1.2. Algunas gráficas completas.

En las gráficas completas de la figura 1.2 observemos que para cada i en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, si q_i es el número de aristas de K_i, entonces $2q_i = i(i-1)$, resulta que ésto no sólo pasa para las gráficas anteriormente mencionadas, sino que es cierto en general para cualquier gráfica completa.

Corolario 1.1.3. *Sea K_n la gráfica completa de orden n, si q_n es el tamaño de K_n, entonces $2q_n = n(n-1)$.*

Demostración. Consideremos K_n la gráfica completa de n vértices, dado que cualquier par de vértices distintos de K_n son adyacentes, se tiene que $\delta(v) = n-1$ para todo $v \in V(K_n)$, entonces por el lema 1.1.2 obtenemos que $\displaystyle\sum_{v \in V(K_n)} \delta(v) = 2q_n$, sin embargo, $\displaystyle\sum_{v \in V(K_n)} \delta(v) = n(n-1)$. Por lo tanto $2q_n = n(n-1)$.

■

Dos gráficas G y H son **isomorfas** si existe una función biyectiva

$$\varphi : V(G) \to V(H)$$

tal que u y v son adyacentes en G si y sólo si $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son adyacentes en H. La función φ es llamada un **isomorfismo** de G a H. Si G y H

son isomorfas, entonces escribimos $G \cong H$. Si no existe tal función φ, entonces decimos que G y H **no son gráficas isomorfas**, y escribimos $G \ncong H$.

Las gráficas G_1 y H_1 que se muestran en la figura 1.3 son isomorfas, ésto se debe a que la función $\varphi : V(G_1) \to V(H_1)$ definida por

$$\varphi(a_1) = c_1,\ \varphi(a_2) = d_2,\ \varphi(a_3) = d_4,\ \varphi(a_4) = c_3,$$
$$\varphi(b_1) = d_1,\ \varphi(b_2) = c_2,\ \varphi(b_3) = c_4,\ \varphi(b_4) = d_3$$

es un isomorfismo de G_1 a H_1.

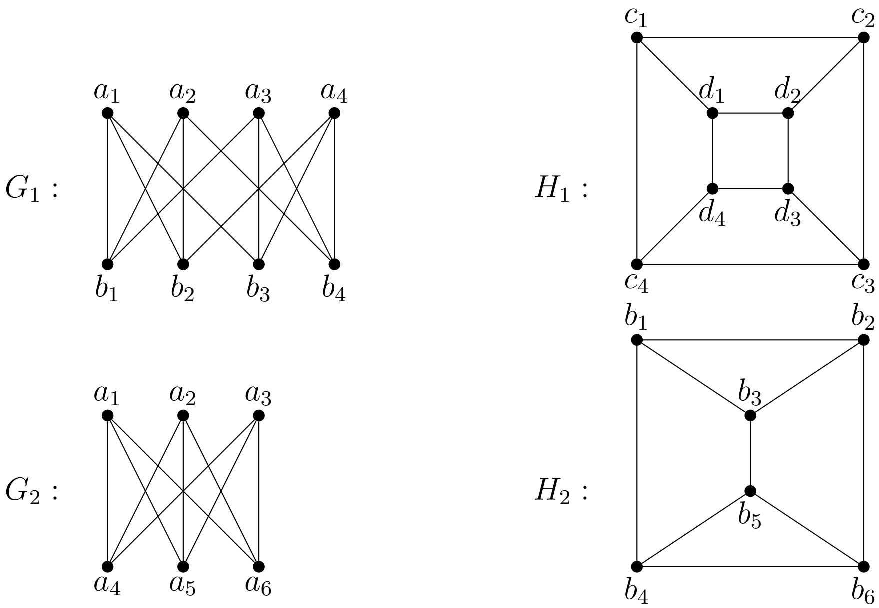

Figura 1.3. Gráficas isomorfas y no isomorfas.

Por otro lado, las gráficas G_2 y H_2 de la figura 1.3 no son isomorfas, ya que si existiera un isomorfismo $\varphi : V(H_2) \to V(G_2)$, como para cada i en $\{1, 2, 3\}$ y j en $\{1, 2, 3\}$, con $i \neq j$, se tiene que b_i es adyacente a b_j, entonces $\varphi(b_i)$ sería adyacente a $\varphi(b_j)$, lo cual sería una contradicción ya que en G_2 no existen tres vértices distintos que sean mutuamente adyacentes, por lo tanto $G_2 \ncong H_2$.

Otra manera de ver que las gráficas G_2 y H_2 no son isomorfas es notando que para cada v en $V(H_2)$ se tiene que en $N_{H_2}(v)$ hay dos vértices adyacentes y esto no sucede en G_2 para cualquiera de sus vértices.

Lema 1.1.4. *Sean G y H dos gráficas, si $\varphi : V(G) \to V(H)$ es un isomorfismo de G a H, entonces la función inversa $\varphi^{-1} : V(H) \to V(G)$ es un isomorfismo de H a G.*

Demostración. Por ser φ una función biyectiva se tiene que φ^{-1} es una función biyectiva. Resta demostrar que u y v son adyacentes en H si y sólo si $\varphi^{-1}(u)$ y $\varphi^{-1}(v)$ son adyacentes en G. Si u y v son vértices adyacentes de H, entonces $u = \varphi(u')$ y $v = \varphi(v')$ para algunos vértices u' y v' de G, y como φ es un isomorfismo se tiene que $\varphi^{-1}(u) = u'$ y $\varphi^{-1}(v) = v'$ son adyacentes en G. Inversamente, si $\varphi^{-1}(u)$ y $\varphi^{-1}(v)$ son adyacentes en G, entonces por ser φ un isomorfismo se tiene que $\varphi(\varphi^{-1}(u)) = u$ y $\varphi(\varphi^{-1}(v)) = v$ son adyacentes en H.

■

Sea G una gráfica, una gráfica H es una **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, en tal caso escribimos $H \subseteq G$. Para cualquier subconjunto no vacío S de $V(G)$, la **subgráfica $G[S]$ de G inducida por S** tiene a S como conjunto de vértices y dos vértices u y v de S son adyacentes en $G[S]$ si y sólo si son adyacentes en G. Una subgráfica H de G es llamada una **subgráfica inducida** si existe un subconjunto no vacío S de $V(G)$ tal que $H = G[S]$. En la figura 1.4 se ilustran las gráficas G' y $G'[S]$, donde $S = \{y, z, w, w_1, w_4\}$.

Figura 1.4. Subgráfica inducida.

Una gráfica G es ***p*-partita** si existe una partición $P = \{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ de $V(G)$, tal que toda arista de G tiene sus vértices extremos en diferentes elementos de la partición, es decir, $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_p$, para todo $i \neq j$ se tiene que $V_i \cap V_j = \varnothing$, para $1 \leq i \leq p$ se tiene que $V_i \neq \varnothing$ y para cada arista uv de G, existen V_k y V_l elementos distintos de P, tal que $u \in V_k$ y $v \in V_l$. Un caso especial de una gráfica p-partita es cuando $p = 2$, a esta gráfica la llamamos una **gráfica bipartita**. A menudo denotamos una gráfica bipartita B por $B = (V_1, V_2; A)$. Una gráfica p-partita G es ***p*-partita completa** si para cualesquiera dos vértices $x \in V_i$ y $y \in V_j$, con $i \neq j$, la arista xy está en G. Denotamos a la gráfica p-partita completa por $K_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$, donde $n_1, n_2, \ldots, n_p$ representa la cardinalidad de $V_1, V_2, \ldots, V_p$, respectivamente. Para $p \geq 2$ las gráficas p-partitas completas son también llamadas **gráficas completas multipartitas**.

Sea G una gráfica, un subconjunto S de vértices de G es llamado un **conjunto dominante** si para cualquier vértice v en $V(G)$, v es un elemento de S o es adyacente a un elemento de S. En la gráfica G' de la figura 1.5 si $S' = \{v, w, x, y, z\}$, entonces cualquier vértice en $V(G') - S'$ es adyacente a algún elemento de S', por lo cual S' es un conjunto dominante. Por otro lado, el conjunto $S'' = \{v\}$ no es un conjunto dominante ya que no todos los vértices restantes de G' son adyacentes a v, por ejemplo z no es adyacente a v.

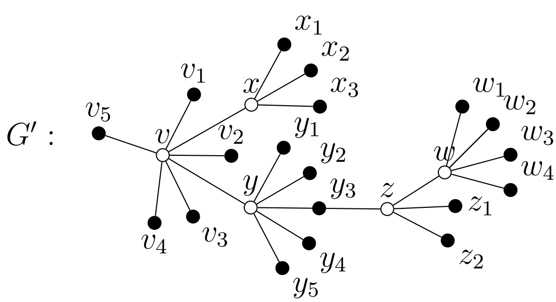

Figura 1.5. Un conjunto dominante de G'.

1.2. Digráficas y subdigráficas

Definición 1.2.1. Una **digráfica** o **gráfica dirigida** D consiste de un conjunto finito y no vacío $V(D)$, donde los elementos de $V(D)$ son llamados **vértices** y un conjunto finito $F(D)$ de parejas ordenadas de distintos vértices llamadas **flechas**. A menudo escribiremos $D = (V(D), F(D))$ lo cual significa que $V(D)$ y $F(D)$ son el conjunto de vértices y el conjunto de flechas de D, respectivamente.

Sea D una digráfica, el número de vértices de D es el **orden** de D y el número de flechas es el **tamaño** de D.

Una digráfica D puede ser representada por un diagrama donde cada vértice de D es representado por un punto, y una flecha (u, v) es representada por un arco dirigido que va de u hacia v. Por ejemplo, la digráfica $D = (V(D), F(D))$ con

$$V(D) = \{u, v, w, x, y, z\} \text{ y } F(D) = \{(x, z), (y, z), (z, u), (u, v), (u, w)\}$$

se muestra en la figura 1.6.

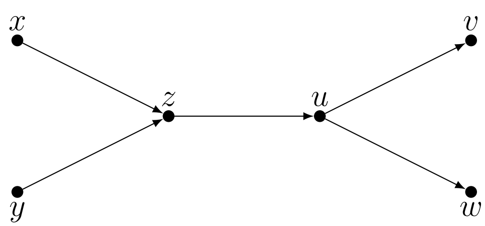

Figura 1.6. Diagrama de una digráfica D.

Sea D una digráfica, para una flecha (u, v) de D, u es el **vértice inicial** y v es el **vértice final** de la flecha. El vértice inicial y el vértice final de una flecha son los **vértices extremos** de ella. Decimos que los vértices extremos son **adyacentes**, es decir, u es adyacente a v y v es adyacente a u.

Sea D una digráfica, si (u, v) es una flecha de D, entonces decimos que u **domina a** v o v es **dominado por** u y lo denotamos por $u \to v$. Para subconjuntos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $V(D)$, con $n \geq 2$,

$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n$$

significa que para cada i en $\{1, \ldots, n-1\}$ cualquier vértice de A_i domina a cualquier vértice de A_{i+1}. Si $i_1, \ldots, i_m$ son elementos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tales que $i_j \leq i_{j+1}$ para cada j en $\{1, \ldots, m-1\}$, y $A_k = \{a_{i_k}\}$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$, entonces $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n$ es reemplazado por

$$A_1 \to \ldots \to a_{i_1} \to \ldots \to a_{i_m} \to \ldots \to A_n.$$

Por ejemplo en la digráfica D de la figura 1.6, $\{x, y\} \to z$.

Sea D una digráfica, para un vértice v de D usamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} N_D^+(v) = N^+(v) &= \{u \in V(D) \mid (v,u) \in F(D)\}, \\ N_D^-(v) = N^-(v) &= \{u \in V(D) \mid (u,v) \in F(D)\}, \\ N_D^+[v] = N^+[v] &= N_D^+(v) \cup \{v\}, \\ N_D^-[v] = N^-[v] &= N_D^-(v) \cup \{v\}. \end{aligned}$$

Los conjuntos $N_D^+(v)$, $N_D^-(v)$, $N_D^+[v]$, $N_D^-[v]$ son llamados la **vecindad exterior**, **vecindad interior**, **vecindad exterior cerrada** y la **vecindad interior cerrada de v**, respectivamente. Por ejemplo en la digráfica D de la figura 1.7, $N_D^+(x_0) = \{x_1\}$ y $N_D^-(x_2) = \{x_1\}$. El **exgrado** de v es denotado por $\delta_D^+(v)$ o $\delta^+(v)$ y representa la cardinalidad de $N_D^+(v)$. El **ingrado** de v es denotado por $\delta_D^-(v)$ o $\delta^-(v)$ y representa la cardinalidad de $N_D^-(v)$. Un vértice v en D es llamado **transmisor** si $\delta_D^-(v) = 0$, y es llamado **pozo** si $\delta_D^+(v) = 0$. El **exgrado máximo** de D es $\Delta^+(D) = \text{máx}\{\delta_D^+(v) \mid v \in V(D)\}$.

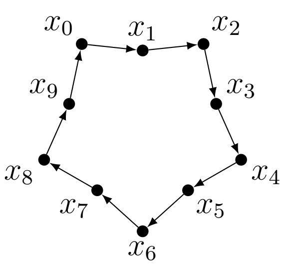

Figura 1.7. Una digráfica D.

Sea D una digráfica, una digráfica H es una **subdigráfica** de D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$, lo denotamos por $H \subseteq D$. Si cualquier flecha de $F(D)$ con extremos en $V(H)$ está en $F(H)$ decimos que H es **inducida** por $X = V(H)$, escribimos $H = D[X]$ y la llamamos la **subdigráfica inducida por $\boldsymbol{X}$**. Si $X \subset V(D)$ entonces la digráfica $D - X$ es la subdigráfica inducida por $V(D) - X$, es decir, $D - X = D[V(D) - X]$. En la figura 1.8 se ilustran las digráficas D y $D[X]$, donde $X = \{x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

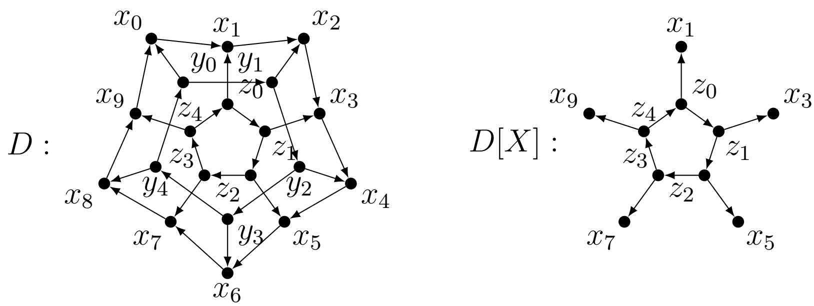

Figura 1.8. Subdigráfica inducida.

Sean D_1 y D_2 dos digráficas con conjuntos de vértices disjuntos, es decir, $V(D_1) \cap V(D_2) = \varnothing$. La **unión** $D_1 \cup D_2$ de D_1 y D_2 tiene como conjunto de vértices $V(D_1) \cup V(D_2)$ y conjunto de flechas $F(D_1) \cup F(D_2)$. En la figura 1.9 se muestran las digráficas D_1, D_2 y su unión $D_1 \cup D_2$.

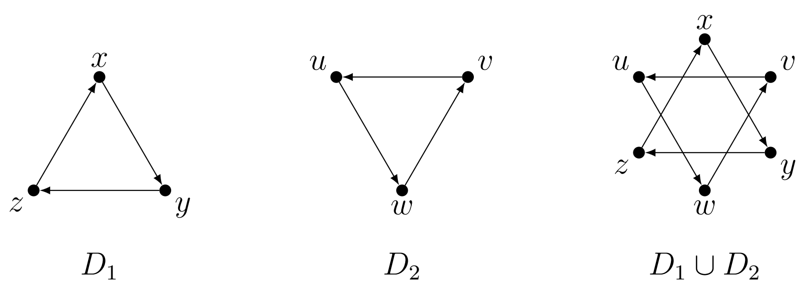

Figura 1.9. Unión de dos digráficas.

1.3. Caminos, trayectorias y ciclos

Sea D una digráfica, un **camino** $W = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ en D es una sucesión de vértices de D tal que para todo i en $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ se tiene que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$. W es **cerrado** si $x_0 = x_k$, y es **abierto** en otro caso. El conjunto de vértices $\{x_i \mid 0 \leq i \leq k\}$ es denotado por $V(W)$, y el conjunto de flechas $\{(x_i, x_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq k-1\}$ es denotado por $F(W)$. Decimos que W es un camino **de $\boldsymbol{x_0}$ a $\boldsymbol{x_k}$** o un **$(\boldsymbol{x_0, x_k})$-camino**. Si W es abierto, entonces decimos que el vértice x_0 es el vértice **inicial** de W, el vértice x_k es el vértice **final** de W, y x_0, x_k son los **vértices extremos** de W. La **longitud** de un camino $W = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ se define como k y es denotado por $\ell(W)$. Una **trayectoria** es un camino en el cual todos sus vértices son distintos. Sea $W = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ un camino, si los vértices $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ son distintos, con $k \geq 2$ y $x_0 = x_k$, entonces W es un **ciclo**. Una **$(\boldsymbol{x, y})$-trayectoria** es una trayectoria que va de x hacia y. Un **$\boldsymbol{k}$-ciclo** es un ciclo de longitud k.

Sea D una digráfica, si existe una (u, v)-trayectoria W, con $\ell(W) = k$ en D, decimos que **$\boldsymbol{u}$ alcanza a $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{k}$ pasos**. La **distancia de $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$** en D es $d_D(u, v) = \text{mín}\{\ell(W) \mid W \text{ es una } (u, v)\text{-trayectoria}\}$ en caso de que exista una (u, v)-trayectoria en D, en otro caso decimos que la distancia de u a v es infinita.

Lema 1.3.1. *Sean D una digráfica, u y v dos vértices de D. Para cualquier (u, v)-camino W, existe una (u, v)-trayectoria P, con $F(P) \subseteq F(W)$ y con $\ell(P) \leq \ell(W)$.*

Demostración. Tomemos W un (u, v)-camino y sean

$$E = \{C \mid C \text{ es un } (u, v)\text{-camino con } F(C) \subseteq F(W)\} \text{ y}$$
$$S = \{\ell(C) \mid C \in E\}.$$

Observemos que E es un conjunto distinto del vacío porque $W \in E$, lo que implica que $S \neq \varnothing$.

Luego, por el principio del buen oren, S tiene mínimo. Sea $\ell(P)$ el mínimo de S para algún P en E. Esto es, si $Q \in E$ entonces $\ell(P) \leq \ell(Q)$. En particular $\ell(P) \leq \ell(W)$. Supongamos que

$$P = (u = u_0, \ldots, u_k = v).$$

Afirmamos que P es una (u,v)-trayectoria. Para mostrar esta afirmación procedamos por contradicción, es decir, supongamos que P no es una trayectoria, entonces algún vértice de D está repetido en P, digamos $u_i = u_j$ para algún i y j con $0 \leq i < j \leq k$. Si eliminamos los vértices $u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$ de P obtenemos un (u,v)-camino

$$W' = (u = u_0, u_1 \ldots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k = v)$$

de longitud menor que k y con $F(W') \subseteq F(P) \subseteq F(W)$, lo que contradice la elección de P. Por lo tanto P es una (u,v)-trayectoria con $F(P) \subseteq F(W)$ y con $\ell(P) \leq \ell(W)$.

■

Observación 1. Sea D una digráfica y supongamos que W es un (u,v)-camino en D. Por el lema anterior existe una (u,v)-trayectoria P de longitud menor o igual que $\ell(W)$, lo que implica que $d_D(u,v) \leq \ell(P) \leq \ell(W)$. Así, $d_D(u,v) \leq \ell(W)$.

1.4. Clases de digráficas

Para una gráfica G, una digráfica D es llamada una **biorientación** de G si D es obtenida a partir de G reemplazando cada arista xy de G por (x,y) o (y,x) o el par (x,y) y (y,x) (ver figura 1.10). Una **orientación** de una gráfica G es una biorientación de G la cual no tiene 2-ciclos.

Figura 1.10. Una gráfica 3-partita G y una biorentación de G.

Una **digráfica *p*-partita** es una biorientación de una gráfica p-partita. Una **digráfica semicompleta** es una biorientación de una gráfica completa (ver figura 1.11(a)). Una biorientación de una gráfica p-partita (multipartita) completa es una **digráfica *p*-partita (multipartita) semicompleta** (ver figura 1.11(b)).

(a) K_4 y una digráfica semicompleta de orden 4.

(b) $K_{2,1,2}$ y una digráfica 3-partita semicompleta D.

Figura 1.11. Clases de gráficas y digráficas.

Un **torneo** es una orientación de una gráfica completa (ver figura 1.12). Un **torneo multipartito** es una orientación de una gráfica multipartita completa. Una digráfica 2-partita semicompleta es también llamada una **digráfica bipartita semicompleta**. Un **torneo bipartito** es una digráfica bipartita semicompleta sin 2-ciclos. Una digráfica D es ***r*-regular** si $\delta^+_D(v) = \delta^-_D(v) = r$ para cualquier vértice v de D. Observemos que el torneo T_1 de la figura 1.12 es un torneo 1-regular.

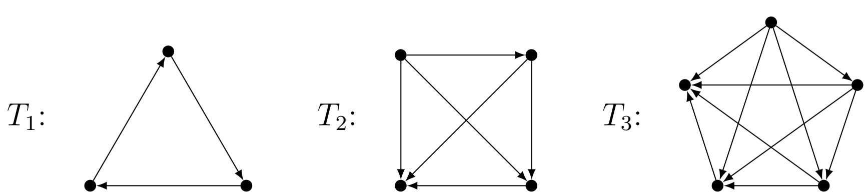

Figura 1.12. Torneos de orden 3, 4 y 5.

Una digráfica $D = (V(D), F(D))$ es **simétrica** si $(x, y) \in F(D)$ implica que $(y, x) \in F(D)$. Una digráfica D es **acíclica** si D no tienes ciclos. Una digráfica D es **transitiva** si para cualquier tripleta x, y, z de distintos vértices de D tales que (x, y) y (y, z) son flechas de D, se tiene que la flecha (x, z) también está en $F(D)$. Resulta que para la clase de torneos, ser transitivo implica ser acíclio, e inversamente, ser acíclico implica ser transitivo (lema 1.4.3). Observemos que los torneos T_2 y T_3 de la figura 1.12 son ambos transitivos y acíclicos. Una digráfica D es **cuasitransitiva** si para cualquier tripleta x, y, z de distintos vértices de D tales que (x, y) y (y, z) son flechas de D, hay al menos una flecha entre x y z.

Una digráfica D semicompleta es una biorientación de un gráfica completa, por lo cual, siempre existe al menos una flecha entre cada par de vértices distintos de D, en consecuencia, si u, v y w son vértices distintos de D tal que (u, v) y (v, w) son flechas de D, $(u, w) \in F(D)$ o $(w, u) \in F(D)$. Por lo tanto toda digráfica D semicompleta es cuasitransitiva.

Los torneos comprenden una amplia e importante clase de digráficas y serán nuestro objeto de estudio durante el resto del trabajo. Algunas de las áreas de aplicación en las cuales los torneos surgen como modelos incluyen dominación en algunas sociedades de animales, round robin, teoría de votaciones, teoría de la selección social y redes de comunicación [10]. Por ejemplo, imaginemos la siguiente situación: hay una elección en la cual los candidatos son clasificados por cada votante, es decir, cada votante ordena a los candidatos según su preferencia, y el candidato A supera al candidato B precisamente cuando el candidato A está clasificado por encima del candidato B en la mayoría de las clasificaciones de los votantes. Si suponemos que en tal elección no hay empates, entonces la situación anterior puede ser modelada por un torneo T, donde los vértices del torneo representan a los candidatos, y una flecha (A, B) está en el torneo si y sólo si el candidato A supera al candidato B. Notemos que si T tiene un vértice A de ingrado igual a cero, entonces es razonable elegir al candidato A como el ganador de la elección. Sin embargo, cuando T no tiene vértices de ingrado igual a cero, ¿cómo podemos decidir quién es el ganador? Esta es una pregunta que resulta de especial interés en la teoría de votaciones.

Muchos de los primeros resultados sobre torneos fueron motivados por las aplicaciones, recientemente éstos se han centrado más en la estructura combinatoria de los torneos. Por ejemplo, el número de torneos diferentes con el mismo conjunto de n vértices enumerados $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es $2^{n(n-1)/2}$, porque precisamente en una gráfica completa de n vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, su número total de aristas es $n(n-1)/2$, y para cada i en $\{1, 2, \ldots, n\}$ y j en $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$ la arista v_iv_j la podemos reemplazar por la flecha (v_i, v_j) o la flecha (v_j, v_i), es decir, podemos reemplazar cada arista de dos maneras diferentes y tenemos un total de $n(n-1)/2$ aristas.

Sea T un torneo, consideremos un vértice u de T fijo pero arbitrario, y tomemos v otro vértice de T no necesariamente distinto de u, debido a que cualesquiera dos vértices distintos de T son adyacentes obtenemos que $v = u$ o $v \in N_T^-(u)$ o $v \in N_T^+(u)$, lo cual implica que $\{u\} \cup N_T^-(u) \cup N_T^+(u) = V(T)$. Observemos también que $\{u\} \cap N_T^-(u) = \varnothing$ y $\{u\} \cap N_T^+(u) = \varnothing$, además como entre cualesquiera dos vértices distintos sólo existe un flecha resulta que $N_T^-(u) \cap N_T^+(u) = \varnothing$, por lo cual podemos concluir que los conjuntos $\{u\}$, $N_T^-(u)$ y $N_T^+(u)$ son disjuntos.

A continuación presentamos tres resultados más sobre torneos.

Lema 1.4.1. *Sea T un torneo. Si u y v son dos vértices de T, entonces $N_T^-(v) \subset N_T^-(u)$ si y sólo si $N_T^+(u) \subset N_T^+(v)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Consideremos $w \in N_T^+(u)$, afirmamos que $w \in N_T^+(v)$. Para demostrar dicha afirmación procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $w \in N_T^-[v]$. Si $w \in N_T^-(v)$, entonces $w \in N_T^-(u)$, lo cual contradice que $w \in N_T^+(u)$. Si $w = v$, entonces $v \in N_T^+(u)$, en consecuencia $u \in N_T^-(v)$, y como $N_T^-(v) \subset N_T^-(u)$ obtenemos que $u \in N_T^-(u)$, lo cual es una contradicción porque $u \notin N_T^-(u)$. En cualquier caso obtenemos una contradicción, en consecuencia $w \in N_T^+(v)$. Por lo tanto $N_T^+(u) \subseteq N_T^+(v)$.

Como $N_T^-(v) \subset N_T^-(u)$ y $u \notin N_T^+(u)$ obtenemos que $u \notin N_T^-(v)$, lo cual implica que $u \in N_T^+(v)$. Por lo tanto $N_T^+(u) \subset N_T^+(v)$.

($\Leftarrow$) La demostración es análoga a la implicación anterior.

■

El gran número de flechas de un torneo a menudo producen caminos y ciclos de longitud variable. Tal vez el resultado más básico de este tipo sea el teorema 1.4.2. Sea D una digráfica, una trayectoria que contiene a todos los vértices de D es una **trayectoria hamiltoniana**.

Teorema 1.4.2. *Cualquier torneo T contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Sean T un torneo de orden n y $P = (v_1, \ldots, v_k)$ una trayectoria de longitud máxima en T. Afirmamos que P es una trayectoria hamiltoniana. Para demostrar esta afirmación procedamos por contradicción. Supongamos que P no es una trayectoria hamiltoniana, entonces $1 \leq k < n$ y existe un vértice v de T que no está en P. Como P es una trayectoria de longitud máxima (v, v_1) y (v_k, v) no son flechas de T, lo cual implica que (v_1, v) y (v, v_k) son flechas de T.

Sea

$$A = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid (v_i, v) \in F(T)\}.$$

Observemos que A es un conjunto distinto del vacío porque $1 \in A$, además $k \notin A$ porque (v_k, v) no es una flecha de T. Sea $j = \max A$, entonces (v_j, v) es un elemento de $F(T)$, y por elección de j obtenemos que $(v, v_{j+1}) \in F(T)$, en consecuencia

$$(v_1, \ldots, v_j, v, v_{j+1}, \ldots, v_j)$$

es una trayectoria de longitud mayor que $\ell(P)$, lo que contradice la elección de P. Por lo tanto P es una trayectoria hamiltoniana.

■

Lema 1.4.3. *Un torneo T es transitivo si y sólo si es acíclico.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea T un torneo transitivo. Procedamos por contradicción, supongamos que T no es acíclico, es decir, que T tiene al menos un ciclo. Consideremos $m = \min\{\ell(C) \mid C \text{ es un ciclo de } T\}$.

Tomemos $\gamma = (x_0, x_1, ..., x_{m-1}, x_0)$ un m-ciclo de T. Observemos que m es mayor que dos, ya que entre cualquier par de vértices distintos de T sólo existe una flecha, esto implica que $m \geq 3$. Como $x_0 \to x_1 \to x_2$, usando la transitividad de T tenemos que $x_0 \to x_2$.

Si $m = 3$, entonces (x_0, x_2) y (x_2, x_0) son ambas flechas de T, y ésto es una contradicción ya que entre cualquier par de vértices distintos de T sólo existe una flecha.

Si $m > 3$, entonces $\gamma' = (x_0, x_2, ..., x_{m-1}, x_0)$ es un ciclo de longitud $m-1$, con $\ell(\gamma') < \ell(\gamma)$, lo cual es una contradicción, ya que γ es un ciclo de longitud mínima.

En cualquier caso llegamos a una contradicción, por lo tanto T es acíclico.

($\Leftarrow$) Sean u, v y w vértices distintos de T tal que $u \to v \to w$, por ser T acíclico $(w, u) \notin F(T)$, sin embargo, por ser T un torneo, existe una flecha entre u y w, por lo cual $(u, w) \in F(T)$, entonces T es transitivo.

■

1.5. Núcleos y cuasinúcleos

Sea D una digráfica, un subconjunto S de $V(D)$ es **independiente** si para cualesquiera dos vértices u y v en S, u y v no son adyacentes en D. Un subconjunto S de $V(D)$ es **absorbente** si para cada vértice v que no pertenece a S, existe un vértice u en S tal que (v, u) es una flecha de D. Un subconjunto S de $V(D)$ es un conjunto **dominante** si para cada vértice v que no pertenece a S, existe un vértice u en S tal que (u, v) es una flecha de D. Un subconjunto K de $V(D)$ es un **núcleo** si es independiente y absorbente. Un subconjunto Q de $V(D)$ es un **cuasinúcleo** si es independiente y para cada $z \in V(D) - Q$, existe $x \in Q$ tal que existe una (z, x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos. Dada la definición de núcleo y cuasinúcleo, observemos que cualquier núcleo es un cuasinúcleo.

Notemos que no todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo en la digráfica H_1 de la figura 1.13, los únicos conjuntos independientes son $\{u_i\}$ con $1 \leq i \leq 3$, ya que cualquier par de vértices distintos son adyacentes. Además $(u_2, u_1) \notin F(H_1)$, $(u_3, u_2) \notin F(H_1)$ y $(u_1, u_3) \notin F(H_1)$ por lo cual para $1 \leq i \leq 3$ el conjunto $\{u_i\}$ no es absorbente, por lo tanto H_1 no tiene núcleo. Mientras que el conjunto $N = \{x, z\}$ resulta ser un núcleo para la digráfica H_2 ya que $\{x, z\}$ es independiente por ser x y z no adyacentes, y también se tiene que $w \to x$ y $y \to z$, es decir, $N = \{x, z\}$ es absorbente. Además como todo núcleo es un cuasinúcleo se tiene también que $N = \{x, z\}$ es un cuasinúcleo de H_2.

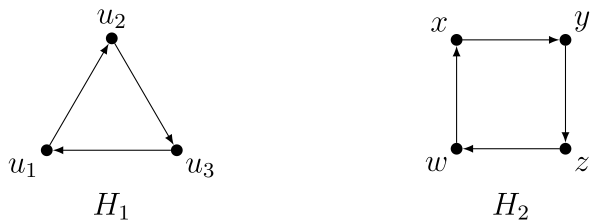

Figura 1.13. Una digráfica H_1 sin núcleo y una digráfica H_2 con núcleo.

A diferencia de los núcleos, en una digráfica siempre existe un cuasinúcleo como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.5.1. *Toda digráfica D tiene un cuasinúcleo.*

Demostración. Por inducción sobre el orden de D.

Base de inducción: cuando el orden de D es 1, se tiene que el conjunto formado por su único vértice es un cuasinúcleo.

Hipótesis de inducción: asumamos que todas las digráficas con menos de n vértices tienen un cuasinúcleo.

Paso inductivo: ahora tomemos una digráfica D de orden n, demostremos que D tiene un cuasinúcleo. Si D tiene un núcleo, entonces D tiene un cuasinúcleo, ya que todo núcleo es un cuasinúcleo. Si D no tiene núcleo, entonces tomemos x un vértice de D, entonces $\{x\}$ no es un núcleo de D, pero $\{x\}$ es un conjunto independiente, por lo tanto $\{x\}$ no es absorbente, es decir, existe un vértice $z \neq x$ tal que $(z, x) \notin F(D)$, entonces $z \notin N_D^-(x)$.

Consideremos $D' = D - N_D^-[x]$, observemos que $z \in V(D')$ ya que z no es un elemento de $N_D^-[x]$, esto quiere decir que el orden de D' es menor que n, entonces por hipótesis de inducción D' tiene un cuasinúcleo Q'.

Si $Q' \cup \{x\}$ es un conjunto independiente, como $V(D) = V(D') \cup N_D^-[x]$, entonces $Q' \cup \{x\}$ es un conjunto absorbente de $V(D)$ porque Q' es cuasinúcleo de D' y x absorbe a cualquier vértice en $N_D^-(x)$, por lo tanto $Q' \cup \{x\}$ es un cuasinúcleo de D.

Si $Q' \cup \{x\}$ no es un conjunto independiente, entonces existe un vértice $y \in Q'$ el cual es adyacente a x porque Q' y $\{x\}$ son ambos conjuntos independientes. Como $y \in Q'$ y $Q' \subseteq V(D) - N_D^-[x]$ se tiene que $x \to y$, entonces $N_D^-(x) \to x \to y$, por lo tanto Q' es un cuasinúcleo de D.

■

Capítulo 2

Reyes en torneos

En este capítulo presentaremos una clase especial de vértices en un torneo, los cuales son llamados reyes, hablaremos de algunos datos históricos que motivaron su definición, y daremos algunos resultados que nos servirán en el próximo capítulo, relacionados especialmente con la existencia de torneos con un número específico de reyes.

2.1. Introducción

Es un hecho que en muchas sociedades de animales existen individuos que tienen un dominio sobre otros integrantes de su sociedad. En algunas de estas sociedades existe un elemento al que se conoce como alfa, un individuo en la comunidad con mayor rango, a quien los otros siguen. Ejemplos de estos individuos se encuentran en sociedades de lobos, abejas y chimpancés, entre otros [17]. En 1922 T. Schjelderup-Ebbe [24] observó que entre cualquier par de gallinas en un gallinero existe una relación bien definida de dominación, es decir, una domina a la otra pero rara vez existe una gallina que domina a todas las demás. Dicho dominio es reafirmado por un picotazo de la gallina dominante en la cabeza de la gallina dominada. Estas relaciones fueron estudiadas intensamente desde el punto de vista de la biología, por W.C. Alle [2, 1] y sus estudiantes Collians [6] en 1943, Guhl [11] en 1944 (conjuntamente con Alle) y Potter [23] en 1949, usando principalmente gallinas domésticas. En este tipo de comunidades de animales en las que para cada par de individuos se tiene que uno domina al otro, pero no necesariamente hay uno que domine a todos los demás, es natural preguntarse si aún en tales circunstancias existe un individuo con mayor dominio. El sociólogo matemático H. G. Landau se hizo esta misma pregunta en 1953 y en [18] estudió, desde el punto de vista de las matemáticas, la estructura de las relaciones de dominación de estas sociedades e intento describir jerárquicamente dichas estructuras. Si bien no siempre es posible encontrar a un individuo que domine a todos los demás ¿existirá alguno que domine a todos los demás ya se directa o indirectamente?, es decir, ¿existe un individuo i tal que si i no domina a un individuo j, entonces existe un individuo k tal que i domina a k y k domina a j?. La respuesta a esta pregunta es sí y en [18] Landau proporcionó una demostración a este resultado, y dió un sencillo criterio para localizarlo.

En 1980 Stephen B. Maurer publicó un artículo bajo el título *The king chicken theorems* [19], en el cual estableció un modelo matemático para el estudio de las relaciones de dominación entre pollos y con base a ello presenta resultados nuevos sobre dicho tema. Maurer propuso una digráfica D como modelo para el estudio de las relaciones de dominación en un averío de pollos, donde $V(D)$ es el conjunto de pollos, el cual tiene la propiedad de que cualquier par de pollos en $V(D)$, exactamente uno domina al otro y (u, v) es una flecha en $F(D)$ si y sólo si el pollo u domina al pollo v. Ya que Landau tenía como finalidad encontrar el individuo con mayor dominio, a Maurer le pareció adecuado nombrarlo rey.

Definición 2.1.1. Sea T un torneo, un vértice x es un **rey** de T, si para cualquier y en $V(T)$ existe una (x, y)-trayectoria de longitud menor o igual a dos.

Sean T un torneo, u y v dos vértices de T, observemos que existe una (u, v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos si y sólo si $u = v$ o $u \to v$ o existe $w \in V(T)$ tal que $u \to w \to v$. Por lo tanto, otra definición equivalente de rey es la siguiente: Sea T un torneo, un vértice u es un rey de T, si para cualquier otro vértice v distinto de u se tiene que $u \to v$ o existe $w \in V(T)$ tal que $u \to w \to v$.

Por ejemplo, en el torneo T de la figura 2.1 el vértice x es un rey de T, ya que $x \to \{u, v, w\}$ y $x \to u \to y$, es decir, x alcanza a cualquier vértice del torneo en dos o menos pasos.

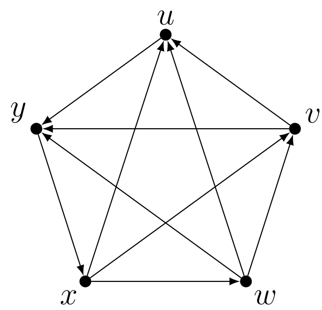

Figura 2.1. Un torneo T.

El siguiente lema nos asegura siempre la existencia de al menos un rey en un torneo.

Lema 2.1.2. *(Landau [18]). Sea T un torneo, si u es un vértice de T con exgrado máximo, entonces u es un rey de T.*

Demostración. Sea u un vértice en T con exgrado máximo. Si $N_T^+[u])$ es igual a $V(T$ el resultado es inmediato, así que podemos suponer $N_T^+[u]$ es distinto de $V(T)$. Consideremos $w \in V(T) - N_T^+[u]$, entonces como T es un torneo $w \to u$. Además, existe $v \in N_T^+(u)$ tal que $v \to w$, ya que de lo contrario $w \to N_T^+(u)$, y como $w \to u$, entonces el exgrado de w sería mayor al de u, lo cual sería una contradicción ya que u es de exgrado máximo. Por lo tanto, para algún $v \in V(T)$ se tiene que $u \to v \to w$ y entonces u es un rey de T.

■

El resultado anterior es generalmente atribuido a Landau y sin embargo él mismo menciona en [18] que en un artículo no publicado, F. E. Hohn declaró un teorema que afirma que en un torneo existe un rey. Landau también menciona que la existencia de un rey en los torneos es corolario de un teorema de H. E. Vaughan que aparece en [25]. El lema 2.1.2 es justamente atribuido a Landau pues no se limita a indicar la existencia de un rey, sino que es capaz de dar un sencillo criterio para localizar uno, además de proporcionar una demostración corta.

En el torneo T de la figura 2.1 observemos que $\Delta^+(T) = 3$ y como $\delta_T^+(x) = \delta_T^+(w) = 3$, entonces podemos concluir que x y w son reyes de T.

Notemos que como consecuencia del lema 2.1.2, si T es un torneo donde cualquier vértice tiene el mismo exgrado, entonces cada vértice de T es un rey. Además, si un torneo T tiene un vértice u de ingrado cero, significa $u \to V(T) - \{u\}$, por lo cual u es un rey de T, y u es el el único rey de T porque para cualquier $v \in V(T) - \{u\}$ no existe una (v, u)-trayectoria de longitud menor o igual a dos, debido a que el ingrado de u es cero. J.W. Moon [21] demostró lo siguiente:

Teorema 2.1.3. *Si T es un torneo sin vértices de ingrado cero entonces T tiene al menos tres reyes distintos.*

Demostración. Consideremos u_1 un rey de T, el cual sabemos que existe por el lema 2.1.2. Por ser el ingrado de u_1 mayor que cero se tiene que $N_T^-(u_1) \neq \varnothing$, y entonces nuevamente $T[N_T^-(u_1)]$ es un torneo, por lo cual tiene un rey u_2.

Afirmación: u_2 es un rey de T distinto de u_1.

Demostración de la afirmación. Como $u_2 \in N_T^-(u_1)$ entonces $u_2 \neq u_1$. Ahora consideremos $v \in V(T) - \{u_2\}$, por ser T un torneo sucede uno de los siguientes casos, $v = u_1$ o $v \to u_1$ o $u_1 \to v$. Si $v = u_1$, entonces $u_2 \to v$ ya que $u_2 \in N_T^-(u_1)$. Si $v \to u_1$, entonces $v \in N_T^-(u_1)$, por ser u_2 un rey de $T[N_T^-(u_1)]$ y dado que $T[N_T^-(u_1)]$ es una subdigráfica de T, se tiene que u_2 alcanza a v en a lo más dos pasos en T y por último si $u_1 \to v$, entonces $u_2 \to u_1 \to v$. Por lo tanto u_2 es un rey de T distinto de u_1.

Usando el mismo razonamiento anterior, obtenemos que $T[N_T^-(u_2)]$ tiene un rey u_3 tal que u_3 es rey de T con $u_3 \neq u_2$, aún más $u_3 \neq u_1$ ya que $u_1 \in N_T^+(u_2)$ y $u_3 \in N_T^-(u_2)$. En consecuencia u_1, u_2 y u_3 son tres reyes distintos de T.

■

Los siguientes dos lemas dan más información de cómo los reyes de un torneo interactúan con los otros vértices del torneo.

Lema 2.1.4. *(Maurer [19]). Sean T un torneo y u en $V(T)$. Si $N_T^-(u) \neq \varnothing$, entonces existe un rey v tal que $v \to u$.*

Demostración. Como $T[N_T^-(u)]$ es un torneo, existe v en $N_T^-(u)$ tal que v es un rey de $T[N_T^-(u)]$. Además $v \to u \to N_T^+(u)$, por lo tanto v es un rey de T tal que $v \to u$.

■

Corolario 2.1.5. *Si un torneo T contiene exactamente tres reyes, entonces estos reyes forman un 3-ciclo.*

Demostración. Sea u un rey de T, como T tiene tres reyes obtenemos que $N_T^-(u)$ es un conjunto distinto del vacío. Por el lema 2.1.4 existe un rey v tal que $v \to u$, análogamente existe un rey w distinto de u tal que $w \to v$. Por último dado que existe un rey que domina a w y sólo hay tres reyes en T, tenemos que $u \to w$. Por lo tanto $W = (w, v, u, w)$ es un 3-ciclo de T.

■

Observemos cómo el conjunto de vecinos interiores y exteriores de un vértice u, ayudan a determinar cuales vértices son o no son reyes.

Lema 2.1.6. *(Factor, Langley [7]). Sean T un torneo y u en $V(T)$. u es un rey si y sólo si para todo v en $V(T) - \{u\}$, $N_T^-(v) \nsubseteq N_T^-(u)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean u un rey de T y v en $V(T) - \{u\}$. Si $u \to v$, entonces $u \in N_T^-(v)$ y como $u \notin N_T^-(u)$, se tiene que $N_T^-(v) \nsubseteq N_T^-(u)$. Si existe un vértice w tal que $u \to w \to v$, entonces $w \in N_T^-(v)$ y $w \notin N_T^-(u)$, es decir, $N_T^-(v) \nsubseteq N_T^-(u)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $N_T^-(v) \nsubseteq N_T^-(u)$, para cualquier vértice v distinto de u. Entonces existe w en $N_T^-(v) - N_T^-(u)$, lo que implica que $w \notin N_T^-(u)$, así se tiene que $w \in N_T^+(u)$, entonces $u \to w \to v$. Por lo tanto u es un rey de T.

■

Corolario 2.1.7. *Sean T un torneo y u en $V(T)$. Existe un vértice v en $V(T) - \{u\}$ tal que $N_T^-(v) \subseteq N_T^-(u)$ si y sólo si u no es un rey de T.*

Demostración. Es la contrapostiva del lema 2.1.6.

■

Reescribamos el corolario 2.1.7 usando la definición de un rey.

Corolario 2.1.8. *Sean T un torneo, u y v vértices de T, son equivalentes:*

(*a*) *El vértice u no puede alcanzar al vértice v en dos o menos pasos.*

(*b*) $N_T^-(v) \subset N_T^-(u)$.

(*c*) $N_T^+(u) \subset N_T^+(v)$.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b). Se sigue del corolario 2.1.7 y del hecho de que ningún vértice es elemento del conjunto de sus vecinos interiores.

(b) $\Leftrightarrow$ (c). Este resultado es el lema 1.4.1.

■

2.2. (n, k)-torneos

El lema 2.1.2 nos asegura siempre la existencia de al menos un rey en un torneo, sin embargo ¿existirá un torneo de orden n que tenga exactamente k reyes?, para responder esta pregunta consideremos primero la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Sean T un torneo, n y k enteros, con $n \geq k \geq 1$. Decimos que T es un (n, k)-torneo si T tiene n vértices y exactamente k de éstos son reyes.

Ahora la cuestión hecha anteriormente puede ser replanteada de la siguiente manera: ¿para qué enteros positivos n y k, con $n \geq k \geq 1$, existe un (n, k)-torneo?. Empecemos dando algunos resultados sobre la existencia y la no existencia de (n, n)-torneos para números n específicos.

Teorema 2.2.2. *Para cualquier entero positivo $n \geq 2$, no existe un $(n, 2)$-torneo.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe un torneo T con exactamente dos reyes distintos u y v. Como existe una (u, v)-trayectoria y una (v, u)-trayectoria se tiene que $N_T^-(u) \neq \varnothing$ y $N_T^-(v) \neq \varnothing$. Por el lema 2.1.4 tenemos que $u \to v$ y $v \to u$, lo cual no puede pasar porque T es un torneo. Por lo tanto no existe un torneo con exactamente dos reyes.

■

Notemos que el teorema 2.2.2 implica la no existencia de un $(2, 2)$-torneo. Cabe mencionar que otra posible demostración de este teorema que no hace uso del lema 2.1.4, es basándose en la observación ya realizada anteriormente respecto a que si un torneo tiene un vértice de ingrado cero, este vértice es el único rey del torneo y en el hecho de que si un torneo no tiene vértices de ingrado cero, entonces tiene al menos tres reyes (lema 2.1.3), en resumen, un torneo tiene únicamente un rey o al menos tres reyes.

Lema 2.2.3. *Existe un* $(1, 1)$*-torneo.*

Demostración. Un torneo con un sólo vértice es un $(1, 1)$-torneo.

■

Lema 2.2.4. *No existe un* $(4, 4)$*-torneo.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe un $(4, 4)$-torneo T. Supongamos que $V(T) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y consideremos

$$W = \{x \in V(T) \mid d_T(v_1, x) = 2\},$$

así $W \neq \varnothing$, ya que de lo contrario v_2, v_3 y v_4 no serían reyes. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v_4 \in W$ y $v_1 \to v_2 \to v_4$.

Caso 1: $v_3 \in N^+(v_1)$.

Como v_2 es un rey de T, v_2 debe alcanzar a v_3 en a lo más dos pasos, por lo cual $v_2 \to v_3$ o $v_4 \to v_3$.

Para el caso en que $v_2 \to v_3$, como v_3 es un rey de T, entonces v_3 no puede ser un pozo, por lo cual $v_3 \to v_4$, pero entonces v_3 no alcanza a v_2 en menos de tres pasos, lo cual es una contradicción, dado que v_3 es un rey de T.

Si $v_4 \to v_3$, entonces $v_3 \to v_2$ porque v_3 no puede ser un pozo por ser un rey de T, pero entonces v_3 no alcanza a v_1 en dos o menos pasos, lo cual es una contradicción, dado que v_3 es un rey de T.

Caso 2: $v_3 \in N^-(v_1)$.

Dado que $v_4 \in W$ se tiene que $v_4 \in N^-(v_1)$, por lo cual $\{v_3, v_4\} \to v_1$. Por ser T un torneo obtenemos que $v_3 \to v_4$ o $v_4 \to v_3$. Si $v_3 \to v_4$, entonces v_4 no alcanza a v_3 en dos o menos pasos, lo que contradice que v_4 sea un rey. Si $v_4 \to v_3$, entonces v_3 no alcanza a v_4 en dos o menos pasos, lo que contradice que v_3 sea un rey.

En cualquier caso tenemos una contradicción, por lo tanto no existe un $(4,4)$-torneo.

■

Lema 2.2.5. *Existe un* $(6,6)$*-torneo.*

Demostración. Basta con exhibir una digráfica que cumpla con ser un $(6,6)$ torneo. Un ejemplo es el torneo T que se muestra en la figura 2.2 ya que para cada i en $\{1,2,3,4,5,6\}$ se tiene que c_i es un rey de T.

■

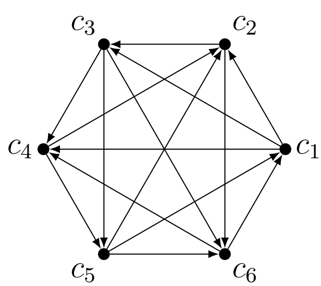

Figura 2.2. Un $(6,6)$-torneo T.

Sea T un torneo, recordemos que para un vértice x de T tenemos que $N_T^-(x)$, $N_T^+(x)$, $\{x\}$ son conjuntos de vértices disjuntos de T, además su unión es $V(T)$. Estos conjuntos se "ilustran" en la figura 2.3. En esta figura y de ahora en adelante, una "bola" representa un conjunto de vértices. Una flecha entre un único vértice y una bola, indica que todas las flechas entre el vértice y el conjunto de vértices que representa la bola se dirigen como la flecha. Análogamente una flecha entre dos bolas B_1 y B_2, indica que todas las flechas entre B_1 y B_2 se dirigen como la flecha.

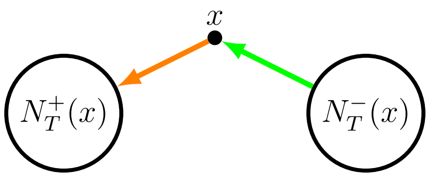

Figura 2.3. Algunas relaciones de dominación en el torneo T.

Lema 2.2.6. *Sea n un entero positivo, si existe un (n,n)-torneo, entonces existe un $(n+2,n+2)$-torneo.*

Demostración. Supongamos que existe un (n,n)-torneo T. Sean u y v dos nuevos vértices, definamos la digráfica $D=(V(D),F(D))$, con

$$V(D) = V(T) \cup \{u,v\} \text{ y}$$
$$F(D) = F(T) \cup \{(x,u) \mid x \in V(T)\} \cup \{(u,v)\} \cup \{(v,y) \mid y \in V(T)\}.$$

Notemos que D es un torneo con $n+2$ vértices, veamos que cualquier vértice de D es un rey. Sea $x \in V(T)$, dado que T es un (n,n)-torneo, para todo vértice z de $T-\{x\}$ sucede que existe una (x,z)-trayectoria de longitud a lo más dos en T y como $T \subseteq D$, entonces existe una (x,z)-trayectoria de longitud a lo más dos en D. Además, por definición de D, $\gamma=(x,u,v,x)$ es un 3-ciclo, entonces cualquier vértice de D es un rey de D. Por lo tanto D es un $(n+2,n+2)$ torneo (ver figura 2.4).

■

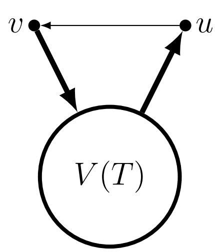

Figura 2.4. Algunas relaciones de dominación en el torneo D.

Teorema 2.2.7. *Para todo entero positivo n, excepto para 2 y 4, existe un (n,n)-torneo.*

Demostración. Por el teorema 2.2.2 y el lema 2.2.4 no existe un $(2,2)$-torneo ni un $(4,4)$-torneo. Veamos que para todo entero $k \geq 1$ existe un $(2k-1, 2k-1)$-torneo. Por inducción sobre k.

Base de inducción: Cuando $k = 1$, por el lema 2.2.3 sabemos que existe un $(1,1)$ torneo.

Hipótesis de inducción: supongamos que la afirmación es cierta para un cierto valor k_0, es decir, que existe un $(2k_0-1, 2k_0-1)$ torneo.

Paso inductivo: demostremos que la afirmación es cierta para k_0+1. Por hipótesis de inducción existe un $(2k_0-1, 2k_0-1)$-torneo, usando el lema 2.2.6 que se refiere a la existencia de un $(n+2, n+2)$-torneo en caso de que exista un (n,n)-torneo, tenemos que existe un $(2k_0+1, 2k_0+1)$-torneo, que es lo que queríamos demostrar.

Análogamente usando el lema 2.2.5 que asegura la existencia de un $(6,6)$-torneo y el lema 2.2.6 demostramos que para todo entero $k \geq 3$ existe un $(2k, 2k)$-torneo.

■

Usando los resultados anteriores sobre la existencia y la no existencia de (n,n)-torneos, la pregunta: ¿para qué números n y k existe un (n,k)-torneo? queda contestada con el siguiente teorema.

Teorema 2.2.8. *(Maurer [19]). Para cualesquiera enteros positivos n y k con $n \geq k \geq 1$, excepto para $k = 2$ y $k = n = 4$, existe un (n,k)-torneo.*

Demostración. Sabemos por el lema 2.2.4 y el teorema 2.2.2 que no existe un $(4,4)$-torneo ni tampoco un $(n,2)$-torneo para n arbitrario. Sea k un entero positivo con $k \neq 2$ y $k \neq 4$, consideremos un (k,k)-torneo T, la existencia del torneo T es asegurada por el teorema 2.2.7, observemos que si $n = k$ entonces T es un (n,k)-torneo. Si $n > k$ entonces consideramos un torneo W de orden $n-k$ de tal manera que $V(T) \cap V(W) = \varnothing$. Definamos la digráfica $D = (V(D), F(D))$ de la siguiente manera:

$$V(D) = V(T) \cup V(W) \text{ y}$$
$$F(D) = F(T) \cup \{(u,v) \mid u \in V(T),\ v \in V(W)\} \cup F(W).$$

En la figura 2.5 se muestra como se relacionan los vértices de T con los vértices de W.

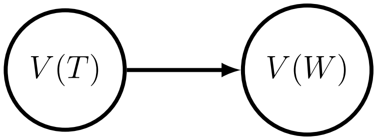

Figura 2.5. Relaciones de dominación entre los vértices de T y W.

Por ser T un (k, k)-torneo, cualquier vértice de T es un rey de T, y como $T \subseteq D$ y $V(T) \to V(W)$, se tiene que cualquier vértice de T es un rey de D. Además cualquier vértice de W no es un rey de T, ya que $V(T) \to V(W)$, por lo cual D es un (n, k)-torneo.

Para $k = 4$, notemos que existe un $(5, 4)$-torneo T', como lo muestra la figura 2.6, donde los vértices a, b, c y d son los cuatro reyes de T'.

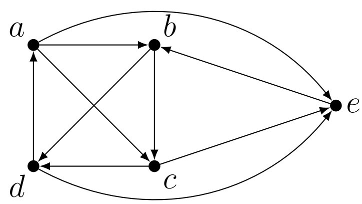

Figura 2.6. Un $(5, 4)$-torneo.

Para obtener un $(n, 4)$ torneo para $n > 5$ consideramos W' un torneo de orden $n - 5$ con $V(T') \cap V(W') = \varnothing$ y $D' = (V(D'), F(D'))$ con

$$V(D') = V(T') \cup V(W') \text{ y}$$
$$F(D') = F(T') \cup \{(u, v) \mid u \in V(T'),\ v \in V(W')\} \cup F(W').$$

Observemos que cualquier vértice v de T' es un rey de D', ya que $T' \subseteq D'$ y v alcanza a cualquier vértice de W' en un paso por definición de D'. Además e no es un rey de D', ya que e no es un rey de T' y $V(T') \to V(W')$. Y por último, dado que $V(T') \to V(W')$, cualquier vértice de W' no es un rey de

D', en consecuencia D' tiene exactamente cuatro reyes, por lo tanto es un $(n, 4)$-torneo.

■

Los lemas presentes en este capítulo serán fundamentales en el desarrollo del capítulo 3, especialmente el teorema 2.2.8 (teorema de Maurer), el cual nos permitirá crear vértices que tengan la propiedad de no ser reyes de un torneo T pero sí ser reyes del torneo $T - \{x\}$, donde x es algún rey de T.

Capítulo 3

Gráfica $(2, 2)$-dominante de torneos

El tema de dominación, tanto en gráficas como en digráficas ha sido el centro de investigación dentro de varias áreas en matemáticas, sus repercusiones teóricas y prácticas han intrigado a investigadores durante años.

En la teoría de gráficas una técnica que se usa para demostrar o generalizar diversos resultados es construir una gráfica a partir de otra, así es como Kim A.S. Factor y Larry J. Langley toman el concepto de conjuntos (i, j)-dominantes definido por J.T. Hedetniemi, K.D. Hedetniemi, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, D.F. Rall y J. Knisely en sus trabajos originales [14, 15, 16] y construyen la gráfica (i, j)-dominante [8, 7]. Posteriormente en su artículo *Kings and Heirs: A characterization of the* $(2, 2)$*-domination graphs of tournaments* [9] logran dar una caracterización de la gráfica (2,2)-dominante de un torneo.

Este capítulo está dedicado a presentar detalladamente los resultados expuestos en el artículo *Kings and Heirs: A characterization of the* $(2, 2)$*-domination graphs of tournaments*, el cual está orientado a dar una caracterización estructural de la gráfica $(2, 2)$-dominante de un torneo.

Sea T un torneo, la gráfica $(2, 2)$-dominante de T se denota por $dom_{2,2}(T)$, donde $V(dom_{2,2}(T)) = V(T)$ y $uv \in A(dom_{2,2}(T))$ si para cualquier w en $V(T) - \{u, v\}$ existe una (u, w)-trayectoria y una (v, w)-trayectoria, ambas de longitud menor o igual a dos en T. Llamamos a u y a v un par $(2, 2)$-dominante. Observamos que cada par de reyes de T crea alguna arista en

$dom_{2,2}(T)$, sin embargo, las parejas de reyes no son los únicos vértices que crean aristas en $dom_{2,2}(T)$, veremos qué otras parejas de vértices u y v forman un par $(2,2)$-dominante donde no necesariamente u y v son reyes de T.

En un torneo T, un heredero es un vértice v que no es un rey de T, pero sí es un rey de $T-\{w\}$, donde w es algún rey de T. Demostraremos que uv es una arista de $dom_{2,2}(T)$ si y sólo si u y v son reyes distintos de T, o u es un rey de T y v es un heredero de u. Como consecuencia del resultado anterior, obtendremos que $dom_{2,2}(T)$ es un tipo especial de gráfica, a la cual denominaremos como gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados. Sin embargo, el recíproco no siempre es cierto, es decir, siempre existe una gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados G' tal que para cualquier torneo T, se tiene que G' no es la gráfica $(2,2)$-dominante de T.

En un torneo T, con n vértices y con reyes etiquetados $x_1, x_2, ..., x_k$, la secuencia real de T es $[k; h_1, h_2, ..., h_k; r]$, donde $r = n-k-\sum_{i=1}^{k} h_i$, h_i representa el número de herederos del rey x_i, y r representa el número de vértices de T que no son reyes ni herederos. En las secciones 3.1 y 3.3, mediante el uso de resultados constructivos lograremos determinar exactamente cuáles secuencias son secuencias reales de torneos y cuáles no. Tras determinar todas las secuencias reales de torneos, identificaremos exactamente cuáles gráficas completas con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados son las gráficas $(2,2)$-dominantes de torneos, finalmente daremos una caracterización de la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo.

3.1. Introducción

Dado un torneo T, definimos $\boldsymbol{dom_{2,2}(T)}$ la gráfica $(2,2)$-dominante de T, donde $V(dom_{2,2}(T)) = V(T)$ y $uv \in A(dom_{2,2}(T))$ si para cualquier w en $V(T)-\{u,v\}$ existe una (u,w)-trayectoria y una (v,w)-trayectoria, ambas de longitud menor o igual a dos en T. A los vértices u y a v se les conoce como un par $(2,2)$-dominante. Notemos que cualquier pareja de reyes es un par $(2,2)$-dominante, sin embargo las parejas de reyes no son los únicos vértices que crean aristas en $dom_{2,2}(T)$, veremos a continuación qué otros vértices crean aristas en G.

Sea T un torneo, consideremos u y v un par $(2,2)$-dominante. Por definición de $dom_{2,2}(T)$ se tiene que u alcanza a todos los vértices de T en dos o menos pasos, excepto posiblemente a v. Por ser T un torneo $u \to v$ o $v \to u$, supongamos que $u \to v$, entonces u es un rey de T. Si v también es un rey de T, ambos vértices son reyes de T, esto implica que cualquier par de reyes crea una arista en $dom_{2,2}(T)$. Si v no es un rey de T, significa que v no puede alcanzar a u en dos o menos pasos, sin embargo sabemos que v puede alcanzar a cualquier vértice de $T - \{u\}$ en dos o menos pasos, en consecuencia v es un rey de $T - \{u\}$. Como v no puede alcanzar a u en dos o menos pasos, se tiene que si $x \in V(T)$ y $x \neq u$ entonces v y x no son una par $(2,2)$-dominante. La propiedad del vértice v de no ser un rey de T, pero si ser un rey de $T - \{u\}$ donde u es un rey de T, es lo que motiva la siguiente definición.

Sea T un torneo, un **heredero** es un vértice v que no es un rey de T, pero sí es un rey de $T - \{w\}$, donde W es algún rey w de T, llamamos a v un heredero del rey w. Por el análisis realizado anteriormente sobre qué vértices crean aristas en $dom_{2,2}(T)$, tenemos que si v es un heredero del rey w, la arista vw está en $dom_{2,2}(T)$.

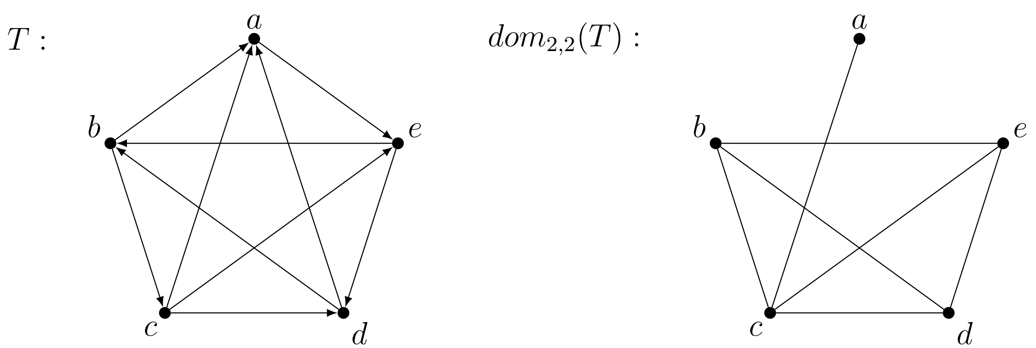

Figura 3.1. Un torneo T y su respectiva gráfica $(2,2)$-dominante.

En la figura 3.1 se presenta un torneo T y su respectiva gráfica $(2,2)$-dominante. En este torneo T, por ser el exgrado máximo de T igual a tres y $\delta_T^+(c) = 3$, se tiene que c es un rey de T, además b, d y e son también reyes de T, por lo cual, cualquier par de vértices distintos en el conjunto de vértices $\{b, c, d, e\}$ forma una arista en $dom_{2,2}(T)$, de esta manera, tenemos que $dom_{2,2}(T)[\{b, c, d, e\}]$ es una gráfica completa de cuatro vértices. Por otro lado, a no es un rey de T, ya que a no puede alcanzar al vértice c en dos o menos pasos, sin embargo, $a \to e \to d$ y $a \to e \to b$, en consecuencia, a es un rey de $T - \{c\}$, es decir, a es un heredero del rey c, entonces ac es también una arista de $dom_{2,2}(T)$.

Lema 3.1.1. *Sea T un torneo, si h es un heredero del rey k, entonces h no es heredero de cualquier otro rey.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que h es un heredero de los reyes k_i y k_j, con $k_i \neq k_j$. Como h es un rey en $T - \{k_i\}$ se tiene que existe una (h, k_j)-trayectoria de longitud menor o igual a dos. Además, h es un heredero de k_j, por lo cual h es un rey de $T - \{k_j\}$, en consecuencia h es un rey de T, y ésto último es una contradicción porque h es un heredero. Por lo tanto h es heredero de un único rey.

■

En un torneo T, con n vértices y con reyes etiquetados $x_1, x_2, ..., x_k$ definimos la **secuencia real** de T como sigue $[k; h_1, h_2, ..., h_k; r]$, donde r es igual a $n - k - \sum_{i=1}^{k} h_i$, es decir, r representa el número de vértices de T que no son reyes ni herederos, y para cada i en $\{1, \ldots, k\}$ h_i representa el número de herederos del rey x_i.

Notemos que podemos etiquetar a los reyes arbitrariamente así que podemos permutar la secuencia h_i libremente. Por ejemplo, en el torneo T de la figura 3.1 ya habíamos visto que $x_1 = b$, $x_2 = c$, $x_3 = d$ y $x_4 = e$ son reyes de T y que a es un heredero de c. Además, para cada i en $\{1, 3, 4\}$ se tiene que x_i no tiene herederos, por lo cual la secuencia real de T es $[4; 0, 1, 0, 0; 0]$.

Sea T un torneo, en la gráfica $(2,2)$-dominante de T, las aristas son formadas por cualesquiera dos vértices distintos u y v, si cumplen que u y v alcanzan a todos los vértices de $T - \{u, v\}$ en dos o menos pasos.

Con la finalidad de dar una caracterización de la estructura de la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo, primero listamos las únicas parejas de vértices que pueden formar una arista en $dom_{2,2}(T)$.

Lema 3.1.2. *Sea T un torneo, uv es una arista de $dom_{2,2}(T)$ si y sólo si*

(a) u y v son reyes distintos de T, o

(b) u es un rey de T y v es un heredero de u.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que uv es un arista en $dom_{2,2}(T)$, por definición de $dom_{2,2}(T)$ se tiene que u alcanza a todos los vértices de T en dos o menos pasos, excepto posiblemente a v. Por ser T un torneo $u \to v$ o $v \to u$, supongamos sin pérdida de generalidad que $u \to v$, entonces u es un rey de T. Si v también es un rey de T, ambos vértices son reyes de T. Si v no es un rey de T, significa que v no puede alcanzar a u en dos o menos pasos, sin embargo sabemos que v puede alcanzar a cualquier vértice de $T - \{u\}$ en dos o menos pasos, en consecuencia v es un rey de $T - \{u\}$, lo cual implica que v es un heredero de u.

($\Leftarrow$) Si u y v son reyes distintos de T, entonces ambos vértices alcanzan a cualquier vértice de $T - \{u, v\}$ en dos o menos pasos. Lo mismo sucede si u es un rey de T y v es un heredero de u. Por lo tanto uv es una arista $dom_{2,2}(T)$ en cualquier caso.

■

Lema 3.1.3. *Sea T un torneo, la gráfica $(2,2)$-dominante de T está formada como sigue:*

(a) Los reyes de T forman una subgráfica completa de $dom_{2,2}(T)$.

(b) Un heredero es un vértice final adyacente a su rey asociado.

(c) Todos los vértices que no son reyes ni herederos son vértices aislados.

Demostración. (a) Por el lema 3.1.2(a) cualquier par de reyes distintos es adyacente, así, los reyes forman una subgráfica completa de $dom_{2,2}(T)$. (b) Por los lemas 3.1.2(b) y 3.1.1 un heredero y su rey asociado forman una arista en $dom_{2,2}(T)$ y un heredero sólo puede tener asociado un rey, por lo cual un heredero forma un vértice final adyacente a su rey asociado. (c) Si un vértice no es un rey ni un heredero, entonces por el lema 3.1.2 dicho vértice no puede formar un par (2,2)-dominante con cualquier otro vértice, de esta manera, los vértices que no son reyes ni herederos son vértices aislados.

■

A continuación definimos una clase de gráficas las cuales tienen una estructura muy similar a la gráfica (2,2)-dominante de un torneo. Sea G una gráfica, decimos que G es una **gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados**, si existen subconjuntos A_1, A_2, A_3 de $V(G)$ tales que:

(a) $A_1 \neq \varnothing$.

(b) Si $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ e $i \neq j$ entonces $A_j \cap A_i = \varnothing$.

(c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = V(G)$.

(d) $G[A_1]$ es una gráfica completa.

(e) Si $x \in A_2$, entonces $\delta_G(x) = 1$, y existe $y \in A_1$ tal que $xy \in A(G)$.

(f) Si $x \in A_3$, entonces $\delta_G(x) = 0$.

En la figura 3.2 se presentan algunas gráficas completas con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados.

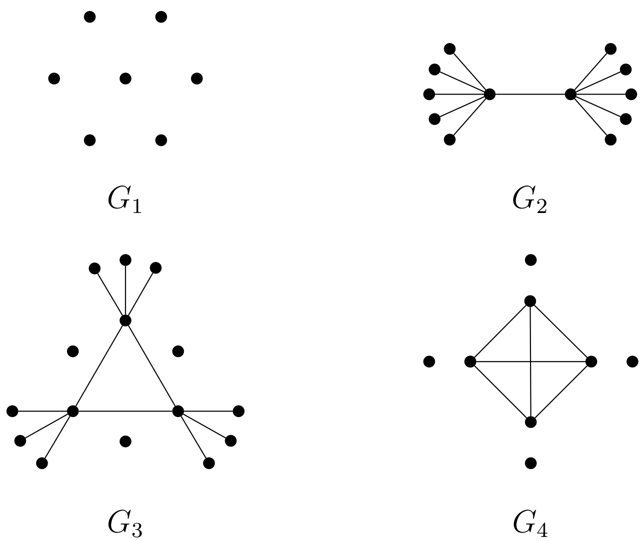

Figura 3.2. Algunas gráficas completas con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados.

G_1 es K_1 con cinco vértices aislados. G_2 es K_2 con cinco vértices finales para cada uno de sus vértices. G_3 es K_3 con tres vértices finales para cada uno de sus vértices y con tres vértices aislados. G_4 es K_4 con cuatro vértices aislados.

En la siguiente observación exhibimos cuál es la relación entre la gráfica $(2, 2)$-dominante de un torneo y una gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados.

Observación 2. Tomemos un torneo T, sean

$K = \{x \in V(T) \mid x \text{ es un rey de } T\}$,
$H = \{h \in V(T) \mid h \text{ es un heredero en } T\}$ y
$R = \{r \in V(T) \mid r \text{ no es rey ni heredero en } T\}$.

Por definición, los conjuntos K, H y R son ajenos dos a dos y su unión es $V(G)$. Además $K \neq \varnothing$ ya que siempre existe al menos un rey en un torneo. Por el lema 3.1.3: $dom_{2,2}(T)[K]$ es una gráfica completa, si $h \in H$ entonces $\delta_{dom_{2,2}(T)}(h) = 1$ y existe $x \in K$ tal que $xh \in A(dom_{2,2}(T))$, y finalmente si $r \in R$, entonces $\delta_{dom_{2,2}(T)}(r) = 0$. Por lo tanto $dom_{2,2}(T)$ es una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados.

Dada una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados G, ¿existirá un torneo T tal que $dom_{2,2}(T)$ sea isomorfa a G? Para responder esta cuestión es necesario conocer la clase que consiste de las gráficas que resultan ser las gráficas $(2, 2)$-dominantes de torneos y dado que $dom_{2,2}(T)$ es una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados, sólo resta conocer cuántos herederos puede tener un rey específico de un torneo, así como el número de vértices que no sean reyes ni herederos que pueda tener dicho torneo, y es justo en este punto donde será fundamental determinar cuáles secuencias existen y cuáles no.

3.2. Secuencias reales y teorema de Maurer

El objetivo principal de esta sección es determinar las secuencias reales de torneos con k reyes, excepto para torneos con $k = 3$ y $k = 4$ reyes, los cuales requieren un enfoque particular y serán reservados para más adelante.

Demostraremos que existe un torneo con secuencia real $[1;h;r]$ excepto para las secuencias $[1;2;r']$ si $r' \geq 0$ y $[1;4;r']$ si $r > 0$ (lema 3.2.3). Como consecuencia inmediata del teorema 2.2.2, respecto a la no existencia de un torneo con exactamente dos reyes, haremos notar que si h_1, h_2 y r son enteros no negativos, entonces no existe un torneo con secuencia real $[2;h_1,h_2;r]$ (corolario 3.2.2).

Debido a que dada una secuencia $[k;h_1,h_2,\ldots,h_k;r]$ fija pero arbitraria, con $k \geq 5$, no resulta sencillo hasta este punto decidir si existe o no existe un torneo con tal secuencia, presentaremos los lemas 3.2.5, 3.2.7, 3.2.8, los cuales siguen de cerca la idea de bajo ciertas condiciones, construir un torneo T' a partir de tener un torneo previo T, de tal forma que la secuencia real de T' sea una "pequeña variación" de la secuencia real de T.

Sea T un torneo, como consecuencia del lema 3.2.5 tendremos que si $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n$ son los reyes de un torneo T, donde x_i tiene h_i herederos en T para i en $\{1,2,\ldots,n\}$ con $h_1 = 0$, y la secuencia real de T es $[n;h_1,h_2,\ldots,h_n;r]$, entonces podemos obtener un torneo con secuencia real $[n;h_x,h_2,\ldots,h_n;r]$ donde h_x puede ser cualquier entero positivo, pero distinto de dos y cuatro.

Sea T un torneo, por el lema 3.2.7 tendremos que si $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n$ son los reyes de un torneo T, donde x_i tiene h_i herederos en T para i en $\{1,2,\ldots,n\}$ con $h_1 > 0$, y la secuencia real de T es $[n;h_1,h_2,\ldots,h_n;r]$, entonces podemos obtener un torneo con secuencia real $[n;h_1+2,h_2,\ldots,h_n;r]$.

Sea T un torneo, como consecuencia del lema 3.2.8 tendremos que si $x_1 = x, x_2 = y, \ldots, x_n$ son los reyes de un torneo T, $x \to y$, x es un rey en $T - \{y\}$, x_i tiene h_i herederos en T para i en $\{1,2,\ldots,n\}$ con $h_1 = 0$, y la secuencia real de T es $[n;h_1,h_2,\ldots,h_n;r]$, entonces podemos obtener un torneo con secuencia real $[n;2,h_2,\ldots,h_n;r]$.

En el corolario 3.2.9 hacemos la observación de que una vez obtenido un torneo con secuencia real $[n;2,h_2,\ldots,h_n;r]$ vía lema 3.2.8, podemos usar el lema 3.2.7 para obtener un torneo con secuencia real $[n;4,h_2,\ldots,h_n;r]$.

Finalmente en el teorema 3.2.12 demostramos que si k es un entero mayor o igual a cinco, y $r, h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}$ son enteros mayores o iguales a cero, entonces existe un torneo con secuencia real $[k;h_0,h_1,\ldots,h_{k-1};r]$.

El teorema de Maurer incluye todos los torneos en donde cualquier vértice es un rey, por lo tanto tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.2.1. *Para cualquier entero positivo k, excepto para 2 y 4, existe un torneo T con secuencia real $[k; 0, 0, \ldots, 0; 0]$.*

Demostración. Por el teorema 2.2.7 existe T un (k, k)-torneo excepto para $k = 2$ o $k = 4$, dicho torneo tiene por secuencia real $[k; 0, 0, \ldots, 0; 0]$.

■

Corolario 3.2.2. *Para cualesquiera enteros h_1, h_2 y r, no existe un torneo T con secuencia real $[2; h_1, h_2; r]$ o $[4; 0, 0, 0, 0; 0]$.*

Demostración. Por el teorema 2.2.2 y el lema 2.2.4 no existe un $(n, 2)$-torneo para n arbitrario ni tampoco un $(4, 4)$-torneo, por lo cual no existe un torneo T con secuencia real $[2; h_1, h_2; r]$ o $[4; 0, 0, 0, 0; 0]$.

■

El efecto del teorema de Maurer sobre la existencia de herederos en la secuencia real es lo que da mayor profundidad e interés a este estudio de la gráfica $(2, 2)$-dominante de un torneo. Como un heredero h de un rey k es un rey en el torneo $T - \{k\}$, el resultado de Maurer debe ser extendido a los herederos para averiguar cuales secuencias reales son posibles.

Primero podemos abordar directamente el caso en donde hay exactamente un rey. Maurer observó que si un torneo tiene exactamente un rey, éste debe ser un transmisor.

Lema 3.2.3. *Si h y r son enteros no negativos, entonces existe un torneo T con secuencia real $[1; h; r]$ si y sólo si $h \neq 2$, si $h = 0$ entonces $r = 0$, y si $h = 4$ entonces $r > 0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si T tiene un único vértice, entonces tenemos la secuencia real $[1; 0; 0]$. En otro caso si el único rey es removido de T entonces el torneo resultante debe tener h reyes. En consecuencia el único caso cuando $h = 0$ es el caso donde T tiene exactamente un vértice, los otros valores de h y r están restringidos por el teorema 2.2.8, por lo tanto $h \neq 2$ y si $h = 4$, $r > 0$.

($\Leftarrow$) Inversamente agregando un transmisor a un torneo T' con h reyes y r vértices que no sean reyes creamos un torneo con secuencia real $[1; h; r]$, el teorema 2.2.8 nos asegura la existencia del torneo T'.

$\blacksquare$

Definición 3.2.4. Sean T_1 y T_2 dos torneos y $x \in V(T_1)$. Definimos el torneo T_x como sigue

$$V(T_x) = V(T_1) \cup V(T_2) \text{ y } F(T_x) = F(T_1) \cup F(T_2) \cup A \cup B$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \{(u, v) \mid u \in N^-_{T_1}[x],\ v \in V(T_2)\} \text{ y} \\ B &= \{(v, u) \mid u \in N^+_{T_1}(x),\ v \in V(T_2)\}. \end{aligned}$$

Con el fin de obtener secuencias reales vamos a añadir constructivamente h_i herederos a un rey específico con $h_i > 0$. Con la excepción de $h_i = 2$ y $h_i = 4$ herederos, podremos usar el teorema de Maurer directamente, primero adjuntando un torneo con h_i reyes, transformando a estos reyes en los herederos deseados.

Lema 3.2.5. *Sean T_1 y T_2 dos torneos, si x es un rey de T_1 donde x no tiene herederos, entonces*

(*a*) *Los reyes de T_x y T_1 son los mismos.*

(*b*) *x es un rey de T_x y los herederos de x en T_x son precisamente los reyes de T_2.*

(*c*) *Si y es un rey de T_1 con $y \neq x$, entonces y tiene la misma cantidad de herederos tanto en T_1 como en T_x.*

Demostración. En la figura 3.3 se muestran las relaciones de dominación entre el vértice x con los demás vértices del torneo T_x.

Las siguientes afirmaciones nos serán de gran utilidad para demostrar el lema.

Afirmación 1. Para cualquier v en $V(T_2)$ se tiene que v no puede alcanzar al vértice x en dos o menos pasos en T_x.

Demostración de la afirmación 1. Notemos que $N^+_{T_x}(v) \subset N^+_{T_x}(x)$, entonces por corolario 2.1.8 el vértice v no puede alcanzar a x en dos o menos pasos en T_x. ▲

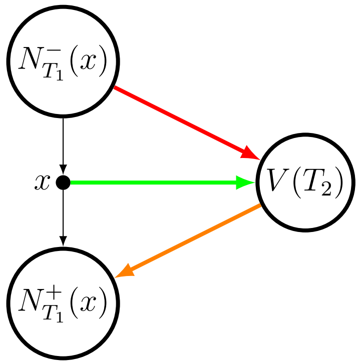

Figura 3.3. Algunas relaciones de dominación en el torneo T_x.

Afirmación 2. Si y es un heredero de x en T_x entonces $y \notin V(T_1)$.

Demostración de la afirmación 2. Por contradicción, supongamos que y es un elemento de $V(T_1)$, entonces $x \to y$ porque y es un heredero de x en T_x. Consideremos $v \in V(T_2)$, dado que $x \to y$ entonces $v \to y$ por definición de T_x, sin embargo, y es un rey de $T_x - \{x\}$, entonces existe un vértice $w \neq x$ tal que $y \to w \to v$. Observemos que $w \notin V(T_2) \cup N^+_{T_1}(x)$ porque $V(T_2) \to N^+_{T_1}(x)$, entonces $w \to x$. Por lo tanto $y \to w \to x$, es decir, y alcanza a x en dos pasos, lo cual es una contradicción ya que y es un heredero de x en T_x, entonces la afirmación es verdadera. ▲

Afirmación 3. Sean v y w vértices de T_1, si existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor que tres en T_x, entonces existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor que tres en T_1.

Demostración de la afirmación 3. Notemos que si $v = x$, el resultado es inmediato ya que x es un rey en T_1 y en T_x. De igual manera, si $v = w$

entonces $W = (v)$ es una (v,w)-trayectoria de longitud cero tanto en T_x como en T_1, supongamos entonces que $v \neq x$ y que $v \neq w$. Como existe una (v,w)-trayectoria de longitud menor que tres en T_x, entonces $v \to w$ o existe un vértice z tal que $v \to z \to w$.

Si $v \to w$, entonces v alcanza a w en un paso en T_1.

Si existe un vértice z tal que $v \to z \to w$, entonces tenemos dos opciones para z, $z \in V(T_1)$ o $z \in V(T_2)$. Para el caso en que $z \in V(T_1)$, v alcanza a w en dos pasos en T_1. Si $z \in V(T_2)$, como $N^-_{T_1}[x] \to V(T_2) \to N^+_{T_1}(x)$, entonces $w \in N^+_{T_1}(x)$ y $v \in N^-_{T_1}(x)$, por lo tanto $v \to x \to w$, así v alcanza a w en dos pasos en T_1.

En cualquier caso existe una (v,w)-trayectoria de longitud a lo más dos en T_1. ▲

(a) Por ser x un rey de T_1 y $x \to V(T_2)$, se tiene que x es un rey de T_x. Consideremos y un rey de T_1 con $y \neq x$ en caso de que exista, entonces $y \to x$ o existe $w \in V(T_1)$ tal que $y \to w \to x$, en consecuencia $y \to V(T_2)$ o $y \to w \to V(T_2)$ por definición de T_x. En cualquier caso y alcanza a cualquier vertice de T_2 en a lo más dos pasos, y por ser y un rey de T_1, se tiene que y es un rey de T_x.

Ahora sea y un rey de T_x con $y \neq x$ en caso de que exista, por la afirmación (1) obtenemos que $y \in V(T_1)$. Sea u un vértice de T_1, como existe una (y,u)-trayectoria de longitud menor que tres en T_x, entonces por la afirmación (3) existe una (y,u)-trayectoria de longitud menor que tres en T_1, en consecuencia y es un rey de T_1, por lo tanto T_1 y T_x tienen los mismos reyes.

(b) Por (a) x es un rey T_x, ahora tomemos y un rey de T_2. Si $V(T_1) = \{x\}$ entonces inmediatamente y es un heredero de x en T_x. Supongamos entonces que $\{x\} \subset V(T_1)$, consideremos $u \in V(T_1) - \{x\}$. Si $u \in N^+_{T_1}(x)$ entonces $y \to u$ por definición de T_x. Si $u \in N^-_{T_1}(x)$ entonces como x es un rey de T_1, existe $w \in N^+_{T_1}(x)$ tal que $x \to w \to u$, de esta manera $y \to w \to u$ y entonces y alcanza a cualquier vértice de $T_1 - \{x\}$ en a lo más dos pasos en $T_1 - \{x\}$. Además y es un rey de T_2 y por la afirmación (1) el vértice y no puede alcanzar al vértice x en dos o menos pasos en T_x, entonces y es un heredero de x en T_x.

Ahora demostremos que los únicos herederos de x en T_x son los reyes de T_2. Por la afirmación (2) tenemos que ningún vértice de T_1 es un heredero de x en T_x. Sea y un vértice de T_2 que no sea un rey de T_2, entonces existe $z \in V(T_2)$ tal que no existe una (y, z)-trayectoria en T_2 de longitud menor que tres.

Afirmamos que no existe una (y, z)-trayectoria en T_x de longitud menor que tres. Supongamos lo contrario, es decir, que existe una (y, z)-trayectoria en T_x de longitud menor que tres.

Si $y \to z$ entonces y alcanza a z en un paso en T_2 lo cual es una contradicción, ya que no existe una (y, z)-trayectoria en T_2 de longitud menor que tres.

Si existe un vértice w tal que $y \to w \to z$ tenemos que $w \in V(T_1)$ o $w \in V(T_2)$. Si $w \in V(T_1)$, entonces por definición de T_x, $w \in N^+_{T_1}(x)$ y como $w \to z$, se contradice que $V(T_2) \to N^+_{T_1}(x)$. Si $w \in V(T_2)$, entonces $\{y, w, z\} \subseteq V(T_2)$, por lo cual existe una (y, z)-trayectoria en T_2 de longitud menor que tres, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existe una (y, z)-trayectoria en T_x de longitud menor que tres, entonces y no es un heredero de x en T_x.

Por lo tanto los únicos herederos de x en T_x son los reyes de T_2.

(c) Demostremos primero que si h es un heredero de y en T_x con $y \neq x$, entonces h es un heredero de y en T_1. Sean y un rey de T_x con $y \neq x$ y h un heredero de y en T_x, por (a) y es un rey de T_1. Como h alcanza a x en a lo más dos pasos en T_x entonces por la afirmación (1) h es un vértice de T_1. Consideremos $v \in V(T_1) - \{y, h\}$. Como h es un rey de $T_x - \{y\}$ se tiene que existe una (h, v)-trayectoria en $T_x - \{y\}$ de longitud menor que tres, entonces $h \to v$ o existe un vértice $w \neq y$ tal que $h \to w \to v$.

Caso 1. $h \to v$.
En este caso h alcanza a v en un paso en T_1.

Caso 2. Existe un vértice $w \neq y$ tal que $h \to w \to v$.
Como $w \neq y$ obtenemos que w es un elemento de $V(T_1) - \{y\}$ o $V(T_2)$. Si $w \in V(T_1) - \{y\}$ entonces h alcanza a v en $T_1 - \{y\}$ en a lo más dos pasos. Si $w \in V(T_2)$, entonces por definición de T_x, $h \in N^-_{T_1}[x]$ y $v \in N^+_{T_1}(x)$, pero $h \neq x$ por ser x un rey de T_x, por lo cual $h \to x \to v$, por lo tanto h alcanza

a v en $T_1 - \{y\}$ en a lo más dos pasos.

Por los casos (1) y (2) tenemos que h es un rey de $T_1 - \{y\}$, además por ser h un heredero de y en T_x, no existe una (h,y)-trayectoria en T_x de longitud menor que tres, entonces no existe una (h,y)-trayectoria en T_1 de longitud menor que tres ya que $T_1 \subseteq T_x$, por lo tanto h es un heredero de y en T_1.

Ahora demostremos que si h es un heredero de y en T_1 con $y \neq x$ entonces h es un heredero de y en T_x. Sea h un heredero de y en T_1 con $y \neq x$, por el inciso (a) y es un rey de T_x, consideremos $v \in V(T_x) - \{y\}$.

Caso 1: $v \in V(T_1) - \{y\}$.
Por ser h un heredero de y en T_1 h alcanza a v en a lo más dos pasos en $T_1 - \{y\}$. Además, h es un rey de $T_1 - \{y\}$ y $T_1 - \{y\} \subseteq T_x - \{y\}$, lo cual implica que h alcanza a v en a lo más dos pasos en $T_x - \{y\}$.

Caso 2: $v \in V(T_2)$.
Dado que $x \in V(T_1) - \{y\}$, existe una (h,x)-trayectoria de longitud menor que tres en $T_1 - \{y\}$, es decir, $h \to x$ o existe $w \in V(T_1) - \{y\}$ con $h \to w \to x$. Si $h \to x$, entonces $h \to v$ por definición de T_x. Si existe $w \in V(T_1) - \{y\}$ con $h \to w \to x$, entonces por definición de T_x, $w \to v$, por lo cual $h \to w \to v$. Por lo tanto h es un rey de $T_x - \{y\}$.

Por otro lado, h no puede alcanzar a y en dos o menos pasos en T_1, entonces usando la contrapositiva de la afirmación (3), tenemos que h no puede alcanzar a y en dos o menos pasos en T_x, en consecuencia h es un heredero de y en T_x.

■

Corolario 3.2.6. *Sean T_1 un torneo y x un rey de T_1. Si x no tiene herederos en T_1, entonces existe un torneo T con la misma secuencia real que T_1, con excepción de que x tiene h_x herederos en T con $h_x > 0$, $h_x \neq 2$ y $h_x \neq 4$.*

Demostración. Sea n un entero positivo con $n \neq 2$ y $n \neq 4$, por el teorema 2.2.7 sabemos que existe un (n,n)-torneo T_2. Construyamos T_x como en la definición 3.2.4 a partir de T_1 y T_2, entonces por el lema 3.2.5 T_x tiene la misma secuencia real que T_1, excepto que ahora x tiene $h_x = n$ herederos en T_x.

■

Como vemos en el corolario anterior, no podemos agregar dos o cuatro herederos a un rey directamente mediante el uso del teorema de Maurer. Los dos siguientes lemas proporcionan métodos constructivos para obtener torneos con dos o cuatro herederos. El primer lema sigue de cerca el paso inductivo en la prueba del teorema de Maurer y permitirá a los reyes con exactamente dos herederos transformarlos en reyes con cuatro herederos. El segundo lema proporcionará ciertas condiciones bajo las cuales podemos garantizar que un rey tiene exactamente dos herederos.

Lema 3.2.7. *Sean T un torneo y x un rey de T. Si x tiene h_x herederos en T con $h_x > 0$, entonces existe un torneo T' tal que:*

(*a*) *Los reyes de T y T' son los mismos.*

(*b*) *x es un rey de T' y tiene exactamente $h_x + 2$ herederos en T'.*

(*c*) *Si y es un rey de T con $y \neq x$, entonces y tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T'.*

Demostración. Sean v un heredero de x en T y v_1, v_2, v_3 tres nuevos vértices. Consideremos el torneo $T' = (V(T'), F(T'))$, con

$$\begin{aligned}&V(T') = (V(T) - \{v\}) \cup \{v_1, v_2, v_3\} \text{ y}\\ &F(T') = F(T - \{v\}) \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \cup A \cup B\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}&A = \{(v_i, w) \mid (v, w) \in F(T),\ i \in \{1, 2, 3\}\} \text{ y}\\ &B = \{(w, v_i) \mid (w, v) \in F(T),\ i \in \{1, 2, 3\}\}.\end{aligned}$$

La figura 3.4 muestra cómo se relacionan los tres nuevos vértices con los demás vértices de $T - \{v\}$.

Para demostrar que el torneo T' definido anteriormente cumple con el lema, demostremos primero las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Sean u, w y z vértices de T, con $\{u, w\} \cap \{v\} = \varnothing$. Existe una (u, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T - \{z\}$ si y sólo si existe una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{z\}$.

Demostración de la afirmación 1. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe una (u,w)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en $T - \{z\}$. Observemos que si $v \notin V(W)$ entonces W es una (u,w)-trayectoria en $T - \{v,z\}$ y como $T - \{v\} \subset T'$ por definición de T', entonces $T - \{v,z\} \subset T' - \{z\}$, de esta manera se tiene que W es una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{z\}$. Por otro lado si $v \in V(W)$, entonces $W = (u,v,w)$ porque $\{u,w\} \cap \{v\} = \varnothing$, así $u \to v_1 \to w$ por definición de T', en consecuencia $W' = (u, v_1, w)$ es una (u,w)-trayectoria de longitud dos en $T' - \{z\}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una (u,w)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en $T' - \{z\}$. Observemos que si para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que $v_i \notin V(W)$, entonces W es una (u,w)-trayectoria en $T - \{v,z\}$ y como $T - \{v,z\} \subset T - \{z\}$, se tiene que W es una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T - \{z\}$. Por otro lado, si existe i en $\{1,2,3\}$ tal que $v_i \in V(W)$, entonces $W = (u, v_i, w)$, por lo cual $W' = (u,v,w)$ es una (u,w)-trayectoria de longitud dos en $T - \{z\}$. ▲

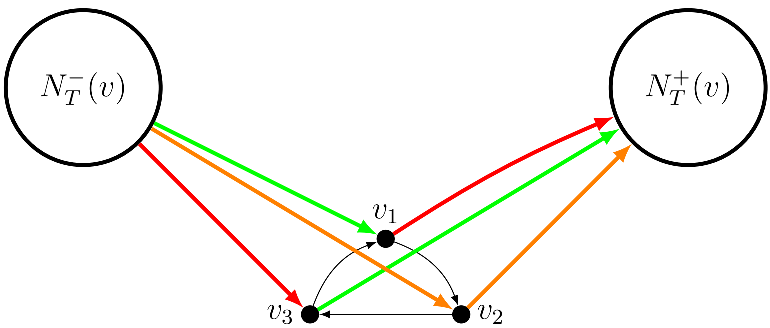

Figura 3.4. Algunas relaciones de dominación en el torneo T'.

Afirmación 2. Sean w y z vértices de T, con $\{w,z\} \cap \{v\} = \varnothing$. Existe una (z,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T si y sólo si existe una (z,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'.

Demostración de la afirmación 2. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe una (z,w)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en T. Observemos que si

$v \notin V(W)$, entonces W es una (z,w)-trayectoria en T' ya que $T - \{v\} \subset T'$ por definición de T'. Por otro lado si $v \in V(W)$, entonces $W = (z, v, w)$ porque $\{w, z\} \cap \{v\} = \varnothing$, en consecuencia $W' = (z, v_1, w)$ es una (z,w)-trayectoria de longitud dos en T'.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una (z,w)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en T'. Observemos que si para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que $v_i \notin V(W)$, entonces W es una (z,w)-trayectoria en T. Por otro lado, si existe i en $\{1,2,3\}$ tal que $v_i \in V(W)$, entonces $W = (z, v_i, w)$, por lo cual $W' = (z, v, w)$ es una (z,w)-trayectoria de longitud dos en T. ▲

Afirmación 3. Sea z un vértice de T, con $z \neq v$. Existe una (z,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, si y sólo si para cada i en $\{1,2,3\}$ existe una (z,v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'.

Demostración de la afirmación 3. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe una (z,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, entonces $z \to v$ o existe y en $V(T - \{v\})$ tal que $z \to y \to v$, luego por definición de T' para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que $z \to v_i$ o $z \to y \to v_i$. En cualquier caso tenemos que para cada i en $\{1,2,3\}$ existe una (z,v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'.

($\Leftarrow$) Inversamente, supongamos que para cada i en $\{1,2,3\}$ existe una (z,v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T', entonces $z \to v_i$ o existe y en $V(T') - \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $z \to y \to v_i$, así $z \to v$ o $z \to y \to v$ por definición de T'. Por lo tanto existe una (z,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T. ▲

Afirmación 4. Para cada i en $\{1,2,3\}$ no existe una (v_i,x)-trayectoria de longitud menor o iguala dos en T'.

Demostración de la afirmación 4. Por contradicción, supongamos que para algún j en $\{1,2,3\}$ existe una (v_j,x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Entonces $v_j \to x$ o existe y en $V(T')$ tal que $v_j \to y \to x$, en consecuencia $v \to x$ o $v \to y \to x$ si $y \notin \{v_1, v_2, v_3\}$ (notemos que si $y \in \{v_1, v_2, v_3\}$, entonces nuevamente $v \to x$) por definición de T', lo cual es una contradicción ya que v no alcanza a x en menos de tres pasos en T, por ser v un heredero de x en T. Por lo tanto la afirmación es cierta. ▲

Ahora procedamos a demostrar el lema.

(a) Demostremos primero que cualquier rey de T es un rey de T'. Sean u un rey de T y $w \in V(T')$.

Caso 1. $w \in V(T - \{v\})$.
Por ser u un rey de T, existe una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, además $u \neq v$ por ser v un heredero de x en T, y como el vértice w es distinto de v, entonces por la afirmación (2), existe una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'.

Caso 2. $w \in \{v_1, v_2, v_3\}$.
Por ser u un rey de T, existe una (u,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, además $u \neq v$ en consecuencia por la afirmación (3), para cada i en $\{1,2,3\}$ existe una (u,v_i)-trayectoria de longitud menor que tres.

Por los casos (1) y (2), u alcanza a cualquier vértice de T' en a lo más dos pasos, es decir, u es un rey de T'.

Ahora demostremos que cualquier rey de T' es un rey de T. Sea u un rey de T', observemos que por la afirmación (4), para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que $u \neq v_i$, entonces $u \in V(T) - \{v\}$. Consideremos $w \in V(T) - \{v\}$, como u es un rey de T', existe una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T', de esta manera usando la afirmación (2) tenemos que existe una (u,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T. Además, por ser u un rey de T', para cada i en $\{1,2,3\}$ existe una (u,v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T', entonces usando la afirmación (3) tenemos que existe una (u,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T. Por lo tanto u alcanza a cualquier vértice de T en dos o menos pasos, es decir, u es un rey de T.

De lo anterior concluimos que T y T' tienen los mismos reyes.

(b) Primero demostremos que para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que v_i es un rey de $T' - \{x\}$. Observemos que si $V(T) = \{v, x\}$, entonces el resultado es inmediato porque $\gamma = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ es un 3-ciclo. Supongamos ahora que $V(T) \neq \{v, x\}$, como v es un rey de $T - \{x\}$, entonces para cualquier vértice $w \in V(T) - \{v, x\}$ sucede que $v \to w$ o existe $y \in V(T) - \{x\}$ tal que $v \to y \to w$, por lo cual, para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que $v_i \to w$ o $v_i \to y \to w$ en $T' - \{x\}$. Además $\gamma = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ es un 3-ciclo por lo cual para cada i y j en $\{1,2,3\}$ con $i \neq j$ se tiene que v_i alcanza a v_j en dos o menos pasos en $T' - \{x\}$. Por lo tanto, independientemente de que $V(T) = \{v, x\}$ o $V(T) \neq \{v, x\}$, para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que v_i es un rey de $T' - \{x\}$, y usando la afirmación (4) concluimos que para cada i en $\{1,2,3\}$ se tiene que v_i es un heredero de x en T'.

Demostremos que si h es un heredero x en T con $h \neq v$, entonces h es un heredero de x en T'. Por (a) x es un rey de T'. Veamos primero que h es un rey de $T' - \{x\}$, para ello sea $w \in V(T') - \{x\}$.

Caso 1. $w \in V(T)$.
Por ser h un rey de $T - \{x\}$, existe una (h, w)-trayectoria de longitud menor o igual dos en $T - \{x\}$, además $h \neq v$ y $w \neq v$, entonces usando la afirmación (1) tenemos que existe una (h, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{x\}$.

Caso 2. $w \in \{v_1, v_2, v_3\}$.
Por ser h un rey de $T - \{x\}$, existe una (h, v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T - \{x\}$, entonces usando la afirmación (3), obtenemos para cada i en $\{1,2,3\}$ una (h, v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{x\}$.

Por los casos (1) y (2), tenemos que h es un rey de $T' - \{x\}$.

Lo que falta demostrar ahora es que no existe una (h, x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Por ser h un heredero de x en T, se tiene que no existe una (h, x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, usando la afirmación (2) se tiene que no existe una (h, x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Por lo tanto h es un heredero de x en T'.

Ahora demostremos que si h es un heredero de x en T' tal que $h \neq v_1$, $h \neq v_2$ y $h \neq v_3$, entonces h es un heredero de x en T. Observemos que por hipótesis, x es un rey de T. Veamos primero que h es un rey de $T - \{x\}$, para ello tomemos $w \in V(T) - \{v, x\}$. Dado que existe una (h, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{x\}$ entonces por la afirmación (1) existe una (h, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T - \{x\}$. Además, como para cada i en $\{1,2,3\}$ existe una (h, v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{x\}$, entonces usando la afirmación (3) tenemos que existe una (h,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T-\{x\}$. Por lo tanto h es un rey de $T-\{x\}$.

Sólo nos falta demostrar que h no puede alcanzar a x en dos o menos pasos en T. Por ser h un heredero de x en T', el vértice h no puede alcanzar al vértice x en dos o menos pasos en T', entonces usando la afirmación (2) tenemos que h no puede alcanzar a x en dos o menos pasos en T, y como h es un rey de $T-\{x\}$ concluimos que h es un heredero de x en T.

Lo que hemos demostrado hasta el momento es que cualquier heredero de x en T que sea distinto de v es un heredero de x en T', también que para cada i en $\{1,2,3\}$ sucede que v_i es un heredero de x en T' y que éstos son los únicos herederos de x en T'. Por lo tanto x tiene h_x+2 herederos en T'.

(c) Demostremos primero que si h es un heredero del rey z en T con $z\neq x$, entonces h es un heredero de z en T'. Para ello, sea h un heredero del rey z en T con $z\neq x$, por (a) z es un rey de T' y además $h\neq v$ porque v es un heredero de x y $z\neq x$. Veamos primero que h es un rey de $T'-\{z\}$, sea $w\in V(T')-\{z\}$.

Caso 1. $w\in V(T)$.
Por ser h un rey de $T-\{z\}$, existe una (h,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T-\{z\}$, además $h\neq v$ y $w\neq v$, entonces usando la afirmación (1) tenemos que existe una (h,w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T'-\{z\}$.

Caso 2. $w\in\{v_1,v_2,v_3\}$.
Por ser h un rey de $T-\{z\}$, se tiene que existe una (h,v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T-\{z\}$, entonces usando la afirmación (3), obtenemos para cada i en $\{1,2,3\}$ una (h,v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T'-\{z\}$.

Por los casos (1) y (2), tenemos que h es un rey de $T'-\{z\}$.

Lo que falta demostrar ahora es que no existe una (h,z)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Por ser h un heredero del rey z en T, se tiene que no existe una (h,z)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, usando la afirmación (2) se tiene que no existe una (h,z)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Por lo tanto h es un heredero de z en T'.

Ahora demostremos que si h es un heredero de z en T' tal que $z\neq x$, entonces h es un heredero de z en T. Observemos que por (a) z es un rey de T con $z \neq v$, y dado que existe una (h, x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T', por la afirmación (4) se tiene que $h \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \varnothing$, por lo cual h es un vértice de T con $h \neq v$. Veamos primero que h es un rey de $T - \{z\}$, para ello tomemos w en $V(T) - \{v, z\}$. Dado que existe una (h, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{z\}$ entonces por la afirmación (1) existe una (h, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T - \{z\}$. Además, como para cada i en $\{1, 2, 3\}$ existe una (h, v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T' - \{z\}$, entonces usando la afirmación (3) tenemos que existe una (h, v)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en $T - \{z\}$. Por lo tanto h es un rey de $T - \{z\}$.

Demostremos que h no puede alcanzar a z en dos o menos pasos en T. Por ser h un heredero de z en T', el vértice h no puede alcanzar al vértice z en dos o menos pasos en T', entonces usando la afirmación (2) tenemos que h no puede alcanzar a z en dos o menos pasos en T, y como h es un rey de $T - \{z\}$ concluimos que h es un heredero de z en T.

Lo que hemos demostrado hasta el momento es que, si y es un rey de T con $y \neq x$, entonces h es un heredero de y en T si y sólo si h es un heredero de y en T', lo cual implica que, si y es un rey de T con $y \neq x$, entonces h tiene cero herederos en T si y sólo si h tiene cero herederos en T'. Por lo tanto si y es un rey de T con $y \neq x$, entonces y tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T'.

■

Observemos que en el lema anterior, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los reyes de T, para cada i en $\{1, 2, \ldots, n\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T con $h_1 > 0$, y la secuencia real de T es $[n; h_1, h_2, \ldots, h_n; r]$, entonces por (a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los reyes de T', por (b) x_1 tiene $h_1 + 2$ herederos en T' y por (c) para cada i en $\{2, \ldots, n\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T', por lo cual la secuencia real de T' es $[n; h_1 + 2, h_2, \ldots, h_n; r]$.

Lema 3.2.8. *Sea T un torneo, si x y y son dos reyes de T tales que x no tiene herederos, $x \to y$ y x es un rey en $T - \{y\}$, entonces existe un torneo T' tal que:*

(a) x es un rey de T' y tiene exactamente dos herederos en T'.

(b) *Los reyes de T y T' son los mismos.*

(c) *Si z es un rey de T con $z \neq x$, entonces z tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T'.*

Demostración. Vamos a construir un torneo T' a partir de T donde x tendrá exactamente dos herederos. La construcción y la demostración es similar al lema 3.2.5. Sean u_1 y u_2, dos nuevos vértices, definimos el torneo $T' = (V(T'), F(T'))$ con

$$V(T') = V(T) \cup \{u_1, u_2\} \text{ y}$$
$$F(T') = F(T) \cup \{(u_2, y), (y, u_1), (u_1, u_2)\} \cup \{(x, u_i) \mid i \in \{1, 2\}\} \cup A \cup B,$$

donde

$$A = \{(w, u_i) \mid w \in V(T) - \{x, y\},\ (w, x) \in F(T),\ i \in \{1, 2\}\} \text{ y}$$
$$B = \{(u_i, w) \mid w \in V(T) - \{x, y\},\ (x, w) \in F(T),\ i \in \{1, 2\}\}.$$

La figura 3.5 muestra como se relacionan los dos nuevos vértices con los vértices de T.

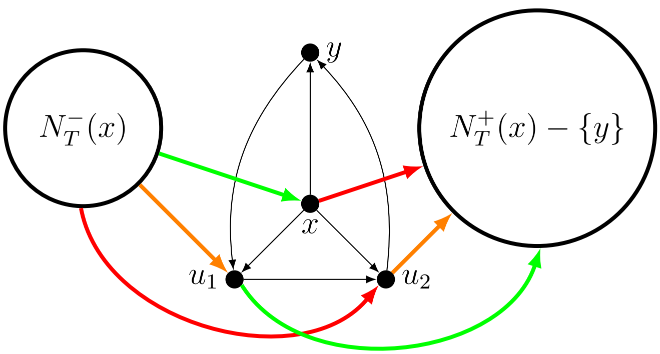

Figura 3.5. Algunas relaciones de dominación en el torneo T'.

Antes de demostrar que T' cumple con el lema, demostremos la siguiente afirmación:

Afirmación 1. Para cualesquiera vértices v y w en T, con $\{x, y\} \cap \{v\} = \varnothing$, si no existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, entonces no existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'.

Demostración de la afirmación. Por contradicción, sean v y w vértices de T con $\{x, y\} \cap \{v\} = \varnothing$, supongamos que no existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, pero que sí existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Como (v, w) no es una flecha de T, ya que no existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T, la distancia de v a w en T' debe ser dos, entonces existe un vértice u tal que $v \to u \to w$. Observemos que $u \notin V(T)$ ya que no existe una (v, w)-trayectoria de longitud dos en T, entonces $u \in \{u_1, u_2\}$. Como $\{x, y\} \cap \{v\} = \varnothing$ y $v \to u$, por definición de T' se tiene que $v \to x$ y para cada i en $\{1, 2\}$ el conjunto de vecinos exteriores de u_i está contenido en el conjunto de los vecinos exteriores de x, entonces $x \to w$, por lo cual $v \to x \to w$, entonces existe una (v, w)-trayectoria en T de longitud dos, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la afirmación es verdadera. ▲

(a) Como x es un rey de T y alcanza a los dos nuevos vértices en un paso, x es un rey de T'. Veamos que para cada i en $\{1, 2\}$ el vértice u_i es un rey de $T' - \{x\}$ y que u_i no alcanza a x en dos o menos pasos en T'. Sea i en $\{1, 2\}$, como $\gamma = (u_1, u_2, y, u_1)$ es un ciclo de longitud tres en T', para cada j en $\{1, 2\}$ el vértice u_i alcanza a u_j y a y en a lo más dos pasos. Consideremos v en $V(T') - \{x, y, u_1, u_2\}$. Si $x \to v$, entonces $u_i \to v$ por definición de T', de esta manera u_i alcanza a v en un paso en $T' - \{x\}$. Por otro lado, si $v \to x$, como x es un rey de $T - \{y\}$, entonces x puede alcanzar a v en dos pasos vía $w \in V(T') - \{x, y, u_1, u_2\}$, es decir, $x \to w \to v$, entonces por la definición de T' se tiene que $u_i \to w \to v$, ésto significa que u_i puede alcanzar a v vía w en dos pasos en $T' - \{x\}$. En consecuencia u_i es un rey de $T' - \{x\}$. Además ya tenemos que $N^+_{T'}(u_i) \subset N^+_{T'}(x)$, entonces por el corolario 2.1.8 u_i no puede alcanzar a x en dos o menos pasos en T'. Por lo tanto u_i es un heredero de x en T'.

Para ver que los únicos herederos de x en T' son u_1 y u_2, procedamos por contradicción, supongamos que existe un vértice h que es un heredero de x

en T', con $h \cap \{u_1, u_2\} = \varnothing$. Como h no puede alcanzar a x en dos o menos pasos en T' y dado que $h \notin \{u_1, u_2\}$, se tiene que $h \in N_T^+(x)$, de esta manera $u_2 \to h$. Pero h alcanza a u_2 en dos o menos pasos en T' y como $u_2 \to h$ se tiene que h alcanza a u_2 en dos pasos en T', entonces existe un vértice v tal que $h \to v \to u_2$. Observemos que $v \neq y$ porque $u_2 \to y$, $v \neq x$ porque $x \to h$ y $v \neq u_1$ ya que $u_1 \to h$, así $v \notin \{x, y, u_1\}$ y como $v \to u_2$, $v \in N_T^-(x)$ por definición de T', de esta forma $h \to v \to x$, en consecuencia h alcanza a x en dos pasos en T' lo cual es una contradicción ya que h no puede alcanzar a x en dos o menos pasos en T'. Por lo tanto los únicos herederos de x en T' son u_1 y u_2.

(b) Ya demostramos que x es un rey de T', entonces para ver que T' tiene los mismos reyes que T primero demostremos que cualquier otro rey distinto de x en T es un rey de T'. Supongamos que $z \neq x$ (posiblemente igual a y) es rey de T. Sabemos que z puede alcanzar a todos los vértices de T en a lo más dos pasos. Si $z \to x$ en T entonces $z \to \{u_1, u_2\}$. Por otro lado si existe $v \in V(T)$ tal que $z \to v \to x$, como $x \to y$ entonces $v \neq y$, de esta forma $v \to u_i$ por definición de T', entonces $z \to v \to \{u_1, u_2\}$, en consecuencia z es un rey de T.
Por la afirmación (1), sabemos que cualquier vértice de T que no es un rey de T no es un rey de T', y además como para cada i in $\{1, 2\}$ el vértice u_i es un heredero de x en T', entonces u_i no es un rey de T'. Por lo tanto los reyes de T y T' son exactamente los mismos.

(c) Demostremos que si z es un heredero de w en T con $w \neq x$, entonces z es un heredero de w en T'. Sabemos que z puede alcanzar a todos los vértices de T en a lo más dos pasos, excepto a w. Dado que x es un rey de T se tiene que $z \neq x$, entonces z puede alcanzar a x en dos o menos pasos en $T - \{w\}$ por ser z un rey de $T - \{w\}$, es decir, $z \to x$ o existe v en $V(T - \{w\})$ tal que $z \to v \to x$. Si $z \to x$, entonces $z \neq y$ ya que $x \to y$, de esta manera $z \to \{u_1, u_2\}$ por definición de T'. Si existe v en $V(T - \{w\})$ tal que $z \to v \to x$, nuevamente $v \neq y$ ya que $x \to y$, y entonces $v \to \{u_1, u_2\}$ por definición de T', entonces $z \to v \to \{u_1, u_2\}$. En cualquier caso tenemos que z alcanza a cualquier vértice de $V(T' - \{w\})$ en dos o menos pasos en $T' - \{w\}$, es decir, z es un rey de $T' - \{w\}$. Como z no puede alcanzar a w en dos o menos pasos en T, $z \neq x$ y $z \neq y$ entonces por la afirmación (1) z no puede alcanzar a w en dos o menos pasos en T' y además por el inciso (b)

w es un rey de T', por lo tanto z es un heredero de w en T'.

Ahora demostraremos que si z es un heredero de un rey w en T', entonces z es un heredero de w en T, o lo que es lo mismo, si z no es un heredero en T, entonces z no es un heredero en T'. Para ello supongamos que z no es un heredero en T, entonces z es un rey de T o z no es un heredero ni un rey de T. Observemos que si z es un rey de T entonces por el inciso (b) z es un rey de T', por lo cual, en este caso, z no es un heredero en T'.

Supongamos que z no es un heredero ni un rey de T, entonces $z \neq x$ y $z \neq y$. Por la afirmación (1) z no es un rey de T'. Para ver que z no es un heredero en T' procedamos por contradicción, es decir, supongamos que z es un heredero de un rey w en T'. Sea $v \in V(T - \{w, z\})$, como z es un rey de $T' - \{w\}$, $z \to v$ o existe u en $V(T' - \{w\})$ tal que $z \to u \to v$. Si $z \to v$, entonces z alcanza a v en un paso en $T - \{w\}$. Si existe u en $V(T' - \{w\})$ tal que $z \to u \to v$, entonces para el caso en que u sea un vértice de $T - \{w\}$, z alcanza a v en dos pasos en $T - \{w\}$, y si $u \in \{u_1, u_2\}$, como $v \in V(T - \{w, z\})$ se tiene que $v \in N_T^+(x)$ por definición de T', y como $z \notin \{x, y\}$ entonces $z \in N_T^-(x)$ por definición de T', en consecuencia $z \to x \to v$, esto nos dice que $x \neq w$ dado que z es un heredero de w, por lo cual z alcanza a v en dos pasos vía x en $T - \{w\}$. En cualquier caso tenemos que z es un rey de $T - \{w\}$, además por ser z un heredero de w en T' y $T \subseteq T'$, z no alcanza a w en dos o menos pasos en T, por lo tanto z es un heredero de w en T, lo cual es una contradicción ya que z no es un heredero en T. En consecuencia si z no es un heredero ni un rey de T, entonces z no es un heredero ni un rey de T', y por lo ya argumentado anteriormente tenemos que para cualquier rey w de T con $w \neq x$, h es un heredero de w en T si y sólo si h es un heredero de w en T', lo cual implica que para cualquier rey w de T con $w \neq x$, w tiene cero herederos en T si y sólo si w tiene ceros herederos en T'.

Por lo tanto, para cualquier rey z de T con $z \neq x$, z tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T'.

■

Notemos que en el lema anterior, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los reyes de T, para cada i en $\{1, 2, \ldots, n\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T y la secuencia real de T es $[n; 0, h_2, \ldots, h_n; r]$, entonces por (b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son los reyes de

T', por (c) para cada i en $\{2, \ldots, n\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T' y por (a) x_1 tiene dos herederos en T', por lo cual la secuencia real de T' es $[n; 2, h_2, \ldots, h_n; r]$.

Observación 3. Para futuras referencias, debido a la construcción de T', $N^+_{T'}(u_2) = N^+_T(x)$ y $N^+_{T'}(x) = N^+_T(x) \cup \{u_1, u_2\}$, por lo cual

$$\begin{gathered} N^+_{T'}(u_2) \cap V(T' - \{x, u_1, u_2\}) = N^+_T(x) \text{ y} \\ N^+_{T'}(x) \cap V(T' - \{x, u_1, u_2\}) = N^+_T(x). \end{gathered}$$

Por lo tanto el vértice u_2 tiene la siguiente propiedad:

$$N^+_{T'}(u_2) \cap V(T' - \{x, u_1, u_2\}) = N^+_{T'}(x) \cap V(T' - \{x, u_1, u_2\}).$$

Corolario 3.2.9. *Sea T un torneo, si x y y son dos reyes de T tales que x no tiene herederos, $x \to y$ y x es un rey en $T - \{y\}$, entonces existe un torneo T' tal que:*

(a) x es un rey de T' y tiene exactamente cuatro herederos en T'.

(b) Los reyes de T y T' son los mismos.

(c) Si z es un rey de T con $z \neq x$, entonces z tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T'.

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos nuevos vértices, definimos el torneo T_1 con

$$\begin{aligned} &V(T_1) = V(T) \cup \{u_1, u_2\} \text{ y} \\ &F(T_1) = F(T) \cup \{(u_2, y), (y, u_1), (u_1, u_2)\} \cup \{(x, u_i) \mid i \in \{1, 2\}\} \cup A \cup B, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} &A = \{(w, u_i) \mid w \in V(T) - \{x, y\},\ (w, x) \in F(T),\ i \in \{1, 2\}\} \text{ y} \\ &B = \{(u_i, w) \mid w \in V(T) - \{x, y\},\ (x, w) \in F(T),\ i \in \{1, 2\}\}. \end{aligned}$$

Por el lema 3.2.8 tenemos que: x es un rey de T_1 y tiene exactamente dos herederos en T_1, los reyes de T y T_1 son los mismos, y si z es un rey de T con $z \neq x$, z tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T_1.

Consideremos ahora v_1, v_2 y v_3 tres nuevos vértices y el torneo T', con

$$V(T') = (V(T_1) - \{u_2\}) \cup \{v_1, v_2, v_3\} \text{ y}$$
$$F(T') = F(T_1 - \{u_2\}) \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \cup A' \cup B'$$

donde

$$A' = \{(v_i, w) \mid (v, w) \in F(T_1),\ i \in \{1, 2, 3\}\} \text{ y}$$
$$B' = \{(w, v_i) \mid (w, v) \in F(T_1),\ i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Por el lema 3.2.7 tenemos que: x es un rey de T' y tiene exactamente cuatro herederos en T', los reyes de T_1 y T' son los mismos, y si z es un rey de T_1 con $z \neq x$, z tiene la misma cantidad de herederos tanto en T_1 como en T'. Por lo tanto:

(a) x es un rey de T' y tiene exactamente cuatro herederos en T'.
(b) Los reyes de T y T' son los mismos.
(c) Para cualquier rey z de T con $z \neq x$, z tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T'. ■

Notemos que en el corolario anterior, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los reyes de T, para cada i en $\{1, 2, \ldots, n\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T y la secuencia real de T es $[n; 0, h_2, \ldots, h_n; r]$, entonces por (b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son los reyes de T', por (c) para cada i en $\{2, \ldots, n\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T' y por (a) x_1 tiene cuatro herederos en T', por lo cual la secuencia real de T' es $[n; 4, h_2, \ldots, h_n; r]$.

Observación 4. Por construcción de T', el vértice u_2 tiene la siguiente propiedad:

$$N^+_{T'}(u_2) \cap V(T' - \{x, u_1, v_1, v_2, v_3\}) = N^+_{T'}(x) \cap V(T' - \{x, u_1, v_1, v_2, v_3\}).$$

La igualdad se da porque

$$N^+_{T'}(v_2) = N^+_T(x) \cup \{v_3\} \text{ y } N^+_{T'}(x) = N^+_T(x) \cup \{u_1, v_1, v_2, v_3\}$$

lo cual implica que

$$N^+_{T'}(u_2) \cap V(T' - \{x, u_1, v_1, v_2, v_3\}) = N^+_T(x) \text{ y}$$

$$N^+_{T'}(x) \cap V(T' - \{x, u_1, v_1, v_2, v_3\}) = N^+_T(x).$$

Lema 3.2.10. *Sean T un torneo, x y y dos reyes de T tales que $x \to y$, y u un heredero de y. Consideremos*

$$V' = V(T) - (\{h \in V(T) \mid h \textit{ es un heredero de } y \textit{ en } T\} \cup \{y\}).$$

Si $N^+_T(y) \cap V' = N^+_T(u) \cap V'$, entonces x es un rey de $T - \{y\}$.

Demostración. Consideremos w un heredero de y, observemos que $x \to w$, porque de lo contrario $w \to x \to y$, es decir, w alcanzaría a y en dos pasos, lo cual no puede pasar dado que w es un heredero de y. Entonces x alcanza en un paso a cualquier heredero de y.

Ahora consideremos cualquier otro vértice z que no sea un heredero de y y distinto de y. Por ser x un rey de T se tiene que existe una (x,z)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en T. Observemos que si $y \notin V(W)$, entonces x alcanza a z en dos o menos pasos en $T - \{y\}$. Por otro lado, si $y \in V(W)$ entonces $W = (x, y, z)$, por lo cual $z \in N^+_T(y) \cap V'$ y como $N^+_T(y) \cap V' = N^+_T(u) \cap V'$, se tiene que $z \in N^+_T(u)$, de esta manera $x \to u \to z$, es decir, x alcanza a z en dos pasos en $T - \{y\}$. Por lo tanto x es un rey de $T - \{y\}$.

■

Es esencial en este punto enfatizar que agregando herederos vía lema 3.2.8 o corolario 3.2.9 creamos un heredero con precisamente las relaciones que describe el lema anterior, esto se debe a las observaciones realizadas en tales resultados, que hablan sobre la propiedad del vértice u_2. Dicha propiedad es la que nos permitirá ir creando torneos de forma secuencial en el teorema 3.2.12.

Nuestro lema constructivo final nos permite observar que no es difícil agregar vértices que no sean reyes ni herederos.

Lema 3.2.11. *Si T es un torneo de orden mayor o igual a dos, con secuencia real $[k; h_1, h_2, \ldots, h_k; r]$ y s es un entero positivo, entonces existe un torneo con secuencia real $[k; h_1, h_2, \ldots, h_k; r + s]$.*

Demostración. Sea S un torneo con s vértices, consideremos el torneo $T' = (V(T'), F(T'))$ donde

$$V(T') = V(T) \cup V(S),$$
$$F(T') = F(T) \cup F(S) \cup \{(x, y) \mid x \in V(T),\ y \in V(S)\}.$$

Observemos que por definición de T', cualquier rey de T es un rey de T', y si h es un heredero de x en T entonces h es un heredero de x en T'. También notemos que si z es un vértice de T que no es ni rey ni heredero en T, entonces z no es ni rey ni heredero en T', ya que si z fuese un rey o un heredero en T', como $V(T) \to V(S)$ implicaría que z era originalmente un rey o heredero de T. Para demostrar que el torneo T' cumple con el lema, sólo necesitamos mostrar que no hay vértices de S que sean reyes o herederos de T'. Como $V(T) \to V(S)$ por definición de T', se tiene que para cualesquiera u en $V(S)$ y v en $V(T)$ no existe una (u, v)-trayectoria, por lo cual ningún vértice de S es un rey de T'. Además, por ser T un torneo con al menos dos vértices cuando removemos un vértice de T en T', sigue quedando al menos un vértice de T en T', de esta manera ningún vértice de S es un heredero en T'. Por lo tanto si T tiene secuencia real $[k; h_1, h_2, \dots, h_k; r]$, entonces T' tiene por secuencia real $[k; h_1, h_2, \dots, h_k; r + s]$.

■

Teorema 3.2.12. *Si $k \geq 5$ y $r, h_0, h_1, \dots, h_{k-1}$ son enteros mayores o iguales a cero, entonces existe un torneo con secuencia real $[k; h_0, h_1, \dots, h_{k-1}; r]$.*

Demostración. Observemos que por el corolario 3.2.1 para cualquier entero k con $k \geq 5$, existe un torneo T_k con secuencia real $[k; 0, 0, \dots, 0; 0]$ y aplicando el lema 3.2.11 al torneo T_k para cualquier entero positivo r obtenemos un torneo T'_k con secuencia real $[k; 0, 0, \dots, 0; r]$. En resumen para cualquier par de enteros k, r con $k \geq 5$ y $r \geq 0$ existe un torneo con secuencia real $[k; 0, 0, \dots, 0; r]$.

Ahora supongamos que existe $j \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que h_j es distinto de cero. Debido a que k puede ser un entero positivo par o impar, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. k es un entero positivo impar.
Construiremos un torneo con secuencia real $[k; h_0, h_1, \dots, h_{k-1}; r]$, para ello consideremos la digráfica R_k, con $k = 2t+1$, $t \geq 2$, $V(R_k) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2t}\}$, donde $v_i \to \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+t}\}$ usando en el subíndice adición mod $2t + 1$. Primero observemos que por como se construye la digráfica R_{2t+1}, resulta que para cada i en $\{0, 1, \dots, k-1\}$ el vértice v_i domina a exactamente t vértices.

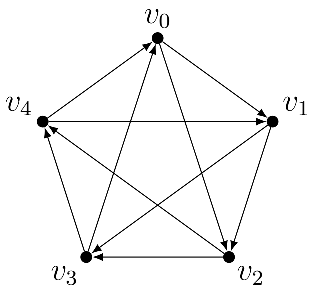

Figura 3.6. R_5.

Por ejemplo, para obtener R_5 (ver figura 3.6), primero consideramos el conjunto de vértices $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, después agregamos las flechas determinadas por las siguientes relaciones de dominación:

$$v_0 \to \{v_1, v_2\},\ v_1 \to \{v_2, v_3\},\ v_2 \to \{v_3, v_4\},\ v_3 \to \{v_4, v_0\},\ v_4 \to \{v_0, v_1\}$$

.

Afirmación. R_{2t+1} es un torneo, y además el exgrado de cualquiera de sus vértices es el mismo.

Demostración de la afirmación. Veamos que para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t\}$

$$P_i = \{\{v_i\}, \{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+t}\}, \{v_{i+t+1}, v_{i+t+2}, \ldots, v_{i+t+t}\}\}$$

es una partición de los vértices de R_{2t+1}. Primero, cada elemento de P_i es distinto del vacío porque para cualquier entero m con $0 \leq m \leq 2t$, existe un entero n con $0 \leq n \leq 2t$ tal que $i + m \equiv n \pmod{2t+1}$. Segundo, observemos que para cualesquiera enteros m, n con $0 \leq m \leq 2t$ y $0 \leq n \leq 2t$ se tiene que $0 \leq |n - m| \leq 2t$, lo cual implica que $i + n \equiv i + m \pmod{2t+1}$ si y sólo si $n - m \equiv 0 \pmod{2t+1}$ y esto pasa si y sólo si $n - m = 0$ si y sólo si $n = m$, en consecuencia $v_{i+n} = v_{i+m}$ si y sólo si $n = m$, por lo tanto los elementos de P_i son disjuntos. Por último, ya hicimos notar que $v_{i+n} = v_{i+m}$ si y sólo si $n = m$, donde m, n son enteros con $0 \leq m \leq 2t$ y $0 \leq n \leq 2t$, entonces $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{i+t}, v_{i+t+1}, v_{i+t+2}, \ldots, v_{i+t+t}$ son $2t+1$ vértices distintos, por lo cual la unión de los elementos de P_i es justamente el conjunto $V(R_{2t+1})$. Por lo tanto P_i es una partición de los vértices de R_{2t+1}.

Ahora tomemos v_r y v_s dos vértices distintos de R_{2t+1}. Consideremos la siguiente partición de los vértices de R_{2t+1}:

$$P_r = \{\{v_r\}, \{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+t}\}, \{v_{r+t+1}, v_{r+t+2}, \ldots, v_{r+t+t}\}\}.$$

Caso a. $v_s \in \{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+t}\}$.
Por definición de R_{2t+1} se tiene que $(v_r, v_s) \in F(R_{2t+1})$, además existe r_1 en $\{1, 2, \ldots, t\}$ tal que $v_s = v_{r+r_1}$ y

$$v_{r+r_1} \to \{v_{r+r_1+1}, v_{r+r_1+2}, \ldots, v_{r+r_1+t}\}.$$

Ahora observemos que

$$r + 2 \leq r + r_1 + 1 < r + r_1 + t \leq r + t + t$$

por lo cual

$$v_r \notin \{v_{r+r_1+1}, v_{r+r_1+2}, \ldots, v_{r+r_1+t}\}$$

en consecuencia $(v_s, v_r) \notin F(R_{2t+1})$.

Caso b. $v_s \in \{v_{r+t+1}, v_{r+t+2}, \ldots, v_{r+t+t}\}$.
Por definición de R_{2t+1} se tiene que $(v_s, v_r) \in F(R_{2t+1})$, además

$$v_r \to \{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+t}\} \text{ y } v_s \notin \{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{r+t}\},$$

por lo cual $(v_r, v_s) \notin F(R_{2t+1})$.

Así, sólo existe una flecha entre cualquier par de vértices distintos de R_{2t+1}, además, cada vértice de R_{2t+1} domina a exactamente t vértices, por lo tanto el exgrado de cualquier vértice de R_{2t+1} es el mismo. ▲

Dado que el exgrado de cualquier vértice de R_{2t+1} es el mismo, cualquier vértice de R_{2t+1} es un rey (lema 2.1.2), en consecuencia R_{2t+1} tiene por secuencia real $[2t + 1; 0, 0, \ldots, 0, 0; 0]$.

Por otro lado, $v_{2t} \to \{v_1, \ldots, v_{t-1}\}$ y $v_{2t} \to v_{t-1} \to \{v_t, \ldots, v_{2t-1}\}$ por lo cual v_{2t} es un rey de $R_{2t+1} - \{v_0\}$.

Con el fin de obtener un torneo con secuencia real $[2t+1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; r]$, para cada l en $\{0, 1, \ldots, 2t\}$ agregaremos h_l herederos al rey v_l. Debido a los diferentes valores que puede tomar h_i, consideremos los siguientes casos:

Caso 1.1. Para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t\}$ se tiene que $h_i \in \{2, 4\}$.

Como v_{2t} es un rey de $R_{2t+1} - \{v_0\}$, $v_{2t} \to v_0$ y v_{2t} no tiene herederos en R_{2t+1}, por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9 dependiendo si $h_{2t} = 2$ o $h_{2t} = 4$, podemos obtener un torneo $T_{v_{2t}}$ a partir del torneo R_{2t+1} tal que: los reyes de $T_{v_{2t}}$ y R_{2t+1} son exactamente los mismos, v_{2t} tiene h_{2t} herederos en $T_{v_{2t}}$, y para cada $p \in \{0, \ldots, 2t-1\}$ el rey v_p tiene cero herederos en $T_{v_{2t}}$. Así la secuencia real de $T_{v_{2t}}$ es $[2t+1; 0, 0, \ldots, 0, h_{2t}; 0]$. Ahora por la observación (3) o la observación (4) dependiendo si $h_{2t} = 2$ o $h_{2t} = 4$, existe un vértice u_{2t} heredero de v_{2t} en $T_{v_{2t}}$ con la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{v_{2t}}}(v_{2t}) \cap V(T_{v_{2t}} - V'_{2t}) = N^+_{T_{v_{2t}}}(u_{2t}) \cap V(T_{v_{2t}} - V'_{2t})$$

donde $V'_{2t} = \{u \mid u \text{ es un heredero de } v_{2t} \text{ en } T_{v_{2t}}\} \cup \{v_{2t}\}$.

Por otra parte, $v_{2t-1} \to v_{2t}$, entonces por el lema 3.2.10, v_{2t-1} es un rey de $T_{v_{2t}} - \{v_{2t}\}$. Como v_{2t-1} no tiene herederos en $T_{v_{2t}}$, por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_{2t-1} = 2$ o $h_{2t-1} = 4$, podemos obtener un torneo $T_{v_{2t-1}}$ a partir del torneo $T_{v_{2t}}$ tal que: los reyes de $T_{v_{2t-1}}$ y $T_{v_{2t}}$ son exactamente los mismos, para cada l en $\{2t-1, 2t\}$ el rey v_l tiene h_l herederos en $T_{v_{2t-1}}$, y para cada p en $\{0, \ldots, 2t-2\}$ el rey v_p tiene cero herederos en $T_{v_{2t-1}}$. Así la secuencia real de $T_{v_{2t-1}}$ es $[2t+1; 0, 0, \ldots, 0, h_{2t-1}, h_{2t}; 0]$. Nuevamente por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_{2t-1} = 2$ o $h_{2t-1} = 4$, existe un vértice u_{2t-1} heredero de v_{2t-1} en $T_{v_{2t-1}}$ con la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{v_{2t-1}}}(v_{2t-1}) \cap V(T_{v_{2t-1}} - V'_{2t-1}) = N^+_{T_{v_{2t-1}}}(u_{2t-1}) \cap V(T_{v_{2t-1}} - V'_{2t-1})$$

donde $V'_{2t-1} = \{u \mid u \text{ es un heredero de } v_{2t-1} \text{ en } T_{v_{2t-1}}\} \cup \{v_{2t-1}\}$.

Como $v_{2t-2} \to v_{2t-1}$, se tiene que v_{2t-2} es un rey de $T_{v_{2t-1}} - \{v_{2t-1}\}$ por el lema 3.2.10 y dado que v_{2t-2} no tiene herederos en $T_{v_{2t-1}}$, por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_{2t-2} = 2$ o $h_{2t-2} = 4$, podemos obtener un torneo $T_{v_{2t-2}}$ a partir del torneo $T_{v_{2t-1}}$ tal que: los reyes de $T_{v_{2t-2}}$ y $T_{v_{2t-1}}$ son exactamente los mismos, para cada l en $\{2t-2, 2t-1, 2t\}$ el rey v_l tiene h_l herederos en $T_{v_{2t-2}}$, y para cada p en $\{0, \ldots, 2t-3\}$ el rey v_p tiene cero herederos en $T_{v_{2t-2}}$. Así la secuencia real de $T_{v_{2t-2}}$ es $[k; 0, 0, \ldots, 0, h_{2t-2}, h_{2t-1}, h_{2t}; 0]$. Nuevamente por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_{2t-2} = 2$ o $h_{2t-2} = 4$, existe un vértice u_{2t-2} heredero de v_{2t-2} en $T_{v_{2t-2}}$ con la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{v_{2t-2}}}(v_{2t-2}) \cap V(T_{v_{2t-2}} - V'_{2t-2}) = N^+_{T_{v_{2t-2}}}(u_{2t-2}) \cap V(T_{v_{2t-2}} - V'_{2t-2})$$

donde $V'_{2t-2} = \{u \mid u \text{ es un heredero de } v_{2t-2} \text{ en } T_{v_{2t-2}}\} \cup \{v_{2t-2}\}$.

Aplicando el mismo razonamiento que se realizó para obtener $T_{v_{2t-2}}$ a partir del torneo $T_{v_{2t-1}}$ y teniendo en cuenta que $v_i \to v_{i+1}$ (usando en el subíndice adición mod $2t+1$), podemos ir aplicando el lema 3.2.10 seguido del lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9 sucesivamente hasta obtener un torneo T_{v_0} con secuencia real $[2t+1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; 0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T'_{v_0} con secuencia real $[2t+1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; r]$.

Caso 1.2. Existen números enteros i, j con $0 \le i \le 2t$ y $0 \le j \le 2t$, tales que $h_i \in \{2,4\}$ y $h_j \notin \{2,4\}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que existen un entero n mayor o igual a cero tal que para $n+1 \le i \le 2t$ y $0 \le j \le n$ se tiene que $h_i \in \{2,4\}$ y $h_j \notin \{2,4\}$.

$$[2t+1; \underbrace{h_0, \ldots, h_n}_{h_j \notin \{2,4\}}, \underbrace{h_{n+1}, \ldots, h_{2t}}_{h_i \in \{2,4\}}; r].$$

La suposición de la existencia del entero n se puede hacer debido a que podemos permutar a los números $h_0, h_1, \ldots, h_{2t}$, de tal forma que los primeros $n+1$ elementos sean distintos de dos y cuatro, y que los elementos posteriores sean dos o cuatro, y finalmente en caso de ser necesario podemos volver a reetiquetar a dichos elementos de la forma deseada.

Procediendo de manera análoga como en el caso (1.1), a partir del torneo R_{2t+1} podemos obtener un torneo $T_{v_{n+1}}$ con secuencia real

$$[2t+1; 0, 0, \ldots, 0, h_{n+1}, \ldots, h_{2t}; 0].$$

Después, partiendo del torneo $T_{v_{n+1}}$ para cada j en $\{0, 1, \ldots, n\}$ podemos ir agregando h_j herederos a v_j en caso de que h_j sea distinto de cero, mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo T' con secuencia real $[2t+1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[2t+1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; r]$.

Caso 1.3. Para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t\}$ se tiene que $h_i \notin \{2,4\}$.

Notemos nuevamente que a partir del torneo R_{2t+1} para cada i en $\{0, \ldots, 2t\}$ podemos ir agregando h_i herederos a v_i en caso de que h_i sea distinto de cero, mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo T' con secuencia real $[2t + 1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; 0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[2t + 1; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; r]$.

Caso 2. k es un número par.
Supongamos que $k = 2t + 2$, con $t \geq 2$. Construyamos un torneo R'_k como sigue; empecemos con el torneo R_{2t+1} y agreguemos un nuevo vértice v_{2t+1} junto con las flechas: (v_{2t}, v_{2t+1}), (v_t, v_{2t+1}), (v_{2t+1}, v_i) para $i \in \{0, 1, \ldots, 2t\} - \{t, 2t\}$. En la figura 3.7 se puede observar cómo se relaciona el vértice v_{2t+1} con los vértices del torneo R_{2t+1}.

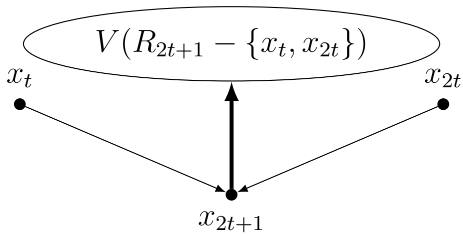

Figura 3.7. Algunas relaciones de dominación en R'_{2t+2}.

Observemos que por construcción de R'_k: $\delta^+_{R'_k}(v_{2t+1}) = 2t - 1$, $\delta^+_{R'_k}(v_i) = t$ para $i \neq t$, $i \neq 2t$, $i \neq 2t + 1$ y $\delta^+_{R'_k}(v_i) = t + 1$ para $i \in \{2, 2t\}$. Como $t \geq 2$ se tiene que $2t - 1 \geq t + 1 \geq t$, por lo cual v_{2t+1} es de exgrado máximo en R'_k, entonces v_{2t+1} es un rey de R'_k por el lema 2.1.2. Además, para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t\}$ el vértice v_i es un rey de R_{2t+1}, $\{v_t, v_{2t}\} \to v_{2t+1}$, $v_i \to v_t \to v_{2t+1}$ o $v_i \to v_{2t} \to v_{2t+1}$ para $i \in \{0, 1, \ldots, 2t\} - \{t, 2t\}$, entonces para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t + 1\}$ el vértice v_i es un rey de R'_k, es decir, cualquier vértice de R'_k es un rey, lo cual implica que la secuencia real de R'_k es $[2t + 2; 0, 0, \ldots, 0; 0]$.

Por ejemplo para obtener el torneo R'_6 (ver figura 3.8), empezamos con el torneo R_5 (ver figura 3.6), después agregamos un nuevo vértice v_5, junto con las flechas (v_4, v_5), (v_2, v_5), (v_5, v_0), (v_5, v_1), (v_5, v_3).

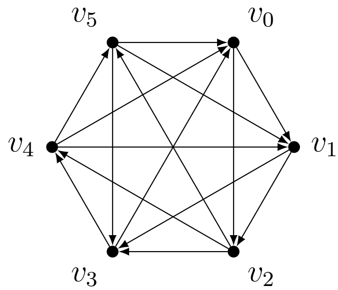

Figura 3.8. El torneo R_6'.

Con el fin de obtener un torneo con secuencia real $[2t+2; h_0, h_1, \ldots, h_{2t}; r]$, primero para cada l en $\{0, 1, \ldots, 2t+1\}$ agregaremos h_l herederos a v_l. Para ello consideremos los siguientes casos:

Caso 2.1. Para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t+1\}$ se tiene que $h_i \in \{2, 4\}$. Observemos que v_{2t+1} es un rey de $R_k' - \{v_0\}$, ya que $v_{2t+1} \to v_i$ para $i \neq t$, $i \neq 2t$, $i \neq 2t+1$, y por ser $t \geq 2$, $v_{2t+1} \to v_1 \to v_t$, $v_{2t+1} \to v_{t+1} \to v_{2t}$. Además, $v_{2t+1} \to v_0$, y v_{2t+1} no tiene herederos en R_k', entonces por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9 dependiendo si $h_{2t+1} = 2$ o $h_{2t+1} = 4$, podemos obtener un torneo $T_{v_{2t+1}}$ a partir del torneo R_k' tal que: los reyes de $T_{v_{2t+1}}$ y R_k' son exactamente los mismos, v_{2t+1} tiene h_{2t+1} herederos en $T_{v_{2t+1}}$, y para cada $p \in \{0, \ldots, 2t\}$ el rey v_p tiene cero herederos en $T_{v_{2t+1}}$. Así la secuencia real de $T_{v_{2t+1}}$ es $[2t+2; 0, 0, \ldots, 0, h_{2t+1}; 0]$. Ahora por la observación (3) o la observación (4) dependiendo si $h_{2t+1} = 2$ o $h_{2t+1} = 4$, existe un vértice u_{2t+1} heredero de v_{2t+1} en $T_{v_{2t+1}}$ con la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{v_{2t+1}}}(v_{2t+1}) \cap V(T_{v_{2t+1}} - V'_{2t+1}) = N^+_{T_{v_{2t+1}}}(u_{2t+1}) \cap V(T_{v_{2t+1}} - V'_{2t+1})$$

donde $V'_{2t+1} = \{u \mid u \text{ es un heredero de } v_{2t+1} \text{ en } T_{v_{2t+1}}\} \cup \{v_{2t+1}\}$.

Por otra parte, $v_{2t} \to v_{2t+1}$, entonces v_{2t} es un rey de $T_{v_{2t+1}} - \{v_{2t+1}\}$ por el lema 3.2.10 y como v_{2t} no tiene herederos en $T_{v_{2t+1}}$ entonces por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_{2t} = 2$ o $h_{2t} = 4$, podemos obtener un torneo $T_{v_{2t}}$ a partir del torneo $T_{v_{2t+1}}$ tal que: los reyes de $T_{v_{2t}}$ y $T_{v_{2t+1}}$ son exactamente los mismos, para cada l en $\{2t, 2t+1\}$ el rey v_l tiene h_l herederos en $T_{v_{2t}}$, y para cada p en $\{0,\ldots,2t-1\}$ el rey v_p tiene cero herederos en $T_{v_{2t}}$. Así la secuencia real de $T_{v_{2t}}$ es $[2t+2;0,0,\ldots,0,h_{2t},h_{2t+1};0]$. Nuevamente por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_{2t}=2$ o $h_{2t}=4$, existe un vértice u_{2t} heredero de v_{2t} en $T_{v_{2t}}$ con la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{v_{2t}}}(v_{2t}) \cap V(T_{v_{2t}} - V'_{2t}) = N^+_{T_{v_{2t}}}(u_{2t}) \cap V(T_{v_{2t}} - V'_{2t})$$

donde $V'_{2t} = \{u \mid u \text{ es un heredero de } v_{2t} \text{ en } T_{v_{2t}}\} \cup \{v_{2t}\}$.

Como $v_{2t-1} \to v_{2t}$, entonces v_{2t-1} es un rey de $T_{v_{2t}} - \{v_{2t}\}$ por el lema 3.2.10 y como v_{2t-1} no tiene herederos en $T_{v_{2t}}$ entonces por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_{2t-1}=2$ o $h_{2t-1}=4$, podemos obtener un torneo $T_{v_{2t-1}}$ a partir del torneo $T_{v_{2t}}$ tal que: los reyes de $T_{v_{2t-1}}$ y $T_{v_{2t}}$ son exactamente los mismos, para cada l en $\{2t-1,2t,2t+1\}$ el rey v_l tiene h_l herederos en $T_{v_{2t-1}}$, y para cada p en $\{0,\ldots,2t-2\}$ el rey v_p tiene cero herederos en $T_{v_{2t-1}}$. Así la secuencia real de $T_{v_{2t-1}}$ es $[2t+2;0,0,\ldots,0,h_{2t-1},h_{2t},h_{2t+1};0]$. Nuevamente por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_{2t-1}=2$ o $h_{2t-1}=4$, existe un vértice u_{2t-1} heredero de v_{2t-1} en $T_{v_{2t-1}}$ con la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{v_{2t-1}}}(v_{2t-1}) \cap V(T_{v_{2t-1}} - V'_{2t-1}) = N^+_{T_{v_{2t-1}}}(u_{2t-1}) \cap V(T_{v_{2t-1}} - V'_{2t-1})$$

donde $V'_{2t-1} = \{u \mid u \text{ es un heredero de } v_{2t-1} \text{ en } T_{v_{2t-1}}\} \cup \{v_{2t-1}\}$.

Aplicando el mismo razonamiento que se realizó para obtener $T_{v_{2t-1}}$ a partir del torneo $T_{v_{2t}}$ y teniendo en cuenta que $v_i \to v_{i+1}$ (usando en el subíndice adición mod $2t+2$), podemos ir aplicando el lema 3.2.10 seguido de el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9 sucesivamente hasta obtener un torneo T_{v_0} con secuencia real $[2t+2;h_0,h_1,\ldots,h_{2t+1};0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T'_{v_0} con secuencia real $[2t+1;h_0,h_1,\ldots,h_{2t+1};r]$.

Caso 2.2. Existen números enteros i y j con $0 \leq i \leq 2t+1$ y $0 \leq j \leq 2t+1$, tales que $h_i \in \{2,4\}$ y $h_j \notin \{2,4\}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que existen un entero n mayor o igual a cero tal que para $n+1 \leq i \leq 2t+1$ y $0 \leq j \leq n$ se tiene que $h_i \in \{2,4\}$ y $h_j \notin \{2,4\}$. Procediendo de manera análoga como en el caso (2.1), a partir del torneo R'_k podemos obtener un torneo $T_{v_{n+1}}$ con secuencia real $[2t+2;0,0,\ldots,0,h_{n+1},\ldots,h_{2t+1};0]$. Después partiendo del torneo $T_{v_{n+1}}$, para cada j en $\{0,1,\ldots,n\}$ podemos ir agregando h_l herederos a v_j en caso

de que h_j sea distinto de cero, mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo T' con secuencia real $[2t+2; h_0, h_1, \ldots, h_{2t+1}; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[2t+2; h_0, h_1, \ldots, h_{2t+1}; r]$.

Caso 2.3. Para cada i en $\{0, 1, \ldots, 2t+1\}$ se tiene que $h_i \notin \{2, 4\}$. Notemos nuevamente que a partir del torneo R'_k para cada i en $\{0, \ldots, 2t+1\}$ podemos ir agregando h_i herederos a v_i en caso de que h_i sea distinto de cero, mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo T' con secuencia real $[2t+2; h_0, h_1, \ldots, h_{2t+1}; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[2t+2; h_0, h_1, \ldots, h_{2t+1}; r]$.

Por lo tanto de los casos anteriores, concluimos que si k es un entero mayor o igual a cinco y $h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}, r$ son enteros mayores o iguales a cero, entonces existe un torneo con secuencia real $[k; h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}; r]$.

■

Observación 5. En el lema anterior hicimos notar que R_{2t+1} es un torneo en el cual todos sus vértices son reyes, es decir, para todo entero $t \geq 2$ el torneo R_{2t+1} es un $(2t+1, 2t+1)$-torneo. Además contiene un $(2t+1)$-ciclo porque

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_{2t} \to v_0.$$

Análogamente, para todo entero $t \geq 2$ el torneo R_{2t+2} es un $(2t+2, 2t+2)$-torneo, y contiene un $(2t+2)$-ciclo porque

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_{2t+1} \to v_0.$$

Por otro lado el torneo $C_3 = (V(C_3), F(C_3))$ con

$$V(C_3) = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ y } F(C_3) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)\}$$

es un $(3, 3)$-torneo y contiene un 3-ciclo. Por lo tanto para cualquier entero $n \geq 3$ con $n \neq 4$, existe un (n, n)-torneo que contiene un n-ciclo.

3.3. Tres y cuatro reyes

En esta sección determinaremos todas las posibles secuencias para torneos con k reyes, para $k = 3$ y $k = 4$. Empecemos con el caso $k = 3$. Sabemos que si T es un torneo con tres reyes, éstos forman un 3-ciclo por el lema 2.1.5, los nombraremos x_1, x_2, x_3 con flechas (x_1, x_2), (x_2, x_3) y (x_3, x_1).

Lema 3.3.1. *Si h_1, h_2, h_3 y r son enteros no negativos tales que al menos un h_i es distinto de cero, dos y cuatro, entonces existe un torneo con secuencia real* $[3; h_1, h_2, h_3; r]$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que h_1 es distinto de cero, dos y cuatro. Consideremos el torneo C_3 con $V(C_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$, entonces cualquier vértice de C_3 es un rey, por lo cual la secuencia real de C_3 es $[3; 0, 0, 0; 0]$. Por el lema 2.2.7 existe un (h_1, h_1)-torneo T_1. Definimos un nuevo torneo T_{x_1} a partir de los torneos C_3 y T_1, donde:

$$V(T_{x_1}) = V(C_3) \cup V(T_1),$$
$$F(T_{x_1}) = F(C_3) \cup F(T_1) \cup A \cup B,$$

con

$$A = \{(x_1, v) \mid v \in V(T_1)\} \cup \{(x_3, v) \mid v \in V(T_1)\} \text{ y}$$
$$B = \{(v, x_2) \mid v \in V(T_1)\}.$$

La siguiente figura muestra como se relacionan los vértices x_1, x_2 y x_3 con los demás vértices de T_{x_1}.

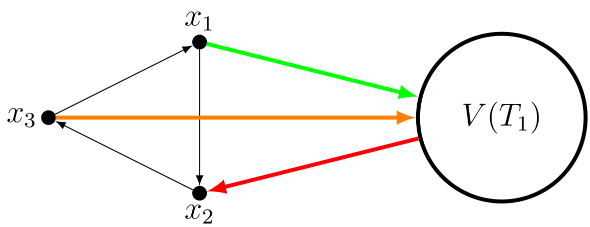

Figura 3.9. Algunas relaciones de dominación en T_{x_1}.

Por el lema 3.2.5: T_{x_1} tiene los mismos reyes que C_3, los herederos de x_1 en T_{x_1} son los reyes de T_1 y si y es un rey de C_3 con $y \neq x_1$, entonces y tiene la misma cantidad de herederos tanto en C_3 como en T_{x_1}, en consecuencia x_1 tiene h_1 herederos en T_{x_1} y x_2, x_3 no tienen herederos en T_{x_1}, así la secuencia real de T_{x_1} es $[3; h_1, 0, 0; 0]$. Debido a los diferentes valores que pueden tomar h_2 y h_3 consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Para cada i en $\{2, 3\}$ se tiene que $h_i \in \{2, 4\}$.
Observemos que $x_3 \to V(T_1) \to x_2$, así x_3 es un rey de $T_{x_1} - \{x_1\}$, además $x_3 \to x_1$ y x_3 no tiene herederos en T_{x_1}, entonces por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_3 = 2$ o $h_3 = 4$, podemos obtener un torneo T_{x_3} a partir del torneo T_{x_1} tal que: los reyes de T_{x_3} y T_{x_1} son exactamente los mismos, cada para i en $\{1, 3\}$ el rey x_i tiene h_i herederos en T_{x_3} y la secuencia real de T_{x_3} es $[3; h_1, 0, h_3; 0]$. Ahora por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_3 = 2$ o $h_3 = 4$, existe un vértice u_3 de T_{x_3} que tiene la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{x_3}}(x_3) \cap V(T_{x_3} - V'_3) = N^+_{T_{x_3}}(u_3) \cap V(T_{x_3} - V'_3)$$

donde u_3 es un heredero de x_3 en T_{x_3} y

$$V'_3 = \{u \mid u \text{ es un heredero de } x_3 \text{ en } T_{x_3}\} \cup \{x_3\}.$$

Por otra parte $x_2 \to x_3$, entonces por el lema 3.2.10 x_2 es un rey de $T_{x_3} - \{x_3\}$. Como x_2 no tiene herederos en T_{x_3}, por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_2 = 2$ o $h_2 = 4$, podemos obtener un torneo T_{x_2} a partir del torneo T_{x_3} tal que: los reyes de T_{x_2} y T_{x_3} son exactamente los mismos, para cada para i en $\{1, 2, 3\}$ el rey x_l tiene h_l herederos en T_{x_2} y la secuencia real de T_{x_2} es $[3; h_1, h_2, h_3; 0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$.

Caso 2. Existen números enteros i y j con $2 \leq i \leq 3$ y $2 \leq j \leq 3$, tales que $h_i \in \{2, 4\}$ y $h_j \notin \{2, 4\}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que $h_3 \in \{2, 4\}$ y $h_2 \notin \{2, 4\}$. Procediendo de manera análoga como en el caso (1), a partir del torneo T_{x_1} podemos obtener un torneo T_{x_3} con secuencia real $[3; h_1, 0, h_3; 0]$. Después, partiendo del torneo T_{x_3} podemos agregar h_2 herederos a x_2 en caso de que h_2

sea distinto de cero, mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo T' con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$.

Caso 3. Para cada i en $\{2, 3\}$ se tiene que $h_i \notin \{2, 4\}$.
Notemos que a partir del torneo T_{x_1} para cada i en $\{2, 3\}$ podemos ir agregando h_i herederos a v_i en caso de que h_i sea distinto de cero, mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo T' con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$.

De los casos anteriores concluimos que si h_1, h_2, h_3 y r son enteros no negativos tales que al menos un h_i es distinto de cero, dos y cuatro, entonces existe un torneo con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$.

■

Para ejemplificar el lema anterior, construyamos un torneo con secuencia real $[3; 1, 2, 2; 0]$. Empecemos considerando el torneo C_3 con conjunto de vértices $\{x_1, x_2, x_3\}$ y con flechas (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), así cualquier vértice de C_3 es un rey, por lo cual la secuencia real de C_3 es $[3; 0, 0, 0; 0]$. También tomemos T_1 un torneo con $V(T_1) = \{y_1\}$ y $F(T_1) = \varnothing$.

Nuestro primer paso consiste en agregar un heredero a x_1. Definamos un nuevo torneo T_{x_1} a partir de los torneos C_3 y T_1, de la siguiente manera:

$V(T_{x_1}) = V(C_3) \cup V(T_1)$ y
$F(T_{x_1}) = F(C_3) \cup F(T_1) \cup \{(x_1, y_1), (x_3, y_1), (y_1, x_2)\}$.

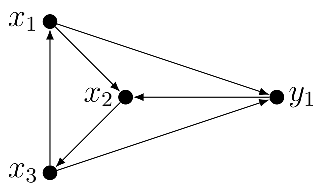

Figura 3.10. Eltorneo T_{x_1}.

El torneo T_{x_1} se muestra en la figura 3.10. Por el lema 3.2.5: x_1, x_2 y x_3 son los reyes de T_{x_1}, y_1 es un heredero de x_1, y x_2, x_3 no tienen herederos en T_{x_1}. En consecuencia la secuencia real de T_{x_1} es $[3; 1, 0, 0; 0]$.

Ahora notemos que x_3 no tiene herederos en T_{x_1}, $x_3 \to x_1$ y x_3 es un rey de $T_{x_1} - \{x_1\}$. Tomemos u_1 y u_2 dos nuevos vértices, definamos un nuevo torneo T_{x_3} a partir del torneo T_{x_1} de la siguiente manera:

$V(T_{x_3}) = V(T_{x_1}) \cup \{u_1, u_2\}$ y
$F(T_{x_1}) = F(T_{x_1}) \cup \{(u_2, x_1), (x_1, u_1), (u_1, u_2)\} \cup \{(x_3, u_i) \mid i \in \{1, 2\}\} \cup A \cup B$,
donde:
$A = \{(w, u_i) \mid w \in V(T) - \{x_1, x_3\},\ (w, x_3) \in F(T_{x_1}),\ i \in \{1, 2\}\}$ y
$B = \{(u_i, w) \mid w \in V(T) - \{x_1, x_3\},\ (x_3, w) \in F(T_{x_1}),\ i \in \{1, 2\}\}$.

Por el lema 3.2.8: x_1, x_2 y x_3 son los reyes de T_{x_3}, y_1 es un heredero de x_1, u_1 y u_2 son los herederos de x_3, y x_2 no tiene herederos. En consecuencia la secuencia real de T_{x_3} es $[3; 1, 2, 0; 0]$ (ver figura 3.11).

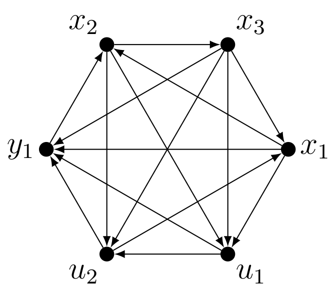

Figura 3.11. El torneo T_{x_3}.

Observemos ahora que x_2 no tiene herederos en T_{x_3}, $x_2 \to x_3$ y x_2 es un rey de $T_{x_3} - \{x_3\}$. Tomemos v_1 y v_2 dos nuevos vértices, definamos un nuevo torneo T_{x_2} a partir del torneo T_{x_3} de la siguiente manera:

$V(T_{x_2}) = V(T_{x_3}) \cup \{v_1, v_2\}$ y
$F(T_{x_2}) = F(T_{x_3}) \cup \{(v_2, x_3), (x_3, v_1), (v_1, v_2)\} \cup \{(x_2, v_i) \mid i \in \{1, 2\}\} \cup A_1 \cup B_1$,
donde:
$A_1 = \{(w, v_i) \mid w \in V(T) - \{x_2, x_3\},\ (w, x_2) \in F(T_{x_3}),\ i \in \{1, 2\}\}$ y
$B_1 = \{(v_i, w) \mid w \in V(T) - \{x_2, x_3\},\ (x_2, w) \in F(T_{x_3}),\ i \in \{1, 2\}\}$.

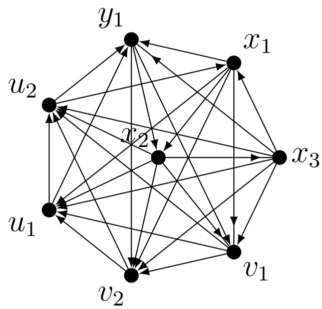

Figura 3.12. El torneo T_{x_2}.

Por el lema 3.2.8: x_1, x_2 y x_3 son los reyes de T_{x_2}, y_1 es un heredero de x_1, u_1 y u_2 son los herederos de x_3, y v_1, v_2 son los herederos de x_2. En consecuencia la secuencia real de T_{x_2} es $[3; 1, 2, 2; 0]$ (ver figura 3.12).

Para determinar todas las secuencias reales posibles para torneos con tres reyes, sólo nos falta considerar los casos donde h_i es 0, 2 o 4. Por el lema 3.2.1 sabemos que existe un torneo con secuencia real $[3; 0, 0, 0; 0]$, luego podemos añadir r vértices que no sean reyes ni herederos vía lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 0, 0, 0; r]$. De lo anterior concluimos que si $r \geq 0$, entonces existe un torneo con secuencia real $[3; 0, 0, 0; r]$. Así, el caso donde cada h_i es cero queda resuelto, por lo cual podemos considerar al menos un h_i distinto de cero.

Lema 3.3.2. *Si* $h_1 = 2$ *o* $h_1 = 4$, *entonces no existe un torneo con secuencia real* $[3; h_1, 0, 0; 0]$.

Demostración. Procedamos por contradicción, supongamos que existe un torneo T con secuencia real $[3; h_1, 0, 0; 0]$ con $h_1 = 2$ o $h_1 = 4$. Sean x_1, x_2, x_3 los tres reyes de T y $\gamma = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ el 3-ciclo que forman dichos reyes. Asumamos que x_1 tiene h_1 herederos: $v_1, v_2, \ldots, v_{h_1}$. Observemos que $T' = T[\{v_1, v_2, \ldots, v_{h_1}\}]$ es un torneo con h_1 vértices.

Notemos que para cualquier heredero v_i de x_1, $x_1 \to v_i$ y $x_3 \to v_i$, ya que de lo contrario $v_i \to x_1$ o $v_i \to x_3 \to x_1$, lo cual no puede pasar porque v_i es un heredero de x_1. Por ser v_i un rey de $T - \{x_1\}$, v_i alcanza en uno o dos pasos a x_3, pero $x_3 \to v_i$, entonces v_i debe alcanzar a x_3 en dos pasos en

$T - \{x_1\}$, sin embargo $N_T^-(x_3) = \{x_2\}$, entonces $v_i \to x_2 \to x_3$. En resumen $\{x_1, x_3\} \to v_i$, $v_i \to x_2$ para cualquier heredero v_i de x_1.

Ahora tomemos v_i y v_j dos herederos de x_1, fijos pero arbitrarios y no necesariamente distintos. Sabemos que existe una (v_i, v_j)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en $T - \{x_1\}$. Observemos que $V(W) \subseteq V(T')$, ya que de lo contrario existiría $x_k \in \{x_2, x_3\}$ tal que $v_i \to x_k \to v_j$, y esto último no puede pasar porque para cualquier heredero v_l de x_1 se tiene que $\{x_1, x_3\} \to v_l$ y $v_l \to x_2$. Así $V(W) \subseteq V(T')$, de ahí que T' sea un (h_1, h_1) torneo, lo cual es una contradicción porque por el lema 2.2.7 no existe un $(2,2)$-torneo ni tampoco un $(4,4)$-torneo.

Por lo tanto no existe un torneo con secuencia real $[3; 2, 0, 0; 0]$ o $[3; 4, 0, 0; 0]$. ■

Lema 3.3.3. *Si* $h_1 = 2$ *o* $h_1 = 4$ *y* r *es un entero positivo, entonces existe un torneo con secuencia real* $[3; h_1, 0, 0; r]$.

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $h_1 = 2$.

Construyamos un torneo T como sigue: primero consideramos tres vértices x_1, x_2, x_3 donde $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$, después agregamos los vértices u_1, u_2, v junto con las flechas: (x_1, u_i), (u_i, x_2), (x_3, u_i), (x_i, v), (u_1, u_2), (u_2, v), (v, u_1), $i \in \{1, 2\}$. Este torneo es ilustrado en la figura 3.13.

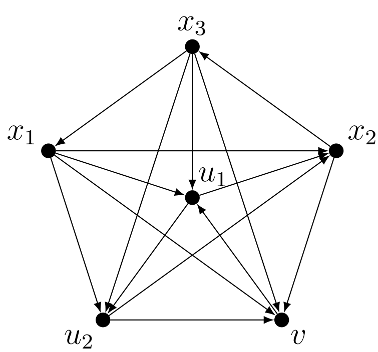

Figura 3.13. Un torneo con secuencia real $[3; 2, 0, 0; 1]$.

Observemos que $\gamma = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ es un 3-ciclo, $x_2 \to x_3 \to \{u_1, u_2, v\}$ y $\{x_1, x_3\} \to \{u_1, u_2, v\}$, entonces para cada j en $\{1, 2, 3\}$ se tiene que x_j es un rey de T. Además, por construcción de T, $N^+(u_1) = \{u_2, x_2\}$, $N^+(u_2)$ es igual al conjunto $\{v, x_2\}$, $N^+(v) = \{u_1\}$ y $N^+(x_1) = \{u_1, u_2, v, x_2\}$. Así se tiene que $N^+(u_1) \subset N^+(x_1)$, $N^+(u_2) \subset N^+(x_1)$ y $N^+(v) \subset N^+(x_1)$, entonces por el corolario 2.1.8 para cualquier vértice w en $\{u_1, u_2, v\}$ se tiene que w no alcanza a x_1 en dos o menos pasos. Así u_1, u_2 y v no son reyes de T.

Veamos que u_1 y u_2 son herederos de x_1. Por construcción del torneo T: $u_1 \to u_2 \to v$, $u_1 \to x_2 \to x_3$, $u_2 \to v \to u_1$ y $u_2 \to x_2 \to x_3$, en consecuencia u_1 y u_2 son reyes de $T - \{x_1\}$. Además, u_i no puede alcanzar a x_1 en dos o menos pasos, entonces u_1 y u_2 son herederos de x_1.

Por otro lado, $N^+(v) = \{u_1\}$ y $x_3 \to u_1$, entonces v no puede alcanzar a x_3 en dos o menos pasos, de esta forma, v no puede ser un heredero de x_1, pero también no puede ser heredero de ningún otro rey distinto de x_1, ya que v no alcanza a x_1 en dos o menos pasos, entonces v no es un heredero ni tampoco un rey.

De lo anterior concluimos que la secuencia real de T es $[3; 2, 0, 0; 1]$. En caso de que r sea distinto de uno, podemos usar el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 2, 0, 0; r]$.

Caso 2. $h_1 = 4$.
Partimos del torneo T como en el caso (1), sabemos que T tiene por secuencia real $[3; 2, 0, 0; 1]$. Ahora usando el lema 3.2.7 podemos obtener un torneo T' con secuencia real $[3; 4, 0, 0; 1]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de uno, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 4, 0, 0; r]$.

Por lo tanto de los casos (1) y (2) concluimos que si $h_1 = 2$ o $h_1 = 4$ y r es un entero positivo, entonces existe un torneo con secuencia real $[3; h_1, 0, 0; r]$. ■

Lema 3.3.4. *Si* $\{h_1, h_2\} \subseteq \{2, 4\}$ *y* r *es un entero no negativo, entonces existe un torneo con secuencia real* $[3; h_1, h_2, 0; r]$.

Demostración. Debido a los diferentes valores que puede tomar h_i consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $h_1 = h_2 = 2$.

Construyamos un torneo T con siete vértices como sigue: primero consideramos tres vértices x_1, x_2, x_3 donde $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$, después agregamos los vértices u_1, u_2, v_1, v_2 junto con las flechas: (x_1, u_i), (x_1, v_i), (x_2, u_1), (u_2, x_2), (x_2, v_i), (x_3, u_i), (v_i, x_3), (u_1, u_2), (v_1, v_2), (u_1, v_1), (v_2, u_1), (u_2, v_i), $i = 1, 2$. Este torneo es ilustrado en la figura 3.14.

Observemos que por construcción de T, para cada i en $\{1, 2, 3\}$, j en $\{1, 2\}$ y k en $\{1, 2\}$ se tiene que x_i alcanza a u_j y a v_k en uno o dos pasos, y como $\gamma = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ es un 3-ciclo, entonces cada x_i es un rey de T.

Por otro lado, $N^+(u_i) \subset N^+(x_1)$ y $N^+(v_i) \subset N^+(x_2)$. Así, por el corolario 2.1.8 u_i no alcanza a x_1 en dos o menos pasos y v_i no alcanza a x_2 en dos o menos pasos, lo cual implica que ni u_i ni v_i son reyes de T, pero u_i es un rey de $T - \{x_1\}$ y v_i es un rey de $T - \{x_2\}$, en consecuencia para cada $i \in \{1, 2\}$ se tiene que u_i es un heredero de x_1 y v_i es un heredero de x_2.

Observemos que por el razonamiento anterior, la secuencia real de T es $[3; 2, 2, 0; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T' con secuencia real $[3; 2, 2, 0; r]$.

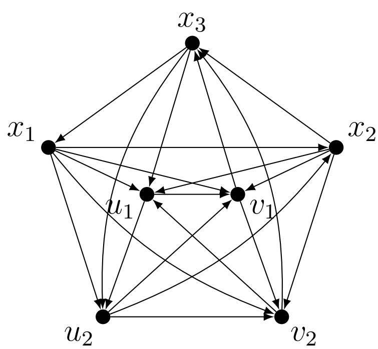

Figura 3.14. Un torneo con secuencia real $[3; 2, 2, 0; 0]$.

Caso 2. $h_1 \neq h_2$.
Debido a que la secuencia real la podemos permutar libremente, podemos suponer que $h_1 = 2$ y $h_2 = 4$. Partimos del torneo T obtenido en el caso (1), luego usando el lema 3.2.7 podemos obtener un torneo T' con secuencia real $[3; 2, 4, 0; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo T'' con secuencia real $[3; 2, 4, 0; r]$.

Caso 3. $h_1 = h_2 = 4$.
Partimos del torneo T' obtenido en el caso (2), después usando el lema 3.2.7 podemos obtener un torneo T'' con secuencia real $[3; 4, 4, 0; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 4, 4, 0; r]$.

■

Teorema 3.3.5. *Si h_1, h_2, h_3 y r son enteros no negativos, entonces existe un torneo con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$, con excepción de $[3; 2, 0, 0; 0]$ y $[3; 4, 0, 0; 0]$.*

Demostración. Observemos que por el lema 3.3.2 no existe un torneo con secuencia real $[3; 2, 0, 0; 0]$ o $[3; 4, 0, 0; 0]$. Tomemos h_1, h_2, h_3 y r enteros no negativos. Si al menos un h_i es distinto de cero, dos y cuatro, entonces por el lema 3.3.1 existe un torneo con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$.

Supongamos ahora que $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \{0, 2, 4\}$. Sabemos por el lema 3.2.1 que existe un torneo con secuencia real $[3; 0, 0, 0; 0]$, luego podemos añadir r vértices que no sean reyes ni herederos vía lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 0, 0, 0; r]$. De lo anterior concluimos que si $r \geq 0$, entonces existe un torneo con secuencia real $[3; 0, 0, 0; r]$. Así, el caso donde cada h_i es cero queda resuelto, por lo cual podemos considerar al menos un h_i distinto de cero.

Los casos donde $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \{0, 2, 4\}$ y exactamente uno o dos elementos de $\{h_1, h_2, h_3\}$ son distintos de cero quedan resueltos por los lemas 3.3.3 y 3.3.4; que hablan sobre la existencia de un torneo con secuencia real $[3; h_1, 0, 0; r]$ si $h_1 \in \{2, 4\}$ y de la existencia de un torneo con secuencia real $[3; h_1, h_2, 0; r]$ si $h_i \in \{2, 4\}$ para $i \in \{1, 2\}$, respectivamente. Por lo tanto para probar el teorema solo resta considerar $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \{2, 4\}$.

Caso 1. $h_1 = h_2 = 2$ y $h_3 \in \{2, 4\}$.
Consideremos el torneo T construido en el lema anterior. Sabemos que x_1, x_2 y x_3 son los reyes de T, x_3 no tiene herederos, y la secuencia real de T es $[3; 2, 2, 0; 0]$. Además, $x_3 \to u_2 \to \{v_1, x_2, x_3\}$ y $x_3 \to u_1$, por lo cual x_3 es un rey de $T - \{x_1\}$, entonces por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9

dependiendo si $h_3 = 2$ o $h_3 = 4$, podemos obtener un torneo T_1 con secuencia real $[3; 2, 2, h_3; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 2, 2, h_3; r]$.

Caso 2. $h_1 \neq h_2$ y $h_3 \in \{2, 4\}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que $h_1 = 2$ y $h_2 = 4$. Partimos del torneo T_1 obtenido en el caso (1), que tiene por secuencia real $[3; 2, 2, h_3; 0]$, después usando el lema 3.2.7 podemos obtener un torneo T_2 con secuencia real $[3; 2, 4, h_3; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 2, 4, h_3; r]$.

Caso 3. $h_1 = h_2 = 4$ y $h_3 \in \{2, 4\}$.
Partimos del torneo T_2 obtenido en el caso (2). Después, usando el lema 3.2.7 podemos obtener un torneo T_3 con secuencia real $[3; 4, 4, h_3; 0]$. Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[3; 2, 4, h_3; r]$.

■

Nuestro caso final es para torneos con cuatro reyes. Sabemos que no existe un torneo con exactamente cuatro vértices y cuatro reyes por el lema 2.2.7, lo cual implica que si un torneo tiene exactamente cuatro reyes, entonces debe tener al menos un vértice extra que no sea un rey. Probaremos que dicho torneo debe tener al menos un heredero.

Lema 3.3.6. *Para cualquier entero $r \geq 0$, no existe un torneo con secuencia real $[4; 0, 0, 0, 0; r]$.*

Demostración. Sabemos que no existe un torneo con exactamente cuatro vértices y cuatro reyes por el lema 2.2.7, es decir, no existe un torneo con secuencia real $[4; 0, 0, 0, 0; 0]$.

Ahora consideremos $r > 0$, veamos que no existe un torneo con secuencia real $[4; 0, 0, 0, 0; r]$. Procedamos por contradicción, supongamos que existe un torneo T con secuencia real $[4; 0, 0, 0, 0; r']$ para algún entero r' mayor que cero. Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 los cuatro reyes de T y consideremos el torneo inducido por los cuatro reyes $T' = T[\{x_1, x_2, x_3, x_4\}]$.

Caso 1. T' tiene un vértice de ingrado cero.

Supongamos sin pérdida de generalidad que x_1 es un vértice de ingrado cero, entonces $\delta^+_{T'}(x_1) = 3$, pero por ser x_2 un rey T se tiene que $N^-_T(x_1)$ es distinto del vacío, entonces por el lema 2.1.4 existe v en $N^-_T(x_1)$ tal que v es un rey de T. Así, v no es un vértice de T' porque $v \to x_1$ y $\delta^+_{T'}(x_1) = 3$, lo cual es una contradicción ya que T solo tiene cuatro reyes.

Caso 2. T' no tiene vértices de ingrado cero.
Por el lema 2.1.3 T' tiene al menos tres reyes, aún más, T' tiene exactamente tres reyes ya que no existe un (4,4)-torneo por el lema 2.2.4. Sean v el único vértice de T' que no es un rey de T', y w un vértice de T' tal que no existe una (v, w)-trayectoria de longitud menor o igual a dos en T'. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v = x_1$ y $w = x_4$, y que $\gamma = (x_2, x_3, x_4, x_2)$ es el 3-ciclo que forman los tres reyes de T'. Así, $\{x_3, x_4\} \to x_1$, ya que de lo contrario x_1 alcanzaría a x_4 en dos o menos pasos en T'.

Como $x_4 \to x_1$ y x_1 es un rey de T, existe una (x_1, x_4)-trayectoria W de longitud dos en T, es decir, $W = (x_1, y, x_4)$ para algún vértice y en T. Dado que x_1 no alcanza a x_4 en dos o menos pasos en T', y no es un vértice de T', así $y \in N^-_{T-\{x_3\}}(x_4)$, entonces por el lema 2.1.4 existe un vértice z de $T - \{x_3\}$ tal que z es un rey de $T - \{x_3\}$ y $z \to x_4$. Como $N^-_{T'}(x_4) = \{x_3\}$ y $z \in N^-_T(x_4)$ se tiene que $z \notin V(T')$, de esta manera z no es un rey de T, sin embargo z es un rey de $T - \{x_3\}$, entonces z es un heredero de x_3 en T, y esto último es una contradicción ya que la secuencia real de T es $[4; 0, 0, 0, 0; r']$.

Por lo tanto, para cualquier entero r con $r \geq 0$ no existe un torneo con secuencia real $[4; 0, 0, 0, 0; r]$.

■

Teorema 3.3.7. *Si m es un entero con $m > 0$, $m \neq 2$ y $m \neq 4$, entonces existe un torneo con secuencia real* $[4; m, 0, 0, 0; 0]$.

Demostración. Sean T_1 un torneo de cuatro vértices y_1, y_2, y_3, y_4 y flechas (y_1, y_4), (y_4, y_2), (y_3, y_2), (y_4, y_3), (y_2, y_1), (y_1, y_3) (ver figura 3.15). Consideremos T_2 un (m, m) torneo.

Construyamos un nuevo torneo T como sigue: empecemos con $T_1 \cup T_2$, después para cualquier vértice u de T_2 agreguemos las flechas (u, y_4), (y_i, u) para $i \in \{1, 2, 3\}$ (ver figura 3.16).

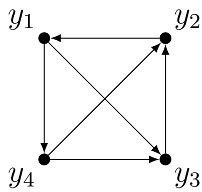

Figura 3.15. El torneo T_1.

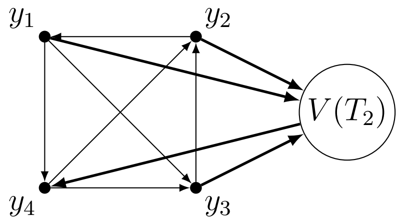

Figura 3.16. Algunas relaciones de dominación en el torneo T.

Observemos que para cada i en $\{1, 2, 3, 4\}$ el vértice y_i es un rey de T, ya que y_1 y y_4 son reyes de T_1, $y_1 \to V(T_2)$ y y_4 alcanza a cualquier vértice de T_2 en dos pasos vía y_2 o y_3. Además, $y_2 \to y_1 \to \{y_4, y_3\}$, $\{y_2, y_3\} \to V(T_2) \to y_4$ y $y_3 \to y_2 \to y_1$.

Ahora notemos que por construcción de T, para cualquier vértice u de T_2, el conjunto de vecinos exteriores de u está contenido estrictamente en el conjunto de vecinos exteriores de y_1, entonces por el lema 2.1.8 u no puede alcanzar a y_1 en dos o menos pasos, sin embargo, u es un rey de T_2, u domina a y_4 y $y_4 \to \{y_2, y_3\}$, en consecuencia u es un rey de $T - \{y_1\}$. Por lo tanto u es un heredero de y_1 en T.

Debido a que para cada i en $\{1, 2, 3, 4\}$ el vértice y_i es un rey de T, y para cualquier vértice u de T_2 se tiene que u es un heredero de y_1 en T, tenemos que la secuencia real de T es $[4; m, 0, 0, 0; 0]$.

■

Teorema 3.3.8. *Si $m = 2$ o $m = 4$, entonces existe un torneo con secuencia real* $[4; m, 0, 0, 0; 0]$.

Demostración. Comencemos con el caso $m = 2$. Construyamos un torneo T como sigue: primero tomemos T_1 el torneo de la figura 3.15, después agreguemos dos nuevos vértices u_1 y u_2 junto con las siguientes flechas: (u_1, u_2), (u_i, y_4), (y_1, u_i), (y_3, u_1), (u_2, y_3), $i \in \{1, 2\}$ (ver figura 3.17).

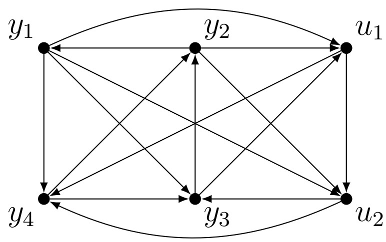

Figura 3.17. Un torneo con secuencia real $[4; 2, 0, 0, 0; 0]$.

Notemos que $T - \{y_1\}$ es un torneo 2-regular, $\{y_3, y_4\} \to y_2 \to y_1$ y además por construcción de T para cada i en $\{1, 2\}$ el conjunto de vecinos exteriores de u_i está contenido en el conjunto de vecinos exteriores de y_1, en consecuencia u_1 y u_2 son reyes de $T - \{y_1\}$, y_2, y_3, y_4 son reyes de T y por el lema 2.1.8 u_i no puede alcanzar a y_1 en dos o menos pasos en T. También tenemos que y_1 es un rey de T por ser el vértice de mayor exgrado en T y como para cada i en $\{1, 2\}$ el vértice u_i es un rey de $T - \{y_1\}$, tenemos que u_i es un heredero de y_1 en T. Así, la secuencia real de T es $[4; 2, 0, 0, 0; 0]$.

Ahora consideremos el caso $m = 4$. Tomemos v_1, v_2, v_3 tres nuevos vértices y definamos el torneo $T' = (V(T'), F(T'))$, con

$V(T') = (V(T) - \{u_2\}) \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ y
$F(T') = F(T - \{u_2\}) \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \cup A \cup B$, donde:

$A = \{(v_i, w) \mid (u_2, w) \in F(T),\ i \in \{1, 2, 3\}\}$ y
$B = \{(w, v_i) \mid (w, u_2) \in F(T),\ i \in \{1, 2, 3\}\}$.

Por el lema 3.2.7 se tiene que los reyes de T y T' son los mismos, y_1 es un rey de T' y tiene exactamente cuatro herederos en T', y si y es un rey de T con $y \neq y_1$, entonces y tiene la misma cantidad de herederos tanto en T como en T', en consecuencia la secuencia real de T' es $[4; 4, 0, 0, 0; 0]$.

■

Observación 6. Consideremos los torneos T y T' construidos en el lema anterior. En el caso del torneo T, y_1 y y_2 son reyes de T, $y_2 \to y_1$, y_2 no tiene herederos en T, y además, y_2 es un rey de $T - \{y_1\}$ porque $y_2 \to u_2 \to \{y_4, y_3\}$ y $y_2 \to u_1$. Análogamente para T', y_1 y y_2 son reyes de T', $y_2 \to y_1$, y_2 no tiene herederos en T', y además, también se tiene que y_2 es un rey de $T' - \{y_1\}$ porque $y_2 \to \{v_1, v_2, v_3\} \to \{y_4, y_3\}$ y $y_2 \to u_1$.

Teorema 3.3.9. *Sean h_1, h_2, h_3, h_4 y r enteros no negativos. Si al menos un h_i es distinto de cero, entonces existe un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; r]$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $h_1 \neq 0$.

Caso 1. Para cada i en $\{1, 2, 3, 4\}$ se tiene que $h_i \in \{2, 4\}$.
Sea $m = h_1$, definimos $T_{y_1} = T$ si $h_1 = 2$ y $T_{y_1} = T'$ si $h_1 = 4$, donde T y T' son los torneos construidos en el lema 3.3.8. Así, la secuencia real de T_{y_1} es $[4; h_1, 0, 0, 0; 0]$.

Ahora por la observación (6), se tiene que y_1 y y_2 son reyes de T_{y_1}, $y_2 \to y_1$, y_2 no tiene herederos en T_{y_1}, y y_2 es un rey de $T_{y_1} - \{y_1\}$, entonces por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_2 = 2$ o $h_2 = 4$, podemos obtener un torneo T_{y_2} a partir del torneo T_{y_1} tal que: los reyes de T_{y_2} y T_{y_1} son exactamente los mismos, para cada i en $\{1, 2\}$ el rey y_i tiene h_i herederos en T_{y_2} y la secuencia real de T_{y_2} es $[4; h_1, h_2, 0, 0; 0]$. Ahora por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_2 = 2$ o $h_2 = 4$, existe un vértice w_2 de T_{y_2} que tiene la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{y_2}}(w_2) \cap V(T_{y_2} - V_2') = N^+_{T_{y_2}}(y_2) \cap V(T_{y_2} - V_2')$$

donde w_2 es un heredero de y_2 en T_{y_2} y

$$V_2' = \{u \in V(T_{y_2}) \mid u \text{ es un heredero de } y_2 \text{ en } T_{y_2}\} \cup \{y_2\}.$$

Por otra parte, $y_3 \to y_2$, entonces por el lema 3.2.10 y_3 es un rey de $T_{y_2} - \{y_2\}$ y como y_3 no tiene herederos en T_{y_2} por el lema 3.2.8 o el corolario

3.2.9, dependiendo si $h_3 = 2$ o $h_3 = 4$, podemos obtener un torneo T_{y_3} a partir del torneo T_{y_2} tal que: los reyes de T_{y_3} y T_{y_2} son exactamente los mismos, para cada i en $\{1, 2, 3\}$ el rey y_i tiene h_i herederos en T_{y_3} y la secuencia real de T_{y_3} es $[4; h_1, h_2, h_3, 0; 0]$. Ahora por la observación (3) o la observación (4), dependiendo si $h_3 = 2$ o $h_3 = 4$, existe un vértice w_3 de T_{y_3} que tiene la siguiente propiedad:

$$N^+_{T_{y_3}}(w_3) \cap V(T_{y_3} - V_3') = N^+_{T_{y_3}}(y_3) \cap V(T_{y_3} - V_3')$$

donde w_3 es un heredero de y_3 en T_{y_3} y

$$V_3' = \{u \in V(T_{y_3}) \mid u \text{ es un heredero de } y_3 \text{ en } T_{y_3}\} \cup \{y_3\}.$$

Dado que $y_4 \to y_3$, entonces por el lema 3.2.10 se tiene que y_4 es un rey de $T_{y_3} - \{y_3\}$ y como y_4 no tiene herederos en T_{y_3}, por el lema 3.2.8 o el corolario 3.2.9, dependiendo si $h_4 = 2$ o $h_4 = 4$, podemos obtener un torneo T_{y_4} a partir del torneo T_{y_3} tal que: los reyes de T_{y_4} y T_{y_3} son exactamente los mismos, para cada i en $\{1, 2, 3, 4\}$ el rey y_i tiene h_i herederos en T_{y_4} y la secuencia real de T_{y_4} es $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; 0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; r]$.

Caso 2. Existen números enteros i, j con $1 \leq i \leq 4$ y $1 \leq j \leq 4$, tales que $h_i \in \{2, 4\}$ y $h_j \notin \{2, 4\}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que existe un entero n mayor o igual a uno tal que para $1 \leq i \leq n$ y $n+1 \leq j \leq 4$ se tiene que h_i es elemento de $\{2, 4\}$ y h_j no es elemento de $\{2, 4\}$. Procediendo de manera análoga como en el caso (1), podemos obtener un torneo T_{y_n} con secuencia real $[4; h_1, \ldots, h_n, 0, \ldots, 0; 0]$. Después partiendo del torneo T_{y_n}, para cada l en $\{n+1, \ldots, 4\}$ podemos ir agregando h_l herederos a y_l en caso de que h_l sea distinto de cero mediante el corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; 0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; r]$.

Caso 3. Para cada i en $\{1, \ldots, 4\}$ se tiene que $h_i \notin \{2, 4\}$.
Notemos nuevamente que para cada i en $\{1, \ldots, 4\}$ podemos ir agregando h_i herederos a y_i en caso de que h_i sea distinto de cero mediante el

corolario 3.2.6. De esta manera obtenemos un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; 0]$.

Finalmente en caso de que r sea distinto de cero, usamos el lema 3.2.11 para obtener un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; r]$.

■

Teorema 3.3.10. *Si $k, h_1, \ldots, h_k$ y r son enteros no negativos con $k \geq 1$, entonces existe un torneo con secuencia real $[k; h_1, h_2, \ldots, h_k; r]$, excepto para las siguientes restricciones (bajo permutaciones de h_i): $[1; 0; r']$ si $r' > 0$, $[1; 2; r']$ si $r' \geq 0$, $[1; 4; 0]$, $[2; h_1', h_2'; r']$ si h_1', h_2' y r' son enteros no negativos, $[3; 2, 0, 0; 0]$, $[3; 4, 0, 0; 0]$, $[4; 0, 0, 0, 0; r']$ si $r' \geq 0$.*

Demostración. Primero, por el lema 3.2.3 existe un torneo con secuencia real $[1; h; r]$, excepto para las secuencias: $[1; 0; r']$ si $r' > 0$, $[1; 2; r']$ si $r' \geq 0$, $[1; 4; 0]$. Segundo, por el lema 2.2.2 no existe un torneo con exactamente dos reyes, en consecuencia no existe un torneo con secuencia real $[2; h_1', h_2'; r]$ si h_1', h_2' y r son enteros no negativos. Tercero, por el teorema 3.3.5 existe un torneo con secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; r]$, con excepción de las secuencias: $[3; 2, 0, 0; 0]$ y $[3; 4, 0, 0; 0]$. Cuarto, por el lema 3.3.9 y el lema 3.3.6 existe un torneo con secuencia real $[4; h_1, h_2, h_3, h_4; r]$, excepto para la secuencia $[4; 0, 0, 0, 0; r']$ si $r' \geq 0$. Y quinto, si $k \geq 5$, entonces por el teorema 3.2.12 sabemos que existe un torneo con secuencia real $[k; h_1, h_2, \ldots, h_k; r]$.

■

3.4. Gráfica $(2,2)$-dominante de torneos

En la sección 3.1 de este capítulo hicimos notar que si G es la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo T, entonces G es una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados (observación (2)). Tal resultado fue el que nos motivo a preguntarnos si el recíproco era cierto o no, es decir, dada G una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados ¿existe un torneo T tal que $dom_{2,2}(T) \cong G$?

Resulta que con el trabajo que hemos realizado ya podemos responder dicha pregunta, e incluso ir más allá, ya que identificaremos exactamente la clase que consiste de las gráficas $(2,2)$-dominantes de torneos. Veremos que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa en varios casos, salvo algunas excepciones particulares. Haremos notar que tales excepciones de alguna forma nos son proporcionadas por el teorema 3.3.10. Por ejemplo, la no existencia de un torneo con secuencia real $[1; 4; 0]$ implicará que G no pueda ser K_1 con exactamente cuatro vértices finales (ver figura 3.18(a)). De igual forma la no existencia de un torneo con secuencia real $[3; 4, 0, 0, 0; 0]$ implicará que G no pueda ser K_3 con exactamente cuatro vértices finales para uno de sus vértices (ver figura 3.18(b)). De esta manera que no exista un torneo con secuencia real $[m; h_1, \ldots, h_m; r]$ para algunos enteros no negativos $m, h_1, \ldots, h_m, r$, nos permitirá "obtener" una gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados la cual no podría ser G. Excepto para la secuencia $[2, h_1, h_2; r]$ por cuestiones de isomorfismo.

(a) (b)

Figura 3.18. K_1 con exactamente cuatro vértices finales y K_3 con exactamente cuatro vértices finales para uno de sus vértices.

Teorema 3.4.1. *Sean T un torneo y G una gráfica. G es la gráfica $(2, 2)$-dominante de T si y sólo si G es una gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados, y distinta de las siguientes gráficas:*

(1) *La gráfica de orden mayor o igual a dos y de tamaño cero.*

(2) *K_1 con exactamente dos vértices finales, y con o sin vértices aislados.*

(3) *K_1 con exactamente cuatro vértices finales.*

(4) *K_2 con al menos un vértice final para cada uno de sus dos vértices, y con o sin vértices aislados.*

(5) *K_3 con exactamente dos vértices finales para uno de sus vértices.*

(6) *K_3 con exactamente cuatro vértices finales para uno de sus vértices.*

(7) *K_4 con o sin vértices aislados.*

Demostración. El teorema 3.3.10 provee todas las secuencias que existen y también las que no existen. Los lemas 3.1.2 y 3.1.3 nos dan la única manera de formar aristas en $dom_{2,2}(T)$ y la estructura que es creada en dicha gráfica.

($\Rightarrow$) Supongamos que G es la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo T. Por la observación (2) sabemos que G es una gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados.

Resta demostrar que G es distinta de las gráficas que se describen en (1), (2), (3), (4), (5), (6) y (7). Para ello procederemos por contradicción revisando cada uno de las siete posibilidades.

(A) Supongamos que G es la gráfica de orden mayor o igual a dos y de tamaño cero. Por el teorema 2.2.2, T tiene exactamente un rey o al menos tres reyes, observemos que T no tiene tres o más reyes ni tampoco herederos, ya que de lo contrario por lema 3.1.2 tendríamos al menos una arista en G, y ésto último no puede pasar porque G tiene tamaño cero. Del razonamiento anterior obtenemos que T es un torneo sin herederos y con exactamente un rey, además el orden de T es mayor o igual a dos, esto implica que existe un vértice de T que no es rey ni heredero, por lo cual la secuencia real de T es $[1;0;r_1]$ para algún entero positivo r_1, y ésto último es una contradicción ya que por el teorema 3.3.10 no existe un torneo con secuencia real $[1;0;r_2]$ si $r_2 > 0$. Por lo tanto G es distinta de la gráfica de orden mayor o igual a dos y de tamaño cero.

(B) Supongamos que G es K_1 con exactamente dos vértices finales, y con o sin vértices aislados. Por el teorema 2.2.2, T tiene exactamente un rey o al menos tres reyes, observemos que T no tiene tres o más reyes, ya que de lo contrario como cualquier par de reyes distintos es adyacente en G, tendríamos que K_n es una subgráfica de G para algún entero $n \geq 3$, y ésto no puede pasar debido a que G es K_1 con exactamente dos vértices finales, y con o sin vértices aislados, en consecuencia T tiene exactamente un rey. Sea x el único rey de T, por lema 3.1.2 obtenemos que los dos vértices finales son herederos de x, por lo cual la secuencia real de T es $[1;2;r_1]$ para algún entero no negativo r_1, y ésto es una contradicción ya que no existe un torneo con secuencia real $[1;2;r_2]$ para cualquier entero no negativo r_2 (teorema 3.3.10). Por lo tanto la gráfica G es distinta de K_1 con exactamente dos vértices finales, y con o sin vértices aislados.

(C) Supongamos que G es K_1 con exactamente cuatro vértices finales. Procediendo como en (B), obtenemos que T tiene exactamente un rey, y que éste a su vez tiene exactamente cuatro herederos. Además, como G no tiene vértices aislados, se tiene que el conjunto de vértices de T que no son reyes ni herederos es vacío, en consecuencia la secuencia real de T es $[1;4;0]$, lo cual es una contradicción ya que no existe un torneo con tal secuencia.

(D) Supongamos que G es K_2 con al menos un vértice final para cada uno de sus dos vértices, y con o sin vértices aislados. Sabemos que cada par de reyes distintos de T son adyacentes en G (lema 3.1.2), ésto implica que si T tiene n reyes, entonces $K_n \subseteq G$, sin embargo, K_n no es una subgráfica de G para $n \geq 3$, por lo cual T debe tener a lo más dos reyes. Por los lemas 3.1.2 y 3.1.3 obtenemos también que si $x \in V(G)$ y $\delta_G(x) > 1$ entonces x debe ser un rey de T, y dado que G tiene dos vértices de grado mayor que uno concluimos que T tiene al menos dos reyes. De los razonamientos anteriores obtenemos que T tiene exactamente dos reyes, lo cual es una contradicción porque no existe un torneo con exactamente dos reyes (lema 2.2.2).

(E) Supongamos que G es la gráfica que se describe en (5) o en (6). Procedamos como en (D): debido a que $K_3 \subseteq G$ y existen tres vértices de G que son de grado mayor a uno, obtenemos que T tiene exactamente tres reyes, los cuales son justamente los de grado mayor que uno. Por otro lado, G tiene dos o cuatro vértices finales adyacentes a un vértice de grado mayor que uno, ésto implica que dichos vértices finales deben ser herederos de un mismo rey, de esta manera obtenemos que la secuencia real de T es $[3;2,0,0;0]$ o $[3;4,0,0;0]$, lo cual es una contradicción ya que no existe un torneo con alguna de las dos secuencias antes descritas.

(F) Supongamos que G es K_4 con o sin vértices aislados. Debido a que $K_4 \subseteq G$ y existen cuatro vértices de G que son de grado mayor a uno, obtenemos que T tiene exactamente cuatro reyes, los cuales son justamente los de grado mayor que uno. Como G no tiene vértices finales, entonces T

no tiene herederos, por lo cual la secuencia real de T es $[4; 0, 0, 0, 0; r_1]$ para algún entero no negativo r_1, lo cual es una contradicción ya que no existe un torneo con dicha secuencia.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que G es una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados, y distinta de las gráficas que se describen en (1), (2), (3), (4), (5), (6) y (7). Así existen subconjuntos A_1, A_2, A_3 de $V(G)$ tal que:

(a) $A_1 \neq \varnothing$.

(b) Si $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ e $i \neq j$ entonces $A_j \cap A_i = \varnothing$.

(c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = V(G)$.

(d) $G[A_1]$ es una gráfica completa.

(e) Si $x \in A_2$ entonces $\delta_G(x) = 1$, y existe $y \in A_1$ tal que $xy \in A(G)$.

(f) Si $x \in A_3$, entonces $\delta_G(x) = 0$.

Por ser A_1 un conjunto distinto del vacío podemos suponer que A_1 es igual al conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Para cada i en $\{1, \ldots, k\}$, sean

$$H_i = \{v \in A_2 \mid vx_i \in A(G)\},\ h_i = |H_i| \text{ y } r = |A_3|.$$

Observemos que $H_1 \cup \ldots \cup H_k = A_2$ y si $i \neq j$ entonces $H_i \cap H_j = \varnothing$, ya que $H_i \subset A_2$ y para cada v en A_2 existe un único u en A_1 tal que $vu \in A(G)$.

Para cada i en $\{1, \ldots, k\}$ podemos suponer que si $h_i > 0$, entonces $H_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,h_i}\}$, y si $r > 0$ entonces $A_3 = \{v_1, \ldots, v_r\}$.

Caso 1. $k \geq 3$.
Veamos que existe un torneo con secuencia real $[k; h_1, \ldots, h_k; r]$. Dado que G es una gráfica distinta de las gráficas que se describen en los incisos (5), (6), (7) se tiene que la secuencia $[k; h_1, \ldots, h_k; r]$ es distinta a las secuencias $[3; 2, 0, 0; 0]$, $[3; 4, 0, 0; 0]$, $[4; 0, 0, 0, 0; r']$, con $r' \geq 0$, entonces por el lema 3.3.10 existe un torneo T con secuencia real $[k; h_1, \ldots, h_k; r]$.

Asumamos que $x_1, \ldots, x_k$ son los reyes de T, para cada i en $\{1, \ldots, k\}$ si $h_i > 0$ entonces $u_{i,1}, \ldots, u_{i,h_i}$ son los herederos de x_i, y también que si $r > 0$ entonces $v_1, \ldots, v_r$ son los vértices de T que no son reyes ni herederos.

Veamos a continuación que G es isomorfa a la gráfica (2,2)-dominante del torneo T. Para ello definamos la función $\varphi : V(G) \to V(dom_{2,2}(T))$ como

$$\varphi(x) = x.$$

Demostremos que φ es un isomorfismo de G a $dom_{2,2}(T)$. Observemos que por definición de la función φ, se tiene que dicha función es inyectiva. Además φ es suprayectiva, ya que cualquier vértice de $dom_{2,2}(T))$ es un rey o un heredero o ni rey ni heredero de T. Por lo tanto φ es una función biyectiva. Resta ver que las relaciones de adyacencia entre los vértices se preservan bajo φ, es decir, cualquier par de vértices u y v de G son adyacentes si y sólo si lo son sus imágenes, $\varphi(u) = u$ y $\varphi(v) = v$, en $dom_{2,2}(T)$.

Si uv es una arista de G, entonces por los incisos (c), (d), (e) y (f) al menos uno de sus vértices extremos es un elemento de A_1. Supongamos sin pérdida de generalidad que u es un elemento de A_1. Sabemos que si $x \in A_3$, entonces $\delta_G(x) = 0$, y como $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = V(G)$ obtenemos que $v \in A_2$ o $v \in A_1$.

Si v es un elemento de A_1, entonces $u = x_i$ y $v = x_j$ para algún i y j con $i \neq j$. Así $\varphi(x_i) = x_i$ y $\varphi(x_j) = x_j$, entonces por ser φ una función inyectiva obtenemos $x_i \neq x_j$. Como x_i y x_j son dos reyes distintos de T concluimos que $\varphi(u)\varphi(v)$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$.

Por otro lado si $v \in A_2$, entonces por el inciso (e) se tiene que $u = x_i$ y $v = u_{i,j}$, para algún $j \in \{1, \ldots, h_i\}$. Por definición de φ, $\varphi(x_i) = x_i$ y $\varphi(u_{i,j}) = u_{i,j}$, entonces $\varphi(x_i)$ es un rey de T y $\varphi(u_{i,j})$ un heredero de $\varphi(x_i)$, en consecuencia $\varphi(u)\varphi(v)$ es un arista de $dom_{2,2}(T)$.

Ahora supongamos que $\varphi(u)\varphi(v)$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$. Por el lema 3.1.2, $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son reyes de T o $\varphi(u)$ es un rey de T y $\varphi(v)$ un heredero de $\varphi(u)$. Si $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son reyes de T entonces por definición de φ, u y v son elementos de A_1 y como $G[A_1]$ es una gráfica completa, obtenemos que uv es una arista de G. Por otra parte, si $\varphi(u)$ es un rey de T y $\varphi(v)$ un heredero de $\varphi(u)$, entonces $u = x_i$ y $v = u_{i,j}$ para algunos enteros i y j, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, h_i\}$, en consecuencia $u_{i,j} \in H_i$, por lo tanto uv es una arista de G.

De lo anterior concluimos que φ es un isomorfismo de G a $dom_{2,2}(T)$.

Caso 2. $k = 2$.
Podemos suponer que si $i \in \{1, 2\}$ y $h_i > 0$ entonces $H_i = \{u_{i,1}, \ldots, u_{i,h_i}\}$, y que si $r > 0$ entonces $A_3 = \{v_1, \ldots, v_r\}$. Observemos que h_1 es igual a cer o h_2 es igual a cero, ya que de lo contrario G sería isomorfa a alguna de las gráficas que se describen en el inciso (4). Supongamos sin pérdida de generalidad que $h_2 = 0$. Consideremos la secuencia $[1; h_1 + 1; r]$, veamos que existe un torneo con dicha secuencia.

Por los inciso (2) y (3) la secuencia $[1; h_1+1; r]$ es distinta de las secuencias $[1; 2; r']$ para $r' \geq 0$ y de $[1; 4; 0]$, además $h_1 + 1 \geq 1$, entonces por el teorema 3.3.10 existe un torneo T con secuencia real $[1; h_1 + 1; r]$. Supongamos que x_1 es el único rey de T, si $h_1 > 0$ entonces $u_{1,1}, \ldots, u_{1,h_1}, x_2$ son los herederos de x_1, si $h_1 = 0$ entonces x_2 es el único heredero de x_1, y finalmente que si $r > 0$ entonces $v_1, \ldots, v_r$ son los vértices de T que no son reyes ni herederos.

Veamos a continuación que G es isomorfa a la gráfica (2,2)-dominante del torneo T. Para ello definamos la función $\varphi : V(G) \to V(dom_{2,2}(T))$ como

$$\varphi(x) = x.$$

Procediendo como en el caso (1) obtenemos que φ es una función biyectiva. Así que sólo resta ver que las relaciones de adyacencia entre los vértices se preservan bajo φ.

Si uv es una arista de G, entonces por los incisos (c), (d), (e) y (f) al menos uno de sus vértices extremos es un elemento de A_1. Supongamos sin pérdida de generalidad que u es un elemento de A_1. Sabemos que si $x \in A_3$, entonces $\delta_G(x) = 0$, y como $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = V(G)$ obtenemos que $v \in A_2$ o $v \in A_1$.

Si v es un elemento de A_1, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $u = x_1$ y $v = x_2$. Así $\varphi(x_1) = x_1$ y $\varphi(x_2) = x_2$, además x_2 es un heredero de x_1 en T, entonces por el lema 3.1.2 concluimos que uv es una arista de $dom_{2,2}(T)$.

Por otro lado si $v \in A_2$, entonces por el inciso (e) se tiene que $u = x_1$ y $v = u_{1,j}$ para algún $j \in \{1, \ldots, h_1\}$. Por definición de φ, $\varphi(x_1) = x_1$ y $\varphi(u_{1,j}) = u_{1,j}$, entonces $\varphi(x_1)$ es un rey de T y $\varphi(u_{1,j})$ es un heredero de

$\varphi(x_1)$, en consecuencia $\varphi(u)\varphi(v)$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$.

Ahora supongamos que $\varphi(u)\varphi(v)$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$. Por el lema 3.1.2, $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son reyes de T o $\varphi(u)$ es un rey de T y $\varphi(v)$ un heredero de $\varphi(u)$. Sabemos que T tiene un único rey, por lo cual $\varphi(u)$ es un rey de T y $\varphi(v)$ es un heredero de $\varphi(u)$. Así, $u = x_1$ y $v \in \{x_2\} \cup H_1$, y como x_1 es adyacente a cualquier elemento de $\{x_2\} \cup H_1$ en G, concluimos que uv es un arista de G.

Por lo tanto φ es un isomorfismo entre las gráficas G y $dom_{2,2}(T)$.

Caso 3. $k = 1$.
Consideremos la secuencia $[1; h_1; r]$, veamos que existe un torneo con dicha secuencia. Por los inciso (1), (2) y (3) la secuencia $[1; h_1; r]$ es distinta de las secuencias $[1; 0; r']$ si $r' > 0$, $[1; 2; r']$ si $r' \geq 0$, $[1; 4; 0]$, entonces por el teorema 3.3.10 existe un torneo T con secuencia real $[1; h_1; r]$. Supongamos que x_1 es el único rey de T, si $h_1 > 0$ entonces $u_{1,1}, \ldots, u_{1,h_1}$ son los herederos de x_1 y finalmente que si $r > 0$ entonces $v_1, \ldots, v_r$ son los vértices de T que no son reyes ni herederos.

Veamos a continuación que G es isomorfa a la gráfica (2,2)-dominante del torneo T. Para ello definamos la función $\varphi : V(G) \to V(dom_{2,2}(T))$ como

$$\varphi(x) = x.$$

Procediendo como en el caso (1) obtenemos que φ es una función biyectiva. Así que sólo resta ver que las relaciones de adyacencia entre los vértices se preservan bajo φ.

Si uv es una arista de G, entonces por los incisos (c), (d), (e) y (f) al menos uno de sus vértices extremos es un elemento de A_1. Supongamos sin pérdida de generalidad que u es un elemento de A_1. Sabemos que si $x \in A_3$, entonces $\delta_G(x) = 0$, y como $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = V(G)$ obtenemos que $v \in A_2$ o $v \in A_1$. Sin embargo $k = 1$, así que el único elemento de A_1 es x_1, en consecuencia $v \in A_2$.

Como $v \in A_2$, por el inciso (e) se tiene que $u = x_1$ y $v = u_{1,j}$ para algún j en $\{1, \ldots, h_1\}$. Por definición de φ, $\varphi(x_1) = x_1$ y $\varphi(u_{1,j}) = u_{1,j}$, entonces $\varphi(x_1)$ es un rey de T y $\varphi(u_{1,j})$ un heredero de $\varphi(x_1)$, en consecuencia

$\varphi(u)\varphi(v)$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$.

Ahora supongamos que $\varphi(u)\varphi(v)$ es una arista de $dom_{2,2}(T)$. Por el lema 3.1.2, $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son reyes de T o $\varphi(u)$ es un rey de T y $\varphi(v)$ un heredero de $\varphi(u)$. Sabemos que T tiene un único rey, por lo cual $\varphi(u)$ es un rey de T y $\varphi(v)$ un heredero de $\varphi(u)$. Así, $u = x_1$ y $v \in H_1$, y como x_1 es adyacente a cualquier elemento de H_1 en G, concluimos que uv es una arista de G.

Por lo tanto φ es un isomorfismo entre las gráficas G y $dom_{2,2}(T)$.

De los casos anteriores concluimos que $G \cong dom_{2,2}(T)$.

■

En este capítulo estudiamos la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo. Hicimos notar que para comprender la estructura de esta gráfica era de suma importancia estudiar primero las secuencias reales, las cuales a su vez tenían mucha relación con los (n,k)-torneos. Finalmente fue justo la determinación de todas las secuencias reales de torneos lo que nos permitió dar una caracterización de tal gráfica.

En la gráfica $(2,2)$-dominante de un torneo T, las aristas son formadas por cualesquiera dos vértices distintos u y v, si cumplen que u y v alcanzan a todos los vértices de $T - \{u,v\}$ en dos o menos pasos. ¿Qué pasa si reemplazamos el dos por cualquier otro número r mayor o iguales que tres? En el siguiente capítulo analizaremos esta pregunta.

Capítulo 4

Gráfica (r, r)-dominante de torneos

En este capítulo introduciremos una clase especial de vértices de un torneo, los cuales son llamados r-reyes, a partir de dicha definición analizaremos para cuáles enteros n y m con $n \geq m \geq 1$ existe un torneo con n vértices tal que exactamente m de éstos sean r-reyes, para $r \geq 3$. Posteriormente definiremos la gráfica (r, r)-dominante de un torneo y mostraremos algunas resultados importantes sobre dicha gráfica, especialmente lo que haremos es dar un avance a la determinación de algunas r-secuencias reales de torneos.

4.1. $(n, m)_r$-torneos

Una observación que realizó Maurer en [19] fue la siguiente: un rey en un torneo es un vértice que alcanza a los demás vértices en a los más dos pasos, ¿qué pasa si reemplazamos el dos por el tres o por cualquier otro número entero mayor o igual a uno? esta pregunta lo llevó a dar la siguiente definición.

Definición 4.1.1. Sean T un torneo y r un entero positivo, un vértice x es un ***r*-rey** de T, si para cualquier $y \in V(T)$ existe una (x, y)-trayectoria de longitud menor o igual a r.

Por ejemplo en el torneo T de la figura 4.1 los vértices x_1, x_5 y x_6 son 2-reyes de T, mientras que los vértices x_2, x_3 y x_4 son 3-reyes de T.

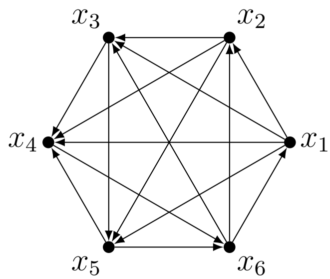

Figura 4.1. Un torneo T.

Observemos que en particular, un 1-rey es un transmisor y un 2-rey es un rey.

Observación 7. Sean T un torneo, r y t dos enteros positivos con $r \leq t$, notemos que si x es un r-rey de T, entonces x alcanza a cualquier vértice del torneo en a los más r pasos, lo cual implica que x alcanza a cualquier vértice del torneo en a los más t pasos, por lo tanto x resulta ser también un t-rey de T. En resumen, si x es un r-rey, entonces x es un t-rey. Por ejemplo en el torneo T de la figura 4.1 x_1 es un 2-rey, en consecuencia también es un 3-rey, un 4-rey, etcétera. Sin embargo, ser un t-rey no necesariamente implica ser un r-rey, por ejemplo en el mismo torneo mencionado anteriormente, x_2 es un 3-rey pero no es un 2-rey porque x_2 no puede alcanzar a x_1 en dos o menos pasos.

Sea D una digráfica, el conjunto y el número de r-reyes de D se denota por $\boldsymbol{K_r(D)}$ y $\boldsymbol{k_r(D)}$, respectivamente. Por ejemplo en el torneo T de la figura 4.1 $K_2(T) = \{x_1, x_5, x_6\}$ y $K_3(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, así $k_2(T) = 3$ y $k_3(T) = 6$.

Sabemos que en cualquier torneo existe al menos un 2-rey, por lo tanto siempre existe un r-rey para cualquier entero r mayor o igual que dos. En el capítulo 2, nos concentramos en determinar para cuáles enteros n y m con $n \geq m \geq 1$ existía un torneo con n vértices tal que exactamente m de éstos fuesen 2-reyes, siguiendo con la misma idea, si tomamos un entero $r \geq 2$, resulta natural preguntarse en este punto ¿para cuáles enteros n y m

con $n \geq m \geq 1$ existe un torneo con n vértices tal que exactamente m de éstos sean r-reyes? Para responder dicha pregunta, primero consideremos la siguiente definición.

Definición 4.1.2. Sean T un torneo, n, m y r enteros, con $n \geq m \geq 1$ y $r \geq 2$. Decimos que T es un $\boldsymbol{(n,m)_r}$**-torneo** si T tiene n vértices y exactamente m de éstos son r-reyes.

Tomemos ahora un entero $r \geq 2$, la pregunta anterior puede ser replanteada de la siguiente manera: ¿para cuáles enteros n y m con $n \geq m \geq 1$ existe un $(n,m)_r$-torneo? Observemos primero que un $(n,m)_2$-torneo es un (n,m)-torneo, por lo cual el caso $r = 2$ ya quedó contestado (teorema 2.2.8). Sólo resta considerar el caso $r > 2$. Al igual que en el capítulo 2 empezaremos exhibiendo la existencia y no existencia de $(n,n)_r$-torneos para números n específicos.

El teorema 2.2.2 nos asegura que no existe un torneo con exactamente dos reyes, a continuación presentamos un lema que nos asegura la no existencia de un torneo con exactamente dos r-reyes para todo entero $r \geq 2$.

Lema 4.1.3. *Para cualquier entero $r \geq 2$, no existe un torneo con exactamente dos r-reyes.*

Demostración. Procedamos por contradicción, supongamos que para algún entero $r \geq 2$ existe un torneo T con exactamente dos r-reyes u y v. Como el torneo T tiene dos r-reyes, dicho torneo no puede tener un vértice que sea un transmisor porque cualquier vértice de T es alcanzado por u y v en a lo más r pasos.

Dado que T no tiene vértices de ingrado cero (trasmisores) obtenemos que T tiene al menos tres reyes distintos w_1, w_2 y w_3 (teorema 2.1.3), los cuales son también r-reyes (observación (7)), y esto último contradice que T tenga exactamente dos r-reyes.

Por lo tanto, para todo entero $r \geq 2$ no existe un torneo con exactamente dos r-reyes.

■

Lema 4.1.4. *Para todo entero $r \geq 2$ existe un $(1,1)_r$-torneo.*

Demostración. Un torneo con un sólo vértice es un $(1,1)_r$-torneo.

■

Lema 4.1.5. *Para todo entero $r \geq 3$ existe un $(4,4)_r$.*

Demostración. Sea $r \geq 3$, el torneo que se muestra en la figura 4.2 resulta ser un $(4,4)_r$-torneo ya que $\gamma = (a,b,c,d,a)$ es un 4-ciclo, por lo cual, cualquier vértice es un 3-rey, en particular, para todo entero $r \geq 3$ cualquier vértice del torneo es un r-rey.

■

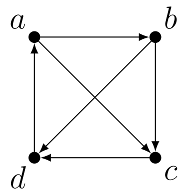

Figura 4.2. Un $(4,4)_r$-torneo, $r \geq 3$.

Observación 8. Sean r y t dos enteros positivos con $r \leq t$, usando la observación (7) obtenemos que si T es un $(n,n)_r$-torneo, entonces T es un $(n,n)_t$-torneo. Sin embargo, ser un $(n,n)_t$-torneo no necesariamente implica ser un $(n,n)_r$-torneo. Por ejemplo el torneo de la figura 4.2 es un $(4,4)_3$-torneo pero no es un $(4,4)_2-$ torneo porque el vértice c no es un 2-rey.

En el capítulo 2, específicamente en el lema 2.2.6 demostramos que si existe un $(n,n)_2$-torneo, entonces existe un $(n+2,n+2)_2$-torneo, este resultado es un caso particular del siguiente lema.

Lema 4.1.6. *Sean n y r enteros positivos, con $r \geq 2$, si existe un $(n,n)_r$-torneo, entonces existe un $(n+2,n+2)_r$-torneo.*

Demostración. Tomemos n y r enteros positivos con $r \geq 2$, supongamos que existe un $(n,n)_r$-torneo T. Sean u y v dos nuevos vértices, definamos la digráfica $D = (V(D), F(D))$, donde

$$V(D) = V(T) \cup \{u, v\} \text{ y}$$
$$F(D) = F(T) \cup \{(x, u) \mid x \in V(T)\} \cup \{(u, v)\} \cup \{(v, y) \mid y \in V(T)\}.$$

Notemos que D es un torneo con $n+2$ vértices, veamos que cualquier vértice de D es un r-rey. Sea $x \in V(T)$, dado que T es un $(n,n)_r$-torneo, para todo vértice z de T sucede que existe una (x,z)-trayectoria de longitud menor o igual que r en T y como $T \subset D$, entonces existe una (x,z)-trayectoria de longitud menor o igual que r en D. Además, $\gamma = (x, u, v, x)$ es un 3-ciclo, entonces w_1 alcanza a w_2 en dos o menos pasos para cualquier $w_i \in \{x, u, v\}$, $i \in \{1, 2\}$. Por el razonamiento anterior obtenemos que cualquier vértice de D es un r-rey de D.

Por lo tanto D es un $(n+2, n+2)_r$-torneo (ver figura 4.3).

■

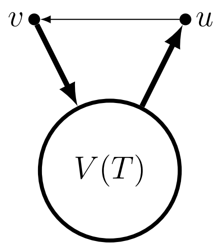

Figura 4.3. Algunas relaciones de dominación en el torneo D.

El teorema 2.2.7 nos afirma que para todo entero positivo n, excepto para 2 y 4, existe un $(n,n)_2$-torneo. Considerando r-reyes en lugar de 2-reyes con $r \geq 3$, obtenemos un resultado similar, sólo que ahora tendremos únicamente una excepción: $n = 2$.

Teorema 4.1.7. *Si n y r son enteros positivos, con $n \geq r \geq 3$, entonces existe un $(n,n)_r$ torneo, excepto para $n = 2$.*

Demostración. Por el lema 4.1.3 no existe un $(2,2)_r$-torneo. Veamos que para todo entero $n \geq 1$ existe un $(2n-1, 2n-1)_r$-torneo. Por inducción sobre n.

Base de inducción: Cuando $n = 1$, sabemos por el lema 4.1.4 que existe un $(1,1)_r$ torneo.

Hipótesis de inducción: supongamos que la afirmación es cierta para un cierto valor n_0, es decir, que existe un $(2n_0 - 1, 2n_0 - 1)_r$-torneo.

Paso inductivo: demostremos que la afirmación es cierta para $n = n_0 + 1$. Por hipótesis de inducción existe un $(2n_0 - 1, 2n_0 - 1)_r$-torneo, usando el lema 4.1.6 que se refiere a la existencia de un $(n' + 2, n' + 2)_r$-torneo en caso de que exista un $(n', n')_r$-torneo, tenemos que existe un $(2n_0 + 1, 2n_0 + 1)_r$-torneo, que es lo que queríamos demostrar.

Análogamente demostramos que para todo entero n mayor o igual que dos existe un $(2n, 2n)_r$-torneo, usando el lema 4.1.5 que asegura la existencia de un $(4, 4)_r$-torneo y el lema 4.1.6.

■

Retomemos la pregunta ¿para cuáles enteros n y m existe un $(n, m)_r$-torneo, $r \geq 2$? Anteriormente mencionamos que el caso $r = 2$ ya había quedado resuelto por el teorema 2.2.8, el cual afirma que existe un $(n, m)_2$-torneo excepto para $n = m = 4$ o $m = 2$, así que sólo faltaba resolver para $r > 2$. Usando el teorema 4.1.7 demostraremos que para $r > 2$ existe un $(n, m)_r$-torneo excepto para $m = 2$, de esta manera la pregunta inicial quedará contestada completamente.

Teorema 4.1.8. *Sean r, m y n enteros positivos. Si $n \geq m \geq 1$ y $r \geq 3$, entonces existe un $(n, m)_r$-torneo, excepto para $m = 2$.*

Demostración. Tomemos r, m y n enteros positivos con $n \geq m \geq 1$ y r mayor o igual que tres. Sabemos por el lema 4.1.3 que no existe un $(n, 2)_r$-torneo para n arbitrario. Ahora supongamos $m \neq 2$, consideremos un $(m, m)_r$-torneo T, la existencia de T es asegurada por el teorema 4.1.7. Si $n = m$, entonces T es un $(n, m)_r$-torneo. Si $n > m$ consideramos un torneo T_1 con exactamente $n - m$ vértices y definimos el torneo $T' = (V(T'), F(T'))$ de la siguiente manera:

$$V(T') = V(T) \cup V(T_1) \text{ y}$$
$$F(T') = F(T) \cup \{(u, v) \mid u \in V(T),\ v \in V(T_1)\} \cup F(T_1).$$

Por ser T un $(m, m)_r$ torneo, cualquier vértice de T es un r-rey de T, y como $T \subseteq T'$ y $V(T) \to V(T_1)$, se tiene que cualquier vértice de T es un

r-rey de T'. Además cualquier vértice de T_1 no es un r-rey de T' ya que $V(T) \to V(T_1)$, por lo cual T' es un $(n, m)_r$-torneo.

■

4.2. Gráfica (r, r)-dominante de torneos

Rercordemos la definición de la gráfica $(2, 2)$-dominante de un torneo T: $G = dom_{2,2}(T)$ es la gráfica $(2, 2)$-dominante de T, donde $V(G) = V(T)$ y $uv \in A(G)$ si para cualquier vértice w en $V(G) - \{u, v\}$ existe una (u, w)-trayectoria y una (v, w)-trayectoria ambas de longitud menor o igual a dos en T. ¿Qué pasa si reemplazamos el dos por el tres o por cualquier otro entero mayor o igual a dos? esta pregunta motiva la siguiente definición. Dado un torneo T y un entero positivo $r \geq 2$, $\boldsymbol{dom_{r,r}(T)}$ es la gráfica (r, r)-dominante de T, donde $V(dom_{r,r}(T)) = V(T)$ y $uv \in A(dom_{r,r}(T))$ si para cualquier vértice w en $V(T) - \{u, v\}$ existe una (u, w)-trayectoria y una (v, w)-trayectoria ambas de longitud menor o igual a r en T. Observemos que cuando $r = 2$, obtenemos la definición de la gráfica $(2, 2)$-dominante de un torneo. A los vértices u y v los denominamos un **par $\boldsymbol{(r, r)}$-dominante**, notemos que cualquier pareja de r-reyes es un par (r, r)-dominante, sin embargo las parejas de r-reyes no son los únicos vértices que crean aristas en $dom_{r,r}(T)$, veremos a continuación qué otros vértices crean aristas en G.

Consideremos u y v un par (r, r)-dominante, por definición de $dom_{r,r}(T)$ se tiene que u alcanza a todos los vértices de T en r o menos pasos, excepto posiblemente a v. Por ser T un torneo $u \to v$ o $v \to u$, supongamos que $u \to v$, entonces u es un r-rey de T. Si v también es un r-rey de T, ambos vértices son r-reyes de T, esto implica que cualquier par de r-reyes distintos crea una arista en $dom_{r,r}(T)$. Si v no es un r-rey de T, significa que v no puede alcanzar a u en r o menos pasos, sin embargo sabemos que v puede alcanzar a cualquier vértice de $T - \{u\}$ en r o menos pasos, en consecuencia v es un r-rey de $T - \{u\}$.

Sea T un torneo y r un entero mayor o igual dos, un **$\boldsymbol{r}$-heredero** es un vértice v que no es un r-rey de T, pero sí es un r-rey de $T - \{u\}$ para algún r-rey u de T, llamamos a v un r-heredero del r-rey u. Observemos que un heredero es un 2-heredero. Por el análisis realizado anteriormente sobre qué vértices crean aristas en $dom_{r,r}(T)$, tenemos que si v es un r-heredero del r-rey u, la arista vu está en $dom_{r,r}(T)$.

Sean T un torneo y x un r-rey de T con $r \geq 2$, definimos $\boldsymbol{H(T,x)_r}$ como el conjunto formado por los r-herederos de x, es decir,

$$H(T,x)_r = \{h \in V(T) \mid h \text{ es un } r\text{−heredero de } x\}.$$

En la figura 4.4 los vértices x_1, x_5 y x_6 son 2-reyes de T, por lo cual dichos vértices forman una subgráfica completa de tres vértices de $dom_{2,2}(T)$. Además notemos que x_4 es un 2-heredero de x_5, y x_2 es un 2-heredero de x_1, de esta manera x_2 y x_4 son vértices finales de $dom_{2,2}(T)$. Finalmente el vértice x_3 no es rey ni 2-heredero, entonces x_3 es un vértice aislado de $dom_{2,2}(T)$. Para el caso de $dom_{r,r}(T)$, con $r \geq 3$, es importante señalar que todos los vértices de T son 3-reyes, en consecuencia son r-reyes, de esta manera cualquier par de vértices distintos de T son adyacentes en $dom_{r,r}(T)$. Por lo tanto $dom_{r,r}(T) \cong dom_{3,3}(T)$.

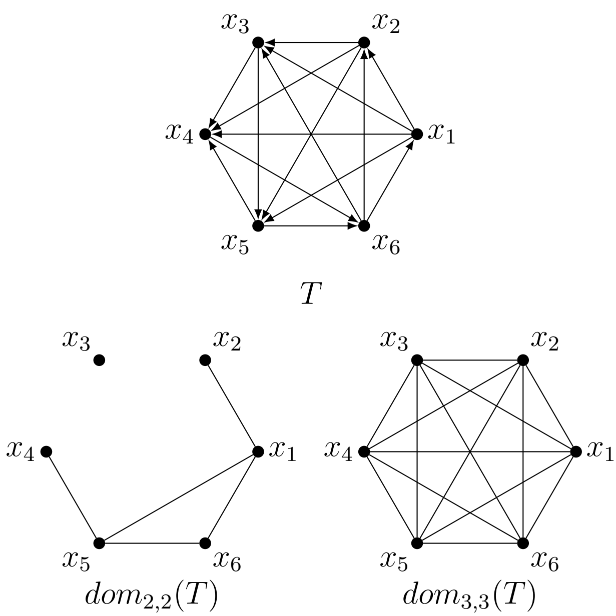

Figura 4.4. Un torneo T, $dom_{2,2}(T)$ y $dom_{3,3}(T)$.

Consideremos T un torneo, el lema 3.1.1 nos afirma que si h es un 2-heredero del 2-rey x, entonces h no es un 2-heredero de cualquier otro 2-rey. Resulta que tal afirmación sigue siendo válida aún si reemplazamos al dos por cualquier otro número entero r con $r \geq 2$.

Lema 4.2.1. *Sean T un torneo, x_1 y x_2 dos r-reyes distintos de T, con $r \geq 2$. Si $h \in H(T,x_1)_r$, entonces $h \notin H(T,x_2)_r$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $h \in H(T,x_2)_r$. Como h es un r-rey de $T-\{x_2\}$ se tiene que existe una (h,x_1)-trayectoria de longitud menor o igual a r. Además, como $h \in H(T,x_1)_r$ se tiene que h es un r-rey de $T-\{x_1\}$, en consecuencia h es un r-rey de T, lo cual es una contradicción ya que $h \in H(T,x_1)_r$. Por lo tanto $h \notin H(T,x_2)_r$.

■

Sean r un entero con $r \geq 2$ y T un torneo con n vértices y con $K_r(T)$ igual al conjunto $\{x_1,\ldots,x_m\}$, definimos la ***r*-secuencia real** de T como sigue $[m;h_1,h_2,\ldots,h_m;s]_r$, donde

$$h_i = |H(T,x_i)_r| \text{ para } i \in \{1,\ldots,m\}, \text{ y } s = n-m-\textstyle\sum_{i=1}^m h_i.$$

Observemos que $[m;h_1,h_2,\ldots,h_m;q]_2 = [m;h_1,h_2,\ldots,h_m;q]$, es decir, la 2-secuencia real de T es la secuencia real de T. Notemos también que podemos etiquetar a los r-reyes arbitrariamente así que podemos permutar la secuencia h_i libremente.

Usando el lema 4.2.1 y el hecho de que para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$ se tiene que $x_i \notin H(T,x_j)_r$, obtenemos que los conjuntos

$$\{x_1,\ldots,x_m\}, H(T,x_1)_r,\ldots,H(T,x_m)_r, S$$

son disjuntos dos a dos y además su unión es $V(T)$, donde

$$S = V(T) - \left(\{x_1,\ldots,x_m\} \cup \bigcup_{i=1}^m H(T,x_i)_r\right).$$

Observemos que el conjunto $H(T,x_i)_r$ no necesariamente es distinto del vacío. Además, la cardinalidad de S es justamente s.

A continuación presentamos dos lemas, el primero habla sobre las únicas parejas de vértices que pueden formar una arista en $dom_{r,r}(T)$. El segundo hace referencia a la estructura que es formada en $dom_{r,r}(T)$. Tales resultados generalizan los lemas 3.1.2 y 3.1.3.

Lema 4.2.2. *Sean T un torneo y r un entero mayor o igual que dos, uv es una arista de $dom_{r,r}(T)$ si y sólo si*

(a) u y v son r-reyes distintos de T, o

(b) u es un r-rey de T y v es un r-heredero de u.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que uv es un arista en $dom_{r,r}(T)$, por definición de $dom_{r,r}(T)$ se tiene que u alcanza a todos los vértices de T en r o menos pasos, excepto posiblemente a v. Por ser T un torneo $u \to v$ o $v \to u$, supongamos sin pérdida de generalidad que $u \to v$, entonces u es un r-rey de T. Si v también es un r-rey de T, ambos vértices son r-reyes de T. Si v no es un r-rey de T, significa que v no puede alcanzar a u en r o menos pasos, sin embargo sabemos que v puede alcanzar a cualquier vértice de $T - \{u\}$ en r o menos pasos, en consecuencia v es un r-rey de $T - \{u\}$, lo cual implica que v es un heredero de u.

$(\Leftarrow)$ Si u y v son r-reyes distintos de T, entonces ambos vértices alcanzan a cualquier vértice de $T - \{u, v\}$ en r o menos pasos. Lo mismo sucede si u es un r-rey de T y v es un r-heredero de u. Por lo tanto uv es una arista $dom_{r,r}(T)$ en cualquier caso.

$\blacksquare$

Lema 4.2.3. *Sean T un torneo y r un entero mayor o igual que dos. La gráfica (r, r)-dominante de T está formada como sigue:*

(a) Los r-reyes de T forman una subgráfica completa de $dom_{r,r}(T)$.

(b) Un r-heredero es un vértice final adyacente a su r-rey asociado.

(c) Todos los vértices que no son r-reyes ni r-herederos son vértices aislados.

Demostración. (a) Por el lema 4.2.2 (a) cualquier par de r-reyes distintos son adyacentes, así, los r-reyes forman una subgráfica completa de $dom_{r,r}(T)$.
(b) Por los lemas 4.2.2 (b) y 4.2.1 un r-heredero y su r-rey asociado forman

una arista en $dom_{r,r}(T)$ y un r-heredero sólo puede tener asociado un r-rey, por lo cual un r-heredero forma un vértice final adyacente a su r-rey asociado. (c) Si un vértice no es un r-rey ni un r-heredero, entonces por el lema 4.2.2 dicho vértice no puede formar un par (r,r)-dominante con cualquier otro vértice, de esta manera, los vértices que no son r-reyes ni r-herederos son vértices aislados.

■

Observemos nuevamente que a partir de los dos lemas anteriores se deduce inmediatamente que $dom_{r,r}(T)$ es una gráfica completa con o sin vértices finales, y con o sin vértices aislados (ver la observación (2) del capítulo (3)). Es por ello que a partir de este punto nos preguntamos al igual que lo hicimos para el caso $r=2$, dada una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados G, ¿existirá un torneo T tal que $dom_{r,r}(T)$ sea isomorfa a G? Notemos que la pregunta anterior ya ha sido contestada para el caso $r=2$ en el capítulo (3), así que ahora resta contestarla para el caso $r \geq 3$.

Para responder la cuestión anterior para el caso $r \geq 3$ es necesario nuevamente conocer la clase que consiste de las gráficas que resultan ser las gráficas (r,r)-dominantes de torneos y dado que $dom_{r,r}(T)$ es una gráfica completa con o sin vértices finales, con o sin vértices aislados, sólo resta conocer el número de r-reyes que puede tener un torneo, el número de r-herederos que puede tener cada r-rey del torneo, así como el número de vértices que no sean r-reyes ni r-herederos que pueda tener dicho torneo. En otras palabras, dada una r-secuencia del estilo $[m; h_1, \ldots, h_m; s]_r$ con $m \geq 1$, $r \geq 3$, h_i y s enteros no negativos para $i = 1, \ldots, m$, quisiéramos determinar si existe o no existe un torneo T que cumpla con las siguientes tres condiciones:

1. $K_r(T) = \{x_1, \ldots, x_m\}$.
2. Para cada i en $\{1, \ldots, m\}$ el rey x_i tiene h_i r-herederos.
3. El número de vértices de T que no son r-reyes ni r-herederos es s.

Uno de los principales objetivos de esta tesis es dar un avance a la determinación de algunas r-secuencias reales de torneos para $r \geq 3$.

Antes de dedicarnos a determinar algunas r-secuencias reales de torneos, veremos dos resultados importantes. El primero afirma que un 2-rey siempre domina a los r-herederos, así como a los vértices que no son r-reyes ni r-herederos, para $r \geq 3$. El segundo señala que si v es un r-rey y v tiene al menos un r-heredero, entonces necesariamente v es un 2-rey.

Lema 4.2.4. *Sean T un torneo y r un entero mayor o igual que tres. Si x es un 2-rey de T, entonces $x \to H \cup S$, donde*

$$H = \bigcup_{z \in K_r(T)} H(T,z)_r \quad y \quad S = V(T) - (K_r(T) \cup H).$$

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe v en $H \cup S$ tal que $v \to x$. Observemos que si $w \in H(T,y)_r$ para algún y en $K_r(T)$, entonces w no es un r-rey de T por definición de $H(T,y)_r$. Análogamente, cualquier elemento de S no es un r-rey de T. Así, cualquier elemento de $H \cup S$ no es un r-rey de T y por lo tanto v no es un r-rey de T. Como $v \to x$, y x alcanza a cualquier vértice de T en dos o menos pasos, se tiene que v alcanza a cualquier vértice de T en tres o menos pasos, en consecuencia v es un 3-rey de T, en particular es un r-rey de T, y ésto último es una contradicción ya que v no es un r-rey de T. Por lo tanto $x \to H \cup S$.
■

Lema 4.2.5. *Sean T un torneo y x un r-rey de T, para algún $r \geq 2$. Si x tiene al menos un r-heredero, entonces x es un 2-rey de T.*

Demostración. Notemos que si $r = 2$ entonces de inmediato x es un 2-rey de T. De esta manera el caso $r = 2$ queda resuelto.

Supongamos ahora que $r \geq 3$, demostremos que también en este caso x es necesariamente un 2-rey de T. Para ello procedamos por contradicción, es decir, supongamos que x no es un 2-rey de T. Sea

$$r_0 = \text{máx}\{d(x,v) \mid v \in V(T)\}$$

notemos que $3 \leq r_0 \leq r$ porque x no es un 2-rey pero sí es un r-rey del torneo T. Sea $I = \{0, \ldots, r_0\}$ y para cada $i \in I$ definamos

$$D_i = \{v \in V(T) \mid d(x,v) = i\}.$$

Observemos que para cada i en I se tiene que D_i es un conjunto distinto del vacío. Además $D_0 = \{x\}$ y $D_0 \cup \ldots \cup D_{r_0} = V(T)$. Como cualquier elemento de D_i está a distancia i de x para $i \in I$, obtenemos que $x \rightarrow D_1$ y si $i \in I$, $j \in I$ y $j - i > 1$ entonces $D_j \rightarrow D_i$, observemos que en particular $D_2 \cup \ldots \cup D_{r_0} \rightarrow x$.

Sea h en $H(T,x)_r$, notemos que $\{x\} \cup D_2 \cup \ldots \cup D_{r_0} \rightarrow h$, ya que de lo contrario h alcanzaría a x en dos o menos pasos, y ésto último no puede pasar porque justamente h no puede alcanzar a x en r o menos pasos ($r \geq 3$).

Ahora tomemos z en D_{r_0}, por ser h un r-rey de $T - \{x\}$ existe una (h,z)-trayectoria W en $T - \{x\}$ de longitud l, con $l \leq r$. Así $W = (z_0, z_1, \ldots, z_l)$ con $h = z_0$, $z = z_l$, y $\{z_0, \ldots, z_l\} \cap \{x\} = \varnothing$. Además $N_T^+(h) \subseteq D_1$, lo cual implica que $z_1 \in D_1$, sin embargo $x \rightarrow D_1$, en consecuencia $W' = (x, z_1, \ldots, z_l)$ es una (x,z)-trayectoria, pero $d_T(x,z) = r_0$. Por lo tanto $3 \leq r_0 \leq l \leq r$.

Afirmamos que existe i en $\{2, \ldots, l-1\}$ tal que $z_i \in D_2 \cup \ldots \cup D_{r_0 - 1}$. Para demostrar esta afirmación procedamos por contradicción, supongamos que para todo i en $\{2, \ldots, l-1\}$ se tiene que $z_i \notin D_2 \cup \ldots \cup D_{r_0-1}$, ésto implica que $V(W) \subseteq \{h\} \cup D_1 \cup D_{r_0}$. Como $D_{r_0} \rightarrow \{h\} \cup D_1$, no existe una (h,z)-trayectoria en $T[\{h\} \cup D_1 \cup D_{r_0}]$, sin embargo, $V(W) \subseteq \{h\} \cup D_1 \cup D_{r_0}$, entonces W es una (h,z)-trayectoria en $T[\{h\} \cup D_1 \cup D_{r_0}]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la afirmación es cierta.

Usando la afirmación del párrafo anterior obtenemos que existe un entero i mayor o igual a dos y menor o igual a $l-1$ tal que $z_i \in D_2 \cup \ldots \cup D_{r_0-1}$, entonces $z_i \rightarrow x$, en consecuencia $W'' = (h, z_1, \ldots, z_i, x)$ es una (h,x)-trayectoria de longitud $i+1$, pero $i \leq l-1$, entonces $i+1 \leq l \leq r$, de esta manera W'' es una (h,x)-trayectoria de longitud menor o igual a r, contradiciendo que $h \in H(T,x)_r$. Por lo tanto x es un 2-rey de T.

■

4.3. r-secuencias reales

En esta sección lo que haremos es dar un avance a la determinación de algunas r-secuencias reales de torneos para $r \geq 3$.

En primer lugar haremos notar que en cualquier torneo con al menos tres 2-reyes siempre existe un r-rey que tiene cero r-herederos, $r \geq 3$.

Lema 4.3.1. *Sean T un torneo y r un entero mayor o igual que tres. Si T tiene al menos tres 2-reyes y r-secuencia real $[m, h_1, \dots, h_m; s]_r$, entonces al menos un h_i es igual a cero.*

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que h_i es distinto de cero para $i \in \{1, \dots, m\}$. Sean $x_1, \dots, x_m$ los m r-reyes de T, entonces cada uno de estos r-reyes tiene al menos un r-heredero. Por el lema 4.2.5 únicamente los 2-reyes pueden tener r-herederos, esto implica que $x_1, \dots, x_m$ en realidad son 2-reyes de T. Así por el lema 4.2.4 obtenemos que $\{x_1, \dots, x_m\} \to H \cup S$, donde

$$H = \bigcup_{i=1}^{m} H(T, x_i)_r$$
$$S = V(T) - (\{x_1, \dots, x_m\} \cup H).$$

Sabemos que que los conjuntos $\{x_1, \dots, x_m\}$, H y S son conjuntos disjuntos dos a dos y su unión es $V(T)$, además $\{x_1, \dots, x_m\} \to H \cup S$. Por lo tanto no existe una (u, v)-trayectoria para cualesquiera u en $H \cup S$ y v en $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Ahora sea h un r-heredero de x_1, como h es un r-rey de $T - \{x_1\}$ se tiene que h alcanza a x_2 en menos de r pasos, lo cual es una contradicción ya que no existe una (u, v)-trayectoria para cualesquiera u en $H \cup S$ y v en $\{x_1, \dots, x_m\}$. Por lo tanto, $h_i = 0$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$.

■

El siguiente lema nos hace notar que no es difícil agregar vértices que no sean r-reyes ni r-herederos, para $r \geq 2$. El caso particular $r = 2$ es el lema 3.2.11.

Lema 4.3.2. *Sean T un torneo con al menos dos vértices, r un entero mayor o igual que dos y s un entero positivo. Si la r-secuencia real de T es $[m; h_1, h_2, \dots, h_m; q]_r$, entonces existe un torneo con r-secuencia real $[m; h_1, h_2, \dots, h_m; q + s]_r$.*

Demostración. Sean $x_1, \dots, x_m$ los m r-reyes de T y

$$Q = V(T) - \left(\{x_1, \dots, x_m\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} H(T, x_i)_r \right).$$

Sabemos entonces que la cardinalidad del conjunto Q es q. Supongamos sin pérdida de generalidad que para cada i en $\{1, \ldots, m\}$ la cardinalidad del conjunto $H(T, x_i)_r$ es h_i.

Sea S un torneo de orden s, consideremos el torneo $T' = (V(T'), F(T'))$ con

$$V(T') = V(T) \cup V(S) \text{ y}$$
$$F(T') = F(T) \cup F(S) \cup \{(x, y) \mid x \in V(T),\ y \in V(S)\}.$$

Veamos que el torneo T' tiene por r-secuencia real

$$[m; h_1, h_2, \ldots, h_m; q + s]_r$$

para ello primero demostraremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. x es un r-rey de T si y sólo si x es un r-rey de T'.

Demostración de la afirmación 1. Sea x un r-rey de T, como $V(T) \to V(S)$ obtenemos que x alcanza a cualquier vértice de S en un paso, en consecuencia x es un r-rey de T'.

Inversamente, supongamos ahora que x es un r-rey de T', dado que $V(T) \to V(S)$ se tiene que x es un vértice de T. Veamos que x es un r-rey de T. Tomemos z un vértice de T, por ser x un r-rey de T' existe una (x, z)-trayectoria W en T' de longitud menor o igual a r, sin embargo $V(T) \to V(S)$, por lo cual los vértices de dicha trayectoria son únicamente del torneo T, de esta manera obtenemos que x es un r-rey del torneo T. Por lo tanto x es un r-rey de T si y sólo si x es un r-rey de T'. ▲

Afirmación 2. Sea x un r-rey de T, entonces $h \in H(T, x)_r$ si y sólo si $h \in H(T', x)_r$.

Demostración de la afirmación 2. Notemos primero que por la afirmación (1) x es también un r-rey de T'. Sea $h \in H(T, x)_r$, observemos que h alcanza en un paso a cualquier vértice de S, además como no existe una (h, x)-trayectoria en T de longitud menor o igual a r y usando también el hecho de que $V(T) \to V(S)$, obtenemos que no existe una (h, x)-trayectoria en T' de longitud menor o igual a r. Por lo tanto $h \in H(T', x)_r$.

Inversamente, sean h en $H(T', x)_r$ y z un vértice de $T - \{x\}$. Sabemos que por ser h un r-rey de $T' - \{x\}$ existe una (h, z)-trayectoria W en $T' - \{x\}$ de longitud menor o igual a r, observemos nuevamente que los vértices de dicha trayectoria son únicamente de T porque $V(T) \to V(S)$, ésto implica que h es un r-rey de $T - \{x\}$, además no existe una (h, x)-trayectoria en T' de longitud menor o igual a r por lo cual tampoco puede existir en T ya que el torneo T es una subdigráfica de T', en consecuencia $h \in H(T', x)_r$. Por lo tanto $h \in H(T, x)_r$ si y sólo si $h \in H(T', x)_r$. ▲

Sabemos que los conjuntos

$$\{x_1, \ldots, x_m\}, H(T, x_1)_r, \ldots, H(T, x_m)_r, Q$$

son conjuntos disjuntos dos a dos y su unión es $V(T)$. Así haciendo uso también de las afirmaciones (1) y (2) obtenemos que los conjuntos

$$\{x_1, \ldots, x_m\}, H(T, x_1)_r, \ldots, H(T, x_m)_r, Q, V(S)$$

son conjuntos disjuntos dos a dos y su unión es $V(T')$, además la cardinalidad de estos conjuntos es $m, h_1, \ldots, h_m, q, s$, respectivamente. Por lo tanto la r-secuencia real de T' es $[m; h_1, h_2, \ldots, h_m; q + s]_r$.

■

El teorema 4.1.8 hace referencia a la existencia de un torneo con m vértices y m r-reyes si m es distinto de dos, así como a la no existencia de un torneo con exactamente dos r-reyes, por lo tanto tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.3.3. *Sean m y r enteros positivos. Si $r \geq 3$ y $m \neq 2$ entonces existe un torneo con r-secuencia real $[m; 0, 0, \ldots, 0; 0]_r$.*

Demostración. Por el teorema 4.1.8 existe un $(m, m)_r$-torneo excepto para $m = 2$, dicho torneo tiene por r-secuencia real $[m; 0, 0, \ldots, 0; 0]_r$.

■

Corolario 4.3.4. *Para cualesquiera enteros no negativos h_1, h_2, r y s, con $r \geq 2$, no existe un torneo T con r-secuencia real $[2; h_1, h_2; s]_r$.*

Demostración. Por el teorema 4.1.8 no existe un $(n, 2)_r$-torneo, por lo cual no existe un torneo con r-secuencia real $[2; h_1, h_2; s]_r$.

■

Analicemos primero las r-secuencias reales de torneos con un único r-rey, para $r \geq 3$.

Lema 4.3.5. *Si $r \geq 3$, entonces existe un torneo T con r-secuencia real $[1; h; s]_r$, excepto para las r-secuencias $[1; 2; s]_r$ si $s \geq 0$ y $[1; 0; s]_r$ si $s > 0$.*

Demostración. Si T tiene un único vértice, entonces su r-secuencia real es $[1; 0; 0]_r$. Si T tiene al menos dos vértices, entonces cuando el único r-rey de T es removido, se genera otro torneo que debe tener h r-reyes con $h \geq 1$ porque cualquier torneo tiene al menos un 2-rey y $h \neq 2$ porque no existe un torneo con exactamente dos r-reyes (lema 4.1.3). En consecuencia no existe un torneo con r-secuencia real $[1; 2; s]_r$ si $s \geq 0$ o $[1; 0; s]_r$ si $s > 0$.

Por otro lado, sabemos que si $h \geq 1$ y $h \neq 2$, entonces existe un $(h+s, h)_r$-torneo (lema 4.1.8), después agregando un transmisor al $(h + s, h)_r$-torneo, obtenemos un torneo con r-secuencia real $[1; h; s]_r$.

Por lo anterior concluimos que existe un torneo T con r-secuencia real $[1; h; s]_r$, excepto para las r-secuencias $[1; 2; s]_r$ si $s \geq 0$ y $[1; 0; s]_r$ si $s > 0$.

■

Lema 4.3.6. *Sean h_1, h_2, h_3 y s enteros no negativos. Si T es un torneo con 3-secuencia real $[3; h_1, h_2, h_3; s]_3$ entonces $h_i = 0$ para toda i en $\{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que al menos un h_i es distinto de cero.

Sean x_1, x_2 y x_3 los tres 3-reyes de T. Observemos primero que por ser T un torneo con tres 3-reyes, se tiene que para cualquier vértice v de T el conjunto $N_T^-(v)$ es distinto del vacío, en consecuencia T tiene al menos tres 2-reyes (lema 2.1.3). Notemos ahora que T tiene únicamente tres 2-reyes, ya que de lo contrario T tendría al menos cuatro 3-reyes, lo cual no puede pasar porque T tiene exactamente tres 3-reyes. Por lo tanto x_1, x_2 y x_3 son los 2-reyes de T.

Supongamos sin pérdida de generalidad que h_1 es distinto de cero, entonces $H(T, x_1)_3 \neq \varnothing$. Por el lema 4.2.4, para cada i en $\{1, 2, 3\}$ se tiene que $x_i \to H \cup S$, donde

$$H = \bigcup_{i=1}^{3} H(T, x_i)_3$$

$$S = V(T) - (\{x_1, x_2, x_3\} \cup H).$$

Como $V(T) = \{x_1, x_2, x_3\} \cup H \cup S$, tenemos que $\{x_1, x_2, x_3\} \to V(T) - \{x_1, x_2, x_3\}$, en consecuencia para cada i en $\{1, 2, 3\}$ no existe una (w, x_i)-trayectoria para cualquier w en $V(T) - \{x_1, x_2, x_3\}$. En particular, si $v \in H(T, x_1)_3$, entonces no existe una (v, x_2)-trayectoria de longitud menor o igual que tres, lo cual es una contradicción ya que v alcanza a x_2 en tres o menos pasos por ser v un 3-rey de $T - \{x_1\}$. Por lo tanto $h_i = 0$ para toda i en $\{1, 2, 3\}$.

■

Lema 4.3.7. *Si h y s son enteros no negativos, entonces existe un torneo con 3-secuencia real $[4; h, 0, 0, 0; s]_3$.*

Demostración. Consideremos primero el caso cuando $h = 0$. Construyamos el torneo T_1 como sigue: tomemos cuatro vértices x_1, x_2, x_3 y x_4 después agregamos las flechas (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_2) (ver figura 4.5(a)). Observemos que cada x_i es un 3-rey de T_1, en consecuencia la 3-secuencia real de T_1 es $[4; 0, 0, 0, 0; 0]_3$. En caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[4; 0, 0, 0, 0; s]_3$.

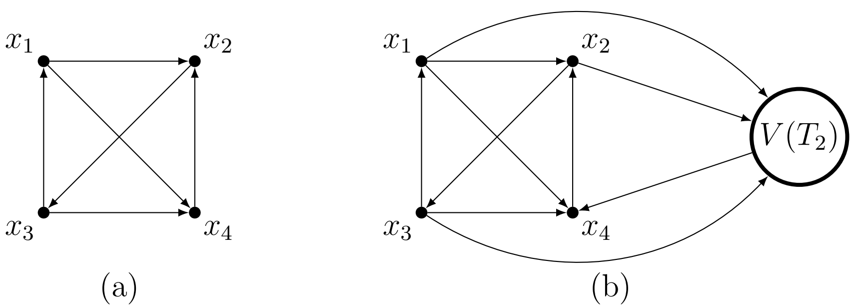

Figura 4.5. El torneo T_1 y algunas relaciones de dominación en el torneo T.

Ahora supongamos que $h > 0$. Tomemos un torneo T_2 con h vértices, y construyamos el torneo T como sigue: empecemos con $T_1 \cup T_2$, después para cada vértice w de T_2 agregamos las flechas (x_i, w), (w, x_4), con $i \in \{1, 2, 3\}$.

En la figura 4.5(b) se puede observar cómo se relacionan los vértices x_1, x_2, x_3, x_4 con los otros vértices de T. Observemos que cada x_i es un 3-rey de T, además w es un 3-rey de $T - \{x_1\}$ y $d(w, x_1) = 4$ para cualquier vértice w de T_2, por lo cual $V(T_2) = H(T, x_1)_3$, en consecuencia la 3-secuencia real de T es $[4; h, 0, 0, 0; 0]_3$. Finalmente en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[4; h, 0, 0, 0; s]_3$.

■

A continuación presentamos un lema, el cual nos exhibe una gran cantidad de 3-secuencias reales de torneos.

Lema 4.3.8. *Si n es un entero mayor o igual que tres y distinto de cuatro, entonces para cualesquiera enteros no negativos $s, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$:*

(a) existe un torneo con 3-secuencia real $[2n; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0 \ldots, 0; s]_3$;

(b) existe un torneo con 3-secuencia real $[2n-1; h_0, h_1, \ldots, h_{n-2}, 0 \ldots, 0; s]_3$.

Demostración. (a) Primero consideramos el caso donde cada h_i es igual a cero. Por el corolario 4.3.3 para cualquier entero $k \geq 3$ existe un torneo con 3-secuencia real $[k; 0, 0, \ldots, 0; 0]_3$, en consecuencia existe un torneo con 3-secuencia real $[2n; 0, 0, \ldots, 0; 0]_3$. Después, en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[2n; 0, 0, \ldots, 0; s]_3$. De esta manera el caso en donde cada h_i es cero queda resuelto.

Resta demostrar el caso donde al menos un h_i es distinto de cero. La demostración se hará de manera constructiva.

Por la observación (5) del capítulo (3) sabemos que si n es un entero mayor o igual que tres y distinto de cuatro, entonces existe un (n, n)-torneo T que contiene un n-ciclo $\gamma = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)$. Notemos que $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ son todos los vértices de T ya que dicho torneo consta exactamente de n vértices (ver figura 4.6).

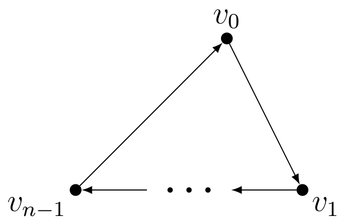

Figura 4.6. El n-ciclo $\gamma = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m\}.$$

Lo que haremos a continuación será agregar exactamente un 2-heredero a cada v_i usando el lema 3.2.5 reiteradas veces. Para ello primero tomemos n vértices nuevos $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ y definamos el torneo T'_0 de la siguiente manera:

$$V(T'_0) = V(T) \cup \{w_0\} \text{ y}$$
$$F(T'_0) = F(T) \cup \{(u, w_0) \mid u \in N^-_T[v_0]\} \cup \{(w_0, u) \mid u \in N^+_T(v_0)\}.$$

En la figura 4.7 se pueden apreciar las relaciones de dominación entre vértice v_0 con los demás vértices de T'_0.

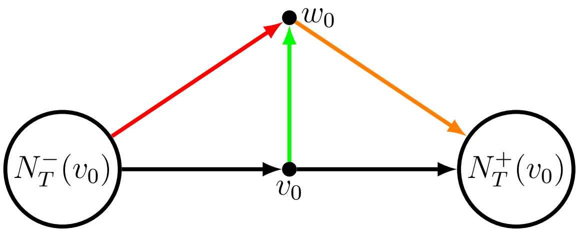

Figura 4.7. Algunas relaciones de dominación en el torneo T'_0.

Por el lema 3.2.5: $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ son los 2-reyes de T'_0 y w_0 es un 2-heredero de v_0 en T'_0. Observemos que $w_0 \to v_1$ ya que $v_0 \to v_1$.

Ahora supongamos que ya tenemos definido el torneo T'_i con $0 \leq i < n-1$. Definamos el torneo T'_{i+1} de la siguiente forma:

$V(T'_{i+1}) = V(T'_i) \cup \{w_{i+1}\}$ y
$F(T'_{i+1}) = F(T'_i) \cup \{(u, w_{i+1}) \mid u \in N^-_{T'_i}[v_{i+1}]\} \cup \{(w_{i+1}, u) \mid u \in N^+_{T'_i}(v_{i+1})\}$.

En la figura 4.8 se pueden apreciar las relaciones de dominación entre vértice v_{i+1} con los demás vértices de T'_{i+1}.

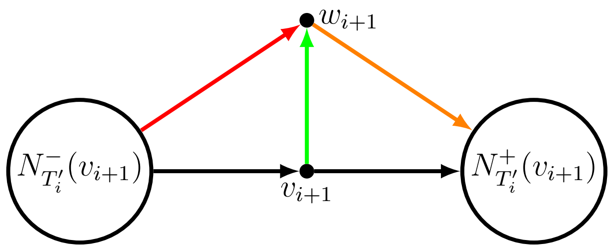

Figura 4.8. Algunas relaciones de dominación en el torneo T'_{i+1}.

Nuevamente por el lema 3.2.5: $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ son los 2-reyes de T'_{i+1} y para cada j en $\{0, \ldots, i+1\}$ el vértice w_j es un 2-heredero de v_j en T'_{i+1}. Notemos que $w_{i+1} \to v_{i+2}$ ya que $v_{i+1} \to v_{i+2}$ (usando en el subíndice adición mod n). En particular cuando i es igual a $n-2$: $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ son los 2-reyes de T'_{n-1} y para cada j en $\{0, \ldots, n-1\}$ el vértice w_j es un 2-heredero de v_j en T'_{n-1}.

En la figura 4.9 se puede observar cómo se relaciona cada 2-rey de T'_{n-1} con su respectivo 2-heredero.

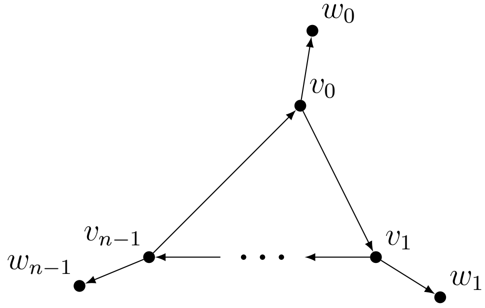

Figura 4.9. Relaciones de dominación entre cada 2-rey de T'_{n-1} con su respectivo 2-heredero.

Observemos que por construcción de los anteriores torneos

$$T \subseteq T'_0 \subseteq \ldots \subseteq T'_{n-1} \text{ y}$$
$$V(T'_j) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, \ldots, w_j\} \text{ para } 0 \leq j \leq n-1.$$

Ahora tomemos $m+1$ torneos: $T''_o, \ldots, T''_m$, donde cada torneo T''_i tenga exactamente h_i vértices y de tal forma que los conjuntos

$$V(T'_{n-1}), V(T''_o), \ldots, V(T''_m)$$

sean ajenos dos a dos.

A partir de los torneos $T'_{n-1}, T''_o, \ldots, T''_m$ construiremos un nuevo torneo que tendrá 3-secuencia real $[2n; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; 0]_3$.

Construyamos un torneo T' de la siguiente manera: empecemos con

$$T'_{n-1} \cup T''_o \cup \ldots \cup T''_m$$

después agreguemos las flechas inducidas por las siguientes relaciones de dominación:

(I) Si $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $j \in \{0, \ldots, m\}$ entonces $v_i \to V(T''_j)$.

(II) Si $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $j \in \{0, \ldots, m\}$ e $i \neq j$, entonces $w_i \to V(T''_j)$.

(III) Si $i \in \{0, \ldots, m\}$ entonces $V(T''_i) \to w_i$.

(IV) si $i \in \{0, \ldots, m\}$, $j \in \{0, \ldots, m\}$ y $v_i \to v_j$, entonces $V(T''_i) \to V(T''_j)$.

En la figura 4.10 se pueden apreciar algunas relaciones de dominación en el torneo T'.

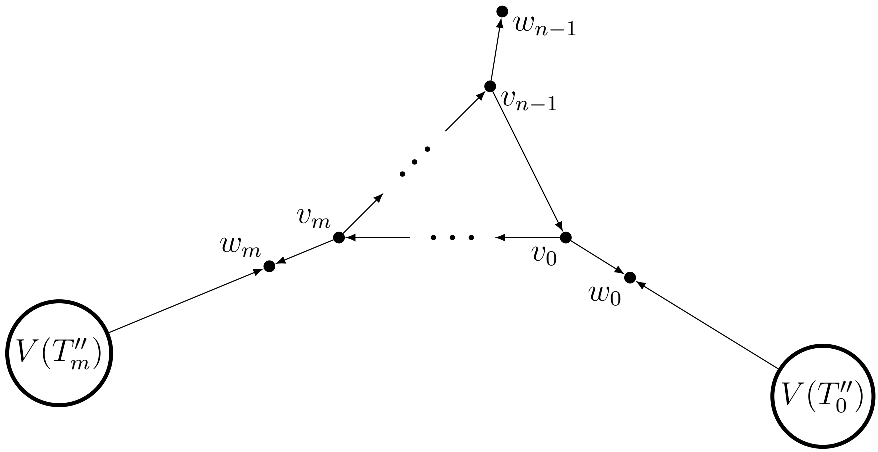

Figura 4.10. Algunas relaciones de dominación en el torneo T'.

Observemos que por construcción de T':

$$V(T') = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\} \cup \bigcup_{l=0}^{m} V(T''_l).$$

Demostraremos que el torneo T' tiene 3-secuencia real

$$[2n; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; 0]_3$$

para ello primero probaremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Para cada i en $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ se tiene que v_i es un 2-rey de T'.

Demostración de la afirmación 1. Sabemos que v_i es un 2-rey de T'_{n-1} y además por (I) si $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $j \in \{0, \ldots, m\}$, entonces $v_i \to V(T''_j)$, en consecuencia v_i es un 2-rey de T'. ▲

Afirmación 2. Para cada i en $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ se tiene que w_i es un 3-rey de T' y el único vértice que está a distancia tres de w_i en T' es v_i.

Demostración de la afirmación 2. Primero veamos que w_i es un 3-rey de

T'. Por ser w_i un 2-heredero de v_i en T'_{n-1} se tiene que w_i es un 2-rey de $T'_{n-1}-\{v_i\}$, además T'_{n-1} tiene más de dos 2-reyes, por lo cual $N^-_{T'_{n-1}}(v_i) \neq \varnothing$ y en consecuencia por el lema 2.1.4 existe j en $\{0,1,\ldots,n-1\}$ tal que $v_j \to v_i$. Dado que w_i alcanza a v_j en dos o menos pasos en $T'_{n-1}-\{v_i\}$ y para cada l en $\{0,\ldots,m\}$ el vértice v_j domina a cualquier vértice de T''_l, tenemos que w_i alcanza a cualquier vértice de T' en a lo más tres pasos, es decir, w_i es un 3-rey de T'.

Por otro lado, w_i no puede alcanzar a v_i en dos o menos pasos en T', para demostrarlo procedamos por contradicción. Supongamos que existe una (w_i,v_i)-trayectoria W de longitud menor o igual a dos en T'. Dado que w_i es un 2-heredero de v_i en T'_{n-1}, se tiene que w_i no puede alcanzar a v_i en dos o menos pasos en T'_{n-1}, en consecuencia $V(W) \nsubseteq V(T'_{n-1})$, entonces existe $z \in V(T''_l)$ para algún $l \in \{0,\ldots,m\}$ tal que $w_i \to z \to v_i$, y ésto ultimo es una contradicción ya que por (I) si $l \in \{0,\ldots,m\}$, entonces $v_i \to V(T''_l)$. Por lo tanto $d_{T'}(w_i,v_i)=3$.

El único vértice que se encuentra a distancia tres de w_i en T' es v_i por lo siguiente: w_i es un 2-rey de $T'_{n-1}-\{v_i\}$ y para $l \in \{0,\ldots,m\}$ sucede que $w_i \to v_{i+1} \to V(T''_l)$ (usando en el subíndice adición mod n). ▲

Afirmación 3. Para cada i en $\{0,1,\ldots,m\}$ se tiene que $V(T''_i)=H(T',v_i)_3$.

Demostración de la afirmación 3. Demostremos primero que el conjunto $V(T''_i)$ está contenido en el conjunto $H(T',v_i)_3$, es decir, que para cualquier $x \in V(T''_i)$, x es un 3-rey de $T'-\{v_i\}$ pero no es un 3-rey de T'. Sea $x \in V(T''_i)$, por construcción de T' se tiene que $x \to w_i$ (III), además por la afirmación (2) w_i es un 2-rey de $T'-\{v_i\}$, en consecuencia x es un 3-rey de $T'-\{v_i\}$.

Ahora notemos que x no puede alcanzar a v_i en tres o menos pasos en T', para demostrarlo procedamos por contradicción. Supongamos que existe una (x,v_i)-trayectoria W de longitud menor o igual a tres en T'. Por los incisos (I y II) obtenemos que $N^+_T(x) \subset \{w_i\} \cup U$, donde

$$U = \bigcup_{l=0}^{m} V(T''_l)$$

y dado que $v_i \to \{w_i\} \cup U$ se tiene que $N^+_{T'}(x) \subset N^+_{T'}(v_i)$, así por el lema 2.1.8 x no puede alcanzar a v_i en dos o menos pasos en T', sin embargo, W

es una (x, v_i)-trayectoria de longitud menor o igual a tres, en consecuencia $\ell(W) = 3$ y $W = (x, u_1, u_2, v_i)$.

Observemos que $w_i \notin V(W)$ ya que la distancia de w_i a v_i es tres en T', así existe j en $\{0, 1, \ldots, m\}$ tal que $u_1 \in V(T''_j)$. Como $N^+_{T'}(u_1) \subset \{w_j\} \cup U$, se tiene que $u_2 = w_j$ o $u_2 \in U$. Observemos que $u_2 \notin U$ ya que $v_i \to U$ y $u_2 \to v_i$. Esto implica que $u_2 = w_j$, es decir, $W = (x, u_1, w_j, v_i)$.

Notemos que $i \neq j$, porque $v_i \to w_i$ y $w_j \to v_i$. Como $u_1 \in V(T''_j)$, $x \in V(T''_i)$ y $x \to u_1$, entonces por el inciso (IV) se tiene que $V(T''_i) \to V(T''_j)$, esto implica que $v_i \to v_j$ y entonces $w_j \to v_i \to v_j$, lo cual es una contradicción ya que la distancia de w_j a v_j es tres en T' (afirmación (2)). Por lo tanto x no puede alcanzar a v_i en tres o menos pasos en T'.

Como x es un 3-rey de $T' - \{v_i\}$ y x no puede alcanzar a v_i en tres o menos pasos en T', se tiene que $x \in H(T, v_i)_3$, y en consecuencia $V(T''_i) \subseteq H(T', v_i)_3$.

Resta demostrar que $H(T', v_i)_3 \subseteq V(T''_i)$. Para demostrar esto último, veamos que cualquier otro vértice de T' que no sea elemento de $V(T''_i)$ no es elemento de $H(T', v_i)_3$. Por el lema 4.2.1 si $i \neq j$, entonces $H(T', v_i)_3$ y $H(T', v_j)_3$ son conjuntos disjuntos, esto nos dice que si $h \in V(T''_j)$ para algún $j \neq i$, entonces $h \notin H(T', v_i)_3$. Además,

$$K_3(T') = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$$

por lo cual ningún elemento de $K_3(T')$ puede estar en $H(T, v_i)_3$. Por lo tanto, $V(T''_i) = H(T', v_i)_3$. ▲

Por las afirmaciones (1), (2) y (3) obtenemos que

$$K_3(T') = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$$

y para cada i en $\{0, \ldots, m\}$:

$$V(T''_i) = H(T', v_i)_3$$

en consecuencia la 3-secuencia real de T' es $[2n; h_0, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; 0]_3$, donde $h_{n-1} = h_m$ si $n-1 = m$ y $h_l = 0$ para $l \in \{m+1, \ldots, n-1\}$ si $m < n-1$. Finalmente en caso de que s sea distinto de cero, podemos usar el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[2n; h_0, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; s]_3$.

(b) Primero consideramos el caso donde cada h_i es igual a cero. Por el corolario 4.3.3 para cualquier entero $k \geq 3$ existe un torneo con secuencia real $[k; 0, 0, \ldots, 0; 0]_3$, en consecuencia existe un torneo con 3-secuencia real $[2n-1; 0, 0, \ldots, 0; 0]_3$. Después, en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[2n-1; 0, 0, \ldots, 0; s]_3$. De esta manera el caso en donde cada h_i es cero queda resuelto.

Resta demostrar el caso donde al menos un h_i es distinto de cero. Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\{i \in \{0, 1, \ldots, n-2\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m'\}.$$

La demostración se basará en las construcciones realizadas anteriormente en el inciso (a).

Tomemos T' el torneo construido en el inciso (a) pero tomando m' en lugar de m. Así

$$V(T') = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\} \cup \bigcup_{l=0}^{m'} V(T''_l).$$

Demostraremos que la 3-secuencia real del torneo $T'' = T' - \{w_{n-1}\}$ es

$$[2n-1; h_0, h_1, \ldots, h_{n-2}, 0, \ldots, 0; 0]_3.$$

Sea $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, observemos primero que $T''[V(T'_{n-2})] = T'_{n-2}$. Además sabemos que v_i es un 2-rey de T'_{n-2} y que por el inciso (I) para cada j en $\{0, \ldots, m'\}$ el vértice v_i domina a cualquier vértice en $V(T''_j)$, en consecuencia v_i es un 2-rey de T''.

Veamos ahora que w_i es un 3-rey de T'' y que el único vértice que está a distancia tres de w_i en T'' es v_i. Por ser w_i un 2-heredero de v_i en T'_{n-2} se tiene que w_i es un 2-rey de $T'_{n-2} - \{v_i\}$, además T'_{n-2} tiene más de dos 2-reyes, por lo cual $N^-_{T'_{n-2}}(v_i) \neq \varnothing$, en consecuencia por el lema 2.1.4 existe j en $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que $v_j \to v_i$. Dado que w_i alcanza a v_j en dos o menos pasos en $T'_{n-2} - \{v_i\}$, se tiene que w_i alcanza a v_i en a lo más tres pasos, sin embargo, $T'' \subseteq T'$ y la distancia en T' de w_i a v_i es tres, por lo tanto la distancia T'' de w_i a v_i es tres. Por otra parte el único vértice que está a distancia tres de w_i en T'' es v_i, porque w_i es un 2-rey de $T'_{n-2} - \{v_i\}$ y

$w_i \to v_{i+1} \to V(T_l'')$ para $l \in \{0, \ldots, m'\}$, es decir, w_i es un 2-rey de $T'' - \{v_i\}$.

Finalmente veamos que $V(T_i'') = H(T'', v_i)_3$. Sea x un elemento de $V(T_i'')$, por el inciso (III) sabemos que $x \to w_i$, además en el párrafo anterior hicimos notar que w_i es un 2-rey de $T'' - \{v_i\}$, en consecuencia x es un 3-rey de $T'' - \{v_i\}$. Por otra parte, dado que x no alcanza a v_i en tres o menos pasos en T' tenemos que x no alcanza a v_i en tres o menos pasos en T'' porque T'' es subdigráfica de T'. Por lo tanto $V(T_i'')$ esta contenido en $H(T'', v_i)_3$.

Resta demostrar que $H(T'', v_i)_3 \subseteq V(T_i'')$. Para demostrar esto último veamos que cualquier otro vértice de T'' que no sea elemento de $V(T_i'')$ no es elemento de $H(T'', v_i)_3$. Por el lema 4.2.1 si $i \neq j$ entonces $H(T'', v_i)_3$ y $H(T'', v_j)_3$ son conjuntos disjuntos, esto nos dice que si $h \in V(T_j'')$ para algún $j \neq i$, entonces $h \notin H(T'', v_i)_3$. Además,

$$K_3(T'') = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, w_1, \ldots, w_{n-2}\}$$

por lo cual ningún elemento de $K_3(T'')$ puede estar en $H(T'', v_i)_3$. Por lo tanto $V(T_i'') = H(T'', v_i)_3$.

Por los razonamientos anteriores obtenemos que

$$K_3(T'') = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_0, w_1, \ldots, w_{n-2}\}$$

y que para cada i en $\{0, \ldots, m'\}$

$$V(T_i'') = H(T'', v_i)_3$$

en consecuencia la 3-secuencia real de T'' es $[2n-1; h_0, \ldots, h_{n-2}, 0, \ldots, 0; 0]_3$, donde $h_{n-2} = h_{m'}$ si $n-2 = m'$ y $h_l = 0$ para $l \in \{m'+1, \ldots, n-2\}$ si $m' < n-2$. Finalmente en caso de que s sea distinto de cero, podemos usar el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real

$$[2n-1; h_0, \ldots, h_{n-2}, 0, \ldots, 0; s]_3.$$

■

A partir del lema anterior, específicamente de las construcciones que se dan en éste, podremos determinar otras 3-secuencias reales cuando se tiene exactamente siete u ocho 3-reyes. Observemos que estos casos no son contemplados en tal resultado.

Corolario 4.3.9. *Para cualesquiera enteros no negativos* s, h_0, h_1, h_2 :

I. *Existe un torneo con* 3*-secuencia real* $[7; h_0, h_1, 0, \ldots, 0; s]_3$;

II. *Existe un torneo con* 3*-secuencia real* $[8; h_0, h_1, h_2, 0, \ldots, 0; s]_3$.

Demostración. Primero consideramos el caso donde $h_i = 0$ para toda i en $\{0, 1, 2\}$. Por el corolario 4.3.3 si $k \neq 2$, entonces existe un torneo con 3-secuencia real $[k; 0, \ldots, 0; 0]_3$, en consecuencia existen dos torneos: uno con 3-secuencia real $[7; 0, \ldots, 0; 0]_3$ y otro con 3-secuencia real $[8; 0, \ldots, 0; 0]_3$. Después, en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[7; 0, \ldots, 0; s]_3$ y otro con 3-secuencia real $[8; 0, \ldots, 0; s]_3$. De esta manera el caso en donde cada h_i es cero queda resuelto.

Resta demostrar el caso donde algún h_i es distinto de cero tanto para (I) como para (II).

(I) Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\{i \in \{0, 1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m'\}.$$

La demostración se basará en las construcciones realizadas anteriormente en el lema 4.3.8, así que continuamente estaremos tomando torneos que fueron construido en dicho lema.

Tomemos T' el torneo construido en el lema 4.3.8 del inciso (a) que resulta de tomar $n = 5$ y y reemplazar m por m'. Una vez considerado los valores anteriores se tiene que

$$V(T') = \{v_0, \ldots, v_4, w_0, \ldots, w_4\} \cup V(T''_0) \cup \ldots \cup V(T''_{m'}).$$

Demostraremos que la 3-secuencia real del torneo

$$T_\alpha = T'[\{v_0, \ldots, v_4, w_0, w_1\} \cup V(T''_0) \cup \ldots \cup V(T''_{m'})]$$

es $[7; h_0, h_1, 0, \ldots, 0; 0]_3$.

Afirmación 1.1. Para cada i en $\{0, \ldots, 4\}$ se tiene que v_i es un 2-rey de T_α.

Demostración de la afirmación 1.1. Sea i en $\{0, \ldots, 4\}$, sabemos que v_i es un

2-rey de T_1', además por definición de T' se tiene que para cada $l \in \{0, \ldots, m'\}$ el vértice v_i domina a cualquier vértice de T_l''. Por lo tanto v_i es un 2-rey de T_α. ▲

Afirmación 1.2. Para cada i en $\{0, 1\}$ se tiene que w_i es un 3-rey de T_α y

$$\{v \in V(T_\alpha) \mid d_{T_\alpha}(w_i, v) = 3\} = \{v_i\}.$$

Demostración de la afirmación 1.2. Sea $i \in \{0, 1\}$, sabemos que w_i es un 2-heredero de v_i en T_1', por lo cual w_i es un 2-rey de $T_1' - \{v_i\}$, además $w_i \to v_{i+1} \to V(T_\alpha) - V(T_1')$, por lo tanto w_i es un 2-rey de $T_\alpha - \{v_i\}$.

Por otro lado, T_1' tiene más de dos 2-reyes por lo cual $N^-_{T_1'}(v_i) \neq \varnothing$, en consecuencia por el lema 2.1.4 existe $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tal que $v_j \to v_i$, pero w_i alcanza a v_j en a lo más dos pasos en T_1', entonces la distancia en T_α de w_i a v_i es a lo más 3. Por la afirmación (2) del lema 4.3.8 sabemos que $d_{T'}(w_i, v_i) = 3$, además T_α es subdigráfica de T', esto implica que $d_{T'}(w_i, v_i) \leq d_{T_\alpha}(w_i, v_i)$, sin embargo ya vimos que $d_{T_\alpha}(w_i, v_i) \leq 3$, por lo tanto $d_{T_\alpha}(w_i, v_i) = 3$. ▲

Afirmación 1.3. Para cada i en $\{0, \ldots, m'\}$ se tiene que $V(T_i'') = H(T_\alpha, v_i)$.

Demostración de la afirmación 1.3. Demostremos primero que el conjunto $V(T_i'')$ está contenido en el conjunto $H(T_\alpha, v_i)_3$, es decir, que para cualquier $x \in V(T_i'')$, x es un 3-rey de $T_\alpha - \{v_i\}$ pero no es un 3-rey de T_α. Sea $x \in V(T_i'')$, por construcción de T' se tiene que $x \to w_i$, además por la afirmación (1.2), w_i es un 2-rey de $T_\alpha - \{v_i\}$, en consecuencia x es un 3-rey de $T_\alpha - \{v_i\}$. Por la afirmación (3) del lema 4.3.8 sabemos que x no puede alcanzar a v_i en tres o menos pasos en T', y como T_α es subdigráfica de T' obtenemos que x no puede alcanzar a v_i en tres o menos pasos en T_α. Por lo tanto $V(T_i'') \subseteq H(T_\alpha, v_i)_3$.

Resta demostrar que $H(T_\alpha, v_i)_3 \subseteq V(T_i'')$. Para demostrar esto último veamos que cualquier otro vértice de T_α que no sea elemento de $V(T_i'')$ no es elemento de $H(T_\alpha, v_i)_3$. Por el lema 4.2.1 si $i \neq j$ entonces $H(T_\alpha, v_i)_3$ y $H(T_\alpha, v_j)_3$ son conjuntos disjuntos, esto nos dice que si $h \in V(T_j'')$ para algún $j \neq i$, entonces $h \notin H(T_\alpha, v_i)_3$ porque $h \in H(T_\alpha, v_j)_3$. Además,

$$K_3(T_\alpha) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, w_0, w_1\}$$

por lo cual ningún elemento de $K_3(T_\alpha)$ puede estar en $H(T_\alpha, v_i)_3$. Por lo tanto $V(T''_i) = H(T_\alpha, v_i)_3$. ▲

Por los razonamiento anteriores obtenemos que

$$K_3(T_\alpha) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, w_0, w_1\}$$

y que para cada i en $\{0, \ldots, m'\}$:

$$V(T''_i) = H(T_\alpha, v_i)_3.$$

En consecuencia la 3-secuencia real de T_α es $[7; h_0, h_1, 0, \ldots, 0; 0]_3$, donde $h_1 = h_{m'}$ si $m' = 1$, y $h_1 = 0$ si $m' = 0$. Finalmente en caso de que s sea distinto de cero, podemos usar el lema 4.3.2 para obtener un torneo con 3-secuencia real $[7; h_0, h_1, 0, \ldots, 0; s]_3$.

(II) Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\{i \in \{0, 1, 2\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m''\}.$$

La demostración es análoga a la que se realizó en (I), pero esta vez reemplazando T_α, T'_1 y m' por T_β, T'_2 y m'' respectivamente, donde

$$T_\beta = T'[\{v_0, \ldots, v_4, w_0, w_1, w_2\} \cup V(T''_0) \cup \ldots \cup V(T''_{m''})].$$

■

En los resultados anterior exhibimos algunas 3-secuencias reales de torneos. En el lema que sigue veremos que las construcciones realizadas en el lema 4.3.8 serán fundamentales para determinar algunas r-secuencias reales de torneos, para $r \geq 4$.

Teorema 4.3.10. *Sean n y r enteros positivos. Si $r \geq 4$, $n \geq 3$ y $n \neq 4$, entonces para cualesquiera enteros no negativos $s, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ existe un torneo con r-secuencia real*

$$[(r-1)n; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; s]_r.$$

Demostración. Por la observación 5 del capítulo 3 si $n \geq 3$ y $n \neq 4$ entonces existe un (n, n)-torneo T que contiene un n-ciclo

$$\gamma = (v^0_0, v^0_1, \ldots, v^0_{n-1}, v^0_0).$$

Notemos que $v_0^0, v_1^0, \ldots, v_{n-1}^0$ son todos los vértices de T ya que dicho torneo consta exactamente de n vértices (ver figura 4.11).

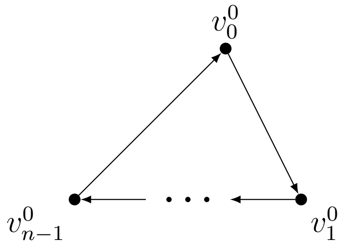

Figura 4.11. El n-ciclo $\gamma = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)$.

Primero demostraremos el lema considerando el caso donde cada h_i es igual a cero. Por el corolario 4.3.3 si $k \neq 2$ y $r' \geq 3$, entonces existe un torneo con r-secuencia real $[k; 0, \ldots, 0; 0]_{r'}$, en consecuencia existe un torneo r-secuencia real $[(r-1)n; 0, \ldots, 0; 0]_r$. Después, en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con r-secuencia real $[(r-1)n; 0, \ldots, 0; s]_r$. De esta manera el caso en donde cada h_i es cero queda resuelto.

Resta demostrar el caso donde al menos un h_i es distinto de cero. La demostración se hará de manera constructiva y consistirá de tres pasos.

Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$M = \{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m\}.$$

Paso 1. Construiremos un torneo donde cada vértice v_i^0 tenga exactamente un 2-heredero, de tal forma que cualquier vértice de dicho torneo sea un 2-rey o un 2-heredero.

Tomemos n vértices nuevos $v_0^1, v_1^1, \ldots, v_{n-1}^1$ y definamos el torneo T_0' de la siguiente manera:

$V(T_0') = V(T) \cup \{v_0^1\}$ y
$F(T_0') = F(T) \cup \{(u, v_0^1) \mid u \in N_T^-[v_0^0]\} \cup \{(v_0^1, u) \mid u \in N_T^+(v_0^0)\}$.

En la figura 4.12 se pueden observar las relaciones de dominación entre el vértice v_0^0 y los demás vértices del torneo T_0'.

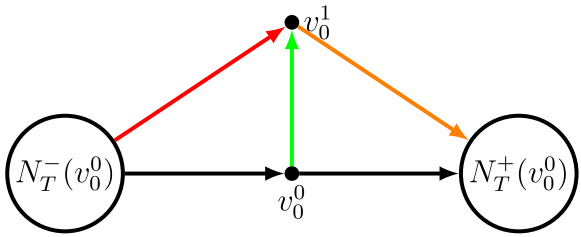

Figura 4.12. Algunas relaciones de dominación en el torneo T_0'.

Por el lema 3.2.5: $v_0^0, v_1^0, \ldots, v_{n-1}^0$ son los 2-reyes de T_0' y v_0^1 es un 2-heredero de v_0^0 en T_0'. Observemos que $v_0^1 \to v_1^0$ ya que $v_0^0 \to v_1^0$.

Ahora supongamos que ya tenemos definido el torneo T_i' con $0 \leq i < n-1$. Definamos el torneo T_{i+1}' de la siguiente forma:

$V(T_{i+1}') = V(T_i') \cup \{v_{i+1}^1\}$ y
$F(T_{i+1}') = F(T_i') \cup \{(u, v_{i+1}^1) \mid u \in N_{T_i'}^-[v_{i+1}^0]\} \cup \{(v_{i+1}^1, u) \mid u \in N_{T_i'}^+(v_{i+1}^0)\}$.

En la figura 4.13 se pueden observar las relaciones de dominación entre el vértice v_{i+1}^0 y los demás vértices del torneo T_{i+1}'.

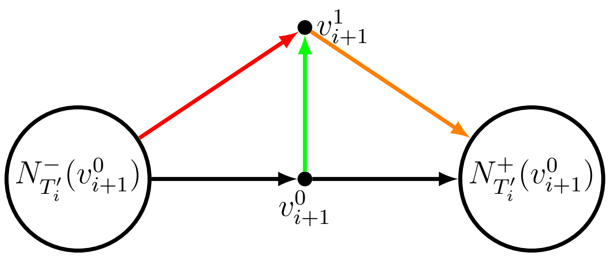

Figura 4.13. Algunas relaciones de dominación en el torneo T_{i+1}'.

Nuevamente por el lema 3.2.5: $v_0^0, v_1^0, \ldots, v_{n-1}^0$ son los 2-reyes de T_{i+1}' y para cada j en $\{0, \ldots, i+1\}$ el vértice v_j^1 es un 2-heredero de v_j^0 en T_{i+1}'.

Notemos que $v_{i+1}^1 \to v_{i+2}^0$ ya que $v_{i+1}^0 \to v_{i+2}^0$ (usando en el subíndice adición mod n). En particular cuando i es igual a $n-2$: $v_0^0, v_1^0, \ldots, v_{n-1}^0$ son los 2-reyes de T'_{n-1} y para cada j en $\{0, \ldots, n-1\}$ el vértice v_j^1 es un 2-heredero de v_j^0 en T'_{n-1}.

Observemos que cada vértice del torneo T'_{n-1} es un 2-rey o un 2-heredero porque

$$V(T'_{n-1}) = \{v_i^j \mid i \in \{0, \ldots, n-1\},\ j \in \{0, 1\}\}.$$

Paso 2. A partir del torneo T'_{n-1} construiremos un nuevo torneo T_{r-2} de orden $(r-1)n$ que poseerá propiedades importantes, las cuales nos permitirán en el desarrollo del paso tres agregar r-herederos a este torneo de manera sencilla.

Sean

$$v_0^2, \ldots, v_0^{r-2}, v_1^2, \ldots, v_1^{r-2}, \ldots, v_{n-1}^2, \ldots, v_{n-1}^{r-2}$$

$(r-3)n$ nuevos vértices, $I = \{0, \ldots, n-1\}$ y $J = \{0, \ldots, r-2\}$.

Construyamos un nuevo torneo T_{r-2} de la siguiente manera: empecemos con T'_{n-1}, después agreguemos los vértices

$$v_0^2, \ldots, v_0^{r-2}, v_1^2, \ldots, v_1^{r-2}, \ldots, v_{n-1}^2, \ldots, v_{n-1}^{r-2}$$

junto con las flechas inducidas por las siguientes relaciones de dominación:

(a) Si $i \in I$, $j \in J$, $k \in J$ y $k - j \geq 2$, entonces $v_i^j \to v_i^k$.

(b) Si $i \in I$ entonces $v_i^{r-2} \to v_i^{r-3} \to \ldots \to v_i^1$.

(c) Si $i \in I$, $j \in J - \{0, 1\}$, $k \in I$, $l \in J - \{0, 1\}$, $j < l$ e $i \neq k$, entonces $v_i^j \to v_k^l$.

(d) Si $i \in I$, $j \in J - \{0, 1\}$, $k \in I$ e $i \neq k$, entonces $v_i^0 \to v_k^j$.

(e) Si $i \in I$, $j \in \{2, \ldots, r-2\}$, $k \in I$ y $v_i^0 \to v_k^0$, entonces $v_i^j \to v_k^j$.

En la siguiente figura se pueden observar algunas relaciones de dominación entre algunos vértices del torneo T_{r-2}.

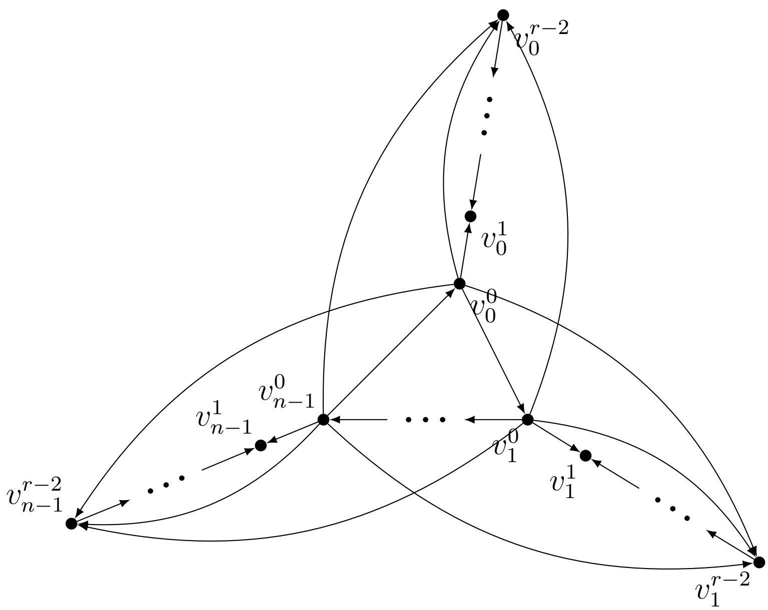

Figura 4.14. Algunas relaciones de dominación en el torneo T_{r-2}.

Para $0 \leq j \leq r-2$ y $1 \leq i \leq r-3$, sean

$$W_j = \{v_0^j, \ldots, v_{n-1}^j\} \text{ y}$$

$$T_i = T_{r-2}[W_0 \cup W_1 \cup \ldots \cup W_i].$$

Notemos que por definición de T_i para cada $i \in \{1, \ldots, r-3\}$ se tiene que $T_i \subseteq T_{i+1}$. La siguiente figura tiene como objetivo reflejar de manera gráfica la contención entre los torneos T_i y T_{i+1}.

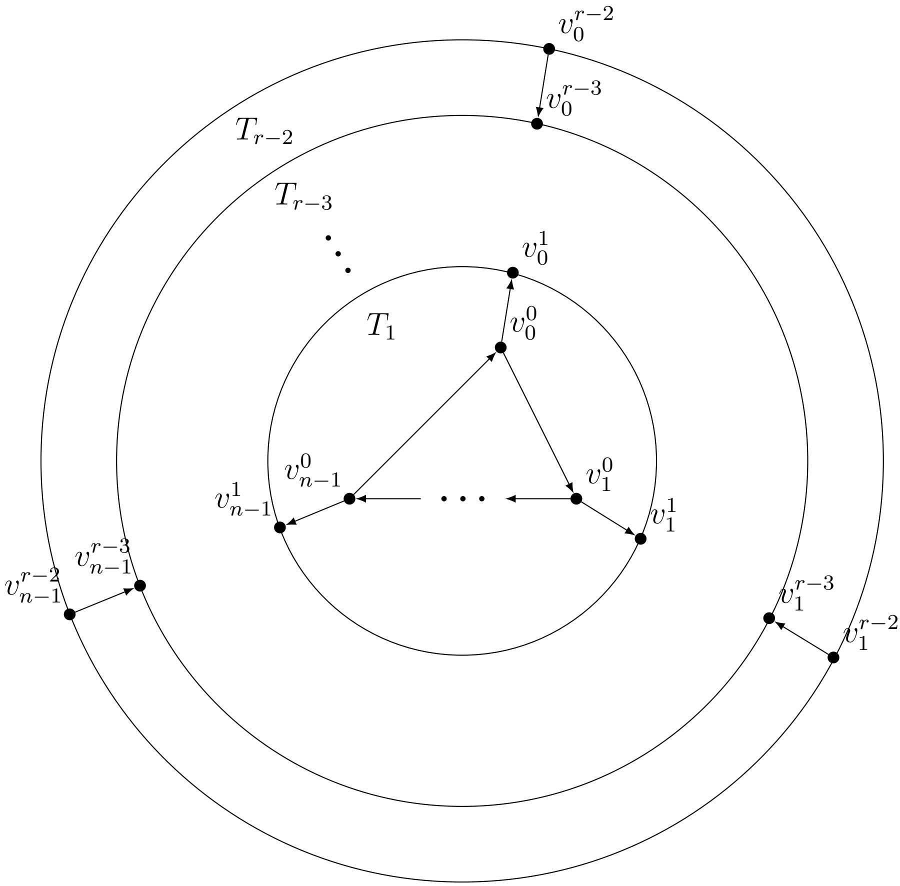

Figura 4.15. $T_i \subseteq T_{i+1}$.

Afirmación 0. Si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $j \in \{1, \ldots, r-2\}$, entonces v_i^0 es un 2-rey de T_j.

Demostración de la afirmación 0. Sean $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots, r-2\}$ y $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Sabemos que v_i^0 es un 2-rey de $T_1 = T'_{n-1}$, y $v_i^0 \to v_k^j$, en consecuencia v_i^0 es un 2-rey de T_j. ▲

Afirmación 1. Si $k \in \{1, \ldots, r-2\}$ y $v_i^0 \to v_j^0$ entonces $v_i^k \to v_j^k$.

Demostración de la afirmación 1. Observemos que por el inciso (e) la afirmación es cierta si $k \in \{2,\ldots,r-2\}$. Resta demostrar que también se cumple si $k=1$.

Notemos que por definición $T \subseteq T'_0 \subseteq T'_1 \subseteq \ldots \subseteq T'_{n-1}$ (estos torneos fueron construidos en el paso 1).

Por otro lado, dado que $i \neq j$ podemos considerar los siguientes casos.

Caso 1. $i < j$. Por definición del torneo T'_i: $v_i^0 \to v_i^1 \to v_j^0$. Además v_j^1 es un 2-heredero de v_j^0 en el torneo T'_j, así $v_i^1 \to v_j^1$ ya que de lo contrario $v_j^1 \to v_i^1 \to v_j^0$, y ésto último no puede pasar porque v_j^1 es un 2-heredero de v_j^0.

Caso 2. $j < i$. Por definición del torneo T'_j: $v_i^0 \to v_j^1$. Después en el torneo T'_i: $v_i^1 \to v_j^0$, y nuevamente obtenemos que $v_i^1 \to v_j^1$ porque v_j^1 es un 2-heredero de v_j^0 en el torneo T'_i. ▲

Afirmación 2. Sea $k \in \{1,\ldots,r-3\}$, si para cada i en $\{0,\ldots,n-1\}$ y para cada j en $\{1,\ldots,k\}$ se tiene que v_i^j es un $(j+2)$-rey de T_k y

$$\{v \in V(T_k) \mid d_{T_k}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}$$

entonces para cada i en $\{0,\ldots,n-1\}$ y para cada j en $\{1,\ldots,k+1\}$ se tiene que v_i^j es un $(j+2)$-rey de T_{k+1} y

$$\{v \in V(T_{k+1}) \mid d_{T_{k+1}}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Demostración de la afirmación 2. Sea $v_i^j \in V(T_{k+1})$ con $0 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j \leq k+1$. Consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $j \leq k$. Por hipótesis el vértice v_i^j alcanza a cualquier vértice $z \in V(T_{k+1}) - (W_{k+1} \cup \{v_i^0\})$ en a lo más $j+1$ pasos, y además

$$v_i^j \to \ldots \to v_i^1 \to v_{i+1}^0 \to W_{k+1}$$

por lo cual v_i^j alcanza a cualquier vértice $z \in V(T_{k+1}) - \{v_i^0\}$ en a lo más $j+1$ pasos.

Sabemos por hipótesis nuevamente que $d_{T_k}(v_i^j, v_i^0) = j+2$, sin embargo T_k es subdigráfica de T_{k+1}, entonces v_i^j alcanza a v_i^0 en a lo más $j+2$ pasos en T_{k+1}. Veamos que

$$d_{T_{k+1}}(v_i^j, v_i^0) = j+2.$$

Para demostrarlo, procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T_{k+1} de v_i^j a v_i^0 es menor que $j+2$, entonces existe

$$W = (x_0 = v_i^j, \ldots, x_a = v_i^0)$$

una (v_i^j, v_i^0)-trayectoria con $a < j+2$. Observemos que $V(W) \nsubseteq V(T_k)$ porque la distancia en T_k de v_i^j a v_i^0 es igual a $j+2$ por hipótesis, por lo tanto existe $u \in V(W)$ tal que $u \notin V(T_k)$. De ahí que podamos tomar

$$g = \text{máx}\{i \mid x_i \notin V(T_k)\}.$$

Notemos que $0 < g < a$ porque v_i^j y v_i^0 son ambos vértices de T_k. Así $x_g = v_f^{k+1}$ para algún $f \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $x_{g+1} \in V(T_k)$, pero entonces por los incisos (a), (b), (c) y (d) obtenemos que $x_{g+1} = v_f^k$, en consecuencia

$$W' = (x_{g+1} = v_f^k, \ldots, x_a = v_i^0)$$

es una (v_f^k, v_i^0)-trayectoria en T_k con $\ell(W') \leq a-2$ ya que $g+1 \geq 2$, pero por ser v_i^0 un 2-rey de T_k existe una (v_i^0, v_f^0)-trayectoria de longitud menor o igual a dos, entonces

$$d_{T_k}(v_f^k, v_f^0) \leq a < j+2 \leq k+2$$

en consecuencia

$$d_{T_k}(v_f^k, v_f^0) < k+2$$

contradiciendo que la distancia en T_k de v_f^k a v_f^0 sea exactamente $k+2$.

La contradicción vino de suponer que la distancia en T_{k+1} de v_i^j a v_i^0 era menor que $j+2$. Por otro lado ya sabíamos que v_i^j alcanzaba a v_i^0 en a lo más $j+2$ pasos en T_{k+1}, por lo tanto podemos concluir que

$$d_{T_{k+1}}(v_i^j, v_i^0) = j+2.$$

En resumen lo que hemos obtenido del caso (1) es que: para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y para cada j en $\{1, \ldots, k\}$, el vértice v_i^j es un $(j+2)$-rey de T_{k+1} y

$$\{v \in V(T_{k+1}) \mid d_{T_{k+1}}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Caso 2. $j = k+1$. Sabemos que $v_i^{k+1} \to v_i^k$, y además v_i^k alcanza a cualquier vértice $z \in V(T_{k+1}) - \{v_i^0\}$ en a lo más $k+1$ pasos (caso 1), por lo tanto v_i^{k+1} alcanza a cualquier vértice $z \in V(T_{k+1}) - \{v_i^0\}$ en a lo más $k+2$ pasos.

Por el caso 1: $d_{T_{k+1}}(v_i^k, v_i^0) = k+2$, y dado que $v_i^{k+1} \to v_i^k$ obtenemos que v_i^{k+1} alcanza a v_i^0 en a lo más $k+3$ pasos en T_{k+1}. Veamos que

$$d_{T_{k+1}}(v_i^{k+1}, v_i^0) = k+3.$$

Para demostrarlo procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T_{k+1} de v_i^{k+1} a v_i^0 es menor que $k+3$, entonces existe

$$W = (x_0 = v_i^{k+1}, \ldots, x_a = v_i^0)$$

una (v_i^{k+1}, v_i^0)-trayectoria con $a < k+3$.

Sea

$$g = \text{mín}\{i \mid x_i \in V(T_k)\}.$$

Notemos que $0 < g \leq a$ porque $v_i^{k+1} \in V(T_{k+1}) - V(T_k)$ y $v_i^0 \in V(T_k)$. Así por los incisos (a), (b), (c) y (d) obtenemos que $x_g = v_f^k$ para algún $f \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Notemos que $v_i^k \notin V(W)$ porque si v_i^k fuese elemento de $V(W)$ se tendría que la distancia en T_{k+1} de v_i^k a v_i^0 sería menor o igual a $k+1$, y esto no puede pasar porque como se mostró en el caso (1) dicha distancia es exactamente $k+2$. En consecuencia $v_f^k \neq v_i^k$.

Ahora observemos que $g \neq 1$, ya que si g fuese igual a uno entonces x_1 sería igual a v_i^k porque por los incisos (a)-(d) el único vértice de T_k que es dominado por v_i^{k+1} es v_i^k, y como ya mencionamos anteriormente no puede pasar que v_i^k sea elemento de $V(W)$.

Aún más $g \neq 2$, para probar esta desigualdad supongamos lo contrario, es decir, que g es igual a dos. Entonces x_1 es un elemento de W_{k+1} que domina al vértice v_f^k, sin embargo, por los incisos (a)-(d), el único elemento de W_{k+1} que domina a v_f^k es v_f^{k+1}, esto quiere decir que $x_1 = v_f^{k+1}$. Del razonamiento anterior obtenemos que $v_i^{k+1} \to v_f^{k+1}$, lo cual implica que $v_i^0 \to v_f^0$ por el incisos (e), en consecuencia

$$(x_g = v_f^k, \ldots, x_a = v_i^0, v_f^0)$$

es un (v_f^k, v_f^0)-camino de longitud $a - g + 1$, pero

$$a - g + 1 = a - 2 + 1 = a - 1 < k + 3 - 1 = k + 2$$

esto quiere decir que la longitud de tal camino es menor o igual a $k + 1$, lo cual es una contradicción ya que la distancia en T_{k+1} de v_f^k a v_f^0 es $k + 2$ por el caso (1).

Dado que $g \geq 3$, se tiene que

$$(x_g = v_f^k, \ldots, x_a = v_i^0)$$

es una (v_f^k, v_i^0)-trayectoria de longitud igual a $a - g$, sin embargo, v_i^0 alcanza a v_f^0 en a lo más dos pasos porque por la afirmación (0) v_i^0 es un 2-rey de T_{k+1}, entonces la distancia en T_{k+1} de v_f^k a v_i^0 es menor o igual a $a - g + 2$, pero

$$a - g + 2 < k + 3 - 3 + 2 = k + 2$$

entonces

$$d_{T_{k+1}}(v_f^k, v_f^0) < k + 2$$

lo cual es una contradicción ya que la distancia en T_{k+1} de v_f^k a v_f^0 es $k + 2$ (caso 1). La contradicción vino de suponer que la distancia en T_{k+1} de v_i^{k+1} a v_i^0 era menor que $k+3$. Por otro lado ya sabíamos que v_i^{k+1} alcanzaba a v_i^0 en a lo más $k + 3$ pasos en T_{k+1}, en consecuencia

$$d_{T_{k+1}}(v_i^{k+1}, v_i^0) = k + 3.$$

Por lo tanto, de los casos (1) y (2) concluimos que para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y j en $\{1, \ldots, k + 1\}$ el vértice v_i^j es un $(j + 2)$-rey de T_{k+1} y

$$\{v \in V(T_{k+1}) \mid d_{T_{k+1}}(v_i^j, v) = j + 2\} = \{v_i^0\}. \ \blacktriangle$$

Veamos ahora que T_1 cumple con las condiciones de la afirmación 2. Para ello tomemos v_i^1 un 2-heredero del 2-rey v_i^0, por definición v_i^1 no es un 2-rey de T_1 pero si es un 2-rey de $T_1 - \{v_i^0\}$. Sólo resta ver que la distancia en T_1 de v_i^1 a v_i^0 es igual a tres.

Tenemos que v_i^1 alcanza a v_{i-1}^0 en dos o menos pasos, y además $v_{i-1}^0 \to v_i^0$ (usando en el subíndice adición mod n), en consecuencia v_i^1 alcanza a v_i^0

en tres o menos pasos, sin embargo, v_i^1 es un 2-heredero v_i^0 en T_1, es decir, $d_{T_1}(v_i^1, v_i^0) \geq 3$, por lo tanto

$$d_{T_1}(v_i^1, v_i^0) = 3$$

lo cual implica que para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ el vértice v_i^1 es un 3-rey de T_1 y

$$\{v \in V(T_1) \mid d_{T_1}(v_i^1, v) = 3\} = \{v_i^0\}.$$

Usando la afirmación (2) obtenemos que: para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y j en $\{1, 2\}$ el vértice v_i^j es un $(j+2)$-rey de T_2 y

$$\{v \in V(T_2) \mid d_{T_2}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Observemos que nuevamente el torneo T_2 cumple con las condiciones de la afirmación (2). De esta manera podemos seguir usando reiteradas veces la afirmación (2) para finalmente obtener que: para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y j en $\{1, 2, \ldots, r-2\}$ el vértice v_i^j es un $(j+2)$-rey de T_{r-2} y

$$\{v \in V(T_{r-2}) \mid d_{T_{r-2}}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Paso 3. En este último paso partiendo del torneo T_{r-2} construiremos un torneo T' el cual tendrá la siguiente r-secuencia real:

$$[(r-1)n; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; 0]_r.$$

Ahora tomemos $m+1$ torneos: $T_0'' \ldots, T_m''$ donde cada torneo T_i'' tenga exactamente h_i vértices, de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones: si $i \in \{0, \ldots, m\}$, $j \in \{0, \ldots, m\}$ e $i \neq j$, entonces $V(T_i'') \cap V(T_j'') = \varnothing$, y si $i \in \{0, \ldots, m\}$, entonces $V(T_i'') \cap V(T_{r-2}) = \varnothing$.

Recordemos que $M = \{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m\}$, $I = \{0, \ldots, n-1\}$ y $J = \{0, \ldots, r-2\}$.

Construyamos un nuevo torneo T' de la siguiente manera: empecemos con $T_{r-2} \cup T_0'' \cup \ldots \cup T_m''$, después agregamos las flechas inducidas por las siguientes relaciones de dominación:

(I) Si $i \in I$, $j \in J - \{r-2\}$ y $k \in M$, entonces $v_i^j \to V(T_k'')$.

(II) Si $i \in M$ entonces $V(T_i'') \to v_i^{r-2}$.

(III) Si $i \in I$, $j \in M$ e $i \neq j$, entonces $v_i^{r-2} \to V(T_j'')$.

(IV) Si $i \in M$, $j \in M$ y $v_i^0 \to v_j^0$, entonces $V(T_i'') \to V(T_j'')$.

Observemos que

$$V(T') = \{v_i^j \mid i \in \{0, \ldots, n-1\},\ j \in \{0, \ldots, r-2\}\} \cup \bigcup_{i=0}^{m} V(T_i'').$$

A continuación demostraremos que la r-secuencia real del torneo T' es

$$[(r-1)n; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; 0]_r.$$

Las siguientes afirmaciones nos serán de gran utilidad.

Afirmación 3. Para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ se tiene que el vértice v_i^0 es un 2-rey de T'.

Demostración de la afirmación 3. Sean $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $k \in \{0, \ldots, m\}$. Por la afirmación (0) sabemos que v_i^0 es un 2-rey del torneo T_{r-2}, además por el inciso (I) $v_i^0 \to V(T_k'')$, por lo tanto v_i^0 es un 2-rey de T'. ▲

Afirmación 4. Para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y j en $\{1, 2, \ldots, r-2\}$ se tiene que v_i^j es un $(j+2)$-rey de T' y

$$\{v \in V(T') \mid d_{T'}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Demostración de la afirmación 4. Sean $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, r-2\}$ y $k \in \{0, \ldots, m\}$. Anteriormente ya hicimos notar que v_i^j alcanza a cualquier vértice $z \in V(T_{r-2}) - \{v_i^0\}$ en a lo más $j+1$ pasos, y además

$$v_i^j \to \ldots \to v_i^1 \to v_{i+1}^0 \to V(T_k'') \text{ (usando en el subíndice adición mod } n).$$

Por lo tanto, v_i^j alcanza a cualquier vértice $z \in V(T') - \{v_i^0\}$ en a lo más $j+1$ pasos.

Por otra parte sabemos que

$$d_{T_{r-2}}(v_i^j, v_i^0) = j+2$$

y $T_{r-2} \subseteq T'$, entonces la distancia en T' de v_i^j a v_i^0 es menor o igual a $j+2$.

Veamos que

$$d_{T'}(v_i^j, v_i^0) = j+2.$$

Para demostrarlo procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T' de v_i^j a v_i^0 es menor que $j+2$, entonces existe

$$W = (x_0 = v_i^j, \ldots, x_a = v_i^0)$$

una (v_i^j, v_i^0)-trayectoria con $a < j+2$. Observemos que $V(W) \nsubseteq V(T_{r-2})$ porque la distancia en T_{r-2} de v_i^j a v_i^0 es igual a $j+2$, por lo tanto existe $u \in V(W)$ tal que $u \notin V(T_{r-2})$.

Sea

$$g = \text{máx}\{i \in \{0, \ldots, a\} \mid x_i \notin V(T_{r-2})\}.$$

Notemos que $0 < g < a$ porque v_i^j y v_i^0 son ambos vértices de T_{r-2}. Así $x_g \in V(T_l'')$ para algún $l \in M$ y $x_{g+1} \in V(T_{r-2})$, entonces por los incisos (I), (II) y (III) obtenemos que $x_{g+1} = v_l^{r-2}$, en consecuencia

$$W' = (x_{g+1} = v_l^{r-2}, \ldots, x_a = v_i^0)$$

es una (v_l^{r-2}, v_i^0)-trayectoria en T_{r-2} con $\ell(W') \leq a-2$ ya que $g+1 \geq 2$, pero por ser v_i^0 un 2-rey de T_{r-2} existe una (v_i^0, v_l^0)-trayectoria de longitud menor o igual a dos, entonces utilizando también el hecho de que $1 \leq j \leq r-2$ obtenemos que

$$d_{T_{r-2}}(v_l^{r-2}, v_l^0) \leq a < j+2 \leq r$$

en consecuencia

$$d_{T_{r-2}}(v_l^{r-2}, v_l^0) < r$$

lo que contradice que

$$d_{T_{r-2}}(v_l^{r-2}, v_l^0) = r.$$

Entonces

$$d_{T'}(v_i^j, v_i^0) = j+2.$$

En resumen: para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y j en $\{1, \ldots, r-2\}$ el vértice v_i^j es un $(j+2)$-rey de T' y

$$\{v \in V(T') \mid d_{T'}(v_i^j, v) = j+2\} = \{v_i^0\}. \ \blacktriangle$$

Afirmación 5. Sea $k \in M$, si $v \in V(T_k'')$ entonces v es un r-heredero de v_k^0 en T'.

Demostración de la afirmación 5. Primero veamos que v es un r-rey de $T' - \{v_k^0\}$. Sabemos que v_k^{r-2} es un r-rey de T' y

$$\{u \in V(T') \mid d_{T'}(v_k^{r-2}, u) = r\} = \{v_k^0\},$$

ésto implica que v_k^{r-2} es un $(r-1)$-rey $T' - \{v_k^0\}$, y dado que $v \to v_k^{r-2}$ concluimos que v es un r-rey $T' - \{v_k^0\}$.

Por la afirmación (4) $d_{T'}(v_k^{r-2}, v_k^0) = r$ por lo cual $d_{T'}(v, v_k^0) \leq r+1$. Veamos que

$$d_{T'}(v, v_k^0) = r + 1.$$

Para demostrarlo procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T' de v a v_k^0 es menor que $r+1$, entonces existe

$$W = (x_0 = v, \ldots, x_a = v_k^0)$$

una (v, v_k^0)-trayectoria con $a < r+1$.

Sea

$$g = \text{mín}\{i \in \{0, \ldots, a\} \mid x_i \in V(T_{r-2})\}.$$

Notemos que $0 < g \leq a$ porque $v \in V(T') - V(T_{r-2})$ y $v_k^0 \in V(T_{r-2})$. Así por los incisos (I), (II) y (III) obtenemos que $x_g = v_f^{r-2}$ para algún $f \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Notemos que $v_k^{r-2} \notin V(W)$ porque si v_k^{r-2} fuese elemento de $V(W)$ se tendría que la distancia en T' de v_k^{r-2} a v_k^0 sería menor o igual a $r-1$ porque $a < r+1$, y esto no puede pasar porque dicha distancia es exactamente r (afirmación 4). En consecuencia $v_f^{r-2} \neq v_k^{r-2}$.

Ahora observemos que $g \neq 1$, por que si g fuese igual a uno entonces $x_1 = v_k^{r-2}$, lo cual no puede pasar. Aún más, $g \geq 2$ porque si g fuese igual a dos tendríamos por los incisos (I)-(III) que $v \to x_2 \to v_f^{r-2}$ con $x_2 \in V(T_f'')$, lo cual implicaría que $v_k^0 \to v_f^0$ (IV), en consecuencia

$$(x_g = v_f^{r-2}, \ldots, x_a = v_k^0, v_f^0)$$

sería un (v_f^{r-2}, v_f^0)-camino de longitud $a-g+1$, pero

$$a-g+1 = a-2+1 = a-1 < r+1-1 = r$$

entonces la distancia en T' de v_f^{r-2} a v_f^0 sería menor que r, y ésto implicaría una contradicción porque dicha distancia es exactamente r.

Dado que $g \geq 3$, se tiene que

$$(x_g = v_f^{r-2}, \ldots, x_a = v_k^0)$$

es una (v_f^{r-2}, v_k^0)-trayectoria de longitud $a-g$, sin embargo, v_k^0 alcanza a v_f^0 en a lo más dos pasos porque v_k^0 es un 2-rey de T', lo cual implica que

$$d_{T'}(v_f^{r-2}, v_f^0) \leq a-g+2 < r+1-3+2 = r$$

es decir,

$$d_{T'}(v_f^{r-2}, v_f^0) < r$$

lo cual es una contradicción ya que la distancia en T' de v_f^{r-2} a v_f^0 es r como lo asegura la afirmación (4). La contradicción vino de suponer que la distancia en T' de v a v_k^0 era menor que $r+1$, y como ya sabíamos que dicha distancia era menor o igual $r+1$ obtenemos que $d_{T'}(v, v_k^0) = r+1$. Por lo tanto v es un r-heredero de v_k^0. ▲

Por las afirmaciones (3), (4) y (5) obtenemos que

$$K_r(T') = \{v_i^j \mid i \in \{0, \ldots, n-1\},\ j \in \{0, \ldots, r-2\}\}$$

y para cada i en $\{0, \ldots, m\}$:

$$V(T_i'') = H(T', v_i)_r.$$

Ahora recordemos que

$$V(T') = \{v_i^j \mid i \in \{0, \ldots, n-1\},\ j \in \{0, \ldots, r-2\}\} \cup \bigcup_{i=0}^{m} V(T_i'')$$

y que la cardinalidad del conjunto $V(T_i'')$ es h_i para $i \in \{0, \ldots, m\}$. En consecuencia la cardinalidad de los conjuntos

$$K_r(T'), H(T', v_1)_r, \ldots, H(T', v_{n-1})_r$$

es $(r-1)n, h_0, \ldots, h_{n-1}$ respectivamente, donde $h_{n-1} = h_m$ si $n-1 = m$, y $h_l = 0$ para $n-1 \geq l > m$ si $m < n-1$, por lo tanto la r-secuencia real de T' es $[(r-1)n; h_0, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; 0]_r$. Finalmente en caso de que s sea distinto de cero, podemos usar el lema 4.3.2 para obtener un torneo con r-secuencia real $[(r-1)n; h_0, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; s]_r$.

$\blacksquare$

Corolario 4.3.11. *Sean n y r enteros positivos. Si $r \geq 4$, $n \geq 3$ y $n \neq 4$, entonces para cualesquiera enteros no negativos $q, s, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ existe un torneo con r-secuencia real*

$$[(r-1)n + q; h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}, 0, \ldots, 0; s]_r.$$

Demostración. Primero demostraremos el lema considerando el caso donde cada h_i es igual a cero. Por el corolario 4.3.3 si $k \neq 2$ y $r' \geq 3$, entonces existe un torneo con r-secuencia real $[k; 0, \ldots, 0; 0]_{r'}$, en consecuencia existe un torneo r-secuencia real $[(r-1)n + q; 0, \ldots, 0; 0]_r$. Después, en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con r-secuencia real $[(r-1)n + q; 0, \ldots, 0; s]_r$. De esta manera el caso en donde cada h_i es cero queda resuelto.

Resta demostrar el caso donde al menos un h_i es distinto de cero. Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$M = \{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \ldots, m\}.$$

Tomemos el torneo T' construido en el lema 4.3.10, observemos que si q es igual a cero entonces el torneo T' tiene la r-secuencia real deseada. En caso de que q sea distinto de cero tomemos un torneo Q con conjunto de vértices $V(Q) = \{u_1, \ldots, u_q\}$. Y consideremos $T'' = (V(T''), F(T''))$ un nuevo torneo con

$$V(T'') = V(T') \cup V(Q) \text{ y}$$
$$F(T'') = F(T') \cup F(Q) \cup A \cup B$$

donde

$A = \{(u_i, v) \mid v \in N^+_{T'}(v_0^{r-2}),\ i \in \{1,\ldots,q\}\}$ y
$B = \{(v, u_i) \mid v \in N^-_{T'}[v_0^{r-2}],\ i \in \{1,\ldots,q\}\}$

En la siguiente figura se pueden observar las relaciones de dominación entre el vértice v_0^{r-2} con los demás vértices del torneo T''.

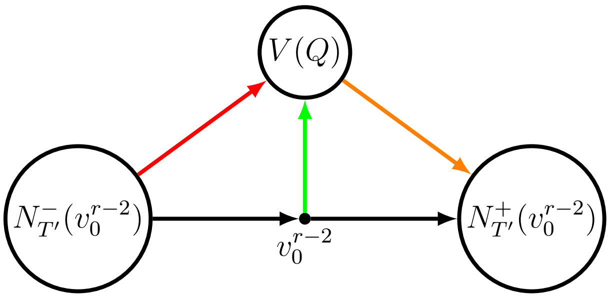

Figura 4.16. Algunas relaciones de dominación en el torneo T''.

Demostraremos que la r-secuencia real de T'' es

$$[(r-1)n+q; h_0,\ldots,h_{n-1},0,\ldots,0;0]_r.$$

Afirmación 1.1. Para cada i en $\{0,\ldots,n-1\}$ se tiene que v_i^0 es un 2-rey de T''.

Demostración de la afirmación 1.1. Sea $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Sabemos que v_i^0 es un 2-rey de T', además $v_i^0 \rightarrow v_0^{r-2}$, entonces por definición de T'' se tiene que $v_i^0 \rightarrow V(Q)$. Por lo tanto v_i^0 es un 2-rey de T''. ▲

Afirmación 1.2. Para cada i en $\{0,\ldots,n-1\}$ y j en $\{1,2,\ldots,r-2\}$ se tiene que v_i^j es un $(j+2)$-rey de T'' y

$$\{v \in V(T'') \mid d_{T''}(v_i^j, v)\} = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Demostración de la afirmación 1.2. Sean $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ y $j \in \{1,\ldots,r-2\}$. Por la afirmación (4) del lema 4.3.10: v_i^j es una $(j+1)$-rey $T' - \{v_i^0\}$, además $v_i^j \rightarrow \ldots \rightarrow v_i^1 \rightarrow v_{i+1}^0 \rightarrow V(Q)$ (usando en el subíndice adición mod n). Por lo tanto v_i^j alcanza a cualquier vértice $z \in V(T'') - \{v_i^0\}$ en a lo más $j+1$ pasos.

Por otra parte sabemos que

$$d_{T'}(v_i^j, v_i^0) = j + 2$$

y que $T' \subseteq T''$, entonces la distancia en T'' de v_i^j a v_i^0 es menor o igual a $j + 2$.

Veamos que

$$d_{T''}(v_i^j, v_i^0) = j + 2.$$

Para demostrarlo procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T'' de v_i^j a v_i^0 es menor que $j + 2$, entonces existe

$$W = (x_0 = v_i^j, \ldots, x_a = v_i^0)$$

una (v_i^j, v_i^0)-trayectoria en T'' con $a < j+2$. Observemos que $V(W) \nsubseteq V(T')$ porque la distancia en T' de v_i^j a v_i^0 es igual a $j + 2$, por lo tanto existe $u \in V(W)$ tal que $u \notin V(T')$. Por lo que podemos tomar

$$g = \text{máx}\{i \in \{0, \ldots, a\} \mid x_i \notin V(T')\}.$$

Notemos que $0 < g < a$ porque v_i^j y v_i^0 son ambos vértices de T'.

Veamos que $g \neq 1$, para ello supongamos lo contrario, es decir, que $g = 1$. Así el único vértice de W que no está en $V(T')$ es x_1, es decir, $x_1 \in V(Q)$. Como $v_i^j \to x_1$ entonces por definición de T'' obtenemos que $v_i^j = v_0^{r-2}$ o $v_i^j \to v_0^{r-2}$.

Caso 1. Si $v_i^j = v_0^{r-2}$ entonces $i = 0$ y $j = r - 2$. Dado $x_1 \to x_2$ por definición de T'' obtenemos que $v_0^{r-2} \to x_2$ (ver figura 4.17), entonces

$$W' = (v_0^{r-2}, x_2, \ldots, x_a = v_0^0)$$

es un (v_0^{r-2}, v_0^0)-camino en T' con $\ell(W') = a - 1$, en consecuencia

$$d_{T'}(v_0^{r-2}, v_0^0) \leq a - 1 < j + 1 \leq r - 1$$

lo cual implica que

$$d_{T'}(v_0^{r-2}, v_0^0) < r - 1$$

y ésto es una contradicción ya que por la afirmación (4) del lema 4.3.10

$$d_{T'}(v_0^{r-2}, v_0^0) = r.$$

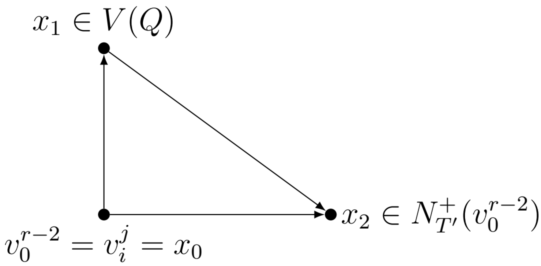

Figura 4.17.

Caso 2. $v_i^j \to v_0^{r-2}$. Si $j = r-2$ entonces $v_i^{r-2} \to v_0^{r-2}$, notemos que nuevamente $v_0^{r-2} \to x_2$ (ver figura 4.18), en consecuencia

$$W' = (v_i^{r-2}, v_0^{r-2}, x_2, \ldots, x_a = v_i^0)$$

es un (v_i^{r-2}, v_i^0)-camino en T' con $\ell(W') = a$, lo cual implica que

$$d_{T'}(v_i^{r-2}, v_i^0) \leq a < j+2 \leq r$$

y ésto nuevamente es una contradicción porque la distancia en T' de v_i^{r-2} a v_i^0 es r.

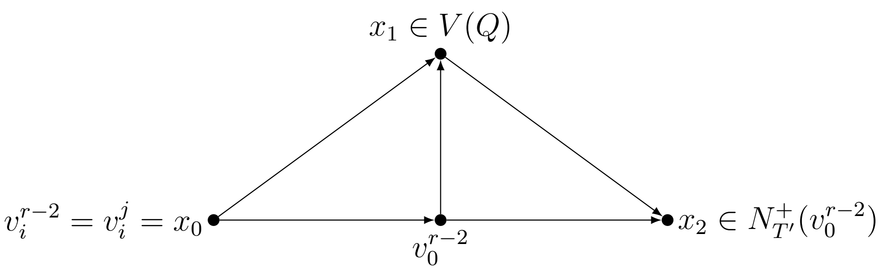

Figura 4.18.

Si $j \leq r-3$, entonces

$$W' = (v_0^{r-2}, x_2, \ldots, x_a = v_i^0)$$

es un (v_0^{r-2}, v_i^0)-camino de longitud $a-1$, pero por ser v_i^0 un 2-rey de T' la distancia en T' de v_i^0 a v_0^0 es menor o igual a dos, en consecuencia

$$d_{T'}(v_0^{r-2}, v_0^0) \leq a + 1 < j + 3 \leq r$$

y entonces

$$d_{T'}(v_0^{r-2}, v_0^0) < r$$

lo cual es una contradicción.

Notemos que en cualquier caso llegamos a una contradicción. Por lo tanto $g > 1$.

Dado que $g > 1$ obtenemos que

$$W' = (x_{g+1}, \ldots, x_a = v_i^0)$$

es una (x_{g+1}, v_i^0)-trayectoria en T' de longitud $a - g - 1$, pero $g + 1 \geq 3$ por lo cual $a - g - 1 \leq a - 3$, entonces la longitud de W' es menor o igual a $a - 3$.

Veamos ahora en donde está el vértice x_{g+1}. Por construcción del torneo T' se tiene que

$$V(T_{r-3}) - \{v_0^{r-3}\} \to v_0^{r-2}$$

esto implica que $N^+_{T'}(v_0^{r-2}) \subseteq \{v_0^{r-3}\} \cup (W_{r-2} - \{v_0^{r-2}\}) \cup \bigcup_{l=0}^{m} V(T_l'')$.

Por otro lado, sabemos que para cualquier vértice z de Q se tiene que

$$N^+_{T''}(z) \subseteq V(Q) \cup N^+_{T'}(v_0^{r-2}).$$

Sin embargo por la elección de g, sabemos que $x_g \in V(Q)$, $x_g \to x_{g+1}$ y que $x_{g+1} \in V(T')$, esto implica que

$$x_{g+1} \in N^+_{T'}(v_0^{r-2})$$

en consecuencia

$$x_{g+1} \in \{v_0^{r-3}\} \cup (W_{r-2} - \{v_0^{r-2}\}) \cup \bigcup_{l=0}^{m} V(T_l'').$$

Por las afirmaciones (4) y (5) del lema 4.3.10 obtenemos lo siguiente: si $x_{g+1} = v_0^{r-3}$ entonces $d_{T'}(x_{g+1}, v_0^0) = r - 1$, si $x_{g+1} = v_t^{r-2}$ para algún $t \in \{0 \ldots, n-1\}$ entonces $d_{T'}(x_{g+1}, v_t^0) = r$, y si $x_{g+1} \in V(T_l'')$ para algún $l \in \{0, \ldots, m\}$ entonces $d_{T'}(x_{g+1}, v_l^0) = r + 1$. Por lo tanto en cualquier caso existe $c \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que

$$d_{T'}(x_{g+1}, v_c^0) \geq r - 1$$

sin embargo para cualquier $d \in \{0, \ldots, n-1\}$ la distancia en T' de v_i^0 a v_d^0 es menor o igual a dos porque v_i^0 es un 2-rey de T', y además anteriormente ya habíamos obtenido que W' era una (x_{g+1}, v_i^0)-trayectoria en T' de longitud menor o iguala a $a - 3$, entonces

$$d_{T'}(x_{g+1}, v_d^0) \leq a - 3 + 2 = a - 1 < j + 1 \leq r - 1$$

en consecuencia, para cualquier $d \in \{0, \ldots, n-1\}$ se tiene que

$$d_{T'}(x_{g+1}, v_d^0) < r - 1,$$

lo cual es una contradicción a que exista $c \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que

$$d_{T'}(x_{g+1}, v_c^0) \geq r - 1.$$

Por lo tanto

$$d_{T'}(v_i^j, v_i^0) = j + 2.$$

De los razonamiento anteriores concluimos que: para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y j en $\{1, 2, \ldots, r-2\}$ el vértice v_i^j es un $(j+2)$-rey de T'' y

$$\{v \in V(T'') \mid d_{T''}(v_i^j, v) = j + 2\} = \{v_i^0\}. \quad \blacktriangle$$

Afirmación 1.3. Si $u_i \in V(Q)$, entonces u_i es un r-rey de T'' y

$$\{v \in V(T'') \mid d_{T''}(u_i, v) = r\} = \{v_0^0\}.$$

Demostración de la afirmación 1.3. Sabemos que $v_0^{r-2} \to v_0^{r-3}$ entonces u_i domina a v_0^{r-3}, sin embargo por la afirmación (4) del lema 4.3.10 : v_0^{r-3} es un $(r-2)$-rey de $T' - \{v_0^0\}$, por lo cual u_i alcanza a cualquier vértice de $T'' - \{v_0^0\}$ en a lo más $r - 1$ pasos. Además, para cualquier $u_k \in V(Q)$ se tiene que

$$u_i \to v_0^{r-3} \to \ldots \to v_0^1 \to v_1^0 \to u_k$$

en consecuencia u_i es un $(r-1)$-rey de $T'' - \{v_0^0\}$.

Por otra parte, por la afirmación (1.2) la distancia en T'' de v_0^{r-3} a v_0^0 es $r-1$, en consecuencia la distancia en T'' de u_i a v_0^0 es a lo más r. Veamos que dicha distancia es justamente r, para ello procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T'' de u_i a v_0^0 es menor que r, entonces existe

$$W = (x_0 = u_i, x_1, \ldots, x_a = v_0^0)$$

una (u_i, v_0^0)-trayectoria en T'' de longitud menor que r, entonces

$$W' = (v_0^{r-2}, x_1, \ldots, x_a = v_0^0)$$

es una (v_0^{r-2}, v_0^0)-trayectoria en T'' de longitud menor que r, y ésto es una contradicción porque la distancia en T'' de v_0^{r-2} a v_0^0 es r como lo establece la afirmación (1.2). Por lo tanto la distancia en T'' de u_i a v_0^0 es igual a r. ▲

Afirmación 1.4. Sea $k \in \{0, \ldots, m\}$, si $v \in V(T_k'')$ entonces v es un r-heredero de v_k^0 en T'' .

Demostración de la afirmación 1.4. Sea $v \in V(T_k'')$, primero veamos que v es un r-rey de $T'' - \{v_k^0\}$. Sabemos por la afirmación (1.2) que v_k^{r-2} es un r-rey de T'' y

$$\{u \in V(T'') \mid d_{T''}(v_k^{r-2}, u) = r\} = \{v_k^0\},$$

ésto implica que v_k^{r-2} es un $(r-1)$-rey $T'' - \{v_k^0\}$, y dado que $v \to v_k^{r-2}$ concluimos que v es un r-rey $T'' - \{v_k^0\}$.

Por la afirmación (1.2) $d_{T''}(v_k^{r-2}, v_k^0) = r$ por lo cual $d_{T''}(v, v_k^0) \leq r+1$. Veamos que $d_{T''}(v, v_k^0) = r + 1$. Para demostrarlo procedamos por contradicción, es decir, supongamos que la distancia en T'' de v a v_k^0 es menor que $r+1$, entonces existe $W = (x_0 = v, \ldots, x_a = v_k^0)$ una (v, v_k^0)-trayectoria con $a < r + 1$. Notemos que $V(W) \nsubseteq V(T')$ ya que por la afirmación (5) del lema 4.3.10 v es un r-heredero de v_k^0, por lo cual v no puede alcanzar a v_k^0 en r o menos pasos en T', entonces existe $u \in V(W)$ tal que $u \in V(Q)$.

Sea $g = \text{mín}\{i \in \{0, \ldots, a\} \mid x_i \in V(Q)\}$, notemos que $0 < g < a$ porque v es un elemento de $V(T'') - V(Q) = V(T')$ y $v_k^0 \in V(T')$. Afirmamos que

$g \neq 1$, para demostrarlo supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $g = 1$, entonces $x_1 \in V(Q)$. Como $v \to x_1$ y $v \neq v_0^{r-2}$ entonces por definición de T'' obtenemos que $v \to v_0^{r-2}$, sin embargo

$$v_0^{r-2} \to \left(\bigcup_{l=0}^{m} V(T_l'') \right) - V(T_0'') \tag{4.3.1}$$

por lo tanto $k = 0$. Además $x_1 \to x_2$, entonces $v_0^{r-2} \to x_2$ (ver figura 4.19), lo cual implica que $W'' = (v_0^{r-2}, x_2, \ldots, x_a = v_0^0)$ es un (v_0^{r-2}, v_0^0)-camino de longitud $a - 1$, pero $a - 1 < r$, entonces la distancia en T'' de v_0^{r-2} a v_0^0 es menor que r, y ésto último es una contradicción porque dicha distancia es justamente r. Por lo tanto $g > 1$.

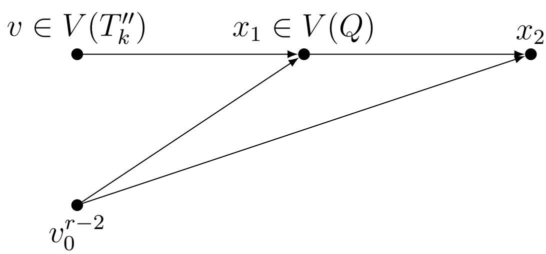

Figura 4.19.

Aún más $g > 2$, para demostrarlo supongamos lo contrario, es decir, supongamos que g es igual a dos, entonces $x_2 \in V(Q)$.

Veamos ahora en donde está el vértice x_1. Por construcción del torneo T' sabemos que si $w \in V(T_t'')$ para algún $t \in \{0, \ldots, m\}$ entonces

$$N_{T'}^{+}(w) \subseteq \{v_t^{r-2}\} \cup \bigcup_{l=0}^{m} V(T_l'')$$

esto implica que

$$N_{T''}^{+}(w) \subseteq V(Q) \cup \{v_t^{r-2}\} \cup \bigcup_{l=0}^{m} V(T_l'').$$

Por otro lado sabemos que $x_0 = v$, $v \to x_1$ y que $v \in V(T''_k)$, además por como se eligió el valor de g se tiene que $x_1 \in V(T')$, en consecuencia

$$x_1 \in \{v_k^{r-2}\} \cup \bigcup_{l=0}^{m} V(T''_l).$$

Si $x_1 = v_k^{r-2}$, entonces $W' = (x_1, \ldots, x_a = v_k^0)$ es una (v_k^{r-2}, v_k^0)-trayectoria de longitud $a-1$, pero $a-1 < r$, entonces la distancia en T'' de v_k^{r-2} a v_k^0 es menor que r, y ésto último es una contradicción porque dicha distancia es justamente r como lo establece la afirmación (1.2).

Si

$$x_1 \in \bigcup_{l=0}^{m} V(T''_l)$$

entonces $x_1 \in V(T''_p)$ para algún $p \in \{0, \ldots, m\}$. Para el caso en que $p = k$ notemos nuevamente que $x_1 \to v_0^{r-2} \to x_2$ (ver figura 4.20) y que $p = k = 0$ (4.3.1), en consecuencia

$$(v_0^{r-2}, x_2, \ldots, x_a = v_0^0)$$

es una (v_0^{r-2}, v_0^0)-trayectoria de longitud menor que r porque $a - 1 < r$, entonces la distancia en T'' de v_0^{r-2} a v_0^0 es menor que r, lo cual es una contradicción.

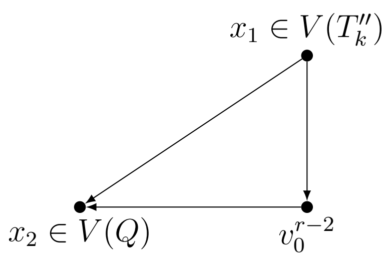

Figura 4.20.

Veamos ahora que sucede si $p \neq k$. Como $v \to x_1$ obtenemos por construcción de T' que $V(T''_k) \to V(T''_p)$, ésto quiere decir que $v_k^0 \to v_p^0$. Además $x_1 \to v_0^{r-2} \to x_2$ (ver figura 4.21), entonces nuevamente $p = 0$ por la propiedad (4.3.1), por lo cual $(v_0^{r-2}, x_3, \ldots, x_a = v_k^0, v_0^0)$ es un camino de longitud

$a-1$, sin embargo $a < r+1$, en consecuencia la distancia en T'' de v_0^{r-2} a v_0^0 es menor que r, y ésto es una contradicción porque dicha distancia es exactamente r como lo establece la afirmación (1.2).

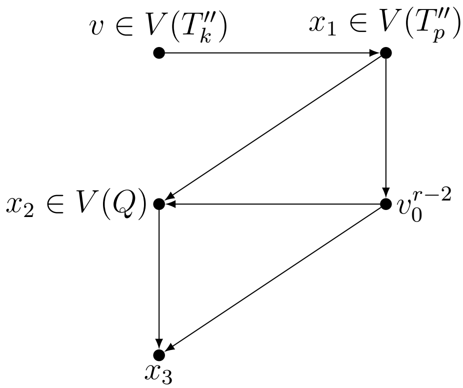

Figura 4.21.

Del razonamiento anterior concluimos que $g > 2$. Una vez que conocemos que g es mayor que 2 notemos que $(v_0^{r-2}, x_{g+1}, \ldots, x_a = v_k^0)$ es un (v_0^{r-2}, v_k^0)-camino de longitud $a-g$, además la distancia en T'' de v_k^0 a v_0^0 es menor o igual a dos porque v_k^0 es un 2-rey de T'' como lo establece la afirmación (1.1), en consecuencia

$$d_{T''}(v_0^{r-2}, v_0^0) \leq a-g+2 < r+1-g+2 = r+3-g \leq r+3-3 = r$$

por lo cual

$$d_{T''}(v_0^{r-2}, v_0^0) < r$$

y ésto es una contradicción porque dicha distancia es justamente r por la afirmación (1.2).

Por lo tanto

$$d_{T''}(v, v_k^0) = r+1$$

y la afirmación (1.4) queda comprobada. ▲

Por las afirmaciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) obtenemos que

$$K_r(T'') = \{v_i^j \mid i \in \{0, \dots, n-1\},\ j \in \{0, \dots, r-2\}\} \cup V(Q)$$

y para cada i en $\{0, \dots, m\}$:

$$V(T''_i) = H(T'', v_i)_r$$

en consecuencia la r-secuencia real de T'' es

$$[(r-1)n + q; h_0, \dots, h_{n-1}, 0, \dots, 0; 0]_r.$$

Finalmente en caso de que s sea distinto de cero, podemos usar el lema 4.3.2 para obtener un torneo con r-secuencia real

$$[(r-1)n + q; h_0, \dots, h_{n-1}, 0, \dots, 0; s]_r.$$

■

Partiendo del lema 4.3.10, específicamente de las construcciones dadas en éste, exhibiremos la existencia de otras r-secuencias las cuales no han sido consideradas hasta el momento y serán las últimas que daremos en este capítulo.

Corolario 4.3.12. *Si r y p son enteros con $r - 3 \geq p \geq 1$, entonces para cualesquiera enteros no negativos s, h_0, h_1:*

(a) existe un torneo con r-secuencia real $[(2r-1) + p; h_0, h_1, \dots, 0; s]_r$;

(b) existe un torneo con r-secuencia real $[2r-1; h_0, h_1, 0, \dots, 0; s]_r$;

(c) existe un torneo con r-secuencia real $[(r+1) + p; h_0, 0, \dots, 0; s]_r$;

(d) existe un torneo con r-secuencia real $[r+1; h_0, 0, \dots, 0; s]_r$.

Demostración. (a) Primero consideramos el caso donde cada h_i es igual a cero. Por el corolario 4.3.3 si $k \neq 2$ y $r' \geq 3$, entonces existe un torneo con r-secuencia real $[k; 0, \dots, 0; 0]_{r'}$, en consecuencia existe un torneo r-secuencia real $[(2r-1) + p; 0, \dots, 0; 0]_r$. Después, en caso de que s sea distinto de cero usamos el lema 4.3.2 para obtener un torneo con r-secuencia real $[(2r-1) + p; 0, \dots, 0; s]_r$. De esta manera el caso en donde cada h_i es cero queda resuelto.

Resta demostrar el caso donde algún h_i es distinto de cero. Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\{i \in \{0,1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0,\ldots,m_1\}.$$

Observemos que $\{0,\ldots,m_1\} = \{0\}$ si $h_1 = 0$ y $\{0,\ldots,m_1\} = \{0,1\}$ si h_0 y h_1 son distintos de cero. La demostración se basará en las construcciones realizadas anteriormente en el lema 4.3.10, así que continuamente estaremos tomando torneos que fueron construido en dicho lema.

Tomemos T' el torneo construido en el lema 4.3.10 que resulta de tomar $n = 3$ y reemplazar m por m_1. Una vez considerado los valores anteriores se tiene que

$$V(T') = \{v_i^j \mid i \in \{0,1,2,\} \; j \in \{0,\ldots,r-2\}\} \cup V(T_0'') \cup \ldots \cup V(T_{m_1}'').$$

Demostraremos que la r-secuencia real del torneo

$$T_\delta = T'[\{v_0^0,\ldots,v_0^{r-2},v_1^0,\ldots,v_1^{r-2},v_2^0,\ldots,v_2^p\} \cup V(T_0'') \cup \ldots \cup V(T_{m_1}'')]$$

es $[(2r-1)+p; h_0, h_1, 0, \ldots, 0; 0]_r$ (ver figura 4.22).

Afirmación 4.1. Para cada i en $\{0,1,2\}$ se tiene que v_i^0 es un 2-rey de T_δ.

Demostración de la afirmación 4.1. Sea $i \in \{0,1,2\}$. Sabemos que v_i^0 es un 2-rey de T_2', además por definición de T' se tiene que $v_i^0 \to V(T_\delta) - V(T_2')$. Por lo tanto v_i^0 es un rey de T_δ. ▲

Afirmación 4.2. Si $v_i^j \in V(T_\delta) - (V(T_0'') \cup \ldots \cup V(T_{m_1}''))$, entonces v_i^j es un $(j+2)$-rey de T_δ y

$$\{v \in V(T_\delta) \mid d_{T_\delta}(v_i^j, v)\} = j+2\} = \{v_i^0\}.$$

Demostración de la afirmación 4.2. Notemos que $v_i^j \to \ldots \to v_i^1 \to v_{i+1}^0$ (usando en el subíndice adición mod 3) y $v_{i+1}^0 \to V(T_\delta) - V(T_2')$, además v_i^1 es un 2-heredero de v_i^0 en $V(T_2')$, esto implica que v_i^1 es un 2-rey de $T_2' - \{v_i^0\}$, en consecuencia v_i^j es un $(j+1)$-rey de $T_\delta - \{v_i^0\}$.

Por otra parte $v_i^j \to \ldots \to v_i^1 \to v_{i+1}^0 \to v_{i+2}^0 \to v_i^0$ (usando en el subíndice adición mod 3), de esta manera obtenemos que la distancia en T_δ de v_i^j a v_i^0 es a lo más $j+2$. Por la afirmación (4) del lema 4.3.10 sabemos que $d_{T'}(v_i^j, v_i^0) = j+2$, pero T_δ es subdigráfica de T', esto implica que $d_{T'}(v_i^j, v_i^0) \leq d_{T_\delta}(v_i^j, v_i^0)$, sin embargo ya vimos que $d_{T_\delta}(v_i^j, v_i^0) \leq j+2$, por lo tanto $d_{T_\delta}(v_i^j, v_i^0) = j+2$. ▲

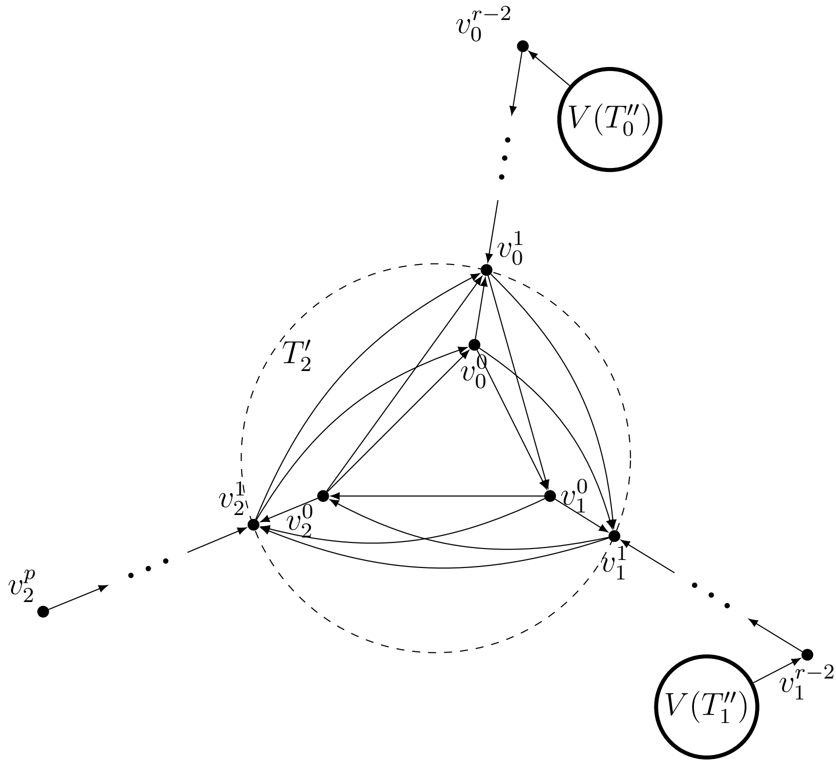

Figura 4.22.

Afirmación 4.3. Sea $k \in \{0, \ldots, m_1\}$, si $v \in V(T_k'')$ entonces v es un r-heredero de v_k^0 en T_δ.

Demostración de la afirmación 4.3. Primero veamos que v es un r-rey de $T_\delta - \{v_k^0\}$. Por la afirmación (4.2) se tiene que v_k^{r-2} es un $(r-1)$-rey de $T_\delta - \{v_k^0\}$, y dado que $v \to v_k^{r-2}$ obtenemos que v es un r-rey de $T_\delta - \{v_k^0\}$.

Por la afirmación (4.2) la distancia en T_δ de v_k^{r-2} a v_k^0 es r, en consecuencia $d_{T_\delta}(v, v_k^0) \leq r+1$. Por la afirmación (5) del lema 4.3.10 sabemos que la distancia en T' de v a v_k^0 es $r+1$, además T_δ subdigráfica de T', esto implica que $d_{T'}(v, v_k^0) \leq d_{T_\delta}(v, v_k^0)$, sin embargo ya vimos que $d_{T_\delta}(v, v_k^0) \leq r+1$, entonces $d_{T_\delta}(v, v_k^0) = r+1$. Por lo tanto v es un r-heredero de v_k^0 en T_δ. ▲

Por las afirmaciones (4.1), (4.2) y (4.3) llegamos a la conclusión de que

$$K_r(T_\delta) = \{v_0^0, \dots, v_0^{r-2}, v_1^0, \dots, v_1^{r-2}, v_2^0, \dots, v_2^p\}$$

y para cada k en $\{0, \dots, m_1\}$:

$$V(T_k'') = H(T_\delta, v_k^0)_r \ .$$

Así la r-secuencia real de T_δ es $[(2r-1)+p; h_0, h_1, 0, \dots, 0; 0]_r$, donde $h_1 = h_{m_1}$ si $m_1 = 1$, y $h_1 = 0$ si $m_1 = 0$. Finalmente en caso de que s sea distinto de cero, podemos usar el lema 4.3.2 para obtener un torneo con r-secuencia real $[(2r-1)+p; h_0, h_1, 0, \dots, 0; s]_r$.

Las demostraciones para (b), (c) y (d) son análogas a la demostración dada anteriormente para (a). Sólo que para estos casos se consideran torneos diferentes.

Para (b) se considera el torneo

$$T_\gamma = T'[\{v_0^0, \dots, v_0^{r-2}, v_1^0, \dots, v_1^{r-2}, v_2^0\} \cup V(T_0'') \cup \dots \cup V(T_{m_2}'')]$$

donde T' es el torneo construido en el lema 4.3.10 que resulta de tomar $n = 3$ y reemplazar m por m_2 donde

$$\{i \in \{0,1\} \mid h_i \neq 0\} = \{0, \dots, m_2\}.$$

Para (c) se considera el torneo

$$T_\beta = T'[\{v_0^0, \dots, v_0^{r-2}, v_1^0, \dots, v_1^p, v_2^0, \} \cup V(T_0'')]$$

donde T' es el torneo construido en el lema 4.3.10 que resulta de tomar $n = 3$ y $m = 0$.

Para (d) se considera el torneo

$$T_\alpha = T'[\{v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_0^1, \dots, v_0^{r-2}\} \cup V(T_0'')]$$

donde T' es el torneo construido en el lema 4.3.10 que resulta de tomar $n = 3$ y $m = 0$.

■

Capítulo 5

$(2, r)$-soluciones en torneos

En este capítulo mencionaremos algunos datos importantes sobre la pregunta ¿toda digráfica sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos? la cual fue realizada por los investigadores G. Gutin K.M. Kohn, E.G. Tay y A. Yeo en [12]. Daremos algunas definiciones que nos ayudarán a conectar el concepto de cuasinúcleo con el de $(2, 2)$-solución. Finalmente mostraremos cómo el uso de la r-secuencia real de un torneo sin transmisores nos ayuda a encontrar al menos un par de $(2, r)$-soluciones ajenas en su digráfica de líneas, y en algunos casos, en subdigráficas especiales de ésta para $r \geq 2$.

5.1. Motivación y resultados

Recordemos el concepto de cuasinúcleo: Sea D una digráfica, un subconjunto Q de $V(D)$ es un **cuasinúcleo** si es independiente y para cada $z \in V(D) - Q$, existe $x \in Q$ tal que existe una (z, x)-trayectoria de longitud menor o igual a dos. Notemos que si D tiene un pozo, es decir, un vértice al que no le salen flechas, entonces todo cuasinúcleo de D debe contener a dicho vértice, por lo tanto D no tiene cuasinúcleos ajenos. Esta observación llevo a los investigadores G. Gutin K.M. Kohn, E.G. Tay y A. Yeo a preguntarse en [12] lo siguiente ¿toda digráfica sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos? La respuesta a tal pregunta es afirmativa para muchas digráficas, como por ejemplo para digráficas con sólo dos cuasinúcleos o para digráficas núcleo perfectas, sin embargo, en general esto no es cierto, pues son los propios autores quienes presentan una digráfica sin pozos y sin un par de cuasinúcleos ajenos.

Una vez demostrado que no toda digráfica sin pozos tiene un par de cuasinúcleos ajenos, se han escrito varios trabajos en los que se intenta asegurar la existencia de un par de cuasinúcleos ajenos para algunos tipos de digráficas. Por ejemplo el trabajo de Sun Zhiren y Miao Xiaoyan [26], Germán Benítez y Laura Pastrana [4], Javier Eduardo Pereyra y Laura Pastrana [22] y el de Scott Heard y Jin Huang [13].

Resulta que el concepto de cuasinúcleo está muy relacionado con el de $(2, 2)$-solución de una digráfica como veremos más adelante. Esto es lo que nos motiva a estudiar las $(2, r)$-soluciones en la digráfica de líneas de un torneo para $r \geq 2$. Para ello primero daremos algunas definiciones que nos servirán para realizar dicho trabajo.

Tomemos D una digráfica, un subconjunto N no vacío de $V(D)$ es ***k*-independiente** si para cualquier par de vértices distintos u y v en N se tiene que $d_D(u, v) \geq k$ y $d_D(v, u) \geq k$; es ***l*-absorbente** si para cualquier u en $V(D) - N$ existe v en N tal que $d_D(u, v) \leq l$; es ***t*-dominante** si para cualquier u en $V(D) - N$ existe v en N tal que $d_D(v, u) \leq t$. Observemos que un conjunto 2-independiente es un conjunto independiente, un conjunto 1-absorbente es un conjunto absorbente y un conjunto 1-dominante es un conjunto dominante. Un **(k, l)-núcleo** de D es un subconjunto de $V(D)$ k-independiente y l-absorbente. Notemos que un $(2, 2)$-núcleo es un cuasinúcleo. Un ***k*-núcleo** es un $(k, k-1)$-núcleo. Por ejemplo en la digráfica D de la figura 5.1, el conjunto $N = \{v_2, v_4\}$ es un conjunto 2-independiente porque $d_D(v_2, v_4) = 2$ y $d_D(v_4, v_2) = 2$, además es 1-absorbente porque $\{v_1, v_5\} \to v_2$ y $\{v_3, v_6\} \to v_4$, por lo tanto N es un $(2, 1)$-núcleo, o lo que resulta igual un 2-núcleo de D.

Sea D una digráfica, la **digráfica dual** de D es la digráfica $\overleftarrow{D}$, con conjunto de vértices $V(\overleftarrow{D}) = V(D)$, y $(u, v) \in A(\overleftarrow{D})$ si y sólo si $(v, u) \in F(D)$. En la figura 5.2 se muestran una digráfica D y su respectiva digráfica dual $\overleftarrow{D}$.

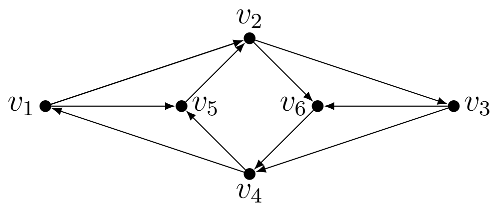

Figura 5.1. Una digráfica D.

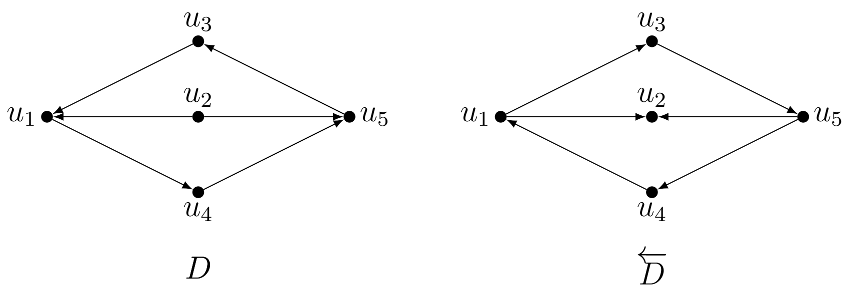

Figura 5.2. Una digráfica y su respectiva digráfica dual.

Sea D una digráfica, la noción de **conjunto solución** de una digráfica es el dual de la noción de núcleo, es decir, un conjunto independiente y dominante. Una **(k,l)-solución** de D es un subconjunto de $V(D)$ k-independiente y l-dominante. Una **k-solución** es una $(k, k-1)$-solución. Notemos que N es un (k,l)-núcleo de D si y sólo si N es una (k,l)-solución de $\overleftarrow{D}$, en particular N es un cuasinúcleo de D si y sólo si N es una $(2,2)$-solución de $\overleftarrow{D}$. En la digráfica D de la figura 5.2 el conjunto $N = \{u_1, u_5\}$ es un conjunto 2-independiente porque $d_D(u_1, u_5) = 2$ y $d_D(u_5, u_1) = 2$, además es 1-absorbente porque $\{u_3, u_2\} \to u_1$ y $\{u_4\} \to u_5$, esto implica que N es un $(2,1)$-núcleo de D, y por lo tanto N es una $(2,1)$-solución de $\overleftarrow{D}$.

Sea D una digráfica, la **digráfica de líneas** de D es la digráfica $L(D))$ con $V(L(D)) = F(D)$, y para cualesquiera vértices u y v en $V(L(D))$ la flecha (u,v) está en $F(L(D))$ si y sólo si las flechas correspondientes u y v inducen un camino en D, es decir, el vértice final de u es el vértices inicial de v en D.

En la siguiente figura se muestran una digráfica D y su respectiva digráfica de líneas $L(D)$.

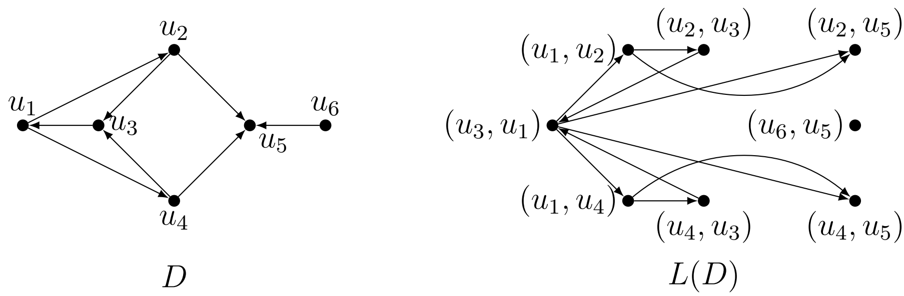

Figura 5.3. Una digráfica D y su respectiva digráfica de líneas $L(D)$.

Lema 5.1.1. *Sea D una digráfica, si $W = (v_0, \ldots, v_n)$ es una trayectoria en D con $n \geq 1$, entonces $W' = ((v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n))$ es una trayectoria en $L(D)$.*

Demostración. Para el caso en que $n = 1$ se tiene que $W = (v_0, v_1)$, esto implica que (v_0, v_1) es una flecha de D, entonces por definición (v_0, v_1) es un vértice de $L(D)$ y por lo tanto $W' = ((v_0, v_1))$ es una trayectoria en $L(D)$.

Supongamos ahora que $n \geq 2$, notemos que para cada $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ el vértice final de la flecha (v_i, v_{i+1}) es el vértice inicial de la flecha (v_{i+1}, v_{i+2}), entonces nuevamente por definición de la digráfica de líneas para cada i en $\{0, \ldots, n-2\}$ se tiene que

$$((v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_{i+2}))$$

es una flecha de $L(D)$, en consecuencia

$$W' = ((v_0, v_1), \ldots, (v_{n-1}, v_n))$$

es un camino en $L(D)$. Por otro lado, los vértice del camino W' son distintos dos a dos porque los vértices de la trayectoria W son distintos dos a dos, por lo tanto W' es una trayectoria.

■

Sea T un torneo y r un entero mayor o igual que dos. Consideremos x un r-rey de T, resulta que si el conjunto $\{(x, y) \mid y \in N_T^+(x)\}$ es no vacío, entonces dicho conjunto inducirá una $(2, r)$-solución en $L(T)$. De igual forma si h es un r-heredero y el conjunto $\{(h, z) \mid z \in N_T^+(h)\}$ es no vacío, entonces tal conjunto inducirá una $(2, r)$-solución en una subdigráfica específica de $L(T)$, que cumplirá no ser una $(2, r)$-solución de $L(T)$.

Sea X un conjunto, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de X.

Definición 5.1.2. Sea D una digráfica.

$$\psi : \mathcal{P}(V(D)) \to \mathcal{P}(F(D))$$

denota la función definida de la siguiente manera, para cada Z subconjunto de $V(D)$

$$\psi(Z) = \{(x, y) \in F(D) \mid x \in Z\}.$$

Observación 9. Notemos que si u es un vértice de la digráfica D, entonces

$$\psi(\{u\}) = \{(x, y) \in F(D) \mid x \in \{u\}\} = \{(u, y) \mid y \in N_D^+(u)\}.$$

Es decir, $\psi(\{u\})$ consiste de las flechas de D que tienen como vértice inicial a u.

Lema 5.1.3. *Sea D una digráfica y u un vértice de D. Si $\psi(\{u\})$ es un conjunto distinto del vacío, entonces $\psi(\{u\})$ es un conjunto 2-independiente de $L(D)$.*

Demostración. Si la cardinalidad del conjunto $\psi(\{u\})$ es uno, entonces inmediatamente $\psi(\{u\})$ es un conjunto 2-independiente. En caso contrario $\psi(\{u\})$ tiene al menos dos elementos distintos, sean (u, v) y (u, w) dos elementos distintos de $\psi(\{u\})$, como $u \neq v$ y $u \neq w$, obtenemos que $((u, v), (u, w))$ y $((u, w), (u, v))$ no son flechas de $L(D)$. Por lo tanto $\psi(\{u\})$ es un conjunto 2-independiente de $L(D)$.

■

Lema 5.1.4. *Sea T un torneo de orden mayor o igual a dos, si u es un r-rey de$T$, entonces $\psi(\{u\})$ es una $(2, r)$-solución de $L(T)$.*

Demostración. Por ser u un r-rey de T que es de orden mayor o igual a dos se tiene que $\psi(\{u\}) \neq \varnothing$, en consecuencia $\psi(\{u\})$ es un un conjunto 2-independiente de $L(T)$ (lema 5.1.3).

Por otro lado, si existe un vértice z en $V(L(T)) - \psi(\{u\})$, entonces z es igual a (x, y) para algunos vértices distintos x y y de T. Observemos que $x \neq u$ porque $(x, y) \notin \psi(\{u\})$.

Como u es un r-rey de T y el vértice x es distinto de u, existe una (u, x)-trayectoria W en T de longitud menor o igual a r y mayor o igual que uno, digamos $W = (z_0 = u, \ldots, z_l = x)$, en consecuencia $(u, z_1) \in \psi(\{u\})$ y por el lema 5.1.1 $W' = ((z_0, z_1), \ldots, (z_{l-1}, x))$ es una trayectoria en $L(T)$. Ahora notemos que (x, y) es un vértice de $L(T)$ y además los vértices de W son distintos dos a dos, por lo cual $W'' = ((z_0, z_1), \ldots, (z_l, y))$ es una $((u, z_1), (x, y))$-trayectoria en $L(T)$ de longitud l, y por ser $l \leq r$, concluimos que $d_{L(T)}((u, z_1), (x, y)) \leq r$, es decir, $\psi(\{u\})$ es un conjunto r-dominante de $L(T)$.

Por lo tanto $\psi(\{u\})$ es un conjunto 2-independiente y r-dominante de $L(T)$, es decir, $\psi(\{u\})$ es una $(2, r)$-solución de $L(T)$.

■

Observación 10. Sean T un torneo, u y v dos vértices distintos de T, notemos que si (u, x) y (v, y) son flechas de T, entonces $(u, x) \neq (v, y)$, esto implica que $\{(u, x) \mid x \in N_T^+(u)\} \cap \{(v, y) \mid y \in N_T^+(v)\} = \varnothing$. Por otro lado,

$$\psi(\{u\}) = \{(u, x) \mid x \in N_T^+(u)\} \text{ y } \psi(\{v\}) = \{(v, y) \mid y \in N_T^+(v)\}$$

por lo tanto $\psi(\{u\}) \cap \psi(\{v\}) = \varnothing$.

Lema 5.1.5. *Sean T un torneo de orden mayor o igual a tres, r un entero mayor o igual que dos y u un 2-rey de T. Si h es un r-heredero de u entonces*

(a) $\psi(\{h\})$ es una $(2, r)$-solución de $L(T) - \psi(\{u\})$.

(b) $\psi(\{h\})$ no es una $(2, r)$-solución de $L(T)$.

Demostración. *(a)* Veamos primero que $\psi(\{h\})$ es un conjunto distinto del vacío. Por hipótesis el orden de T es mayor o igual que tres, entonces existe un vértice v en $V(T - \{u\}) - \{h\}$. Además h es un r-heredero de u, por lo cual h es un r-rey de $T - \{u\}$, en consecuencia existe $W = (z_0 = h, \ldots, z_l = v)$

una (h, v)-trayectoria en $T - \{u\}$ de longitud menor o igual a r, así (h, z_1) está en $F(T - \{u\})$, pero $T - \{u\} \subseteq T$, entonces (h, z_1) es un elemento de $F(T)$, en consecuencia $(h, z_1) \in \psi(\{h\})$. Por lo tanto $\psi(\{h\})$ es un conjunto distinto del vacío.

Ahora es necesario mostrar que $\psi(\{h\}) \subseteq V(L(T) - \psi(\{u\}))$. Sea (h, z) un elemento de $\psi(\{h\})$, dado que h es distinto de u obtenemos que (h, z) no está en $\psi(\{u\})$, es decir, (h, z) es un elemento de $F(T) - \psi(\{u\})$, por lo tanto (h, z) es un vértice de $L(T) - \psi(\{u\})$.

Demostremos que $\psi(\{h\})$ es un conjunto 2-independiente de la digráfica $L(T) - \psi(\{u\})$. Ya vimos que $\psi(\{h\})$ es un conjunto distinto del vacío y también que $\psi(\{h\}) \subseteq V(L(T) - \psi(\{u\}))$. Por el lema 5.1.3 $\psi(\{h\})$ es un conjunto 2-independiente de $L(T)$, en particular $\psi(\{h\})$ es un conjunto 2-independiente de $L(T) - \psi(\{u\})$.

Resta demostrar que $\psi(\{h\})$ un conjunto r-dominante de $L(T) - \psi(\{u\})$. Si existe un vértice z en $V(L(T) - \psi(\{u\})) - \psi(\{h\})$, entonces $z = (x, y)$ para algunos vértices distintos x y y de T. Observemos que $x \neq h$ porque $(x, y) \notin \psi(\{h\})$, y $x \neq u$ porque $(x, y) \in V(L(T) - \psi(\{u\}))$.

Como h es un r-rey de $T - \{u\}$, existe $W = (z_0 = h, \ldots, z_l = x)$ una (h, x)-trayectoria W en $T - \{u\}$ de longitud menor o igual a r y mayor o igual que uno porque $h \neq x$. Así $(h, z_1) \in \psi(\{h\})$ y por el lema 5.1.1 $W' = ((z_0, z_1), \ldots, (z_{l-1}, x))$ es una trayectoria en $L(T - \{u\})$, en particular W' es una trayectoria en $L(T)$ porque $T - \{u\}$ es una subdigráfica de T. Por ser los vértices de W distintos dos a dos obtenemos que

$$W'' = ((z_0, z_1), \ldots, (z_{l-1}, x), (x, y))$$

es una trayectoria en $L(T)$ de longitud $l \leq r$. Como W es una trayectoria en $T - \{u\}$, se tiene que todos los vértices de W son distintos de u, en consecuencia ningún vértice de W'' es elemento de $\psi(\{u\})$, esto implica que W'' es una $((h, z_1), (x, y))$-trayectoria en $L(T) - \psi(\{u\})$ de longitud menor o igual que r, en consecuencia $d_{L(T)-\psi(\{u\})}((h, z_1), (x, y)) \leq r$. Por lo tanto $\psi(\{h\})$ es un conjunto r-dominante de $L(T) - \psi(\{u\})$.

(b) Veamos que $\psi(\{h\})$ no es un conjunto r-dominante de $L(T) - \psi(\{u\})$. Observemos que por ser u un r-rey del torneo T que es de orden mayor o

igual que tres, existe $v \in V(T)$ tal que (u, v) es una flecha de T. Afirmamos que para cualquier $z \in \psi(\{h\})$, z no alcanza a (u, v) en r o menos pasos en $L(T)$. Para demostrar tal afirmación supongamos lo contrario, es decir, que existe $z' \in \psi(\{h\})$ tal que z' alcanza a (u, v) en r o menos pasos. Así existe $W = (x_0 = z', \ldots, x_l = (u, v))$ una $(z', (u, v))$-trayectoria en $L(T)$ de longitud menor o igual que r, esto implica que para cada i en $\{0, \ldots, l-1\}$ el vértice final de x_i es el vértice inicial de x_{i+1}.

Supongamos que para cada i en $\{0, \ldots, l\}$ se tiene que $x_i = (y_i, z_i)$, entonces $z_j = y_{j+1}$, lo cual implica que $y_0 \to z_0 \to z_1 \to \ldots \to z_{l-1}$ en T.

Ahora notemos que $x_0 = (h, z_0)$ y $y_l = u$ porque z es un elemento de $\psi(\{h\})$ y $x_l = (y_l, z_l) = (u, v)$, entonces $h \to z_0 \to z_1 \to \ldots \to z_{l-1} = u$ en T, así h alcanza a u en r o menos pasos, y esto es una contradicción porque h es un r-heredero de u. Por lo tanto $\psi(\{h\})$ no es un conjunto r-dominante de $L(T)$, lo cual implica que $\psi(\{h\})$ no es una $(2, r)$-solución de $L(T)$.

■

Corolario 5.1.6. *Sean T un torneo de orden mayor o igual que tres y r un entero mayor o igual que dos. Si $K_r(T) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y la r-secuencia real de T es $[m; h_1, \ldots, h_m; s]_r$, entonces $L(T)$ tiene al menos m $(2, r)$-soluciones ajenas dos a dos. Además si x_i tiene h_i r-herederos con h_i mayor que cero, entonces $L(T) - \psi(\{x_i\})$ tiene al menos h_i $(2, r)$-soluciones ajenas dos a dos, que cumplen con no ser $(2, r)$-soluciones de $L(T)$.*

Demostración. (1) Probaremos primero que $L(T)$ tiene al menos m $(2, r)$-soluciones ajenas dos a dos. Por el lema 5.1.4 para cada i en $\{1, \ldots, m\}$ se tiene que $\psi(\{x_i\})$ es una $(2, r)$-solución de $L(T)$. Después usando la observación (10) obtenemos que si $i \neq j$, entonces $\psi(\{x_i\})$ y $\psi(\{x_j\})$ son conjuntos ajenos. Por lo tanto $\psi(\{x_1\}), \ldots, \psi(\{x_m\})$ son m $(2, r)$-soluciones ajenas dos a dos de $L(T)$.

(2) Si x_i tiene h_i r-herederos con h_i distinto de cero, entonces x_i es un 2-rey de T (lema 4.2.5). Así usando el lema 5.1.4 seguido de la observación (10) obtenemos que $L(T) - \psi(\{x_i\})$ tiene al menos h_i $(2, r)$-soluciones ajenas dos a dos, que cumplen con no ser $(2, r)$-soluciones de $L(T)$.

■

Conclusiones

A lo largo de esta tesis estudiamos los $(n, m)_r$-torneos, las gráficas (r, r)-dominantes de torneos y las $(2, r)$-soluciones en la digráfica de líneas de torneos. Para el caso de las gráficas $(2, 2)$-dominantes de torneos, conseguimos plasmar de manera muy detallada los resultados presentes en el artículo *Kings and Heirs: A characterization of the* $(2, 2)$*-domination graphs of tournaments* de Kim A.S. Factor y Larry J. Langley [9], el cual está orientado a dar una caracterización estructural de este tipo de gráficas.

En lo que respecta a las gráficas (r, r)-dominantes de torneos para $r \geq 3$, hicimos notar al igual que en las gráficas $(2, 2)$-dominantes de torneos, que para comprender su estructura era de suma importancia investigar las r-secuencias reales, fue así como nos adentramos a examinar cuáles de éstas eran posibles. En este contexto logramos exhibir una gran cantidad de r-secuencias reales, sin embargo, falta resolver si las que presentamos en la sección 4.3 del capítulo 4 son todas las que hay o aún existen más.

Cabe resaltar que los $(n, m)_r$-torneos fueron una herramienta muy útil para encontrar r-secuencias reales para $r \geq 2$. Los $(n, m)_2$-torneos ya habían sido estudiados por Stephen B. Maurer en [19], así que siguiendo con esta idea, nosotros logramos determinar exactamente para cuáles enteros n y m con $n \geq m \geq 1$ existe un torneo con n vértices tal que exactamente m de estos sean r-reyes, para $r \geq 3$ (teorema 4.1.8).

Finalmente mostramos como el uso de la r-secuencia real de un torneo sin transmisores nos ayuda a encontrar al menos un par de $(2, r)$-soluciones ajenas en su digráfica de líneas, y en algunos casos, en subdigráficas especiales de ésta (corolario 5.1.6).

Bibliografía

[1] W. C. Alle, Orlando Park, Alfred E. Emerson, Thomas Park y Karl P. Schmidt, *Principles of animal ecology*, W. B. Saunders, Philadelphia, 1949.

[2] W. C. Alle, *The social life of animals*, W. W. Norton, New York, 1938.

[3] J. Bang-Jensen y G. Gutin, *Digraphs: theory, algorithms and applications*, Springer-Verlag London, 2007.

[4] G. Benítez Bobadilla, *Número semidominante coloreable en digráficas*, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[5] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Springer-Verlag London, 2008.

[6] N. E. Collians, *Statical factor which make for success in initial enconters between hens*, Amer. Naturalist., 77 (1943), 519-538.

[7] K. A. S. Factor y L. J. Langley, *A characterization of connected* $(1, 2)$-*domination graphs of tournaments*, AKCE Int. J. Graphs Comb., 8 (1) (2011), 51-62.

[8] K. A. S. Factor y L. J. Langley, *An introduction to* $(1, 2)$-*domination graphs*, Congr. Numer., 199 (2009), 33-38.

[9] K. A. S. Factor y L. J. Langley, *Kings and heirs: a characterization of the* $(2, 2)$- *domination graphs of tournaments*, Discrete Applied Mathematics, 204 (2016), 142-149.

[10] J. Gross, J. Yellen y P. Zhang, *Handbook of graph theory*, Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2nd. Edition, 2014, 196.

[11] A. M. Guhl y W. C. Alle, *Some measurable effects of social organization in flocks of hens*, Physiol. Zool., 17 (1944), 320-347.

[12] G. Gutin, K. M. Koh, E. G. Tay y A. Yeo, *On the number of quasikernels in digraphs*, Journal of Graph Theory, 2003, 49-56.

[13] S. Heard y J. Huang, *Quasikernels in digraphs, Journal of Graph Theory*, 2008, 251-260.

[14] J. T. Hedetniemi, K. D. Hedetniemi, S. M. Hedetniemi y S. T. Hedetniemi, *Secondary and internal distances in sets in graphs*, AKCE J. Graphs Combin., 6 (2) (2009), 239-266.

[15] J. T. Hedetniemi, K. D. Hedetniemi, S. M. Hedetniemi y S. T. Hedetniemi, *Secondary and internal distances in sets in graphs ii*, AKCE J. Graphs Combin., 9 (1) (2012), 85-113.

[16] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, D. F. Rall y J. Knisely, *Secondary domination in graphs*, AKCE J. Graphs Combin., 5 (2) (2008), 117-125.

[17] M. A. Juárez Camacho, $(k+1)$*-reyes en digráficas* k*-cuasi-transitivas*, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 2013.

[18] H. G. Landau, *On dominance ralations and the estructure of animal societies: III. The condition for a score structure*, Bull. Math. Biophys., 15 (2) (1953), 143-148.

[19] S. B. Maurer, *The king chicken theorems*, Math. Mag., 53 (1980), 67-80.

[20] S. K. Merz, J. R. Lundgren, K. B. Reid y D. C. Fisher, *The domination and competition graphs of a tournament*, J. Graph Theory, 29 (1998), 103-110.

[21] J. W. Moon, *Solution to Problem 463*, Math. Mag., 35 (1962), 189.

[22] J. E. Pereyra Zamudio, *Cuasinúcleos ajenos en digráficas*, Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 2016.

[23] J. H. Potter, *Dominance relations between different breeds of domestic hens*, Physiol. Zool., 22 (1949), 261-280.

[24] T. Schjelderup-Ebbe, *Beiträgue zur Sozialpsychologie des Haushuhns*, Z. Psychol., 88 (1922), 225-252.

[25] H. E. Vaunghman, *On well-ordered subsets and maximal elements of ordered sets*, Pacific Jour. Math., 2 (1957), 407-412.

[26] S. Zhiren y M. Xiaoyan, *Disjoint quasi-kernels in digraphs*, Journal of nanjin normal university, Vol. 28, No. 3, 2005, 11-14.