



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICA
INSTITUTO DE FÍSICA

CONTRIBUCIONES HADRÓNICAS Y CORRECCIONES RADIATIVAS
A $g - 2$ DEL MUÓN

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ANTONIO ROJAS RAMOS

TUTOR PRINCIPAL:
DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ.
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. EDUARDO PEINADO RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM
DR. WOLFGANG PETER BIETENHOLZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO. NOVIEMBRE DE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.

Agradecimientos

A todos aquellos que hicieron posible este trabajo de tesis de Maestría. Al Dr. Genaro Toledo Sánchez por haber propuesto el tema de tesis, por su esfuerzo, tiempo y dedicación para llevarla a cabo. Agradezco al pueblo de México de quienes he recibido su apoyo económico de forma indirecta por medio de instituciones como CONACYT y UNAM para realización y culminación en el Posgrado en Ciencias Física de la UNAM esta tesis de Maestría.

Introducción

El Modelo Estándar (ME) es una teoría que describe las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas de los quarks y leptones. El ME está compuesto por una teoría denominada electrodébil y la cromodinámica cuántica (QCD). La teoría electro-débil describe de manera unificada las interacciones electromagnéticas y débiles de los quarks y leptones, mientras que la QCD, así como los acoplamientos de Yukawa, describen la interacción fuerte de los quarks. De estas interacciones fundamentales, la interacción fuerte es la menos comprendida debido en buena parte a que, a bajas energías, los quarks están confinados al interior de los estados físicos denominados hadrones, los cuales a su vez se clasifican en mesones y bariones. La descripción de fenómenos que involucran a los hadrones es de suma importancia para la física de partículas elementales, tanto para poder entender la dinámica de las interacciones fuertes como para extraer parámetros fundamentales del ME a partir de datos experimentales.

En la actualidad existe una gran cantidad de información experimental [1] sobre decaimientos que involucran interacciones fuertes. De éstos, aquellos que incluyen simultáneamente leptones y hadrones (decaimientos semileptónicos) constituyen los escenarios más limpios para estudiar la interacción fuerte. La descripción teórica de los decaimientos semileptónicos es relativamente sencilla, por lo que estos decaimientos se vuelven mucho más atractivos que otros escenarios para probar diferentes modelos teóricos que intentan describir la interacción fuerte de los hadrones (Teoría Quiral Perturbativa (CHTP), Teorías Efectivas de Quarks Pesados (HQET), Modelos de Quarks Relativistas y No relativistas, Dinámica en el Cono de Luz, Reglas de Suma de QCD, etc.).

El leptón τ ofrece un escenario único donde el ME, particularmente la QCD, puede ser estudiada de manera precisa. Esto es posible gracias a que las funciones espectrales de los decaimientos semileptónicos del τ , medidas experimentalmente, son un excelente laboratorio para poder probar las predicciones de QCD y sus modelos a energías intermedias ($1 \sim 2$ GeV). El grupo liderado por M. L. Perl [2] descubrieron el leptón τ en 1975. Esta

II

constituyó la primera evidencia experimental a favor de la existencia de una tercera generación partículas, y consecuentemente, la primera indicación de que era posible acomodar la violación de CP en el Modelo Estándar, la cual ya había sido observada en sistemas de kaones neutros [3], a través de matriz de mezcla de Cabbibo, Kobayashi y Maskawa, comúnmente denominada matriz CKM [4] [5].

El leptón τ es lo suficientemente masivo para decaer en hadrones además de que puede decaer semileptónicamente, lo que lo hace ideal para el estudio de efectos de interacción fuerte en condiciones muy claras. El τ es miembro de la tercera generación del ME de física de partículas [1], el cual decae en partículas que pertenecen a las dos primeras generaciones, acompañado con su respectivo neutrino, ν_τ . Esta es la razón por la que la física del τ podría darnos sugerencias útiles para entender el orden del por qué hay (al menos tres) copias de leptones y quarks que solamente difieren en sus masas. Siendo el quark top demasiado pesado para hadronizarse antes de decaer [6], la física detrás del quark b y el leptón τ parece prometedora al respecto. Sin embargo, el valor de la masa m_τ no permite que decaiga dentro de mesones *encantados* (mesones que contienen al quark c).

Como se mencionó anteriormente, los decaimientos del leptón τ involucran transferencia de momento de energías intermedias y, por lo tanto, sus elementos de matriz hadrónicos pertenecen al régimen no perturbativo de QCD donde, en ausencia de predicciones precisas de Lattice QCD, los modelos fenomenológicos son la mejor herramienta disponible, de esta manera, para estudiar estos decaimientos es necesario recurrir a modelos efectivos a bajas energías para describir los elementos de matriz hadrónicos.

En esta tesis se recurre a una versión generalizada del Modelo de Dominancia Vectorial (VMD) (propuesto originalmente por J. J. Sakurai a principios de los años 60 como un modelo para el factor de forma eletromagnético del pion) el cual se ha denominado Modelo de Dominancia de Mesones (MDM), para describir los elementos de matriz hadrónicos de la corriente débil. Experimentalmente se ha encontrado que tanto los decaimientos semileptónicos del τ son dominados por la producción de resonancias hadrónicas intermedias, las cuales pueden estar sobre su capa de masa. Así pues, el VMD resulta atractivo para describir tales decaimientos.

El estudio de las contribuciones hadrónicas al momento dipolar magnético del muón, típicamente denominada como $g - 2$, donde g representa la razón giro magnética, puede ser estudiada usando información experimental de la aniquilación de e^+e^- a hadrones o decaimientos del leptón τ , bajo la hipótesis de la simetría de conservación de corriente vectorial (CVC). Los resultados teóricos y experimentales del valor del momento dipolar magnético del muón discrepan entre sí a un orden de 3σ , más aún, los resultados teóricos que vienen de decaimientos del leptón τ también difieren entre sí. Por lo tanto, la parte experimental va a poder ser aclarada gracias a dos principales experimentos llevados a cabo uno en Japón y el otro en Estados Unidos en los próximos años, mientras que la parte teórica, los errores vienen dominados por la parte hadrónica, en particular por el canal dominante a dos piones.

En esta tesis estamos interesados en estudiar el decaimiento del τ a dos piones y el correspondiente modo radiativo, que gracias a los teoremas de bajas energías, teorema de Low [7] y teorema de Burnett & Kroll [8], podemos separar la parte independiente del modelo en el decaimiento radiativo y de esta manera identificar en las incertidumbres una parte independiente del modelo. Por otra parte, hay que mencionar que las correcciones radiativas deben ser removidas de la información experimental del τ para la predicción del momento magnético del muón.

Para ello, la realización de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 1 se describen algunas de las principales características del Modelo Estándar, partiendo de principios básicos y fundamentales, sus interacciones y simetrías, hasta la breve formulación de las teorías que describen su dinámica y el mecanismo que siguen para que estos elementos adquieran masa. El capítulo 2 se dedica especialmente a la descripción de los conceptos fundamentales del momento dipolar magnético del muón, conocido comúnmente como $g - 2$ del muón y como este está relacionado con las funciones espectrales de los decaimientos del τ . El capítulo 3 se presentan algunos resultados del proceso $\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \gamma$, además de que se revisan de manera clara los teoremas de bajas energías los cuales serán de utilidad para separar de manera adecuada las partes independientes y dependientes del modelo. El capítulo 4 trata del estudio del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ y su relación con las contribuciones hadrónicas, presentando algunos resultados y valores obtenidos para la predicción hadrónica, haciendo la comparación directa con resultados de los modelos CHPT y VMD obtenidos con anterioridad en otros trabajos, las

correcciones electromagnéticas a de las contribuciones hadrónicas y las correcciones radiativas a $g - 2$. Se detallan las principales características del leptón τ , sus modos de decaimiento y su relación directa hacia el problema abierto hoy en día, la discrepancia de los valores teóricos y experimentales de $g - 2$ del muón y como a partir de decaimientos del leptón τ se puede explicar estas diferencias. Finalmente la última sección es dedicada al apartado de discusión y conclusiones.

Índice general

Introducción	I
1. Revisión de partículas elementales	1
1.1. Leptones y quarks	1
1.2. Interacciones fundamentales	2
1.3. Teoría electrodébil y el origen de la masa	3
1.3.1. La masa en el Modelo Estándar	4
1.4. QCD: La teoría de interacción fuerte	11
1.4.1. Representaciones del modelo de quarks	13
1.4.2. Masas efectivas de los quarks	16
1.5. QED: Electrodinámica Cuántica	17
1.5.1. El propagador del fotón	18
1.5.2. Piones en QED escalar y polarización de vacío por me- sones vectoriales	20
1.6. Simetrías discretas: C , P , T y CPT	22
1.6.1. Paridad G	26
2. Fundamentos generales de $g - 2$ muón	29
2.1. Ecuación de movimiento para un leptón en un campo electro- magnético externo	29
2.2. Momento magnético y factores de forma electromagnéticos . .	32
2.3. Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α .	34
2.3.1. Aproximación de Schwinger	35
2.3.2. Contribuciones de QED dependientes de la masa de los leptones	41
2.3.3. Contribuciones débiles	42
2.4. Contribuciones hadrónicas	44

2.5.	Momento anómalo magnético del muón	46
2.6.	Funciones espectrales del τ vs. datos de aniquilación e^+e^-	48
3.	Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías	51
3.1.	Modelo de Dominancia Vectorial	51
3.2.	Proceso no radiativo	53
3.3.	Proceso Radiativo	55
3.3.1.	El vértice electromagnético $VV\gamma$	56
3.3.2.	Independencia de Modelo. Teorema de Low e invarian- cia de norma	58
3.3.3.	Interferencias radiativas. Teorema de Burnett-Kroll	60
4.	Contribuciones hadrónicas y correcciones radiativas a $g - 2$ del muón	63
4.1.	Decaimientos leptónicos del τ	64
4.2.	Decaimientos hadrónicos del τ	65
4.3.	Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^+\pi^-\nu_\tau$	66
4.4.	El decaimiento radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau\gamma$ en VMD	71
4.4.1.	Amplitud de Low e invariancia de norma	74
4.4.2.	Comparación con resultados anteriores (Quiral y VMD).	81
4.4.3.	Corrección electromagnética $G_{EM}(t)$	83
4.5.	Correcciones a $g - 2$ del muón	86
4.5.1.	Corrección del espacio fase	87
4.5.2.	Electromagnéticas	88
	Conclusión	90
	A. Álgebra de Dirac ($n = 4$ dimensiones)	93
	B. Región Euclidiana, Rotación de Wick	95
	C. La estructura del procedimiento de Renormalización	97
	D. Integrales de Lazo y Regularización dimensional	101
	E. Reglas de Feynman generales	105
E.1.	Reglas de Feynman para partículas con espín $s=1/2$	107
E.2.	Reglas de Feynman para QED escalar	107
E.3.	Cinemática de $\tau \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau\gamma$	110

**Contribuciones hadrónicas y correcciones
radiativas a $g - 2$ del muón**

Antonio Rojas Ramos

Noviembre 2017

Capítulo 1

Revisión de partículas elementales

Según una visión ampliamente difundida en la física de partículas, existen dos clases principales de partículas: los que constituyen a la materia, *quarks* y *leptones*, y las de interacción cuántica, *fotones* y otras partículas mediadoras de interacción. Los leptones y los quarks son fermiones que, de acuerdo a las interacciones de norma, los leptones participan solo en la interacción electrodébil, mientras que los quarks son afectados por la interacción electrodébil y la interacción fuerte¹. En este capítulo se hace una breve descripción de este conjunto de partículas, sus interacciones y las simetrías discretas asociadas a los mismos. Haciendo énfasis principalmente en algunos detalles en la parte de interacción fuerte y la electrodinámica cuántica.

1.1. Leptones y quarks

Existen seis tipos de leptones distinguibles por sus masas, carga eléctrica y modos de interacción. Tres leptones, el electrón (e^-), el muón (μ^-) y el tau (τ^-), con carga eléctrica igual a -1 , sin embargo, difieren en el valor de su masa. Los otros tres leptones, los *neutrinos*, son todos eléctricamente neutros y tienen una masa muy pequeña. Como una regla general, todas las partículas tienen su correspondiente antipartícula, las cuales tienen la misma masa, espín, vida media y su carga eléctrica es la misma en magnitud pero

¹Además, los leptones y los quarks interactúan directamente con el campo de Higgs a través de los acoplamientos Yukawa.

difiere en el signo. A cada leptón cargado se le asocia un neutrino, formando un par al cual se denomina *familia* de leptones, así, existen tres familias: (ν_e, e^-), (ν_μ, μ^-), y (ν_τ, τ^-), (ver cuadro 1.1) [9].

Generación	quark	m_q	leptón	m_l
1	u	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$ MeV	e^-	~ 0.5110 MeV
	d	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$ MeV	ν_e	< 2 eV
2	s	95 ± 5 MeV	μ^-	~ 105.7 MeV
	c	1.275 ± 0.025 GeV	ν^μ	< 0.19 MeV
3	b	4.18 ± 0.03 GeV	τ^-	~ 1.777 GeV
	t	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.71$ GeV	ν_τ	< 18.2 MeV

Cuadro 1.1: Contenido de materia en el Modelo Estándar [1]. Las masas de los quarks corresponden al esquema \overline{MS} con escala de renormalización $\mu = m_q$ para quarks pesados (c, b) y $\mu = 2$ GeV para quarks ligeros. Para el caso del quark t , su masa es tomada de mediciones hechas en Tevatrón [6].

Por otra parte, se conoce la existencia de seis tipos de *sabores* de quarks, caprichosamente llamados *up* (u), *down* (d), *charm* (c), *strange* (s), *top* (t) y *bottom* (b), arreglados en tres familias de acuerdo a sus principales modos de interacción: (u, d), (c, s) y (t, b) (ver cuadro 1.1). Todos los quarks tienen carga eléctrica fraccional, los quarks u, c y t tienen una carga de $2/3$ mientras que d, s y b tienen carga $-1/3$ y sus respectivas antipartículas tienen cargas de signo opuesto. Cada sabor de quark puede existir en uno de los tres estados de color, RGB², el cual juega el rol de la carga para interacciones fuertes entre quarks. Como los leptones no tienen color, ellos no responden a las interacciones fuertes.

1.2. Interacciones fundamentales

Muchos de los fenómenos de los que la humanidad es testigo en la vida diaria pueden ser explicados en términos de dos fuerzas fundamentales: gravedad y electromagnetismo. Sin embargo, estas dos interacciones no son suficientes para tomar en cuenta la física subnuclear. La gravedad es demasiado débil

²RGB por sus siglas en inglés, rojo, verde y azul

para tener alguna relevancia a nivel subatómico. El electromagnetismo no ofrece una explicación en cuanto a cómo un gran número de protones con carga positiva pueden estar confinados en un núcleo con un tamaño del orden de $10^{-15}m$. Estos procesos requieren la invocación de dos interacciones nucleares: una *fuerte*, responsable de la unión de protones y neutrones y una *débil* que explica las desintegraciones nucleares.

En el Cuadro 1.2 se exhiben las cuatro fuerzas fundamentales, también se muestra cuales son las masas de las partículas mediadoras de la fuerza, *bosones de norma* predichos y estudiados por las teorías de norma.

Interacción	Acoplamiento	Bosón	Masa ^a
Gravitación	10^{-39}	graviton	0
Fuerza débil	10^{-3}	W^\pm, Z^0	$\sim 80 - 90$ GeV
Electromagnética	1/137	γ	0
Fuerza fuerte	1	gluones	0

Cuadro 1.2: Interacciones Fundamentales de la naturaleza.

La teoría de norma que unifica las interacciones débiles y electromagnéticas es comúnmente conocida como el *Modelo Estándar* (de la interacción electrodébil) asociada al grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ que tiene cuatro generadores asociados a cuatro campos vectoriales, uno de estos campos permanece sin masa para general la fuerza electromagnética (fotón) y los otros tres adquieren masa vía el mecanismo de Higgs para producir la fuerza débil. Por otra parte, la teoría de norma que describe a la interacción fuerte esta asociada a la simetría exacta $SU(3)_c$. Así, el grupo de simetría que unifica a las interacciones fuerte, débil y electromagnética esta asociado a $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. La interacción gravitacional por su parte no se acopla a ninguna de las interacciones anteriores y eso es uno de los grandes problemas hoy en día debido a que no existe, aún, una teoría que unifique las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza.

1.3. Teoría electrodébil y el origen de la masa

Rompiendo espontáneamente la simetría de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ al grupo electromagnético $U(1)_Q$, uno puede darle masa a los tres bosones me-

diadores de la interacción electrodébil, dejando al fotón sin masa. Para hacer ésto, se necesita introducir un nuevo campo, el campo de Higgs, el cual transforma bajo el grupo de norma electrodébil y cuyo valor de expectación de vacío lo rompe adecuadamente. Para la familia del electrón, los campos materiales son un doblete, ψ_L , y un singlete ψ_R , del grupo $SU(2)$, donde

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \psi_R = e_R. \quad (1.1)$$

Como este grupo no actúa trivialmente para los fermiones de quiralidad izquierda, es denotado como $SU(2)_L$. Así, la Lagrangiana para los campos (sin masa) ψ es

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\nu}_L i \gamma^\lambda \partial_\lambda \nu_L + \bar{e} i \gamma^\lambda \partial_\lambda e, \quad (1.2)$$

invariante bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ bajo las transformaciones globales

$$\begin{aligned} SU(2)_L : \quad U_2(\omega) &= e^{-ig\omega_i \frac{1}{2}\tau_i}, \\ U(1)_Y : \quad U_1(\omega) &= e^{-i\frac{1}{2}g'\omega^Y}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

con $\nu_e = \nu$ y g y g' las constantes de acoplamiento, ω son parámetros constantes, τ_i son las matrices de Pauli y Y es la hipercarga de la partícula.

1.3.1. La masa en el Modelo Estándar

La forma invariante de norma de la Lagrangiana \mathcal{L}_0 , ec.(1.2), es de la forma

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_L i \gamma^\mu D_\mu^L \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma^\mu D_\mu^R \psi_R, \quad (1.4)$$

donde las derivadas covariantes son

$$\begin{aligned} D_\mu^L \psi_L &= \left(\partial_\mu + ig A_{i\mu} \frac{\tau_i}{2} + ig' B_\mu \frac{Y_L}{2} \right) \psi_L, \\ D_\mu^R \psi_R &= \left(\partial_\mu + ig' B_\mu \frac{Y_R}{2} \right) \psi_R, \end{aligned} \quad (1.5)$$

con $Y_L = -1$ y $Y_R = -2$, $A_{i\mu}$ los tres campos vectoriales de norma asociados con $SU(2)_L$, B_μ el campo de norma asociado a $U(1)_Y$. La dinámica de estos campos esta contenida en la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

donde $W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - g\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k$ y $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Las Lagrangianas \mathcal{L}_l y \mathcal{L}_G son invariantes bajo transformaciones locales al grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

El rompimiento de la simetría permite introducir dos campos escalares complejos formando un doblete en $SU(2)$

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Su dinámica, acoplado a un potencial esta dado por la Lagrangiana invariante de norma

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) \equiv (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad (1.8)$$

donde las derivadas covariantes del campo escalar están dadas por

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \left(\partial_\mu + igA_\mu + ig'B_\mu\frac{Y}{2} \right)\phi, \\ (D_\mu\phi)^\dagger &= \partial_\mu\phi^\dagger - ig\phi^\dagger A_\mu - ig'B_\mu\frac{Y}{2}\phi^\dagger. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Finalmente, teniendo en cuenta la generación de los términos de masa de los electrones, hay que introducir un acoplamiento de Yukawa invariante de norma entre escalares y fermiones,

$$\mathcal{L}_{lY} = -C_e \left(\bar{\psi}_R(\phi^\dagger\psi_L) + (\bar{\psi}_L\phi)\psi_R \right), \quad (1.10)$$

donde C_e son parámetros adicionales que da la fuerza a los acoplamientos. \mathcal{L}_{lY} es invariante bajo $SU(2)_L$, precisamente porque necesitamos un doblete de escalares, mientras su invariancia bajo $U(1)_Y$ esta garantizada por el requerimiento de que ϕ tiene hipercarga $Y = Y_L - Y_R$, que es, $Y = 1$. $SU(2)$ y $U(1)$ separadamente están completamente rotos, pero el producto $SU(2) \times U(1)$ no lo es; este genera una simetría adicional generada por la carga Q ,

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q. \quad (1.11)$$

Para probarlo, conviene parametrizar a ϕ como

$$\phi = \exp\left(\frac{i}{v} \sum \xi_i T_i\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

los campos escalares complejos φ^+ y φ^0 son remplazados por cuatro campos escalares reales H , ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 . Aplicando una transformación unitaria

$$S = \exp\left(-\frac{i}{v} \sum \xi_i T_i\right) \quad (1.13)$$

sobre todos los campos, transforman como

$$\begin{aligned} \phi' &= S\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + H(x)]\chi, & \chi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \psi'_L &= S\psi_L; & \psi'_R &= \psi_R; \\ B'_\mu &= B_\mu; \\ A'_\mu &= SA_\mu S^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu S)S^\dagger. \end{aligned} \quad (1.14)$$

En términos de los nuevos campos, las diferentes partes se convierten en

$$\mathcal{L}_s = (D'_\mu \phi')^\dagger (D'^\mu \phi') - \mu^2 \phi'^\dagger \phi' - \lambda(\phi'^\dagger \phi')^2; \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B'_{\mu\nu} B'^{\mu\nu}; \quad (1.16)$$

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}'_L i\gamma^\mu D'_\mu{}^L \psi'_L + \bar{\psi}'_R i\gamma^\mu D'_\mu{}^R \psi'_R; \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_{lY} = -C_e \left(\bar{\psi}'_R (\phi'^\dagger \psi'_L) + (\bar{\psi}'_L \phi') \psi'_R \right). \quad (1.18)$$

Cada una de estas partes es examinada independientemente, para hacer más fácil la escritura, los términos primados serán escritos sin acento, por ejemplo, $\psi' = \psi$.

Campo escalar. La matriz del campo de norma puede ser escrita explícitamente como

$$A_\mu = \frac{1}{2}\tau_i A_{i\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_+ W_\mu + \tau_- W_\mu^\dagger) + \frac{1}{2}\tau_3 A_{3\mu}, \quad (1.19)$$

con las definiciones $\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$ y $W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{1\mu} - iA_{2\mu})$. Así, el término cinético

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) &= \frac{1}{4}g^2 v^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{8}v^2 (gA_{3\mu} - g'B_\mu)^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial^\mu H \\ &+ \frac{1}{4}(2vH + H^2) \left[g^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2}(gA_{3\mu} - g'B_\mu)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Los términos de masa esperados para el campo vectorial complejo es de la forma $M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu$, así que la masa del vector cargado puede ser

$$M_W = \frac{1}{2}gv. \quad (1.21)$$

Por otro lado, el término cuadrático en los campos neutros, $\frac{1}{8}v^2(gA_{3\mu} - g'B_\mu)^2$, al ser diagonalizado introduce una combinación ortogonal que da los eigenestados para dos campos neutros

$$\begin{aligned} A_{3\mu} &= \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu, \\ B_\mu &= \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu; \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde θ_W es el ángulo de mezcla (llamado ángulo de Weinberg). $U(1)_Q$ no se rompe y el bosón de norma asociado permanece sin masa (el fotón). Para el correspondiente campo A_μ , la diagonalización en términos de las cantidades anteriores da como condición

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (1.23)$$

Así, el ángulo de mezcla da una medida relativa de la fuerza del grupo de factores de $SU(2)$ y $U(1)$, donde

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}; \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.24)$$

Para el campo vectorial neutro, $\frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu$, la masa del campo Z_μ es

$$M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}, \quad (1.25)$$

donde las masas de los dos campos de norma débil satisfacen la identidad $M_W = \cos \theta_W M_Z$.

Por otra parte, el potencial, después del rompimiento de simetría, es

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\mu^2 v^2 - \mu^2 H^2 + \lambda(vH^3 + \frac{1}{4}H^4), \quad (1.26)$$

donde $v^2 = -\mu^2/\lambda$, la masa del escalar sobreviviente es

$$M_H^2 = -2\mu^2. \quad (1.27)$$

La Lagrangiana \mathcal{L}_s , en la norma unitaria se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H \partial^\mu H - M_H^2 H^2) - \frac{gM_H^2}{4M_W} H^3 - \frac{g^2 M_H^2}{32M_W^2} H^4 \\ & + gM_W \left(H + \frac{g}{4M_W} H^2 \right) W_\mu^\dagger W^\mu + M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \\ & + \frac{1}{2} \frac{gM_Z}{\cos \theta_W} \left(H + \frac{g}{4 \cos \theta_W M_Z} H^2 \right) Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu. \end{aligned} \quad (1.28)$$

El campo H , que en principio es eléctricamente neutro, no se acopla al campo electromagnético, pero \mathcal{L}_s es, sin embargo, invariante de $U(1)_Q$.

Campos de Norma. La Lagrangiana \mathcal{L}_G para los campos de norma puede dividirse en una parte libre y otra interactuante

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G^0 + \mathcal{L}_G^1 + \mathcal{L}_G^2; \quad (1.29)$$

los dos términos de interacción son característicos de teorías no abelianas. \mathcal{L}_G al ser reescrita en términos de eigenestados de masa A_μ , W_μ y Z_μ , la parte cinética es

$$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

donde $A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ y $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$. Por otro lado, \mathcal{L}_G^1 , puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G^1 = & igW^{\mu\dagger} W^\nu (\sin \theta_W A_{\mu\nu} + \cos \theta_W Z_{\mu\nu}) \\ & + ig(W^\mu W_{\mu\nu}^\dagger - W^{\mu\dagger} W_{\mu\nu}) (\sin \theta_W A^\nu + \cos \theta_W Z^\nu). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Finalmente, \mathcal{L}_G^2 es de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G^2 = & -\frac{1}{2} g^2 (W_\mu^\dagger W^\mu W_\nu^\dagger W^\nu - W^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger W^\nu W_\nu) \\ & -g^2 W_\mu^\dagger W^\mu (\sin^2 \theta_W A_\nu A^\nu + \cos^2 \theta_W Z_\nu Z^\nu + 2 \sin \theta_W \cos \theta_W A_\nu Z^\nu) \\ & +g^2 W_\mu^\dagger W_\nu [\sin^2 \theta_W A^\mu A^\nu + \cos^2 \theta_W Z^\mu Z^\nu + \sin \theta_W \cos \theta_W (A^\mu Z^\nu + A^\nu Z^\mu)] \end{aligned} \quad (1.32)$$

Los términos que dependen de los campos neutros (es decir, $A^2 Z^2$ o Z^4) se han cancelado, así que los términos restantes en \mathcal{L}_G^2 involucran solo a los bosones cargados.

El sector leptónico. Ahora hay que considerar \mathcal{L}_l y \mathcal{L}_{lY} . Se puede anticipar que después del rompimiento de simetría, el electrón adquiere masa del acoplamiento a escalares, sea

$$\bar{\psi}_L \phi = (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} = \frac{v+H}{\sqrt{2}} \bar{e}_L, \quad (1.33)$$

el acoplamiento de Yukawa se convierte en

$$\mathcal{L}_{lY} = -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v+H)(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(v+H)\bar{e}e. \quad (1.34)$$

El término cuadrático en el campo del electrón debería ser reconocido como el término de masa de Dirac para el electrón, $-m\bar{e}e$, con masa $m_e = \frac{C_e v}{\sqrt{2}}$, donde el acoplamiento escalar-electrón se reduce

$$\mathcal{L}_{lY} = -m_e \bar{e}e - \frac{g m_e}{\sqrt{2} M_W} H \bar{e}e. \quad (1.35)$$

El sector leptónico está descrito por \mathcal{L}_l y dado el término de masa del electrón, puede ser descompuesto en una parte cinética, otra parte asociada a las corrientes cargadas y otra más asociada a las corrientes neutras

$$\mathcal{L}_{cin}^l = \bar{\nu}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \bar{e} [i \gamma^\mu (\partial_\mu - i e A_\mu) - m_e] e; \quad (1.36)$$

$$\mathcal{L}_{cc}^l = -\frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu W_\mu^\dagger + \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu]; \quad (1.37)$$

$$\mathcal{L}_{nc}^l = -\frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu Z_\mu - \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{e} \gamma^\mu [(-1 + 4 \sin^2 \theta_W) + \gamma_5] e Z_\mu. \quad (1.38)$$

Es así como la suma de las diferentes contribuciones dan la Lagrangiana de la teoría de norma de la interacción electrodébil para la familia leptónica del electrón. Este modelo contiene cinco parámetros independientes. Antes del rompimiento son, el acoplamiento g de $SU(2)$, el acoplamiento g' de $U(1)_Y$, los parámetros del potencial escalar λ y ν^2 y el acoplamiento de Yukawa C_e . Después del rompimiento de la simetría, existe una equivalencia donde estos parámetros son remplazados por el valor absoluto de la carga del electrón e , el ángulo de mezcla de Weinberg θ_W , la masa del electrón m_e , la masa del Higgs M_H y la masa del bosón cargado M_W . Las masas de los neutrinos también pueden ser generadas a través del mecanismo de Higgs, sin embargo, la jerarquía de masa de los neutrinos debe ser explicada de otra manera, por ej. el llamado *mecanismo seesaw*³[16].

³Seesaw, en español *subibaja*

Inclusión de los quarks u y d

El sector de quarks debe incluirse como un doblete ψ_L mas dos singletes u_R y d_R en el grupo de simetría $SU(2)$, es decir

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}; \quad u_R, \quad d_R. \quad (1.39)$$

La Lagrangiana para los quarks libres, invariante de norma local bajo $SU(2) \times U(1)_Y$ es de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q = & \bar{\psi}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu + igA_\mu + \frac{i}{2}g'Y_L B_\mu)\psi_L \\ & + \bar{u}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{i}{2}g'Y_R^u B_\mu)u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{i}{2}g'Y_R^d B_\mu)d_R. \end{aligned} \quad (1.40)$$

La interacción quark-escalar puede ser incluida en los acoplamientos $(\bar{\psi}_L\phi)d_R$ y $\bar{d}_R(\phi^\dagger\psi_L)$ similar para el sector de leptones, análogamente para u_R a escalares de manera invariante de norma, también se necesita φ^- y $\bar{\varphi}^0$, sus conjugados ε^+ y φ^0 que forman un doblete conjugado a ϕ , que es

$$\phi^c = i\tau_2\phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^0 \\ -\varphi^- \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Los cuales tienen hipercarga $Y_c = -Y = -1$. Los acoplamientos de Yukawa requieren de dos constantes de acoplamiento, C_u y C_d , y asume la forma general

$$\mathcal{L}_{qY} = -C_u[(\bar{\psi}_L\phi^c)u_R + \bar{u}_R(\phi^{c\dagger}\psi_L)] - C_d[(\bar{\psi}_L\phi)d_R + \bar{d}_R(\phi^\dagger\psi_L)]. \quad (1.42)$$

La invariancia de norma de estos acoplamientos esta garantizada bajo $U(1)_Y$ dada la asignación de la hipercarga de las partículas: $Y_L - Y_R^u = Y_c$ y $Y_L - Y_R^d = Y$. Después del rompimiento, análogo al sector leptónico, se obtiene en la norma unitaria que la interacción de Yukawa toma la forma

$$\mathcal{L}_{qY} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)(C_u\bar{u}u + C_d\bar{d}d), \quad (1.43)$$

la cual muestra que a través del mecanismo de Higgs los quarks u y d adquieren las masas

$$m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}C_u v; \quad m_d = \frac{1}{\sqrt{2}}C_d v. \quad (1.44)$$

así, la Lagrangiana \mathcal{L}_{qY} adquiere la forma

$$\mathcal{L}_{qY} = -m_u \bar{u}u - \frac{gm_u}{2M_W} \bar{u}uH - \frac{gm_d}{2M_W} \bar{d}dH. \quad (1.45)$$

La incorporación de los fermiones adicionales en el modelo viene dado, en forma muy general, por el correspondiente Lagrangiana de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -\left(1 + \frac{H}{v}\right)(\bar{e}_L M_e e_R + \bar{u}_L M_u u_R + \bar{d}_L M_d d_R + h.c.), \quad (1.46)$$

donde $v = 2M_W/g$, donde donde los diferente elementos diagonales identificados con las masas de los nueve fermiones masivos emergentes del modelo son

$$\begin{aligned} M_e &= \text{diagonal}(m_e, m_\mu, m_\tau), \\ M_u &= \text{diagonal}(m_u, m_c, m_t), \\ M_d &= \text{diagonal}(m_d, m_s, m_b). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Por último, y sin entrar en detalles, los acoplamientos de los quarks a los bosones W^\pm , mezclan los diferentes eigenestados de masa. Esta mezcla esta dada por la matriz de mezcla Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [4][5].

1.4. QCD: La teoría de interacción fuerte

Históricamente, las teorías de norma no abelianas primeramente fueron usadas para formular la teoría que unificara las interacciones débiles y electromagnéticas, la teoría de interacción fuerte de quarks es más una extensión obvia de la denominada electrodinámica cuántica. Así, la interacción fuerte, llamada Cromodinámica Cuántica (QCD) también es una teoría de norma no abeliana basada en el grupo de color $SU(3)_c$ cuya Lagrangiana es [17]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\not{D} - \mathcal{M})q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{gF+FP}, \quad (1.48)$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}, \quad (1.49)$$

es la derivada covariante y

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (1.50)$$

donde $a = 1, \dots, 8$, G_μ^a el campo del gluón, g_s es la constante de acoplamiento fuerte y f^{abc} son las constantes de estructura antisimétricas del grupo $SU(3)$.

El campo del quark q es un vector columna con seis componentes en el espacio de sabor, \mathcal{M} representa la matriz de masas de los quarks dada por $\mathcal{M} = \text{diag}(m_i)$, donde m_i son las diferentes masas de los quarks: $m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b$. Las matrices $\frac{\lambda^a}{2}$ son los generadores del grupo de simetría $SU(3)$ en la representación fundamental. Finalmente, los términos de Fadeev-Popov [18], $\mathcal{L}_{\mathcal{GF}+\mathcal{FP}}$, introducen los campos fantasmas y el término que fija la norma dados por

$$\mathcal{L}_{\mathcal{GF}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu G_\mu^a)(\partial_\nu G_\nu^a), \quad (1.51)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{FP}} = -\partial_\mu \bar{\phi}_a D^\mu \phi^a, \quad (1.52)$$

donde $D^\mu \phi^a \equiv \partial^\mu \phi^a - g_s f^{abc} \phi_b G_c^\mu$, ξ el parámetro de norma, y $\bar{\phi}^a$ el conjunto de campos escalares, hermíticos, sin masa y anticonmutantes. Por otro lado, $\mathcal{L}_{\mathcal{FP}}$ es anti-hermítica que introduce una violación de unitariedad y cancela las probabilidades no físicas correspondientes a las polarizaciones longitudinales de los gluones y restantes.

El acoplamiento g_s de QCD, ec.(1.49), recibe correcciones cuánticas a un lazo, Fig.1.1. Los cálculos a un lazo son factibles en las normas covariantes con regularización dimensional, algunos de los más simples son: *la auto-energía del fantasma*, denotado como $M^2(p)$, *la autoenergía del quark*, denotado por $\Sigma(p)$ ⁴. Por otro lado, los diagramas en la Fig.1.1, dan origen al operador de polarización del gluón, $\delta_{ab}\Pi_{\mu\nu}(k)$, el cual contiene las contribuciones del quark, gluón, y de fantasmas, denotados como $\Pi_{\mu\nu}^f$, $\Pi_{\mu\nu}^g$ y $\Pi_{\mu\nu}^{gh}$, respectivamente.



Figura 1.1: Diagramas de Feynman que contribuyen a un lazo a la función β_{QCD} .

⁴Para ver los detalles y las expresiones para $M^2(p)$ y $\Sigma(p)$ se recomienda ver la Ref. [19] [20]

La función β_{QCD} esta definida a través de las *Ecuaciones del Grupo de Renormalización* (RGE)⁵, a un lazo esta dada por

$$\beta_{QCD} = \mu \frac{\partial g_s}{\partial \mu} = - \left(11 - \frac{2n_f}{3} \right) \frac{g_s^3}{16\pi^2}, \quad (1.53)$$

la cual es negativa para $n_f \leq 16$, lo que implica el decremento en la constante de acoplamiento renormalizada, g_s^R , cuando la energía aumenta se conoce como *libertad asintótica*. Integrando la ec.(1.53), se tiene que

$$\alpha_s(q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log(q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (1.54)$$

donde $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$, conocida como constante de acoplamiento fuerte, la cual depende de la escala de *QCD*, Λ_{QCD} , definida en términos del valor de la constante de acoplamiento renormalizada en alguna escala de renormalización, μ , es decir:

$$\log(\Lambda_{QCD}^2) = \log \mu^2 - \frac{12\pi}{\alpha_s(\mu^2)(33 - 2n_f)}. \quad (1.55)$$

En resumen, las correcciones cuánticas hacen que la fuerza de interacción cambien conforme cambia o varia la energía. En el caso de QCD, la fuerza de interacción es muy fuerte a bajas energías, lo que nos impide hacer expansiones perturbativas en potencias de la constante de acoplamiento y de alguna manera impide hacer cálculos a través de este medio a bajas energías. Sin embargo, existen algunas alternativas para el estudio de la estructura hadrónica a bajas energías basadas en el modelo de quarks que describimos a continuación.

1.4.1. Representaciones del modelo de quarks

En el estudio de interacciones fuertes, se encuentra que en una buena aproximación, estas son independientes de la carga electrica. Por otro lado, las interacciones fuertes son invariantes bajo la trasformación que intercambia protones (p) y neutrones (n). Más precisamente la interacción fuerte tiene

⁵El conjunto de renormalizaciones finitas constituye el grupo de renormalización y las ecuaciones funcionales obedecen las características del grupo. Para una carga infinitesimal de escala μ , las ecuaciones funcionales se reducen a ecuaciones diferenciales las cuales son llamadas ecuaciones del grupo de renormalización, RGE por sus siglas en ingles. Para ver algunos detalles se recomienda ver la ref. [20].

una simetría de isospín en $SU(2)$ en la cual los estados p y n forman un doblete de isospín. Así, la estructura del grupo de simetría de isospín es muy similar al del espín usual. Los generadores de isospín T_i satisfacen el álgebra de Lie de $SU(2)$,

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.56)$$

El concepto de isospín puede extenderse a otros hadrones (mesones y bariones) que forma tripletes, dobletes y singletes que tienen carga eléctrica diferente donde la interacción electromagnética no respeta la simetría de isospín la cual no puede ser exacta.

Los mesones son estados ligados de quark-antiquark $q\bar{q}$, en $SU(3)$ se tienen en singletes y octetes. Para mesones con espín-paridad 0^- , se tiene:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\sim \bar{d}u, & \pi^0 &\sim (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}, & \pi^- &\sim \bar{u}d, \\ K^+ &\sim \bar{s}u, & K^0 &\sim \bar{s}d, & \bar{K}^0 &\sim \bar{d}s, & K^- &\sim \bar{u}s, \\ \eta^0 &\sim (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)/\sqrt{6}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

El octeto de mesones vectoriales con espín-paridad 1^- ha de contener los mismos quarks. El mesón 0^- η' y el mesón 1^- ϕ pueden ser identificados con el singlete de $SU(3)$ $q^i q_i = (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$. Los estados del octeto de mesones y los estados del octeto de bariones presentan una diferencia en el número barionico; B no es un generador de $SU(3)$. Especialmente para bariones con espín-paridad $1/2^+$

$$\begin{aligned} p &\sim udu, & n &\sim udd, \\ \Sigma^+ &\sim suu, & \Sigma^0 &\sim s(ud + du)/\sqrt{2}, & \Sigma^- &\sim sdd, \\ \Xi^0 &\sim ssu, & \Xi^- &\sim ssd, \\ \Lambda^0 &\sim s(ud - du)/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

y para bariones $3/2^+$

$$\begin{aligned} N^{*++} &\sim uuu, & N^{*+} &\sim uud, & N^{*0} &\sim udd, & N^{*-} &\sim ddd \\ \Sigma^{*+} &\sim suu, & \Sigma^{*0} &\sim sud, & \Sigma^{*-} &\sim sdd, \\ \Xi^{*0} &\sim ssu, & \Xi^{*-} &\sim ssd, \\ \Omega &\sim sss. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Dada la relación de *Gell-Mann-Nishijima*, entre la extrañeza S , la carga Q y el generador de isoespín T_3 de $SU(2)$, $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, con $Y = B + S$, donde B es el número barionico y Y es la hipercarga. Gell-Mann (1961) y Ne'eman (1961) señalaron que se podría agrupar a todos mesones y bariones con el mismo espín y paridad en diagramas (T_3, S) parecidas a las representaciones de $SU(3)$. Los mesones con espín-paridad 0^- , 1^- y bariones $1/2^+$ encajan muy bien en la representación de octetos, mientras que los bariones con espín-paridad $3/2^+$ se ajustan a la representación del decuplete, Fig.1.2.

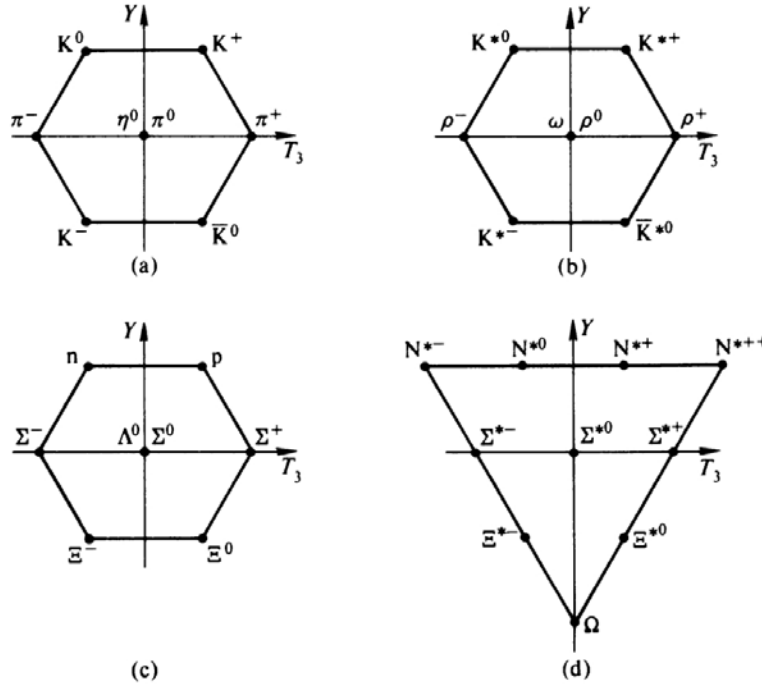


Figura 1.2: Hadrones en la representación de $SU(3)$. Octete para (a) mesones 0^- ; (b) mesones 1^- ; (c) bariones $1/2^+$ y decuplete para bariones $3/2^+$

Las partículas del octeto ψ_j^i son tensores de solo dos índices que pueden

ser escritas como matrices

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{-\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{-2\eta^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
 V &= \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & \frac{-\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \frac{-2\omega^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \bar{\Xi}^0 & \frac{-2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

Al momento de proponer la teoría *Eightfold-Way* no todos los mesones y bariones predichos en este patrón estaban bien predichos.

1.4.2. Masas efectivas de los quarks

Dado que los hadrones son considerados como estados ligados de pares de quark-antiquarks (mesones) o tres quarks (bariones), su masa puede ser escrita en términos de la masa de los quarks constituyentes más la correspondiente energía de ligación, es decir:

$$\begin{aligned}
 M_{meson} &= m_q + m_{\bar{q}} + \Delta E_{q\bar{q}}, \\
 M_{barion} &= m_{q_1} + m_{q_2} + m_{q_3} + \Delta E_{qqq}.
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Como los quarks pueden ser considerados no relativistas en los estados ligados, la energía de ligación es mucho menor que la masa de los quarks, $\Delta E \ll m_q$, modulado como

$$\Delta E_{q\bar{q}} = \frac{4a}{m_q m_{\bar{q}}} s_q \cdot s_{\bar{q}}, \quad \Delta E_{qqq} = 4a' \sum_{i < j}^3 \frac{1}{m_{q_i} m_{q_j}} s_{q_i} \cdot s_{q_j}, \tag{1.62}$$

donde a, a' son constates numéricas indeterminadas y s_q es el operador de espín del quark, sus productos son números que depende del total del espín

S del sistema. Esto es fácil de ver en el caso de los estados ligados de quark-antiquark, donde

$$s_q \cdot s_{\bar{q}} = \frac{1}{2} \left[S(S+1) - \frac{3}{2} \right], \quad (1.63)$$

con $S = 0, 1$ el espín de los correspondientes mesones y usando la ec.(1.62), el espectro de hadrones puede ser ajustado para obtener m_q , a y a' . Las masas obtenidas son las denominadas *masas de quark constituyentes*. A pesar del éxito del modelo de quarks no relativistas esta en acuerdo con ciertas propiedades de los hadrones tal como sus masas y momentos magnéticos, las masas constituyentes no pueden ser identificadas como los parámetros de masa que aparecen en la Lagrangiana del Modelo Estándar.

1.5. QED: Electrodinámica Cuántica

La interacción de fermiones con fotones esta descrita por la teoría de norma, electrodinámica cuántica QED, la cual esta estructurada por invariancia de norma local $U(1)$ y cuyas interacciones electromagnéticas puedan ser descritas por la Lagrangiana [22]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{QED} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \xi^{-1} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f, \\ &= \mathcal{L}_{0A}^\xi + \mathcal{L}_{0\psi} + e j_{em}^\mu(x) A_\mu(x), \end{aligned} \quad (1.64)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ es la derivada covariante, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu\nu} A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el campo de fuerza electromagnético que permanece invariante bajo las transformaciones de norma y ξ es el parámetro de norma. . La parte de interacción de la Lagrangiana es $\mathcal{L}_{int} = e j_{em}^\mu(x) A_\mu(x)$, con $j_{em}^\mu = \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$, mientras que la parte \mathcal{L}_{0A}^ξ define al propagador del fotón, el cual se analizará a detalle a continuación, y la parte $\mathcal{L}_{0\psi}$ define al propagador del leptón.

Una de las pruebas más rigurosas de QED viene de las mediciones de alta precisión del denominado *momento anómalo magnético* el cual surge enteramente de fermiones y fotones virtuales. Sin embargo, dentro de QED, existen muchas herramientas que nos ayudarán a comprender la descripción física de esta cantidad, algunas de las cuales se describen a continuación.

1.5.1. El propagador del fotón

De acuerdo con QED, La forma más general para el propagador del fotón, esta determinado por el correlador [23] :

$$iD_{\gamma}^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|T\{A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\}|0\rangle, \quad (1.65)$$

que incluyen todas las interacciones electromagnéticas, en el espacio de momentos. En la norma de Feynman [25], el propagador del fotón toma una forma simple $iD_{\gamma}^{\mu\nu} = -ig^{\mu\nu}/(q^2 - i\epsilon)$ y la serie de Dyson para la autoenergía toma la forma ⁶

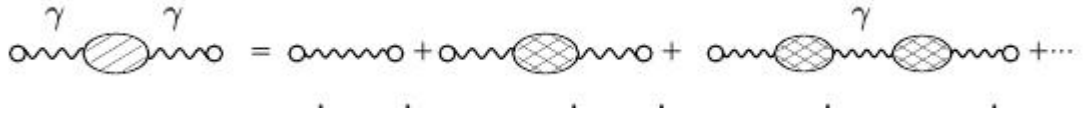


Figura 1.3: Representación en diagramas de Feynman para la autoenergía del fotón.

$$\begin{aligned} iD'_{\gamma}(q^2) &= \frac{-i}{q^2} + \frac{-i}{q^2}(-i\Pi_{\gamma})\frac{-i}{q^2} + \frac{-i}{q^2}(-i\Pi_{\gamma})\frac{-i}{q^2}(-i\Pi_{\gamma})\frac{-i}{q^2} + \dots \\ &= \frac{-i}{q^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Pi_{\gamma}}{q^2}} \right) = \frac{-i}{q^2 + \Pi_{\gamma}(q^2)}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Por invariancia de norma $U(1)_{em}$ el fotón es necesariamente no masivo y debe permanecer sin masa después de incluir correcciones radiativas, lo cual requiere que $\Pi_{\gamma}(q^2) = \Pi_{\gamma}(0) + q^2\Pi'_{\gamma}(q^2)$ con $\Pi_{\gamma}(0) = 0$ en acuerdo con la condición de transversalidad. Como resultado uno obtiene que

$$iD'_{\gamma}{}^{\mu\nu}(q) = -ig^{\mu\nu}D'_{\gamma}(q^2) + \text{tér. de norma} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2(1 + \Pi'_{\gamma}(q^2))} + \text{tér. de norma.} \quad (1.67)$$

Después de las consideraciones estructurales sobre el propagador del fotón, el cálculo de la autoenergía a un lazo y su correspondiente renormalización del propagador del fotón es

⁶Omitiendo el tensor métrico dado que actúa como una matriz unitaria

$$= (-1)^F i^4 e^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{q} + \not{k} + m}{(q+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right). \quad (1.68)$$

Usando las propiedades para las trazas de las matrices de Dirac (ver apéndice A), la traza para un número impar de matrices γ es cero. F es el número de lazos cerrados, $F = 1$ para este caso y obteniendo que

$$i g_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} = -i g_{\mu\nu} (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \Pi'(q^2) \quad (1.69)$$

lo que implica automáticamente que $q_\nu \Pi^{\mu\nu} = 0$. El resultado a un lazo para el tensor de polarización de vacío resulta ser [26]

$$q^2 \Pi'(q^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{8}{3} \left(m^2 - \frac{q^2}{6} + A_0(m) + \left(m^2 + \frac{q^2}{2} \right) B_0(m, m; q^2) \right), \quad (1.70)$$

donde ϵ es el parámetro introducido a partir de la regularización dimensional y los términos que exhiben las singularidades UV renormalizables están dadas por

$$A_0(m) = -m^2 \frac{2}{\epsilon} + O(1), \quad B_0(m, m; q^2) = \frac{2}{\epsilon} + O(1). \quad (1.71)$$

En el esquema de mínima sustracción \overline{MS} , la expresión renormalizada final toma la forma

$$\Pi'_\gamma(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 N_{cf} \left[\ln \frac{\mu^2}{m_f^2} + \bar{G} \right] \quad (1.72)$$

donde f denota los diferentes fermiones de sabor, μ es la escala de energía usado en la respectiva renormalización, Q_f la carga en unidades de e y N_{cf} el factor de color, $N_{cf} = 3$ para quarks y $N_{cf} = 1$ para leptones. Se ha introducido una función auxiliar

$$\bar{G} = \frac{5}{3} + y - 2\left(1 + \frac{y}{2}\right)(1-y)G(y) \simeq \begin{cases} \bar{G} = 0, & \text{si } q^2 = 0 \\ \text{Re } \bar{G} = -\ln \frac{|q^2|}{m_f^2} + \frac{5}{3}, & \text{si } |q^2| \gg m_f^2 \end{cases} \quad (1.73)$$

que desaparece en $q^2 = 0$. La parte imaginaria esta dada por la formula

$$\text{Im}\Pi'_\gamma(q^2) = \frac{\alpha}{3} \sum_f Q_f^2 N_{cf} \left(\left(1 + \frac{y}{2}\right) \sqrt{1-y} \right). \quad (1.74)$$

Usando los límites superiores e inferiores en la energía, se tiene que

$$\Pi'_\gamma(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 N_{cf} \text{In} \frac{\mu^2}{m_f^2}, \quad (1.75)$$

y

$$\text{Re}\Pi'_\gamma(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 N_{cf} \left(\text{In} \frac{\mu^2}{|q^2|} + \frac{5}{3} \right); \quad |q^2| \gg \gg m_f^2. \quad (1.76)$$

De esta manera se concluye la búsqueda de la polarización de vacío a un lazo, mencionando que muchos detalles han sido omitidos dado que no son de relevancia dentro de este trabajo, sin embargo, la polarización de vacío a un lazo juega un rol muy importante dentro para los cálculos del momento anómalo magnético del muón.

1.5.2. Piones en QED escalar y polarización de vacío por mesones vectoriales

Los efectos de interacción fuerte, en el contexto del momento anómalo magnético del muón, son dominados por los hadrones más ligeros, el triplete de isoespín de piones (π^+ , π^0 , π^-), los cuales se comportan como partículas puntuales. La Lagrangiana efectiva para la interacción electromagnética de piones cargados puntuales esta descrita por un campo escalar complejo ϕ dada por [28]:

$$\mathcal{L}_\pi^{(0)} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^\dagger - m_\pi^2 \phi \phi^\dagger, \quad (1.77)$$

donde al sustituir $\partial_\mu \phi \rightarrow D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\phi$, implica que la Lagrangiana escalar de QED (sQED) sea

$$\mathcal{L}_\pi^{sQED} = \mathcal{L}_\pi^{(0)} - ie(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger)A^\mu + e^2 g_{\mu\nu} \phi \phi^\dagger A^\mu A^\nu. \quad (1.78)$$

La invariancia de norma implica que los piones deben acoplar vía dos diferentes vértices para el campo electromagnético, y las correspondientes reglas de Feynman (ver apéndice E sec.E.2) están dadas en la Fig.1.4 y Fig.1.5 [30] [31].

$$\text{○} \cdots \overset{p}{\cdots} \text{○} : \quad i\Delta_\pi(p) = \frac{i}{p^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon}$$

Figura 1.4: Propagador del pión, en este caso p es el momento entrante.

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} A^\mu \\ \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} p' \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \varphi^+ \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \end{array} \\
 & \text{---} & \\
 & \begin{array}{c} p \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \varphi^- \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \end{array} \\
 \end{array} : = -ie(p+p')^\mu, \quad
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} A^\mu \\ \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \varphi^+ \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \end{array} \\
 & \text{---} & \\
 \begin{array}{c} A^\nu \\ \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \varphi^- \\ \text{dashed line} \\ \text{---} \end{array} \\
 \end{array} : = 2ie^2 g^{\mu\nu}
 \end{array}$$

Figura 1.5: Vértices pion-fotón en sQED, por convención p es el momento entrante y p' es el momento saliente.

Dado que se está considerando a los piones como partículas puntuales, la Lagrangiana de sQED no considera la estructura interna de los mismos, sin embargo, esto se soluciona para pión cargado, introduciendo un factor de forma $e^2 \rightarrow e^2 |F_\pi(q^2)|^2$.

En sQED la contribución de un lazo de pión a la polarización de vacío del fotón renormalizada está dada [26]

$$-i\Pi_\gamma^{\mu\nu}(\pi)(q) = \text{wavy line} \text{---} \text{dashed loop} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{dashed loop} \text{---} \text{wavy line}.$$

Figura 1.6: Contribución del pión en VP para el fotón.

$$\Pi_{\gamma ren}^{(\pi)}(q^2) = \frac{\alpha}{6\pi} \left(\frac{1}{3} + (1-y) - (1-y)^2 G(y) \right), \quad (1.79)$$

donde $y = 4m^2/q^2$ y $G(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \left(\ln \frac{1+\sqrt{1-y}}{1-\sqrt{1-y}} - i\pi \right)$. Para $q > 4m^2$ existe una parte imaginaria o parte absorbiva dada la sustitución

$$G(y) \rightarrow \text{Im}G(y) = -\frac{\pi}{2\sqrt{1-y}}, \quad (1.80)$$

donde se obtiene que:

$$\text{Im}\Pi_{\gamma}^{(\pi)}(q^2) = \frac{\alpha}{12}(1-y)^{3/2}, \quad (1.81)$$

y de acuerdo al *teorema óptico* [25] la parte absorptiva puede ser escrita en términos de la sección eficaz $\sigma_{\pi^+\pi^-}(s)$ de la dispersión $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \pi^+\pi^-$ como [32]

$$\text{Im}\Pi_{\gamma}^{had}(s) = \frac{s}{4\pi\alpha}\sigma_{had}(s), \quad (1.82)$$

donde

$$\sigma_{\pi^+\pi^-}(s) = \frac{\pi\alpha^2}{3s}\beta_{\pi}^3, \quad (1.83)$$

con $\beta_{\pi} = \sqrt{(1 - 4m_{\pi}^2/s)}$ la velocidad del pión en el marco de referencia del centro de masa. A menudo, uno escribe la sección eficaz hadrónica como una razón

$$R(s) = \sigma_{had}(s)/\frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \quad (1.84)$$

en unidades de la forma asintótica a altas energías de la sección eficaz $\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)$ para la producción de un par de muones en la aniquilación e^+e^- . Dada la sección eficaz o parte imaginaria, convencionalmente, la parte real de la función de polarización de vacío renormalizada puede ser obtenida por integración de la relación de dispersión apropiada [33] [34] [35]

$$\text{Re}\Pi_{\gamma ren}^{had} = \frac{s}{4\pi^2\alpha} \int_{s_1}^{s_2} ds' \frac{\sigma_{had}(s')}{s' - s} = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{s_1}^{s_2} ds' \left(\frac{1}{s' - s - \frac{1}{s'}} \right) R(s'), \quad (1.85)$$

ésta es de alguna manera, la aproximación dispersiva.

1.6. Simetrías discretas: C , P , T y CPT

De los experimentos, se sabe que las fuerzas de la naturaleza, gravitacional, electromagnética y la interacción fuerte, son simétricas respecto a *paridad* (P), *Conjugación de Carga* (C) e *inversión temporal* (T). Las interacciones débiles violan C y P separadamente, pero para ciertos procesos raros (todas aquellas observaciones que involucran mesones K) también muestran CP y violación de T [10]. Todas las observaciones indican que CPT es una simetría

exacta de la naturaleza.

Conjugación de Carga (C).

En QED como también en QCD, no en interacciones débiles, el intercambio de partículas por anti-partículas define una simetría, la conjugación de carga C . Está mapea partículas en antipartículas mediante operadores de creación y aniquilación y viceversa:

$$a(\mathbf{p}, r) \leftrightarrow^C b(\mathbf{p}, r), \quad a^\dagger(\mathbf{p}, r) \leftrightarrow^C b^\dagger(\mathbf{p}, r), \quad (1.86)$$

hasta una fase, donde a es el operador de creación y b el operador de aniquilación, p el momento y r la posición de la partícula o antipartícula correspondiente. Para un campo de Dirac, la conjugación de carga es:

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow^C \mathcal{C}_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta^T(x), \quad (1.87)$$

con

$$\mathcal{C} = i(\gamma^2 \gamma^0) = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

Las propiedades de C son:

$$\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \gamma^\mu \mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^T, \quad (1.89)$$

y la conjugación de carga para los espinores toman la forma:

$$(\mathcal{C}u)^T = \bar{v} \quad (\mathcal{C}v)^T = \bar{u}, \quad (1.90)$$

que puede ser verificada por cálculo directo.

Como bajo la conjugación de carga la carga cambia de signo, también la corriente electromagnética, $j_{em}^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, cambia de signo

$$U(C)j_{em}^\mu(x)U^{-1}(C) = -j_{em}^\mu(x). \quad (1.91)$$

Paridad (P).

El operador de paridad P es un operador unitario que invierte el momento de una partícula sin voltear su espín. Sobre un campo escalar $\phi(x)$ y un campo vectorial $\phi_\mu(x)$, el operador P actúa como [11]

$$P^{-1}\phi(x)P = \eta_P\phi(x'), \quad (1.92)$$

con $\eta_P = \pm 1$ y x' la transformación de x bajo P. Así, para un campo vectorial

$$\begin{aligned} P^{-1}\phi_\mu(x)P &= \eta_P(\phi_0(x'), -\phi_k(x')) \\ &= \eta_P(\phi_P) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \phi_\mu(x'), \end{aligned} \quad (1.93)$$

donde $\eta_P(\phi_\mu) = \pm 1$, la cual describe la paridad intrínseca en el campo. Para el campo escalar, $\eta_P(\phi) = 1$ y para un campo pseudoescalar $\eta_P(\phi) = -1$. Por otra parte, para un campo vectorial $\eta_P(\phi_\mu) = 1$ y para un campo vectorial axial, $\eta_P(\phi_\mu) = -1$.

Las leyes de transformación para un campo de Dirac son:

$$\begin{aligned} P^{-1}\psi(x)P &= \eta_P\gamma_0\psi(x'), \\ P^{-1}\psi^\dagger(x)P &= \eta_P^*\psi^\dagger(x')\gamma_0, \end{aligned} \quad (1.94)$$

con $\eta_P(\psi) = \pm 1, \pm i..$ P^2 transforma las coordenadas x_μ en x_μ , así, P^2 es tanto un operador identidad o un operador que rota a un ángulo 2π .

Inversión temporal (T). Alguna transformación que involucre la simetría de inversión temporal T, debe ser representada como una transformación antiunitaria $\bar{U}(T)$. La antiunitariedad esta definida por:

$$\bar{U}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha^*\bar{U}|\psi\rangle + \beta^*\bar{U}|\phi\rangle = \alpha^*|\psi'\rangle + \beta^*|\phi'\rangle, \quad (1.95)$$

y

$$\langle\psi'|\phi'\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*. \quad (1.96)$$

El conjugado complejo de los elementos de matriz es admitido por el hecho de que esté preserva la probabilidad $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$. Una transformación antiunitaria implica una transposición hermítica de operadores y estados.

Por otra parte, la interacción electromagnética $\mathcal{L}_{int}^{QED} = ej_{em}^\mu(x)A_\mu(x)$ permanece invariante bajo C, P y T separadamente. Para el campo del fotón:

$$\begin{aligned} U(C)A^\mu(x)U^{-1}(C) &= -A^\mu(x), \\ U(P)A^\mu(x)U^{-1}(P) &= (PA)^\mu(Px) = A_\mu(Px), \\ \bar{U}(T)A^\mu(x)\bar{U}^{-1}(T) &= -(TA)^\mu(Tx) = A_\mu(Tx). \end{aligned} \quad (1.97)$$

El campo de Dirac bajo C , P y T toma la forma

$$\begin{aligned} U(C)\psi_\alpha(x)U^{-1}(C) &= i(\gamma^2\gamma^0)_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta^T(x), \\ U(P)\psi_\alpha(x)U^{-1}(P) &= (\gamma^0)_{\alpha\gamma}\psi_\beta(Px), \\ \bar{U}(T)\psi_\alpha(x)\bar{U}^{-1}(T) &= i(\gamma^2\gamma_5)_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta^T(Tx), \end{aligned} \quad (1.98)$$

donde las fases han sido escogidas convencionalmente.

Simetría CPT. Sea $\Theta = CPT$ donde C , P y T pueden ser aplicados en algún orden, existe un operador antiunitario $\bar{U}(\Theta)$ que (con una elección apropiada de la fase) transforma escalares, campos de Dirac y campos vectoriales de acuerdo a

$$\begin{aligned} \bar{U}(\Theta)\phi(x)\bar{U}^{-1}(\Theta) &= \phi^*(-x), \\ \bar{U}(\Theta)\psi(x)\bar{U}^{-1}(\Theta) &= i\gamma_5\psi(-x) \\ \bar{U}(\Theta)A_\mu(x)\bar{U}^{-1}(\Theta) &= -A_\mu(-x), \end{aligned} \quad (1.99)$$

y que deja invariante el vacío : $\bar{U}(\Theta)|0\rangle = |0\rangle$ hasta una fase. El teorema CPT asegura que la transformación $\bar{U}(\Theta)$ bajo condiciones muy generales es una simetría de la teoría(Lüders 1954, Pauli 1955, Jost 1957) [12].

Las consecuencias de CPT son que los módulos de las cargas, masas, acoplamientos g y vida media de las partículas y antipartículas debe ser igual. Consideré el estado de una partícula $|\psi\rangle = |e, \mathbf{p}, \mathbf{s}\rangle$, donde e es la carga, \mathbf{p} el momento y \mathbf{s} el espín. El estado conjugado bajo CPT esta dado por $|\bar{\psi}\rangle = |-e, \mathbf{p}, \mathbf{s}\rangle$. El estado $|\psi\rangle$ es un eigenestado de la Hamiltoniana que describe la evolución temporal de la partícula libre:

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (1.100)$$

y la relación conjugada bajo CPT se lee $\bar{\mathcal{H}}|\bar{\psi}\rangle = E|\bar{\psi}\rangle$. Entonces $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{H}}$ por el teorema CPT, así se tiene

$$\mathcal{H}|\bar{\psi}\rangle = E|\bar{\psi}\rangle. \quad (1.101)$$

Para $\mathbf{p} = 0$ el eigenestado de E se reduce a la masa y por lo tanto las dos ecuaciones de eigenvalores dicen que la masa de las partículas y anti-partículas deben ser las mismas, es decir, $\bar{m} = m$.

La igualdad de los acoplamientos g debe ser mostrada de la misma manera, pero con una Hamiltoniana que describa la interacción de las partículas con el campo magnético B . Entonces la ec.(1.100) sostiene que los eigenvalores

$$E = m - g \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.102)$$

El estado conjugado bajo CPT ($e \rightarrow -e, \mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{s}, m \rightarrow \bar{m}, g \rightarrow \bar{g}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$), de acuerdo a la ec.(1.101), podría tener los mismos eigenvalores

$$E = \bar{m} - \bar{g} \left(\frac{e\hbar}{2\bar{m}c} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.103)$$

y dado que $\bar{m} = m$, entonces se tiene que $\bar{g} = g$. Para la prueba de la igualdad de la vida media, $\bar{\tau} = \tau$, se puede recurrir a la ref. [13].

1.6.1. Paridad G

Es útil definir una generalización de la conjugación de carga que pueda aplicarse a los piones cargados. Por ello se introduce el operador de paridad G , que se aplica también de entados de estados compuestos de n piones. Se define como el producto de la conjugación de carga por el operador de rotación de 180 grados sobre la componente de isoespín I_2 [9]

$$G = C e^{-i\tau_2\pi}, \quad (1.104)$$

siendo τ_2 la matriz de rotación según el eje y en el espacio de isoespín. Para un estado definido por $|I, I_3\rangle$, el resultado de la rotación a 180 grados es

$$e^{-i\tau_2\pi} |I, I_3\rangle = (-1)^{I-I_3} |I, -I_3\rangle. \quad (1.105)$$

Si se aplica sobre el estado neutro del pión, que tiene conjugación de carga $C(\pi^0) = +1$, conduce a

$$G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle, \quad (1.106)$$

y se elige este valor también para los piones cargados. Estos no son propios del operador C , pero con una elección de fase adecuada

$$C|\pi^- \rangle = (-1)|\pi^{\mp}\rangle, \quad (1.107)$$

de modo que la Paridad G resulte la misma para el triplete de piones, es decir, además de que se debe satisfacer la ec.(1.106), también se debe cumplir que

$$G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\pm\rangle. \quad (1.108)$$

Para un sistema de n piones, $G = (-1)^n$.

Con esta definición se puede encontrar que la paridad G esta bien definida para un sistema de nucleón-antinucleón neutro como

$$G(N\bar{N}) = (-1)^{l+S+I} = C(-)^I, \quad (1.109)$$

donde l , S e I son los números cuánticos del sistema.

Hasta este momento sólo se ha hablado de principios y conocimientos básicos necesarios para abordar el problema principal a tratar dentro de este trabajo de tesis. En el siguiente capítulo se aborda de manera formal al momento anómalo magnético del muón, partiendo de la descripción clásica y describiendo cada una de las diferentes contribuciones a $g - 2$ del muón.

Capítulo 2

Fundamentos generales de $g - 2$ muón

El momento anómalo magnético del muón es una de las cantidades medida más precisa en física de partículas. Las mediciones hechas con muy alta precisión más recientes en Brookhaven revelan una discrepancia de tres desviaciones estándar, 3σ en comparación a la predicción electrodébil en el Modelo Estándar, lo cuál podría darnos una pista para buscar contribuciones aún desconocidas en física más allá del Modelo Estándar. Esto ha desencadenado numerosas especulaciones sobre el posible origen de una *pieza faltante*. La incertidumbre dominante de la predicción, causada por efectos de interacción fuerte, podría reducirse sustancialmente, debido a mediciones de la sección transversal hadrónica en aniquilaciones electrón-positrón a bajas energías. Es así, que esta sección esta dedicada a presentar una actualización del estado de mediciones de las diferentes contribuciones del momento anómalo magnético, se discuten los efectos de polarización de vacío hadrónico así como se discuten brevemente y sin entrar en detalle de las contribuciones de dispersión hadrónica luz por luz, las contribuciones dependientes de la masa de los leptones involucrados y las contribuciones débiles.

2.1. Ecuación de movimiento para un leptón en un campo electromagnético externo

Los leptones cargados en primer lugar interactúan con fotones, y las correcciones radiativas fotónicas pueden ser calculadas en QED, la densidad

Lagrangiana de interacción esta dada por

$$\mathcal{L}_{int}^{QED}(x) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (2.1)$$

el campo del fotón es parte de la dinámica pero tiene una componente externa clásica A_μ^{ext} [32], tal que

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^{ext}. \quad (2.2)$$

La invariancia de norma requiere que

$$A_\mu^{ext} \rightarrow A_\mu^{ext} - \partial_\mu\alpha(x), \quad (2.3)$$

con $\alpha(x)$ un campo clásico escalar, siendo así físicamente invariante. Para la medición del momento anómalo magnético de un leptón se tiene primero que investigar el movimiento de una partícula puntual relativista de carga $Q_l e$ (e la carga del positrón) y de masa m_l en un campo electromagnético externo $A_\mu^{ext}(x)$. La ecuación de movimiento de una partícula de Dirac cargada esta dada por [36]

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + Q_l\frac{e}{c}\gamma^\mu(A_\mu + A_\mu^{ext}(x)) - m_l c)\psi_l(x) = 0, \quad (2.4)$$

$$(\square g^{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1})\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x) = -Q_l e\bar{\psi}_l(x)\gamma^\mu\psi_l(x). \quad (2.5)$$

Se esta interesado en una solución de la ec.(2.4), la cual puede ser escrita como

$$i\hbar\frac{\partial\psi_l}{\partial t} = \left(-c\alpha(i\hbar\nabla - Q_l\frac{e}{c}\mathbf{A}) - Q_l e\Phi + \beta m_l c^2 \right)\psi_l, \quad (2.6)$$

con $\beta = \gamma^0$, $\alpha = \gamma^0\gamma^i$ y $A^{\mu ext} = (\Phi, \mathbf{A})$. Comenzando con la ec.(2.4), en la representación no relativista (pequeñas velocidades), se tiene que separar la fase del campo de Dirac, debida a la energía restante del leptón

$$\psi = \tilde{\psi}e^{-i\frac{m_l c^2}{\hbar}t} \quad \text{con} \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Consecuentemente, la ecuación de Dirac toma la forma

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} = (\mathbf{H} - m_l c^2)\tilde{\psi} \quad (2.8)$$

y describe un sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)\tilde{\varphi} &= c\sigma(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})\chi \\ \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2m_l c^2 \right)\chi &= c\sigma(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})\tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para $c \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\chi \simeq \frac{1}{2mc} \sigma(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \varphi + \mathcal{O}(1/c^2), \quad (2.10)$$

y así

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \varphi \simeq \frac{1}{2m} \left(\sigma(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \right)^2 \varphi. \quad (2.11)$$

Como \mathbf{p} no conmuta con \mathbf{A} , se pueden usar las relaciones

$$(\sigma a)(\sigma b) = ab + i\sigma(a \times b) \quad (2.12)$$

para obtener

$$\left(\sigma(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \right)^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \sigma \cdot \mathbf{B}; \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Esto lleva a la ecuación de Pauli (W. Pauli 1927)

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{H} \varphi = \left(\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma \cdot \mathbf{B} \right) \varphi \quad (2.14)$$

El último término tiene la forma de la energía potencial de un dipolo magnético en un campo externo. A el orden principal $1/c$, el leptón se comporta como una partícula la cual además de tener una carga tiene un campo magnético

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \sigma = \frac{e}{mc} \mathbf{S}; \quad \mathbf{S} = \hbar \mathbf{s} = \hbar \frac{\sigma}{2}, \quad (2.15)$$

con \mathbf{S} el momento angular. Por comparación: el momento angular orbital se lee:

$$\mu_{orb} = \frac{Q}{2M} \mathbf{L} = g_l \frac{Q}{2M} \mathbf{L}; \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla = \hbar \mathbf{l}, \quad (2.16)$$

y así, el momento angular total es

$$\mu_{tot} = \frac{Q}{2M} (g_l \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) = \frac{m_e}{M} \mu_B (g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}), \quad (2.17)$$

donde

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (2.18)$$

es el magnetón de Bohr. Como un resultado para el electrón: $Q = -e$, $M = m_e$, $g_l = -1$ y $g_s = -2$. La expansión en $1/c$ puede ser hecha de manera sistemática y resulta la Hamiltoniana efectiva¹ [37]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' = & \beta \left(mc^2 + \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} \right) + e\Phi - \beta \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \\ & - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \text{div}\mathbf{E} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[(\mathbf{E} \times \mathbf{p} + \frac{i}{2}\text{rot}\mathbf{E}) \right] \\ & + \mathcal{O}(1/c^3). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Los términos adicionales son $\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}$ originado de la cinemática relativista, $\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \text{div}\mathbf{E}$ es el término de Darwin como resultado de las fluctuaciones de los electrones-positrones y $\frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[(\mathbf{E} \times \mathbf{p} + \frac{i}{2}\text{rot}\mathbf{E}) \right]$ es la energía de interacción espín-órbita.

2.2. Momento magnético y factores de forma electromagnéticos

La razón giromagnética del muón esta definida por la razón del momento magnético el cual esta acoplado al campo magnético y el operador de espín en unidades de $\mu_0 = e\hbar/2m_\mu c$ [28]

$$\boldsymbol{\mu} = g_\mu \frac{e\hbar}{2m_\mu c} \mathbf{s}; \quad g_\mu = 2(1 + a_\mu) \quad (2.20)$$

y como indicativo se tiene que la parte a nivel árbol, la teoría de Dirac predice que $g_\mu^{(0)} = 2$, y la parte a orden superior, el momento anómalo magnético

$$a_\mu = \frac{1}{2}(g - 2). \quad (2.21)$$

En general, el momento anómalo magnético de un leptón esta relacionado a la razón giromagnética por

$$a_l = \mu_l/\mu_B - 1 = \frac{1}{2}(g_l - 2), \quad (l = e, \mu, \tau), \quad (2.22)$$

¹Para estudiar el límite no relativista de una partícula de Dirac en un campo externo, el espinor de Dirac debe transformarse al espinor de Pauli de dos componentes, uno tiene que realizar una transformación unitaria apropiada, llamada transformación de Foldy-Wouthuysen, la cual para A_μ arbitrario no puede ser realizada en forma analítica.

2.2 Momento magnético y factores de forma electromagnéticos 33

donde

$$m\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_l c}. \quad (2.23)$$

En QED, la descomposición relativista covariante de los elementos de matriz

$$\langle \mu^-(p_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1) \rangle. \quad (2.24)$$

viene dada por [59] [60]

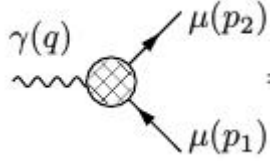


Figura 2.1: Diagrama de Feynman del vértice electromagnético fotón-fermión-fermión γll .

$$\Pi_{\gamma ll}^\mu = \gamma^\mu F_E(q^2) + \left(\gamma^\mu - \frac{2mq^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 F_A(q^2) + i\sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} F_M(q^2) + \sigma^{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2m} \gamma_5 F_D(q^2), \quad (2.25)$$

con F_E el factor de forma de carga eléctrica, con $F_E(0) = 1$, F_A es el factor de forma anapolar o momento anapolar [39], el cual viola P y desaparece en $q^2 = 0$: $F_A(0) = 0$. El factor de forma magnético es F_M , da resultado al momento anómalo magnético; $a_l = F_M(0)$. F_D representa al *momento dipolar eléctrico* (EDM), y viola CP [40].

$$d_l = -\frac{F_D(0)}{2m}. \quad (2.26)$$

Uno puede escribir por lo tanto una Lagrangiana efectiva para el momento dipolar con acoplamientos complejos

$$\mathcal{L}_{eff}^{DM} = -\frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \left(D_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} + D_\mu^* \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \right] F_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

con ψ el campo del muón y

$$\text{Re}D_\mu = a_\mu \frac{e}{2m_\mu}, \quad \text{Im}D_\mu = d_\mu = \frac{\eta_\mu}{2} \frac{e}{2m_\mu}, \quad (2.28)$$

Así la parte imaginaria de $F_M(0)$ corresponde a un momento dipolar eléctrico. Con el avance en la comprensión y el manejo de la renormalización de QED (Tomonaga, Schwinger, Feynman y otros), se hicieron predicciones inequívocas de posibles efectos a ordenes más altos (diagramas a un lazo), y en particular para las principales contribuciones del momento anómalo magnético ² [41].

2.3. Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α

El momento anómalo magnético a_l es justamente un número, el cual corresponde a un término de interacción tensorial efectivo dado por:

$$\delta\mathcal{L}_{eff}^{AMM} = \frac{e_l a_l}{4m_l} \bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \psi(x), \quad (2.29)$$

con un campo magnético externo a bajas energías toma la forma de la energía magnética (hasta un signo)

$$\delta\mathcal{L}_{eff}^{AMM} = -\mathcal{H}_m \simeq -\frac{e_l a_l}{2m_l} \sigma \mathbf{B}. \quad (2.30)$$

Tal término, si esta presente en la Lagrangiana fundamental, estropearía la renormalización de la teoría y contribuye a $F_M(q^2)$ a nivel árbol. Además, este no es un invariante de norma del grupo $SU(2)_L$, porque la invariancia de norma sólo permite acoplamientos mínimos vía derivadas covariantes, es decir, términos vectoriales y vectoriales axiales.

Por otra parte, a_e o a_μ pueden ser calculados con exactitud en la teoría por expansión perturbativa en α de la forma

$$a_l \simeq \sum_{n=1}^N A^{(2n)} (\alpha/\pi)^n. \quad (2.31)$$

²Equivalente a la expansión en lazos, número de lazos cerrados en correspondencia a los diagramas de Feynman.

2.3 Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α 35

La expansión es hecha en términos del número de lazos cerrados que existen y contribuyen en los diagramas de Feynman, que se denotan por N . A dos o mas lazos los resultados dependen de la razón de masas de los leptones. Es indispensable considerar los efectos de interacción fuerte, polarización de vacío hadrónica (vap) y dispersión hadrónica luz por luz (lbl), como también se deben considerar los efectos débiles. Típicamente, los resultados analíticos para términos de orden alto pueden ser expresados en términos de la función zeta de Riemann

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad (2.32)$$

y de la integral polilogarítmica

$$Li_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^1 \frac{\text{In}^{n-2}(t)\text{In}(1-tx)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}. \quad (2.33)$$

Es así como la prueba más rigurosa de QED viene de las mediciones a alta precisión del momento anómalo magnético del electrón y el muón, $a_l = (g_l - 2)/2$, donde, para el caso del electrón, se tiene un valor [42]

$$a_e = (1159652180,73 \pm 0,28) \times 10^{-12}, \quad (2.34)$$

cuyos cálculos han sido hechos hasta $O(\alpha^5)$ tanto para el electrón [44] y muón, que es el caso que nos interesa. A continuación se presenta el cálculo y el resultado de la contribución principal (contribución de Schwinger) de a_l en QED.

2.3.1. Aproximación de Schwinger

La contribución universal de a_l con un solo tipo de línea leptónica puede ser descrito con reglas de Feynman, (ver la Fig.B.1, y Apéndice E) [41]. El momento anómalo magnético debe ser extraído de la siguiente manera

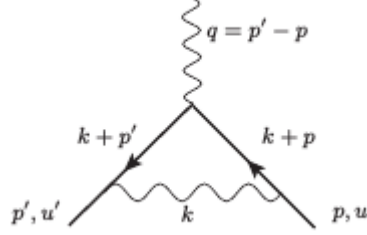


Figura 2.2: Diagrama de Feynman del vértice que contribuye a $F_M(q^2)$.

$$= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}' \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{p}' + m)}{(k + p')^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + \not{p} + m)}{(k + p)^2 - m^2} \gamma^\lambda \left(\frac{-i\eta_{\nu\lambda}}{k^2} \right) u, \quad (2.35)$$

donde $\eta_{\nu\lambda}$ es la métrica de nuestro espacio 4-dimensional, de esta forma, la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$= -e^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Númeroador}}{\text{Denominador}}, \quad (2.36)$$

donde

$$\text{Númeroador} = \bar{u}' \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m) \gamma_\nu u, \quad (2.37)$$

$$\text{Denominador} = \left[(k + p')^2 - m^2 \right] \left[(k + p)^2 - m^2 \right] k^2. \quad (2.38)$$

Debido a que p, u y p', u' son líneas externas, la partícula está en capa de masa, es decir, $p'^2 = p^2 = m^2$, además, con ayuda de una forma particular de la integral de Feynman

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [ax + by + c(1 - x - y)]^{-3}, \quad (2.39)$$

el denominador puede ser re-escrito de la siguiente forma³,

$$\frac{1}{\text{Denominador}} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^2 + 2k \cdot p'x + 2k \cdot py]^{-3} \quad (2.40)$$

³La integral de Feynman primeramente dice que el denominador debe ser escrito como $\text{Denominador}^{-1} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(k^2 + 2k \cdot p')x + (k^2 + 2k \cdot p)y + k^2(1 - x - y)]^{-3}$, una vez simplificando se obtiene el resultado de la ec.(2.40)

2.3 Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α 37

pero

$$[k^2 + 2k \cdot p'x + 2k \cdot py] = (k + xp' + yp)^2 - x^2m^2 - y^2m^2 - 2xyp \cdot p' \quad (2.41)$$

y debido a que

$$2p \cdot p' = -(p' - p)^2 + 2m^2 = -q^2 + 2m^2, \quad (2.42)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} [k^2 + 2k \cdot p'x + 2k \cdot py] & \quad (2.43) \\ & = (k + xp' + yp)^2 - (x^2 + y^2)m^2 + xyq^2 - 2m^2xy, \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable, sea $k' = k + xp' + yp$, se tiene que

$$\frac{1}{\text{Denominador}} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k'^2 - (x+y)^2m^2 + xyq^2]^{-3}. \quad (2.44)$$

Por otro lado, reescribiendo el numerador en términos del cambio de variable y haciendo la asignación $k' \rightarrow k$, se tiene que⁴

$$\begin{aligned} \text{Numerador} = \bar{u}' [& - 2k\gamma^\mu k - 2[(1-y)\not{p} - xp']\gamma^\mu[(1-x)\not{p}' - yp] \\ & - 2m^2\gamma^\mu + 4m[(1-2x)p' + (1-2y)p]\gamma^\mu] u \end{aligned} \quad (2.45)$$

Haciendo $\not{p} = \not{p}' - q$, $\not{p}' = p + q$, para poder usar las ecuaciones de Dirac⁵

$$\bar{u}'\not{p}' = \bar{u}'m, \quad \not{p}u = mu, \quad (2.46)$$

de esta manera, el numerador toma la forma

$$\begin{aligned} \text{Numerador} = \bar{u}' [& - 2k\gamma^\mu k - 2[-(1-y)\not{q} + (1-x-y)m]\gamma^\mu \\ & \times [(1-x)\not{q} + (1-x-y)m] - 2m^2\gamma^\mu \\ & + 4m[(1-2x)p' + (1-2y)p]\gamma^\mu] u. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Note que el denominador es simétrico en x y y , por lo que solo se deberían considerar las partes simétricas en x y y del numerador, así, sea

$$\begin{aligned} T_1 = -2 [& - (1-y)(1-x)\not{q}\gamma^\mu\not{q} + (1-x)(1-x-y)m\gamma^\mu\not{q} \\ & - (1-y)(1-x-y)m\not{q}\gamma^\mu + (1-x-y)^2m^2\gamma^\mu] \end{aligned} \quad (2.48)$$

⁴los términos impares en k son cero.

⁵recordemos que las ecuaciones de Dirac para partículas de espín 1/2 son $\bar{u}'(\not{p}' - m) = 0$ y $(\not{p} - m)u = 0$

donde

$$(1-x)\gamma^\mu \not{q} - (1-y)\not{q}\gamma^\mu \rightarrow (2-x-y)\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]q_\nu = (2-x-y)(i\sigma^{\mu\nu})q_\nu, \quad (2.49)$$

y

$$\not{q}\gamma^\mu \not{q} = -\gamma^\mu q^2 + 2q^\mu \not{q}, \quad \bar{u}' \not{q} u = \bar{u}'(\not{p}' - \not{p})u = 0, \quad (2.50)$$

y así, la parte simétrica del numerador es

$$T_1 = -2[(1-y)(1-x)q^2\gamma^\mu + (1-x-y)(2-x-y)m(i\sigma^{\mu\nu})q_\nu + (1-x-y)^2m^2\gamma^\mu]. \quad (2.51)$$

Por otro lado, la parte independiente de q es aproximadamente

$$(1-2x)p' + (1-2y)p \approx (1-x-y)(p+p'), \quad (2.52)$$

pues

$$\begin{aligned} p' + p - 2xp' - 2yp &= p' + p - xp' + xp - xp' - 2yp - x(p' + p) \\ &+ x(p+p') - y(p+p') + y(p' - p), \end{aligned} \quad (2.53)$$

y se había mencionado anteriormente que estaba en capa de masa. Por lo tanto, el numerador completo simétrico queda:

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= -2\bar{u}' \left[\not{k}\gamma^\mu \not{k} + (1-y)(1-x)q^2\gamma^\mu + (1-x-y) \right. \\ &\times (2-x-y)m(i\sigma^{\mu\nu})q_\nu + (1-x-y)m^2\gamma^\mu \\ &\left. + m^2\gamma^\mu - 2m(1-x-y)(p+p')^\mu \right] u, \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ahora, escribiendo

$$\not{k}\gamma^\mu \not{k} = k_\nu k_\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda = \frac{\eta_{\nu\lambda}}{d} k^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda = -\frac{2}{d} k^2 \gamma^\mu, \quad (2.55)$$

donde d es la dimensión del espacio, utilizando la identidad de Gordon,

$$\bar{u}'(p+p')^\mu u = \bar{u}'p^\mu u + \bar{u}'p'^\mu u = 2m\bar{u}'\gamma^\mu u + i\bar{u}'\sigma^{\mu\nu}uq_\nu, \quad (2.56)$$

el numerador se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= -2\bar{u}' \left[-\frac{2}{d}k^2\gamma^\mu + (1-y)(1-x)q^2\gamma^\mu + m^2\gamma^\mu \right. \\ &+ (1-x-y)^2m^2\gamma^\mu - 4m^2(1-x-y)\gamma^\mu \\ &\left. - (1-x-y)(x+y)m(i\sigma^{\mu\nu})q_\nu \right] u. \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3 Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α 39

Para este calculo en general, debido a que se quieren ver las modificaciones a $F_M(q^2)$, se debe considerar únicamente el término $\sigma^{\mu\nu}$, por lo tanto, la ec.(2.35) puede ser escrita como:

$$= 2 e^3(2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}'[(1-x-y)(x+y)m(i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)]u}{[k^2 - (x+y)^2m^2 + xyq^2]^3} + (\text{términos proporcionales a } \gamma^\mu) \quad (2.58)$$

pero

$$iA = (-ie)\left(\frac{-i}{2m}\right)\bar{u}'\sigma^{\mu\nu}uq_\nu F_M(q^2), \quad (2.59)$$

por lo que se puede identificar

$$F_M(q^2) = 8e^2m^2i \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1-x-y)(x+y)}{[k^2 - (x+y)^2m^2 + xyq^2]^3}. \quad (2.60)$$

Por otra parte, se puede calcular que (ver apéndice D)

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - a^2)^3} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{(k_E^2 - a^2)^3} = \frac{i\Gamma(2)\Gamma(3-2)}{(4\pi)^2\Gamma(2)\Gamma(3)} = \frac{i}{32\pi^2a^2}, \quad (2.61)$$

donde k_E se obtiene haciendo una rotación de Wick (ver apéndice B), así

$$F_M(q^2) = \frac{e^2m^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)(x+y)}{(x+y)^2m^2 - xyq^2}, \quad (2.62)$$

donde, el resultado interesante a determinar es $F_M(0)$, es decir

$$F_M(0) = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)}{(x+y)} \quad (2.63)$$

la cual, para resolver se debe notar que

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)}{(x+y)} &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z}{1-z} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{z}{1-z} = \int_0^1 dz z \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.64)$$

y como la constante de acoplamiento $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, se tiene que

$$F_M(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (2.65)$$

Por lo tanto, el momento magnético es aproximadamente igual a

$$\mu = \frac{e}{m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right), \quad (2.66)$$

donde las correcciones cuánticas o *anomalías* vienen dadas por

$$\frac{1}{2}(g - 2) = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.67)$$

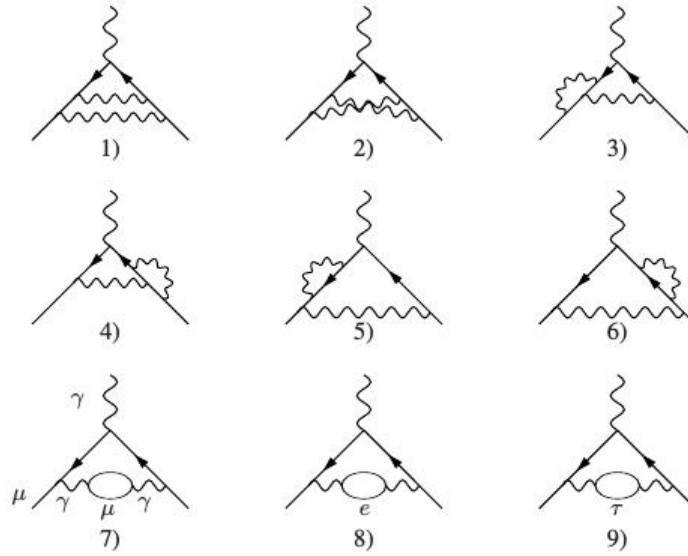


Figura 2.3: Los diagramas del 1 – 7 representan las principales contribuciones a segundo orden para a_l , mientras que el diagrama 8 representa la corrección ligera y el diagrama 9 la corrección pesada dependientes de la masa

Por otra parte, existen contribuciones a ordenes superiores, al aumentar el número de lazos con un solo tipo de línea fermiónica, las contribuciones son proporcionales a potencias de $\alpha/2\pi$. Para las contribuciones a dos lazos, Fig.2.3, a $g - 2$, la contribución principal viene dada de los 6 primeros diagramas, mientras que las restantes son consideradas contribuciones dependientes

2.3 Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α 41

de la masa cuyas contribuciones son de orden $(\alpha/2\pi)^2$. Como una especie de regla se tiene que la contribución a cada orden depende directamente del numero de lazos, es decir, a tres lazos, la contribución es del orden $(\alpha/2\pi)^3$, a cuatro es de orden $(\alpha/2\pi)^4$ y así sucesivamente.

2.3.2. Contribuciones de QED dependientes de la masa de los leptones

Como es demandado por el Modelo Estándar, los fermiones solo interactúan vía fotones u otros bosones de norma de espín cero, las correcciones dependientes de la masa solo pueden ser mostradas a dos lazos vía efectos de polarización de vacío, Fig.2.4, y dispersión luz por luz, Fig.2.5

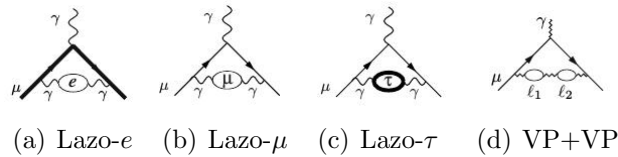


Figura 2.4: Diagramas VP de las principales contribuciones dependientes de la masa en QED a $g - 2$ del muón.

Las correcciones internas para los lazos de e , μ y τ son diferentes para a_e , a_μ y a_τ dado la diferencia entre cada una de sus masas [32], sin embargo, los efectos viene dados por el lazo de polarización de vacío, el orden de contribución es de $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Por otro lado, los diagramas dependientes de la masa vía dispersión luz por luz se muestran en la Fig. 2.5.

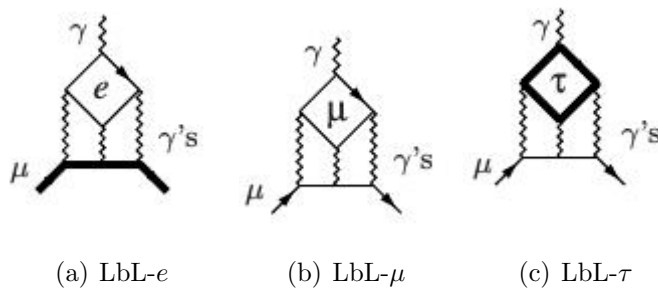


Figura 2.5: Contribuciones denominadas LbL dependientes de la masa.

Existen más diagramas de los diferentes lazos presentados anteriormente, inducidos por las permutaciones de los vértices de los fotones sobre la línea externa del muón. Recordar que los lazos cerrados de fermión con tres fotones desaparecen por el Teorema de Furry. Para el caso de la dispersión luz por luz, la contribución a a_μ viene dada a orden $\mathcal{O}(\alpha^3)$.

2.3.3. Contribuciones débiles

Las contribuciones de interacción débil a a_μ se deben al intercambio de bosones de norma masivos, los cargados W^\pm y el neutro Z , los cuales se mezclan con el fotón vía una rotación por el ángulo de mezcla débil θ_W y que define al parámetro de mezcla débil $\sin^2 \theta_W = 1 - M_W^2/M_Z^2$.

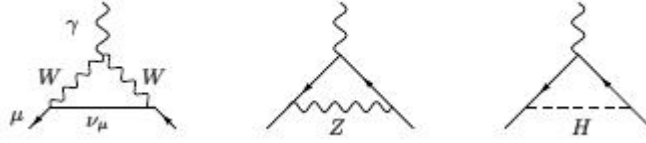


Figura 2.6: Diagramas de Feynman de las principales contribuciones débiles a a_l ; diagramas en la norma física unitaria.

Lo más interesante es lo que ocurre en el primer diagrama de la Fig.2.6, el cual exhibe un vértice triple de norma no abeliano y la correspondiente contribución proporciona una prueba de la estructura de Yang-Mills involucrada. Por supuesto que no es sorprendente que el fotón se acople a al bosón W cargado ya que esta dictaminado por la invariancia de norma electromagnética. Las contribuciones de los bosones de norma, hasta términos insignificantes de orden $\mathcal{O}(m_\mu^2/M_{W,Z}^2)$, están dados por [32] [45]

$$\begin{aligned}
 a_\mu^{EW}(W) &= \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{10}{3}, \\
 a_\mu^{EW}(Z) &= \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)2 - 5}{3}, \\
 a_\mu^{EW}(H) &\simeq \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{4\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_H^2} \text{In} \frac{m_\mu^2}{m_H^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

2.3 Predicción del momento anómalo magnético del electrón (a_e) en QED y determinación de la constante de acoplamiento α 43

Las constantes físicas que se necesitan para la evaluación de las contribuciones débiles, además de la constante de Fermi, son [1]

$$G_F = 1.1663787(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}, \quad (2.69)$$

el parámetro de mezcla débil o ángulo de mezcla

$$\sin^2 \theta_W = 0.23126(5), \quad (2.70)$$

y la masa de los bosones de norma intermediarios

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}, \quad M_W = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV}. \quad (2.71)$$

y

$$M_H = 125.09 \pm 0.24 \text{ GeV}. \quad (2.72)$$

, el resultado reportado para las contribuciones débiles y que contribuye a a_μ es [46] [47]

$$a_\mu^{EW} = 15.4 \pm 0.1 \times 10^{-10}. \quad (2.73)$$

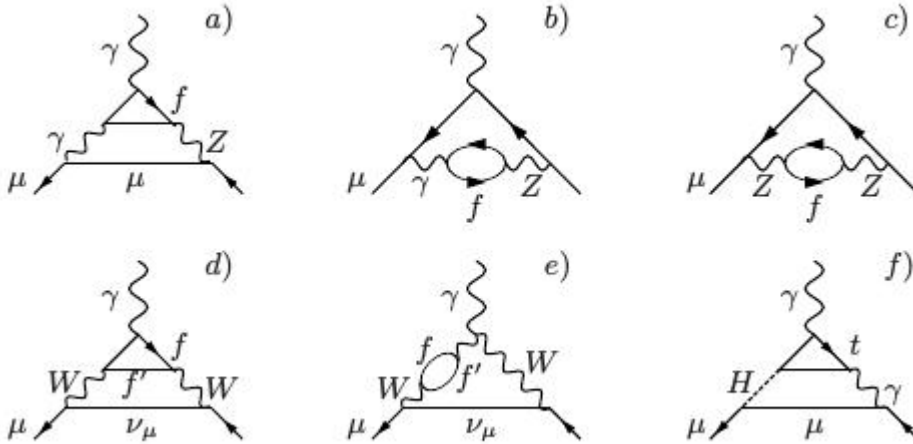


Figura 2.7: Diagramas de Feynman a dos lazos en las correcciones electrodébiles asociado con el intercambio del boson Z y un fermión de sabor, donde el acoplamiento axial viola paridad

Existen también las correcciones electrodébiles a dos o más lazos. Los diagramas que dan como resultado las principales correcciones son los que

incluyen lazos fermiónicos triangulares de la forma VVA asociados con el intercambio del bosón Z , Fig.2.7. Dado que estos diagramas no son de total importancia en este trabajo, no profundizaremos en su análisis ni en los detalles de los mismos, para consultar algunos detalles ver ref.[28] [32].

2.4. Contribuciones hadrónicas

Hay que distinguir tres tipos de contribuciones:

- (i) La más sensible a los efectos hadrónicos es de orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$ dados por la inserción de la polarización de vacío en la línea interna del fotón, ver Fig.2.8(a).
- (ii) Un orden de magnitud más pequeño pero aún relevante son las contribuciones de polarización de vacío a orden $\mathcal{O}(\alpha^3)$, estos son representados por diagramas a los que se les inserta un VP adicional, leptónico o hadrónico.
- (iii) otra contribución importante y quizá la más problemática es la contribución luz por luz, representada en la Fig.2.8(b) y que entra a orden $\mathcal{O}(\alpha^3)$.

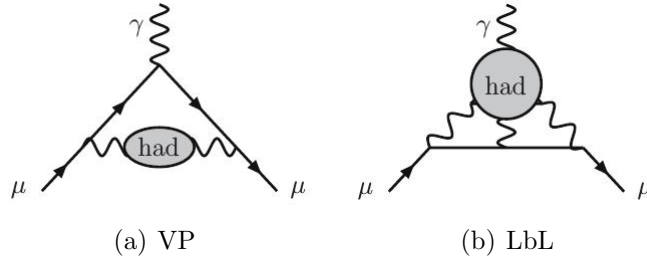


Figura 2.8: Diagramas de las principales contribuciones hadrónicas a $g - 2$ del muón.

Formalmente, las contribuciones hadrónicas son el resultado de remplazar en los lazos a los fermiones por quarks, dado que los quarks interactúan fuertemente vía gluones como lo describe la teoría de norma QCD y el grupo de color $SU(3)_c$. Mientras que en el caso de las interacciones electromagnéticas y débiles son débiles en el sentido de que permiten la expansión perturbativa de las constantes de acoplamiento, las interacciones fuertes son débiles solo a altas energías como lo infiere la propiedad de libertad asintótica, sin embargo, la fuerza de las *constantes* de acoplamiento aumenta drásticamente cuando uno se aproxima a bajas energías, lo que hace imposible estudiar los

lazos de quarks.

Afortunadamente los principales efectos hadrónicos dados por polarización de vacío, pueden ser evaluadas con seguridad explorando la causalidad (analiticidad) y unitariedad (teorema óptico) a través de datos experimentales a bajas energías. La parte imaginaria de la auto-energía del fotón $\Pi'_\gamma(s)$ esta determinada vía teorema óptico por la sección eficaz de la producción de hadrones en la aniquilación electrón-positrón, ver Fig.2.9:

$$\sigma(s)_{e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow had} = \frac{4\pi^2\alpha}{s} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi'_\gamma{}^{had}(s), \quad (2.74)$$

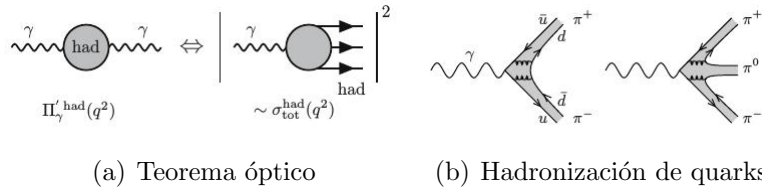


Figura 2.9: Producción de hadrones a bajas energías en la aniquilación e^+e^- .

La contribución hadrónica principal, representado en la Fig.2.8(a), tiene una representación como una integral de dispersión

$$a_\mu = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{\pi} \text{Im}\Pi'_\gamma{}^{had}(s) K(s), \quad (2.75)$$

donde

$$K(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + \frac{s}{m_\mu^2}(1-x)}. \quad (2.76)$$

Como un resultado de la contribución principal hadronica no perturbativa, a_μ^{had} puede ser obtenido en términos de $R_\gamma(s) = \sigma^0(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow had)/\frac{4\pi\alpha^2}{3s}$ vía datos, de esta manera la integral de dispersión queda [48] [49]

$$a_\mu^{had} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi}\right) \left(\int_{m_{\pi^0}^2}^{E_{cut}^2} ds \frac{R_\gamma^{dat}(s) \bar{K}(s)}{s^2} + \int_{E_{cut}^2}^\infty ds \frac{R_\gamma^{pQCD}(s) \bar{K}(s)}{s^2} \right), \quad (2.77)$$

donde se a rescaldo el kernel $\bar{K}(s) = 3s/m_\mu^2 K(s)$. El factor $1/s$ establece una implicación a bajas energías dado que la resonancia $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-$ es dominante

en la integral de dispersión. La evaluación más reciente para el orden principal de a_μ^{had} es [47]:

$$a_\mu^{hadLO} = 692.6 \pm 3.3 \times 10^{-10} \quad (2.78)$$

Las diferencias en los errores vienen directamente del manejo y utilización de los conceptos de la teoría.

Es mucho más problemático el caso para las correcciones hadrónicas relacionadas con la dispersión luz por luz, dado que en este trabajo no son de relevancia, se sugiere ver la ref.[50]. Así, el valor de la estimación de la contribución es de [52]

$$a_\mu^{hadLbL} = 10.5 \pm 2.6 \times 10^{-10} \quad (2.79)$$

2.5. Momento anómalo magnético del muón

Las mediciones experimentales en BNL por la colaboración E821 [51] y las predicciones del Modelo Estándar estan dadas por [47]:

$$\begin{aligned} a_\mu^{exp} &= 11659209.1 \pm 5.4 \pm 3.3 \times 10^{-10}, & (2.80) \\ a_\mu^{SM}(e^+e^-) &= 11659180.3 \pm 0.1_{QED+EW} \pm 4.2_{Had} \pm 2.6_{LbL} \times 10^{-10}, \\ a_\mu^{SM}(\tau) &= 11659195.6 \pm 5.8_{Had} \pm 3.5_{LbL} \pm 0.1_{QED+EW} \times 10^{-10} \end{aligned}$$

La discrepancia entre los valores teóricos y experimentales es

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM} = 288(63)(49) \times 10^{-11}. \quad (2.81)$$

$$a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM}(\tau) = (7.4 \pm 9.2) \times 10^{-10}. \quad (2.82)$$

El momento anómalo magnético del muón recibe contribuciones de todas partes del Modelo estándar, y posiblemente de nueva física, es decir [53]; $a_\mu = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{had} + a_\mu^{NP?}$. Siguiendo por muchos años los enfoques de Kinoshita y colaboradores, las contribuciones de QED, es decir, todas las contribuciones que incluyen fotones y leptones solamente son conocidas hasta cinco lazos [54][55];

$$a_\mu^{QED} = 116584718.951(0.009)(0.019)(0.007)(0.077) \times 10^{-11}$$

donde las incertidumbres viene de las masas de los quarks.

Las contribuciones de las interacciones débiles son conocidas tomando en cuenta hasta dos lazos [56]. Con la masa del Higgs conocida, su valor estimado es $a_\mu^{EW} = (153.6 \pm 1.0) \times 10^{-11}$ [46]. Mientras que las contribuciones débiles son negligentes comparadas con las contribuciones de QED, con la precisión actual de a_μ^{exp} , éste tiene sensibilidad a este sector del Modelo Estándar. Su incertidumbre es grande comparada con la de a_μ^{QED} , pero pequeña comparada con la incertidumbre hadrónica.

Las contribuciones hadrónicas están divididas en la polarización del vacío hadrónico (HVP⁶) y la llamada contribución de dispersión hadrónica luz por luz (HLbL)⁷. Ambas clases son dominadas por contribuciones de espectros a bajas energías de resonancias hadrónicas y no pueden ser calculadas con QCD perturbativa (pQCD). La contribución de polarización de vacío empieza en orden α^2 con una sola inserción de HVP a primer orden a un lazo en los diagramas de QED, el cual ha sido estimado usando relaciones de dispersión y datos de secciones eficaces experimentales para $e^+e^- \rightarrow hadrones$, a segundo orden (NLO⁸) y recientemente a tercer orden (NNLO⁹). Por otra parte, las contribuciones HLbL entran a orden α^3 , cuyos valores son: $a_\mu^{hadLbL} = 10.5 \pm 2.6 \times 10^{-10}$ [52], $a_\mu^{hadLO} = 692.6 \pm 3.3 \times 10^{-10}$ [47]¹⁰, $a_\mu^{hadNLO} = -9.87 \pm 0.09 \times 10^{-10}$ [57], $a_\mu^{hadNNLO} = 1.24 \pm 0.01 \times 10^{-10}$ [57], donde el resultado obtenido, al sumar las diferentes contribuciones es [47]¹¹ $a_\mu^{SM} = 11659181.7 \pm 4.2 \times 10^{-10}$.

La discrepancia en $g - 2$ ha inspirado a muchos intentos de formular modelos de Nueva Física (NP), los cuales resuelvan $g - 2$ y otros rompecabezas dentro del Modelo estándar, por ejemplo, extensiones supersimétricas (SUSY), extensiones del sector de Higgs que por sí sólo puede resolver la discrepancia [58]. Muchos otros escenarios han sido estudiados dentro del Modelo Estándar, sin embargo hasta el momento la discrepancia de a_μ entre

⁶Hadronic Vacuum Polarisation por sus siglas en inglés

⁷Hadronic light by lighth por sus siglas en inglés y donde algunos resultados están dados en la ref.[50], donde se explican algunas de las principales características

⁸Next-to leading order, NLO por sus siglas en inglés

⁹Next-to-next-to leading order, NNLO por sus siglas en inglés.

¹⁰Este resultado es tomado de M. Davier. Nuclear and Particle Physics Proceedings 287–288 (2017) 70–75, cuyo resultado teórico final para a_μ se ve alterado solamente un poco.

¹¹Este resultado es diferente al tomado de PDG dado el valor teórico de M. Davier para la contribución hadrónica al orden principal, $a_\mu^{hadLO} = 692.6 \pm 3.3 \times 10^{-10}$, ver ref.[47].

los resultados teóricos y experimentales no a sido resulta, este sigue siendo un problema abierto en física de partículas elementales.

2.6. Funciones espectrales del τ vs. datos de aniquilación e^+e^-

En 1997 las funciones espectrales del τ [61] llegaron a ser tan precisas que en la medida en que el grupo de sabor $SU(2)_f$ en el sector hadrónico ligero es una buena simetría, permitiendo obtener la parte isovectorial de la sección eficaz de e^+e^- . La idea de usar los datos espectrales del τ fue para mejorar la evaluación de las contribuciones hadrónicas a_μ^{had} realizada por Alamany, Davier y Hocker [62]. En principio, la parte isovectorial $I = 1$ de la dispersión $e^+e^- \rightarrow had$ puede ser obtenida en una manera alternativa usando las precisas funciones espectrales vectoriales de los decaimientos hadrónicos del leptón tau τ^- , $\tau \rightarrow \nu_\tau + had$ los cuales son relacionados por una rotación de isoespín [62].

La parte isovectorial de $\sigma(e^+e^- \rightarrow hadrones)$ puede ser calculada por rotación de isoespín, como $\pi^0\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ bajo la llamada conservación de la corriente vectorial (CVC) la cuál debe ser exactamente conservada. En lo que sigue solamente se considerará explícitamente el canal dominante a 2π . La relación que se busca debería ser encontrada por comparación de los diagramas relevantes a ordenes bajos, Fig.2.10, que para el caso e^+e^- se traduce en

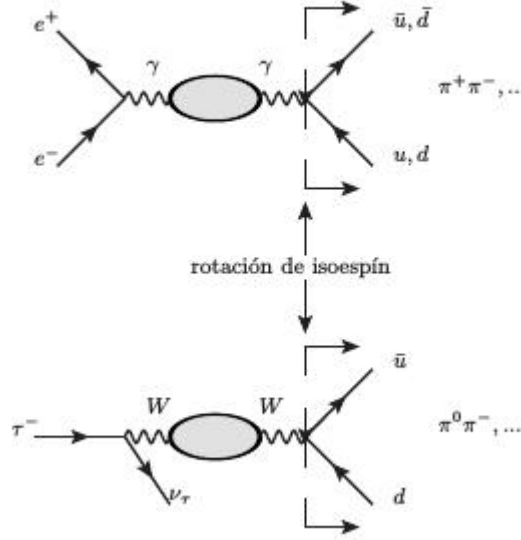


Figura 2.10: Decaimientos de τ vs. aniquilación e^+e^- : los elementos de matriz hadrónicos involucrados $\langle \text{out} \pi^+ \pi^- | j_{\mu}^{I=1}(0) | 0 \rangle$ y $\langle \text{out} \pi^0 \pi^- | J_{V_{\mu}}^-(0) | 0 \rangle$ están relacionados por isoespín.

$$\sigma_{\pi\pi}^0 \equiv \sigma_0(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{t} v_0(t), \quad (2.83)$$

donde la función espectral $v_0(t)$ está directamente relacionada con el factor de forma electromagnético del pión F_{π}^0 mediante la siguiente relación

$$v_0(t) = \frac{\beta_{\pi^+\pi^-}^3}{12} |F_{\pi}^0|^2, \quad (2.84)$$

donde $\beta_{\pi^+\pi^-} = \lambda^{1/2}(t, m_{\pi^+}, m_{\pi^-})/t$. Para el caso del τ en

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}) &= \frac{6\pi |V_{ud}|^2 S_{EW}}{m_{\tau}^2} \frac{B(\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} e^- \bar{\nu}_e)}{B(\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} \pi^- \pi^0)} \\ &\times \left(1 - \frac{t}{m_{\tau}^2}\right) \left(1 + \frac{2t}{m_{\tau}^2}\right) v_-(t), \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde $|V_{ud}| = 0,9752 \pm 0,0007$ [1] denota un elemento de la matriz de mezcla débil de CKM y S_{EW} cuenta para las correcciones radiativas electrodébiles [63] [64]. Las funciones espectrales son obtenidas de las correspondientes

distribuciones invariantes de masa. Los $B(i)$ son los branching ratios. La simetría (CVC) en $SU(2)$ podría implicar

$$v_-(t) = v_0(t). \quad (2.86)$$

Las funciones espectrales $v_i(t)$ están relacionados por el factor de forma del pión $F_\pi^i(t)$ por:

$$v_i(s) = \frac{\beta_i^3(t)}{12\pi} |F_\pi^i(t)|^2; \quad (i = 0, -) \quad (2.87)$$

donde los $\beta_i(t)$ es la velocidad del pión. Las diferencias en el espacio fase de los pares de piones están dados en el factor relativo $\beta_{\pi^-\pi^0}^3/\beta_{\pi^-\pi^+}^3$.

Antes de precisar la comparación vía la ec.(2.86) es posible tener en cuenta todos los efectos de rompimiento de isoespín, los detalles son presentados en las ref.[63][64] para el canal relevante $\pi\pi$. La versión más correcta de la ec.(2.86)[63] puede ser escrita de la forma:

$$\sigma_0^{\pi\pi} = \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \right] \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \times \frac{R_{IB}(t)}{S_{EW}}, \quad (2.88)$$

con

$$K_\Gamma(t) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^2}{384\pi^3} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{t}{m_\tau^2}\right); \quad K_\sigma(t) = \frac{\pi\alpha^2}{3t}, \quad (2.89)$$

y la corrección de rompimiento de isoespín¹².

$$R_{IB}(t) = \frac{1}{G_{EM}(t)} \frac{\beta_{\pi^-\pi^+}^3}{\beta_{\pi^-\pi^0}^3} \left| \frac{F_V(t)}{f_+(s)} \right|^2, \quad (2.90)$$

la cual incluye las correcciones en QED ($G_{EM}(t)$) debidas a la inclusión de radiación de fotones suaves y duros (integradas sobre el espacio fase) para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \nu^- \pi^- \pi^0$. $\beta_{\pi^-\pi^+}^3/\beta_{\pi^-\pi^0}^3$ es la corrección del espacio fase para la diferencia de masas $\pi^\pm - \pi^0$, $F_V(s) = F_\pi^0(t)$ es el factor de forma de la corriente vectorial neutra (NC) y $f_+(t) = F_\pi^-$ es el factor de forma de la corriente vectorial cargada (CC).

¹²En la ref.[63]

Capítulo 3

Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

La razón principal del estudio de estos procesos se debe a que el decaimiento $V^+ \rightarrow P^+P^0$ es el modo dominante de desintegración del mesón vectorial (fracción de decaimiento $\approx 100\%$) [1]. El análisis para las amplitudes y probabilidades de transición de los decaimientos satisfacen una serie de propiedades relacionadas con la estructura de la radiación electromagnética en los casos clásicos y cuánticos, algunas propiedades están expresadas en teoremas, comúnmente llamados teoremas de Low [7] y Burnett y Kroll [8] o de radiación a bajas energías. Estos son derivados de la teoría cuántica de campos de las partículas que intervienen en un proceso emitiendo un fotón, tienen su análogo clásico en el hecho de que a grandes distancias (energías pequeñas de emisión del fotón, fotones suaves) la estructura de la radiación electromagnética está determinada únicamente por los multipolos de orden más bajo¹.

3.1. Modelo de Dominancia Vectorial

Uno de los aspectos incluidos en el estudio de estados hadrónicos es la interacción del fotón y la materia hadrónica [65]. Esta interacción es descrita por el Modelo de Dominancia Vectorial, VMD², teoría propuesta por Sakurai [66], basada en la teoría de Yang-Mills [67] dentro del contexto de VMD asu-

¹Carga eléctrica y momento dipolar magnético.

²Vector Model Dominance, VMD, por sus siglas en inglés.

52 Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

miendo que las componentes hadrónicas de la polarización del vacío consisten de mesones vectoriales neutros (ver fig.3.1), el cual es sólo una aproximación cuya región de energías es válida para valores cercanos a las masas de los mesones vectoriales neutros [68][69].

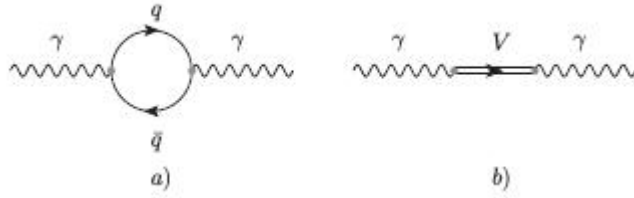


Figura 3.1: a) Contribución a un lazo del propagador del fotón, conocido como polarización del vacío y b) representa la contribución hadrónica del fotón al propagador del mismo.

Para describir la interacción entre fotones y mesones vectoriales neutros, Kroll, Lee y Zumino [70], incorporan VMD dentro del contexto de QFT. El término relevante de la densidad Lagrangiana asociado con la interacción esta dado por:

$$\mathcal{L}_{\gamma V} = -\frac{e}{2G_V} V_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

con $V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ y V_μ el vector de polarización del mesón vectorial neutro, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, con A^μ el campo del fotón, G_V es sólo una constante de acoplamiento entre el fotón y el mesón. Se asegura que el fotón no tiene masa, la densidad Lagrangiana satisface la invariancia de norma [68] y esta asociada con la implementación de propagadores no lineales [71]. Otra densidad Lagrangiana relevante, que forma parte de la segunda representación de VMD esta dada por:

$$\mathcal{L}'_{\gamma V} = \frac{e' M_v^2}{G_V} V'_\mu A'^\mu. \quad (3.2)$$

En contraste a la densidad Lagrangiana anterior, está introduce un término de masa imaginaria al fotón [68] [66] al sumar todas las transiciones vectoriales fotón-vector a todos los ordenes. Por otra parte, no satisface la invariancia de norma electromagnética.

En esta descripción, se introduce la corriente electromagnética J_μ^{em} como

$$J_\mu^{em} = j_\mu^3 + \frac{1}{2}j_\mu^Y, \quad (3.3)$$

donde j_μ^3 es la contribución debida al campo isovector y $\frac{1}{2}j_\mu^Y$ es la contribución debida al campo isoescalar [72].

Hasta el momento sólo se ha hecho una revisión muy breve de las características principales del modelo VMD, esquema que es necesario para los estudios que se presentan dentro de este trabajo.

3.2. Proceso no radiativo

El decaimiento radiativo de un mesón vectorial cargado (V^+) en dos mesones pseudoescalares (P^+ y P^0), denotado genéricamente por $V^+ \rightarrow P^+P^0\gamma$. Como caso particular, se ha tomado el proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p_-)\pi^0(p_0)\gamma(k)$, donde d , p_- , p_0 y k representan los cuadrimomentos respectivos a cada una de las partículas y además, los cuadvectores de polarización para ρ^- y γ son denotados por η^μ y ϵ^μ respectivamente. Por otra parte, la conservación de energía implica que $d = p_- + p_0 + k$ y que los cuadvectores de polarización satisfagan la condición $k \cdot \epsilon = d \cdot \eta = 0$. En particular, los resultados encontrados son aplicados a las observables asociadas a los decaimientos radiativos $\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0\gamma, K^{*+} \rightarrow K^+\pi^0\gamma$ y $K^{*+} \rightarrow K^0\pi^+\gamma$ ³. Algunos resultados más generales son presentados en la ref. [73].

En primer lugar, se analiza el proceso no radiativo $\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0$, el cual en principio está descrito por el siguiente diagrama de Feynman, Fig.3.2

³El otro único proceso de este tipo, cinemáticamente permitido, es $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+\gamma$ con un fotón de energía máxima $E_\gamma \approx 5MeV$, el cual será dominado por bremsstrahlung

54 Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

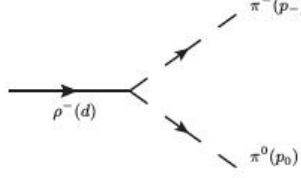


Figura 3.2: Diagramas de Feynman para el proceso no radiativo $\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0$.

y cuya amplitud, en términos de reglas de Feynman, puede ser escrita como

$$\mathcal{M} = ig\eta^\mu(p_- - p_0)_\mu \quad \text{y} \quad \mathcal{M}^\dagger = -ig\eta^{*\mu}(p_- - p_0)_\mu, \quad (3.4)$$

donde η^μ denota al vector de polarización de la partícula ρ^- .

Para calcular la probabilidad de decaimiento no polarizada, se promedia el modulo al cuadrado de la amplitud sobre los estados de espín de la partícula inicial y se suma sobre las polarizaciones de las partículas en el estado final, es decir:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2s_V + 1} \sum_{pol} |\mathcal{M}|^2. \quad (3.5)$$

y usando el hecho de que la suma de polarizaciones esta dada por:

$$\sum_{pol} \eta^\mu \eta^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2}. \quad (3.6)$$

donde q es el cuadrimomento de la partícula y M su masa, la amplitud al cuadrado es:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{3} g^2 (p_- - p_0)_\alpha (p_- - p_0)_\beta \left(-g^{\alpha\beta} + \frac{d^\alpha d^\beta}{M_\rho^2} \right), \quad (3.7)$$

con M_ρ la masa de ρ^- , así, por conservación de cuadrimomento, se tiene que $d^2 = M_\rho^2 = (p_- + p_0)^2 = m_-^2 + 2p_- \cdot p_0 + m_0^2$, donde m_- y m_0 son las masas de los piones π^- y π^0 respectivamente.

Es fácil ver que la amplitud al cuadrado, sumada sobre polarizaciones puede ser escrita como:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{3} g^2 \lambda \left[1, \frac{m_-^2}{M_\rho^2}, \frac{m_0^2}{M_\rho^2} \right] M_\rho^2, \quad (3.8)$$

con $\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

Por otro lado, la diferencial del ancho de decaimiento una partícula de masa M decayendo a dos partículas 1 y 2 [1], tiene la forma:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{|p_1|}{M^2} d\Omega, \quad (3.9)$$

donde $d\Omega = d\phi_1 d\cos\theta_1 = 4\pi$ es el ángulo sólido para la partícula 1, y $|p_1| = \frac{M}{2} \lambda \left[1, \frac{m^2}{M^2}, \frac{m_0^2}{M^2} \right]^{1/2} = \frac{M}{2} \lambda^{1/2}$, de esta manera, el ancho de decaimiento queda expresado como:

$$\Gamma(\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = \frac{g^2 M_\rho \lambda^{3/2}}{48\pi}. \quad (3.10)$$

De esta expresión es fácil resolver para g

$$g = g_{\rho\pi\pi} = \sqrt{\frac{48\pi\Gamma(\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0)}{M_\rho \lambda^{3/2}}}, \quad (3.11)$$

y cuyos valores para cada una de las variables involucradas con bien conocidas [1].

3.3. Proceso Radiativo

Debido a que el acoplamiento $V^+ P^+ P^0$ es de tipo derivativo, existen tres contribuciones a $V^+ \rightarrow P^+ P^0 \gamma$. Esto mismo ocurre para nuestro proceso en particular $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p) \pi^0(p') \gamma(k)$, cuyos diagramas de Feynman son dados en la Fig.3.3.

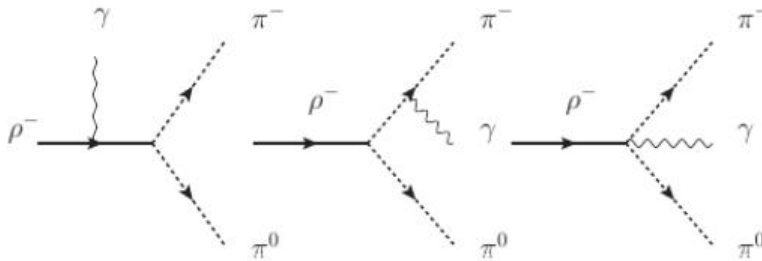


Figura 3.3: Diagramas de Feynman para el proceso radiativo $\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \gamma$.

56 Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

Siguiendo el procedimiento usual, se calcula la amplitud correspondiente a los dos primeros diagramas y se fijará la contribución del tercer diagrama imponiendo la invariancia de norma electromagnética a la amplitud total. De esta manera, se obtiene una amplitud que además de ser invariante de norma es independiente del modelo que se usa para describir el proceso $\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0\gamma$ [7].

Antes de empezar, uno debe considerar el estudio del acoplamiento $\rho^-\rho^-\gamma$ presente en el primer diagrama de la Fig. 3.3 el cual, por analogía es de la forma $VV\gamma$ que se describe a continuación.

3.3.1. El vértice electromagnético $VV\gamma$

El estudio detallado del vértice electromagnético $VV\gamma$ no es presentado dentro de esta tesis, solo se han tomado resultados importantes obtenidos anteriormente en las ref. [74] [75] [76] dentro del contexto VDM. Sin embargo, la analogía directa puede hacerse desde el contexto del Modelo Estándar, el cual nos dice que tomando la densidad Lagrangiana asociada a los términos cinéticos en la interacción electrodébil mostrados en la sec.1.3, ec.(1.20) es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{W}^{\mu\nu} \cdot \vec{W}_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

involucra dos posibles acoplamientos: γW^+W^- y ZW^+W^- mostrados en la Fig.3.4. El vértice electromagnético que involucra a tres partículas vectoriales proviene de términos cúbicos de la ec.(3.12), para identificar esos términos, hay que reescribirlos en términos de los eigenestados de masa, es decir, el término cinético esta dado por:

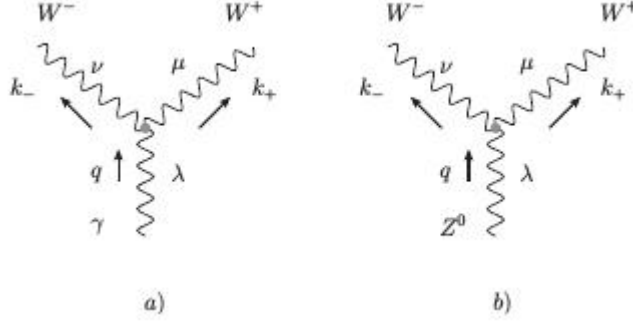


Figura 3.4: Diagramas de Feynman de los vértices a) γWW y b) ZWW , con la convención de momentos e índices asociados.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 &\rightarrow -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)g\epsilon^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c} \\
&= ig[(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)W^{\mu-}W^{\nu 3} - (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)W^{\mu+}W^{\nu 3}] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3)(W^{\mu+}W^{\nu-} - W^{\mu-}W^{\nu+}). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

con $a, b, c = 1, 2, 3$. Al insertar $W_\mu^3 = Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W$ y $g = \frac{e}{\sin \theta_W}$ en la expresión anterior y simplificando es fácil obtener las expresiones para los vértices:

$$\gamma W^+ W^- \Rightarrow ie[g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\nu\lambda}(-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu}(q + k_+)^\nu], \quad (3.14)$$

$$Z W^+ W^- \Rightarrow ig \cos \theta_W [g^{\mu\nu}(k_- - k_+)^\lambda + g^{\nu\lambda}(-q - k_-)^\mu + g^{\lambda\mu}(q + k_+)^\nu], \quad (3.15)$$

cuyas convenciones en los índices y momentos se muestran en la Fig.3.4. Para el caso del vértice dado en la ec.(3.14), la conservación de momento implica que $q = k_+ + k_-$, así, $k_+ = q - k_-$ y $k_- = q - k_+$, sustituyendo en la ec.(3.14), se tiene que la expresión para el vértice toma la forma:

$$\Gamma_0^{\lambda\mu\nu} = ie[g^{\mu\nu}(k_- + k_+)^\lambda + 2(q^\nu g^{\lambda\mu} - q^\mu g^{\lambda\nu}) + k_+^\mu g^{\lambda\nu} - k_-^\nu g^{\lambda\mu}], \quad (3.16)$$

donde el subíndice 0 indica que se trata de la función vértice a nivel árbol, dado que la estructura del vértice es mucho más general [75] [76], sin embargo gracias a las simetrías discretas [74] [75] [76] la estructura toma la forma dada en la ec.(3.16)⁴. El orden de los términos en la ec.(3.16) está asociado a la

⁴El estudio del vértice $VV\gamma$ ha sido estudiada a detalle a nivel árbol y a primer orden (a un lazo) en las ref. [74] [75] [76]

58 Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

carga eléctrica, el momento dipolar magnético y al momento cuadrupolar eléctrico respectivamente.

3.3.2. Independencia de Modelo. Teorema de Low e invariancia de norma

El estudio adecuado de procesos radiativos se realiza en base a dos teoremas fundamentales (para procesos radiativos $i \rightarrow f + \gamma$): el teorema de Low [7] y el teorema de Burnett y Kroll [8].

El Teorema de Low se puede enunciar de la siguiente manera: para cualquier proceso radiativo $i \rightarrow f + \gamma$, la amplitud puede ser expandida en potencias de la energía del fotón k , siendo el primer término de la expansión de orden k^{-1} , el segundo orden k^0 y así sucesivamente. Los dos primeros términos de esta expansión están determinados de manera exacta por la amplitud del proceso no radiativo $i \rightarrow f$. Específicamente, la expansión en potencias del fotón es

$$\mathcal{M}(i \rightarrow f + \gamma) = \frac{\alpha_{-1}}{k} + \alpha_0 k^0 + \alpha_1 k^1 + \alpha_2 k^2 + \dots \quad (3.17)$$

Los valores de α_{-1} y α_0 son únicos una vez que se conoce la amplitud del proceso no radiativo y se exige que cumpla la invariancia de norma electromagnética. En este sentido se dice que los términos α_{-1} y α_0 son *independientes del modelo* que describe el proceso radiativo. Las contribuciones de orden k^{-1} y k^0 se deben exclusivamente a la emisión del fotón desde las partículas externas cargadas, éstas contribuciones definen la llamada amplitud de Low [7]

$$\mathcal{M}_{Low} = \frac{\alpha_{-1}}{k} + \alpha_0 k^0. \quad (3.18)$$

Los términos de orden superior a k^0 tienen su origen en la emisión del fotón desde los estados inmediatos y por lo tanto se dicen que son *dependientes del modelo* que se emplea para describir el proceso.

Tomando en cuenta lo anterior, el proceso radiativo $\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0\gamma$, considerando las implicaciones del teorema de Low, el vértice electromagnético dado en la ec.(3.16) y las respectivas reglas de Feynman, las correspondientes amplitudes de los dos primeros diagramas de izquierda a derecha en la

Fig.3.3, pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & -ieg(p-p')_\alpha \left(\frac{-g_{\rho\alpha} + \frac{d'_\rho d'_\alpha}{M^2}}{d' - M^2} \right) \\ & \times [(d+d')_\mu g_{\rho\nu} + 2(k_\nu g_{\mu\rho} - k_\rho g_{\mu\nu})] \eta_\mu \epsilon_\nu, \end{aligned} \quad (3.19)$$

y

$$\mathcal{M}_2 = -2ieg \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} p' \cdot \eta, \quad (3.20)$$

donde g es el acoplamiento en $V^+ P^+ P^0$ cuyo valor puede determinarse del decaimiento $\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0$; el primer factor en la ec.(3.19) y ec.(3.20) regularmente se asocian a las cargas eléctricas de ρ^- y π^- en unidades de e , mientras que el segundo factor en la ec.(3.20) se asocia al momento dipolar magnético de ρ^- en unidades de $e/2M$. Por otra parte, en la ec.(3.19), $d' = d - k = p + p'$. En la amplitud \mathcal{M}_1 no se ha incluido la contribución al momento cuadrupolar del ρ^- dado que términos de este tipo contribuyen a ordenes más altos en k los cuales pueden demostrarse que son dependientes del modelo [7] y para este no es necesario tomarlos en consideración.

La amplitud \mathcal{M}_1 se puede dividir en una contribución de tipo eléctrica, \mathcal{M}_{1e} , y una tipo magnética, $\mathcal{M}_{1\mu}$. La amplitud total del proceso puede ser escrita como:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{1e} + \mathcal{M}_{1\mu} + \mathcal{M}_{2e} + \mathcal{M}_3 \quad (3.21)$$

donde \mathcal{M}_3 corresponde a la amplitud del diagrama 3 de izquierda a derecha. El subíndice e en \mathcal{M}_2 se debe a que el segundo diagrama contiene solamente radiación debida a la carga eléctrica de π^- .

Imponiendo la condición de invariancia de norma sobre la amplitud total, es decir

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0, \quad (3.22)$$

se obtiene que la contribución del tercer diagrama es:

$$\mathcal{M}_3 = ieg \left(-1 + \frac{m^2 - m'^2}{M^2} \right) \eta \cdot \epsilon. \quad (3.23)$$

A esta amplitud se le llama *término de contacto*, debido a que corresponde a la interacción de contacto entre cuatro campos. Sin embargo, para este caso

60 Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

se considera la simetría de isoespín, es decir $m^2 - m'^2 = 0$, de esta manera la amplitud para el diagrama tres queda dado por:

$$\mathcal{M}_3 = -ieg\eta \cdot \epsilon. \quad (3.24)$$

Finalmente, la amplitud total invariante de norma electromagnética viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -ieg(p-p')_\alpha \left(\frac{-g_{\rho\alpha} + \frac{d'_\rho d'_\alpha}{M^2}}{d' - M^2} \right) [(d+d')_\mu g_{\rho\nu} + 2(k_\nu g_{\mu\rho} - k_\rho g_{\mu\nu})] \eta_\mu \epsilon_\nu \\ & , \quad -2ieg \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} p' \cdot \eta - ieg\eta \cdot \epsilon. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La ecuación anterior puede ser rescrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & ieg(p-p') \cdot \eta \left(\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{d \cdot \epsilon}{d \cdot k} \right) - iegk \cdot \eta \left(2 \frac{p \cdot k}{d \cdot k} \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{d \cdot \epsilon}{d \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right) \\ & - ieg\epsilon \cdot \eta \left(2 - \frac{2p \cdot k}{d \cdot k} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

la cual es de la forma $\mathcal{M} = \alpha_{-1}k^{-1} + \alpha_0k^0$, en acuerdo con el teorema de Low [7]. Por tanto, la ecuación anterior para la amplitud es conocida como amplitud de Low. Es interesante notar que los términos de orden k^{-1} provienen exclusivamente de la emisión del fotón por las cargas eléctricas de ρ^- y π^- , mientras que los términos de orden k^0 están asociados a la radiación por el momento magnético de ρ^- y la interacción de contacto.

3.3.3. Interferencias radiativas. Teorema de Burnett-Kroll

El teorema de Burnett y Kroll [8] es una extensión inmediata del teorema de Low y que se piensa establece que para cualquier proceso radiativo $i \rightarrow f + \gamma$ la probabilidad de decaimiento parcialmente polarizada se puede escribir en potencias de energía del fotón como [77] [78]:

$$\sum_{spin\ i, f} |\mathcal{M}(i \rightarrow f + \gamma)|^2 = \frac{\beta_{-2}}{k^2} + \beta_0k^0 + \beta_1k + \beta_2k^2 + \dots \quad (3.27)$$

donde se observa que la expresión no contienen términos de orden k^{-1} , el cual resultaría de la interferencia de los términos de orden k^{-1} y k^0 de la

amplitud de Low. Este resultado fue demostrado explícitamente por los autores de la ref.[8], en el artículo original, los autores muestran que el término de orden k^{-1} no aparece en la interferencia entre los términos de carga y electromagnéticos [8] solamente. Sin embargo, para este resultado se muestra que la hipótesis antes mencionada para la probabilidad de decaimiento es válida.

La probabilidad de transición correspondiente a la amplitud de Low, sumada sobre polarizaciones del mesón ρ^- esta dada por [74]

$$\sum_{pol\ \eta} |\mathcal{M}|^2 = (eg)^2 \left| \frac{p \cdot \epsilon^*}{p \cdot k} - \frac{d \cdot \epsilon^*}{d \cdot k} \right|^2 \left(\lambda \left(1, \frac{m^2}{M^2}, \frac{m'^2}{M^2} \right) M^2 \right) - (eg)^2 \epsilon^* \cdot \epsilon \left(2 - \frac{2p \cdot k}{d \cdot k} \right), \quad (3.28)$$

donde $\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

La probabilidad de transición de la ecuación anterior satisface el teorema de Burnet y Kroll [8] [73], el cual en principio establece que no deben de existir términos de $O(k^{-1})$ en la probabilidad de transición. La razón para tal ausencia es de tipo físico y se puede comprender si se hace una analogía con la radiación multipolar en electrodinámica clásica, esto es, la razón de emisión de radiación por diferentes multipolos no presenta interferencia.

Con esta idea en mente, es momento de llegar al problema principal, es así, que el capítulo siguiente se hace una descripción del modelo independiente del decaimiento radiativo del leptón tau a dos piones, estudiando los efectos provocados por las correcciones electromagnéticas y su contribución a a_μ

62 Proceso $\rho^-(d) \rightarrow \pi^-(p')\pi^0(p)\gamma(k)$ y los teoremas de bajas energías

Capítulo 4

Contribuciones hadrónicas y correcciones radiativas a $g - 2$ del muón

Es bien conocido que, en el límite de la simetría de isospín, la hipótesis de la corriente vectorial conservada (CVC) relaciona las funciones espectrales del decaimiento $\tau_{2\pi}$ y de la aniquilación $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ la cuál se obtiene a partir de los datos de la sección eficaz. De esta manera, las mediciones del decaimiento $\tau_{2\pi}$ y la aniquilación $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ ofrecen un panorama para probar la hipótesis de CVC con gran precisión. Estrechamente relacionado con este punto, los datos de decaimiento $\tau_{2\pi}$ se puede emplear para calcular (vía la hipótesis de CVC) la contribución de la polarización del vacío hadrónico al momento anómalo magnético del muón a_μ [51] y sus respectivas predicciones teóricas, la cual es la principal fuente de incertidumbre, de esta contribución el 73 % se debe al estado final de dos piones.

Las mediciones de las observables del decaimiento $\tau_{2\pi}$ se han realizado con muestras de alrededor de $10^5 - 10^6$ eventos, provenientes principalmente principalmente de los experimentos CLEO y ALEPH. Los experimentos recientes en las fábricas de mesones B (BABAR y BELLE) han alcanzado una enorme estadística en eventos del τ [79] [80] [81], alrededor de 10^9 pares $\tau^+\tau^-$. Por esta razón, mejoras significativas en las mediciones del decaimiento $\tau_{2\pi}$ son esperadas, ya que se espera que los errores estadísticos se reduzcan de manera considerable. En este escenario, las correcciones radiativas se vuelven indispensables por lo menos a $\mathcal{O}(\alpha)$.

4.1. Decaimientos leptónicos del τ

Los decaimientos de los leptones cargados, μ^- y τ^- , son representados por los diagramas de Feynman mostrados en la Fig.4.1, los cuales son producidos mediante el intercambio del bosón W^- con la fuerza asociada en el Modelo Estándar con las interacciones de carga-corriente:

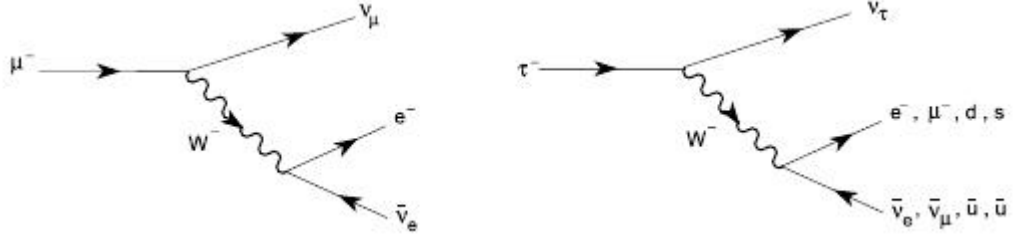


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ y $\tau^- \rightarrow \nu_\tau X^-$ ($X^- = e^- \bar{\nu}_e, \mu^- \bar{\nu}_\mu, d\bar{u}, s\bar{u}$).

$$\mathcal{L}_{cc} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \left\{ \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l + \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (V_{ud} d + V_{us} s) \right\} + h.c. \quad (4.1)$$

El momento transferido transportado por el intermediario W^- es muy pequeña comparado con M_W . Por lo tanto, el propagador vector-bosón se encoge hasta cierto punto y puede ser aproximado adecuadamente a través de una interacción local de cuatro fermiones gobernada por la constante de acoplamiento de Fermi $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2)$. Así, la anchura de decaimiento leptónica [42] esta dada por:

$$\Gamma[l^- \rightarrow l'^- \bar{\nu}_l \nu_l(\gamma)] = \frac{G_{l'l}^2 m_l^5}{192\pi^3} f(m_{l'}^2/m_l^2) (1 + \delta_{RC}^{l'l}), \quad (4.2)$$

donde $f(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \log x$ y

$$\delta_{RC}^{l'l} = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{25}{4} - \pi^2 + \mathcal{O}\left(\frac{m_{l'}^2}{m_l^2}\right) \right] + \dots \quad (4.3)$$

tomado en cuenta dentro de las correcciones radiativas de QED, las cuales son conocidas a orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Las masas de los neutrinos son tan pequeñas que

deberían de considerarse despreciables y (γ) representa fotones adicionales o pares de leptones los cuales han sido incluidos en $\delta_{RC}^{\prime\prime}$. Las correcciones electrodébiles a ordenes más altos y la estructura no local del propagador del W^- , son usualmente incluidos dentro de acoplamientos efectivos [42] [82] [83]:

$$G_{\nu l}^2 = \left[\frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2} (1 + \Delta r) \right]^2 \left[1 + \frac{3}{5} \frac{m_l^2}{M_W^2} + \frac{9}{5} \frac{m_{\nu}^2}{M_W} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\nu}^4}{M_W^2 m_l^2}\right) \right]. \quad (4.4)$$

Debido a la masa del leptón τ , los estados finales que son cinemáticamente permitidos son: $\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} e^- \bar{\nu}_e$, $\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} \nu^- \bar{\nu}_{\nu}$, $\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} d \bar{u}$ y $\tau^- \rightarrow \nu_{\tau} s \bar{u}$. La universalidad de los acoplamientos a W , implica que todos estos modos de decaimientos tienen amplitudes iguales, excepto por un factor adicional $N_C |V_{ui}|^2$, ($i = d, s$) en el canal semileptónico y $N_C = 3$ el número de color de quarks.

4.2. Decaimientos hadrónicos del τ

Dentro del Modelo Estándar, la matriz de amplitud para los decaimientos hadrónicos exclusivos del τ , en este caso los decaimientos de la forma $\tau^- \rightarrow H^- \nu_{\tau}$, están generalmente dados por [42]

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{CKM}^{ij} \bar{u}_{\nu_{\tau}} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\tau} \mathcal{H}_{\mu} \quad (4.5)$$

donde G_F es la constante de Fermi, V_{CKM}^{ij} son los correspondientes elementos de la matriz de CKM, y

$$\mathcal{H}_{\mu} = \langle H | (V_{\mu} - A_{\mu}) e^{i\mathcal{L}_{QCD}} | 0 \rangle, \quad (4.6)$$

es el elemento de matriz de las corrientes izquierdas que han sido evaluadas en la presencia de interacciones fuertes de QCD. En términos de estructuras de Lorentz, factores de forma hadrónicos, F_i y de corrientes en QCD [17]

$$\mathcal{H}_{\mu} = \sum_i (\dots)_{\mu}^i F_i(Q^2, \dots); \quad (4.7)$$

donde $(\dots)_{\mu}^i$ representa las estructuras de Lorentz, por otra parte, las corrientes son universales en el sentido de que son independientes de los estados

iniciales.

Los tensores hadrónicos y leptónicos son definidos de la siguiente manera:

$$\sum_{s,s'} \bar{\mathcal{M}} \mathcal{M}^\dagger \equiv \left(\frac{1}{2 \times \frac{1}{2} + 1} \right)^2 \frac{G_F^2}{2} |V_{CKM}|^2 \mathcal{H}_{\mu\nu} \mathcal{L}^{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

donde $\mathcal{H}_{\mu\nu}$ es el tensor de corriente hadrónico, $\mathcal{L}^{\mu\nu}$ lleva la información del sector leptónico, los cuales se definen como:

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{H}_\mu \mathcal{H}_\nu, \quad \mathcal{L}^{\mu\nu} \equiv \sum_{s,s'} \bar{u}_\tau(l, s) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu\tau}(l', s') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_\tau(l, s), \quad (4.9)$$

uno tiene de esta manera que el ancho de decaimiento queda definido como

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{4M_\tau} |V_{CKM}^{ij}|^2 \mathcal{L}_{\mu\nu} \mathcal{H}^\mu \mathcal{H}^{\nu\dagger} dPS, \quad (4.10)$$

donde dPS tiende a ser el elemento diferencial para la integración del espacio fase, con

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} \mathcal{H}^\mu \mathcal{H}^{\nu\dagger} = \sum_X L_X W_X, \quad (4.11)$$

donde L_X y W_X son las funciones de estructura definidos en el marco en reposo leptónico y hadrónico. Las funciones de estructura hadrónicas, W_X , pueden ser escritos en términos de los factores de forma, la componente cinemática y el estudio de funciones espectrales o distribuciones angulares que permiten reconstruir los datos. Su número depende de los estados finales, empezando con 4 en el caso de dos mesones y 16 para tres.

4.3. Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \nu_\tau$

EL decaimiento semileptónico $\tau^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \nu_\tau$ ($\tau_{2\pi}$) es un modo dominante en los decaimientos del leptón τ^- . En la actualidad el valor promedio de la fracción de decaimiento experimental es $B_\tau^{\text{exp}}(\pi^- \pi^0) = (25,49 \pm 0.09) \% [1]$. Bajo la descripción de VDM, uno puede describir el decaimiento $\tau^-(p) \rightarrow \pi^-(p_1) \pi^0(p_2) \nu_\tau(p_3)$, ver Fig.4.2, mediante la amplitud escrita en términos de reglas de Feynman como

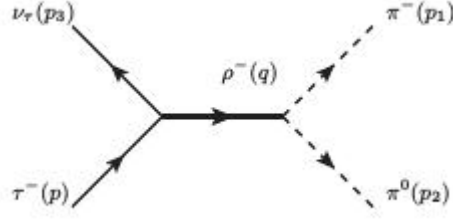


Figura 4.2: Diagrama de Feynman para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$.

$$\mathcal{M} = g_{\rho\pi\pi}g_\rho V_{ud} \frac{G_F}{\sqrt{2}} D_\rho^{\mu\nu}(q) \bar{u}(p_3)(1 - \gamma_5)u(p), \quad (4.12)$$

donde $\sqrt{t} = q = p_1 + p_2$ y

$$D_\rho^{\mu\nu}(q) = \left(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_\rho^2}}{t - m_\rho^2} \right). \quad (4.13)$$

Definiendo

$$f_+(t) = \frac{g_{\rho\pi\pi}g_\rho}{\sqrt{2}(t - m_\rho^2)}, \quad (4.14)$$

la amplitud puede ser escrita, en el límite de iso-espín $m_1 = m_2$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{M} = -f_+(t)G_F V_{ud}(p_1 - p_2)^\lambda \bar{u}(p_3)\gamma_\lambda(1 - \gamma_5)u(p). \quad (4.15)$$

La amplitud invariante del decaimiento más general de $\tau_2\pi$ puede ser calculado a través del elemento de matriz con una Hamiltoniana efectiva $H_{eff}^{\Delta S=0}$ entre el estado inicial τ^- y el estado final $\nu_\tau\pi^-\pi^0$ [77],

$$\mathcal{M}_\tau^0(\pi^-, \pi^0) = \langle \nu_\tau\pi^-\pi^0 | H_{eff}^{\Delta S=0} | \tau^- \rangle = \frac{G_F V_{ud}}{\sqrt{2}} l^\alpha h_\alpha, \quad (4.16)$$

donde l^α denota a la corriente leptónica definida como

$$l^\alpha = \langle \nu_\tau | \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \tau | \tau^- \rangle = \bar{u}(p_3, s_\nu) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u(p, s_\tau), \quad (4.17)$$

y h^α la corriente hadrónica,

$$h_\alpha = \langle \pi^-\pi^0 | \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u | 0 \rangle. \quad (4.18)$$

La covariancia de Lorentz establece que la parte vectorial de la corriente hadrónica h_α se puede parametrizar como

$$h_\alpha = \langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma_\alpha u | 0 \rangle = f_+(t)(p_1 - p_2)_\alpha + f_-(t)(p_1 + p_2)_\alpha, \quad (4.19)$$

donde $f_+(t)$ y $f_-(t)$ son los factores de forma que dependen del cuadrado del momento transferido t . Sus expresiones dependen del modelo particular que se utiliza para describir al decaimiento $\tau_{2\pi}$. Utilizando la simetría de isoespín, el factor de forma $f_-(t)$ es cero, de esta forma h_α sólo depende de $f_+(t)$.

La probabilidad de transición puede ser escrita de la siguiente manera

$$|\mathcal{M}|^2 = |f_+(t)|^2 G_F^2 |V_{ud}|^2 (p_1 - p_2)^\lambda (p_1 - p_2)^\sigma \times \bar{u}(p_3) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u(p) \bar{u}(p) \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) u(p_3). \quad (4.20)$$

Cinemáticamente $|\mathcal{M}|^2$ esta completamente caracterizada por dos variables, $t = (p_1 + p_2)^2$ y $u = (p_3 + p_2)^2$ definidas como los cuadrados de la masa invariante del sistema de dos piones y del sistema $\nu_\tau - \pi^0$ respectivamente, así

$$|\mathcal{M}|^2 = 2G_F^2 |V_{ud}|^2 |f_+(t)|^2 D(t, u), \quad (4.21)$$

donde

$$D^+(t, u) = 2u^2 - 2(m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2 - t)u + \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) + 2m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2. \quad (4.22)$$

donde, para un decaimiento a tres cuerpos se tiene que [1]

$$\begin{aligned} u^+ &= (E_2 + E_3)^2 - (\sqrt{E_2^2 - m_2^2} - \sqrt{E_3^2 - m_3^2}), \\ u^- &= (E_2 + E_3)^2 - (\sqrt{E_2^2 - m_2^2} + \sqrt{E_3^2 - m_3^2}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

al tomar el límite de isoespín, $E_2 = \sqrt{t}/2$ y $E_3 = (m_\tau^2 - t^2)/2\sqrt{t}$. Así, el dominio de las variables t y u esta dado por:

$$\mathcal{R}^{III} = [(m_{\pi^-} + m_{\pi^0})^2 \leq t \leq m_\tau^2; u^-(t) \leq u \leq u^+(t)], \quad (4.24)$$

donde las funciones u^\pm están definidas por

$$u^-(t) = \frac{1}{2t} (2(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - t)t - (m_\tau^2 - t)(t + m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2) - (m_\tau^2 - t)\lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)) \quad (4.25)$$

$$u^+(t) = \frac{1}{2t} (2(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - t)t - (m_\tau^2 - t)(t + m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2) + (m_\tau^2 - t)\lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)) \quad (4.26)$$

Al gráficar \mathcal{R}^{III} uno obtiene la región físicamente accesible para t y u en el decaimiento $\tau_{2\pi}$ la cual se muestra en la Fig.4.3.

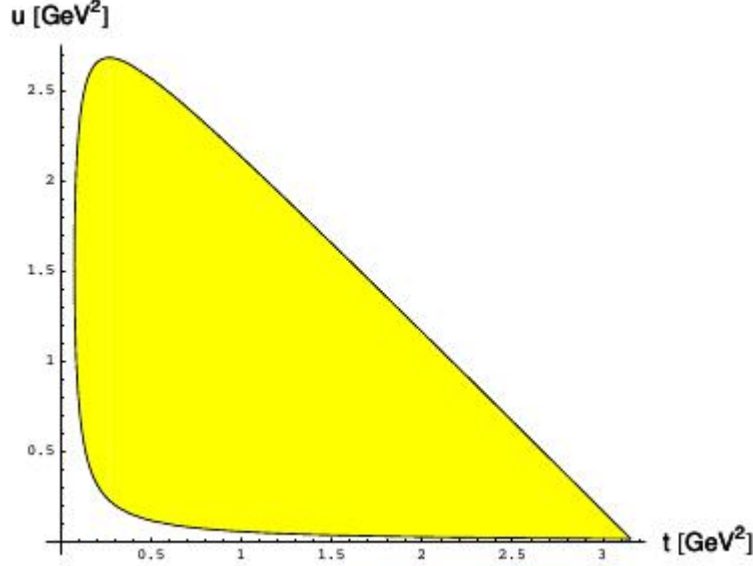


Figura 4.3: Espacio fase del decaimiento a tres cuerpos $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ en términos de t y u [77].

y dada la definición del ancho de decaimiento para tres cuerpos [1]

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32m_\tau^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dt du, \quad (4.27)$$

uno encuentra al integrar sobre u que

$$\frac{d\Gamma_{\pi\pi}}{dt} = \frac{G_F^2 m_\tau^3 |V_{ud}|^2}{384\pi^3} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{t}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 - \frac{2t}{m_\tau^2}\right) |f_+(t)|^2. \quad (4.28)$$

En ciertos modelos de CHPT, la parametrización del factor de forma [63] es de la forma

$$f_+(t) = m_\rho^2 D_\rho^{-1}(t) \exp[2\bar{H}_{\pi\pi}(t) + \bar{H}_{KK}(t)] \quad (4.29)$$

con $D_\rho(t) = m_\rho^2 - t - im_\rho\Gamma_\rho(t)$ y $\bar{H}_{PP}(t)$ son estructuras que dependen del modelo CHPT, ver ref.[63]. Por otra parte, la parametrización del factor de

forma del pión en VMD, el cual es usado de aquí en adelante incluye la contribución de las resonancias de los vectores $\rho(770)$ $\rho'(1450)$ y $\rho''(1700)$ [78] [88],

$$f_+(t) = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} [BW_\rho(t) + \beta BW_{\rho'}(t) + \gamma BW_{\rho''}(t)], \quad (4.30)$$

donde $BW_V(t)$ han sido propiamente normalizados ($BW_V(0) = 1$) como funciones de Breit-Wigner:

$$BW_V(t) = \frac{m_V^2}{m_V^2 - t - im_V \Gamma_V(t)}, \quad (4.31)$$

Las anchuras de decaimiento de los mesones ρ' y ρ'' son tomadas como constantes, mientras que la contribución de la resonancia dominante $\rho(770)$ puede ser tomada dependiente de la energía.

Por último, la gráfica de $d\Gamma_{\pi\pi}/dt$, en términos de la masa invariante de los piones t , Fig.4.4, este se comporta justamente como se esperaba y muestra en \mathcal{R}^{III} .

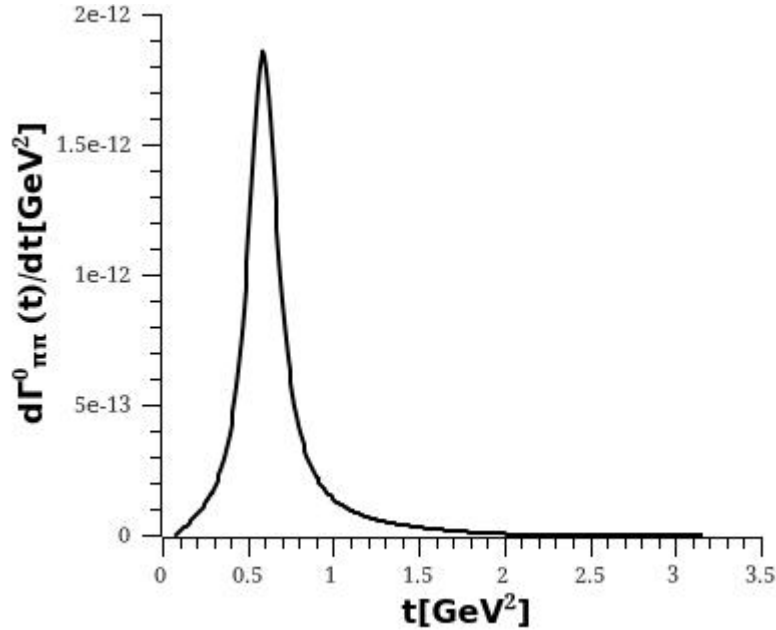


Figura 4.4: Espectro del decaimiento no radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ en términos de t .

4.4. El decaimiento radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ en VMD

El decaimiento hadrónico $\tau^-(p) \rightarrow \pi^-(p_-)\pi^0(p_0)\nu(q)\gamma(k, \epsilon)$, se enfoca únicamente en las correcciones radiativas electromagnéticas reales del decaimiento $\tau_{2\pi}$ debido a que los experimentos actuales no son capaces de distinguir entre el decaimiento $\tau_{2\pi}$ y el decaimiento radiativo $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ ($\tau_{2\pi\gamma}$), bajo este contexto, los experimentos actuales observan el decaimiento inclusivo $\tau_{2\pi(\gamma)} \equiv \tau_{2\pi} + \tau_{2\pi\gamma}$, los cuales, en principio, son procesos diferentes ya que cinemáticamente el primero se trata de un decaimiento a tres cuerpos y el segundo un decaimiento a cuatro cuerpos. En VMD, los diagramas de Feynman que contribuyen al decaimiento $\tau_{2\pi\gamma}$ son once, ver Fig.4.5, de los cuales cuatro nos dan la contribución *independiente del modelo*, mientras que los restantes, reciben contribuciones adicionales a los que se denominan *dependientes del modelo*. En los diagramas de (a) – (d), el estado hadrónico final se produce únicamente por medio de la resonancia vectorial $\rho^-(770)$, en consecuencia, la amplitud de cada diagrama puede ser escrita en términos del factor de forma $f_+(t)$. La expresión de dicho factor de forma está fijo una vez que se conoce la amplitud del decaimiento no radiativo, en ese sentido se dice que la contribución de los diagramas (a)-(d) es independiente del modelo.

Los diagramas (e)-(k), en cambio, reciben contribuciones adicionales de los mesones vectoriales $\omega(782)$, axial $a_1(1260)$ y el pseudoescalar π , y en ese sentido se dice que estas contribuciones son dependientes del modelo. Se necesitan construir las amplitudes de cada uno de los diagramas con las reglas de Feynman correspondientes, en principio se deben de sumar las once contribuciones para obtener la amplitud total.

El vértice electromagnético $\rho^{-\alpha}(p)\rho^{-\beta}(p')\gamma^\delta(k)$ se describe de la siguiente manera [91]

$$\Gamma_0^{\delta\alpha\beta} = ie(p + p')^\delta g^{\alpha\beta} + \beta(0)(k^\beta g^{\delta\alpha} - k^\alpha g^{\delta\beta}) + p^\alpha g^{\delta\beta} - p'^\beta g^{\delta\alpha}, \quad (4.32)$$

donde $\beta(0) = 2$ es el momento dipolar magnético del mesón $\rho^-(770)$; las predicciones del Modelo Estándar caen dentro del intervalo $1.8 \leq \beta(0) \leq 3.0$ [92]. Además, se puede comprobar sin dificultad que el vértice y el propagador satisfacen la identidad de Ward definida [91]

$$k_\delta \Gamma^{\delta\alpha\beta} = \left[iD^{\alpha\beta}(p) \right]^{-1} - \left[iD^{\alpha\beta}(p') \right]^{-1}, \quad (4.33)$$

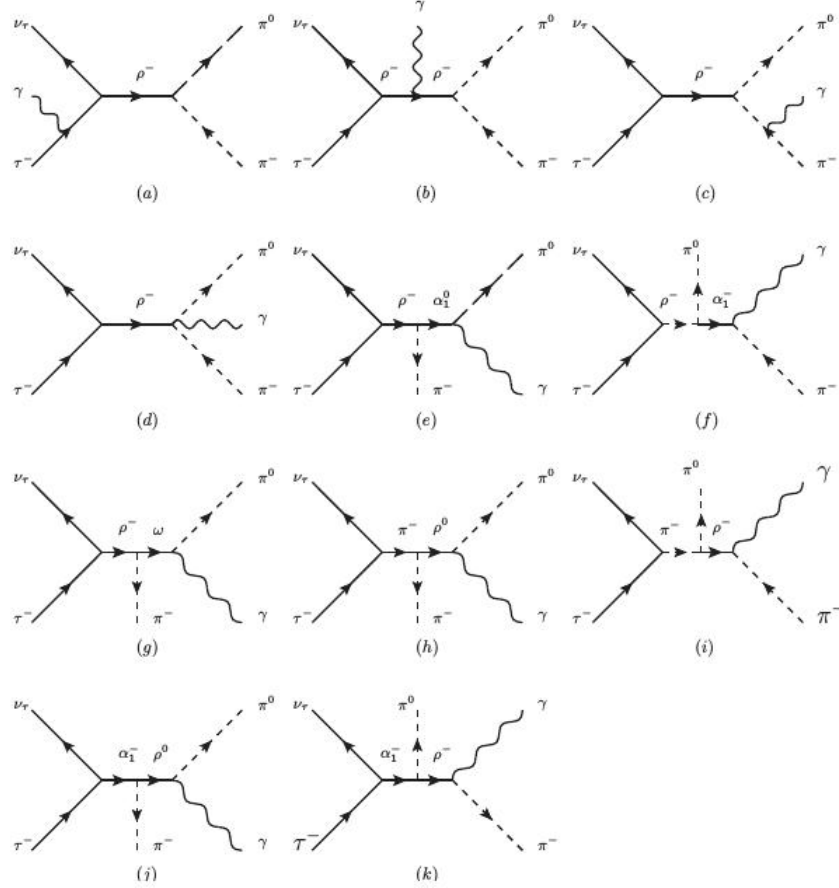


Figura 4.5: Diagramas de Feynman que contribuyen de manera importante en el decaimiento radiativo $\tau_{2\pi\gamma}$. Los diagramas (a)-(d) dan la contribución independiente del modelo, mientras que los diagramas (e)-(k) dan las contribuciones dependientes del modelo.

de esta forma, en principio la amplitud de cualquier proceso radiativo que involucre este vértice y propagador es invariante de norma. La expresión para los propagadores se tomará como

$$D_m^{\mu\nu}(p) = -i \left(\frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_m^2 - im_m \Gamma_m}}{p^2 - m_m^2 + im_m \Gamma_m} \right). \quad (4.34)$$

De acuerdo a las reglas de Feynman, (ver apéndice E), las amplitudes de los diagramas (a)-(d) que constituyen la parte independiente del modelo de la

amplitud total, pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(a)} &= i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho (p_- - p_0)_\lambda D^{\chi\lambda} (p_- + p_0) \\ &\quad \times \bar{u}(q) \gamma_\chi (1 - \gamma_5) \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m_\tau} \epsilon^\mu \gamma_\mu u(p) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(b)} &= \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho (p_- - p_0)_\lambda D^{\nu\lambda} (p_- + p_0) \Gamma^{\alpha\mu\nu} \\ &\quad \times \epsilon_\alpha D^{\chi\mu} (p - q) l_\chi \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\mathcal{M}_{(c)} = i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} (p_- - p_0 + k)_\lambda D^{\chi\lambda} (p - q) l_\chi \quad (4.37)$$

$$\mathcal{M}_{(d)} = -i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \epsilon_\lambda D^{\chi\lambda} (p - q) l_\chi. \quad (4.38)$$

Por otra parte, la parte dependiente del modelo surge de las amplitudes de los diagramas (e)-(k) y pueden ser construidas de la misma manera que el caso anterior, sin embargo, para el propósito de este trabajo, se necesita fijar de manera adecuada la parte independiente del modelo dadas las discrepancias existentes bajo diferentes modelos para la amplitud de Low en VMD y CHPT. En VMD se ha hecho anteriormente una descripción de todos los diagramas anteriores [77] [78] [89] [90] mientras que en la descripción quiral, la amplitud es obtenida a partir de una Lagrangiana efectiva a bajas energías [63] [64].

Antes de continuar con el cálculo de la amplitud, se necesita calcular las expresiones para los factores de forma con lo que es necesario analizar los detalles de los diagramas, por un lado, las amplitudes $\mathcal{M}_{(a)}$ y $\mathcal{M}_{(c)}$ se deben a la emisión del fotón desde las partículas cargadas τ^- y π^- , estas amplitudes en principio contienen los términos de orden k^{-1} , y por lo tanto son singulares infrarojos de acuerdo al Teorema de Low [7], a partir de esto, existe una correspondencia para determinar el factor de forma¹, [77] [78],

$$f_+(t) = \frac{g_\rho g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^2 - t - im_\rho \Gamma_\rho(t)} \approx \frac{\sqrt{2} m_\rho^2}{m_\rho^2 - t - im_\rho \Gamma_\rho(t)}; \quad (4.39)$$

lo cual resulta redundante ya que se supone que el factor de forma es único una vez que se conoce la amplitud del proceso no radiativo $\tau_{2\pi}$. Sin embargo, es conveniente suponer que el factor de forma esta definido de esta manera,

¹La estructura del cálculo del factor de forma es mucho más general, ver ref. [63] [64]

ya que las reglas de Feynman lo dejan perfectamente definido, sin embargo, la parametrización que se hizo anteriormente para el factor de forma es la que se va a utilizará más adelante.

4.4.1. Amplitud de Low e invariancia de norma

Hay que tener en cuenta ciertas consideraciones, por conservación de momento $p - q = p_- + p_0$, definiendo algunas cantidades extras para facilitar la notación, sea $k_+ = p - q = p_- + p_0 + k$, $Q = p_- + p_0 = k_-$ y $\bar{Q} = p_0 - p_-$, las amplitudes (a)-(d) pueden ser escritas en una forma simplificada. Por un lado, para la amplitud $\mathcal{M}_{(a)}$, el término

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m_\tau} = \frac{(\not{p}\not{\epsilon} - \not{k}\not{\epsilon} + m_\tau\not{\epsilon})u(p)}{p^2 - 2p \cdot k - m_\tau^2} = \frac{2p \cdot \epsilon - \not{k}\not{\epsilon}}{-2p \cdot k}, \quad (4.40)$$

la amplitud $\mathcal{M}_{(a)}$ queda definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(a)} &= i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\chi\lambda}(k_-) \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} l_\chi \\ &- i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\chi\lambda}(k_-) \bar{u}(q) \gamma_\chi (1 - \gamma_5) \frac{\not{k}\not{\epsilon}}{2p \cdot k} u(p) \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde la corriente leptónica esta definida como $\bar{u}(q) \gamma_\chi (1 - \gamma_5) u(p) = l_\chi$. Por otro lado, $\gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \not{k}\not{\epsilon} = \gamma_\chi (1 - \gamma_5) (k_\alpha \epsilon_\chi - \epsilon_\alpha k_\chi - k \cdot \epsilon g_{\alpha\chi} + i k^\beta \epsilon^\mu \epsilon_{\chi\alpha\beta\mu})$, además $k \cdot \epsilon = 0$, la amplitud $\mathcal{M}_{(a)}$ queda determinada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(a)} &= i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\chi\lambda}(k_-) \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} l_\chi \\ &- i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\chi\lambda}(k_-) \frac{1}{2p \cdot k} (k_\alpha \epsilon_\chi - \epsilon_\alpha k_\chi + i k^\beta \epsilon^\mu \epsilon_{\chi\alpha\beta\mu}) l_\chi \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde se ha tomado $C = eG_F V_{ud}$ y se puede ver que el segundo término de la ecuación anterior es invariante de norma por sí mismo.

Las amplitudes $\mathcal{M}_{(b)}$, bajo el mismo criterio queda definida como:

$$\mathcal{M}_{(b)} = - \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\nu\lambda}(k_-) \Gamma^{\alpha\mu\nu} \epsilon_\alpha D^{\chi\mu}(k_+) l_\chi \quad (4.43)$$

$\Gamma^{\alpha\mu\nu}$, es el vértice electromagnético $VV\gamma$, al aplica la propiedad de invariancia de norma se tiene:

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot k - k^\nu k_+^\mu - k^\mu k_-^\nu, \quad (4.44)$$

y por conservación de cuadrimento, $k = k_+ - k_-$:

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot k - k_+^\nu k_+^\mu + k_-^\mu k_-^\nu. \quad (4.45)$$

Por otra parte, la identidad de Ward garantiza que

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = \left[iD^{\mu\nu}(k_+) \right]^{-1} - \left[iD^{\mu\nu}(k_-) \right]^{-1}, \quad (4.46)$$

donde en forma genérica el propagador inverso es $[D^{\mu\nu}(q)]^{-1} = i(g^{\mu\nu}(q^2 - m^2) - q^\mu q^\nu)$, entonces

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\nu} k_+^2 - g^{\mu\nu} k_-^2 - k_+^\nu k_+^\mu + k_-^\mu k_-^\nu, \quad (4.47)$$

y sustituyendo $k_+ = k_- + k$, usando el hecho de que $k_+ \cdot k = k_- \cdot k$ y dado que $k \cdot k = 0$, se obtiene la expresión

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot k - k_+^\nu k_+^\mu + k_-^\mu k_-^\nu \quad (4.48)$$

definida anteriormente. Por lo tanto, la identidad de Ward para el vértice $VV\gamma$ esta relacionada directamente con la invariancia de norma.

Ahora, la amplitud $\mathcal{M}_{(b)}$, tiene la estructura $\epsilon_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu}$, al tomar la expresión del vértice $VV\gamma$ resulta que:

$$\epsilon_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = (g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot \epsilon + 2(\epsilon^\nu k_+^\mu - \epsilon^\mu k_+^\nu) - \epsilon^\nu k_+^\mu - \epsilon^\mu k_+^\nu) \quad (4.49)$$

donde sólo el término $2(\epsilon^\nu k_+^\mu - \epsilon^\mu k_+^\nu)$ es una estructura invariante de norma por si sola cuando $\epsilon \rightarrow k$, sin embargo, los términos restantes no lo son. Para garantizar la invariancia de norma explícitamente de \mathcal{M}_T , la amplitud $\mathcal{M}_{(b)}$, en particular el término $\epsilon_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu}$ debe ser rescrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot \epsilon - \epsilon^\nu k_+^\mu - \epsilon^\mu k_-^\nu + 2(\epsilon^\nu k_+^\mu - \epsilon^\mu k_+^\nu) \quad (4.50) \\ &+ \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k_+^\nu k_+^\mu - \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k_+^\nu k_+^\mu + \frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k_-^\mu k_-^\nu - \frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k_-^\mu k_-^\nu \end{aligned}$$

además, dado que $k_+ = p_- + p_0 + k$ y $k_- = p_- + p_0$, bajo la condición de que $k \cdot k = k \cdot \epsilon = 0$, se tiene que $k_+ \cdot \epsilon = k_- \cdot \epsilon$ y $k_+ \cdot k = k_- \cdot k$. Así,

la expresión resultante de la ec.(4.50), una vez que se re-agrupan todos los términos adecuadamente queda definida como

$$\epsilon_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\nu} (k_+ + k_-) \cdot \epsilon - \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} (k_+^\mu k_+^\nu - k_-^\mu k_-^\nu) \quad (4.51)$$

$$+ \left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k^\nu - \epsilon^\nu \right) k_+^\mu + \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k^\mu - \epsilon^\mu \right) k_-^\nu \\ + 2(\epsilon^\nu k^\mu - \epsilon^\mu k^\nu) \quad (4.52)$$

donde es fácil darse cuenta que cuando $\epsilon \rightarrow k$, resulta explícitamente la identidad de Ward definida anteriormente en la ec.(4.48). Así, la expresión para la amplitud $\mathcal{M}_{(b)}$ queda definida como:

$$\mathcal{M}_{(b)} = -\frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\nu\lambda}(k_-) \left[g^{\mu\nu} (k_+ + k_-) \cdot \epsilon - \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} (k_+^\mu k_+^\nu - k_-^\mu k_-^\nu) \right. \\ + \left. \left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k^\nu - \epsilon^\nu \right) k_+^\mu + \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k^\mu - \epsilon^\mu \right) k_-^\nu \right. \\ + \left. 2(\epsilon^\nu k^\mu - \epsilon^\mu k^\nu) \right] D^{\chi\mu}(k_+) l_\chi. \quad (4.53)$$

Las amplitudes restantes son más sencillas de escribir, por un lado, $\mathcal{M}_{(c)}$ queda definida como:

$$\mathcal{M}_{(c)} = i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} (-\bar{Q} + k)_\lambda D^{\chi\lambda}(k_+) l_\chi \quad (4.54)$$

y por último, la amplitud del término de contacto (ver apéndice ??), esta definida como:

$$\mathcal{M}_{(d)} = -i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \epsilon_\lambda D^{\chi\lambda}(k_+) l_\chi \quad (4.55)$$

Por lo tanto, $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_{(a)} + \mathcal{M}_{(b)} + \mathcal{M}_{(c)} + \mathcal{M}_{(d)}$, reescribiendo y acoplando las diferentes partes que forman cada una de las amplitudes mencionadas anteriormente se tiene una estructura completamente invariante de norma,

la amplitud total \mathcal{M}_T queda así

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T = & i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda \left\{ \left[\frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} D^{\chi\lambda}(k_-) - \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} D^{\chi\lambda}(k_+) \right] \right. \\
& - D^{\chi\lambda}(k_-) \frac{1}{2p \cdot k} (k_\alpha \epsilon_\chi - \epsilon_\alpha k_\chi + i k^\beta \epsilon^\mu \epsilon_{\chi\alpha\beta\mu}) \left. \right\} l_\chi \\
& - \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\nu\lambda}(k_-) \left\{ \left[g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot \epsilon - \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} (k_+^\mu k_+^\nu - k_-^\mu k_-^\nu) \right] \right. \\
& + \left[\left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k^\nu - \epsilon^\nu \right) k_+^\mu + \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k^\mu - \epsilon^\mu \right) k_-^\nu \right] \\
& + \left. \left[2(\epsilon^\nu k^\mu - \epsilon^\mu k^\nu) \right] \right\} D^{\chi\mu}(k_+) l_\chi \\
& + i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \left(\frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} k_\lambda - \epsilon_\lambda \right) D^{\chi\lambda}(k_+) l_\chi
\end{aligned} \tag{4.56}$$

donde es fácil checar e identificar que cada estructura que conforma la amplitud total es un invariante de norma, así, en principio, cuando $\epsilon \rightarrow k$ en la expresión para \mathcal{M}_T , la invariancia de norma dice que $k\mathcal{M}_T = 0$, es decir

$$\begin{aligned}
k\mathcal{M}_T = & +i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda \left[D^{\chi\lambda}(k_-) - D^{\chi\lambda}(k_+) \right] \\
& - \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\nu\lambda}(k_-) \left[g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot k - k_+^\mu k_+^\nu + k_-^\mu k_-^\nu \right] D^{\chi\mu}(k_+) l_\chi
\end{aligned} \tag{4.57}$$

donde el segundo término de la expresión anterior es exactamente la expresión que define la identidad de Ward en la ec. (4.48) y que se relaciona directamente con la diferencia de propagadores inversos definida en la ec. (4.46). En términos de proyectores

$$\begin{aligned}
\left[D^{\mu\nu}(k_+) \right]^{-1} & = i \left[(k_+ - m^2) T_+^{\mu\nu} - m^2 L_+^{\mu\nu} \right] \\
& = i \left[(k_+^2 - m^2) g^{\mu\nu} - k_+^\mu k_+^\nu \right]
\end{aligned} \tag{4.58}$$

donde $T_+^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k_+^\mu k_+^\nu}{k_+^2}$ y $L_+^{\mu\nu} = \frac{k_+^\mu k_+^\nu}{k_+^2}$, y así, la expresión

$$\begin{aligned}
M & = \left[g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot \epsilon - \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} (k_+^\mu k_+^\nu - k_-^\mu k_-^\nu) \right] \\
& = \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left[T_+^{\mu\nu} k_+ \cdot k + T_-^{\mu\nu} k_+ \cdot k + L_+^{\mu\nu} (k_+ \cdot k - k_+^2) + L_-^{\mu\nu} (k_+ \cdot k + k_-^2) \right] \\
& = \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left[g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot k - L_+^{\mu\nu} k_+^2 + L_-^{\mu\nu} k_-^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.59}$$

dada la conservación de cuadri-momento, se tiene que $k_+ = k_- + k$ y por lo tanto $k_+ \cdot k = k_- \cdot k$ dado que $k \cdot k = 0$, entonces $g^{\mu\nu}(k_+ + k_-) \cdot k = g^{\mu\nu}(2k_+ \cdot k) = g^{\mu\nu}(k_+^2 - k_-^2)$, de esta manera, M puede ser rescrito como:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left[g^{\mu\nu}(k_+^2 - m^2) - g^{\mu\nu}(k_-^2 - m^2) - (k^2 - m^2)L_+^{\mu\nu} \right. \\
 &\quad \left. - L_+^{\mu\nu} m^2 + L_-^{\mu\nu} m^2 + (k_-^2 - m^2)L_-^{\mu\nu} \right] \\
 &= \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left\{ \left[(k_+^2 - m^2)T_+^{\mu\nu} - m^2 L_+^{\mu\nu} \right] - \left[(k_-^2 - m^2)T_-^{\mu\nu} - m^2 L_-^{\mu\nu} \right] \right\} \\
 iM &= \frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} \left\{ \left[D^{\mu\nu}(k_+) \right]^{-1} - \left[D^{\mu\nu}(k_-) \right]^{-1} \right\} \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

con lo cual, gracias a la separación adecuada de cada uno de los términos en \mathcal{M}_T , la invariancia de norma queda explícitamente demostrada, es decir, de la ec.(??) resulta ser

$$\begin{aligned}
 k\mathcal{M}_T &= i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda \left\{ \left[D^{\chi\lambda}(k_-) - D^{\chi\lambda}(k_+) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[D^{\mu\lambda}(k_-) - D^{\mu\lambda}(k_+) \right] \right\} l_\chi = 0 \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra estructura es por sí sola es invariante de norma ya que no se necesita hacer ningún tipo de aproximación a ningún orden sobre los propagadores y el vértice electromagnético. Como se había mencionado anteriormente que $k_+ \cdot k = k_- \cdot k$ y $k_+ \cdot \epsilon = k_- \cdot \epsilon$, es fácil ver que la diferencia de propagadores a nivel árbol para la misma partícula dada solamente a diferente momento, esta dada por:

$$\left[D^{\mu\nu}(k_+) \right]^{-1} - \left[D^{\mu\nu}(k_-) \right]^{-1} = i \left[g^{\mu\nu}(2k_+ \cdot k) - k_+^\mu k_+^\nu - k_-^\mu k_-^\nu \right], \quad (4.62)$$

Gracias a la relación anterior, uno pude reagrupar todos los términos de \mathcal{M}_T

de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T &= i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda \left\{ \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right) D^{\chi\lambda}(k_-) - \left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} - \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} \right) D^{\chi\lambda}(k_+) \right. \\
&\quad \left. - D^{\chi\lambda}(k_-) \frac{1}{2p \cdot k} (k_\alpha \epsilon_\chi - \epsilon_\alpha k_\chi + i k^\beta \epsilon^\mu \epsilon_{\chi\alpha\beta\mu}) \right\} l_\chi \\
&\quad - \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \bar{Q}_\lambda D^{\nu\lambda}(k_-) \left\{ \left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k^\nu - \epsilon^\nu \right) k_+^\mu + \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k^\mu - \epsilon^\mu \right) k_-^\nu \right\} \\
&\quad + \left[2(\epsilon^\nu k^\mu - \epsilon^\mu k^\nu) \right] D^{\chi\mu}(k_+) l_\chi \\
&\quad + i \frac{C}{\sqrt{2}} g_{\rho\pi\pi} g_\rho \left(\frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} k_\lambda - \epsilon_\lambda \right) D^{\chi\lambda}(k_+) l_\chi \tag{4.63}
\end{aligned}$$

De acuerdo a estructura de la amplitud \mathcal{M}_T , uno de los principales objetivos es separar la amplitud independiente del modelo determinada por el teorema de Low [7]. Dada la definición de los propagador y el factor de forma en ec.(4.4) y ec.(4.4), respectivamente, se define un nuevo propagador en términos del factor de forma como

$$D_f^{\chi\lambda}(k_-) = \frac{g_{\rho\pi\pi} g_\rho}{\sqrt{2}} D^{\chi\lambda}(k_-) = i \left(-g^{\chi\lambda} f_+ + \frac{k_-^\chi k_-^\lambda}{m_\rho^2} f_+ \right) \tag{4.64}$$

y además, el factor de forma $f'_+(t')$, donde $t' = k_+^2$, definido por

$$D_f^{\chi\lambda}(k_+) = \frac{g_{\rho\pi\pi} g_\rho}{\sqrt{2}} D^{\chi\lambda}(k_+) = i \left(-g^{\chi\lambda} f'_+ + \frac{k_+^\chi k_+^\lambda}{m_\rho^2} f'_+ \right). \tag{4.65}$$

El factor $g_{\rho\pi\pi} g_\rho / \sqrt{2}$ ha sido absorbidos dentro del factor de forma $f_+(t) = f_+$ y lo mismo sucede para $f'(t') = f'_+$, con $t = (p_- + p_0)^2 = k_-^2$ y $t' = (p_- + p_0 + k)^2 = k_+^2$, de manera que la amplitud $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_{T1} + \mathcal{M}_{T2} + \mathcal{M}_{T3} + \mathcal{M}_{T4} + \mathcal{M}_{T5}$, donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{T1} &= i C \bar{Q}_\lambda \left\{ \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right) D_f^{\chi\lambda}(k_-) - \left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} - \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} \right) D_f^{\chi\lambda}(k_+) \right\} l_\chi \\
\mathcal{M}_{T2} &= -i C \bar{Q}_\lambda D_f^{\chi\lambda}(k_-) \frac{1}{2p \cdot k} (k_\alpha \epsilon_\chi - \epsilon_\alpha k_\chi + i k^\beta \epsilon^\mu \epsilon_{\chi\alpha\beta\mu}) l_\chi \\
\mathcal{M}_{T3} &= -C \bar{Q}_\lambda D_f^{\nu\lambda}(k_-) \left\{ \left(\frac{k_+ \cdot \epsilon}{k_+ \cdot k} k^\nu - \epsilon^\nu \right) k_+^\mu + \left(\frac{k_- \cdot \epsilon}{k_- \cdot k} k^\mu - \epsilon^\mu \right) k_-^\nu \right\} D_f^{\chi\mu}(k_+) l_\chi \\
\mathcal{M}_{T4} &= C \bar{Q}_\lambda D_f^{\nu\lambda}(k_-) \left[2(\epsilon^\nu k^\mu - \epsilon^\mu k^\nu) \right] D^{\chi\mu}(k_+) l_\chi \\
\mathcal{M}_{T5} &= i C \left(\frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} k_\lambda - \epsilon_\lambda \right) D_f^{\chi\lambda}(k_+) l_\chi \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Al desarrollar los propagadores en términos de los factores de forma y además al considerar la simetría de isospín, por el teorema de Low [7] se sabe que la amplitud independiente del modelo desprecia los términos superiores de orden k y superiores sobre la energía del fotón, así, es fácil ver la la amplitud \mathcal{M}_{T4} no contribuye de alguna manera a la amplitud de Low, así

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{T1Low} = & \left\{ Cf_+ \left[-\bar{Q}^\chi \left(\frac{Q \cdot \epsilon}{Q \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right) + \left(\bar{Q}^\chi - \frac{Q^\chi \bar{Q} \cdot k}{m_\rho^2} \right) \left(\frac{Q \cdot \epsilon}{Q \cdot k} - \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} \right) \right] \right. \\ & \left. + C \bar{Q}^\chi 2Q \cdot k \frac{df_+}{dt} \left(\frac{Q \cdot \epsilon}{Q \cdot k} - \frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} \right) \right\} l_\chi \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\mathcal{M}_{T2Low} = Cf_+ \left[\left(\frac{\bar{Q} \cdot \epsilon}{\bar{Q} \cdot k} k_\chi - \epsilon_\chi \right) \frac{\bar{Q} \cdot k}{2p \cdot k} + \frac{i}{2p \cdot k} \epsilon_{\mu\chi\alpha\beta} \epsilon^\mu \bar{Q}^\alpha k^\beta \right] l_\chi \quad (4.68)$$

$$\mathcal{M}_{T3Low} = c \frac{f'_+ f_+}{m_\rho^2} \left(\frac{Q \cdot \epsilon}{Q \cdot k} - \frac{\bar{Q} \cdot \epsilon}{\bar{Q} \cdot k} \right) \left(1 - \frac{t}{m_\rho^2} \right) Q^\chi \bar{Q} \cdot k l_\chi \quad (4.69)$$

$$\mathcal{M}_{T5Low} = cf_+ \left[\left(\frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} k_\chi - \epsilon_\chi \right) - \left(\frac{p_- \cdot \epsilon}{p_- \cdot k} - \frac{Q \cdot \epsilon}{Q \cdot k} \right) \frac{Q^\chi \bar{Q} \cdot k}{m_\rho^2} \right] \quad (4.70)$$

donde se ha usado la expansión en Taylor para $f'_+(t') = f_+(t) + 2Q \cdot k \frac{df_+(t)}{dt} + \dots$, excepto para \mathcal{M}_{T3Low} donde se usa una aproximación $\frac{f'_+ f_+}{m_\rho^2} = \frac{df_+}{dt}$. Así, al reagrupar todos los términos de manera adecuada, se tiene que la amplitud de Low es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Low} = & Cf_+ L_\mu(p, p_-) \epsilon^\mu \bar{Q}^\chi l_\chi + Cf_+ \frac{2p_- \cdot k}{m_\rho^2} Q^\chi L_\mu(Q, p_-) \epsilon^\mu l_\chi \\ & + 2C \frac{df_+}{dt} p_0 \cdot k L_\mu(p_0, p_-) \epsilon^\mu \bar{Q}^\chi - Cf_+ \epsilon^\mu F_{\mu\nu}(p_-) l_\chi \\ & + Cf_+ \left[-\epsilon^\mu F_{\mu\chi}(\bar{Q}) \frac{\bar{Q} \cdot k}{2p \cdot k} + \frac{i}{2p \cdot k} \epsilon_{\mu\chi\alpha\beta} \epsilon^\mu \bar{Q}^\alpha k^\beta \right] l_\chi \\ & + C \frac{df_+}{dt} L_\mu(Q, \bar{Q}) \epsilon^\mu \left(1 - \frac{t}{m_\rho^2} \right) Q^\chi \bar{Q} \cdot k l_\chi \end{aligned} \quad (4.71)$$

donde se han definido las estructuras

$$L_\mu(a, b) = \frac{a_\mu}{a \cdot k} - \frac{b_\mu}{b \cdot k}, \quad F_{\mu\nu}(a) = g_{\mu\nu} - \frac{a_\mu k_\nu}{a \cdot k} \quad (4.72)$$

La amplitud de Low, que en principio es independiente del modelo, es necesaria para la probabilidad de transición del proceso radiativo $\tau_{2\pi\gamma}$ independiente

del modelo. De esta manera, tomando la amplitud dada en la ec.(4.71), la probabilidad de transición ha sido calculada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{Low}|^2 &= A^2 \bar{Q}^\chi \bar{Q}^\nu L_{\chi\nu} + B^2 Q^\chi Q^\nu L_{\chi\nu} \\ &+ 2ReABQ^\chi \bar{Q}^\nu L_{\chi\nu} + 2ReA\bar{Q}^\chi \chi^\dagger L_{\chi\nu} \\ &+ 2ReBQ^\chi \chi^\dagger L_{\chi\nu} + |\chi_\nu|^2 L_{\chi\nu} \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde $A = C(f_+ L(p, p_-) + 2\frac{df_+}{dt} p_o \cdot k L(p_o, p_-))$ y $B = C(f_+ \frac{2p_- \cdot k}{m_\rho^2} L(Q, p_-) + \frac{df_+}{dt} L(Q, \bar{Q})(1 - \frac{t}{m_\rho^2}) \bar{Q} \cdot k)$ y χ_ν esta compuesta por todos los términos restantes de la amplitud de Low (4.71).

4.4.2. Comparación con resultados anteriores (Quiral y VMD).

Los elementos de matriz para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$ en CHPT [63] tienen la estructura general

$$\begin{aligned} T = eG_F V_{ud} \epsilon^\mu(k) \Big[&F_\nu \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (m_\tau + \not{p} - \not{k}) \gamma_\mu u(p) \\ &+ (V_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(p) \Big], \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde la primera parte describe los elementos de matriz del estado inicial del leptón τ dados por

$$F_\nu = (p_0 - p_-)_\nu f_+(t) / 2p \cdot k, \quad t = (p_- + p_0)^2. \quad (4.75)$$

El factor de forma $f_+(t)$ gobierna el decaimiento no radiativo y cuya expresión depende del modelo en particular. Por otra parte, los tensores $V_{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu}$ están compuestos de amplitudes invariantes, ver ref.[63].

Tomando en cuenta $(p - q)^2 = t + 2(p_- + p_0) \cdot k$. El teorema de Low manifiesta que:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu} &= f_+(t) \frac{p_{-\mu}}{p_- \cdot k} (p_- - p_0)_\nu \\ &+ f_+ \left(\frac{p_{-\mu} k_\nu}{p_- \cdot k} - g_{\mu\nu} \right) \\ &+ 2 \frac{df_+(t)}{dt} \left(\frac{p_{-\mu} p_0 \cdot k}{p_- \cdot k} - p_{0\mu} \right) (p_- - p_0)_\nu + O(k). \end{aligned} \quad (4.76)$$

En este caso, en este modelo, la amplitud de Low sólo queda determinada a partir del término de carga proveniente del estado inicial de leptón τ y los términos antes mencionados en $V_{\mu\nu}$ la cual, al comparar con la amplitud de Low obtenida en (4.71), se nota que existen términos adicionales proporcionales a la suma de los momentos de los piones, los cuales, para el caso de CHPT los autores [63] los cancelan de tal forma que solo se quedan con los términos proporcionales a la diferencia de los momentos y que están relacionados directamente con el factor de forma proporcionales a f_+ , respetando la idea del caso no radiativo y la simetría de isoespín.

Para el caso de VMD, los últimos resultados obtenidos [78] para la amplitud independiente del modelo, muestran que la amplitud de Low esta determinada por:

$$\mathcal{M}_{Low} = eG_F V_{ud} \left[L(p, p_-) \bar{Q}_\nu f_+(t) + \chi_\nu + \frac{i f_+(t)}{2p \cdot k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^\mu \bar{Q}^\rho k^\sigma \right] l^\nu, \quad (4.77)$$

donde de la misma forma $Q \equiv p_- + p_0$, $\bar{Q} \equiv p_0 - p_-$ y $t' \equiv t + 2Q \cdot k$, ϵ es el vector de polarización del fotón y l^ν denota la corriente leptónica $V - A$. De la misma forma, los términos $L(a, b)$ se definen como en el caso anterior y

$$\begin{aligned} \chi_\nu = & -L(p, Q)(f_+(t') - f_+(t)) \left[\bar{Q}_\nu + \frac{p_- \cdot k}{Q \cdot k} Q_\nu \right] \\ & + L_\nu(p_-) f_+(t') + L_\nu(\bar{Q}) \frac{\bar{Q} \cdot k}{2p \cdot k} f_+(t). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Al comparar la ecuación anterior con la amplitud presentada en la ec.(4.71), es fácil darse cuenta que la amplitud presentada en VMD en la ref.[78], la ec.(4.77) esta incluida completamente dentro de la ec.(4.71), y es fácil llegar a ella a partir de la amplitud total, \mathcal{M}_T dada en la ec.(4.63) al hacer la siguiente aproximación sobre los propagadores en términos de los factores de forma f_+ y f'_+ :

$$\begin{aligned} (p_- - p_0)_\lambda D^{\chi\lambda}(k_-) &= (p_- - p_0)^\chi f_+, \\ (p_- - p_0)_\lambda D^{\chi\lambda}(k_+) &= (p_- - p_0)^\chi f'_+. \end{aligned} \quad (4.79)$$

con $C = eG_F V_{ud}$ y donde los términos adicionales, dados en la ec.(4.71), son

de tipo derivativo:

$$C(f_+ \frac{2p_- \cdot k}{m_\rho^2} L(Q, p_-) Q^\chi l_\chi, \quad y \quad C \frac{df_+}{dt} L(Q, \bar{Q}) (\frac{t}{m_\rho^2}) \bar{Q} \cdot k Q^\chi l_\chi \quad (4.80)$$

proporcionales a $Q = (p_- + p_0)$ los cuales vienen directamente de considerar la parte longitudinal explícitamente dentro de la estructura definida para el propagador en términos de f_+ y f_+^l . En la ec.(4.77) bajo la aproximaciones o truncamiento sobre los propagadores dadas en la ec.(4.79), la amplitud que muestran los autores no consideran del todo la parte longitudinal del propagador, además de que obtienen también términos proporcionales a la suma de los momentos de los piones. En el modelo VMD se están considerando términos proporcionales a $Q = p_- + p_0$ que vienen de la parte longitudinal del propagador pero que en el proceso no radiativo, bajo la simetría de isospín están cancelados, además de que esto nos diría que no es del todo cierto que sean proporcionales al factor de forma de corrientes cargadas f_+ .

4.4.3. Corrección electromagnética $G_{EM}(t)$

El espectro hadrónico correcto para decaimientos de τ a dos piones a $O(\alpha)$ [89]

$$\frac{d\Gamma(\tau_{2\pi(\gamma)})}{dt} = \frac{d\Gamma^0}{dt} + \frac{d\Gamma_v^1}{dt} + \frac{d\Gamma_r^1}{dt}. \quad (4.81)$$

Los superíndices del lado derecho denotan el orden de α y los subíndices $v(r)$ corresponden a las correcciones virtuales(reales).

El factor $G_{EM}(t)$ codifica las correcciones a distancias largas en QED para $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ con $t = ((p_{\pi^-} - p_{\pi^0})^2$ la distribución de masa invariante de los piones como [63] [90] [89]

$$\frac{d\Gamma_{2\pi(\gamma)}}{dt} = \frac{d\Gamma_{2\pi}^0}{ds} G_{EM}(t), \quad (4.82)$$

donde $d\Gamma_{2\pi}^0/dt$ denota la tasa de decaimiento no radiativa y

$$G_{EM}(t) = 1 + \frac{\frac{d\Gamma_v^1}{dt} + \frac{d\Gamma_r^1}{dt}}{\frac{d\Gamma^0}{dt}}. \quad (4.83)$$

Esta función es finita en el límite de fotones infrarrojos dado que los términos divergentes en las correcciones virtuales y reales se cancelan entre sí. $G_{EM}(t)$

depende de los detalles del modelo usado para describir las interacciones de los fotones con los hadrones. El teorema de Burnett y Kroll permite dividir el espectro dipion del decaimiento radiativo $\tau_{2\pi}$ en la parte independiente del modelo y la parte dependiente del modelo[89]:

$$\frac{d\Gamma_r^1}{dt} = \frac{d\Gamma_r^1(m.i.)}{dt} + \frac{d\Gamma_r^1(m.d.)}{dt}. \quad (4.84)$$

El primer término contiene las divergencias infrarojas en la energía del fotón, mientras que la estructura electromagnética de los hadrones y otros acoplamientos dependientes del modelo entre fotones y hadrones entran en el segundo término.

El factor de las correcciones radiativas esta dado por [78]:

$$G_{EM}(t) = \frac{\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} du D(t, u) \Delta(t, u)}{\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} du D(t, u)}, \quad (4.85)$$

con

$$\Delta(t, u) = 1 + 2f_{loop}^{elm}(u, m_\gamma) + g_{brem s}(t, u, m_\gamma) + g_{rest}(t, u). \quad (4.86)$$

donde las funciones $f_{loop}^{elm}(u, m_\gamma)$ y $g_{brem s}(t, u, m_\gamma)$ no dependen del modelo que se emplea para describir el decaimiento inclusivo $\tau_{2\pi\gamma}$, y además, $D(t, u)$ es una función exclusiva de la cinemática² [77]. $G_{EM}(t)$ es conveniente dividirla en dos partes:

$$G_{EM}(t) = G_{EM}^0(t) + G_{EM}^{rest}(t), \quad (4.87)$$

donde

$$G_{EM}^0(t) = \frac{\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} du D(t, u) [1 + 2f_{loop}^{elm}(u, m_\gamma) + g_{brem s}(t, u, m_\gamma)]}{\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} du D(t, u)} \quad (4.88)$$

$$G_{EM}^{rest}(t) = \frac{\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} du D(t, u) g_{rest}(t, u)}{\int_{u^-(t)}^{u^+(t)} du D(t, u)}. \quad (4.89)$$

²Hay que mencionar que los detalles no están explícitamente descritos aquí, muchos de estos resultados fueron tomados de las ref. [63] [64]

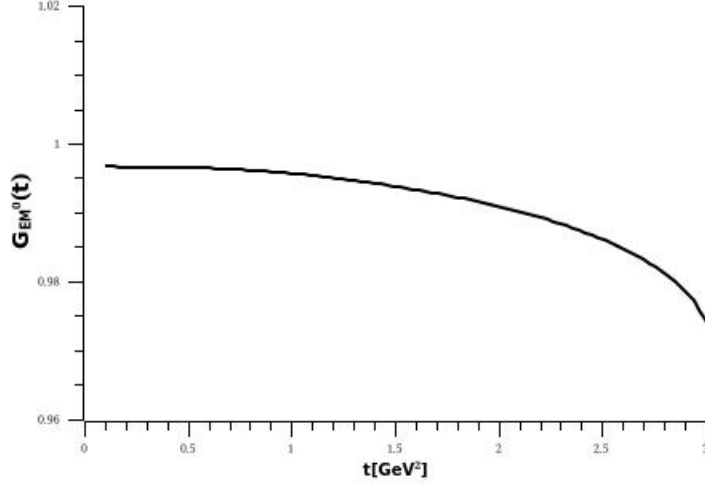


Figura 4.6: Gráfica para la corrección independiente del modelo de la función de corrección electromagnética, $G_{EM}^{low}(t)$.

La función $G_{EM}^0(t)$ contiene únicamente los términos necesarios para la cancelación de las divergencias infrarojas, en consecuencia, la función $G_{EM}^0(t)$ es independiente del modelo. En la Fig.4.6 se muestra la gráfica de esta contribución a la función de corrección electromagnética. La totalidad de las contribuciones regulares de las correcciones electromagnéticas reales se incluyen en la función $G_{EM}^{rest}(t)$. En la Fig.4.7 se ha gráficado los valores de $G_{EM}(t)$ para la amplitud de Low encontrada en este trabajo, denotada con las siglas *AG*. En la misma gráfica se muestran los valores de $G_{EM}^0(t)$ y las funciones $G_{EM}(t)$ para las amplitudes de Low obtenidas en las ref.[63] y [78], que se han denotado con la nomenclatura *CEN* y *GPG* respectivamente.

En principio existe una discrepancia en los modelos utilizados debido a que existen términos adicionales en las distintas amplitudes de Low como se ha mostrado en la sección anterior. Hay que notar que el comportamiento de los distintos $G_{EM}(t)$ es similar, ya que, para el caso de $G_{EM}(t)$ *CEN* y $G_{EM}(t)$ *GPG* solo difieren para valores de t muy pequeños y para $t > 1 \text{ GeV}^2$ se comporta de manera similar. Por otro lado, para el caso de $G_{EM}(t)$ *CEN* y $G_{EM}(t)$ *AG* para valores de $t < 2 \text{ GeV}^2$ el comportamiento es similar, mientras que para $t > 2$, $G_{EM}(t)$ *AG* se ve modificada.

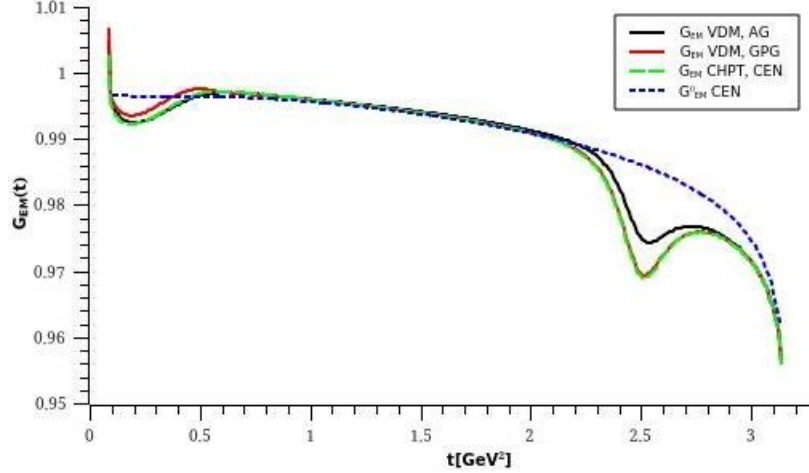


Figura 4.7: Corrección radiativa al espectro del decaimiento $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$. Los resultados obtenidos para $G_{EM}(t)$ en la aproximación de Low usando VDM [78] y CHPT [63] son mostradas. Se puede ver que existen pequeñas diferencias entre estas predicciones y también lo serán para el valor de $a_\mu^{had}|_{2\pi}$. También se muestra $G_{EM}^0(t)$ [63]

4.5. Correcciones a $g - 2$ del muón

La contribución hadrónica principal para el momento anómalo magnético del muón a_μ viene dada por:

$$a_\mu^{VP} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt K(t) \sigma_{e^+e^- \rightarrow had}^0(t), \quad (4.90)$$

donde $K(t)$ es el kernel a bajas energías y $\sigma_{e^+e^- \rightarrow had}^0$ denota la sección eficaz hadrónica desnuda donde para el estado final a dos piones, la relación entre la sección eficaz desnuda de e^+e^- y el diferencial del ancho de decaimiento observable de decaimientos de τ es:

$$\sigma_{\pi\pi}^0 = \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi(\gamma)}}{dt} \right] \times \frac{R_{IB}(t)}{S_{EW}} \quad (4.91)$$

donde cada cantidad a sido definida anteriormente en la sec.4.2 y los detalles fueron presentados en la Ref.[63].

4.5.1. Corrección del espacio fase

La corrección de rompimiento de isoespín³.

$$R_{IB}(t) = \frac{1}{G_{EM}(t)} \frac{\beta_{\pi^-\pi^+}^3}{\beta_{\pi^-\pi^0}^3} \left| \frac{F_V(t)}{f_+(t)} \right|^2, \quad (4.92)$$

incluye las correcciones en QED debidas a la inclusión de radiación de fotones suaves y duros (integradas sobre el espacio fase) para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \nu^- \pi^- \pi^0$, donde $\beta_{\pi^-\pi^+}^3/\beta_{\pi^-\pi^0}^3$ son las correcciones del espacio fase debido a la diferencia de masa $\pi^\pm - \pi^0$. $F_V(t) = F_\pi^0(0)$ es el factor de forma de corrientes vectoriales neutras NC. Por otra parte, $f_+(t) = F_\pi^-$ es el factor de forma de las corrientes cargadas CC y donde uno de los principales efectos de rompimiento de isoespín viene al incluir las correcciones de la mezcla de $\rho - \omega$ en $|F_V(t)|^2$. La función $G_{EM}(t)$ es la misma corrección electromagnética de la que se hablo anteriormente y de la que ya ha sido analizado su comportamiento.

Para evaluar el impacto de $R_{IB}(t)$ sobre a_μ^{VP} , se tienen que evaluar las contribuciones de la diferencia de masas entre los piones y cuya expresión correcta para $\sigma_{\pi\pi}^0$ y las correcciones dadas por CVC[63] a Δ_μ^{VP} esta dada por:

$$\Delta a_\mu^{VP} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{t_{max}} dt K(t) \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \right] \times \left(\frac{R_{IB}(t)}{S_{EW}} - 1 \right). \quad (4.93)$$

donde $S_{EW} = 1,0233 \pm 0,0006$ [1] es un factor electrodébil para las correcciones radiativas. Algunos resultados han sido presentados en la Ref. [63] [78] para la diferencia Δa_μ^{VP} tomando en cuenta las correcciones del espacio fase para t_{max} tan grande como $t_{max} \geq 1 \text{ GeV}^2$.

La contribución a Δa_μ^{VP} debida solamente a la corrección del espacio fase puede ser calculada de la siguiente manera

$$\Delta a_{\mu PS}^{VP} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{t_{max}} dt K(t) \left[\frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{\pi\pi[\gamma]}}{dt} \right] \times \left(\frac{\beta_{\pi^-\pi^+}^3}{\beta_{\pi^-\pi^0}^3} - 1 \right), \quad (4.94)$$

obteniendo así un valor de

$$\Delta a_{\mu PS}^{VP} = -5.1378 \times 10^{-10}. \quad (4.95)$$

³En la ref.[63]

4.5.2. Electromagnéticas

Una estimación de los efectos producidos por las correcciones radiativas a largas distancias basadas en decaimientos del τ para a_μ extraída de la contribución principal a 2π para esta observable puede ser obtenida de [63]:

$$\Delta a_\mu^{VP}[\pi\pi, \tau] = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt K(t) \frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{2\pi(\gamma)}}{dt} \times \left[\frac{1}{G_{EM}(t)} - 1 \right]. \quad (4.96)$$

La definición de las cantidades involucradas ha sido dada anteriormente, sin embargo, los detalles exactos pueden ser encontrados en la ref.[63].

Usando la expresión anterior y dados los diferentes modelos, CHPT y VDM, y conociendo el factor $G_{EM}(t)$ para los diferentes modelos, se obtiene que el valor de Δa_μ^{hadLO} que viene de la parte de la amplitud sólo de Low es:

$$\Delta a_\mu^{VP}|_{G_{EM}(t)} = \begin{cases} 2.04 \times 10^{-10} & \text{para CEN} \\ 1.80 \times 10^{-10} & \text{para GPG} \\ 2.12 \times 10^{-10} & \text{para AG} \end{cases} \quad (4.97)$$

mientras que el valor para $\Delta a_\mu^{hadLO}[\pi\pi, \tau]|_{G_{EM}^0} = 1.57 \times 10^{-10}$ el cual esta en acuerdo con el obtenido por los autores de la ref.[63] cuyo valor usando $G_{EM}^0(t)$ es de $\Delta a_\mu^{VP} = +16 \times 10^{-11}$. La discrepancia entre estos valores es debida a la forma de integración de probabilidad de decaimiento. Por otro lado, el valor reportado para la parte independiente es aproximadamente 1×10^{-10} el cual discreta con nuestro valor obtenido y con los resultados obtenidos para nuestro caso. El valor promedio es $\Delta a_\mu^{VP} = 1.99 \times 10^{-10}$, cuyo rango de valores es $\pm(0.2) \times 10^{-10}$ el cual será tomado como el error sistemático.

Al considerar tanto las correcciones del espacio fase y las electromagnéticas

$$\Delta a_\mu^{VP}[\pi\pi, \tau] = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt K(t) \frac{K_\sigma(t)}{K_\Gamma(t)} \frac{d\Gamma_{2\pi(\gamma)}}{dt} \times \left[\frac{\beta_{\pi^-\pi^+}^3 / \beta_{\pi^-\pi^0}^3}{G_{EM}(t)} - 1 \right]. \quad (4.98)$$

uno encuentra que el el valor de las diferentes contribuciones cambia de la siguiente manera

$$\Delta a_{\mu}^{VP}|_{GEM(t)PS} = \begin{cases} -3.16 \times 10^{-10} & \text{para CEN} \\ -3.40 \text{ times } 10^{-10} & \text{para GPG} \\ -3.08 \times 10^{-10} & \text{para AG} \end{cases} \quad (4.99)$$

cuyo valor promedio es $\Delta a_{\mu}^{VP}|_{GEM(t)PS} = -3,21 \times 10^{-10}$ y cuyo rango de valores esta entre $\pm(0.2) \times 10^{-10}$.

Considerando el valor promedio encontrado para la corrección electro-magnética a $\Delta a_{\mu}^{VP}|_{GEM(t)}$, uno puede escribir que

$$\Delta a_{\mu}^{VP}|_{GEM(t)} = 1.99234 \pm (0.2) \times 10^{-10}. \quad (4.100)$$

y

$$\Delta a_{\mu}^{VP}|_{GEM(t)Ps} = -3.21 \pm (0.2) \times 10^{-10}. \quad (4.101)$$

sin considerar los efectos debidos a las contribuciones de los factores de forma, $F_V(t)$ y $f_+(t)$ asociados a las corrientes neutras y cargadas.

Conclusión

En este trabajo de tesis se ha mostrado que, en la aproximación de Low para fotones suaves para la amplitud de decaimiento radiativo di-pion del leptón τ , las correspondientes correcciones radiativas a largas distancias obtenidas en VMD y CHPT aproximadamente dan resultados muy similares. La diferencia en las correspondientes evaluaciones del τ a 2π para las contribuciones VP a a_μ es numéricamente muy pequeña comparada a la incertidumbre experimental de a_μ . En otras palabras, uno puede decir que las parametrizaciones, tanto en VMD y CHPT, para el factor de forma del pión juega un papel muy importante, marginal en el cálculo de estas correcciones radiativas. En esta tesis han sido analizados muchos resultados anteriores a este, donde se han incluido algunos de los efectos del vértice VVP considerando explícitamente la una forma invariante de norma para la amplitud sin hacer ninguna aproximación para éste, se toman en cuenta los términos cuadrupolares para el vértice $VV\gamma$ y los términos longitudinales de los propagadores.

Para el modelo CHPT, como se dijo anteriormente, los términos proporcionales a $(p_- + p_0)$ mientras que en VMD estos términos vienen de la longitudinal de los propagadores y que se presentan en forma derivativa para el factor de forma, mientras que en CHPT solo existe un término derivativo. Se cree que es así, debido a que en el proceso no radiativo al considerar la simetría de iso-espín, la amplitud solo depende del factor de forma f_+ proporcional a $(p_- - p_0)$, es así, que en su modelo ellos consideran todos los términos proporcionales a $(p_- + p_0)$ igual a cero obteniendo sin duda una amplitud muy compacta y clara. Por otro lado, en VMD [78], los autores tienen términos adicionales proporcionales a $(p_- + p_0)$, sin embargo, no se hace una discusión acerca de estos términos.

Hay que mencionar además que la amplitud mostrada en la ec.(4.71), no satisface el teorema de Burnett y Kroll [8], es decir, los términos de orden k^{-1} no se cancelan para las interferencias de esta amplitud, ni mucho se cumple si solo se consideran el término de carga y el término magnético en analogía al artículo de Burnett y Kroll. Sin embargo, esto no es del todo malo, ya que ni las amplitudes en VMD y CHPT mostradas anteriormente lo cumplen, quizá una de las principales razones de ésto sea la inclusión de términos derivativos para el factor de forma, es decir, el teorema de Burnett y Kroll presentado no incluye términos derivativos de ningún tipo y es por eso que puede cancelar

los términos k^{-1} adecuadamente.

En este trabajo, hay que mencionar, que solo se consideró la contribución de la parte independiente del modelo, que viene dada solo por cuatro de los once diagramas que VDM permite construir, es decir, falta incluir la contribución de la parte dependiente del modelo⁴. Así, el impacto de la parte independiente a $a_{\mu(VDM)}^{\pi\pi,LO}$ de la función electromagnética $G_{EM}(t)$, calculada en el contexto de MDM

$$\Delta a_{\mu(VMD)}^{VP} = 1.99 \pm (0,2) \times 10^{-10}. \quad (4.102)$$

Este valor es casi dos veces mas grande al valor reportado por los autores en la ref.?? ($\Delta a_{\mu(VDM)}^{VP} \approx 1 \times 10^{-10}$). De acuerdo a los resultados obtenidos para la función de corrección electromagnética $G_{EM}(t)$ es claro que sin tomar en cuenta las contribuciones de los mesones $\omega(782)$, el valor para $\Delta a_{\mu(VMD)}^{VP}$ es casi idéntico al reportado en la ref.[63].

La última actualización presentada por Davier [47] para el valor de a_{μ} esta dada por:

$$a_{\mu}^{SM} = 11659181.7 \pm 4.2 \times 10^{-10}, \quad (4.103)$$

al ser comparado directamente con al medición [96]

$$a_{\mu}^{exp} = 11659209.1 \pm 6.3^{-10}, \quad (4.104)$$

su diferencia , $27.4 \pm 7.6 \times 10^{-10}$ (e^+e^-) mantiene una desviación de 3.6σ , donde la reducción de la predicción de la incertidumbre tiene que ser compensada con la inclusión de cálculos recientes para las contribuciones hadrónicas NN-LO, mientras que $a_{\mu}^{exp} - a_{\mu}^{SM}(\tau) = 7.4 \pm 9.2 \times 10^{-10}$ [104]. Tomando en cuenta nuestro resultado se tiene que $a_{\mu}^{exp} - a_{\mu}^{SM}(\tau, VDM) = 9.39234 \pm 9.2 \times 10^{-10}$, el cual aumenta aumenta la discrepancia entre el valor experimental de a_{μ} y su predicción basada en datos de decaimientos del τ . La diferencia diferencia entre las predicciones teóricas de a_{μ} da una prueba muy precisa de la hipótesis de la simetría CVC; teóricamente esta diferencia debería ser cero.

⁴Un estudio del modelo completo ha sido llevado a cabo en la ref.[77]

Apéndice A

Álgebra de Dirac ($n = 4$ dimensiones)

Las matrices de Dirac satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_4, \quad \mu, \nu = (0, 1, 2, 3). \quad (\text{A.1})$$

Aquí y en lo que sigue, I_n será la matriz unitaria $n \times n$. En la representación estándar (Dirac-Pauli), las matrices γ tiene la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$. Las matrices estándar de Pauli σ_i son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

con $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$, donde ϵ_{ijk} es totalmente antisimétrico.

Conjugado Hermitiano:

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0, \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad (\text{A.2})$$

Relación de matrices:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0; \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu. \quad (\text{A.4})$$

Identidades para las matrices γ .

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma_\nu &= g_{\mu\nu}I_4 - i\sigma_{\mu\nu}, \\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda &= g_{\mu\nu}\gamma_\lambda - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu + g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\alpha}\gamma^\alpha\gamma_5, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}I_4, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\mu &= -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha, \\ \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} &= 12I_4. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$, es totalmente antisimétrico; $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = +1$; $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = +1$;
 $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta_\rho^\mu\delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu\delta_\rho^\nu)$; $\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\epsilon_{\beta\mu\nu\rho} = -6\delta_\beta^\alpha$.

Teorema de trazas: La traza de un número impar de matrices γ desaparece, también:

$$\begin{aligned} \not{a} &\equiv \gamma_\mu a^\mu = \gamma^0 a^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{a}, \\ \text{Tr} I_4 &\equiv 4, \\ \text{Tr} \not{a} \not{b} &\equiv 4a \cdot b \\ \text{Tr} \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} &\equiv 4(a \cdot b c \cdot d - a \cdot c b \cdot d + a \cdot d b \cdot c), \\ \text{Tr} \gamma_5 \not{a} \not{b} &\equiv 0, \\ \text{Tr} \gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} &\equiv 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Álgebra de Dirac(n dimensiones).

En un espacio-tiempo n -dimensional (1 tiempo, $n - 1$ espaciales), las matrices de Dirac satisfacen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I_4, \quad \mu, \nu = (0, 1, 2, \dots, n - 1). \quad (\text{A.7})$$

Estas matrices también tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu\gamma^\nu &= nI_n, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu &= (2 - n)\gamma^\alpha, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}I_n + (n - 4)\gamma^\alpha\gamma^\beta, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\mu &= -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha - (n - 4)\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Región Euclidiana, Rotación de Wick

La propiedad básica que permite realizar una rotación de Wick es la analiticidad que se deriva de la causalidad de una QFT relativista. En el espacio de momentos el propagador de Feynman

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} &= \frac{1}{q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2 - i\epsilon}} \frac{1}{q^0 + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2 - i\epsilon}} \\ &= \frac{1}{2\omega_p} \left\{ \frac{1}{q^0 - \omega_p + i\epsilon} - \frac{1}{q^0 + \omega_p - i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

es una función analítica en q^0 con polos en $q^0 = \pm(\omega_p - i\epsilon)$ donde $\omega_p = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$. Esto permite rotar por $\pi/2$ la parte de la integración en q^0 , desde $-\infty$ hasta ∞ , sin cruzar alguna singularidad, haciendo esto, se rota el espacio de Minkowski al espacio Euclideo

$$q^0 \rightarrow -iq^d \Rightarrow q = (q^0, q^1, \dots, q^{d-2}, q^{d-1}) \rightarrow \bar{q} = (q^1, q^2, \dots, q^{d-1}, q^d), \quad (\text{B.2})$$

y así $q^2 \rightarrow -\bar{q}^2$. Esta rotación hacia el espacio Euclideo es llamada **rotación de Wick**.

Más precisamente: la analiticidad de una función $\bar{f}(q^0, \mathbf{q})$ en q^0 implica que la integral de contorno

$$\oint_{C(R)} dq^0 \bar{f}(q^0, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{B.3})$$

para la curva cerrada $C(R)$ en la Fig.?? desaparece. Sí la función $\bar{f}(q^0, \mathbf{q})$ cae lo suficientemente rápido a infinito, entonces la contribución de los dos arcos va a cero cuando el radio del contorno $R \rightarrow \infty$. En este caso se tiene

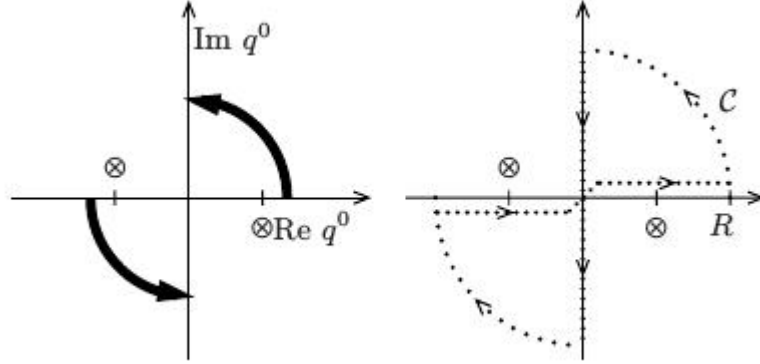


Figura B.1: Rotación de Wick en el plano complejo de q^0 . Los polos del propagador de Feynman están indicados por \otimes . C es el contorno de integración y R es el radio del arco.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \bar{f}(q^0, \mathbf{q}) + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dq^0 \bar{f}(q^0, \mathbf{q}) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Hay que notar que el propagador de Feynman Euclideano obtenido por la rotación de Wick

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{\bar{q}^2 + m^2}, \quad (\text{B.5})$$

el cual no tiene singularidades (polos) y la prescripción $i\epsilon$ no es necesaria. Así, en el espacio de configuración, una rotación de Wick implica ir de un tiempo imaginario $x^0 \rightarrow ix^0 = x^d$ tal que $qx \rightarrow \bar{q}\bar{x}$ y así

$$x^0 \rightarrow -ix^d \Rightarrow x^2 \rightarrow -x^2, \quad \square_x \rightarrow \Delta_{\bar{x}}, \quad i \int d^d x \dots \rightarrow \int d^d \bar{x} \dots \quad (\text{B.6})$$

mientras en el espacio de Minkowski $x^2 = 0$ define el cono de luz $x^0 = \pm|x|$, en la región Euclideana $\bar{x}^2 = 0$ implica $\bar{x} = 0$. Note que las posibles singularidades sobre el cono de luz pueden ser $1/x^2$, $\delta(x^2)$, etc. se convierten en singularidades en los puntos $\bar{x} = 0$. Esta simplificación de la estructura de las singularidades es el mérito de la métrica definida positivamente en el espacio Euclidiano.

Apéndice C

La estructura del procedimiento de Renormalización

La renormalización puede ser realizada en tres pasos:

(i) Cambiar los parámetros de masa o *masa renormalizable*: reemplazar los parámetros de masa desnuda de la Lagrangiana desnuda por unos renormalizados

$$\begin{aligned} m_{f0} &= m_{fren} + \delta m_f && \text{para fermiones} \\ M_{b0}^2 &= M_{bren}^2 + \delta M_b^2 && \text{para bosones.} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

(ii) Renormalización multiplicativa de los campos desnudos o *renormalización de las funciones de onda*: reemplazar los campos desnudos en la Lagrangiana desnuda por unos renormalizables

$$\psi_{f0} = \sqrt{Z_f} \psi_{fren}, \quad A_0^\mu = \sqrt{Z_\gamma} A_{ren}^\mu, \quad (\text{C.2})$$

y correspondientemente para otros campos del Modelo Estándar. El orden principal $Z_i = 1$ y así

$$Z_i = 1 + \delta Z_i, \quad \sqrt{Z_i} = 1 + \frac{1}{2} \delta Z_i + \dots \quad (\text{C.3})$$

(iii) La renormalización del vértice o *constante de acoplamiento renormalizada*: sustituye la constante de acoplamiento desnuda por una renormalizada:

$$e_0 = e_{ren} + \delta e. \quad (C.4)$$

El *teorema de renormalización* establece que el orden por orden en la expansión perturbativa todas las divergencias ultravioletas (UV) que aparecen en cantidades físicas (elementos de la matriz S) pueden ser eliminadas escogiendo apropiadamente los contra-términos, δm_f , δM_b^2 , δe y $\delta Z_i = Z_i - 1$. En otras palabras, normalizando adecuadamente las expresiones para las amplitudes físicas en términos de parámetros físicos medibles finitos en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, es decir, que nos permitan tomar de alguna manera la regularización dimensional, Note que para las funciones de Green, las cuales no son invariantes de norma en general, también los parámetros de norma ficticios tienen que ser renormalizados con el proposito de obtener funciones de Green finitas.

La reparametrización de la Lagrangiana desnuda, ec.(1.64), en términos de cantidades renormalizadas se lee:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu 0}(x)F_0^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\xi_0^{-1}(\partial_\mu A_0^\mu(x))^2 + \bar{\psi}_0(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi_0(x) \\ &\quad - e_0\bar{\psi}_0(x)\gamma^\mu\psi_0(x)A_{\mu 0}(x) \\ &= \mathcal{L}_{(0)}^{QED} + \mathcal{L}_{int}^{QED}, \end{aligned} \quad (C.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(0)}^{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu ren}(x)F_{ren}^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\xi_{ren}^{-1}(\partial_\mu A_{ren}^\mu(x))^2 \\ &\quad + \bar{\psi}_{ren}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{ren})\psi_{ren}(x), \\ \mathcal{L}_{int}^{QED} &= -e_{ren}\bar{\psi}_{ren}(x)\gamma^\mu\psi_{ren}(x)A_{\mu ren}(x) \\ &\quad - \frac{1}{4}(Z_\gamma - 1)F_{\mu\nu ren}(x)F_{ren}^{\mu\nu}(x) + (Z_e - 1)\bar{\psi}_{ren}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{ren} \\ &\quad - (m_0Z_e - m_{ren})\bar{\psi}_{ren}(x)\psi_{ren}(x) \\ &\quad - (e_0\sqrt{Z_\gamma Z_e} - e_{ren})\bar{\psi}_{ren}(x)\gamma^\mu\psi_{ren}(x)A_{\mu ren}(x), \end{aligned} \quad (C.6)$$

con $\xi_{ren} = Z_\gamma\xi_0$ el término que fija la norma permaneciendo irrenormalizable (no corresponde a un contra-término). Los contra-términos ahora son mostrados en \mathcal{L}_{int}^{QED} y pueden ser escritos en términos de $\delta Z_\gamma = Z_\gamma - 1$,

$\delta Z_e = Z_e - 1$, $\delta m = m_0 Z_e - m_{ren}$ y $\delta e = e_0 \sqrt{Z_\gamma} Z_e - e_{ren}$. Obviamente los propagadores (funciones de dos puntos) del fotón y del electrón deben ser renormalizados de acuerdo a:

$$\begin{aligned} D_0 &= Z_\gamma D_{ren} \\ S_{F0} &= Z_e S_{Fren}. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Apéndice D

Integrales de Lazo y Regularización dimensional

Para combinar los denominadores de los propagadores, se introduce la integral sobre los parámetros de Feynman:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}. \quad (\text{D.1})$$

La prueba de esta identidad es por inducción, sin embargo, por diferenciación repetida de la identidad anterior, se puede encontrar una identidad más general

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i - 1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)}. \quad (\text{D.2})$$

Esta fórmula es cierta incluso cuando los m_i no son enteros.

En particular, cuando solo se tienen dos factores en el denominador, esta fórmula se reduce a

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (\text{D.3})$$

Una vez hecho esto, la cantidad dentro de los corchetes en el denominador debería ser una función cuadrática de las variables de integración p_i^μ . Después, completando el cuadrado y trasladando las variables de integración se absorben los términos lineales en p_i^μ . Para la integral de un lazo, hay solo

una integración sobre el momento p^μ , el cual debe ser trasladado a otra variable de momento l^μ . Después de este cambio, el denominador toma la forma $(l^2 - \Delta)^n$. En el numerador, los términos con un número impar de potencias de l desaparecen por integración simétrica. La simetría también permite reemplazar

$$l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{d} l^2 g^{\mu\nu}, \quad (\text{D.4})$$

$$l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma \rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (l^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}).^1 \quad (\text{D.5})$$

La integral debe ser adecuadamente evaluada después de hacer eventualmente una rotación de Wick y llevarla a un espacio Euclideo con la sustitución

$$l^0 = i l_E^0, \quad l^2 = -l_E^2. \quad (\text{D.6})$$

Uno puede usar la siguiente tabla de integrales de d -dimensiones en el espacio de Minkowski

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{D.7})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{D.8})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i g^{\mu\nu} \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{D.9})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^2}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i d(d+2) \Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{(4\pi)^{d/2} 4 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \quad (\text{D.10})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{D.11})$$

Si la integral converge, $d = 4$ desde el inicio. Si la integral diverge, el comportamiento cerca de $d = 4$ puede ser extraído expandiendo

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = 1 - \left(2 - \frac{d}{2}\right) \log \Delta + \dots \quad (\text{D.12})$$

¹Aquí d es la dimensión del espacio-tiempo

También se necesita la expansión de $\Gamma(x)$ cerca de su polo:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x) \quad (\text{D.13})$$

cerca de $x = 0$, y

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{x+n} - \gamma + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right) \quad (\text{D.14})$$

cerca de $x = -n$. Aquí, γ es la constante de Euler-Mascheroni, $\gamma \approx 0,5772$.

Apéndice E

Reglas de Feynman generales

Las Reglas de Feynman son expresiones analíticas asociadas con cada una de las piezas que constituyen los diagramas de Feynman. Estas reglas permiten llevar a cabo una representación sistemática de los términos en la expansión perturbativa de la amplitud de transición \mathcal{M}_{ij} entre un estado inicial i y un estado final f . Así, para calcular la amplitud de algún proceso, se deben tener en cuenta las siguientes reglas generales:

(1) Dibujar todos los diagramas de Feynman conectados topológicamente conectados distintos en el orden de la teoría de perturbaciones, con sus respectivas *patas* internas y externas.

(2) Asociar los cuadri-momentos a líneas internas y externas, teniendo en cuenta la conservación del cuadri-momento.

(3) Asociar los cuadri-momentos a los lazos.

(4) Asociar un propagador D_F a cada línea interna.

(5) A cada vértice se asigna una cantidad compuesta por los siguientes factores:

(i) La constante de acoplamiento que aparezca en la densidad Lagrangiana correspondiente.

(ii) Por cada derivada de un campo ϕ , $\partial_\mu\phi$, asociar $-ip_\mu$ donde p es el correspondiente cuadri-momento entrante.

(iii) Un factor proveniente de la degeneración de partículas idénticas en cada

vértice.

(6) Por cada momento interno q no fijo por la conservación de cuadrimomento en cada vértice (cuadri-momentos en lazos), se introduce un factor

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

el cual debe ser integrado si es necesario, después de hacer la apropiada regularización dimensional.

(7) Multiplicar la contribución de cada diagrama por:

- (i) Un factor -1 entre diagramas que difieren entre sí por un intercambio de fermiones.
- (ii) Un factor de simetría $1/S$, donde S es el número de permutaciones de líneas internas y vértices que dejan invariante el diagrama si las líneas externas permanecen fijas.
- (iii) Un factor -1 por cada lazo fermiónico.

(8) Para cada partícula asociada con una línea externa, en capa de masa ($p_i^2 = m_i^2$), se debe poner:

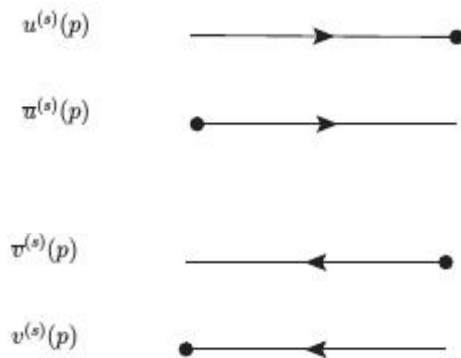
- (i) Un espinor $u(p)$ para cada fermión o $v(p)$ para cada anti-fermión entrantes con momento p .
- (ii) Un espinor $\bar{u}(p)$ para fermiones salientes o $\bar{v}(p)$ para anti-fermiones salientes con momento p .
- (iii) Los vectores de polarización $\epsilon_\mu(p, \lambda)$ o $\epsilon_\mu^*(p, \lambda)$ para bosones vectoriales entrantes o salientes respectivamente con momento p .
- (iv) Una constante cualquiera, convenientemente 1, para partículas escalares y pseudoescalares.

(9) La amplitud invariante \mathcal{M} se obtiene como el producto de las cantidades anteriores mencionadas en los anteriores puntos, a las que se denominan *Reglas de Feynman*, en una forma sistemática, comenzando describiendo siempre los diagramas de derecha a izquierda.

E.1. Reglas de Feynman para partículas con espín $s=1/2$

En la Fig.?? se muestran las reglas de Feynman para fermiones (leptones), así como para sus respectivas anti-partículas.

Para líneas externas se tiene que las reglas de Feynman para partículas y anti-partículas son:



Para las líneas internas de fermiones se tiene :



y para antifermiones



E.2. Reglas de Feynman para QED escalar

Una manera de incorporar a los mesones vectoriales $\rho, \omega, \phi...$ de acuerdo con las simetrías básicas de QCD es por medio de una Lagrangia de Resonancia aproximada (RLA)¹ [30] [31] una versión extendida de CHPT la cual

¹Por sus siglas en ingles Resonance Lagrangian Approach (RLA)

implementa VDM de manera consistente.

Estas reglas son obtenidas a partir de una parte de la Lagrangiana RLA que incluye los términos que contienen los mesones vectoriales neutros $\rho^0(770)$ y los mesones vectoriales axiales cargados $a_1^\pm(1260)$ y π^\pm , como también el fotón:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & -eg_\rho A^\mu \rho_\mu^0 - ig_{\rho\pi\pi} \rho_\mu^0 (\pi^+ \partial^\mu \pi^-) - ig_{\gamma\pi\pi} A_\mu (\pi^- \partial^\mu \pi^+) \\ & + (1-a)e^2 A_\mu A^\mu \pi^+ \pi^- + 2eg_{\rho\pi\pi} A_\mu \rho_\mu^0 \pi^+ \pi^- \\ & - e \frac{g_\rho}{F_\pi} A^\mu (V_{a_1\mu}^+ \pi^- - V_{a_1\mu}^- \pi^+) + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

donde las masas y los acoplamientos están relacionados por:

$$\begin{aligned} M_\rho^2 &= ag_V^2 F_\pi^2, & g_\rho &= ag_V F_\pi^2, \\ g_{\rho\pi\pi} &= \frac{1}{2} ag_V, & g_{\gamma\pi\pi} &= (1 - \frac{a}{2})e. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

el parámetro a no está fijo por la simetría misma, por lo regular, es bueno escoger $a = 2$ de acuerdo a los hechos fenomenológicos; (i) la universalidad de la constante de acoplamiento $g_{\rho\pi\pi} = g - V$, (ii) $g_{\gamma\pi\pi} = 0$ y (iii) $M_\rho^2 = 2g_{\rho\pi\pi}^2 F_\pi^2$. Las correspondientes reglas de Feynman completan las presentadas en la Fig.1.5 y Fig.1.4.

Para el propagador y transiciones de mezcla se tiene:

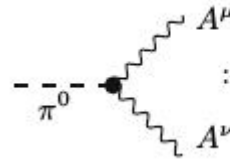
$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \mu \quad \rho^0 \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} & := \Delta_\rho^{\mu\nu}(q, M_\rho), \\ \begin{array}{c} \mu \quad a_1 \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} & := \Delta_{a_1}^{\mu\nu}(q, M_{a_1}), \\ \begin{array}{c} \mu \quad \gamma - \rho \quad \nu \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} & := -ie g_\rho g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

Figura E.1: Representación gráfica de los propagadores y términos de transición. La consideración en la dirección de los momentos es entrante

donde el propagador de un mesón vectorial se lee:

$$i\Delta_V^{\mu\nu}(q, M_V) = \frac{-i}{(q^2 - M_V^2)} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right). \quad (\text{E.3})$$

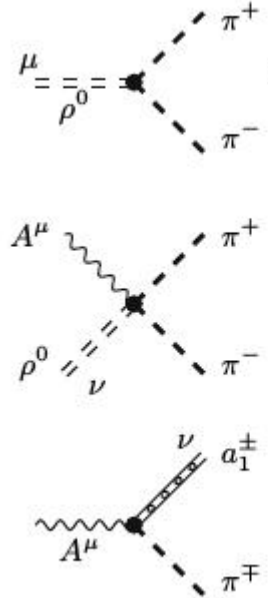
El vértice pión-fotón viene dado por:



$$:= \frac{e^2}{4\pi^2 F_\pi} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} ,$$

Figura E.2: Representación gráfica del vértice pión-fotón cuya dirección de momentos son entrantes para todas las partículas involucradas.

El vértice vector-mesón-pión/fotón queda definido por:



$$:= i g_{\rho\pi\pi} (p' - p)^\mu ,$$

$$:= 2e g_{\rho\pi\pi} g^{\mu\nu} ,$$

$$:= \mp e \frac{g_\rho}{F_\pi} g^{\mu\nu} .$$

Figura E.3: Representación gráfica del vértice vector-mesón-mesón/fotón. La consideración en la dirección de los momentos para las partículas es entrante.

E.3. Cinemática de $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau \gamma$

En el sistema en reposo del τ^- la razón diferencial del decaimiento para el proceso radiativo $\tau_{2\pi\gamma}$ está dada por [77]:

$$d^5\Gamma_\tau(\pi^- \pi^0 \gamma) = \frac{2\alpha G_F^2 |V_{ud}|^2 S_{EW}}{(2\pi)^7 m_\tau} |f_+(t)|^2 D(t, u) \left[\frac{2p \cdot p_-}{(k \cdot p - \frac{1}{2}m_\gamma^2)(k \cdot p_- + \frac{1}{2}m_\gamma^2)} - \frac{m_\tau^2}{(k \cdot p - \frac{1}{2}m_\gamma^2)^2} - \frac{m_\pi^2}{(k \cdot p_- + \frac{1}{2}m_\gamma^2)^2} \right] d^5\Phi + \mathcal{O}(k^0), \quad (\text{E.4})$$

donde se asigna una masa ficticia al fotón m_γ , la cual ayuda a tratar el término singular en $k = 0$. Por otra parte $D(t, u)$ es el mismo término definido anteriormente en la ec.(4.22) el cual es el término cinemático dentro del proceso radiativo [63] [64]. La razón de decaimiento para el proceso $\tau_{2\pi\gamma}$ puede ser escrita en términos de cinco variables cinemáticas independientes, el conjunto más apropiado es el formado por los invariantes $t = (p_- + p_0)^2$, $u = (p - p_-)^2$ y $x = (k + q)^2$, y los ángulos azimutal del neutrino θ_ν y polar del pión cargado ϕ_- , ambos definidos en el sistema en reposo del τ^- . En términos de estas variables la expresión del elemento diferencial del espacio fase es [77]

$$d^5\Phi = \frac{\pi^2}{2^5 m_\tau^2} d\phi_- d\cos\theta_\nu dx du dt. \quad (\text{E.5})$$

Sea \mathcal{D}^{IV} la región cinemática física para las variables t , u y x ; esta región se puede dividir en dos regiones \mathcal{D}^{III} y $\mathcal{D}^{IV/III}$, de tal manera que $\mathcal{D}^{III} \cup \mathcal{D}^{IV/III} = \mathcal{D}^{IV}$. La proyección de \mathcal{D}^{III} sobre el plano $t - u$ corresponde a la región cinemática \mathcal{R}^{III} accesible en el decaimiento no radiativo $\tau_{2\pi}$, mientras que la proyección de $\mathcal{D}^{IV/III}$ sobre el plano $t - u$ define una región que se denota por $\mathcal{R}^{IV/III}$, a la cual solo es accesible el decaimiento $\tau_{2\pi\gamma}$ [89]. La región cinemática al decaimiento $\tau_{2\pi\gamma}$ está definida mediante el dominio:

$$\mathcal{D}^{IV} = \{ \text{mín}[t] \leq t \leq \text{máx}[t], \text{mín}[u](t) \leq u \leq \text{máx}[u](t), \\ \text{mín}[x](t, u) \leq x \leq \text{máx}[x](t, u) \}, \quad (\text{E.6})$$

donde los mínimos y máximos de las variables son

$$\text{mín}[t] = 4m_\pi^2, \quad (\text{E.7})$$

$$\text{máx}[t] = m_\tau^2, \quad (\text{E.8})$$

$$\text{mín}[u](t) = u^-(t) \quad \forall \quad 4m_\pi^2 \leq t \leq m_\tau^2, \quad (\text{E.9})$$

$$(\text{E.10})$$

$$\text{máx}[u](t) = (m_\tau - m_\pi)^2 \quad \forall \quad 4m_\pi^2 \leq t \leq t^*, \quad (\text{E.11})$$

$$= u^+(t) \quad \forall \quad t^* \leq t \leq m_\tau^2, \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} \text{mín}[x](t, u) &= m_\gamma^2 \quad \forall \quad (t, u) \in \mathcal{R}^{III}, \\ &= x_-(t, u) \quad \forall \quad (t, u) \in \mathcal{R}^{IV/III}, \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\text{máx}[x](t, u) = x_+(t, u) \quad \forall \quad (t, u) \in \mathcal{R}^{IV}. \quad (\text{E.14})$$

Las expresiones para $u^\pm(t)$ están dadas en la ec.(??), $t^* = m_\tau^2 m_\pi / (m_\tau - m_\pi)$ es el valor que maximiza a $u^+(t)$ mientras que las funciones $x_\pm(t, u)$ están dadas por:

$$x_\pm(t, u) = \frac{1}{2m_\pi^2} \{ 2m_\pi^2(m_\tau^2 + t) - t(m_\tau^2 + m_\pi^2 - u) \pm t\beta_{\pi^- \pi^0} \lambda^{1/2}(u, m_\tau^2, m_\pi^2) \}. \quad (\text{E.15})$$

Las regiones \mathcal{D}^{III} y $\mathcal{D}^{IV/III}$ pueden ser escritas en términos de los siguientes dominios[77][63]:

$$\mathcal{D}^{III} = [4m_\pi^2 \leq t \leq m_\tau^2, u^-(t) \leq u(t) \leq u^+(t), m_\gamma^2 \leq x \leq x_+(t, u)], \quad (\text{E.16})$$

$$\mathcal{D}^{IV/III} = [4m_\pi^2 \leq t \leq t^*, u^+(t) \leq u(t) \leq (m_\tau - m_\pi)^2, x_-(t, u) \leq x \leq x_+(t, u)]. \quad (\text{E.17})$$

Sus correspondientes proyecciones se muestran en la Fig.E.4, donde la función $x_-(t, u)$ tiene que ser estrictamente positiva en la región $\mathcal{D}^{IV/III}$, es decir, tiene que ser mayor a cero, lo que garantiza que esta región este libre de IR.

Finalmente para concluir esta sección, la razón de decaimiento para el modelo inclusivo $\tau_{2\pi\gamma}$ puede ser escrita en términos de la contribución del modo $\tau_{2\pi}$ y la contribución del modo radiativo [63]

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_\tau(\pi^- \pi^0 [\gamma])}{dt} &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^3}{384\pi^3} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{t}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \\ &\times \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) |f_+(t)|^2 G_{EM}(t). \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

La ecuación anterior es bajo régimen de simetría de isospín. Por otra parte, la función $G_{EM}(t)$ resume las correcciones radiativas virtuales y reales de $\mathcal{O}(\alpha)$ [63].

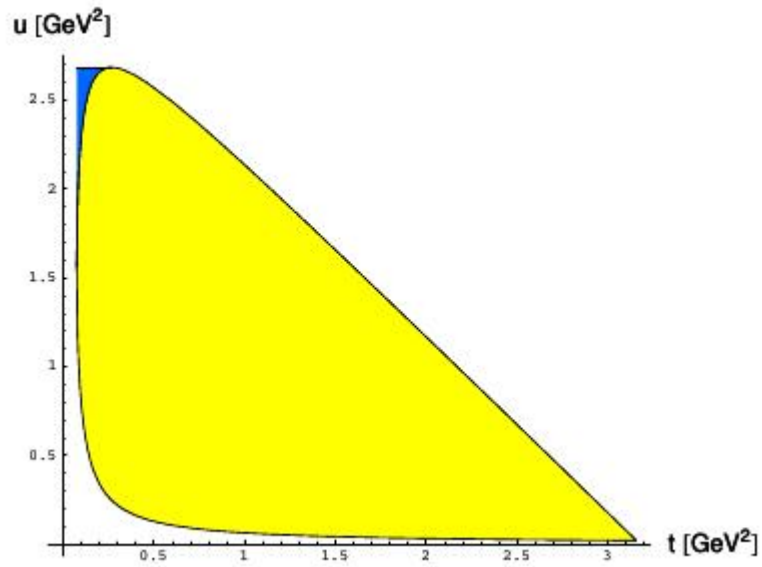


Figura E.4: Gráfica del dominio cinemático \mathcal{R}^{IV} del decaimiento $\tau_{2\pi\gamma}$. La región en color amarillo corresponde a la región \mathcal{R}^{III} accesible también para el decaimiento no radiativo $\tau_{2\pi}$, mientras que la región en azul corresponde a la región $\mathcal{R}^{IV/III}$, la cual solo es accesible al proceso radiativo $\tau_{2\pi\gamma}$ [77]

Bibliografía

- [1] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 40, 100001 (2016) and 2017
- [2] M. L. Perl et al., *Phys. Rev. Lett.* 35, 1489 (1975)
- [3] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, *Phys. Rev. Lett.* 13, 138 (1964).
- [4] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* 10, 531 (1963).
- [5] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* 49, 652 (1973).
- [6] ATLAS, CDF, CMS and D0 Collaborations, arXiv:1403.4427 [hep-ex]
- [7] F. E. Low, *Phys. Rev.* 110, 974 (1958)
- [8] T. H. Burnett and N. M. Kroll, *Phys. Rev. Lett.* 20, 86 (1968)
- [9] Quang Ho-Kim; Xuan-Yem Pham. *Elementary Particles and Their Interactions Concepts and Phenomena*. Springer. (1998)
- [10] Michael E. Peskin; Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press. (1995)
- [11] S. J. Chang. *Introduction to Quantum Field Theory* World Scientific. (1990)
- [12] G. Lüders, *K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* 28 (1954) No. 5; W. Pauli, Exclusion principle, Lorentz group and reflection of space-time and charge. In: *Niels Bohr and the Development of Physics*, ed by W. Pauli (Pergamon Press London 1955, reissued 1962) pp. 30–51; W. Pauli, *Il Nuovo Cim.* 6 (1957) 204; G. Lüders, *Ann. Phys. N. Y.* 2

- (1957) 1; G. Lüders, B. Zumino, Phys. Rev. 106 (1957) 345; R. Jost, Helv. Phys. Acta 30 (1957) 409
- [13] S. Gasiorovicz, Elementary particle physics, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966), p. 513
- [14] Luis Álvarez-Gaumé y Miguel Á. Vázquez-Mozo. *An Invitation to Quantum Field Theory*. Springer. (2012)
- [15] Matthew D. Schwartz *QUANTUM FIELD THEORY and the STANDARD MODEL*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. (2014)
- [16] Wolfgang Bietenholz and Uwe-Jens Wiese. *The Standar Model of Particle Physics* Notas.(2015)
- [17] Pablo Roig Garcés. *Desintegraciones hadrónicas y radiativas del leptón tau: $\tau^- \rightarrow (PPP)^- \nu_\tau, \tau^- \rightarrow P^- \gamma \nu_\tau$* . Tesis Doctoral. Departament de física teórica, Universitat de València, 2010
- [18] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field, Phys. Lett. B25 (1967) 29.
- [19] Sidney Coleman. *Aspects of Symmetry*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. 1985.
- [20] B. L. Ioffe, V. S. Fadin and L. N. Lipatov. *Quantum Chromodynamics. Perturbative and Nonperturbative Aspects..* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.2010.
- [21] Ta-Pei Cheng; Ling-Fong Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. CLARENDON PRESS. OXFORD. 1982.
- [22] Michio Kaku. *QUANTUM FIELD THEORY. A Modern Introduction..*OXFORD UNIVERSITY PRESS.1993.
- [23] Ashok Das. *FIELD THEORY. A Path Integral Approach..* World Scientific Lectures Notes in Physics-Vol. 75. 2nd ed.
- [24] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer (2008).

-
- [25] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields Vol.I Foundations*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. 1995.
- [26] Hagen Kleinert and Verena Schulte-Frohlinde. *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*. Freie Universitat Berlin (2001)
- [27] Roberto Casalbuoni. *Advanced Quantum Field Theory*. Dipartimento di Fisica. Università di Firenze (2005)
- [28] F. Jegerlehner *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon*. Springer. (2008)
- [29] Antonio Pich. *EFFECTIVE FIELD THEORY*, course, IFIC, Universitat de València, arXiv.org/abs/hep-ph/9806303v1, (1998).
- [30] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, E. de Rafael, Nucl. Phys. B 321 (1989)
- [31] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, E. de Rafael, Phys. Lett. B 223 (1989)
- [32] F. Jegerlehner. DESY 07-033, HU-EP-07/05,(2007), arXiv:hep-ph/0703125v1
- [33] Antonio Pich, arxiv:1606.07764v1 (2016).
- [34] Antonio Pich, arxiv:1101.2107v1 (2011).
- [35] A. Pich, Nucl., Phys., B Proc.,Suppl.00 (2014) 1
- [36] Francis Halzen *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. JOHN WILEY and SONS. (1984)
- [37] Mark Burgess. *Classical Covariant Fields*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2003)
- [38] P. Kusch, H. M. Foley, Phys. Rev. 73 (1948) 421; Phys. Rev. 74 (1948) 250
- [39] A. Gongora, R. G. Stuart, Z. Phys. C 55 (1992)
- [40] M.A. Arroyo-Ureña, G. Hernández-Tomé and G. Tavares-Velasco, arXiv:1612.09537v3. 2017.

-
- [41] J. S. Schwinger, Phys. Rev. 73 (1948) 416
- [42] A. Pich, Prog. Part. Nucl. Phys. 75 (2014) 41.
- [43] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 117 (1928) 610; A 118 (1928) 351
- [44] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. 109 (2012)
- [45] W. A. Bardeen, R. Gastmans, B. Lautrup, Nucl. Phys. B 46 (1972) 319; G. Altarelli, N. Cabibbo, L. Maiani, Phys. Lett. B 40 (1972) 415; R. Jackiw, S. Weinberg, Phys. Rev. D 5 (1972) 2396; I. Bars, M. Yoshimura, Phys. Rev. D 6 (1972) 374; K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda, Phys. Rev. D 6 (1972) 2923
- [46] C. Gnendiger, D. Stöckinger, H. Stöckinger-Kim, Phys. Rev. D 88, 053005 (2013).
- [47] M. Davier, Nuclear and Particle Physics Proceedings 287–288 (2017) 70
- [48] F. Jegerlehner. DESY 15-220, HU-EP-15/53.(2015)
- [49] F. Jegerlehner. DESY 17-058, HU-EP-17/12 (2017)
- [50] J. Erler and G. Toledo Sánchez. Phys. Rev. Lett.97.161801(2006)
- [51] G.W. Bennett *et al.*(Muon(g-2) Collaboration). Phys. Rev. Lett. 92, 161802 (2004).
- [52] J. Prades, E. de Rafael, and A. Vainshtein, Advanced series on directions in high energy physics 20, Editors B. L. Roberts and W. Marciano, arxiv:0901.0306.
- [53] K. Hagiwara, A.Keshavarzi, A.D. Martin, D. Nomura and T.Teubner. Nuclear and Particle Physics Proceedings 287–288 (2017) 33
- [54] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 111808.
- [55] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard, A. Smirnov, V. Smirnov and M. Steinhauser, Phys. Rev. D 93 (2016) no.5, 053017.

- [56] A. Czarnecki, W.J. Marciano and A. Vainshtein, Phys. Rev. D 67 (2003) 073006; Erratum: Phys. Rev. D 73 (2006) 119901.
- [57] A. Kurz et al., arxiv:1511.08222.
- [58] A. Cherchiglia, P. Kneschke, D. Stöckinger and H. Stöckinger- Kim, arXiv:1607.06292 [hep-ph]
- [59] F. Jegerlehner, J. Fleischer, Phys. Lett. B 151 (1985); Acta Phys. Polon. B 17 (1986)
- [60] S. Eidelman, D. Epifanov, M. Fael, L. Mercolli and M. Passera, arXiv:1601.07987v1. 2016.
- [61] S. Anderson et al. [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D 61 (2000) 112002
- [62] R. Alemany, M. Davier, A. Höcker, Eur. Phys. J. C 2 (1998)
- [63] V. Cirigliano, G. Ecker and H. Neufeld, JHEP. 08 (2002) 002.
- [64] V. Cirigliano, G. Ecker, H. Neufeld, Phys. Lett. B 513 (2001).
- [65] W. Weise: Hadronic Aspects of Photon-Nucleus Interactions. Phys. Rev. 13, páginas 53–92, 1974
- [66] J. J. Sakurai: Theory of Strong Interactions. Ann. Phys. (NY) 11, páginas 1–48, 1960.
- [67] C. N. Yang y F. Mills: Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. Phys. Rev. 96, páginas 191–195, 1954
- [68] H. B. et al O’Connell. arXiv:hep-ph/9501251v3 (1997).
- [69] Vlasios Petousis. arXiv:1301.4921v1 (2013).
- [70] N. M. Kroll, T. D. Lee y B. Zumino. Phys. Rev. 157, pag. 1376–1399 (1967).
- [71] A. R. Zerwekh. ActaPhys. Polon. B38, pag. 2077–2082, 2007.
- [72] Murray Gell-Mann y Fredrik Zachariasen, Phys. Rev. 124, pag. 953–964(1961).

- [73] G. López and G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. D56, 4408 (1997)
- [74] G. Toledo Sánchez. Tesis de Doctorado. CINVESTAV-IPN.
- [75] Luis A. Jiménez Pérez. *Efectos de la estructura de los mesones $K^{*\pm}$ en el proceso $e^+e^- \rightarrow K^+\pi^0K^-\pi^0$* . Tesis de Maestría. UNAM. 2015.
- [76] Fernando Iguazú Ramírez Zavaleta. *Propiedades del vértice WWV ($V = \gamma Z$) en modelos extendidos*. Tesis de Doctorado, CINVESTAV, IPN, 2007.
- [77] Alain Flores Tlalpa. *Modelo de dominancia de mesones para decaimientos semileptónicos de sabores pesados*. Tesis de Doctorado, CINVESTAV, IPN, 2008.
- [78] G. López Castro et al. Nuclear and Particle Physics Proceedings 260 (2015) 70
- [79] R. Barate *et al.*(ALEPH Collaboration), Eur. J. Phys. C 4, 409 (1998).
- [80] S. Schael *et al.*(ALEPH Collaboration), Phys. Rept. 421, 191 (2005).
- [81] O. Igonkina, Frascati Phys. Ser. 41, 265 (2006).
- [82] A. Ferroglia, C. Greub, A. Sirlin, Z. Zhang, Phys. Rev. D 88 (2013) 033012.
- [83] M. Fael, L. Mercolli, M. Passera, Phys. Rev. D 88 (2013) 093011.
- [84] J. Erler, Rev. Mexicana Fís. 50 (2004) 200.
- [85] M. Davier, et al., Eur. Phys. J. C 66 (2010) 127.
- [86] M. Antonelli, V. Cirigliano, A. Lusiani, E. Passemar, J. High Energy Phys. 1310 (2013) 070.
- [87] K. J. F. Gaemers y Gounaris G. J. arXiv:1507.03414v1, (2015).
- [88] J. H. Kuhn, A. Santamaria, Tau decays to pions, Z.Phys. C48 (1990) 445–452.
- [89] F. Flores-Báez et al. Phys. Rev. D 74, 071301(R) (2006)

-
- [90] A. Flores-Tlalpa, G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. D 72, 113003(2005)
- [91] G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Phys. Rev. D 61, 033007 (2000).
- [92] T. M. Aliev, I. Kanik and M. Savci, Phys. Rev. D 68, 056002 (2003); M. Hecht and B. H. McKellar, Phys. Rev. C 57, 2638 (1998); A. Samsonov, JHEP 12 (2003) 61; S. J. Brodsky and J. R. Hiller, Phys. Rev. D 46, 2141 (1992).
- [93] E. Braaten, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1606; Phys. Rev. D 39 (1989) 1458.
- [94] José F. Nieves y Palash B. Pal. Phys Rev. D 55, pag 3118–3130 (1997).
- [95] D. Hanneke, S. Fogwell and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 120801.
- [96] G. W. Bennett et al., Muon g-2 coll., Phys. Rev. D73, 072003(2006)
- [97] A.L. Kataev, Phys. Rev. D74 (2006) 073011.
- [98] M. Davier et al., Eur. Phys. J. C71 (2011) 1515.
- [99] C. A. Dominguez, K. Schilcher and H. Spiesberger. arXiv:1605.07903v1 (2016)
- [100] S. J. Brodsky and E. de Rafael, Phys. Rev. 168, 1620 (1968).
- [101] Gabriel López-Castro y Genaro Toledo-Sánchez. Phys. Rev. D 61, 033007, (2000).
- [102] N. Cabibbo and A. Maksymowicz, Phys. Rev. 137, B438 (1965); A. Pais and S. B. Treiman, Phys. Rev. 168, 1858 (1968)
- [103] G. P. Lepage, J. Comput. Phys. 27, 192 (1978).
- [104] M. Passera, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 169, 213 (2007)