



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ENERGÍA – SISTEMAS ENERGÉTICOS

ESTUDIO TEÓRICO DE LA DINÁMICA Y
TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJOS
OSCILATORIOS

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
LEONARDO FIDEL CÓRDOVA CASTILLO

TUTOR PRINCIPAL:
DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES (IER-UNAM)

TEMIXCO, MORELOS - NOVIEMBRE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente:

Secretario:

Vocal:

1^{er} Suplente:

2^{do} Suplente:

Instituto de Energías Renovables, Temixco, Morelos, México

TUTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Cuevas García

FIRMA

Índice general

Resumen	v
1. Introducción	1
2. Dinámica del flujo oscilatorio de un fluido viscoelástico.	9
2.1. Ecuaciones de conservación de la dinámica de fluidos	9
2.2. Flujo oscilatorio de un fluido viscoelástico.	11
2.2.1. Modelo de Maxwell de la Viscoelasticidad	11
2.2.2. Perfil de velocidad general.	13
2.2.3. Permeabilidad dinámica para un fluido de Maxwell	15
2.2.4. Solución asintótica del flujo oscilatorio de un fluido de Maxwell en un tubo	17
2.2.4.1. Escalas características del sistema y adimen- sionalización	18
2.2.4.2. Solución asintótica para $R_w \ll 1$	19
2.2.4.3. Solución asintótica para $R_w \gg 1$	24
3. Transferencia de calor en un fluido viscoelástico.	37
3.1. Perfil de temperatura adimensional para $R_w \ll 1$	37
3.1.1. Difusividad térmica efectiva adimensional para $R_w \ll 1$.	41
3.1.2. Perfil de temperatura adimensional para $R_w \gg 1$	50
3.1.3. Difusividad térmica efectiva adimensional para $R_w \gg 1$.	52
4. Flujo oscilatorio de un metal líquido en un ducto bajo un cam- po magnético	59
4.1. Ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético	59
4.2. Aproximación MHD	63

4.3. Ecuaciones de balance de la Magnetohidrodinámica.	63
4.4. Solución analítica de un flujo oscilatorio Magnetohidrodinámico	64
4.4.1. Escalas características y adimensionalización de la ecuación de movimiento	67
4.4.2. Solución para el perfil de velocidades	68
5. Transferencia de calor en un flujo de metal líquido.	71
5.1. Obtención del perfil de temperaturas	71
5.2. Difusividad térmica efectiva	74
6. Conclusiones	81
Referencias	85

Resumen

En esta tesis se realizó un estudio teórico de la dinámica y la transferencia de calor en ductos utilizando tanto fluidos viscoelásticos como Newtonianos en movimiento oscilatorio. En la primera parte de este documento se presenta el análisis teórico de la dinámica del flujo oscilatorio de un fluido viscoelástico dentro de un ducto de sección transversal circular constante y de longitud infinita. El flujo es provocado por un gradiente de presión armónico impuesto en dirección axial. El comportamiento viscoelástico del fluido es descrito mediante el modelo de Maxwell. No obstante que el perfil de velocidades puede obtenerse de manera exacta en términos de las funciones de Bessel, en este trabajo se obtienen soluciones del perfil de velocidad por medio de expansiones asintóticas válidas para valores de frecuencia de oscilación muy pequeños y muy grandes, con el fin de lograr una mejor comprensión del flujo. Posteriormente se utilizan los perfiles asintóticos para estudiar el mejoramiento de la transferencia de calor longitudinal generado por un fluido viscoelástico. A través del ducto el fluido conecta dos reservorios térmicos con temperaturas constantes pero diferentes, lo que genera un gradiente de temperatura axial. Con el fin de explorar el mejoramiento de la transferencia de calor se calculó la difusividad térmica efectiva en los dos límites asintóticos.

En la segunda parte de esta tesis se obtuvo una solución analítica exacta del perfil de velocidades de un flujo oscilatorio de un metal líquido generado por una fuerza electromagnética armónica. El flujo completamente desarrollado se lleva a cabo en un ducto formado por dos paredes aislantes y paralelas de longitud infinita. Dicho perfil de velocidad se utilizó para resolver la ecuación de transferencia de calor obteniendo así una solución para la temperatura, suponiendo que el ducto es eléctrica y térmicamente aislante y sujeto a un gradiente de temperatura axial constante. A partir de estos perfiles se obtuvo

la difusividad térmica efectiva la cual fue evaluada en función de la frecuencia de oscilación para distintos valores del número de Prandtl correspondientes a diversos metales líquidos. con el propósito de explorar el mejoramiento de la transferencia de calor.

Introducción

Los flujos oscilatorios pueden encontrarse frecuentemente en muchas aplicaciones de ingeniería, tales como en el famoso motor tipo Stirling inventado en 1816 por el Reverendo escocés Robert Stirling, el motor de combustión interna, o bien en los reactores químicos de análisis de mezclado (Meroño, 2015). Los flujos oscilatorios pueden surgir como respuesta a gradientes de temperatura o presión impuestos externamente. En particular, el estudio del mejoramiento de la transferencia de calor en flujos pulsantes resulta ser en la actualidad un área de estudio relevante para el diseño de dispositivos tales como intercambiadores de calor o sistemas de enfriamiento de alta potencia electrónica y equipo eléctrico (Fan *et al.*, 2008).

De hecho, el uso de flujos oscilatorios merece una mención especial no solo dentro de los métodos del mejoramiento de la transferencia de calor, sino también a su importancia en procesos tales como la dispersión de contaminantes o el incremento de la permeabilidad dinámica ((Chatwin, 1975),(Watson, 1983),Del Rio *et al.* (1998)).

Desde los años ochenta del siglo pasado, diversas investigaciones se han llevado a cabo alrededor del estudio de una interesante forma de transportar calor mediante un fluido en movimiento oscilatorio. La idea es que la energía almacenada en un reservorio a temperatura alta es transferida a un reservorio a menor temperatura por medio de oscilaciones sinusoidales de media cero de un fluido viscoso confinado dentro de un ducto con paredes aislantes que conecta dichos reservorios. Un aspecto relevante de esta técnica de transporte térmico es que implica la ausencia de transferencia neta de masa (Kurzweg, 1985b).

Entre los antecedentes de estos estudios se encuentra el trabajo de Jaeger y Kurzweg (1983) quienes determinaron que la existencia de un flujo oscilatorio puede mejorar considerablemente un proceso de dispersión dado, es decir, la dispersión axial de algún contaminante por medio de un flujo oscilatorio laminar puede llegar a ser varios órdenes de magnitud mayor que la obtenida por difusión molecular pura en ausencia de flujo; de hecho, en dicho trabajo se encontró que el aumento es aproximadamente de cuatro órdenes de magnitud.

Posteriormente, un estudio experimental y teórico acerca de una nueva técnica para la obtención de una difusividad térmica efectiva fue reportada por Kurzweg y Zhao (1984a). El sistema consistía de dos reservorios de fluido cada uno a diferente temperatura conectados por medio de tubos capilares. Al fluido (agua) dentro de los tubos se le impuso un gradiente de presión oscilatorio. Los resultados de dicho estudio mostraron un sorprendente comportamiento del transporte de energía térmica, obteniendo tasas de transporte axial de calor de varios órdenes mas grande de lo que puede ser logrado en un tubo termosifón bifásico. Para demostrar que la difusión axial de calor mejorada es posible debido a la transferencia de calor radial que toma lugar a través de la capa límite que se presentan en dicho flujo, se desarrolló una teoría hidrodinámica laminar. Las mediciones realizadas revelan que usando agua como fluido de trabajo, la difusividad térmica efectiva llega a ser 17900 veces mayor que la conseguida en ausencia de oscilaciones. Se hace énfasis en que el transporte de energía mejorado no requiere de un flujo de masa neto y que puede considerarse como una opción razonable para la remoción rápida de energía térmica de fluidos radiactivos

Posteriormente, las investigaciones profundizaron aún mas el estudio de la transferencia de calor por medio de flujos oscilatorios, como se muestra en el trabajo de Kurzweg (1985a). En dicho trabajo se evaluó la transferencia de calor entre dos reservorios a diferente temperatura conectados por tubos capilares de vidrio. Al fluido dentro de dichos tubos se le impuso un movimiento oscilatorio con una frecuencia de entre 2 y 8 Hz. Se encontró que para todos los valores de frecuencia de oscilación la difusividad térmica efectiva es proporcional al cuadrado del desplazamiento de marea Δz que sufre el fluido dentro del ducto al oscilar (en inglés, *tidal displacement*), proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de oscilación. Además, la difusividad térmica efectiva exhibe un valor máximo para una frecuencia de oscilación específica. Kurzweg también afirma que usando una técnica llamada expansión de escala de tiempo

múltiple logra magnitudes de flujo de calor de un orden de $10^{10} \frac{W}{m^2}$ usando un flujo pulsante dentro de tubos cilíndricos. Esto implica un mejoramiento de la transferencia de calor longitudinal sin la necesidad de transferencia de masa mientras que el flujo permanezca en estado laminar.

Siguiendo la idea del mejoramiento de la transferencia de calor utilizando el flujo oscilatorio de un fluido viscoso, Kurzweg (1985b) examinó analíticamente la transferencia de calor longitudinal mejorada a través de un fluido viscoso en una serie de canales de placas paralelas con paredes laterales térmicamente conductoras. Los resultados muestran que para una frecuencia específica la difusividad térmica efectiva correspondiente alcanza un máximo cuando el producto del número de Prandtl, Pr , y el cuadrado del número de Womersley, Wo , es aproximadamente igual a $Wo^2 Pr = \pi$. Bajo tales condiciones, la transferencia de calor axial es considerable y puede superar en varios órdenes de magnitud la que se obtiene utilizando dispositivos como tubos termosifón bifásicos. Estableciendo ciertas condiciones, se muestra que el flujo de calor entre los depósitos a diferente temperatura conectados mediante la configuración de canal de placas paralelas es proporcional a la primera potencia tanto del gradiente de temperatura axial como de la frecuencia de oscilación del flujo y al cuadrado de los desplazamientos de marea. En dicho trabajo se recomienda que si se desean grandes tasas de transferencia de calor, es importante que el valor de la densidad y el calor específico del fluido sean considerablemente grandes. En el sistema no se considera transferencia convectiva neta de masa, logrando tasas de transferencia de calor que superan la cantidad de $10^6 \frac{W}{cm^2}$.

El método del mejoramiento de la transferencia de calor en ductos usando flujos oscilatorios fue extendido por Lambert *et al.* (2009) usando un fluido viscoelástico de Maxwell como fluido de trabajo. Una de las características que distingue al fluido viscoelástico de Maxwell de uno Newtoniano es que la ecuación que describe su comportamiento posee un parámetro denominado tiempo de relajación t_m . Dicho parámetro indica la relevancia de las fuerzas elásticas en la estructura interna de un material, un tiempo de relajación muy pequeño o igual a cero indica que el fluido es puramente viscoso y un tiempo de relajación relativamente grande indica que las propiedades elásticas actúan dentro del fluido. Cuando un fluido viscoelástico es sometido a un esfuerzo mecánico dicho fluido fluye, pero cuando los esfuerzos desaparecen el fluido viscoelástico tiene la propiedad de regresar aproximadamente al estado que mantenía antes de sufrir los esfuerzos mecánicos. En dicho trabajo se determinaron soluciones

analíticas para los perfiles de velocidad y de temperatura dentro de un ducto cilíndrico con sección transversal constante de longitud infinita. Se obtuvo una expresión para la difusividad térmica efectiva que es válida para el caso de un fluido viscoelástico pero que recupera el comportamiento Newtoniano cuando el tiempo de relajación tiende a cero, $t_m \rightarrow 0$. Los resultados demuestran que la inclusión de las propiedades elásticas de un fluido de Maxwell, conlleva interesantes características que no se presentan en un fluido Newtoniano. En particular se encontró que no solo para uno, sino para varios valores específicos de la frecuencia de oscilación se presenta un enorme mejoramiento de la difusividad térmica efectiva cuando se usa un fluido viscoelástico. En este caso, aparte de la dependencia en los parámetros adimensionales Womersley, W_o y Prandtl, P_r que reporta Kurzweg (1985a), se tiene ahora una dependencia del número de Deborah, que es el cociente entre el tiempo de relajación del material y el tiempo viscoso. De hecho, el valor máximo para la difusividad térmica efectiva en función de W_o llega a ser mayor que en el caso de un fluido Newtoniano para el mismo número de Prandtl P_r . La figura 1.1 compara las gráficas de la difusividad térmica efectiva normalizada correspondiente a un fluido Newtoniano y a uno viscoelástico.

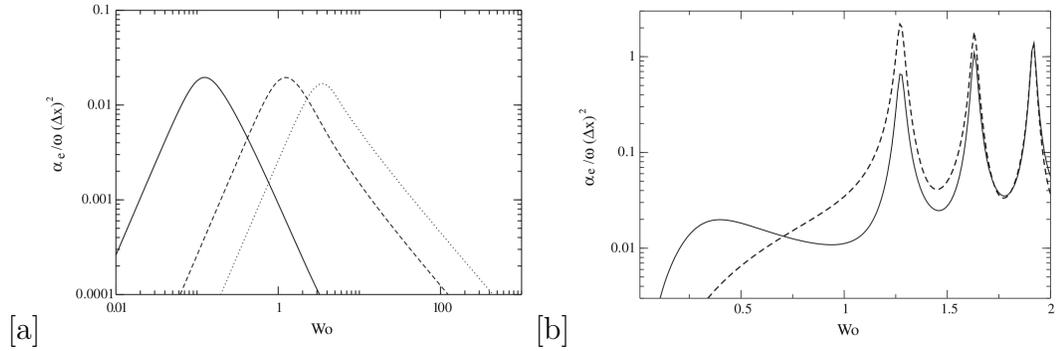


Figura 1.1: Comparación de los valores de difusividad térmica efectiva normalizada reportados por Lambert *et al.* (2009) para el caso Newtoniano, figura [a], y el caso del fluido de Maxwell con un tiempo viscoso usado como tiempo característico ($t_c = a^2/\nu$) para normalizar al tiempo de relajación, figura [b]. Se muestran valores de $\frac{\alpha_e}{\omega(\Delta x)^2}$ en función de la frecuencia adimensional W_o para $P_r = 1$, línea punteada, y para $P_r = 10$, línea quebrada y $P_r = 1000$, línea sólida.

En la búsqueda de mecanismos de transporte de calor eficientes se han

llevado a cabo diversos estudios teóricos y experimentales de flujos pulsantes buscando alternativas a los fluidos de trabajo y a los dispositivos convencionales. Un estudio interesante sobre la transferencia de calor utilizando metal líquido en movimiento oscilatorio fue propuesto por Puvaneswari y Shailendhra (2016). En dicho estudio se considera un flujo oscilatorio de metal líquido sobre una placa plana térmicamente conductora, imponiendo al fluido un gradiente de temperatura paralelo al plano infinito. Se analiza el mejoramiento de la transferencia de calor ocasionados por los perfiles de temperatura y velocidad. Se encuentra que los efectos de la conductividad térmica y el espesor de la placa plana en el flujo de calor transportado, afectan el comportamiento del gradiente de temperatura a cualquier valor de frecuencia. Se logra un máximo incremento en el flujo de calor transportado de 46.14 % optimizando el espesor de la placa. Se reporta un valor máximo de flujo de calor convectivo de $1.87 \times 10^8 \frac{W}{m^2}$ usando una placa de acero inoxidable y sodio metálico como fluido de trabajo.

Otro caso relacionado con el uso de metales líquidos se presenta en el trabajo reportado por Shailendhra y AnjaliDevi (2010) quienes investigaron teóricamente la mejora de la transferencia de calor en un flujo oscilatorio de metal líquido entre dos planos paralelos infinitos con un gradiente axial de temperatura impuesto. El fluido se pone en oscilación moviendo ambas placas axialmente y superponiendo un gradiente de presión oscilante axial que tiene la misma frecuencia que la de las placas. Se investigaron los casos descritos a continuación:

- a) El efecto del gradiente de presión axial oscilatorio sobre la difusividad térmica efectiva $\dot{\lambda}$, en ausencia de oscilación de los planos paralelos.
- b) Efecto de la oscilación axial de los planos paralelos sobre la difusividad térmica efectiva $\dot{\lambda}$, en ausencia del gradiente de presión axial oscilatorio.
- c) Efectos combinados de la oscilación de los planos y el gradiente de presión axial oscilatorio sobre la difusividad térmica efectiva λ .

Las conclusiones en todos los casos anteriores indican que existe un valor óptimo de frecuencia de oscilación adimensional β en donde la difusividad efectiva se maximiza. En la figura 1.2 puede verse un ejemplo del caso c) donde se aprecia claramente que la frecuencia óptima toma el valor de $\beta = \pi$. Dicha figura muestra la difusividad térmica efectiva como función de la frecuencia

de oscilación β que corresponde a la frecuencia de oscilación de los planos y del gradiente de presión axial oscilatorio impuesto. Se observan tres diferentes curvas correspondientes a distintos valores del gradiente de presión, donde U_0 representa la máxima velocidad adimensional de los planos y F_0 la magnitud de la fuerza impulsora (gradiente de presión oscilatorio impuesto). De las conclusiones de dicho trabajo se infiere que en presencia de un gradiente térmico axial, las oscilaciones sinusoidales del fluido resultan en la mejora substancial de la transferencia de calor independientemente de la manera en que la oscilación sea generada, por lo que es posible adecuarse a las necesidades de aplicación.

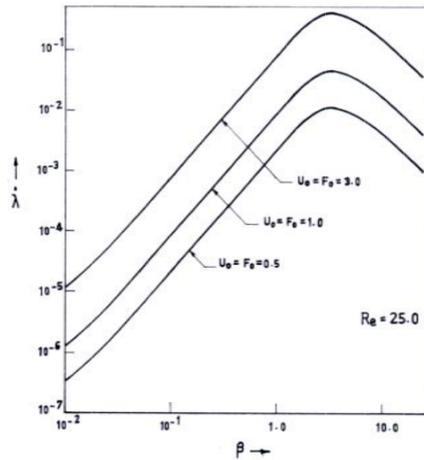


Figura 1.2: Comportamiento de la difusividad térmica efectiva con efectos combinados de la oscilación de los planos infinitos y el gradiente de presión oscilatorio como función de la frecuencia de oscilación. Cada curva corresponde a distintos valores de amplitud del gradiente de presión que produce el movimiento y valores de la máxima velocidad adimensional de los planos infinitos en los que se encuentra confinado el fluido de trabajo Shailendhra y AnjaliDevi (2010).

Los trabajos anteriores motivan a explorar más ampliamente el mejoramiento de la transferencia de calor con un metal líquido en movimiento oscilatorio. Dado que se trata de un fluido eléctricamente conductor, resulta interesante generar el movimiento oscilatorio mediante la fuerza de Lorentz producida por la interacción de una corriente eléctrica alterna inyectada y un campo magnéti-

co aplicado. También es de interés el conocer el efecto del campo magnético sobre el proceso de transferencia de calor con flujos oscilatorios.

En el presente estudio se aborda el análisis teórico de flujos oscilatorios en ductos utilizando primeramente un fluido viscoelástico de Maxwell y posteriormente un metal líquido que presenta un comportamiento Newtoniano. La principal motivación es el mejoramiento de la transferencia de calor que se presenta cuando existe un gradiente de temperatura a lo largo del ducto. En el capítulo 2, se estudia la dinámica del flujo oscilatorio de un fluido de Maxwell en un tubo recto de sección circular uniforme implementando una solución asintótica que permite estudiar de manera detallada el flujo a bajas y a altas frecuencias de oscilación. En el capítulo 3, se estudia el problema de la transferencia de calor en el fluido viscoelástico a partir de las soluciones asintóticas para la velocidad y se discute la difusividad térmica efectiva en ambos límites. En el capítulo 4, se analiza el flujo oscilatorio de un metal líquido en un ducto formado por placas paralelas promovido por una fuerza de Lorentz oscilatoria producida por la interacción de una corriente alterna aplicada transversalmente al movimiento del fluido y un campo magnético uniforme. En el capítulo 5, se estudia la transferencia de calor en el flujo oscilatorio de metal líquido tanto en presencia de campo magnético como en ausencia del mismo. Finalmente, se se presentan las conclusiones del trabajo y se mencionan algunas ideas para desarrollar a futuro.

Dinámica del flujo oscilatorio de un fluido viscoelástico.

En este capítulo se analiza teóricamente la dinámica del flujo oscilatorio de un fluido viscoelástico dentro de un ducto cilíndrico recto provocado por un gradiente de presión armónico impuesto en dirección axial. Se utiliza el modelo lineal de Maxwell para incorporar el comportamiento viscoelástico del fluido y se supone que el ducto es muy largo de modo que pueden despreciarse los efectos de borde. No obstante que el perfil de velocidades puede obtenerse de manera exacta en términos de las funciones de Bessel (Lambert *et al.* (2009), Del Rio *et al.* (1998)), en este trabajo se obtienen soluciones por medio de expansiones asintóticas válidas para valores de la frecuencia de oscilación muy pequeños y muy grandes, con el objeto de lograr un mejor entendimiento del fenómeno. Primeramente se presentan las ecuaciones de balance de masa, momento y energía y posteriormente se describe el modelo viscoelástico de Maxwell. Luego se obtiene la solución exacta para el flujo oscilatorio de un fluido de Maxwell en un tubo recto y finalmente se presenta la solución asintótica de este problema.

2.1. Ecuaciones de conservación de la dinámica de fluidos

En la dinámica de fluidos se estudia el comportamiento de los fluidos desde un punto de vista macroscópico y bajo la hipótesis del continuo que supone que el fluido consiste de materia continua y no considera la existencia de

moléculas individuales (Currie, 2003). Esto implica que todas variables que describen el fluido tales como la densidad, la presión, la velocidad y la temperatura, se pueden definir en cada punto del fluido de manera unívoca en un tiempo dado. Para establecer las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico y térmico del fluido a partir de las cuales es posible obtener su evolución espacio-temporal se hace uso de los principios físicos básicos establecidos por la conservación de la masa, el balance del momento lineal (segunda ley de Newton) y la conservación de la energía (primera ley de la termodinámica).

El principio de conservación de la masa da lugar a lo que se conoce como la ecuación de continuidad. Una forma especial muy importante de dicha ecuación es aquella para un fluido de densidad constante. Esta aproximación es válida en muchas aplicaciones en ingeniería lo que se conoce como fluido incompresible, es decir, un fluido donde se desprecia la variación de la densidad con la presión y la temperatura. En el presente estudio supondremos que el fluido de trabajo es incompresible, de modo que, la ecuación de conservación de masa toma la forma siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.1)$$

donde \vec{u} es el campo de velocidades del fluido.

La segunda ley de Newton aplicada a un volumen de control de un fluido sobre el cual actúan fuerzas superficiales y fuerzas de cuerpo da lugar a la ecuación:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla \cdot \tilde{\tau} + \rho \vec{f}, \quad (2.2)$$

donde ρ es la densidad de masa del fluido, $\tilde{\tau}$ es el tensor de esfuerzos mecánicos y $\rho \vec{f}$ son las fuerzas de cuerpo presentes.

Para un fluido incompresible, suponiendo despreciables los efectos disipativos y el transporte de energía por radiación, la ecuación de balance de energía térmica o ecuación de transferencia de calor tiene la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T, \quad (2.3)$$

donde T es el campo de temperatura y $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ es la difusividad térmica del fluido, siendo k y c la conductividad térmica y el calor específico, respectivamente.

2.2. Flujo oscilatorio de un fluido viscoelástico.

En este trabajo consideraremos el flujo oscilatorio laminar, incompresible y completamente desarrollado de un fluido viscoelástico de Maxwell en un tubo con paredes adiabáticas y de sección transversal circular constante producido por un gradiente de presión armónico aplicado en la dirección axial (z). Un esquema del modelo físico descrito anteriormente puede apreciarse en la figura (2.1). Previamente a la presentación de las ecuaciones que rigen su movimiento se presentará el modelo de Maxwell para un fluido viscoelástico.

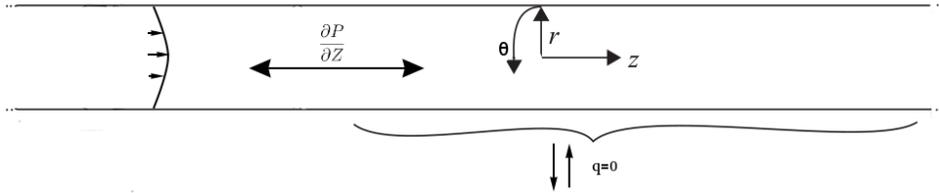


Figura 2.1: Flujo oscilatorio de un fluido dentro de un ducto cilíndrico con paredes adiabáticas y de sección transversal circular constante producido por un gradiente de presión armónico aplicado en la dirección axial (z).

2.2.1. Modelo de Maxwell de la Viscoelasticidad

Una manera sencilla de visualizar el modelo de Maxwell de un fluido viscoelástico es mediante la combinación de un elemento elástico (resorte) y un elemento viscoso (émbolo), ambos conectados en serie, como se ilustra en la figura (2.2). Si consideramos que este sistema caracteriza la estructura interna de un fluido viscoelástico, el comportamiento del elemento elástico viene definido a través de la ley de Hooke que establece la proporcionalidad entre los esfuerzos aplicados τ_1 y las deformaciones conseguidas ε_1 . Simplificando a una dimensión podemos escribir

$$\tau_1 = \xi \varepsilon_1, \quad (2.4)$$

donde la constante de proporcionalidad ξ está relacionada con la rigidez del elemento elástico.

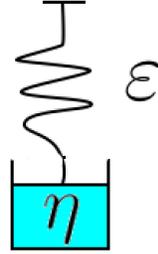


Figura 2.2: Modelo mecánico de la estructura interna de un fluido viscoelástico de Maxwell que combina un elemento elástico (resorte) y un elemento viscoso (émbolo).

De la misma manera, el comportamiento del elemento viscoso está perfectamente definido según la ley de Newton para un fluido, que establece la proporcionalidad entre los esfuerzos aplicados τ_2 y la tasa de variación de las deformaciones $\dot{\varepsilon}_2$. De esta forma tenemos

$$\tau_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2, \quad (2.5)$$

donde la constante de proporcionalidad η es la viscosidad dinámica, representativa de la naturaleza viscosa del fluido, y el punto sobre la variable denota derivada temporal. Esta ecuación es la que caracteriza a un fluido Newtoniano. Por otro lado, ya que los elementos se encuentran en serie, se puede asegurar que los niveles de esfuerzo a los que trabajan son los mismos, de modo que $\tau_1 = \tau_2$.

El modelo de Maxwell toma en cuenta las anteriores expresiones para evaluar la respuesta de un material cuando se le somete a un estado de esfuerzos. Ya que la deformación total del sistema es la suma de las dos deformaciones, tenemos que

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (2.6)$$

por lo que al tomar la derivada temporal obtenemos

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\xi} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}, \quad (2.7)$$

y multiplicando por η obtenemos

$$t_m \frac{d\tau}{dt} + \tau = \eta \dot{\epsilon}, \quad (2.8)$$

donde $t_m = \frac{\eta}{\xi}$ se conoce como el tiempo de relajación.

La ecuación anterior permite modelar el comportamiento de un fluido viscoelástico de Maxwell. De manera general, el modelo de la viscoelasticidad de Maxwell se puede expresar mediante la ecuación.

$$t_m \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = -\eta \nabla \cdot \vec{u} - \tilde{\tau}, \quad (2.9)$$

donde el término del lado izquierdo introduce la relajación de los esfuerzos en el sistema. Nótese que cuando t_m tiende a cero, la ecuación se reduce a la ecuación constitutiva de un fluido Newtoniano $\tilde{\tau} = -\eta \nabla \cdot \vec{u}$.

El modelo de Maxwell de comportamiento viscoelástico es el modelo más sencillo y representa la base para la formulación de modelos más complejos.

2.2.2. Perfil de velocidad general.

Asumiendo que el flujo es completamente desarrollado (despreciando efectos de borde) y periódico, solo existe la componente de velocidad axial la cual depende únicamente de la coordenada radial y del tiempo, por lo que la ecuación de continuidad se satisface idénticamente.

En coordenadas cilíndricas el campo de velocidades toma la forma $\vec{u} = \langle 0, 0, v_z \rangle$ con $v_z(r, t)$, por lo tanto el término convectivo se anula idénticamente y la ecuación de balance de momento (2.2) se reduce a lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla P - \nabla \cdot \tau. \quad (2.10)$$

Al aplicar la divergencia a la ecuación (2.9) se obtiene

$$t_m \frac{\partial(\nabla \cdot \tau)}{\partial t} = -\eta \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot \tau, \quad (2.11)$$

y al combinar las ecuaciones (2.10) y (2.11) resulta

$$t_m \frac{\partial}{\partial t} \left(-\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla P \right) = -\eta \nabla^2 \vec{u} - \left(-\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla P \right). \quad (2.12)$$

Suponiendo que el flujo oscilatorio con media cero es producido por un gradiente de presión armónico ∇P y que este solo actúa en la dirección axial, se tiene que $\nabla P = \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{e}_z$, donde \mathbf{e}_z es el vector unitario en la dirección axial z . Sustituyendo la componente del campo de velocidades correspondiente y reordenando los términos de la ecuación anterior, la ecuación de movimiento para el flujo oscilatorio de un fluido de Maxwell en un tubo recto toma la siguiente forma

$$t_m \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left[t_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial Z} \right) + \frac{\partial P}{\partial Z} \right] + \frac{\eta}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (2.13)$$

la cual debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$v(0, t) = \text{finita}, \quad (2.14)$$

$$v(a, t) = 0, \quad (2.15)$$

donde a es el radio del tubo. Cabe mencionar que de la ecuación (2.13), cuando $t_m \rightarrow 0$ el problema se reduce a la ecuación de Navier-Stokes para un fluido Newtoniano fluyendo dentro un ducto cilíndrico.

Ahora suponemos que tanto el gradiente de presión como la componente axial del campo de velocidades tienen una variación armónica en el tiempo y se pueden expresar como la parte real de las cantidades

$$v_z(r, t) = V(r)e^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = P_z e^{-i\omega t}$$

donde ω es la frecuencia angular de oscilación y P_z es la amplitud constante del gradiente de presión. Sustituyendo en la ecuación (2.13), obtenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\rho}{\eta} V (t_m \omega^2 + i\omega) = P_z \left(\frac{1}{\eta} - \frac{i\omega t_m}{\eta} \right). \quad (2.16)$$

Ya que se trata de una ecuación lineal no homogénea, la solución general se puede expresar como la suma de la solución de la ecuación homogénea, V_h , más una solución particular, es decir $V(r) = V_h + V_p$. La solución general a la ecuación (2.16) ha sido determinada en varios trabajos (Del Río (2003), Lambert *et al.* (2009), Castillo (2014)), y es de la forma

$$V(r) = V_h + V_p = C_1 J_0(r\beta_\nu) + C_2 Y_0(r\beta_\nu) + \frac{1}{\rho} P_z \frac{(1 - i\omega t_m)}{(t_m \omega^2 + i\omega)}, \quad (2.17)$$

donde J_0 y Y_0 corresponden a las funciones de Bessel de orden cero de primer y segundo tipo correspondientemente, con $\beta_\nu^2 = \frac{\rho}{\eta}(\omega^2 t_m + i\omega)$.

Aplicando las condiciones de frontera (2.14) y (2.15) se encuentra que

$$C_1 = -\frac{1}{\rho} P_z \frac{(1 - i\omega t_m)}{(t_m \omega^2 + i\omega)} \left[\frac{1}{J_0(a\beta_\nu)} \right]$$

$$\text{y } C_2 = 0.$$

Por lo tanto se concluye que la solución general de la ecuación (2.16) que satisface las condiciones de frontera (2.14) y (2.15) es:

$$V(r) = \frac{1}{\rho} \frac{(1 - i\omega t_m)}{(t_m \omega^2 + i\omega)} \left[1 - \frac{J_0(r\beta_\nu)}{J_0(a\beta_\nu)} \right] P_z. \quad (2.18)$$

Al multiplicar la solución anterior por el término $e^{-i\omega t}$ dicha expresión proporciona la dependencia espacial de la velocidad de un fluido viscoelástico de Maxwell fluyendo dentro de un ducto cilíndrico debido a un gradiente de presión oscilatorio armónico de amplitud P_z .

2.2.3. Permeabilidad dinámica para un fluido de Maxwell

Aunque no es el tema central del presente trabajo, en esta sección se resumen brevemente los resultados de otros autores encontrados para la permeabilidad dinámica de un fluido de Maxwell. La permeabilidad es la capacidad

de un material poroso para permitir que los fluidos lo atraviesen, y depende del número, la geometría y el tamaño de los poros interconectados y las fracturas. La permeabilidad es una propiedad intrínseca de los materiales porosos y ofrece una estimación de la facilidad con la cual un fluido se desplaza a través de dicho material. Estimar la permeabilidad es de gran importancia en los yacimientos de hidrocarburos, en los acuíferos, los empaques de grava y otros sistemas de gran relevancia en diversas áreas de la ingeniería (Andersen y Klemin, 2014).

La permeabilidad está dada en unidades de área (m^2), en referencia al área del espacio poroso abierto en la sección transversal perpendicular a la dirección del flujo de fluido. La ley de Darcy de la permeabilidad debe su nombre al ingeniero francés Henry Darcy, cuyos experimentos con agua fluyendo a través de arena condujeron a la descripción del flujo de un fluido en estado estacionario a través de medios porosos. En la mayoría de las aplicaciones petroleras, la unidad de uso común es el milidarcy (mD) donde 1 darcy es equivalente a $9.869233 \times 10^{-13} m^2$.

En diversos trabajos tales como Del Rio *et al.* (1998), Tsiklauri y Beresnev (2001), Castrejón-Pita *et al.* (2003), se presenta una expresión para determinar la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Se encontró que el gasto promedio tiene un incremento considerable cuando la frecuencia de bombeo corresponde a la frecuencia de resonancia del sistema.

Para determinar la permeabilidad dinámica de un fluido que fluye en un tubo capilar (que puede formar parte de un conjunto de tubos que forman un medio poroso) se debe determinar el flujo promedio de fluido en el ducto (gasto volumétrico), integrando en los límites $0 \leq r \leq a$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es decir,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V(r) r dr d\theta . \quad (2.19)$$

Introduciendo el perfil de velocidades 2.18 la expresión anterior toma la forma siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{\rho} \frac{(1 - i\omega t_m)}{(t_m \omega^2 + i\omega)} \left(1 - \frac{J_0(r\beta_\nu)}{J_0(a\beta_\nu)} \right) \right] P_z r dr d\theta , \quad (2.20)$$

con $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{(1-i\omega t_m)}{(t_m\omega^2+i\omega)}$ y $\beta_\nu^2 = t_m\omega^2 + i\omega$, o bien

$$Q = 2\pi\alpha \left[\int_0^a r dr - \frac{1}{J_0(a\beta_\nu)} \left(\frac{1}{\beta_\nu} \right) \int_0^a \beta_\nu r J_0(r\beta_\nu) \right] P_z dr . \quad (2.21)$$

Usando la propiedad $\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$ (Spiegel, 1968), obtenemos

$$Q = \pi\alpha \left[a^2 - \frac{2a J_1(a\beta_\nu)}{\beta_\nu J_0(a\beta_\nu)} \right] P_z . \quad (2.22)$$

Si definimos la permeabilidad del ducto como

$$-K(\beta_\nu, \omega) = \pi\alpha \left[\frac{2a J_1(a\beta_\nu)}{\beta_\nu J_0(a\beta_\nu)} - a^2 \right], \quad (2.23)$$

podemos expresar

$$Q = -K(\beta_\nu, \omega) P_z . \quad (2.24)$$

Esta es la llamada ley de Darcy, muy usada en el transporte de fluidos en medios porosos que nos dice que el gasto promedio en un medio poroso es proporcional al gradiente de presiones donde la constante de proporcionalidad es la llamada permeabilidad, que ofrece una medida de la facilidad con la que un fluido fluye a través del ducto. Evidentemente, las ecuaciones (2.23) y (2.24) expresan la ley de Darcy específicamente para un fluido de Maxwell (Del Rio *et al.*, 1998)

2.2.4. Solución asintótica del flujo oscilatorio de un fluido de Maxwell en un tubo

Las soluciones asintóticas son de gran ayuda para la comprensión profunda de flujos que presentan un comportamiento complicado. Aun y cuando existe una solución exacta para el flujo oscilatorio de un fluido de Maxwell en un tubo,

el comportamiento físico detallado de la solución dentro del rango de parámetros relevantes no es evidente. Por tal motivo, a continuación se presenta una solución asintótica que permite discernir claramente el comportamiento del flujo a bajas y altas frecuencias de oscilación, siguiendo la metodología planteada por Leal (2007). Para esto se requiere definir las escalas características del problema y reescribir las ecuaciones de movimiento en forma adimensional.

2.2.4.1. Escalas características del sistema y adimensionalización

Para expresar en forma adimensional la ecuación diferencial que gobierna el flujo en cuestión debemos tomar en cuenta las escalas características que distinguen al sistema. Para el presente caso se proponen las siguientes escalas características de velocidad, longitud y tiempo, respectivamente:

$$U_c = \frac{P_z a^2}{\eta}, \quad l_c = a, \quad t_c = \frac{a^2}{\nu},$$

donde t_c es el tiempo de difusión del momento a través del ducto, también conocido como tiempo viscoso.

Las variables adimensionales correspondientes al problema se proponen de la siguiente manera:

$$\bar{V}_z = \frac{v}{U_c}, \quad \bar{r} = \frac{r}{l_c}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t_c}.$$

De esta forma el campo de velocidades adimensional puede ser expresado como

$$\bar{v}_z = \Re(\bar{V}_z) = \Re(\hat{V}_{(\bar{r})} e^{-i(\frac{\omega a^2}{\nu})\hat{t}}) = \Re(\hat{V} e^{-i(R_\omega)\hat{t}}).$$

donde \Re indica la parte real de la cantidad entre paréntesis. $R_\omega = \omega a^2 / \nu$ es el número de Reynolds oscilatorio y es el cociente del tiempo viscoso y el periodo de la oscilación impuesta, es decir el tiempo característico de la oscilación del fluido. Al introducir las variables adimensionales en la ecuación (2.13) y reescalando el tiempo como $R_\omega \hat{t} = \bar{t}$ se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \bar{r}} + D_e R_\omega \hat{V} + i(R_\omega \hat{V} + D_e) = 1, \quad (2.25)$$

donde $D_e \equiv t_m \omega$ es el número de Deborah que es el cociente del tiempo de relajación t_m del fluido viscoelástico y el tiempo característico de oscilación del fluido.

La ecuación (2.25) está sujeta a las condiciones de frontera siguientes:

$$\widehat{V}(0) = \text{finita} \quad y \quad \widehat{V}(1) = 0. \quad (2.26)$$

Es importante mencionar que el reescalamiento temporal es clave para la derivación y la solución de la ecuación (2.25) ya sea de forma general o asintóticamente para tiempos muy largos. El producto $R_\omega \widehat{t}$ indica un reescalamiento temporal que resulta ser el adecuado para la solución a $t \gg 1$. Es decir, ya que el flujo de interés se presenta mucho después de que el flujo transitorio ha desaparecido, la escala de tiempo que hay que considerar es el periodo de oscilación del fluido $1/\omega$, es decir, $R_\omega \widehat{t} = \bar{t} = \omega t$.

Cuando un material viscoelástico se somete a deformaciones repentinas, pueden surgir tensiones internas debido a un cambio de posición u orientación de las moléculas en la estructura del fluido, tensiones que necesitan un cierto tiempo para desaparecer. Este tiempo, llamado tiempo de relajación (t_m), es característico del material y mide el tiempo que requiere un material para adaptarse a la deformación aplicada.

Para describir el comportamiento de un material es importante considerar que puede depender de la escala de tiempo de observación y de su relación con el tiempo característico del material. Por ejemplo, si la escala temporal de observación es mucho mas pequeña que el tiempo de relajación, no se manifestará la relajación del material, observándose comportamiento elástico. Por otro lado, cuando el tiempo de observación es mucho mayor que t_m , los efectos elásticos no se manifiestan observándose un comportamiento viscoso.

2.2.4.2. Solución asintótica para $R_\omega \ll 1$

Considerando valores arbitrarios del parámetro D_e en el límite cuando $R_\omega \rightarrow 0$, la ecuación (2.25) se reduce a la forma aproximada

$$\frac{\partial^2 \widehat{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial r} + i D_e = 1, \quad (2.27)$$

sujeta a las condiciones de frontera establecidas,

$$\widehat{V}(0) = \text{finita}, \quad \widehat{V}(1) = 0. \quad (2.28)$$

La solución de la ecuación (2.27) es fácil de determinar. Aplicando las condiciones de frontera a dicha solución se obtiene que el campo de velocidades es

$$\widehat{V}(\bar{r}) = \frac{1}{4} \left[\bar{r}^2 - 1 + iD_e(1 - \bar{r}^2) \right], \quad (2.29)$$

y sustituyendo en $\bar{V}_z = \widehat{V}(\bar{r})e^{-i\bar{t}}$, la dependencia espacio temporal tiene la forma

$$\bar{V}_z = \frac{1}{4} \left[\bar{r}^2 - 1 + iD_e(1 - \bar{r}^2) \right] e^{-i\bar{t}}, \quad (2.30)$$

o bien

$$\begin{aligned} \bar{V}_z = \frac{1}{4} & \left[(\bar{r}^2 - 1) \cos(\bar{t}) + D_e(1 - \bar{r}^2) \text{sen}(\bar{t}) \right. \\ & \left. + i \left(D_e(1 - \bar{r}^2) \cos(\bar{t}) - (\bar{r}^2 - 1) \text{sen}(\bar{t}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tomando la parte real de la ecuación (2.31) obtenemos

$$\bar{v}_z = \Re(\bar{V}_z) = \frac{1}{4} \left[(\bar{r}^2 - 1) \cos(\bar{t}) + D_e(1 - \bar{r}^2) \text{sen}(\bar{t}) \right], \quad (2.32)$$

que indica que el problema se reduce a un flujo de Poiseuille cuasiestacionario con un término en fase con el gradiente de presión y otro desfasado $\pi/2$ proporcional a D_e . Puede apreciarse que en la ecuación (2.27) no existe dependencia en R_ω ya que corresponde al límite cuando este parámetro tiende a cero. Para determinar la corrección del flujo correspondiente a valores muy pequeños, pero diferentes de cero de R_ω , buscamos una solución aproximada de la ecuación (2.25) en forma de una expansión asintótica en términos de potencias de R_ω , es decir,

$$\widehat{V}(\bar{r}) = \widehat{V}_0(\bar{r}) + R_\omega \widehat{V}_1(\bar{r}) + R_\omega^2 \widehat{V}_2(\bar{r}) + O(R_\omega^3), \quad (2.33)$$

donde el símbolo $O(R_\omega^3)$ agrupa a todos los términos de orden R_ω^3 y mayores, mientras que el término a orden cero, es decir, el primer término $\widehat{V}_0(\bar{r})$ corresponde a la solución (2.29). La solución propuesta (2.33) es una *expansión regular* o *expansión asintótica* de $\widehat{V}(\bar{r})$ válida para $R_\omega \ll 1$ (Leal, 2007). Se le asigna el nombre “regular” porque se asume que la misma forma de la expansión se mantiene en todo el dominio $1 \leq \bar{r} \leq 0$. La convergencia de la expansión (2.33) es una consecuencia del resultado del límite cuando $R_\omega \rightarrow 0$, de modo que cada término sucesivo puede ser arbitrariamente pequeño comparado con el término anterior (Leal, 2007). Es de esperarse que la corrección introducida por los términos $O(R_\omega^3)$ sea muy pequeña comparada con los términos que se retienen en (2.33).

Ahora, si se sustituye la solución propuesta (2.33) en la ecuación (2.25) para $\widehat{V}(\bar{r})$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \widehat{V}_0}{d\bar{r}^2} + R_\omega \frac{d^2 \widehat{V}_1}{d\bar{r}^2} + R_\omega^2 \frac{d^2 \widehat{V}_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_0}{d\bar{r}} + R_\omega \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_1}{d\bar{r}} + R_\omega^2 \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_2}{d\bar{r}} \\ + R_\omega D_e \widehat{V}_0 + R_\omega^2 D_e \widehat{V}_1 + R_\omega^3 D_e \widehat{V}_2 \\ + i(R_\omega \widehat{V}_0 + R_\omega^2 \widehat{V}_1 + R_\omega^3 \widehat{V}_2 + D_e) + O(R_\omega^4) = 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Truncando los términos de (2.34) a orden R_ω^2 y reagrupando obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 \widehat{V}_0}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_0}{d\bar{r}} + iD_e - 1 \right) + R_\omega \left(\frac{d^2 \widehat{V}_1}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_1}{d\bar{r}} + \widehat{V}_0(D_e + i) \right) \\ + R_\omega^2 \left(\frac{d^2 \widehat{V}_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_2}{d\bar{r}} + \widehat{V}_1(D_e + i) \right) + O(R_\omega^3) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se supone que el parámetro R_ω es asintóticamente pequeño pero arbitrario, es decir, la igualdad en (2.35) debe satisfacerse para cualquier valor pequeño pero arbitrario de R_ω . Por lo tanto los términos a cada orden de R_ω deben ser iguales a cero. Nótese que la función V_0 satisface la ecuación (2.27) sujeta a las condiciones (2.28) y está dada por (2.29). Entonces, tenemos que a los órdenes R_ω^0 , R_ω y R_ω^2 se deben satisfacer las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$$\frac{d^2 \widehat{V}_0}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_0}{d\bar{r}} + iD_e - 1 = 0 \quad \text{con} \quad \widehat{V}_0(0) = \text{finita}, \quad \widehat{V}_0(1) = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2\widehat{V}_1}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_1}{d\bar{r}} + \widehat{V}_0(D_e + i) = 0 \quad \text{con} \quad \widehat{V}_1(0) = \text{finita}, \quad \widehat{V}_1(1) = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{d^2\widehat{V}_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\widehat{V}_2}{d\bar{r}} + \widehat{V}_1(D_e + i) = 0 \quad \text{con} \quad \widehat{V}_2(0) = \text{finita}, \quad \widehat{V}_2(1) = 0, \quad (2.38)$$

que se pueden resolver de manera sucesiva llegando al siguiente resultado:

$$\widehat{V}_0(r) = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) + i \left[\frac{1}{4} D_e (1 - \bar{r}^2) \right], \quad (2.39)$$

$$\widehat{V}_1(\bar{r}) = \left[\frac{D_e}{8} + \frac{i}{16} (1 - D_e^2) \right] \left(\bar{r}^2 - \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{3}{4} \right), \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \widehat{V}_2(\bar{r}) = & \left(\frac{1}{16} - \frac{3D_e^2}{16} \right) \left(\frac{\bar{r}^4}{16} - \frac{\bar{r}^6}{144} - \frac{3\bar{r}^2}{16} \right) + \frac{19}{2304} (1 - 3D_e^2) \\ & + i \left[\left(\frac{D_e^3}{16} - \frac{3D_e}{16} \right) \left(\frac{\bar{r}^4}{16} - \frac{\bar{r}^6}{144} - \frac{3\bar{r}^2}{16} \right) + \frac{19}{2304} (D_e^3 - 3D_e) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

En el límite $De \rightarrow 0$, las soluciones (2.39), (2.40) y (2.41) se reducen a

$$\widehat{V}_0 = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1), \quad (2.42)$$

$$\widehat{V}_1 = \frac{i}{16} \left(\bar{r}^2 - \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{3}{4} \right), \quad (2.43)$$

$$\widehat{V}_2 = \frac{1}{256} \left(\bar{r}^4 - \frac{\bar{r}^6}{9} - 3\bar{r}^2 + \frac{19}{9} \right), \quad (2.44)$$

que corresponde al caso puramente Newtoniano en el que los efectos elásticos desaparecen. Precisamente, las soluciones (2.42), (2.43) y (2.44) pertenecientes a la expansión asintótica propuesta (2.33) corresponden exactamente a las obtenidas por Leal (2007) para el caso de un fluido Newtoniano.

En el presente desarrollo se truncó a orden R_ω^2 pero evidentemente el mismo procedimiento puede utilizarse para obtener términos a órdenes más altos. Sustituyendo las ecuaciones (2.39), (2.40) y (2.41) en la expansión asintótica (2.33) obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{V}(r) &= \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) + i \left[\frac{1}{4} D_e (1 - \bar{r}^2) \right] \\
&+ R_\omega \left\{ \left[\frac{D_e}{8} + \frac{i}{16} (1 - D_e^2) \right] \left(\bar{r}^2 - \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{3}{4} \right) \right\} \\
&+ R_\omega^2 \left\{ \left(\frac{1}{16} - \frac{3D_e^2}{16} \right) \left(\frac{\bar{r}^4}{16} - \frac{\bar{r}^6}{144} - \frac{3\bar{r}^2}{16} \right) + \frac{19}{2304} (1 - 3D_e^2) \right\} \\
&+ i R_\omega^2 \left\{ \left[\left(\frac{D_e^3}{16} - \frac{3D_e}{16} \right) \left(\frac{\bar{r}^4}{16} - \frac{\bar{r}^6}{144} - \frac{3\bar{r}^2}{16} \right) + \frac{19}{2304} (D_e^3 - 3D_e) \right] \right\} \\
&+ O(R_\omega^3). \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\bar{v}_z(\bar{r}, \bar{t}) = \Re(\widehat{V}_{(\bar{r})} e^{-i\bar{t}})$, sustituyendo (2.45), se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{v}_z(\bar{r}, \bar{t}) &= \cos(\bar{t}) \left(\frac{\bar{r}^2 - 1}{4} \right) + \text{sen}(\bar{t}) \left[\frac{D_e(1 - \bar{r}^2)}{4} \right] \\
&+ R_\omega \left\{ \left[\frac{D_e \cos(\bar{t})}{8} + \frac{\text{sen}(\bar{t})}{16} (1 - D_e^2) \right] \left(\bar{r}^2 - \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{3}{4} \right) \right\} \\
&+ R_\omega^2 \left\{ \left[\cos(\bar{t}) \left(\frac{1}{16} - \frac{3D_e^2}{16} \right) + \text{sen}(\bar{t}) \left(\frac{D_e^3}{16} - \frac{3D_e}{16} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{\bar{r}^4}{16} - \frac{\bar{r}^6}{144} - \frac{3\bar{r}^2}{16} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{19}{2304} \left[\cos(\bar{t})(1 - 3D_e^2) + \text{sen}(\bar{t})(D_e^3 - 3D_e) \right] \right\} \\
&+ O(R_\omega^3) \tag{2.46}
\end{aligned}$$

En la figura (2.3) se muestran los perfiles de velocidad dados por (2.46) para $R_\omega = 10^{-3}$ en un ángulo fase de $3\pi/4$ para distintos valores del número de Deborah, incluyendo $D_e = 0$ que corresponde al caso Newtoniano. Aun para frecuencias bajas, puede apreciarse el comportamiento elástico para valores grandes de D_e . Se observa que la amplitud del perfil de velocidad aumenta al aumentar D_e , es decir, cuando los efectos elásticos son más intensos.

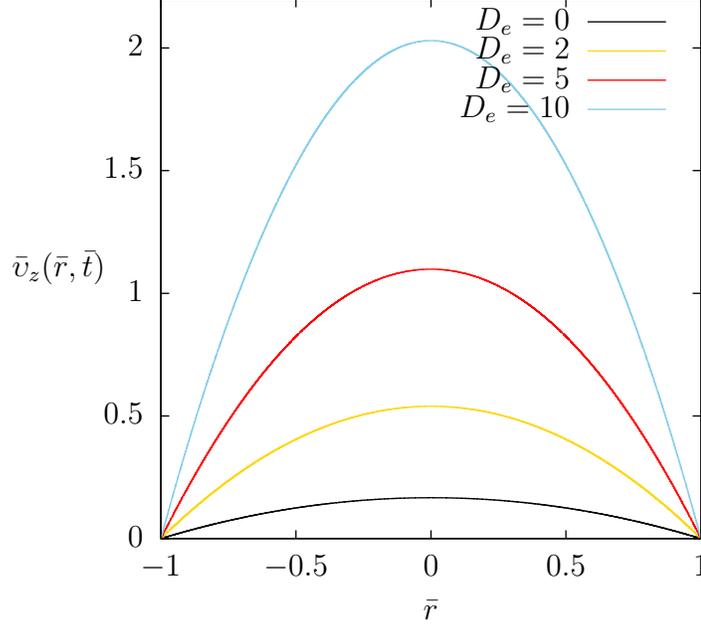


Figura 2.3: Perfil de velocidad de un fluido viscoelástico a un ángulo fase de $3\pi/4$, con $R_\omega = 1 \times 10^{-3}$, para $De = 0, 2, 5$ y 10 .

2.2.4.3. Solución asintótica para $R_\omega \gg 1$

Ahora consideraremos la solución de la ecuación (2.25) con las condiciones de frontera (2.26) pero en el límite de altas frecuencias, es decir, cuando $R_\omega \gg 1$. En este caso se puede esperar que el término de aceleración local sea mas grande en magnitud que el término viscoso, lo que es lo opuesto a cuando $R_\omega \ll 1$. Si se observa detalladamente, aparentemente el término de aceleración $iR_\omega \hat{V}$ y el de relajación $R_\omega D_e \hat{V}$ podrían llegar a ser mas grandes que el término del gradiente de presión en (2.25). Pero esto es imposible, ya que el movimiento del fluido existe únicamente a causa del gradiente de presión, es decir, el término de aceleración no puede exceder en magnitud al gradiente de presión. En vez de esto lo que se debería considerar en el caso $R_\omega \gg 1$ es que el gradiente de presión y el término de aceleración permanezcan en balance. Se puede determinar de (2.25) que dicho balance solo puede ocurrir si la magnitud de \hat{V} disminuye cuando R_ω aumenta, es decir,

$$\widehat{V}(\bar{r}) = \frac{1}{R_\omega} V(\bar{r}). \quad (2.47)$$

En este caso la ecuación (2.25) toma la forma siguiente:

$$\frac{1}{R_\omega} \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{dV}{d\bar{r}} \right) \right] + D_e V + i(D_e + V) = 1, \quad (2.48)$$

para $R_\omega \gg 1$. Entonces, en el límite cuando $R_\omega \rightarrow \infty$

$$iV + D_e V + iD_e = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(V = \frac{(1 - iD_e)}{(i + D_e)} \right) i,$$

es decir

$$V = -i. \quad (2.49)$$

Lo anterior resulta ser consistente con la existencia de un balance entre el gradiente de presión y el término de aceleración. Nótese que la forma de la solución 2.49 resulta ser independiente del número de Deborah, esto parece implicar que cuando, $R_\omega \gg 1$, las fuerzas elásticas no se presentan en la dinámica del flujo en las regiones alejadas de las paredes donde domina el gradiente de presión. Se puede establecer que el comportamiento dado por la ecuación 2.49 es el mismo que se encuentra en el flujo oscilatorio de un fluido Newtoniano.

Como una primera aproximación de la ecuación de balance (2.48), se espera que la solución (2.49) que se obtuvo tomando el límite cuando $R_\omega \rightarrow \infty$ tenga lugar como el primer término de una expansión asintótica de $V(\bar{r})$ para $R_\omega \gg 1$. Asumiendo que dicha expansión asintótica es regular, tomaría la forma siguiente:

$$V(\bar{r}) = V_0(\bar{r}) + \frac{1}{R_\omega} V_1(\bar{r}) + O(R_\omega^{-2}), \quad (2.50)$$

entonces de acuerdo a la ecuación (2.47) y $V_0(\bar{r}) = -i$ tenemos

$$\widehat{V} = -\frac{i}{R_\omega} + O(R_\omega^{-2}), \quad (2.51)$$

donde la expansión se trunca a orden $O(R_\omega^{-2})$. Utilizando las ecuaciones (2.51) y (2.50) se sigue que

$$\bar{v}_z = -\frac{\text{sen}(\bar{t})}{R_\omega} + O(R_\omega^{-2}). \quad (2.52)$$

Esta es una primera aproximación del campo de velocidades para $R_\omega \gg 1$. De esta solución se puede deducir que existe un campo de velocidades uniforme, que es periódico en el tiempo pero que se retrasa $\pi/2$ radianes del gradiente de presión impuesto ($\Re\{e^{-i\bar{t}}\}$).

Reexaminando el resultado anterior, observamos que dicha solución no satisface la condición de frontera $\bar{v}_z = 0$ en las paredes, $\bar{r} = 1$. Esto significa que no puede representar una solución aproximada del problema original.

Si el ajuste de escala escogido fuese el correcto, entonces los términos $\frac{d^2V}{d\bar{r}^2}$ y $\frac{1}{\bar{r}}\frac{dV}{d\bar{r}}$ en (2.48) deberían ser de $O(1)$ como de hecho se asume en el proceso que llevó a la solución anterior para $R_\omega \ll 1$. Sin embargo, muy cerca de la frontera del ducto esta escala no puede ser la correcta debido a que dicha solución no satisface las condiciones de frontera (2.28). Por lo tanto todo indica que el término de viscoso debe ser importante en dicha región, incluso cuando $R_\omega \rightarrow \infty$ debido a que de otra manera las condiciones de frontera no se pueden satisfacer. La escala característica $l_c = a$ y la solución resultante (2.51) son razonables para valores de \bar{r} alejados de las paredes, pero ni la solución ni la escala pueden ser correctas cerca de las paredes del ducto.

Para poder atacar el problema de manera correcta, se introducirá un cambio de variable adecuado para la región cercana a las paredes, es decir,

$$y = 1 - \bar{r} \quad \Rightarrow \quad \bar{r} = 1 - y. \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.48) toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{R_\omega} \left[\frac{d^2V}{dy^2} - \frac{1}{(1-y)} \frac{dV}{dy} \right] + iV + iD_e + D_eV = 1, \quad (2.54)$$

donde $y = 0$ corresponde a la posición de las paredes del ducto.

Cerca de las paredes los términos viscosos deben ser relevantes incluso en el límite $R_\omega \rightarrow \infty$. Entonces $\frac{1}{R_\omega} \left(\frac{d^2 V}{dy^2} \right)$ y $\frac{1}{R_\omega} \left(\frac{dV}{dy} \right)$ no deben ser pequeños comparados con la unidad como indica la ecuación anterior. Se requiere que las derivadas de V con respecto a y sean grandes en esta región cuando $R_\omega \rightarrow \infty$. Sin embargo, si dichas derivadas son grandes, V debe variar sobre una escala de longitud más pequeña comparada con $l_c = a$. Entonces un nuevo reescalamiento debe ser introducido en la ecuación de movimiento en la región cercana de las paredes del ducto.

Se introduce entonces una nueva variable espacial,

$$Y = yR_\omega^\alpha, \quad (2.55)$$

donde R_ω representa el cociente de dos escalas de longitud naturales del problema, $l_c = a$ y $L = \nu/\omega a$. Reescalando de acuerdo a (2.55) se redefine la variable radial con respecto a una nueva escala de longitud l^* . Lo anterior puede reescribirse como

$$Y = \left(\frac{y'}{l_c} \right) \left(\frac{l_c}{L} \right)^\alpha,$$

donde y' es la variable radial dimensional. Cuando $\alpha = 1$ entonces

$$Y = \frac{y'}{L},$$

y $L = \nu/\omega a$ sería la nueva escala l^* . Por otra parte, si $\alpha \neq 1$

$$Y = \frac{y'}{l^*},$$

donde

$$l^* = (l_c)^{1-\alpha} L^\alpha. \quad (2.56)$$

Por lo tanto, usar el reescalamiento (2.55), equivale a introducir una nueva escala de longitud característica en la región cercana a las paredes. La última tarea por realizar para determinar completamente l^* es encontrar el valor de

α . Un punto importante sobre el significado de introducir la nueva escala de longitud, es notar que la variable normal a las paredes se alarga o extiende, de tal manera que V varía de 0 a su valor máximo de flujo en un incremento de la variable reescalada $\Delta Y = O(1)$, mientras que V en la forma adimensional original cambia sobre una distancia adimensional $\Delta y = O(R_\omega^{-\alpha})$. Lo anterior indica que en el sistema reescalado, las derivadas espaciales de mayor orden, es decir $\frac{d^2V}{dY^2}$, deben ser de orden $O(1)$ e independientes de R_ω en la región cercana a las paredes. Esta consideración simplificará la elección de cuáles términos en la ecuación de movimiento deben ser retenidos en esa parte del dominio, cuando $R_\omega \rightarrow \infty$. Para determinar el coeficiente α y la forma relevante de la ecuación de movimiento en la región cercana a las paredes se sustituye (2.55) en (2.54), obteniendo

$$\frac{1}{R_\omega} \left[R_\omega^{2\alpha} \frac{d^2V}{dY^2} - R_\omega^{2\alpha} \frac{1}{(1 - Y R_\omega^{-\alpha})} \frac{dV}{dY} \right] + iV + iD_e + D_e V = 1. \quad (2.57)$$

Puede verse de la ecuación anterior que el término viscoso mas grande es de orden $O(R_\omega^{2\alpha-1})$. Por lo tanto, si los términos viscosos son igual de importantes que los efectos de aceleración y el gradiente de presión en la región cercana a las paredes, se puede determinar que

$$2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

de donde

$$\frac{d^2V}{dY^2} + R_\omega^{-\frac{1}{2}} \frac{dV}{dY} - R_\omega^{-1} Y \frac{dV}{dY} + iV + iD_e + D_e V = 1. \quad (2.58)$$

Realizada la operación anterior, se pueden establecer algunos hechos importantes, tales como que la primera opción establecida para la escala de longitud característica $l_c = a$ resultó no ser válida en las regiones cercanas a las paredes del ducto cuando $R_\omega \gg 1$. Por lo tanto es necesario de recurrir a un reescalamiento que sea consistente con el hecho de que las condiciones de frontera deben satisfacerse en los bordes del dominio y esto indica claramente que los términos de viscosidad no pueden ser despreciables en la región cercana a las paredes del ducto. Dicha escala de longitud surge inherentemente al aplicar el reescalamiento (2.55) donde y es escalada con respecto a R_ω , con $\alpha = \frac{1}{2}$ se

puede apreciar que el tamaño de la región donde los efectos de viscosidad son relevantes varía con respecto a la expresión siguiente:

$$\Delta y \sim O(R_\omega^{-\frac{1}{2}}) \text{ para } R_\omega \rightarrow \infty.$$

Se tiene ahora la certeza de que para encontrar la solución en el dominio completo del ducto $1 \leq \bar{r} \leq 0$, hay que dividir dicho dominio en dos regiones. Una es la región interior lejos de las paredes del ducto donde $l_c = a$ y la expresión de la ecuación de movimiento correspondiente en ese caso es (2.48). Cabe resaltar que la solución de la ecuación que representa la región lejana a las paredes obtenida aplicando el límite cuando $R_\omega \rightarrow \infty$ es independiente del número de Deborah. Dicha solución expresa el comportamiento de cuerpo rígido en el núcleo del flujo y se comporta de igual manera si el fluido es viscoelástico o Newtoniano. La otra región, denominada capa límite, es la cercana a las paredes del ducto, de tamaño $O(R_\omega^{-\frac{1}{2}})$, donde la ecuación correspondiente en dicha región es (2.58). En problemas donde una aproximación asintótica requiere de dos o más expansiones distintas (como en el presente caso), cada una válida en diferentes partes del dominio, se denominan *expansiones asintóticas singulares* o *adaptadas* (Leal, 2007).

El objetivo es ahora encontrar una aproximación asintótica de la solución para la región capa límite, que tome la forma siguiente:

$$V(Y) = V_0(Y) + \frac{1}{R_\omega} V_1(Y) + \dots, \quad (2.59)$$

En el presente trabajo se considerará únicamente el primer término, ya que en la solución para la región interior o núcleo solo se consideró el primer término de la expansión correspondiente. En el caso cuando $R_\omega \rightarrow \infty$, la ecuación 2.58 toma la forma

$$\frac{d^2 V_0}{dY^2} + V_0(i + D_e) = 1 - iD_e. \quad (2.60)$$

Como solución particular de la ecuación inhomogénea anterior tomamos $V_{0P} = -i$ y debemos resolver la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d^2 V_0}{dy^2} + V_0(i + D_e) = 0,$$

que lleva a la siguiente ecuación característica

$$\lambda^2 = -(i + D_e) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i\sqrt{i + D_e}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{i + D_e},$$

de modo que la solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$V_{0H} = Ae^{i(\sqrt{i+D_e})Y} + Be^{-i(\sqrt{i+D_e})Y}.$$

Entonces la solución general a la ecuación (2.60) queda

$$V_0(Y) = -i + Ae^{i(\sqrt{i+D_e})Y} + Be^{-i(\sqrt{i+D_e})Y}. \quad (2.61)$$

Aplicando la condición de frontera $V_0(0) = 0$ tenemos $0 = A + B - i$, es decir,

$$B = i - A, \quad (2.62)$$

entonces

$$V_0(Y) = -i + A(e^{i(\sqrt{i+D_e})Y} - e^{-i(\sqrt{i+D_e})Y}) + ie^{-i(\sqrt{i+D_e})Y}. \quad (2.63)$$

Hasta el momento la condición de no deslizamiento es la única que se satisface idénticamente. Si se analiza detalladamente la ecuación (2.63) resulta que si se aplica de nuevo la condición de frontera cerca de las paredes, la constante A no puede ser determinada. Sin embargo, debe considerarse una condición que tome en cuenta la adaptación de la capa límite y el comportamiento del núcleo expresado en la forma (2.49). La condición que se aplica en el presente caso para determinar A es la de *matching* o empalme entre valores de Y muy cercanos a las paredes y la solución del núcleo. Esto corresponde a pedir que cuando la solución cercana a las paredes tome valores muy grandes pero finitos de Y se adapte a la solución del núcleo. Tomando en cuenta lo anterior se puede establecer que

Solución de capa límite $|_{Y \gg 1} \leftrightarrow$ Solución del núcleo $|_{Y \gg 1}$ cuando $R_\omega \rightarrow \infty$,

es decir

$$\frac{1}{R_\omega} V_0 |_{Y \gg 1} \leftrightarrow \frac{-i}{R_\omega} |_{Y \gg 1} \quad \text{cuando} \quad R_\omega \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

Aplicando la condición 2.64 en 2.63 se puede determinar que $A = i$ de modo que la solución para la región de capa límite puede expresarse como

$$V_0 = -i + i e^{(i\sqrt{i+D_e})Y} \quad (2.65)$$

Para completar la solución del flujo es necesario tomar en cuenta las siguientes relaciones:

$$Y = y R_\omega^{\frac{1}{2}} = R_\omega^{\frac{1}{2}} (1 - \bar{r}), \quad \hat{V} = \frac{1}{R_\omega} V,$$

$$\bar{V}_z = \hat{V}(Y) e^{-i\bar{t}} = \hat{V}(Y) \left[\cos(\bar{t}) - i \operatorname{sen}(\bar{t}) \right],$$

$$\bar{v}_z = \Re \{ \bar{V}_z \},$$

de modo que la parte real de la solución general en la región de capa límite con dependencia tanto espacial como temporal queda

$$\bar{v}_z(Y) = \left[e^{-E_2 Y} \cos(E_1 Y) - 1 \right] \frac{\operatorname{sen}(\bar{t})}{R_\omega} - e^{-E_2 Y} \operatorname{sen}(E_1 Y) \frac{\cos(\bar{t})}{R_\omega}. \quad (2.66)$$

con

$$E_1(D_e) = (1 + D_e^2)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\arctan(D_e^{-1})}{2}\right)$$

$$E_2(D_e) = (1 + D_e^2)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{\arctan(D_e^{-1})}{2}\right)$$

De la solución anterior se puede establecer que para el caso puramente Newtoniano, es decir cuando el tiempo de relajación t_m de un material es muy

pequeño de modo queda $D_e \rightarrow 0$, se recupera el comportamiento de un fluido Newtoniano. Los resultados del perfil de velocidad (2.66) se grafican a continuación para diferentes valores del número de Deborah.

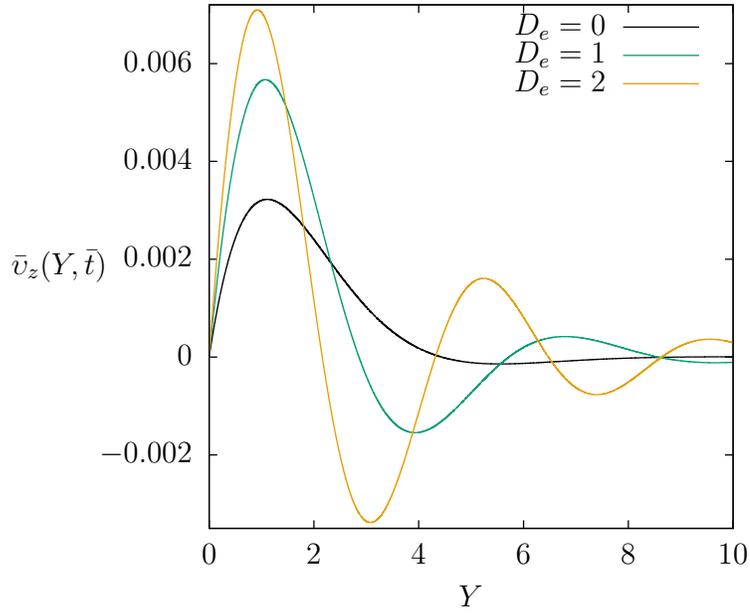
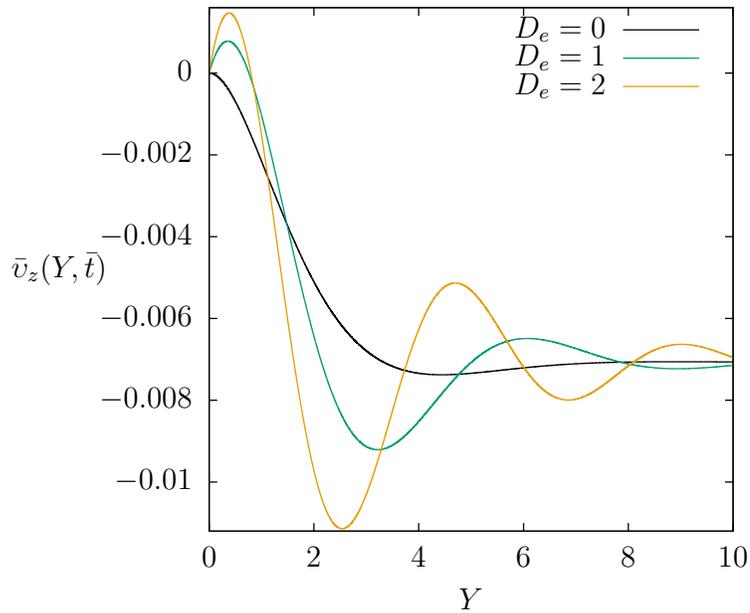
(a) Ángulo fase de π (b) Ángulo fase $3\pi/4$

Figura 2.4: Solución de capa límite dada por la ecuación (2.66) para distintos valores de D_e , con $R_\omega = 100$.

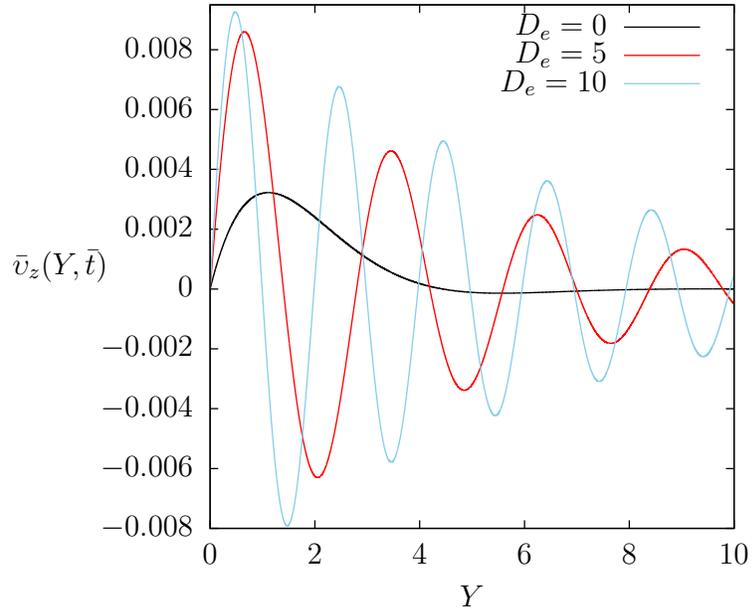
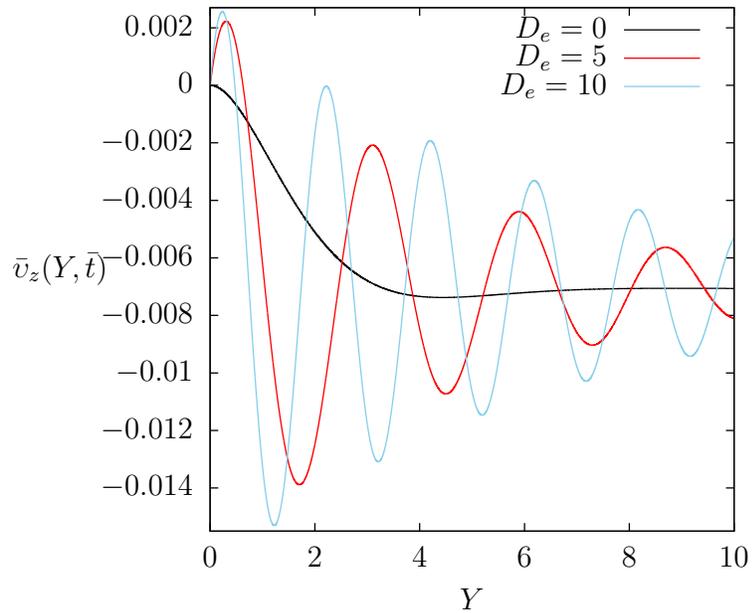
(a) Ángulo fase de π (b) Ángulo fase $3\pi/4$

Figura 2.5: Solución de capa límite dada por la ecuación (2.66) para distintos valores de De , con $R_\omega = 100$.

Las figuras anteriores ilustran el comportamiento de la capa límite hidrodinámica de un fluido viscoelástico en un tubo recto oscilando periódicamente para diferentes números de Deborah. En todos los casos se observa que en el límite Newtoniano ($D_e = 0$) la oscilación de la capa límite se amortigua rápidamente al alejarse de la pared, manifestando el dominio de las fuerzas viscosas. Por su parte, mientras el número de Deborah toma valores más grandes, los efectos elásticos se observan más claramente mostrando una oscilación más intensa que decae más lejos mientras mayor es el valor de D_e .

De las gráficas anteriores se pueden distinguir los efectos hidrodinámicos que involucran fenómenos con valores de D_e diferentes de cero. Las fuerzas elásticas que dominan al sistema cuando se tienen valores relativamente grandes de D_e son evidentemente las responsables del comportamiento que se tiene en las figuras (2.4 - 2.5). El desplazamiento de la amplitud de la capa límite que se genera al introducir un fluido con tiempo de relajación mayor a cero aumenta cuando aumenta el valor de dicho tiempo, es decir si $t_m > 0$ las fluctuaciones debidas a propiedades elásticas aumentan en la capa límite.

Transferencia de calor en un fluido viscoelástico.

En este capítulo se utilizan los perfiles de velocidad obtenidos asintóticamente en el capítulo anterior para estudiar el mejoramiento de la transferencia de calor longitudinal generado por un fluido viscoelástico que oscila periódicamente dentro de un ducto de sección transversal cilíndrica constante y de longitud infinita. Dicho fluido conecta dos reservorios térmicos con temperaturas constantes pero diferentes lo que genera un gradiente de temperatura axial. Al estudiar este fenómeno con métodos asintóticos se pretende profundizar el estudio realizado por Lambert *et al.* (2009).

La evaluación del mejoramiento de la transferencia de calor se realiza mediante el cálculo de la difusividad térmica efectiva α_E que depende del perfil de velocidades del flujo oscilante y la distribución de temperatura en el fluido dentro del ducto el cual se calcula en este capítulo para el caso de bajas y altas frecuencias, es decir, en los límites cuando $R_\omega \ll 1$ y $R_\omega \gg 1$.

3.1. Perfil de temperatura adimensional para $R_\omega \ll 1$

El cálculo del perfil de temperatura del fluido viscoelástico sujeto al flujo oscilatorio se determina resolviendo la ecuación de transferencia de calor. Dados los perfiles de velocidad y temperatura es posible encontrar una expresión

para la difusividad térmica efectiva. Despreciando la generación de calor por efectos viscosos, la ecuación de transferencia de calor tiene la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_z(r, t) \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (3.1)$$

donde $\alpha = \frac{K}{\rho C}$ es la difusividad térmica del fluido. Aquí, K es la conductividad térmica y C es el calor específico del fluido. La ecuación anterior se resuelve suponiendo que las paredes del tubo son térmicamente aislantes de modo que las condiciones de frontera consideradas para la temperatura son las siguientes:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(a, z, t) = 0 \quad y \quad T(0, z, t) = \text{finita}. \quad (3.2)$$

De acuerdo a Kaviany (1986), en un flujo oscilatorio dentro de un ducto, el intercambio de energía a través del fluido es producido por la combinación de dos mecanismos de transporte de energía térmica, es decir, el transporte difusivo a través de la capa límite y las paredes y el transporte convectivo longitudinal periódico.

Ya que el gradiente axial de temperatura $\gamma = \frac{\partial T}{\partial z}$ promediado en el tiempo es constante, se propone una solución como la parte real de la expresión siguiente (Kurzweg, 1985a; Lambert *et al.*, 2009):

$$T(r, z, t) = \gamma[z + ag(r)e^{-i\omega t}]. \quad (3.3)$$

La solución (3.3) reproduce la constancia del gradiente de temperatura axial promediado en el tiempo y también toma en cuenta la variación temporal de la temperatura en la dirección transversal al movimiento del fluido a través del término $g(r)e^{-i\omega t}$.

Para la solución del problema de transferencia de calor en el límite $R_\omega \ll 1$, es conveniente expresar en forma adimensional la ecuación 3.1 utilizando las escalas características siguientes:

$$U_c = \frac{P_z a^2}{\eta}, \quad t_c = \frac{1}{\omega} \quad y \quad l_c = a.$$

Por lo tanto las variables adimensionales toman la siguiente forma:

$$\bar{V}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{u_z(r, t)}{U_c}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_c}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{z} = \frac{z}{a} \quad y \quad \vartheta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{T(r, z, t)}{\gamma a}.$$

Después de introducir las variables adimensionales, la ecuación de transferencia de calor (3.1) toma la forma

$$P_r R_\omega \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{t}} + P_e \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{z}^2}. \quad (3.4)$$

El parámetro $P_r = \frac{\eta C}{K}$ en la ecuación 3.4 es el número de Prandtl, y corresponde al cociente de la difusividad viscosa y la difusividad térmica, donde η es la viscosidad dinámica del fluido. A su vez, $P_e = \frac{U_c a}{\alpha}$ es el número de Péclet que ofrece una estimación de la transferencia de calor por convección y la transferencia de calor por conducción.

Dado que el transporte de calor axial por conducción es mucho menor que la transferencia de calor axial debido a efectos convectivos, el último término de la ecuación (3.4) se despreciará.

Introduciendo la solución propuesta 3.3 en su forma adimensional en la ecuación 3.4 encontramos la siguiente ecuación diferencial para la función $g(r)$:

$$\frac{\partial^2 g(r)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial g(r)}{\partial \bar{r}} + \beta_T^2 g(r) = P_e \hat{V}(\bar{r}) \quad (3.5)$$

con $\beta_T^2 = i P_r R_\omega$, donde $\hat{V}(r)$ es el perfil radial de velocidades en el límite de bajas frecuencias dado por la ecuación (2.46), el cual puede expresarse como

$$\hat{V}(r) = Ar^2 + Br^4 + Cr^6 + D \quad (3.6)$$

donde

$$A = \left(\frac{1}{4} - i \frac{D_e}{4} \right) + R_\omega \left[\frac{D_e}{8} + i \left(\frac{1}{16} - \frac{D_e^2}{16} \right) \right] + R_\omega^2 \left[\frac{9D_e^2}{256} - \frac{3}{256} + i \left(\frac{9D_e}{256} + -\frac{3D_e^3}{256} \right) \right],$$

$$B = -R_\omega \left[\frac{D_e}{32} + i \left(\frac{1}{64} - \frac{D_e^2}{64} \right) \right] + R_\omega^2 \left[\frac{1}{256} - \frac{3D_e^2}{256} + i \left(\frac{D_e^3}{256} - \frac{D_e}{256} \right) \right],$$

$$C = R_\omega^2 \left[\frac{D_e^2}{768} - \frac{1}{2304} + i \left(\frac{D_e}{768} - \frac{D_e^3}{2304} \right) \right],$$

$$D = \left(i\frac{D_e}{4} - \frac{1}{4}\right) - R_\omega \left[\frac{3D_e}{32} + i\left(\frac{3}{64} - \frac{3D_e^2}{64}\right)\right] + R_\omega^2 \left[\frac{19}{2304} - \frac{19D_e^2}{768} + i\left(\frac{19D_e^3}{2304} - \frac{19D_e}{768}\right)\right].$$

La solución de la ecuación 3.5 debe satisfacer las condiciones de frontera para la temperatura dentro del ducto que son

$$g(0) = \text{finita} \quad y \quad \left.\frac{\partial g}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=1} = 0, \quad (3.7)$$

que corresponden a las condiciones dadas por la ecuación 3.2.

La solución de la ecuación 3.5 puede determinarse como la suma $g = g_h + g_p$ que corresponden a la solución homogénea g_h y la particular g_p , donde $g_h = C_1 J_0(\beta_T \bar{r}) + C_2 Y_0(\beta_T \bar{r})$ y $g_p = \alpha_1 \bar{r}^2 + \alpha_2 \bar{r}^4 + \alpha_3 \bar{r}^6 + \alpha_4$.

Aplicando las condiciones de frontera se encuentra

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 2\alpha_1 \bar{r} + 4\alpha_2 \bar{r}^3 + 6\alpha_3 \bar{r}^5,$$

y además

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= P_e \frac{C}{\beta_T^2}, \\ \alpha_2 &= P_e \left(\frac{B}{\beta_T^2} - \frac{36C}{\beta_T^4} \right), \\ \alpha_1 &= \frac{AP_e}{\beta_T^2} - P_e \left(\frac{16B}{\beta_T^4} - \frac{576C}{\beta_T^6} \right), \\ \alpha_4 &= \frac{DP_e}{\beta_T^2} - \frac{4P_e}{\beta_T^2} \left[\frac{A}{\beta_T^2} - \left(\frac{16B}{\beta_T^4} - \frac{576C}{\beta_T^6} \right) \right], \end{aligned}$$

donde para encontrar la solución particular se utilizó el método de coeficientes indeterminados. La solución general de la ecuación 3.5 se expresa entonces de la siguiente manera:

$$g(\bar{r}) = \left[\frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3}{\beta_T} \right] \left[\frac{J_0(\beta_T \bar{r})}{J_1(\beta_T)} \right] + \alpha_1 \bar{r}^2 + \alpha_2 \bar{r}^4 + \alpha_3 \bar{r}^6 + \alpha_4. \quad (3.8)$$

Una vez determinada $g(r)$ podemos sustituirla en la solución propuesta (3.3) que en términos adimensionales se expresa de la siguiente forma

$$\vartheta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = [\bar{z} + g(\bar{r})e^{-i\bar{t}}]. \quad (3.9)$$

Debe resaltarse que esta solución es válida tanto para fluidos Newtonianos como para Maxwellianos, tomando el límite apropiado.

3.1.1. Difusividad térmica efectiva adimensional para $R_\omega \ll 1$

Ahora procederemos a calcular la difusividad térmica efectiva en el límite de bajas frecuencias, $R_\omega \ll 1$. En forma dimensional, la difusividad efectiva se expresa de la siguiente forma (Kurzweg, 1985a; Lambert *et al.*, 2009)

$$\alpha_E \gamma = -\frac{\omega}{2\pi A} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_0^{2\pi} \int_0^a [T(r, z, t)]_R [u_z(r, t)]_R r dr d\theta dt, \quad (3.10)$$

donde el subíndice R indica la parte real de la variable en cuestión y $A = \pi a^2$ el área de sección transversal del ducto.

El lado izquierdo de la ecuación (3.10) representa el flujo térmico efectivo axial por unidad de área de la sección transversal, mientras que el lado derecho de dicha ecuación representa el flujo térmico convectivo promediado en el tiempo producido por la interacción de los perfiles de velocidad y temperatura variables en la coordenada transversal.

Para poder utilizar los perfiles de velocidad y temperatura adimensionales conseguidos anteriormente debemos expresar la ecuación anterior adimensionalmente, una forma de hacerlo puede ser

$$\frac{\alpha_E}{\alpha} = -\frac{P_e}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\vartheta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})]_R [\bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t})]_R \bar{r} d\bar{r} d\theta d\bar{t}, \quad (3.11)$$

donde la parte real de los perfiles de temperatura y velocidad, respectivamente, corresponden a la siguientes expresiones:

$$[\vartheta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})]_R = \frac{\vartheta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) + \vartheta^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})}{2},$$

$$[\bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t})]_R = \frac{\bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}) + \bar{V}_z^*(\bar{r}, \bar{t})}{2},$$

denotando $\bar{V}_z^*(\bar{r}, \bar{t})$ y $\vartheta^*(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})$ a los complejos conjugados correspondientes. Por lo tanto, introduciendo las expresiones de $\bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t})$ y $\vartheta(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t})$ en la ecuación (3.11) se tiene que

$$\frac{\alpha_E}{\alpha} = -\frac{P_e}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left([\bar{z} + g(\bar{r})e^{-i\bar{t}}] + [\bar{z} + g(\bar{r})^*e^{i\bar{t}}] \right) \left(\hat{V}(\bar{r})e^{-i\bar{t}} + \hat{V}(\bar{r})^*e^{i\bar{t}} \right) \bar{r} d\bar{r} d\theta d\bar{t}. \quad (3.12)$$

Ya que se integra en un periodo temporal y debido a que el integrando es función de \bar{r} , al realizar la integral temporal se eliminan todos los términos con $e^{\pm i\bar{t}}$ y tomando en cuenta la integral en la coordenada angular para toda la sección transversal se tiene la siguiente expresión:

$$\alpha_E = -\frac{P_e \alpha}{2} \int_0^1 \left[(g(\bar{r})^* \hat{V}(\bar{r}) + g(\bar{r}) \hat{V}(\bar{r})^*) \right] \bar{r} d\bar{r}. \quad (3.13)$$

La ecuación anterior representa la difusividad térmica efectiva para el caso particular del flujo de un fluido viscoelástico oscilando dentro de un ducto cilíndrico, dicha ecuación también es válida para un fluido Newtoniano cuando se considera el límite $D_e \rightarrow 0$. Las variables de velocidad y temperatura ya se encuentran adimensionalizadas. La ecuación (3.13) aún tiene dimensiones (m^2/s), por lo tanto, la ecuación será normalizada con respecto al desplazamiento de marea en un intento de poder comparar nuestros resultados con los trabajos de Kurzweg y Zhao (1984b), Lambert *et al.* (2009) y Shailendhra y AnjaliDevi (2010). Es claro que si de la ecuación 3.13 se busca la expresión α_E/α , podemos obtener una forma adimensional para la difusividad, pero por los motivos anteriores utilizaremos $\alpha_E/\omega(\Delta x)^2$, con Δx conocido como el desplazamiento de marea.

El desplazamiento de marea Δx representa el desplazamiento axial máximo promedio que los elementos del fluido viajan durante medio periodo de la oscilación. En forma dimensional se tiene que

$$\Delta x = \left| \frac{1}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \int_0^{2\pi} \int_0^a u_z(r, t) r dr d\theta dt \right|. \quad (3.14)$$

Introduciendo las variables adimensionales en la ecuación anterior el desplazamiento de marea se expresa como

$$\Delta x = \left| \frac{4U_c}{\omega} \int_0^1 \widehat{V}(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} \right|. \quad (3.15)$$

Por lo tanto la expresión de la difusividad térmica efectiva adimensional en coordenadas cilíndricas puede ser expresada como

$$\frac{\alpha_E}{\omega(\Delta x)^2} = - \left(\frac{P_r R_\omega}{32P_e} \right) \frac{\int_0^1 [g(\bar{r})^* \widehat{V}(\bar{r}) + g(\bar{r}) \widehat{V}(\bar{r})^*] \bar{r} d\bar{r}}{\left(\int_0^1 \widehat{V}(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} \right)^2}. \quad (3.16)$$

Haciendo el desarrollo correspondiente la expresión completa de la difusividad térmica efectiva queda

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_E}{\omega(\Delta x)^2} = & - \left[\left(4R_\omega(K_J a + \frac{11520}{R_\omega^2}(-i + D_e)(i + D_e)P_r^2(48 + 6P_r(8 + iR_\omega)) \right. \right. \\
& + P_r^2(48 + 6iR_\omega - R_\omega^2) + D_e^2(-48 - 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2) \\
& + 2D_e(-48i + P_r^2(3 + iR_\omega)R_\omega + 6P_r(-4i + R_\omega))) \\
& + \frac{2160}{R_\omega}(-i + D_e)^2(i + D_e)P_r^2(48 + 6P_r(8 + iR_\omega)) \\
& + P_r^2(48 + 6iR_\omega - R_\omega^2) + D_e^2(-48 - 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2) \\
& + 2D_e(-48i + P_r^2(3 + iR_\omega)R_\omega + 6P_r(-4i + R_\omega))) \\
& + 380i(1 - iD_e)(-i + D_e)(i + D_e)^2(P_r^2) \\
& \quad (48 + 6P_r(8 - iR_\omega) - P_r^2(-48 + 6iR_\omega + R_\omega^2)) \\
& + D_e^2(-48 + 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2) + 2D_e(48i + P_r^2(3 - iR_\omega)R_\omega \\
& + 6P_r(4i + R_\omega))) + \frac{11520}{R_\omega^2}(-i + D_e)(i + D_e)(P_r^2) \\
& \quad (48 + 6P_r(8 - iR_\omega) - P_r^2(-48 + 6iR_\omega + R_\omega^2)) \\
& + D_e^2(-48 + 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2) + 2D_e(48i + P_r^2(3 - iR_\omega)R_\omega \\
& + 6P_r(4i + R_\omega))) + \frac{2160}{R_\omega}(-i + D_e)((i + D_e)^2)(P_r^2) \\
& \quad (48 + 6P_r(8 - iR_\omega) - P_r^2(-48 + 6iR_\omega + R_\omega^2)) \\
& + D_e^2(-48 + 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2) \\
& + 2D_e(48i + P_r^2(3 - iR_\omega)R_\omega + 6P_r(4i + R_\omega))) - \frac{40}{R_\omega^2}(1 + D_e^2) \\
& \quad (13824 - 24P_r^3(-576 + 11R_\omega^2) - 48P_r^2(-576 + 31R_\omega^2)) \\
& + 6D_e^3P_r^2R_\omega(-1824 + 37P_r^2R_\omega^2) + P_r^4(27648 - 840R_\omega^2 + 19R_\omega^4) \\
& + D_e^4(13824 - 1488P_r^2R_\omega^2 + 19P_r^4R_\omega^4) \\
& + 6D_eP_r^2R_\omega(-1824 + 384P_r + P_r^2(1440 + 37R_\omega^2)) \\
& + D_e^2(27648 - 264P_r^3R_\omega^2 - 96P_r^2(576 + 31R_\omega^2)) \\
& + P_r^4(2136R_\omega^2 + 38R_\omega^4)) \\
& + K_J b + K_J c) \left. \right] \frac{1}{15P_r^5 |(i + D_e)(384 + 64(i + D_e)R_\omega + 11(i + D_e)^2R_\omega^2)|^2}, \quad (3.17)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
K_{Ja} = & 15840P_r^2 + 47520D_e^2P_r^2 + 47520D_e^4P_r^2 + 15840D_e^6P_r^2 \\
& + 15840P_r^4 - 31680D_e^2P_r^4 - 47520D_e^4P_r^4 - \frac{552960P_r^2}{R_\omega^2} \\
& + \frac{552960D_e^4P_r^2}{R_\omega^2} - \frac{552960P_r^3}{R_\omega^2} - \frac{552960D_e^2P_r^3}{R_\omega^2} - \frac{552960P_r^4}{R_\omega^2} \\
& - \frac{552960D_e^2P_r^4}{R_\omega^2} + \frac{92160D_eP_r^2}{R_\omega} + \frac{184320D_e^3P_r^2}{R_\omega} + \frac{92160D_e^5P_r^2}{R_\omega} \\
& - \frac{184320D_eP_r^3}{R_\omega} - \frac{184320D_e^3P_r^3}{R_\omega} - \frac{184320D_eP_r^4}{R_\omega} - \frac{184320D_e^3P_r^4}{R_\omega} \\
& - 5472D_eP_r^4R_\omega - 10944D_e^3P_r^4R_\omega - 5472D_e^5P_r^4R_\omega - 473P_r^4R_\omega^2 \\
& - 1419D_e^2P_r^4R_\omega^2 - 1419D_e^4P_r^4R_\omega^2 - 473D_e^6P_r^4R_\omega^2 \\
& - 380i(1 + iD_e)(-i + D_e)^2(i + D_e)P_r^2(48 + 6P_r(8 + iR_\omega)) \\
& + P_r^2(48 + i6R_\omega - R_\omega^2) + D_e^2(-48 - i6P_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2) \\
& + 2D_e(-48i + P_r^2(3 + iR_\omega)R_\omega + 6P_r(-4i + R_\omega))).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
K_{Jb} = & \frac{480(-i + D_e)(i + D_e)}{R_\omega^2\sqrt{-iP_rR_\omega}J_1\left(\sqrt{-iP_rR_\omega}\right)} \\
& (48 - 6iP_r(-8i + R_\omega) + P_r^2(48 + 6iR_\omega - R_\omega^2) + D_e^2(-48 + 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2)) \\
& + 2D_e(-48i + P_r^2(3 + iR_\omega)R_\omega - 6P_r(-4i + R_\omega)) \\
& (48 + 6P_r(8 - iR_\omega) - P_r^2(-48 + 6iR_\omega + R_\omega^2) + D_e^2(-48 + 6iP_rR_\omega + P_r^2R_\omega^2)) \\
& + 2D_e(48i + P_r^2(3 - iR_\omega)R_\omega + 6P_r(4i + R_\omega))J_2\left(\sqrt{-iP_rR_\omega}\right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
K_{Jc} = & \frac{480(-i + D_e)(i + D_e)}{R_\omega^2 \sqrt{iP_r R_\omega} J_1(\sqrt{iP_r R_\omega})} \\
& (48 + 6P_r(8 + iR_\omega) + P_r^2(48 + 6iR_\omega - R_\omega^2)) \\
+ & D_e^2(-48 - 6iP_r R_\omega + P_r^2 R_\omega^2) + 2D_e(-48i + P_r^2(3 + iR_\omega)R_\omega + 6P_r(-4i + R_\omega)) \\
& (48 + 6iP_r(8i + R_\omega) - P_r^2(-48 + 6iR_\omega + R_\omega^2) + D_e^2(-48 - 6iP_r R_\omega + P_r^2 R_\omega^2)) \\
+ & 2D_e(48i + P_r^2(3 - iR_\omega)R_\omega - 6P_r(4i + R_\omega)) J_2(\sqrt{iP_r R_\omega}).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Una vez determinada la difusividad térmica efectiva adimensional a través de la expresión (3.17) es posible analizar gráficamente su comportamiento en el límite cuando $R_\omega \ll 1$. A continuación se muestran los resultados gráficos de la ecuación (3.17) en función del parámetro R_ω para distintos valores de P_r y D_e para el caso cuando $R_\omega \ll 1$.

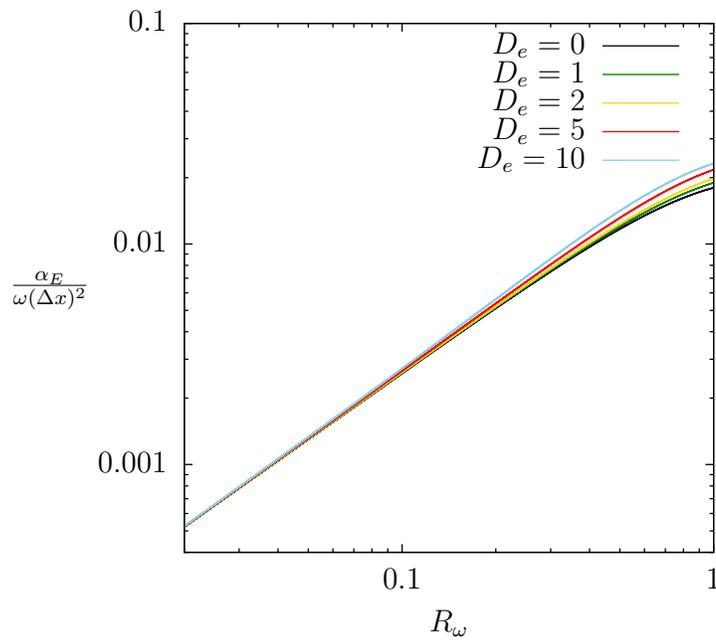
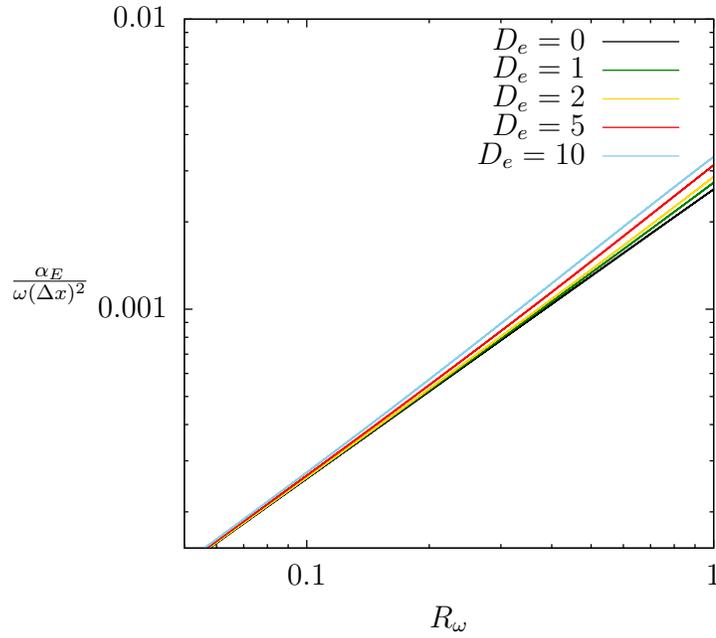


Figura 3.1: $\alpha_E/\omega(\Delta x)^2$ en función de R_ω para el caso $R_\omega \ll 1$.(a) $Pr=1$ y (b) $Pr=10$. En ambos casos se grafican las curvas correspondientes a $D_e = 1,2,5,10$.

Dada la aproximación que se está considerando, los valores de frecuencia para los cuales tiene sentido analizar la expresión para la difusividad térmica efectiva deben de ser menores que la unidad. Puede apreciarse que la tendencia de la difusividad al aumentar el valor de P_r es similar a la que se observa cuando el fluido de trabajo es puramente Newtoniano. Además, en las figuras 3.1 (a) y (b) correspondientes a $P_r = 1$ y $P_r = 10$, respectivamente, se observa que la difusividad efectiva se incrementa aproximadamente de manera lineal al aumentar R_ω y que el efecto de los distintos valores de D_e es prácticamente despreciable. Se puede concluir entonces que a bajas frecuencias los efectos elásticos son muy pequeños, dominando el comportamiento Newtoniano. En estos casos el máximo en la difusividad térmica no se alcanza dentro del intervalo de frecuencias analizado. Sin embargo, en las figuras 3.2 (a) y (b), correspondientes a $P_r = 100$ y $P_r = 1000$, el máximo de la difusividad efectiva se encuentra en el intervalo entre 0 y 1 del parámetro R_ω , en el caso de bajas frecuencias de oscilación la difusividad efectiva solo alcanza un pico máximo de transporte de calor.

En los estudios previos de transferencia de calor con fluidos viscoelásticos en movimiento oscilatorio (Lambert *et al.*, 2009), se sabe que los valores de la difusividad efectiva son de orden de magnitud mucho mayor que la que se obtiene con fluidos Newtonianos, por lo que los fluidos viscoelásticos son mejores candidatos para procesos transferencia de calor. Sin embargo, dicha característica no se encuentra a bajas frecuencias de oscilación como se observa en las figuras 3.1 y 3.2, donde la diferencia entre los valores de la difusividad para $D_e = 10$ y $D_e = 0$ es muy pequeña.

Lo anterior se debe a que dada la lentitud del movimiento del fluido, los efectos convectivos en el transporte de calor son despreciables aun para valores grandes de De . Entonces en el intervalo de frecuencias analizado el comportamiento de un fluido viscoelástico y uno Newtoniano son muy semejantes, encontrando solo un máximo para la difusividad efectiva para valores de P_r muy grandes.

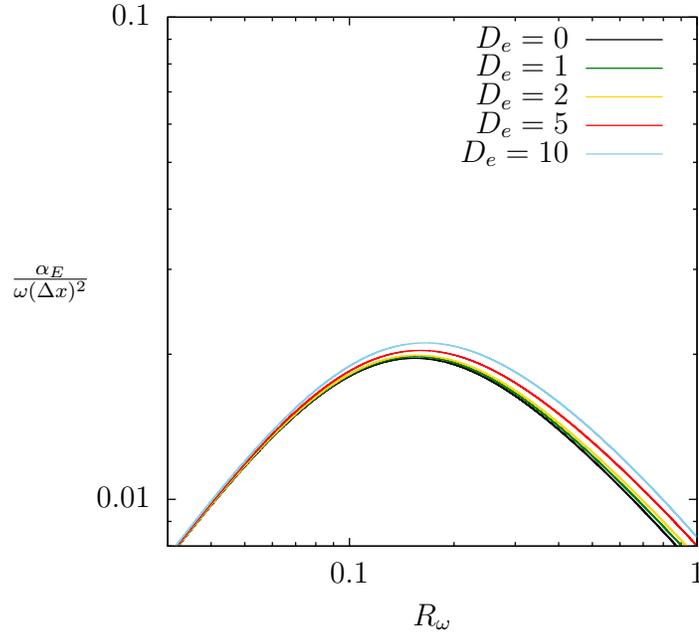
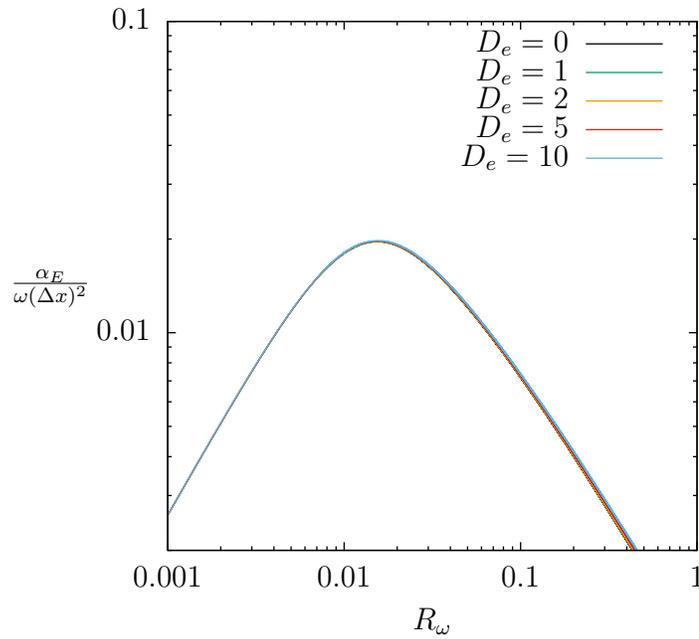
(a) $P_r = 100$ (b) $P_r = 1000$

Figura 3.2: $\alpha_E/\omega(\Delta x)^2$ en función de la frecuencia adimensional R_ω para el caso $R_\omega \ll 1$. Para los casos (a) y (b) se grafican curvas para $D_e = 0,1,2,5,10$

En resumen, para frecuencias bajas los efectos viscoelásticos no son suficientes para incrementar la difusividad efectiva respecto al caso Newtoniano, obteniéndose un solo máximo de la difusividad como en dicho caso. Se tiene entonces que para el caso $R_\omega \ll 1$ las características viscoelásticas del fluido no son relevantes para el mejoramiento de la transferencia de calor.

3.1.2. Perfil de temperatura adimensional para $R_\omega \gg 1$

El cálculo de la difusividad térmica efectiva para el caso de altas frecuencias de oscilación se desarrolla enseguida usando el perfil de velocidad (2.66). Se parte de la expresión (3.4) correspondiente a la ecuación de transferencia de calor en coordenadas cilíndricas. Tomando en cuenta el reescalamiento (2.53), la ecuación de transferencia de calor adquiere la forma

$$P_r R_\omega \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{t}} + P_e \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \frac{1}{(1-y)} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{z}^2}. \quad (3.21)$$

Si se introduce ahora el reescalamiento correspondiente a la región cercana a las paredes del ducto $Y = yR_\omega^{\frac{1}{2}}$, se tiene que

$$P_r R_\omega \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{t}} + P_e \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{R_\omega^{-1}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} - \frac{1}{R_\omega^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{(1 - Y R_\omega^{-\frac{1}{2}})} \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{z}^2}. \quad (3.22)$$

Tomando en cuenta que los términos de orden $O(R_\omega^{-1})$ pueden ser despreciados debido a la consideración $R_\omega \gg 1$ y que el cociente $Y/R_\omega^{\frac{1}{2}} \ll 1$, se puede establecer la siguiente aproximación:

$$(1 - Y R_\omega^{-\frac{1}{2}})^{-1} \approx (1 + Y R_\omega^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.23)$$

Consideramos nuevamente que el transporte de calor axial por conducción resulta despreciable comparado con la transferencia de calor axial debido a

efectos convectivos. La expresión final de la ecuación de transferencia de calor queda expresada como

$$P_r R_\omega \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{t}} + P_e \bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{z}} = R_\omega \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} - (R_\omega^{\frac{1}{2}} + Y) \frac{\partial \vartheta}{\partial Y}. \quad (3.24)$$

Para resolver dicha ecuación se considera aún válida en la región cerca de las paredes la solución propuesta

$$\vartheta(Y, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{z} + g(Y)e^{-i\bar{t}}, \quad (3.25)$$

y por lo tanto válida en $0 < Y < \infty$. Si se aplica dicha solución a la ecuación (3.24) se tiene que

$$\frac{\partial^2 g(Y)}{\partial Y^2} + R_\omega^{-1}(R_\omega^{\frac{1}{2}} + Y) \frac{\partial g(Y)}{\partial Y} + \beta_T^2 g(Y) = \frac{P_e}{R_\omega} \hat{V}(Y), \quad (3.26)$$

con $\beta_T^2 = iP_r$. Tomando el límite cuando $R_\omega \gg 1$ la ecuación que describe el transporte de calor radial queda

$$\frac{\partial^2 g(Y)}{\partial Y^2} + \beta_T^2 g(Y) = \frac{P_e}{R_\omega} \hat{V}(Y), \quad (3.27)$$

con $\hat{V}(Y) = \frac{i}{R_\omega} [e^{(i\sqrt{i+De})Y} - 1]$. La solución de la ecuación anterior debe satisfacer las condiciones

$$\left. \frac{\partial g(Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad \text{y} \quad g(Y) = \text{finita} \quad \text{cuando} \quad Y \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

entonces al aplicar la condición de paredes adiabáticas la solución de la ecuación (3.27) queda

$$\begin{aligned}
g(Y) = & C_1 \cos(\beta_T Y) + \left[\frac{P_e \sqrt{D_e + i}}{\beta_T R_\omega^2 (\beta_T^2 - D_e - i)} \right] \text{sen}(\beta_T Y) \\
& + \frac{i P_e}{\beta_T^2 R_\omega^2} \left[\frac{\beta_T^2 (e^{i(\sqrt{D_e + i})Y} - 1) + D_e + i}{(\beta_T^2 - D_e - i)} \right]. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

En el límite cuando $Y \rightarrow \infty$ el valor de (3.29) debe resultar finito. Para que la condición de la temperatura en $Y \rightarrow \infty$ sea mantenga finita se propone que la constante C_1 sea de la forma

$$C_1 = -\frac{\text{sen}(\beta_T Y)}{\cos(\beta_T Y)} \left(\frac{P_e \sqrt{D_e + i}}{\beta_T R_\omega (\beta_T^2 - D_e - i)} \right), \quad (3.30)$$

de esta manera la solución general de la ecuación (3.27) toma la forma

$$g(Y) = \frac{P_e}{P_r R_\omega^2} \left[\frac{i + D_e + i P_r (e^{i(\sqrt{i + D_e})Y} - 1)}{i P_r - D_e - i} \right]. \quad (3.31)$$

Con el resultado anterior es posible determinar la distribución de temperatura en la región muy cercana a las paredes del ducto. Dicha distribución es determinada al sustituir la ecuación (3.31) en la expresión (3.25). Debido a que el objetivo principal es mostrar si existe un mejoramiento en la transferencia de calor debido al efecto de oscilación a altas frecuencias ($R_\omega \gg 1$), en seguida se calcula, la difusividad térmica efectiva.

3.1.3. Difusividad térmica efectiva adimensional para $R_\omega \gg 1$

Ahora se realizará el cálculo de la difusividad térmica efectiva en la capa límite. Para tal efecto se hará uso de las ecuaciones (3.25) y del perfil de velocidad (2.65). Para comenzar se aplica un primer reescalamiento a la expresión

(3.16) de la difusividad térmica efectiva en coordenadas cilíndricas y se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\alpha_E}{\omega(\Delta x)^2} = - \left(\frac{P_r R_\omega}{32P_e} \right) \frac{\int_0^1 (1-y) \left[g_{(y)}^* \widehat{V}_{(y)} + g_{(y)} \widehat{V}_{(y)}^* \right] dy}{\left| \int_0^1 (1-y) \widehat{V}_{(y)} dy \right|^2}, \quad (3.32)$$

luego se considera el reescalamiento $y = Y R_\omega^{-\frac{1}{2}}$ para obtener la versión final de la difusividad térmica efectiva adimensional en la región cerca de las paredes. La forma de la difusividad térmica en la capa límite toma la forma

$$\frac{\alpha_E}{\omega(\Delta x)^2} = - \left(\frac{P_r R_\omega^{\frac{3}{2}}}{32P_e} \right) \frac{\int_0^{R_\omega^{\frac{1}{2}}} (1 - Y R_\omega^{-\frac{1}{2}}) \left[g(Y)^* \widehat{V}(Y) + g(Y) \widehat{V}(Y)^* \right] dY}{\left| \int_0^{R_\omega^{\frac{1}{2}}} (1 - Y R_\omega^{-\frac{1}{2}}) \widehat{V}(Y) dY \right|^2}, \quad (3.33)$$

Desarrollando las integrales del lado derecho de la expresión 3.33 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_E}{\omega(\Delta x)^2} = & \left(\frac{e^{-i\sqrt{D_e-i}\sqrt{R_\omega}}}{32\sqrt{D_e-i}\sqrt{D_e+i}R_\omega^{\frac{3}{2}}(D_e^2+(P_r-1)^2)\left|\frac{-1+e^{i\sqrt{D_e+i}\sqrt{R_\omega}}}{\sqrt{D_e+i}R_\omega}-\frac{i}{\sqrt{R_\omega}}\right|^2} \right) \\ & \left(\left(-\sqrt{D_e+i} + \left(\sqrt{D_e-i} + \sqrt{D_e+i} \right) e^{i\sqrt{D_e-i}\sqrt{R_\omega}} \right. \right. \\ & - \left. \left. \sqrt{D_e-i} e^{i(\sqrt{D_e-i}+\sqrt{D_e+i})\sqrt{R_\omega}} \right) (P_r-1) \right. \\ & + iD_e \left(\left(\sqrt{D_e+i} - \sqrt{D_e-i} \right) e^{i\sqrt{D_e+i}\sqrt{R_\omega}} \right. \\ & + \left. \left. \sqrt{D_e-i} e^{i(\sqrt{D_e-i}+\sqrt{D_e+i})\sqrt{R_\omega}} - \sqrt{D_e+i} \right) P_r \right. \\ & + D_e^2 \left(\sqrt{D_e-i} e^{i(\sqrt{D_e-i}+\sqrt{D_e+i})\sqrt{R_\omega}} + \sqrt{D_e+i} \right. \\ & + \left. \left(\sqrt{D_e-i} + \sqrt{D_e+i} \right) (P_r-1) e^{i\sqrt{D_e-i}\sqrt{R_\omega}} \right. \\ & \left. \left. - \left(\sqrt{D_e-i} + \sqrt{D_e+i} \right) P_r e^{i\sqrt{D_e+i}\sqrt{R_\omega}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aquí es importante remarcar que la ecuación (3.34) expresa el comportamiento de la difusividad térmica efectiva únicamente en la región cercana a las paredes del ducto. Dicha expresión no considera lo que está ocurriendo con el transporte de calor en el núcleo del flujo cuando $R_w \gg 1$ y por tanto la expresión para la difusividad térmica efectiva está incompleta pues no comprende toda la región donde se da el proceso de transferencia de calor. Para ese caso, no fue posible encontrar una solución completa que abarque las regiones de la capa límite y el núcleo acopladas de manera consistente. Por lo tanto en las figuras (3.3) y (3.4) se muestran los perfiles de la difusividad efectiva únicamente en la capa límite, sin ninguna relación con lo que sucede en el núcleo del flujo. Se consideran valores específicos de P_r (1, 10, 20 y 100) y del parámetro D_e (1, 2, 5 y 10).

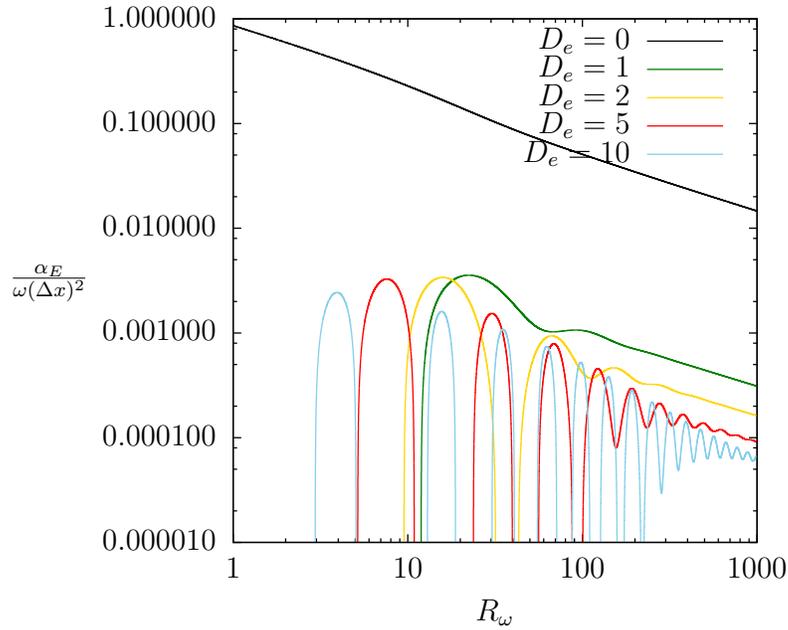
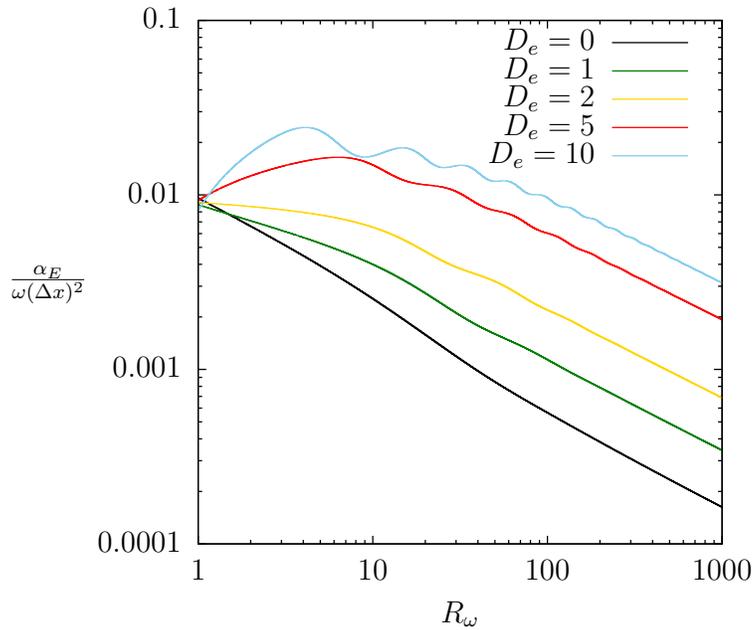
(a) $P_r = 1$ (b) $P_r = 10$

Figura 3.3: $\alpha_E/\omega(\Delta x)^2$ en función de la frecuencia adimensional, para $R_\omega \gg 1$. Para ambos casos, (a) y (b) se grafican las curvas correspondientes a $D_e = 1, 2, 5, 10$.

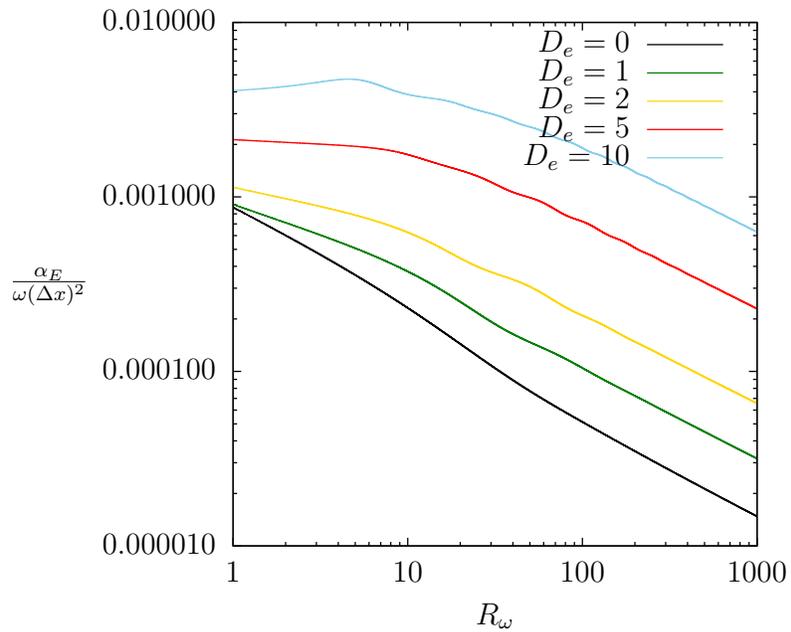
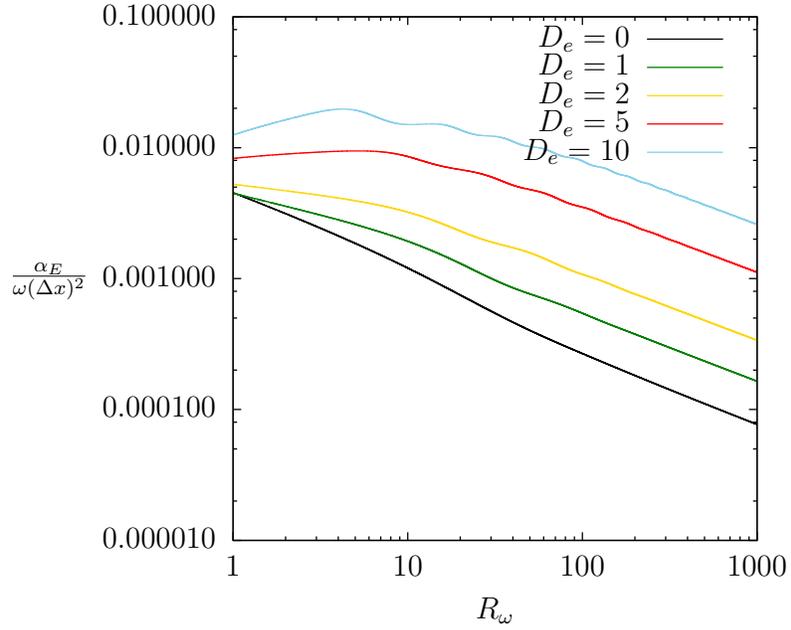


Figura 3.4: $\alpha_E/\omega(\Delta x)^2$ en función de la frecuencia adimensional, para $R_\omega \gg 1$. Para ambos casos, (a) y (b) se grafican las curvas correspondientes a $D_e = 1, 2, 5, 10$.

Los resultados de las figuras (3.3) y (3.4) muestran un comportamiento muy distinto al observado a altas frecuencias con la difusividad térmica efectiva calculada con la solución exacta (Lambert *et al.*, 2009). En dichas figuras se observa que la difusividad disminuye al aumentar R_ω . Para $P_r = 1$ se presenta un comportamiento anómalo respecto a los otros valores de Pr pero cuando R_ω aumenta, la difusividad tiende a disminuir. Aunque para valores de P_r de 10, 20 y 100 se observa un ligero incremento al aumentar el número de Deborah, la tendencia para valores grandes de R_ω es decreciente. Esto confirma que el mejoramiento de la transferencia de calor mediante el aumento en la difusividad térmica efectiva en un flujo oscilatorio en un ducto es un efecto conjunto que involucra el transporte de calor entre la capa límite y el núcleo.

Flujo oscilatorio de un metal líquido en un ducto bajo un campo magnético

En el presente capítulo se obtiene una solución analítica de un flujo oscilatorio magnetohidrodinámico. Primeramente se presenta una síntesis de las ecuaciones del campo electromagnético y de las aproximaciones necesarias para obtener las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD). Posteriormente se considera un metal líquido confinado entre dos planos paralelos infinitos oscilando en dirección x bajo un campo magnético externo perpendicular a las paredes del ducto (dirección y). El movimiento oscilatorio se produce aplicando una corriente alterna en dirección normal al plano de movimiento (dirección z) de modo que al interactuar con el campo magnético aplicado se produce una fuerza oscilatoria en dirección x que impulsa al fluido. El perfil de velocidades obtenido se utiliza en el capítulo 5 para analizar el problema de transferencia de calor.

4.1. Ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético

La rama de la física que se encarga del estudio del movimiento de fluidos eléctricamente conductores (no magnetizables) en presencia de campos magnéticos es denominada Magnetohidrodinámica (MHD). Para establecer sus

ecuaciones fundamentales, además de considerar las ecuaciones de conservación de la dinámica de fluidos, se deben considerar las ecuaciones del campo electromagnético (Jackson, 1975). Las ecuaciones de Maxwell son el conjunto de ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos en un medio material, en conjunto con las ecuaciones constitutivas y la ecuación para la fuerza de cuerpo electromagnética. En seguida se describen brevemente las ecuaciones mencionadas.

Ley de Gauss del campo eléctrico

La ley de Gauss del campo eléctrico establece que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie arbitraria cerrada es proporcional a la carga total que se encuentra encerrada en el volumen limitado por esta superficie, lo que se expresa en forma integral de la siguiente manera,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho_e dV \quad (4.1)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico, ρ_e es la densidad carga eléctrica y ϵ es la permitividad eléctrica del medio. La forma diferencial de la ley de Gauss se puede obtener mediante el teorema de la divergencia,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (4.2)$$

Esta ley indica que las distribuciones de carga eléctrica son las fuentes del campo eléctrico.

Ley de Gauss para el campo magnético

Esta ley indica que toda distribución de fuentes magnéticas es siempre neutra en el sentido de que poseen un polo norte y un polo sur, por lo tanto, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es nulo, como se indica a continuación:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.3)$$

donde \vec{B} es el campo de inducción magnética. Aplicando el teorema de la divergencia, la forma diferencial la Ley de Gauss para el campo magnético se puede expresar de la siguiente manera,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.4)$$

Esta expresión afirma que no existen cargas magnéticas aisladas o monopolos magnéticos.

Ley de inducción de Faraday

Esta ley se establece que la variación de flujo magnético (ya sea por variaciones espaciales o temporales) a través de un circuito, da lugar a una fuerza electromotriz (FEM) que induce la circulación de una corriente eléctrica en el circuito, de manera integral se tiene,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.5)$$

En forma diferencial la ley de Faraday se escribe de la siguiente manera,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Esta ley indica que cuando un campo magnético varía en el tiempo en una región del espacio, se induce un campo eléctrico no conservativo.

Ley de Ampère -Maxwell

La ley de Ampère relaciona la integral de un campo magnético estático a través de una trayectoria cerrada con la corriente neta encerrada (una corriente eléctrica estacionaria) por dicha trayectoria. Maxwell generalizó esta ley para poder considerar también que un campo eléctrico que varía con el tiempo produce un campo magnético y además ser consistente con el principio de conservación de la carga. La ley de Ampère -Maxwell se puede expresar de la siguiente forma

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu\epsilon \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.7)$$

donde \vec{J} es la densidad de corriente eléctrica. La forma diferencial de la ley de Ampère -Maxwell es la siguiente

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

donde μ es la permeabilidad magnética del material. Si se toma la divergencia de esta ecuación y se utiliza la ley de Gauss para el campo eléctrico (4.2), se obtiene la ecuación de conservación de la carga eléctrica, es decir

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{J}) = 0. \quad (4.9)$$

Fuerza de cuerpo electromagnética

La fuerza de Lorentz es una fuerza de cuerpo electromagnética, que experimenta un medio continuo por el que circula una densidad de corriente eléctrica \vec{J} y contiene una densidad de carga ρ_e y se expresa en la forma

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (4.10)$$

Ley de Ohm

La ley de Ohm es una ecuación constitutiva que establece una relación de proporcionalidad entre la densidad de corriente eléctrica que circula en un medio conductor y el campo eléctrico que da lugar a dicha corriente. Para un medio en reposo esta descrita por la ecuación.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.11)$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio. Esta ecuación tiene una validez muy amplia y en particular se aplica a fluidos conductores.

Si el medio conductor se desplaza respecto al sistema de laboratorio con velocidad \vec{u} , la ley de Ohm toma la forma

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (4.12)$$

4.2. Aproximación MHD

La magnetohidrodinámica es la fusión de dos ramas de la física clásica, la dinámica de fluidos que considera fenómenos no relativistas, y el electromagnetismo, que considera fenómenos relativistas. Para poder fusionar ambas teorías y obtener un conjunto de ecuaciones consistentes, es preciso realizar lo que se conoce como aproximación MHD (Müller y Bühler (2013); Cuevas (1988); Davidson (2001))

La aproximación consiste básicamente en restringir los fenómenos estudiados basándose en las siguientes suposiciones: a) la magnitud de la velocidad u del fluido en cuestión es mucho menor que la velocidad de la luz c , *i.e.* $u^2 \ll c^2$ (aproximación no relativista); b) la velocidad de los portadores de carga tales como electrones o iones, son pequeñas comparadas con la velocidad del conductor, esto quiere decir que se desprecia el efecto Hall; c) el movimiento del fluido se desarrolla bajo la acción de campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias; y d) los campos eléctricos son del orden de magnitud de la FEM inducida $\vec{u} \times \vec{B}$.

4.3. Ecuaciones de balance de la Magnetohidrodinámica.

Si se consideran las aproximaciones anteriormente mencionadas, el conjunto de ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo puede simplificarse de tal manera que se puede obtener un sistema de ecuaciones consistente que es invariante ante transformaciones galileanas (Pérez B., 2013). La corriente de desplazamiento de Maxwell y el término $\rho_e \vec{E}$ de la fuerza de Lorentz pueden despreciarse, esta es una aproximación que comúnmente se realiza en cualquier problema de electromagnetismo donde no intervienen oscilaciones de alta frecuencia (Cuevas, 1988). Lo que se desprecia físicamente es el proceso de acumulación o redistribución de carga eléctrica. También es apropiado ignorar la ecuación de conservación de la carga. Sin embargo, no se está afirmando que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, ni que los efectos electrostáticos debidos a la acumulación de cargas no sean importantes (Cuevas, 2004).

El sistema de ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo de un flui-

do eléctricamente conductor (no magnetizable) bajo la acción de un campo electromagnético se expresan mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.13)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.15)$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.17)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (4.18)$$

siendo σ la conductividad eléctrica del fluido y ρ la densidad del mismo.

El sistema de ecuaciones (4.13-4.18) representa un sistema de ecuaciones completo.

4.4. Solución analítica de un flujo oscilatorio Magnetohidrodinámico

Se considera el flujo oscilatorio de un metal líquido confinado entre dos placas paralelas infinitas eléctricamente aislantes generado por un gradiente de presión oscilatorio electromagnético. Las placas están separadas una longitud $2a$ (ver figura 4.1).

Ya que las placas son infinitas, se desprecian los efectos de borde. El flujo depende únicamente de la coordenada y . Paraleo al eje z (perpendicular al plano de movimiento $x - y$) se aplica una densidad de corriente alterna, que puede expresarse como la parte real de $\vec{J}_o = \langle 0, 0, j_o e^{-i\omega t} \rangle$, donde j_o es la amplitud constante de la densidad de corriente y ω es la frecuencia angular

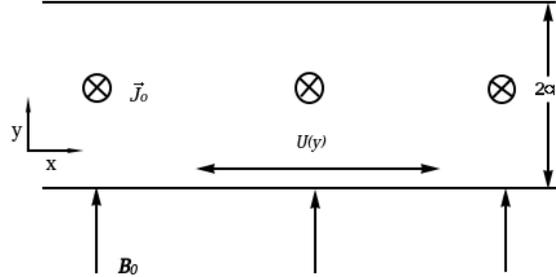


Figura 4.1: Esquema del flujo oscilatorio de un metal líquido entre dos paredes paralelas infinitas producido por la interacción de una corriente alterna aplicada perpendicularmente al plano de movimiento y un campo magnético uniforme y transversal.

de la corriente. El flujo está bajo la acción de un campo magnético uniforme perpendicular a los planos infinitos, es decir, $\vec{B} = \langle 0, B_0, 0 \rangle$. La interacción de los campos \vec{J}_o y \vec{B} genera una fuerza de Lorentz oscilatoria que impulsa al fluido en dirección axial de manera periódica. Debido al movimiento relativo del metal líquido y el campo magnético aplicado existirá también una densidad de corriente inducida. De la ley de Ohm (eqn. 4.16) se puede apreciar que la corriente total \vec{J} presente dentro del fluido se puede expresar de la siguiente forma:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E}_o + \vec{u} \times \vec{B}) = \vec{J}_o + \vec{J}_i, \quad (4.19)$$

donde

$$\vec{J}_o = \sigma \vec{E}_o \quad \text{y} \quad \vec{J}_i = \sigma(\vec{u} \times \vec{B})$$

De esta manera, tomando en cuenta que no existe un gradiente de presión axial impuesto, se puede describir la ecuación de Navier-Stokes (4.18) de la siguiente manera:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \eta \nabla^2 \vec{u} + \left[(\vec{J}_o + \vec{J}_i) \times \vec{B} \right], \quad (4.20)$$

donde el término $\vec{J}_o \times \vec{B}$ es la fuerza de Lorentz aplicada que impulsa oscilatoriamente al metal líquido en medio de los planos infinitos. Adicionalmente, el término $J_i \times \vec{B}$ es la fuerza de Lorentz inducida que se contrapone a la fuerza aplicada.

La fuerza aplicada se expresa en la forma

$$\vec{J}_o \times \vec{B} = \langle -j_o B_0 e^{-i\omega t}, 0, 0 \rangle \quad (4.21)$$

mientras que la fuerza inducida es de la forma

$$\vec{J}_i \times \vec{B} = \sigma(\vec{u} \times \vec{B}) \times \vec{B} = \langle -\sigma B_0^2 U_x(y, t), 0, 0 \rangle \quad (4.22)$$

donde se ha utilizado que $\vec{u} = \langle U_x(y, t), 0, 0 \rangle$.

Debido a que la fuerza aplicada es periódica la respuesta del fluido será también periódica, de modo que la velocidad del flujo se puede expresar como

$$\vec{u} = \langle U_x(y, t), 0, 0 \rangle = \langle \Re[U(y)e^{-i\omega t}], 0, 0 \rangle \quad (4.23)$$

donde $\Re[\dots]$ indica que se debe tomar la parte real. De esta forma, la condición de incompresibilidad se satisface idénticamente.

Con las aproximaciones anteriores, introduciendo (4.23), (4.21), (4.22) en la ecuación (4.20) y utilizando la ley de Ohm (4.19), la ecuación de Navier-Stokes que gobierna el flujo oscilatorio de metal líquido que fluye entre los planos paralelos infinitos aislantes, toma la forma siguiente:

$$-i\rho\omega U(y) = -j_o B_0 + \eta \frac{\partial^2 U(y)}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 U(y) \quad (4.24)$$

sujeta a las condiciones de frontera de no deslizamiento en $y = \pm a$ es decir,

$$U(a) = U(-a) = 0 \quad (4.25)$$

A continuación, se adimensionalizará la ecuación (4.24) de tal suerte que se determinen los parámetros adimensionales que rigen la dinámica del problema.

4.4.1. Escalas características y adimensionalización de la ecuación de movimiento

Para el flujo en cuestión se proponen las siguientes escalas características:

$$t_c = \frac{1}{\omega}, \quad l_c = 2a, \quad U_c = \frac{f_L(2a)^2}{\eta}, \quad j_c = j_o, \quad B_c = B_0,$$

donde f_L representa la magnitud de la fuerza de Lorentz aplicada, es decir, $f_L = j_o B_0$.

Por lo tanto las variables adimensionales del sistema se expresan como

$$\bar{t} = \frac{t}{t_c}, \quad \bar{y} = \frac{y}{2a}, \quad \bar{U} = \frac{U(y)}{U_c}, \quad \bar{J} = \frac{j_o}{j_o}, \quad \bar{B} = \frac{B_0}{B_0}.$$

De esta forma, la ecuación de movimiento adimensional, queda reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + (iR_\omega - Ha^2)\bar{U} = 1 \quad (4.26)$$

con

$$R_\omega = \frac{\omega(2a)^2}{\nu}, \quad Ha = 2aB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$$

donde R_ω es el número de Reynolds oscilatorio y corresponde al cociente del tiempo de difusión viscoso, $(2a)^2/\nu$, y el periodo de oscilación impuesto por la fuerza aplicada, $1/\omega$. El parámetro Ha se conoce como el número de Hartmann y su cuadrado da una estimación del cociente de la fuerza magnética y la fuerza viscosa. Los términos del lado izquierdo de la ecuación anterior comprenden el término de aceleración local $iR_\omega \bar{U}$, el término viscoso $\partial^2 \bar{U} / \partial \bar{y}^2$ y el término de frenado magnético ocasionado por los efectos inducidos, $-Ha^2 \bar{U}$.

4.4.2. Solución para el perfil de velocidades

Si en la ecuación (5.15) se considera que $\varpi^2 = iR_\omega - H_a^2$, la solución general correspondiente se expresa como

$$\bar{U}(\bar{y}) = A\cos(\varpi\bar{y}) + B\sen(\varpi\bar{y}) + \frac{1}{iR_\omega - H_a^2} \quad (4.27)$$

sujeta a las condiciones de frontera adimensionales

$$\bar{U}\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{U}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (4.28)$$

donde la coordenada y se ha adimensionalizado con la separación entre las placas.

Aplicando las condiciones de no deslizamiento se encuentra que $B = 0$ y $A = -\frac{\sec(\varpi\ell)}{iR_\omega - H_a^2}$, de modo que el perfil de velocidad $\bar{U}(\bar{y})$ queda

$$\bar{U}(\bar{y}) = \frac{1}{iR_\omega - H_a^2} \left(1 - \frac{\cos(\varpi\bar{y})}{\cos\left(\frac{1}{2}\varpi\right)} \right) \quad (4.29)$$

Finalmente, tomando en cuenta la ecuación (4.23), el perfil de velocidad completo que engloba la dependencia temporal y espacial es de la forma siguiente:

$$\hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) = \Re e(\bar{U}(\bar{y})e^{-i\bar{t}}). \quad (4.30)$$

o bien, explícitamente

$$\hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) = \Re e \left[\left(1 - \frac{\cos(\varpi\bar{y})}{\cos\left(\frac{1}{2}\varpi\right)} \right) \frac{\cos \bar{t} - i \sen \bar{t}}{iR_\omega - H_a^2} \right] \quad (4.31)$$

En las figuras (4.2) y (4.3) se muestra el comportamiento de la parte real del perfil de velocidad 4.31 como función de la coordenada transversal y , con un ángulo de fase de $3\pi/4$, para valores de $Ha = 0, 1, 2, 5$ y 10 . Para el caso de bajas frecuencias ($R_\omega = 1$) se observa claramente que el perfil de velocidades

pasa de un perfil parabólico cuando $Ha = 0$ a un perfil de Hartmann cuando $Ha = 10$. El aplanamiento del perfil de velocidades es debido a la fuerza de Lorentz inducida que se opone al movimiento del fluido.

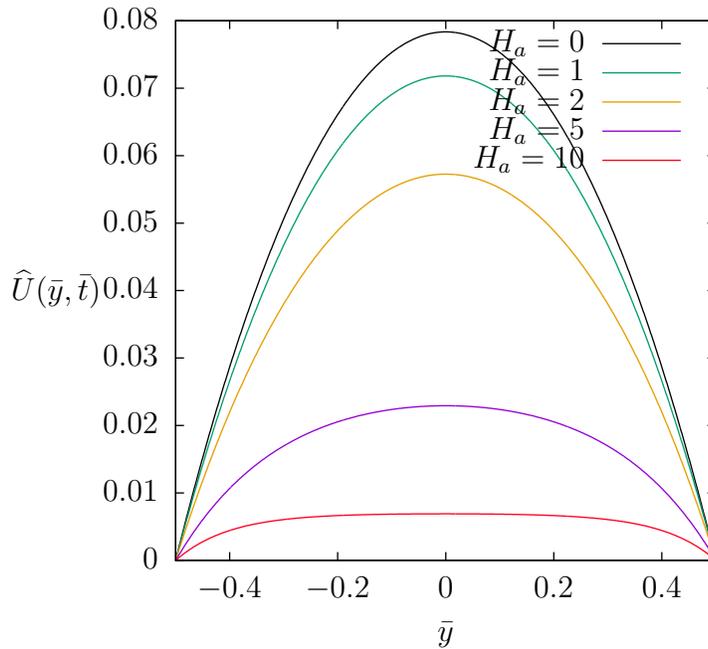
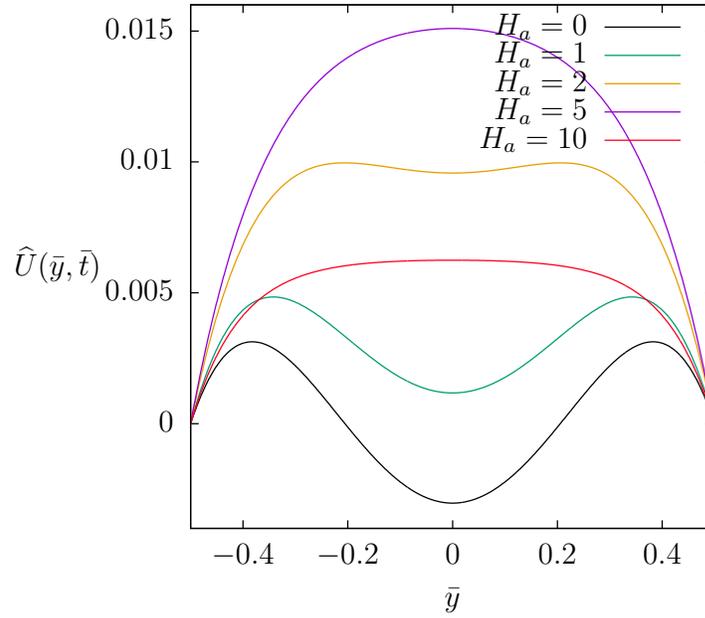
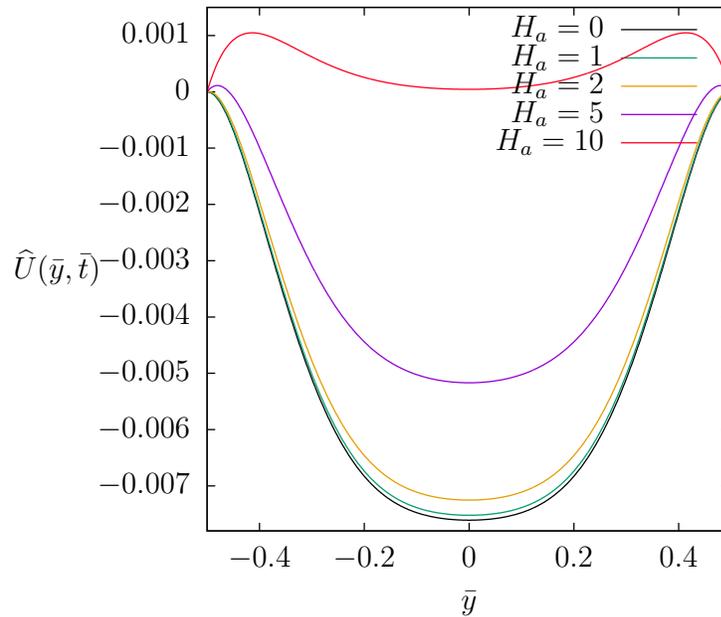


Figura 4.2: Perfil de velocidades del metal líquido como función de la posición transversal oscilando entre dos placas planas paralelas infinitas con un ángulo fase de $3\pi/4$, $R_\omega = 1$, y $Ha = 0, 1, 2, 5$ y 10 .

Para el caso de frecuencias altas se mantiene un efecto de frenado del fluido al incrementar el número de Hartmann, pero ahora los perfiles de velocidad de la figura (4.3) muestran un comportamiento claramente diferenciado entre el flujo en las regiones cercanas a las paredes del ducto (capa límite) y el flujo en la región central (núcleo). De hecho, en la figura (4.3a) ($R_\omega = 10$) puede observarse que el flujo en dichas regiones va en direcciones distintas cuando $Ha = 0$. Este efecto se atenúa cuando Ha crece. En general se observa una clara diferencia con los perfiles obtenidos con valores pequeños de R_ω .



(a) $R_\omega = 10$



(b) $R_\omega = 100$

Figura 4.3: Perfil de velocidades del metal líquido como función de la posición transversal oscilando entre dos placas planas paralelas infinitas con un ángulo fase de $3\pi/4$, para frecuencias de oscilación muy grandes y $Ha = 0, 1, 2, 5$ y 10 .

Transferencia de calor en un flujo de metal líquido.

En este capítulo se analiza el problema de la transferencia de calor en el flujo oscilatorio de un metal líquido que fluye entre dos planos paralelos infinitos que son térmica y eléctricamente aislantes. El fluido oscila debido a una fuerza Lorentz oscilatoria producida por la interacción de un campo magnético uniforme transversal a las placas y una corriente alterna aplicada en dirección perpendicular al plano de movimiento. Al igual que en el caso analizado en el capítulo 3 para un fluido viscoelástico, se supondrá que los extremos del ducto formado por los planos paralelos están sujetos a una diferencia constante de temperatura de manera que el calor puede transportarse axialmente. Para la solución de la ecuación de transferencia de calor se utilizará el perfil de velocidades encontrado en el capítulo anterior. Se considerarán los casos en que el flujo se encuentra bajo la acción del campo magnético y cuando los efectos del campo magnético desaparecen, es decir, en el caso de un flujo de Hagen-Poiseuille oscilatorio producido mediante métodos no electromagnéticos. El principal objetivo es analizar el problema del mejoramiento de la transferencia de calor axial y determinar la influencia del campo magnético en este proceso.

5.1. Obtención del perfil de temperaturas

Se procederá primeramente a encontrar el perfil de temperaturas correspondiente al flujo MHD oscilatorio. Partimos de la ecuación de transferencia

de calor en forma dimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

donde $\alpha_m = \frac{K}{\rho C}$ es la difusividad térmica del metal líquido, siendo K la conductividad térmica y C el calor específico.

Las escalas características del sistema se pueden escribir de la siguiente manera:

$$t_c = \frac{1}{\omega}, \quad l_c = 2a, \quad U_c = \frac{f_L(2a)^2}{\eta},$$

de modo que las variables adimensionales del sistema se escogen como

$$\bar{t} = t\omega, \quad \bar{y} = \frac{y}{2a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{2a}, \quad \hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) = \frac{U_x(y, t)}{U_c}, \quad \theta_m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{T(x, y, t) - T_0}{2a\gamma}.$$

donde $f_L = j_o B_0$. A su vez, $\gamma = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q}{k}$ representa el gradiente constante de temperatura en la dirección del flujo.

De acuerdo a las variables adimensionales propuestas, la ecuación de transferencia de calor adimensional queda de la siguiente manera:

$$R_\omega P_r \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{t}} + P_e \hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \bar{y}^2}. \quad (5.2)$$

con $\hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) = \bar{U}(\bar{y})e^{-i\bar{t}}$, y sujeta a las condiciones de frontera de flujo de calor nulo en las paredes

$$\left. \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=\pm \frac{1}{2}} = 0 \quad (5.3)$$

Para solucionar la ecuación anterior conservamos la forma de la solución 3.9 propuesta para el perfil de temperaturas, despreciando también la conducción de calor axial. En, en este caso la solución se representa en las correspondientes coordenadas como

$$\theta_m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = [\bar{x} + g(\bar{y})e^{-i\bar{t}}]. \quad (5.4)$$

Al introducir la solución anterior en la ecuación 5.2 se obtiene

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{y}^2} + \beta_T^2 g = P_e \bar{U}(\bar{y}) \quad (5.5)$$

con $\beta_T^2 = iR_\omega P_r$ sujeta a las condiciones de frontera siguientes:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=\pm\frac{1}{2}} = 0 \quad (5.6)$$

donde $\bar{U}(\bar{y})$ está dado por

$$\bar{U}(\bar{y}) = \frac{1}{iR_\omega - H_a^2} \left(1 - \frac{\cos(\varpi \bar{y})}{\cos\left(\frac{1}{2}\varpi\right)} \right) \quad (5.7)$$

Resolviendo la ecuación (5.5) con las condiciones de frontera (5.6) se obtiene

$$\begin{aligned} g(\bar{y}) = & P_e \left[\frac{\beta_T^2 - \beta_T^2 \sec\left(\frac{\varpi}{2}\right) \cos(y\varpi) - (iR_\omega - H_a^2)}{\beta_T^2 (iR_\omega - H_a^2) (\beta_T - \varpi) (\beta_T + \varpi)} \right. \\ & + \frac{\beta_T \varpi \sin\left(\frac{\beta_T}{2}\right) \tan\left(\frac{\varpi}{2}\right) \cos(\beta_T y)}{4\beta_T^2 (iR_\omega - H_a^2) (\beta_T - \varpi) (\beta_T + \varpi)} \\ & + \frac{\beta_T \varpi \cos\left(\frac{\beta_T}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta_T}{2}\right) \tan\left(\frac{\varpi}{2}\right) \cos(\beta_T y)}{4\beta_T^2 (iR_\omega - H_a^2) (\beta_T - \varpi) (\beta_T + \varpi)} \\ & \left. + \frac{3\beta_T \varpi \csc\left(\frac{\beta_T}{2}\right) \tan\left(\frac{\varpi}{2}\right) \cos(\beta_T y)}{4\beta_T^2 (iR_\omega - H_a^2) (\beta_T - \varpi) (\beta_T + \varpi)} \right] \quad (5.8) \end{aligned}$$

donde $\varpi = (iR_\omega - H_a^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\beta_T = (iR_\omega P_r)^{\frac{1}{2}}$.

A partir del perfil de temperatura dado por las ecuaciones (5.4) y (5.8) se procederá a calcular la difusividad térmica efectiva.

5.2. Difusividad térmica efectiva

Para el cálculo de la difusividad térmica efectiva utilizamos la forma dimensional propuesta por Shailendhra y AnjaliDevi (2010) en la que se desprecia la pequeña contribución debida a la conducción térmica en la coordenada x en el proceso de transferencia de calor. La difusividad térmica efectiva α_{E_m} , puede definirse por la igualdad.

$$\alpha_{E_m} \gamma = -\frac{\omega}{4\pi a} \int_{-\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_{-a}^a [T(x, y, t)]_R [U_x(y, t)]_R dy dt \quad (5.9)$$

donde el subíndice R indica que se debe extraer la parte real de $T(x, y, t)$ y $U_x(y, t)$.

La expresión anterior puede ser adimensionalizada adecuadamente usando las variables siguientes:

$$\bar{t} = t\omega, \quad \bar{y} = \frac{y}{2a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{2a}, \quad \hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) = \frac{U_x(y, t)}{U_c}, \quad \theta_m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{T(x, y, t)}{\gamma L}.$$

donde la parte real de la temperatura $\theta_m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ y el perfil de velocidades $\hat{U}(\bar{y}, \bar{t})$ se debe escribir como

$$[\theta_m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})]_R = \frac{\theta_m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) + \theta_m^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}{2}$$

$$[\hat{U}(\bar{y}, \bar{t})]_R = \frac{\hat{U}(\bar{y}, \bar{t}) + \hat{U}^*(\bar{y}, \bar{t})}{2}$$

donde $\hat{U}^*(\bar{y}, \bar{t})$ y $\theta_m^*(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ denotan los complejos conjugados. Realizando la sustitución adecuada de las variables adimensionales en la ecuación 5.9, al realizar la integral temporal se eliminan todos los términos con $e^{\pm i\bar{t}}$ y se obtiene una expresión de la difusividad térmica efectiva en forma adimensional

$$\frac{\alpha_{E_m}}{\alpha} = -\frac{P_e}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [g(\bar{y})^* \bar{U}(\bar{y}) + g(\bar{y}) \bar{U}(\bar{y})^*] d\bar{y} \quad (5.10)$$

Para ser consistente con la normalización de la difusividad térmica efectiva que se usó anteriormente para un fluido viscoelástico se usará el desplazamiento de marea en las correspondientes coordenadas para el presente caso:

$$\Delta x = \left| \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \int_{-a}^a U(y, t) dy dt \right|. \quad (5.11)$$

Introduciendo las variables adimensionales en la ecuación anterior, el desplazamiento de marea se expresa como

$$\Delta x = \left| \frac{4U_c}{\omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{U}(\bar{y}) d\bar{y} \right|. \quad (5.12)$$

Se puede ahora normalizar la expresión (5.10) con respecto al desplazamiento de marea para obtener una expresión de la difusividad térmica efectiva como $\alpha_{E_m}/\omega(\Delta x)^2$. La forma correspondiente a dicho cociente es

$$\frac{\alpha_{E_m}}{\omega(\Delta x)^2} = -\frac{R_\omega P_r}{32P_e} \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [g(\bar{y})^* \bar{U}(\bar{y}, \bar{t}) + g(\bar{y}) \bar{U}(\bar{y}, \bar{t})^*] d\bar{y}}{\left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{U}(\bar{y}) d\bar{y} \right|^2}. \quad (5.13)$$

Calculando las integrales en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{E_m}}{\omega(\Delta x)^2} = & -\frac{i}{\beta_{Ha1}} \left[P_r \sqrt{-H_a^2 - iR_\omega} \left(H_a^4 - 2iH_a^2 R_\omega + (P_r^2 - 1) R_\omega^2 \right) \right. \\ & \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{-H_a^2 + iR_\omega} \right) + \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{-H_a^2 - iR_\omega} \right) \\ & \left(-\sqrt{-iP_r R_\omega} \left(-H_a^4 - 2iH_a^2 P_r R_\omega + (P_r^2 - 1) R_\omega^2 \right) \right. \\ & \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{-H_a^2 + iR_\omega} \right) \cot \left(\frac{1}{2} \sqrt{-iP_r R_\omega} \right) \\ & - \left(H_a^2 - i(P_r - 1)R_\omega \right) \left(P_r \sqrt{-H_a^2 + iR_\omega} \left(H_a^2 + i(P_r + 1)R_\omega \right) \right. \\ & \left. \left. \left. + \beta_{Ha2} \right) \right) \right] \quad (5.14) \end{aligned}$$

donde

$$\beta_{Ha1} = 16\sqrt{-H_a^2 - iR_\omega}\sqrt{-H_a^2 + iR_\omega} \left[H_a^8 + 2H_a^4 (P_r^2 + 1) R_\omega^2 + (P_r^2 - 1)^2 R_\omega^4 \right] \left(\frac{1 - \frac{2 \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{iR_\omega - H_a^2}\right)}{\sqrt{iR_\omega - H_a^2}}}{H_a^2 - iR_\omega} \right)^2.$$

y

$$\beta_{Ha2} = \frac{P_r R_\omega (iH_a^2 + P_r R_\omega + R_\omega) \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-H_a^2 + iR_\omega}\right) \cot\left(\frac{1}{2}\sqrt{iP_r R_\omega}\right)}{\sqrt{iP_r R_\omega}}.$$

Considerando la ecuación anterior (5.14) se puede graficar el comportamiento de $\alpha_{E_m}/\omega(\Delta x)^2$ en función de R_ω para valores cercanos a cero hasta valores relativamente grandes.

Generalmente los metales líquidos poseen números de Prandtl muy pequeños, eso les atribuye la ventaja de ser muy buenos conductores eléctrica y térmicamente comparados con otros líquidos. Esto obviamente se debe a su alta conductividad térmica y eléctrica. En consecuencia, se pueden utilizar en situaciones donde se requiere extraer cantidades grandes de energía en un espacio relativamente pequeño. En las figuras (5.1),(5.2) y (5.3) se presenta una comparación del comportamiento de la difusividad térmica efectiva para distintos metales líquidos mostrados en la tabla (5.1), para tres números de Hartmann, $H_a = 1, 10$ y 100 , respectivamente.

Cuadro 5.1: Valores de P_r para diferentes metales líquidos

Prandtl para metales líquidos	
Metal	P_r
N_a	0.011
B_i	0.0142
H_g	0.0196
$G_a I_n S_n$	0.053

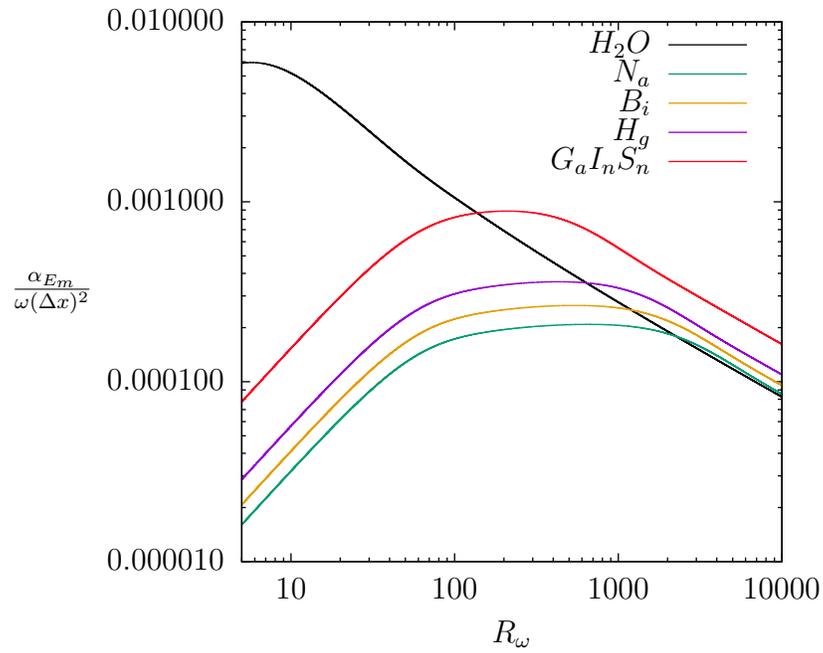


Figura 5.1: Difusividad térmica efectiva adimensional para varios metales líquidos en función de R_ω y $H_a = 1$.

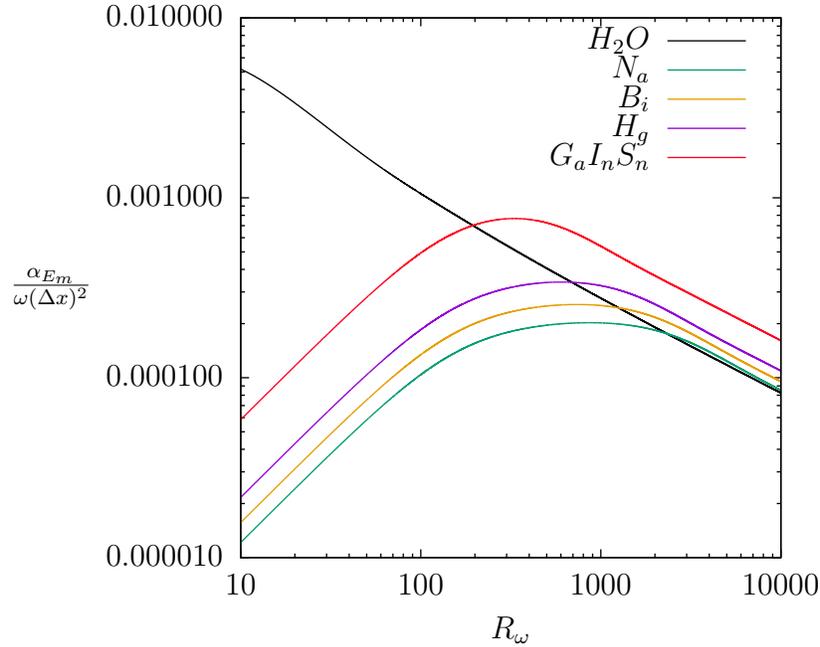


Figura 5.2: Difusividad térmica efectiva adimensional para varios metales líquidos en función de R_ω y $H_a = 10$.

Con propósito de comparación, en las gráficas anteriores se incluye también la difusividad térmica efectiva del agua en ausencia campo magnético (para H_2O , $P_r = 7.02$). En las figuras (5.1) y (5.2) no se percibe una diferencia sustancial en la magnitud de los picos que alcanza $\alpha E_m / \omega(\Delta x)^2$ para los metales líquidos usados como fluido de trabajo. Lo que puede resaltarse es que dicho pico se recorre ligeramente hacia valores más grandes de R_ω para $H_a = 10$ con respecto a la gráfica de $H_a = 1$. También debe resaltarse que la curva de difusividad que alcanza mayores valores es la correspondiente a $G_a I_n S_n$.

Por otra parte, en la figura (5.3) se observa que el aumento del número de Hartmann a $H_a = 100$ tiene dos claros efectos. Por un lado, el máximo de la difusividad efectiva se corre hacia valores mucho mayores de R_ω , del orden de 10,000. Por otro lado, el aumento en H_a trae consigo una disminución de un orden de magnitud en los máximos alcanzados por la difusividad térmica efectiva. Esto tiene una explicación clara ya que un aumento en el número de Hartmann implica efectos inducidos más pronunciados y en consecuencia una fuerza de frenado de Lorentz más intensa que ocasiona la disminución del

movimiento oscilatorio y por ende la disminución en la transferencia de calor.

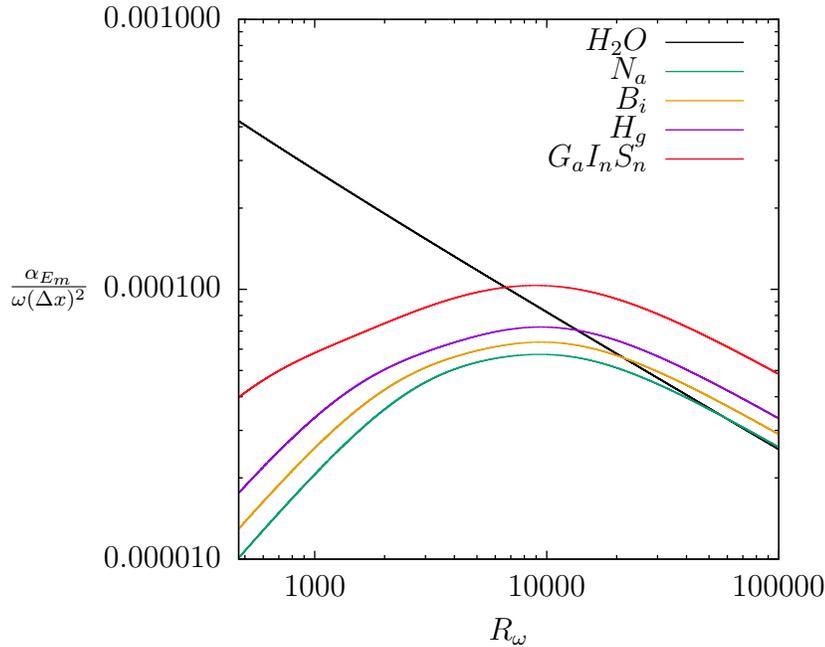


Figura 5.3: Difusividad térmica efectiva adimensional para varios metales líquidos en función de R_ω y $H_a = 100$.

Las figuras (5.1), (5.2) y (5.3) muestran que, al igual que en el caso hidrodinámico, es posible obtener un mejoramiento de la transferencia de calor mediante un flujo magnetohidrodinámico oscilatorio. Sin embargo, cuanto más intenso es el campo magnético, menores son los valores de $\alpha_{E_m}/\omega(\Delta x)^2$. A pesar de que en general las propiedades físicas de los metales líquidos son apropiadas para el transporte de calor, la existencia de una fuerza de frenado electromagnética que se opone a la fuerza de Lorentz aplicada limita su uso a intensidades de campo magnético relativamente bajas (número de Hartmann de orden 10) que permitan alcanzar mayores valores de la difusividad efectiva. Con fines comparativos, es interesante considerar el caso puramente hidrodinámico, es decir, el cuando el movimiento oscilatorio es producido por un gradiente de presión de origen no electromagnético. En tal caso, usando las escalas adecuadas, la ecuación de movimiento toma la forma

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} + iR_\omega \bar{U} = 1. \quad (5.15)$$

Resolviendo esta ecuación con condiciones de no deslizamiento y utilizando el perfil de velocidades para resolver el problema de transferencia de calor, es posible calcular la difusividad efectiva. La figura (5.4) muestra esta cantidad para los distintos metales líquidos utilizados previamente pero ahora en ausencia de efectos electromagnéticos. Se puede observar que los valores máximos de la difusividad efectiva son muy cercanos a los obtenidos en el caso electromagnético para $H_a = 1$ y $H_a = 10$. Esto indica que la utilización de una fuerza electromagnética alterna para producir el movimiento oscilatorio del metal líquido y llevar a cabo el mejoramiento de la transferencia de calor puede ser de viable para números de Hartmann bajos (de orden 10).

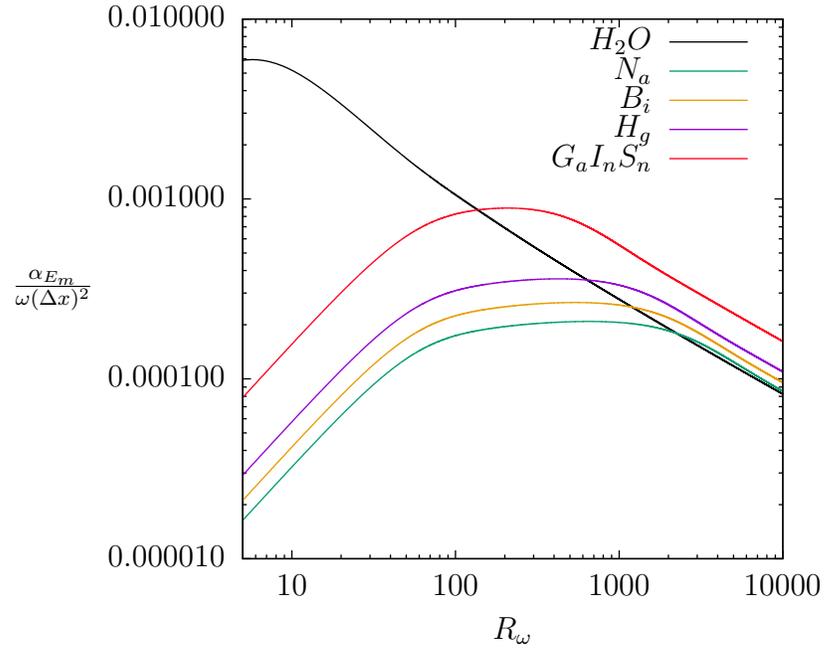


Figura 5.4: Difusividad térmica efectiva adimensional $\alpha_{Em}/\omega(\Delta x)^2$ para varios metales líquidos en función de R_ω en ausencia de un campo magnético (en este caso el gradiente de presión que ocasiona el flujo no es de origen electromagnético).

Conclusiones

Tomando como antecedente los resultados obtenidos en trabajos previos, donde el mejoramiento de la transferencia de calor axial en ductos se logra haciendo uso de flujos oscilatorios periódicos, en la primera parte de este trabajo se realizó un estudio analítico enfocado a obtener soluciones por medio de expansiones asintóticas de los perfiles de velocidad y temperatura del flujo oscilatorio de media cero de un fluido viscoelástico, válidas para valores de la frecuencia de oscilación muy pequeños ($R_\omega \ll 1$) y muy grandes ($R_\omega \gg 1$). Utilizando dichos perfiles se calculó la difusividad térmica efectiva con el fin de explorar el mejoramiento de la transferencia de calor en dichas condiciones y lograr un mejor entendimiento del comportamiento del fenómeno. Se utilizó el modelo de Maxwell de un fluido viscoelástico caracterizado por un tiempo de relajación, t_m , que en el límite $t_m \rightarrow 0$ recupera el comportamiento de un fluido Newtoniano.

Introduciendo en el problema escalas adecuadas, se obtuvo una solución asintótica regular para el perfil de velocidades en el caso $R_\omega \ll 1$ para valores arbitrarios del número de Deborah y a orden $O(R_\omega^2)$. Se encontró que a orden cero el desfase del flujo es proporcional a D_e . El efecto de intensificar los efectos elásticos al aumentar D_e , se manifiesta claramente mediante el aumento de la amplitud del perfil de velocidades. Por otra parte, en este límite fue posible también calcular el perfil de temperaturas a $O(R_\omega^2)$ que junto con el de velocidades permitió calcular la difusividad térmica efectiva. En estudios previos se encontró que la difusividad térmica efectiva $\alpha_e/\omega(\Delta x)^2$, alcanza un solo valor máximo como función de la frecuencia de oscilación cuando se utiliza un fluido Newtoniano como fluido de trabajo, mientras que para un fluido viscoelástico pueden obtenerse diversos máximos relativos de dicha cantidad

para diversas frecuencias de oscilación. Por otro lado, en este trabajo se encontró que a bajas frecuencias de oscilación la difusividad térmica efectiva no mejora con respecto a la difusividad molecular en el límite $R_\omega \ll 1$. Se concluye por lo tanto que a bajas frecuencias las características viscoelásticas del fluido no son relevantes para el mejoramiento de la transferencia de calor. Lo anterior se debe a que dada la lentitud del movimiento del fluido, los efectos convectivos en el transporte de calor son despreciables aun para valores grandes del número de Deborah. En el intervalo de frecuencias analizado el comportamiento de un fluido viscoelástico y uno Newtoniano son muy semejantes, encontrando solo un máximo para la difusividad efectiva para valores de P_r muy grandes.

En el caso $R_\omega \gg 1$ no fue posible encontrar una solución regular para toda la región de flujo. Esto indica que existen dos regiones con comportamientos distintos que se identifican como el núcleo en la región central y la capa límite en la región cercana a las paredes. Se obtuvo una solución en el núcleo a orden $O(R_\omega^{-1})$ encontrando que no depende del número de Deborah. Es decir, a este orden el núcleo se comporta como un fluido Newtoniano desfasado $\pi/2$ respecto al gradiente de presión impuesto. Por otro lado, utilizando el reescalamiento adecuado se obtuvo la solución en la capa límite al mismo orden, $O(R_\omega^{-1})$, la cual se empalmó con la solución en el núcleo. Esta solución manifiesta claramente el comportamiento elástico del fluido al aumentar D_e , mientras que se recupera el comportamiento Newtoniano cuando $D_e \rightarrow 0$. En cuanto al campo de temperaturas no fue posible encontrar una solución completa que abarque las regiones del núcleo y la capa límite cuando $R_\omega \gg 1$ de manera consistente. No obstante, se realizó el cálculo de la difusividad térmica efectiva en la capa límite. Como era de esperarse, las características de la difusividad térmica efectiva para altas frecuencias en la capa límite muestran un comportamiento muy distinto al observado a altas frecuencias con la difusividad térmica efectiva calculada con la solución exacta en trabajos previos. Se encontró que la tendencia de la difusividad térmica efectiva para valores grandes de R_ω es decreciente. Esto confirma que el mejoramiento de la transferencia de calor mediante el aumento en la difusividad térmica efectiva en un flujo oscilatorio en un ducto es un efecto conjunto que involucra el transporte de calor entre la capa límite y el núcleo.

Posteriormente, en la segunda parte de esta tesis, se investigó el mejoramiento de la difusividad térmica efectiva usando como fluido de trabajo metales líquidos, los cuales presentan un comportamiento Newtoniano. Se obtuvo una

solución analítica exacta del perfil de velocidades de un flujo oscilatorio magnetohidrodinámico (MHD) generado por un gradiente de presión electromagnético. Los efectos inducidos del flujo MHD ocasionan un frenado de Hartmann que lleva a la disminución de la velocidad del metal líquido y al aplanado del perfil al aumentar el número de Hartmann. Este perfil se utilizó para resolver la ecuación de transferencia de calor suponiendo que el ducto es eléctrica y térmicamente aislante y sujeto a un gradiente de temperatura axial constante. A partir de estos perfiles se obtuvo la difusividad térmica efectiva la cual fue evaluada como función de la frecuencia de oscilación para distintos valores del número de Prandtl correspondientes a diversos metales líquidos. Se encontró que existe una frecuencia óptima que maximiza la difusividad efectiva. Sin embargo, el aumento del número de Hartmann ocasiona la disminución de dicha difusividad. Esto trae como consecuencia que la utilización de una fuerza de Lorentz para lograr la oscilación del metal líquido sea una opción razonable para el mejoramiento de la transferencia de calor axial únicamente para valores pequeños de Ha ($O(10)$). Esto podría resultar de interés para aplicaciones microfluidicas.

Referencias

- Altland, A. (2011). *Classical Electrodynamics*. Citeseer.
- Andersen, M. y Klemin, D. (2014). Introducción a la magnetohidrodinámica. Technical report, Houston.
- Barco Ríos, Héctor and Rojas Calderón, Edilberto and Restrepo Parra, Elisabeth and others (2012). *Física: principios de electricidad y magnetismo*. Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales.
- Brown, R. G. (2007). *Classical electrodynamics-part II*.
- Castillo, E. (2014). Flujos oscilatorios con fluidos de cattaneo-vernotte. Tesis de mer, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Castrejón-Pita, J., Del Río, J., Castrejón-Pita, A., y Huelsz, G. (2003). Experimental observation of dramatic differences in the dynamic response of newtonian and maxwellian fluids. *Physical Review E*, 68(4):046301.
- Chatwin, P. (1975). On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillating flows in tubes. *J. Fluid Mech.*, 71(4):513–527.
- Chevray, R. y Mathieu, J. (1993). *Topics in fluid mechanics*. Cambridge University Press.
- Cuevas, S. (1988). Transferencia de calor en un flujo magnetohidrodinámico con condiciones a la frontera de tercer tipo. Tesis de mer, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Cuevas, S. (2004). Introducción a la magnetohidrodinámica. Technical report, Centro de ciencias físicas y Facultad de Ciencias UAEM, Cuernavaca Morelos.

- Currie, I. G. (2003). *Fundamental mechanics of fluids*. Copyright.
- Davidson, P. A. (2001). *An introduction to magnetohydrodynamics*, volumen 25. Cambridge university press.
- Del Río, J., De Haro, M. L., y Whitaker, S. (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. *Physical Review E*, 58(5):6323.
- Del Río, Castrejón-Pita, J. (2003). Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. *Revista mexicana de física*, 49(1):75–86.
- Fan, A., Fulmer, D., y Hartenstine, J. (2008). Experimental study of oscillating flow heat transfer. En *ASME 2008 First International Conference on Micro/Nanoscale Heat Transfer*, pp. 347–354. American Society of Mechanical Engineers.
- Jackson, J. D. (1975). Classical electrodynamics. *New York, Chicester, Brisbane, Toronto, Singapore*, 2.
- Jaeger, M. y Kurzweg, U. (1983). Determination of the longitudinal dispersion coefficient in flows subjected to high-frequency oscillations. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 26(6):1380–1382.
- Kaviany, M. (1986). Some aspects of enhanced heat diffusion in fluids by oscillation. *International journal of heat and mass transfer*, 29(12):2002–2006.
- Kurzweg, U. (1985a). Enhanced heat conduction in fluids subjected to sinusoidal oscillations. *J. of Heat Transfer.*, 107(4):459–462.
- Kurzweg, U. y Zhao, L. d. (1984a). Heat transfer by high-frequency oscillations: A new hydrodynamic technique for achieving large effective thermal conductivities. *The Physics of fluids*, 27(11):2624–2627.
- Kurzweg, U. y Zhao, L. d. (1984b). Heat transfer by high-frequency oscillations: A new hydrodynamic technique for achieving large effective thermal conductivities. *The Physics of fluids*, 27(11):2624–2627.
- Kurzweg, U. H. (1985b). Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 156:291–300.

- Lambert, A. (2005). *TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUIDOS VISCOELÁSTICOS OSCILANDO DENTRO DE UN COLECTOR SOLAR*. Tesis doctoral, UNAM.
- Lambert, A., Cuevas, S., Del Rio, J., y de Haro, M. L. (2009). Heat transfer enhancement in oscillatory flows of newtonian and viscoelastic fluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(23):5472–5478.
- Leal, L. G. (2007). *Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge University Press.
- Meroño, J. (2015). *Generación de burbujas y análisis del mezclado en columnas de flujo oscilatorio*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena.
- Müller, U. y Bühler, L. (2013). *Magnetofluidynamics in channels and containers*. Springer Science & Business Media.
- Puvaneswari, P. y Shailendhra, K. (2016). Enhancement of heat transfer in a liquid metal flow past a thermally conducting and oscillating infinite flat plate. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 9(3):1395–1407.
- Pérez B., J. (2013). Estudio teórico del flujo producido por una fuerza de lorentz azimutal en un agitador electromagnético. Tesis de mer, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Saslow, W. M. (2002). *Electricity, Magnetism, and Light*. Academic Press.
- Shailendhra, K. y AnjaliDevi, S. (2010). On the enhanced heat transfer in the oscillatory flow of liquid metals. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 4(2):57–62.
- Spiegel, M. R. (1968). *Mathematical handbook of formulas and tables*. McGraw-Hill.
- Tsiklauri, D. y Beresnev, I. (2001). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing through a longitudinally vibrating tube. *Physical Review E*, 63(4):046304.
- Watson, E. (1983). Diffusion in oscillatory pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 133:233–244.