



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESPACIO-TIEMPO CON TORSIÓN EN SISTEMAS  
CON SIMETRÍA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**CHRISTIAN PETERSON BORQUEZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. YURI BONDER GRIMBERG**

**2017**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Peterson

Borquez

Christian

56 65 33 21

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

413054795

2. Datos del tutor

Dr

Yuri

Bonder

Grimberg

3. Datos del Sinodal 1

Dr

Daniel Eduardo

Sudarsky

Saionz

4. Datos del Sinodal 2

Dr

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

5. Datos del Sinodal 3

Dr

Mariano

Chernicoff

Minsberg

6. Datos del Sinodal 4

Dr

Elías

Okón

Gurvich

7. Datos del trabajo escrito

Espacio-tiempo con torsión en sistemas con simetría

41 p

2017

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Geometría con torsión</b>	<b>8</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	8
2.2. Operadores derivada . . . . .	10
2.3. Transporte paralelo . . . . .	12
2.4. Curvas autoparalelas y geodésicas: la torsión entra en juego . . . . .	13
2.4.1. Curvas autoparalelas . . . . .	13
2.4.2. Interpretación de la torsión . . . . .	14
2.4.3. Curvas geodésicas . . . . .	15
<b>3. Simetrías y torsión</b>	<b>17</b>
3.1. Derivada de Lie . . . . .	17
3.2. Campos de Killing . . . . .	18
3.2.1. Caso sin torsión . . . . .	18
3.2.2. Caso con torsión . . . . .	19
3.3. Integrando las autoparalelas . . . . .	19
3.3.1. Espacio euclidiano en 2D y 3D . . . . .	19
3.3.2. Espacio tipo Minkowski 1+1 con torsión de fondo . . . . .	21
3.3.3. Espacio-tiempo tipo Schwarzschild . . . . .	21
3.4. ¿Qué tanto difieren las geodésicas y autoparalelas? . . . . .	25
<b>4. Tensor de Curvatura</b>	<b>26</b>
4.1. Calculando la curvatura . . . . .	28
<b>5. Ecuaciones de Papapetrou</b>	<b>30</b>
5.1. Caso sin torsión: volviendo a GR . . . . .	31
5.2. Caso con torsión . . . . .	33
<b>6. Conclusiones</b>	<b>36</b>

# 1. Introducción

A pesar de su amplio éxito experimental existen argumentos para pensar que la Relatividad General, que es la teoría de la gravedad más exitosa a la fecha, debería ser una aproximación a una teoría más fundamental. Entre estos problemas se encuentran la aparición de soluciones singulares [1], la incompatibilidad con la mecánica cuántica [2] y los problemas de materia y energía oscura [3]. Con el objetivo de resolver este tipo de problemas se han estudiado teorías alternativas a la Relatividad General, llamadas teorías de gravedad modificada. A pesar de haber ciertos resultados interesantes, es importante mencionar que hasta la fecha ninguna de ellas ha logrado reemplazar a la Relatividad General, siendo esta la teoría de la gravedad más simple que mejor describe las observaciones [4].

En el intento por encontrar una teoría de gravedad compatible tanto en el régimen microscópico (i.e. *cuántico*) como en el límite clásico, extender la Relatividad General parece ser un camino factible. En la mecánica cuántica, además de la masa en reposo (energía-momento) de las partículas, la estructura interna o momento angular de *espín* también las caracteriza dinámicamente [5]. Por esta razón parece interesante exigir que esta propiedad sea una fuente gravitacional, es decir, esté acoplada a la geometría del espaciotiempo. Esto conduce a una estructura matemática del espaciotiempo más general, llamados espaciotiempos de Riemann-Cartan [6]. En estos espacios existe un nuevo ente geométrico llamado *torsión*. Entender este concepto matemáticamente forma parte importante de este trabajo, y una vez desarrollados los conceptos necesarios se procede al objetivo central de la tesis, que es estudiar la ecuación de movimiento de partículas de prueba bajo la aparición de una torsión no nula.

Para investigar las posibles extensiones de la Relatividad General es importante entenderla a cabalidad, razón por la que a continuación se presenta un breve resumen de esta teoría desde una perspectiva histórica, resaltando sus postulados, pasando también por ciertos hechos históricos relacionados con la torsión.

Las leyes de Newton son válidas únicamente en ciertos sistemas de referencia especiales, llamados inerciales. La definición de estos está incluida en la primera ley, y dice que un sistema inercial será aquel en el cual *cualquier* partícula libre se mueve a velocidad constante. Es claro que existen muchos sistemas de referencia inerciales. Todos ellos están relacionados por las transformaciones de Galileo y éstas pueden consultar en la referencia [7].

En los sistemas inerciales se vale el principio de relatividad, que se remonta hasta Galileo, y puede parafarsearse de una forma muy sencilla siguiendo la referencia [7]: *Experimentos idénticos realizados en diferentes sistemas de referencia inerciales dan lugar a resultados idénticos*. Nótese que esto habla de todos los experimentos y cualquier sistema inercial. En particular, este hecho implica que no existe experimento posible para determinar la velocidad absoluta de un sistema de referencia inercial.

Asumiendo la universalidad del tiempo, la mecánica de Newton era compatible con las transformaciones de Galileo. Sin embargo en el año 1865 la física encontraría sus primeras ecuaciones incompatibles con las transformaciones de Galileo, cuando James Clerk Maxwell lograra unificar todos los fenómenos electromagnéticos en cuatro elegantes ecuaciones que hoy llevan su nombre [8]. Entre las más importantes consecuencias de su teoría se encuentra la existencia de ondas electromagnéticas, predicción que después sería corroborada experimentalmente, además de identificar a la luz como un fenómeno de este tipo. Una de las conclusiones

que tomó la comunidad de físicos al conocer este resultado es que debía existir un medio, al que se llamó *éter*, que sostenía las oscilaciones electromagnéticas, pues hasta el momento todas las ondas conocidas viajaban a través de medios materiales. Otra motivación fue que las ecuaciones de Maxwell predicen una velocidad constante para este tipo de ondas en vacío, de donde se pensó que tal velocidad sería en el sistema de referencia en reposo de tal ente, ahora como un sistema de referencia *absoluto*.

Esta idea causó confusión y discusión en la comunidad durante largo tiempo y en 1881, intentando medir la velocidad de la tierra respecto a este medio, Michelson y Morley descubrieron que sus efectos eran indetectablemente pequeños. Para intentar resolver este problema Lorentz, Fitzgerald y Poincaré propusieron que los cuerpos se contraían al moverse en este medio y los relojes corrían a distinto ritmo. A pesar de describir las observaciones, esta teoría no fue aceptada ya que sus postulados básicos no podían ponerse a prueba [9].

Motivado por la asimetría de los fenómenos electromagnéticos al considerar cuerpos en movimiento Einstein logró entender que estos, al igual que en los fenómenos en la mecánica, no debían poseer ideas referentes al reposo absoluto. Con estas ideas rederivó las transformaciones de Lorentz entre sistemas inerciales en su famoso artículo de 1905 [10], a partir de dos postulados fundamentales:

- El principio de relatividad de Galileo.
- La velocidad de la luz en vacío es igual para todos los observadores inerciales, independientemente de la velocidad de éstos o la velocidad de la fuente.

Increíblemente, a partir de estos Einstein logró demostrar que las ecuaciones de Maxwell son covariantes ante transformaciones de Lorentz, con lo que probó que la introducción del concepto de éter era innecesaria y que las ondas electromagnéticas podían viajar en el vacío. Además no existe un concepto de tiempo *universal* como en la de física de Newton, sino que la simultaneidad entre dos eventos depende del observador en cuestión. La consecuencia más importante de este resultado es que para respetar la causalidad la velocidad de la luz es la velocidad máxima para cualquier señal física.

A esta teoría postulada por Einstein se le conoce hoy en día como *Relatividad Especial* y ha sido confirmada ampliamente en experimentos midiendo distintos fenómenos. Véanse referencias [11, 12].

Al poco tiempo de ser postulada la Relatividad Especial Minkowski se dio cuenta que era de gran utilidad unificar al tiempo y al espacio como un solo ente, al que ahora se le llama espaciotiempo. Más aún, existe un concepto de *norma* en este espacio que se preserva ante transformaciones entre sistemas inerciales.

Sin embargo para incluir el efecto de la gravedad aún existían problemas: ésta acelera los cuerpos y la ley de gravitación de Newton ( $F_g = Gm_1m_2/r^2$ ) era de alcance inmediato, por lo que no podía ser compatible con la relatividad. Así Einstein pensó que la ley de Newton debía ser una aproximación de una ley más fundamental [7], y esta visión unificada de espaciotiempo sería clave para la generalización de su teoría.

En seguida comenzó Einstein a estudiar el movimiento acelerado en Relatividad Especial, publicando un artículo en 1908. En él argumentó porque los efectos de la gravedad desapa-

recen para el movimiento en caída libre, de donde las leyes de la Relatividad Especial deben aplicar para él. A tal acercamiento se le conoce actualmente como *Principio de Equivalencia*. Su motivación era la siguiente [13]: las leyes de Newton, así como la Relatividad Especial, se basan en la existencia de sistemas de referencia especiales, los inerciales. Además le parecía un poco extraño que la masa que aparece en la ley de inercia ( $F = ma$ ) y en la ley de gravitación universal ( $GMm/r^2$ ) sea la misma, como si artificialmente la ley estuviera puesta para que todos los cuerpos de prueba cayeran de la misma manera en presencia de la masa  $M$ .

La solución de Einstein revolucionaría la física nuevamente. Su teoría, conocida como *Relatividad General* y publicada en 1915 [14], no trata a la gravitación como una fuerza, sino que cualquier objeto es fuente de campo gravitacional y *curva* el espacio-tiempo a su alrededor, de modo que los cuerpos libres de fuerzas se mueven únicamente debido a su inercia en este espacio curvado [13].

En concreto, el espacio-tiempo debía ser ahora una *variedad diferenciable* 4 dimensional, dotada de una *métrica*  $g_{ab}$  que dice como un observador mide localmente tiempo y espacio. De la teoría de variedades riemannianas, y bajo ciertas suposiciones, se sabe que  $g_{ab}$  determina por completo la geometría de la variedad. Para relacionarla con otras cantidades físicas, Einstein llegó a la ecuación

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{1.1}$$

donde el lado izquierdo son operadores diferenciales actuando en  $g_{ab}$ , mientras el lado derecho está dado por la distribución de materia y energía en espacio-tiempo. En el caso en que no hay gravedad se reduce a Relatividad Especial, además de contenerla localmente en el caso general y en el límite de gravedad débil y bajas velocidades, contiene la ley de gravitación de Newton [15].

Como toda teoría predijo nuevos fenómenos, dignos de ser puestos a prueba experimentalmente. Entre ellos se encuentran las ondas gravitacionales, el corrimiento al rojo gravitacional, la dilatación gravitacional del tiempo y la desviación de la luz. Fue este último fenómeno el que utilizaría el reconocido astrónomo Arthur Stanley Eddington en 1919 para probar que la teoría propuesta por Einstein era correcta. Para ello observó, durante un eclipse total de sol, estrellas cuya luz pasaba cerca de la frontera del sol. Después observó las mismas estrellas en ausencia del sol y notó que en el primer caso la estrellas se parecían alejarse del Sol, es decir, su luz se desviaba.

Desde entonces la Relatividad General ha sido ampliamente exitosa en explicar las observaciones, que incluyen detección indirecta de hoyos negros [16], el corrimiento al rojo gravitacional y cosmológico [17], la expansión del universo [3] y hasta la reciente detección de ondas gravitacionales [18].

El primer acercamiento a una teoría que contenga a la Relatividad General como caso particular fue propuesto muy poco tiempo después de la postulación de esta teoría cuando Élie Cartan, estudiando precisamente Relatividad General, se dio cuenta que era posible extender el concepto de conexión a una conexión asimétrica [19–21]. Allí reconoció el caracter tensorial de la *torsión* y desarrolló los conceptos geométricos generalizados. A pesar de que tenía idea de que la torsión debía estar conectada con el momento angular intrínseco de la materia y debía ser cero en vacío, Cartan solo desarrolló las primeras nociones de ésta en Relatividad

General [6]. El trabajo de Cartan consiste en modificar unas de las suposiciones que llevan a la ecuación (1.1), de donde surge el concepto de torsión antes mencionado. Esencialmente, la información geométrica ya no está toda contenida en la métrica  $g_{ab}$  sino que la torsión ( $T^c_{ab}$ ) entra en juego. El trabajo de Cartan pasó mucho tiempo en el olvido, y la primer formulación de una teoría física consistente que incluya a la torsión apareció hasta 1961 y 1962, en [22] y [23] respectivamente.

A partir de entonces la torsión ha sido ampliamente estudiada en diversas teorías de gravedad modificada [4], apareciendo en distintas situaciones como el universo temprano [24], en modelos de expansión acelerada del universo [25], etcétera.

La torsión es el concepto central de la tesis y la organización de la misma es la siguiente: en el capítulo 2 se dan las definiciones y se desarrollan los conceptos geométricos para una torsión de fondo. En el capítulo 3 se estudia cómo representar simetrías en este lenguaje geométrico, y con esto hacer un análisis de “rectas” en espacio-tiempos conocidos en donde se puede definir una torsión. Se sigue, en el capítulo 4, con el concepto de curvatura, en donde se encuentra que el concepto conocido cambia y se da una visión geométrica de esto. Los capítulos 2, 3 y 4 antes mencionados son generalizaciones de los resultados mostrados en las secciones 3.1 y 3.3, el apéndice C y las secciones 3.2 y 3.4 de la referencia [1], respectivamente. Estos capítulos la tesis extienden resultados puramente matemáticos, con el objetivo de entender profundamente el lenguaje antes de aplicarlo a algún problema físico. Con esto en mano se procede al problema físico que se busca atacar, a saber, el del movimiento de partículas de prueba (bajo cierta aproximación) con la aparición de una torsión no nula. Para esto, en el capítulo 5, se reproducen algunos resultados de la referencia [26] en Relatividad General, con el propósito de extender el método allí presentado al caso con torsión. A lo largo de toda la tesis se comparan los resultados obtenidos con el caso sin torsión.



## 2. Geometría con torsión

La torsión surge naturalmente al hablar de operadores que actúan sobre vectores y otros entes más generales, llamados *tensores*. Sin embargo, como la relatividad y las teorías de gravedad modificada están enunciadas en el lenguaje de la geometría diferencial, es necesario definir vectores y tensores de una manera más general que en el caso de  $\mathbb{R}^n$ . Esta parte corresponde a la subsección de definiciones básicas y se sigue la referencia [27]. Con esto en mano se puede hablar de operadores sobre estos objetos, formando la parte central de la sección. El objetivo es caracterizarlos y ver cómo pueden definir curvas análogas a las rectas. Para ello se extienden los resultados de las secciones 3.1 y 3.3 de la referencia [1] al caso con torsión, y se da una interpretación de la misma siguiendo la referencia [28].

### 2.1. Definiciones básicas

Como en esta sección no aparece la generalización ya mencionada de la tesis, los conceptos son presentados de una manera concisa. Para una discusión extensa al respecto puede consultarse la referencia [27].

Una variedad diferenciable  $M$  es un conjunto que cumple

- Es un espacio topológico:  $M$  tiene definidos conjuntos abiertos
- Es Hausdorff: Para cada par de puntos  $p, q \in M$  existen abiertos  $U, V$  disjuntos tal que  $p \in U, q \in V$
- Es segundo numerable: Existe una base numerable para la topología de  $M$
- Es localmente euclidiano: para cada  $p \in M$  existen abiertos  $U \subset M, U' \subset \mathbb{R}^n$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow U'$ . Al par  $(U, \varphi)$  se le conoce como una carta coordenada.
- Si  $(U, \varphi), (V, \psi)$  son dos cartas coordenadas en  $M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces el mapeo  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  es infinitamente diferenciable en el sentido usual de  $\mathbb{R}^n$ .

La última condición es lo que se conoce como la estructura diferenciable de  $M$ . Con esto es posible caracterizar todas las funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables sin recurrir a coordenadas. Al conjunto de tales funciones se denotará  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .

Como las variedades diferenciables son conjuntos más generales que  $\mathbb{R}^n$ , se necesita una manera consistente de definir vectores tangentes. Pensando gráficamente el ejemplo de la esfera ( $\mathbb{S}^2$ ), vectores tangentes en diferentes puntos no deberían poder sumarse pues tienen distinto origen. Por esta razón se necesitará generalizar la noción de vectores para este tipo de conjuntos.

A un mapeo lineal  $X^a : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  se le llamará una *derivación* en un punto  $p \in M$  si cumple  $X^a(fg) = f(p)X^a g + g(p)X^a f$  para todas  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Se puede probar que el conjunto de todas las derivaciones en un punto es un espacio vectorial y se denotará  $T_p M$ . A un elemento de  $T_p M$  se llamará entonces un *vector tangente* a  $M$  en  $p$ . Como el conjunto  $(\partial/\partial x^\alpha|_{\varphi(p)})^a$ , con  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ , forma una base de derivaciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\varphi(p) \forall p$ , si se

define  $(\partial/\partial x^\alpha|_p)^a f \equiv (\partial/\partial x^\alpha|_{\varphi(p)})^a (f \circ \varphi^{-1})$  entonces  $(\partial/\partial x^\alpha|_p)^a$  forma una base de derivaciones en  $p$  y como es base se puede escribir  $X^a = X^\beta (\partial/\partial x^\beta)^a$ , donde la aparición de índices griegos repetidos indica que se suman sobre todas sus posibilidades. A los números  $X^\beta$  se les conoce como los componentes de  $X^a$  para la carta coordenada  $(U, \varphi)$ .

Con el concepto de vectores en mano es posible definir el último concepto esencial, los *tensores*. Una 1-forma en  $p$  es un funcional lineal  $\omega_a : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, es el espacio dual del conjunto  $T_p M$  y se denota  $T_p^* M$ . Si en una carta coordenada se definen los funcionales lineales  $(dx^\mu)_a (\frac{\partial}{\partial x^\nu})^a \equiv \delta^\mu_\nu$ , con el índice latino repetido indicando que se está evaluando  $(dx^\mu)_a$  en  $(\frac{\partial}{\partial x^\nu})^a$ , de álgebra lineal se sigue que el conjunto  $(dx^\mu)_a$  forma una base de  $T_p^* M$  y entonces se puede escribir  $\omega_a = \omega_\nu (dx^\nu)_a$ . En general, un  $(k, l)$  tensor es un funcional multilineal de  $k$  1-formas y  $l$  vectores  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} : T_p^* M \times \dots \times T_p^* M \times T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dando una carta coordenada  $(U, \varphi)$  se puede caracterizar al campo tensorial  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  con números  $A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  en cada punto dados por  $A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (dx^{\alpha_1})_{a_1} \dots (dx^{\alpha_k})_{a_k} (\partial/\partial x^{\beta_1})^{b_1} \dots (\partial/\partial x^{\beta_l})^{b_l}$ .

Se puede probar [29] que otra caracterización de los vectores es como clases de equivalencia de curvas que tienen el mismo vector tangente en un punto. Así los vectores se pueden interpretar como “desplazamientos infinitesimales”, razón por la que una función bilineal  $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  que mida “distancias infinitesimales cuadradas” será de gran interés. Cuando exista una de estas funciones definidas en  $M$  será claramente un  $(0, 2)$  tensor y se le conoce como *tensor métrico* o simplemente *métrica* y se denota  $g_{ab}$ . Las propiedades que debe cumplir una métrica son: ser bilineal, simétrica y no degenerada, esto último en el sentido de que si  $g_{ab} v^a w^b = 0$  para todo vector  $w^a$  entonces  $v^a = 0$ . Con esto  $g_{ab}$  induce un producto interior en  $T_p M$ , además de dotar de una relación natural entre  $T_p M$  y  $T_p^* M$  dada por  $v_a \equiv g_{ab} v^b$  para cualquier  $v^a \in T_p M$ . A esto se le conoce como bajar el índice de  $v^b$ . Como el mapeo es no degenerado existe la función inversa, denotada  $g^{ab}$ . Así  $g^{ab}$  asocia naturalmente  $T_p^* M$  con  $T_p M$  dado por  $w^a \equiv g^{ab} w_b$  para todo  $w_b$ . En general se necesita tantas métricas  $g_{ab}$  o métricas inversas  $g^{ab}$  como índices se quieran bajar o subir de un  $(k, l)$  tensor  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ , respectivamente.

Por último, cualquier  $(k, l)$  tensor  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  define  $(k-1, l-1)$  tensores dados por

$$\tilde{A}^{a_1 \dots a_{k-1}}_{b_1 \dots b_{l-1}} \equiv \sum_{i=1}^n A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\dots, e_i, \dots, e^i, \dots) \quad (2.1)$$

donde  $e_i$  es cualquier base de  $T_p M$  y  $e^i$  la base dual asociada de  $T_p^* M$ . Se puede probar que la suma del lado derecho de la igualdad no depende de la base escogida y por tanto es una buena definición de un tensor.

Como en una base los tensores son arreglos de números, se les puede pensar como generalizaciones al concepto de vectores y matrices usual. Además sus propiedades no dependen de la base escogida, es decir, no dependen de las coordenadas. Estos entes implementan la idea de Einstein de que *las cantidades físicas no deben depender de la elección de coordenadas*. Con esta motivación, el lenguaje matemático desarrollado en la tesis trata de mantener esta característica, en la medida de lo posible.

## 2.2. Operadores derivada

Dada  $M$  una variedad diferenciable y  $\gamma(t)$  una curva suave parametrizada contenida en  $M$ , es sabido que el vector velocidad  $(\frac{d}{dt}\gamma)^a$  tiene una interpretación libre de coordenadas. Esto se puede parafrasear diciendo que las componentes de dicho vector transforman de coordenadas con la matriz jacobiana de la transformación (*i.e.* covariantemente). Sin embargo la aceleración de la curva ya no posee esta propiedad, como se puede apreciar parametrizando el círculo unitario con  $(\cos(t), \sin(t))$  en coordenadas cartesianas y  $(1, t)$  en coordenadas polares. Derivando una vez se obtiene  $(-\sin(t), \cos(t))$  y  $(0, 1)$  respectivamente, que cumplen lo antes mencionado, pero derivando dos veces se obtiene  $-(\cos(t), \sin(t))$  en el primer caso y  $(0, 0)$  en el segundo.

El problema surge pues para derivar el vector velocidad a lo largo de la curva se necesita restar vectores en distintos espacios tangentes, cosa que no tiene sentido. Es por esta razón que para definir aceleración de una forma independiente de coordenadas se necesita identificar o *conectar* espacios tangentes de puntos cercanos. Así una conexión tendrá información extra de la que está dotada la variedad y permite calcular derivadas direccionales de campos vectoriales [29]. El resto del capítulo trata generalizar las secciones 3.1 y 3.3 de [1], dejando las secciones 3.2 y 3.4 para el capítulo 3 de la tesis.

En una variedad diferenciable  $M$ , un operador derivada  $\nabla$  es un operador que mapea campos tensoriales  $(k, l)$  suaves en campos tensoriales  $(k, l + 1)$  (denotado  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \mapsto \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ ) y que cumple las siguientes cuatro propiedades:

1. Es lineal. Dados dos  $(k, l)$  tensores  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  y  $B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ :  

$$\nabla_c(\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c(A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) + \beta \nabla_c(B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})$$
2. Regla de Leibniz. Si  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  es un  $(k, l)$  tensor y  $B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}$  un  $(k', l')$  tensor entonces  

$$\nabla_e(A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}) = \nabla_e(A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}} + A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_e B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}$$
3. Conmuta con la contracción:  $\nabla_d(A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}$
4. Interpretación de vectores como derivadas direccionales: Si  $f \in C^\infty(M)$ , y  $v^a$  es un vector arbitrario,  $v(f) = v^a \nabla_a f$

Claramente las derivadas parciales (asociadas con algunas coordenadas en una vecindad de un punto) cumplen estas propiedades, de donde se nota que los operadores derivada existen para cualquier variedad diferenciable.

Con estas cuatro propiedades se puede probar que, dado un operador derivada  $\nabla_c$ , existe un tensor  $(1, 2)$  tal que

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f. \quad (2.2)$$

A  $T^c_{ab}$  se le llama el *tensor de torsión* y de la ecuación anterior se ve claramente que  $T^c_{ab} = -T^c_{ba}$ . Se puede probar que si  $M$  es una variedad encajada en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el transporte paralelo en  $M$  coincidirá con el inducido por  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  solo si la conexión en  $M$  cumple  $T^c_{ab} = 0$ . Esta es la motivación principal de los matemáticos a estudiar operadores derivada sin torsión, que por el teorema de Nash siempre existirán [29]. Sin embargo, a pesar de que la Relatividad General asume  $T^c_{ab} = 0$ , esta condición se relaja para muchas teorías de gravedad

modificada. La meta de este capítulo entonces será escribir todas las propiedades geométricas de un operador derivada en términos de su torsión.

Uno de los primeros cálculos donde aparece la torsión es en el conmutador de dos campos vectoriales. Así, dados  $v, w$  campos vectoriales y  $f$  cualquier función en  $M$ , el conmutador de  $v$  y  $w$  en términos de este operador derivada es

$$\begin{aligned}
[v, w](f) &= v(w(f)) - w(v(f)) \\
&= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\
&= [v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b] \nabla_b f + (v^a w^b - w^a v^b) \nabla_a \nabla_b f \\
&= [v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b] \nabla_b f + v^a w^b (\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f) \\
&= [v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b] \nabla_b f - v^a w^b T^c{}_{ab} \nabla_c f,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde en el primer renglón se utilizó la definición del conmutador y la propiedad 4, en el segundo se usó la propiedad 2 y en el último se usó la ecuación (2.2). Con esto  $[v, w]^a = v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b - v^b w^c T^a{}_{bc}$ .

Sabiendo de la existencia de operadores derivada, una pregunta natural es qué tan únicos son estos objetos. La propiedad 4 asegura que todos los operadores derivada son iguales al actuar sobre funciones, por lo que para investigar la discrepancia entre dos de estos se debe ver su acción sobre un campos tensoriales de rango mayor. Se puede ver que basta calcular su acción sobre un campo vectorial dual  $\omega_b$  y dicha discrepancia queda caracterizada por la siguiente

**Proposición.** Dados dos operadores derivada  $\nabla_a, \tilde{\nabla}_a$ , existe un campo tensorial (1,2) tal que

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - \tilde{C}^c{}_{ab} \omega_c. \tag{2.4}$$

La prueba se basa en que  $\nabla_a \omega_b - \tilde{\nabla}_a \omega_b$  depende únicamente del valor de  $\omega_b$  en el punto  $p$  y no del valor en los puntos vecinos y se puede consultar en [1]. Tomando el caso particular  $\omega_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$  y  $\tilde{\nabla}_b = \partial_b$ , llamando  $C^c{}_{ab}$  a  $\tilde{C}^c{}_{ab}$  en este caso, sustituyendo en la ecuación (2.4) se obtiene

$$\nabla_a \nabla_b f = \partial_a \partial_b f - C^c{}_{ab} \nabla_c f \tag{2.5}$$

e intercambiando índices

$$\nabla_b \nabla_a f = \partial_b \partial_a f - C^c{}_{ba} \nabla_c f. \tag{2.6}$$

Restando ambas ecuaciones, usando la ecuación (2.2) y que las derivadas parciales no tienen torsión se obtiene

$$T^c{}_{ab} = C^c{}_{ab} - C^c{}_{ba}. \tag{2.7}$$

De vuelta al caso general, para ver la discrepancia de dos operadores derivada al actuar sobre campos vectoriales basta notar que dado un campo vectorial  $v^a$ ,  $\omega_a v^a$  es un escalar para cualquier campo vectorial dual  $\omega_a$  de donde  $\nabla_a (\omega_b v^b) - \tilde{\nabla}_a (\omega_b v^b) = 0$  por la propiedad 4. Usando la propiedad 2 y la ecuación (2.4) se tiene entonces

$$0 = \tilde{\nabla}_a (\omega_b v^b) - \nabla_a (\omega_b v^b) = (\tilde{C}^c{}_{ab} \omega_c) v^b - \omega_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) v^b, \tag{2.8}$$

que implica

$$\nabla_a v^b = \tilde{\nabla}_a v^b + \tilde{C}^b_{ac} v^c. \quad (2.9)$$

Con estas dos propiedades es fácil probar que la generalización para cualquier campo tensorial  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  es

$$\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \tilde{\nabla}_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \sum_i \tilde{C}^{a_i}_{cd} A^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_j \tilde{C}^d_{cb_j} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l}. \quad (2.10)$$

A partir de aquí la discusión se centrará en el caso donde  $\tilde{\nabla}_c = \partial_c$  y por tanto  $C^c_{ab} = \tilde{C}^c_{ab}$ , de donde la ecuación (2.10) queda

$$\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \partial_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \sum_i C^{a_i}_{cd} A^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_j C^d_{cb_j} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l}. \quad (2.11)$$

### 2.3. Transporte paralelo

La motivación principal de conectar espacios tangentes cercanos fue para tomar derivadas de vectores definidos en curvas. Así se dice que un vector  $v^a$  es *transportado paralelamente* a lo largo de la curva con tangente  $t^a$  si su derivada direccional a lo largo ésta es cero, es decir, satisface la ecuación

$$t^a \nabla_a v^b = 0. \quad (2.12)$$

En general un tensor  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  es transportado paralelamente a lo largo de la curva si satisface la ecuación

$$t^a \nabla_a A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0. \quad (2.13)$$

Dado un parámetro  $s$  en la curva la ecuación (2.12) se puede escribir en componentes como:

$$\frac{dv^\mu}{ds} + t^\nu C^\mu_{\nu\eta} v^\eta = 0, \quad (2.14)$$

de donde se nota que dado un vector  $v^a$  en un punto  $p$  de la curva existe una única solución a (2.14) con dicha condición inicial (por el teorema de existencia y unicidad), es decir, el transporte paralelo es único. Así  $v^a$  en  $p$  define vectores en la curva dados por su transporte paralelo.

Con este concepto en mano y suponiendo que la variedad está dotada de un tensor métrico  $g_{ab}$ , una condición natural a pedirle a un operador derivada es que preserve el producto escalar de cualesquiera dos vectores  $u^a, v^a$  al transportarlos paralelamente, es decir

$$t^a \nabla_a (g_{bc} u^b v^c) = 0. \quad (2.15)$$

Usando la regla de Leibniz y el hecho de que  $t^a \nabla_a u^b = t^a \nabla_a v^b = 0$  porque son transportados paralelamente se obtiene

$$t^a u^b v^c \nabla_a g_{bc} = 0, \quad (2.16)$$

de donde

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (2.17)$$

Esta última ecuación garantiza la unicidad del operador  $\nabla_a$  y dicha propiedad queda codificada en el siguiente

**Teorema.** Sea  $g_{ab}$  métrica y  $T^c_{ab}$  campo de torsión dados. Entonces existe un único operador derivada que satisface  $\nabla_a g_{bc} = 0$

**Demostración.** La prueba se basa en suponer  $\nabla_a g_{bc} = 0$  y encontrar una solución única para  $C^c_{ab}$ . Así, por la ecuación (2.11) se tiene  $0 = \nabla_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - C^d_{ab} g_{dc} - C^d_{ac} g_{bd}$ , de donde

$$C_{cab} + C_{bac} = \partial_a g_{bc}. \quad (2.18)$$

Intercambiando índices

$$C_{cba} + C_{abc} = \partial_b g_{ac}, \quad (2.19)$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \partial_c g_{ab}. \quad (2.20)$$

Sumando las ecuaciones (2.18), (2.19) y restando (2.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab} &= (C_{cab} + C_{cba}) + (C_{bac} - C_{bca}) + (C_{abc} - C_{acb}) \\ &= 2C_{cab} - T_{cab} + T_{bac} + T_{abc}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

de donde

$$C_{cab} = \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}) + \frac{1}{2}(T_{cab} + T_{acb} + T_{bca}). \quad (2.22)$$

La solución (2.22) para  $C_{cab}$  siempre existe y es única, con lo que se concluye la prueba. ■

A partir de este momento  $\nabla_a$  representará el operador derivada que satisface  $\nabla_a g_{bc} = 0$ .

Si se define  $\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab})$  y  $K_{cab} = \frac{1}{2}(T_{cab} + T_{acb} + T_{bca})$  la ecuación (2.22) se ve

$$C_{cab} = \Gamma_{cab} + K_{cab}. \quad (2.23)$$

A  $\Gamma^c_{ab}$  se le conoce como el *símbolo de Christoffel*, a  $K^c_{ab}$  como el tensor de *contorsión* y cumple  $K_{cab} = -K_{bac}$ . Además  $\Gamma^c_{ab}$  cumple

$$\Gamma^\sigma_{\sigma\alpha} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\partial_\sigma g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda g_{\sigma\alpha}) = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2}\partial_\alpha g_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\partial_\alpha g, \quad (2.24)$$

donde  $g = \det(g)_{\mu\nu}$  y para la última igualdad se utilizó la fórmula de la matriz inversa.

Nótese que si  $T^c_{ab} = 0$  entonces  $\nabla_a$  está totalmente determinado por la métrica. A tal operador se le conoce como operador o conexión de Levi-Civita y se denotará  $D_a$ .

## 2.4. Curvas autoparalelas y geodésicas: la torsión entra en juego

### 2.4.1. Curvas autoparalelas

Dado un operador derivada  $\nabla_a$ , se dice que una curva con vector tangente  $t^a$  es *autoparalela* si transporta paralelamente a su propio vector tangente. Según la ecuación (2.13) esto se puede escribir

$$t^a \nabla_a t^b = 0. \quad (2.25)$$

La ecuación anterior nos dice que la curva “mantiene derecho” a su vector tangente de acuerdo a  $\nabla_a$ . Este último enunciado se podría reescribir de la forma  $t^a \nabla_a t^b = \alpha t^b$ , pero cualquier

ecuación de este tipo se puede reparametrizar para obtener una como en (2.25), por lo que solo ese caso será de interés.

Dando coordenadas  $x^\mu$  a  $M$ , la ecuación (2.25) en componentes se ve, de acuerdo a la ecuación (2.14)

$$\frac{dt^\mu}{ds} + C^\mu{}_{\nu\rho} t^\nu t^\rho = 0 \quad (2.26)$$

y como  $t^a$  es tangente a la curva,  $\frac{dx^\mu}{ds} = t^\mu$  y se obtiene

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + C^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0. \quad (2.27)$$

Una primera observación es que dado un punto  $p \in M$  y un vector  $v \in T_p M$  la ecuación (2.27) tiene solución única por el teorema de existencia y unicidad, de donde la autoparalela es única en la vecindad del punto. Además, como el transporte paralelo preserva la norma, una curva autoparalela con tangente tipo espacio/luz/tiempo siempre conservará esta propiedad.

#### 2.4.2. Interpretación de la torsión

Con el concepto de transporte paralelo en mano es posible darle una interpretación geométrica a la torsión. Siguiendo a [28], sea un punto  $p \in M$ , coordenadas  $\{x^\mu\}$  alrededor de él y  $\epsilon^a, \delta^a$  dos vectores en  $T_p M$ . Al ser vectores tangentes  $\frac{dx^\mu}{dt_1} = \epsilon^\mu, \frac{dx^\mu}{dt_2} = \delta^\mu$  y entonces estos vectores definen puntos  $q, s$  con coordenadas  $x^\mu + t_1 \epsilon^\mu, x^\mu + t_2 \delta^\mu$  respectivamente, donde  $t_1$  y  $t_2$  son parámetros infinitesimales (ver figura 1). Transportando paralelamente  $X^a$  a lo largo de la curva  $ps$  se obtiene un vector en  $s$  cuyos componentes son, de acuerdo a la versión infinitesimal de la ecuación (2.13)

$$r_1^\mu = \epsilon^\mu - t_2 C^\mu{}_{\alpha\beta} \delta^\alpha \epsilon^\beta, \quad (2.28)$$

donde en el lado derecho de la igualdad todos los tensores están evaluados en  $p$ . Análogamente, haciendo el transporte paralelo de  $\delta^a$  a lo largo de  $pq$

$$r_2^\mu = \delta^\mu - t_1 C^\mu{}_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \delta^\beta. \quad (2.29)$$

Ahora, como  $r_1 \in T_s M$ , este vector define un nuevo punto  $S' \in M$  moviéndose un parámetro  $t_1$  a lo largo de la curva que define. Las coordenadas de  $S'$  son  $S' = x^\mu + t_2 \delta^\mu + t_1 (\epsilon^\mu - t_2 C^\mu{}_{\alpha\beta} \delta^\alpha \epsilon^\beta)$ . Análogamente  $r_2$  define un punto  $Q'$  de coordenadas  $Q' = x^\mu + t_1 \epsilon^\mu + t_2 (\delta^\mu - t_1 C^\mu{}_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \delta^\beta)$ . La diferencia entre las coordenadas de  $Q'$  y  $S'$ , o el ‘vector’ que los conecta (en las cartas), está dado por

$$\begin{aligned} Q' - S' &= t_1 t_2 (C^\mu{}_{\alpha\beta} - C^\mu{}_{\beta\alpha}) \delta^\alpha \epsilon^\beta \\ &= t_1 t_2 T^\mu{}_{\alpha\beta} \delta^\alpha \epsilon^\beta. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Entonces la torsión mide qué tanto un paralelogramo infinitesimal definido por dos vectores falla en ser una curva cerrada.

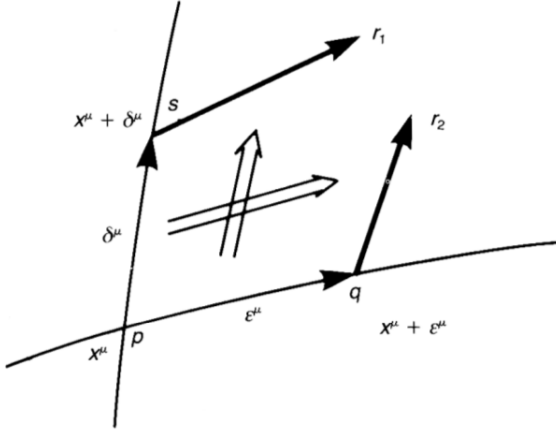


Figura 1: Interpretación de la torsión

### 2.4.3. Curvas geodésicas

Hasta aquí se ha hablado de curvas que “mantienen derecho” su propio vector tangente. Otra caracterización de una curva es, dado su punto inicial y final, cuál extremiza la longitud entre ellos. A este tipo de curvas se les llamará *geodésicas*. Para curvas tipo con vector tangente de norma siempre positiva, conocidas como tipo *espacio*, se define la longitud de una curva como

$$l = \int \sqrt{|g_{ab}t^at^b|} dt. \quad (2.31)$$

Para curvas con vector tangente de norma siempre negativa, conocidas como tipo *tiempo*, la definición es la misma y se le conoce como *tiempo propio*.

Ahora se busca una condición en  $t^a$  para que se satisfaga  $\delta l = 0$ . Obsérvese que la ecuación (2.31) no depende de la parametrización pues si  $s' = s'(s)$  es un nuevo parámetro,  $S^a = \frac{ds}{ds'} t^a$  es el nuevo vector tangente de donde

$$l' = \int \sqrt{|g_{ab}S^aS^b|} ds' = \int \sqrt{|g_{ab}t^at^b|} \frac{ds}{ds'} ds' = l. \quad (2.32)$$

Escribiendo la ecuación (2.31) en componentes (para una curva tipo espacio)

$$l = \int_a^b \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{1/2} ds \quad (2.33)$$

y así

$$\delta l = \int_a^b \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-1/2} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d(\delta x)^\beta}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right). \quad (2.34)$$

Si se escoge una parametrización tal que  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1$  entonces la condición  $\delta l = 0$  es

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d(\delta x)^\beta}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) \\ &= \int_a^b \left( -\frac{d}{ds} (g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds}) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right) \delta x^\beta, \end{aligned} \quad (2.35)$$



donde en la segunda igualdad se integró por partes el primer sumando y se usó que  $\delta x^\beta = 0$  en los extremos. Para que (2.35) se satisfaga para todo  $\delta x^\beta$  entonces se debe cumplir

$$-g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (2.36)$$

Subiendo el índice  $\beta$  esta ecuación se reescribe

$$\frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (2.37)$$

De (2.37) se nota que en general las geodésicas y las autoparalelas no son iguales. De hecho esto solo será cierto en el caso en que  $K^c_{ab} = 0$ , y claramente  $D_a$  lo cumple.

Basta observar las ecuaciones (2.27) y (2.37) para notar que resolverlas será muy complicado en la mayoría de los casos. Así, como es costumbre en física, se buscará una forma de implementar *simetrías* para poder realizar esta tarea de una manera más sencilla. Sin embargo, al estar en un espacio distinto al de la física newtoniana ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ), se deberá comprender qué son las simetrías, cómo se implementan y a qué cantidades conservadas conducen. Estos conceptos se introducen en el siguiente capítulo de la tesis, posponiendo ejemplos concretos de ecuaciones de autoparalelas y geodésicas hasta el final del mismo.

### 3. Simetrías y torsión

Una simetría se refiere a un grupo de transformaciones que dejan invariante una propiedad física. La existencia de simetrías implica la existencia de cantidades conservadas. En el caso de la mecánica clásica, suponer simetría de traslación en el tiempo, por ejemplo, conduce a la conservación de la energía de acuerdo al teorema de Noether. Algo análogo ocurre para las simetrías de traslaciones o de rotaciones, relacionadas con conservación de momento lineal y momento angular, respectivamente [30]. Esta es la razón de su gran importancia para la física, y en la práctica son de gran utilidad para simplificar problemas.

Como ya se notó anteriormente, el lenguaje matemático de la Relatividad General es diferente al de la física clásica. Para hablar de simetrías en este caso se necesita entender conceptos relacionados con mapeos entre variedades, y el desarrollo de estos conceptos en presencia de torsión no suele incluirse en los libros de texto, de modo que aquí se generalizará el apéndice C de la referencia [1] siguiendo su notación. Dada su complejidad matemática la primera parte será un poco técnica. Para una discusión más profunda se recomienda la misma referencia [1].

Dada una transformación entre variedades  $\phi : M \rightarrow N$  y un punto  $p$  en  $M$  se define el push-forward dado por  $\phi$  como la función  $\phi^* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$  tal que para cada  $v \in T_p M$  cumple  $(\phi^* v)(f) = v(f \circ \phi)$ , con  $f$  cualquier función en  $N$ . De la definición es fácil ver que  $\phi^* v$  es una derivación en  $\phi(p)$ , por lo que la transformación  $\phi^*(v)$  está bien definida como un vector en  $T_{\phi(p)} N$  para cualquier  $v \in T_p M$ . Dando coordenadas  $\{x^\mu\}$  alrededor de  $p$  y  $\{y^\mu\}$  en  $\phi(p)$  los componentes de la matriz asociada a  $\phi^*$  son  $(\phi^*)^\mu_\nu = \partial y^\mu / \partial x^\nu$ , es decir, es la matriz jacobiana de la transformación en esas coordenadas. Por el teorema de la función implícita  $\phi$  será inyectiva en una vecindad de  $p$  siempre que  $\phi^*$  lo sea.

Con este concepto en mano  $\phi$  también da una manera natural de “jalar formas” de  $T_{\phi(p)}^* N$  a  $T_p^* M$ . Se define el pull-back de formas como una función  $\phi_* : T_{\phi(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$  tal que para todo  $v \in T_p M$  cumple  $(\phi_* \mu)_a v^a = \mu_a (\phi^* v)^a$ .

En el caso en que  $\phi$  sea un difeomorfismo, es decir, una función  $\phi : M \rightarrow N$  suave y biyectiva tal que  $\phi^{-1}$  también lo sea, se puede extender  $\phi^*$  a cualquier tensor mediante

$$(\phi^* A)^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\mu_1)_{b_1} \dots (\mu_k)_{b_k} (t_1)^{a_1} \dots (t_l)^{a_l} \equiv A^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\phi_* \mu_1)_{b_1} \dots (\phi_* \mu_k)_{b_k} ([\phi^{-1}]^* t_1)^{a_1} \dots ([\phi^{-1}]^* t_l)^{a_l}. \quad (3.1)$$

Si  $\phi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, se dice que  $\phi$  es una transformación de simetría de  $A^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l}$  si  $\phi^* A^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} = A^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l}$ .

#### 3.1. Derivada de Lie

Dado un grupo uniparamétrico de difeomorfismos  $\phi_t : M \rightarrow M$  y el campo vectorial  $v^a$  que los genera, se define la derivada de Lie a lo largo de  $v^a$  de un tensor  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  como

$$L_v A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{-t}^* A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}{t}. \quad (3.2)$$

Y para funciones como  $L_v f = v(f)$ .

Claramente si  $\phi_t$  es una transformación de simetría de  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  para todo  $t$  entonces  $L_v A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0$ .

Para encontrar una manera accesible de calcular la ecuación (3.2) se comenzará por un campo vectorial  $w^a$ . Escogiendo coordenadas  $\{x^\mu\}$  tal que  $v^a = (\partial/\partial x^1)^a$ , es claro que  $\phi_{-t}(x^1, \dots, x^n) = (x^1 + t, \dots, x^n)$  y así  $\phi_{-t}w^a(x^1, \dots, x^n) = w^a(x^1 + t, \dots, x^n)$ , de donde  $L_v w^a = \partial w^a / \partial x^1$ . En estas coordenadas es fácil probar que  $[v, w]^\mu = \partial w^\mu / \partial x^1$  y con esto se probó que

$$L_v w^a = [v, w]^a. \quad (3.3)$$

Para ver la manera en que  $L_v$  actúa en una 1-forma  $\mu_a$  se procede como habitualmente: se forma un escalar con un campo vectorial arbitrario  $z^a$ , se usa la forma en que  $L_v$  actúa en escalares y vectores y se llega a

$$L_v \mu_a = v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b \nabla_a v^b + v^b \mu_c T^c_{ba}. \quad (3.4)$$

Usando la misma técnica la generalización para cualquier tensor  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  es

$$\begin{aligned} L_v A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = & v^c \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_i A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_i A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_{b_i} v^c \\ & - \sum_i A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} T^{a_i}_{cd} v^c + \sum_i A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} T^d_{cb_i} v^c. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Algo importante a resaltar en este punto es que  $L_v A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  no depende del operador derivada, de donde la ecuación (3.5) es válida para cualquier operador derivada  $\nabla$ , siempre que sea métrico y  $T^c_{ab}$  sea su torsión asociada.

## 3.2. Campos de Killing

### 3.2.1. Caso sin torsión

Las simetrías que conducen a cantidades conservadas suelen ser simetrías *continuas*, y esta fue la motivación principal para hablar de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en la sección anterior. Como en Relatividad General la estructura del espacio-tiempo está codificada en la métrica, las transformaciones de simetría de la métrica serán de gran interés. Así, se dice que una transformación  $\phi$  es una *isometría* si  $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$ . Dado entonces un conjunto uniparamétrico de isometrías  $\phi_t$ , se sabe que toda familia uniparamétrica de difeomorfismos tiene asociado un campo vectorial [1], y a tal campo vectorial  $\xi^a$  que los genera se llamará de Killing si satisface

$$L_\xi g_{ab} = 0. \quad (3.6)$$

Usando el operador  $D_a$  se puede desarrollar la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= g_{cb} D_a \xi^c + g_{ac} D_b \xi^c \\ &= D_a \xi_b + D_a \xi_b \end{aligned} \quad (3.7)$$

y con esto se obtiene el

**Teorema de Killing.** Si  $\xi^a$  es un campo vectorial de Killing entonces  $u^a \xi_a$  es constante a lo largo de la geodésica con tangente  $u^a$

**Demostración.** Desarrollando

$$\begin{aligned} u^a D_a (u^b \xi_b) &= \xi_b u^a D_a u^b + u^b u^a D_a \xi_b \\ &= u^{(b} u^{a)} D_{[a} \xi_{b]} = 0, \end{aligned}$$

donde para la segunda igualdad se utilizó la ecuación (3.11) y la ecuación de geodésicas.

### 3.2.2. Caso con torsión

Los vectores de Killing son el lenguaje en que se implementan las simetrías en Relatividad General. Por tanto tratar de extender este resultado al caso con torsión será de gran interés. La primer diferencia aparece en el desarrollo

$$\begin{aligned}
0 &= L_\xi g_{ab} \\
&= g_{cb} \nabla_a \xi^c + g_{ac} \nabla_b \xi^c + g_{ab} T^d{}_{ca} v^c + g_{ad} T^d{}_{cb} v^c \\
&= \nabla_a \xi_b + \nabla_a \xi_b + T_{acb} \xi^c + T_{bca} \xi^c.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La ecuación (3.8) muestra que para que el teorema de Killing se siga satisfaciendo en autoparalelas del operador  $\nabla_a$  se debe pedir una segunda condición sobre los vectores, llamados ahora de T-Killing, y es

$$(T_{acb} + T_{bca}) \xi^c = 0 \tag{3.9}$$

con lo que de la ecuación (3.8)

$$0 = L_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a. \tag{3.10}$$

Con esto la nueva versión del teorema se ve así.

**Teorema de T-Killing.** Si  $\xi^a$  es un campo vectorial de T-Killing entonces  $u^a \xi_a$  es constante a lo largo de la autoparalela con tangente  $u^a$

**Demostración.** Desarrollando

$$\begin{aligned}
u^a \nabla_a (u^b \xi_b) &= \xi_b u^a \nabla^b u^a + u^b u^a \nabla_a \xi_b \\
&= u^{(b} u^{a)} \nabla_{[a} \xi_{b]} = 0,
\end{aligned}$$

donde para la segunda igualdad se utilizó la ecuación (3.8) y la ecuación de autoparalelas.

Tras comparar con la ecuación (2.27) la segunda condición pedida en los vectores de T-Killing dice que, en coordenadas adaptadas a  $\xi^a$  (i.e.  $\xi^a = (\partial/\partial x^1)^a$ ), la componente  $x^1$  de las ecuaciones geodésica y autoparalela coinciden.

## 3.3. Integrando las autoparalelas

Para ganar intuición respecto a las autoparalelas en esta sección se incluyen ejemplos de espacio-tiempos conocidos en donde se toma alguna torsión como caso particular y se integran las ecuaciones autoparalelas.

### 3.3.1. Espacio euclidiano en 2D y 3D

Por simplicidad se usarán coordenadas cartesianas, de donde en ambos casos  $\Gamma^c{}_{ab} = 0$ . Por tanto las ecuaciones a resolver son

$$0 = \ddot{x}^\alpha + T_\mu{}^\alpha{}_\nu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Como la métrica es la identidad subir y bajar índices no cambia las componentes, y el segundo y tercer índice no pueden coincidir por la antisimetría de la torsión. Además no se supondrá ningún vector de Killing pues en el caso de 2D esto trivializaría la ecuación, como se verá más adelante; en el caso de 3D nos regresaría al caso de 2D agregando simplemente una componente creciente linealmente con el parámetro.

Las ecuaciones en 2D son

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + T_{\mu xy} \dot{x}^\mu \dot{y} = \ddot{x} + \dot{y}(T_{xxy} \dot{x} + T_{yyx} \dot{y}) \\ 0 &= \ddot{y} + T_{\mu yx} \dot{x}^\mu \dot{x} = \ddot{y} + \dot{x}(T_{xyx} \dot{x} + T_{yyx} \dot{y}). \end{aligned}$$

En este caso solo existen dos componentes independientes de la torsión:  $T_{xyx}$  y  $T_{yyx}$ . A continuación se muestran las soluciones numéricas obtenidas para dos distintos casos de torsión utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4. Las condiciones iniciales para ambos casos son  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 0, \dot{y}(0) = -0,5$

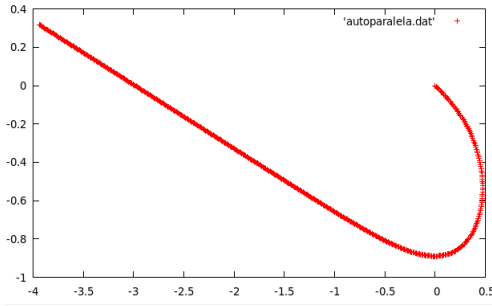


Figura 2: Solucion a la ecuación con  $T_{xxy} = 1, T_{yyx} = 3$

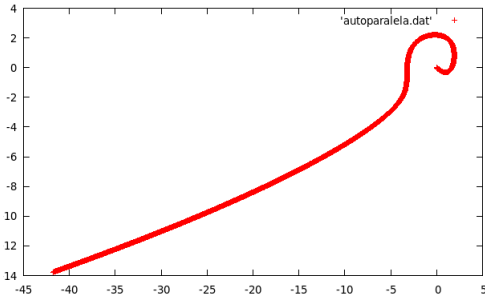


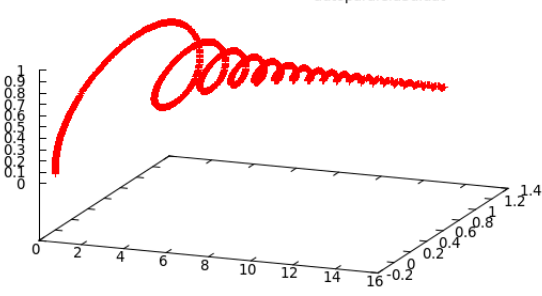
Figura 3: Solucion a la ecuación con  $T_{xxy} = x, T_{yyx} = y^2$

En las dos figuras mostradas las autoparalelas parecen tender a líneas rectas, que coinciden ser autoparalelas en el caso sin torsión. Esta afirmación se comprobó para distintas condiciones de la ecuación, mas no se ha encontrado razón para decir que es cierto en el caso general.

En el caso de 3 dimensiones se considerará únicamente una torsión de la forma  $T_{zxy} = x$ ,  $T_{xyz} = 1$  y  $T_{yxz} = xy$  de donde las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + x(1+y)\dot{z}\dot{y} \\ 0 &= \ddot{y} + (1-x)\dot{z}\dot{x} \\ 0 &= \ddot{z} - (1+xy)\dot{x}\dot{y} \end{aligned}$$

y para condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = -0,3$  y  $z(0) = 0$ ,  $\dot{z}(0) = 0,8$  se obtiene la siguiente curva



Claramente esta curva difiere mucho de una recta, sin embargo conforme el parámetro avanza se acerca indefinidamente a una recta.

### 3.3.2. Espacio tipo Minkowski 1+1 con torsión de fondo

El caso del espacio de Minkowski y euclidiano es muy similar en el caso de las autoparalelas pues tomando coordenadas cartesianas sigue cumpliendo  $\Gamma^c_{ab} = 0$ . La diferencia esencial consiste en que aparece un signo negativo proveniente de la métrica de Minkowski. Las ecuaciones en 2D quedan entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{t} - T_{\mu t x} \dot{x}^\mu \dot{x} = \ddot{t} - \dot{x}(T_{t t x} \dot{t} + T_{x t x} \dot{x}) \\ 0 &= \ddot{x} + T_{\mu x t} \dot{x}^\mu \dot{t} = \ddot{x} + \dot{t}(T_{t x t} \dot{t} + T_{x x t} \dot{x}). \end{aligned}$$

Usando los ejemplos análogos de torsión que en el caso euclidiano de 2 dimensiones y resolviendo con el mismo método numérico se encuentran las siguientes figuras para condiciones iniciales  $t(0) = 0$ ,  $\dot{t}(0) = -1,1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = -1,1$

### 3.3.3. Espacio-tiempo tipo Schwarzschild

En el caso sin torsión, el análisis estándar para encontrar las geodésicas [1,7,9] es proceder de la siguiente manera.

La métrica está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.11)$$

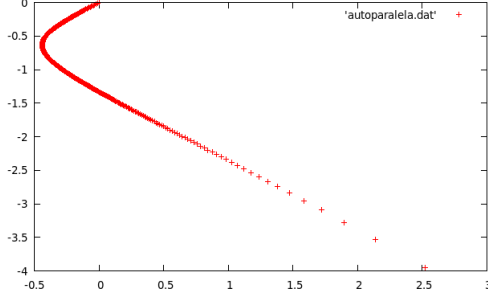


Figura 4: Solucion a la ecuación con  $T_{tx} = 1$ ,  $T_{xx} = 3$

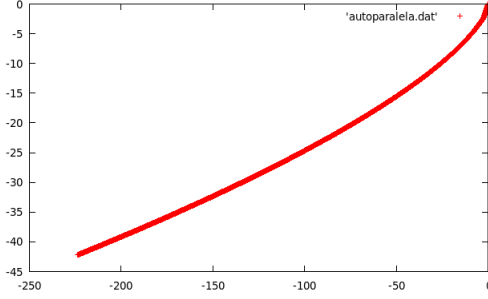


Figura 5: Solucion a la ecuación con  $T_{tx} = t$ ,  $T_{xx} = x^2$

Como la métrica es invariante ante la transformación  $\theta \mapsto \pi - \theta$ , si las condiciones iniciales se encuentran en el “plano”  $\theta = \pi/2$  la geodésica permanecerá en dicho plano. Como siempre es posible tomar condiciones iniciales  $\theta = \pi/2$ ,  $\dot{\theta} = 0$ , se supondrá que estas ya se han tomado. Además hay dos vectores de Killing,  $(\partial/\partial t)^a$  y  $(\partial/\partial \phi)^a$ , que por el teorema de Killing conducen a las cantidades conservadas  $E = 1/(1 - \frac{2M}{r})\dot{t}$  y  $L = r^2\dot{\phi}$ , respectivamente. Con esto y usando  $u^a u_a = -1$  es fácil probar que las geodésicas satisfacen

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}E^2, \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) es el análogo a una partícula de masa unitaria con energía  $E^2/2$  moviéndose en un potencial efectivo  $V_{\text{ef}} = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}$ . La ecuación (3.12) implica la ecuación diferencial para  $r$

$$\ddot{r} - \frac{M}{r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\dot{r}^2 + \frac{M}{r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^3} = 0. \quad (3.13)$$

Las gráficas del potencial efectivo para los casos  $L^2 < 12M^2$  y  $L^2 > 12M^2$  se muestran en las figuras 3.3.3 y 6. En 3.3.3 se logra apreciar que si el ‘momento angular’ (constante  $L$ ) es chico entonces inevitablemente las geodésicas caen hacia  $r = 0$ , caso contrario al problema de fuerza central clásico (si  $L \neq 0$ ). En la figura 6 se ve que existe un espectro de ‘energías’ (constante  $E$ ) para el cual es imposible caer hacia  $r = 0$ . Un análisis más detallado se puede encontrar en [1].

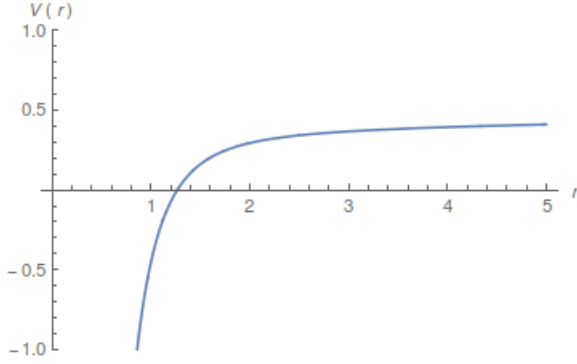


Figura 6: Gráfica del potencial efectivo para el caso  $L^2 = 6M^2$

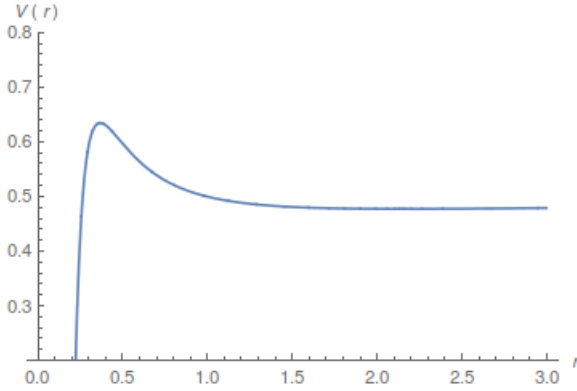


Figura 7: Gráfica del potencial efectivo para el caso  $L^2 = 24M^2$

Ahora se quiere investigar la posibilidad de generalizar el procedimiento anterior en presencia de una torsión de fondo que conduzca a una corrección no-nula a la ecuación diferencial de la coordenada  $r$  y así encontrar un potencial efectivo modificado.

La ecuación autoparalela tiene un término adicional  $T_{\mu}^{\alpha}{}_{\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$  a la ecuación geodésica. Recuerdese que la razón por la que la ecuación diferencial para  $r$  de la ecuación geodésica se comporta como una partícula clásica en un potencial efectivo se basa en que  $E$  y  $L$  son cantidades conservadas y el movimiento ocurre en un plano ( $\dot{\theta} = 0$ ). Entonces, cuando hay torsión y se estudian autoparalelas parece natural pedir que  $(\partial/\partial t)^a$  y  $(\partial/\partial \phi)^a$  sigan siendo vectores de Killing, que por la condición (3.9) restringe la torsión a cumplir  $T_{\mu t \nu} = T_{[\mu|t|\nu]}$  y  $T_{\mu \phi \nu} = T_{[\mu|\phi|\nu]}$ . Exigir además  $\dot{\theta} = 0$  resulta muy restrictivo, y da la pista de que las ecuaciones geodésica y autoparalela deben coincidir. Esto pues, además de que la ecuación para  $\theta$  no cambia, las ecuaciones para  $t$  y  $\phi$  tampoco al pedir estos vectores de Killing. Entonces para una geodésica y una autoparalela con mismas condiciones iniciales las soluciones  $r_{\text{geo}}(s)$  y  $r_{\text{aut}}(s)$  deberían integrar las mismas funciones  $t(s)$ ,  $\phi(s)$ , de donde tentativamente se podría pensar  $r_{\text{geo}}(s) = r_{\text{aut}}(s)$ .

El camino anterior no es tan claro, de modo que aquí se probará que la corrección  $T_{\mu}^r{}_{\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$  es idénticamente cero si se piden las tres condiciones:  $(\partial/\partial t)^a$ ,  $(\partial/\partial \phi)^a$  de Killing y  $\dot{\theta} = 0$ . Como la métrica es diagonal y simétrica esto es equivalente a probar que  $T_{\mu r \nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = 0$ . Si  $\mu$



o  $\nu = \theta$  la contribución es trivialmente cero de donde se quiere probar que  $T_{\alpha r \beta} = T_{[\alpha|r|\beta]}$  con  $\alpha, \beta = t, r, \phi$ . Como  $(\partial/\partial t)^a, (\partial/\partial \phi)^a$  son de Killing,  $T_{\alpha t \beta} = -T_{\beta t \alpha}$  y  $T_{\alpha \phi \beta} = -T_{\beta \phi \alpha}$  lo que implica  $-T_{\alpha \beta t} = T_{\beta \alpha t}$  y  $-T_{\alpha \beta \phi} = T_{\beta \alpha \phi}$ . Entonces, si  $\beta = t$  o  $\phi$  se cumple  $T_{\alpha r \beta} = T_{[\alpha|r|\beta]}$  pues  $T_{\sigma \rho \eta} = T_{\sigma[\rho|\eta]}$  y  $T_{\sigma \rho \eta} = T_{[\sigma\rho|\eta]} \implies T_{\sigma \rho \eta} = T_{[\sigma|\rho|\eta]}$ . Falta ver el caso  $\beta = r$ , y como  $T_{\alpha r r} = 0$  se quiere probar que  $T_{r r \alpha} = 0$ . Si  $\alpha = r$ ,  $T_{r r r} = 0$ . Si  $\alpha = t$  entonces  $T_{r r t} = -T_{r r t}$  de donde  $T_{r r t} = 0$  y análogamente  $T_{r r \phi} = 0$ , con lo que se concluye la prueba.

Debido al resultado anterior, para encontrar un ejemplo en el que se pueda hacer un análisis con torsión se conservarán los vectores de Killing y se relajará la condición  $\dot{\theta} = 0$ . En el caso de las geodésicas esta condición siempre se podía tomar pues siempre se puede hacer una rotación espacial que haga la condición inicial  $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$  y para este caso la solución a la ecuación diferencial de  $\theta$  es idénticamente cero. En el caso en que la contorsión no sea completamente antisimétrica la ecuación diferencial tendrá términos adicionales, que a pesar de que se puedan tomar las mismas condiciones iniciales, la solución  $\theta(s)$  no necesariamente será la constante  $\pi/2$ . Por tal razón las constantes asociadas con los vectores de Killing son ahora  $E = (1 - \frac{2M}{r})\dot{t}$  y  $L = r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2$ .

Como la ecuación diferencial para  $t$  y  $\phi$  no cambian, se toma una torsión por componentes  $T^r_{\theta r} = \frac{K}{r} = T^\theta_{\theta r}$  que acopla las ecuaciones diferenciales de  $r$  y  $\theta$ , obteniendo

$$0 = \ddot{r} - \frac{M}{r^2(1-2M/r)}\dot{r}^2 + \frac{M}{r^2(1-2M/r)}E^2 - (1+K)(r-2M)\dot{\theta}^2 - (1 - \frac{2M}{r})\frac{L^2}{r^3 \sin^2(\theta)} + \frac{K}{r}\dot{r}\dot{\theta}$$

$$0 = \ddot{\theta} + \frac{2+K}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \frac{K}{r^3(1-\frac{2M}{r})}\dot{r}^2 - \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}\frac{L^2}{r^4}.$$

Para las condiciones iniciales  $r(0) = 0,8, \dot{r}(0) = -0,03, \theta(0) = \pi/2, \dot{\theta}(0) = 0$  la solución a estas ecuaciones se obtiene numéricamente tomando  $M = 1,1 K = 0,85$  con el método de Runge-Kutta de orden 4 y se compara con el caso de geodésicas ( $K = 0$ ) en la figura 8.

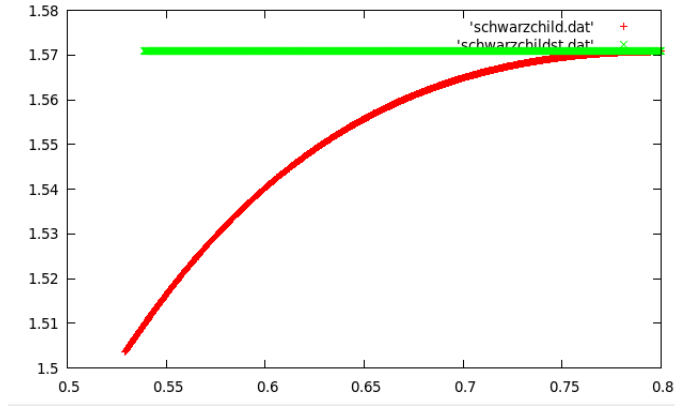


Figura 8:  $r$  vs.  $\theta$  para las condiciones iniciales dadas.

Aquí se nota efectivamente que para el caso de geodésicas la componente  $\theta$  se mantiene constante mientras que esta propiedad se pierde para las autoparalelas.

### 3.4. ¿Qué tanto difieren las geodésicas y autoparalelas?

Observando el último caso, y como se mencionó en el caso euclidiano, la ecuación geodésica y autoparalela deben diferir en al menos dos de sus componentes. De hecho esta propiedad se hereda para cualquier dimensión de la variedad, como se resume en la siguiente

**Proposición.** Sea  $M'$  una variedad de dimensión  $m \geq 2$  y supónganse que existen coordenadas  $x^1, \dots, x^m$  tales que la ecuación geodésica y autoparalela coinciden para  $x^1, \dots, x^{m-1}$ . Entonces geodésica y autoparalela coinciden.

**Demostración.**

Como las ecuaciones geodésica y autoparalela coinciden para  $x^1, \dots, x^{m-1}$ , entonces  $T_{\mu\alpha\nu} = -T_{\nu\alpha\mu}$  y  $T_{\mu\nu\alpha} = -T_{\nu\mu\alpha}$  con  $\alpha = 1, \dots, m-1$  y se quiere probar que  $T_{\mu(m)\nu} = -T_{\nu(m)\mu}$ , donde el paréntesis indica que es un índice fijo. Por casos:

- $\mu \neq (m), \nu \neq (m)$ :  $T_{\mu(m)\nu} = -T_{(m)\mu\nu} = T_{(m)\nu\mu} = -T_{\nu(m)\mu}$ , donde en la primer y tercer igualdad se utilizó que las ecuaciones coinciden para  $\mu$  y  $\nu$  y en la segunda igualdad se usó la antisimetría de la torsión.
- $\mu \neq (m), \nu = (m)$ : Como  $T_{\mu(m)(m)} = 0$  se quiere probar  $T_{(m)(m)\mu} = 0$ . Esto es trivial pues, como  $\mu \neq (m)$  entonces las ecuaciones coinciden de donde  $T_{(m)(m)\mu} = -T_{(m)(m)\mu} \implies T_{(m)(m)\mu} = 0$
- $\mu = \nu = (m)$ : Claramente  $T_{\mu(m)\nu} = -T_{\nu(m)\mu}$  pues  $T_{(m)(m)(m)} = 0$ , con lo que se concluye la prueba.  $\square$

Este resultado ayuda a ganar un poco de intuición respecto al efecto de la torsión. A pesar de no haber sido formulado covariantemente, nos dice como las autoparalelas, si difieren de las geodésicas, lo hacen en al menos 2 de sus componentes.

En el capítulo se desarrollaron los conceptos asociados a transformaciones de simetría y se generalizaron los resultados conocidos al caso con torsión. Con esto fue posible encontrar, en el espacio-tiempo de Schwarzschild, cómo las autoparalelas y geodésicas difieren a pesar de tener las mismas simetrías. También se repasaron distintos ejemplos sencillos de autoparalelas con una torsión de fondo, notando que en algunos ejemplos tienden asintóticamente a geodésicas. Por último se presentó un resultado que habla de cómo deben diferir geodésicas y autoparalelas. Es claro que todo lo aquí presentado fue apenas un esbozo de la riqueza de los posibles ejemplos y resultados. Sin embargo, al no ser este el objetivo de la tesis, un estudio más profundo en estos casos sigue siendo un problema interesante a atacar.

## 4. Tensor de Curvatura

El objetivo de este capítulo es estudiar cómo caracterizar la geometría de una variedad  $M$  con un operador derivada  $\nabla_a$  con torsión. Para ello el concepto de transporte paralelo asociado con  $\nabla_a$  y presentado en el capítulo 2 será crucial. Se pensará entonces a la variedad  $M$  como *curvada* cuando al transportar paralelamente a un vector sobre una curva infinitesimal y cerrada, este falle en volver a sí mismo. Esta es la interpretación del *tensor de curvatura*. Sin embargo, a pesar de tener una interpretación geométrica clara, partir de estos principios resulta complicado para los cálculos. Para definir a este tensor, entonces, se procederá de manera abstracta y se generalizarán los resultados relacionados con este tensor al caso con torsión.

Sea  $\nabla_a$  un operador derivada,  $\omega_c$  un campo vectorial dual y  $f$  una función escalar arbitraria. Usando regla de Leibniz

$$\nabla_a \nabla_b (f \omega_c) = \nabla_a \nabla_b (f) \omega_c + \nabla_a f \nabla_b \omega_c + \nabla_a \omega_c \nabla_b f + f \nabla_a \nabla_b \omega_c, \quad (4.1)$$

de donde

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f \omega_c) &= ((\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)f) \omega_c + f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c \\ &= (-T^d_{ab} \nabla_d f) \omega_c + f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c \\ &= -T^d_{ab} (\nabla_d (f \omega_c) - f \nabla_d \omega_c) + f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c, \end{aligned} \quad (4.2)$$

que se puede reescribir como

$$[\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d_{ab} \nabla_d](f \omega_c) = f[\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d_{ab} \nabla_d] \omega_c. \quad (4.3)$$

A partir de la ecuación (4.3) se sigue el mismo análisis utilizado para la ecuación (2.4), de donde la acción del operador  $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d_{ab} \nabla_d$  depende solo del valor de  $\omega_c$  en el punto dado. Por tanto dicho operador mapea vectores duales en un punto  $p$  a tensores  $(0, 3)$  en  $p$ , es decir, es la acción de un tensor  $(1, 3)$ . Esto se puede escribir de la forma

$$[\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d_{ab} \nabla_d] \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (4.4)$$

A  $R_{abc}{}^d$  se le conoce como el *tensor de curvatura* y en el caso sin torsión también se le conoce como el *tensor de Riemann*. Su interpretación es medir qué tanto un vector transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada infinitesimal falla en volver a sí mismo.

Para encontrar la forma en que  $R_{abc}{}^d$  actúa sobre un vector notemos que dado un campo vectorial  $v^a$ ,  $v^a \omega_a$  es una función escalar para cualquier campo vectorial dual  $\omega_a$ , de donde

$$\begin{aligned} -T^c_{ab} \nabla_c (v^d \omega_d) &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(v^d \omega_d) \\ &= \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v^d + v^d (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_d \\ &= \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v^d + v^d (R_{abc}{}^d \omega_d - T^d_{ab} \nabla_d \omega_c). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Expandiendo el lado izquierdo con regla de Leibniz y cancelando términos iguales la ecuación anterior conduce a

$$-\omega_d T^c_{ab} \nabla_c v^d = \omega_d (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v^d + v^c R_{abc}{}^d \omega_d$$

Reordenando esta última expresión quitando los términos contraídos con  $\omega_d$  (pues es arbitrario) se llega a

$$-R_{abc}{}^d v^c = [\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d{}_{ab} \nabla_d] v^c, \quad (4.6)$$

que es la ecuación buscada. Con esto es fácil probar que para cualquier tensor  $A^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}$  se tiene

$$[\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d{}_{ab} \nabla_d] A^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} A^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e A^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l}. \quad (4.7)$$

Las cuatro propiedades importantes del tensor de curvatura son

1.  $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$
2.  $R_{[abc]}{}^d = -\nabla_{[a} T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab} T^d{}_{c]e}$
3.  $R_{abcd} = -R_{abdc}$
4.  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = T^f{}_{[ab} R_{c]fd}{}^e$  (identidad de Bianchi)

La propiedad 1 se sigue trivialmente de la ecuación (4.4) pues  $T^c{}_{ab} = -T^c{}_{ba}$ . Para probar la propiedad 3 nótese que de las ecuaciones (4.7) y (2.17) se sigue

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^d{}_{ab} \nabla_d] g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} \\ &= R_{abcd} + R_{abdc}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

con lo que se obtiene la propiedad deseada. Las pruebas de las propiedades 2 y 4 son extensas y por tanto se presentan en el apéndice. Además las propiedades 1 – 3 implican

$$\begin{aligned} 2R_{abcd} &= 2R_{cdab} - \nabla_{[a} T_{d]bc} - \nabla_{[b} T_{a]cd} - \nabla_{[c} T_{b]ad} - \nabla_{[d} T_{c]ba} \\ &\quad + T^e{}_{[bc} T_{a]d} e + T^e{}_{[ca} T_{b]d} e + T^e{}_{[db} T_{c]a} e + T^e{}_{[ab} T_{d]c} e. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La prueba de esta propiedad también se incluye en los apéndices. Nótese que en el caso  $T^c{}_{ab} = 0$  se recuperan las cinco propiedades del tensor de Riemann.

Otros tensores de gran utilidad son las contracciones de  $R_{abc}{}^d$ . Por las propiedades 1 y 3 la contracción de los primeros dos índices o los últimos dos es cero. Así nos interesará  $R_{ac} \equiv R_{abc}{}^b$ , que por las mismas propiedades es igual a la contracción de cualquiera de los primeros dos índices con cualquiera de los últimos dos salvo, a lo más, un signo. A  $R_{ac}$  se le conoce como el *tensor de Ricci* y a  $R \equiv R^c{}_c$  el escalar de curvatura.

Si en la identidad de Bianchi (propiedad 4) se contraen los índices  $a$  y  $e$  se tiene

$$T^f{}_{[ab} R_{c]fd}{}^a = \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^a = 2(\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cad}{}^a - \nabla_c R_{bad}{}^a) = 2(\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd}). \quad (4.10)$$

Subiendo el índice  $d$  y contrayéndolo con  $b$

$$T^f{}_{[ab} R_{c]f}{}^{ba} = 2(\nabla_a R_{bc}{}^{ba} + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R) = 4\nabla^a R_{ca} - 2\nabla_c R = 4\nabla^a (R_{ca} - \frac{1}{2} R g_{ca}). \quad (4.11)$$

A  $G_{ca} := R_{ca} - \frac{1}{2}Rg_{ca}$  se le conoce como el *tensor de Einstein*, y es el que aparece en la ecuación de campo de Relatividad General y varias teorías de gravedad modificada .

Una propiedad de las autoparalelas de  $\mathbb{R}^n$  sin torsión es que no aceleran entre sí. Más formalmente, dos autoparalelas infinitesimalmente cerca y paralelas entre sí se mantienen de esta forma indefinidamente. Esta propiedad se pierde en presencia de curvatura y torsión, como se podría sospechar de las soluciones numéricas presentadas. Sería natural esperar, entonces, que estos tensores caractericen que tan rápido ‘se alejan’ o ‘acercan’ entre sí las autoparalelas.

Para darle un significado preciso a lo antes mencionado, supóngase que se tiene una familia uniparamétrica de autoparalelas, es decir, un mapeo  $(t, s) \mapsto \gamma_s(t) \subset M$  suave, invertible y con inversa suave donde para cada  $s$ ,  $\gamma_s$  es una autoparalela y  $t$  es un parámetro afín en ella. Como esta familia forma una subvariedad de  $M$ ,  $t$  y  $s$  pueden ser utilizados como coordenadas de dicha subvariedad. Además  $T^a = (\partial/\partial t)^a$  es tangente a las curvas por lo que satisface la ecuación

$$T^b \nabla_b T^a = 0. \quad (4.12)$$

Considérese  $X^a = (\partial/\partial s)^a$  y supóngase que se parametriza de forma que  $X_a T^a = 0$  en todos los puntos definidos por la curva  $t = 0$ , de modo que  $X^a$  representa el vector de desviación de las autoparalelas infinitesimalmente cercanas. El vector  $v^a = T^b \nabla_b X^a$  se interpreta como la velocidad relativa entre autoparalelas infinitesimalmente cerca y  $a^a = T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a)$  como su aceleración. En el apéndice se muestra que

$$a^a = T^c \nabla_c (X^d T^b T^a_{bd}) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d.$$

Esta es la generalización a la ecuación de desviación geodésica, ahora entre autoparalelas. Es un resultado muy interesante a comparación con el caso sin torsión, pues aquí no solo la curvatura acelera autoparalelas entre sí, sino también la torsión.

#### 4.1. Calculando la curvatura

El objetivo de esta sección es calcular  $R_{abc}{}^d$ . Para ello se tomarán algunas coordenadas y se expandirán expresiones presentadas anteriormente. Es importante mencionar que existen otros métodos para calcular  $R_{abc}{}^d$ , como el método de la tétrada, que son de gran utilidad más no se discutirán aquí. Una discusión sobre este método se puede consultar en la referencia [1]. Dadas unas coordenadas, es posible calcular la expresión (4.4) usando (2.11). Como

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \partial_a (\partial_b \omega_c - C^d{}_{bc} \omega_d) - C^e{}_{ab} (\partial_e \omega_c - C^d{}_{ec} \omega_d) - C^e{}_{ac} (\partial_b \omega_e - C^d{}_{be} \omega_d) \\ &= \partial_a \partial_b \omega_c - \partial_a (C^d{}_{bc} \omega_d) - C^e{}_{ab} \partial_e \omega_c + C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} \omega_d - C^e{}_{ac} \partial_b \omega_e + C^e{}_{ac} C^d{}_{be} \omega_d, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c &= \partial_b (C^d{}_{ac} \omega_d) - \partial_a (C^d{}_{bc} \omega_d) + (C^e{}_{ba} - C^e{}_{ab}) \partial_e \omega_c + (C^e{}_{ab} - C^e{}_{ba}) C^d{}_{ec} \omega_d \\ &\quad - C^e{}_{ac} \partial_b \omega_e + C^e{}_{bc} \partial_a \omega_e + C^e{}_{ac} C^d{}_{be} \omega_d - C^e{}_{bc} C^d{}_{ae} \omega_d \\ &= (\partial_b C^d{}_{ac}) \omega_d - (\partial_a C^d{}_{bc}) \omega_d - T^e{}_{ab} \partial_e \omega_c + T^e{}_{ab} C^d{}_{ec} \omega_d \\ &\quad + (C^e{}_{ac} C^d{}_{be} - C^e{}_{bc} C^d{}_{ae}) \omega_d \\ &= (\partial_b C^d{}_{ac}) \omega_d - (\partial_a C^d{}_{bc}) \omega_d + (C^e{}_{ac} C^d{}_{be} - C^e{}_{bc} C^d{}_{ae}) \omega_d - T^e{}_{ab} \nabla_e \omega_c \end{aligned}$$

y por tanto

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^e{}_{ab} \nabla_e) \omega_c = (\partial_b C^d{}_{ac}) \omega_d - (\partial_a C^d{}_{bc}) \omega_d + (C^e{}_{ac} C^d{}_{be} - C^e{}_{bc} C^d{}_{ae}) \omega_d.$$

Al ser arbitrario  $\omega_a$ , de la ecuación anterior se pueden leer los coeficientes del tensor de Riemann:

$$R_{abc}{}^d = \partial_b C^d{}_{ac} - \partial_a C^d{}_{bc} + C^e{}_{ac} C^d{}_{be} - C^e{}_{bc} C^d{}_{ae}. \quad (4.13)$$

que es a la expresión que se quería llegar. Nótese que si se escribe  $C^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ab} + K^c{}_{ab}$  de acuerdo a la ecuación 2.23, entonces la ecuación anterior se reescribe

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d &= \partial_b (\Gamma^d{}_{ac} + K^d{}_{ac}) - \partial_a (\Gamma^d{}_{bc} + K^d{}_{bc}) + (\Gamma^e{}_{ac} + K^e{}_{ac}) (\Gamma^d{}_{be} + K^d{}_{be}) \\ &\quad - (\Gamma^e{}_{bc} + K^e{}_{bc}) (\Gamma^d{}_{ae} + K^d{}_{ae}) \\ &= \hat{R}_{abc}{}^d + (D_b K^d{}_{ac} - D_a K^d{}_{bc}) + K^e{}_{ac} K^d{}_{be} - K^e{}_{bc} K^d{}_{ae} \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $\hat{R}_{abc}{}^d$  es el tensor de Riemann, *i.e.* el tensor de curvatura asociado a  $D_a$ .

## 5. Ecuaciones de Papapetrou

Resolver la ecuación general de movimiento en GR es un problema sumamente complicado pues, al mismo tiempo que se determina la trayectoria, se debe determinar el efecto gravitacional que este cuerpo genera [26]. Una primera aproximación es suponer que una de las partículas es muy pequeña a comparación del resto, de modo que su efecto gravitacional puede ser despreciado. A este tipo de partículas se les llamará *partículas de prueba* y el objetivo será encontrar su ecuación de movimiento en presencia de una torsión y un campo gravitacional conocidos (generado por el resto de los cuerpos).

El método de Papapetrou, presentado en la referencia [26] y correspondiente al caso de Relatividad General, se reproducirá en la primera parte de esta sección para después extenderlo al caso con torsión. Éste consiste en suponer que una partícula de prueba es pequeña y está descrita por un tensor de energía momento  $T^{ab}$ <sup>1</sup> cuyo dominio en el espacio-tiempo sea mucho menor que el radio característico del campo gravitacional (e.g. el radio de Schwarzschild) y cuya curvatura que genera puede ser despreciada con respecto a la curvatura de fondo. Así, al evolucionar la partícula trazará un tubo de mundo en el espacio 4-dimensional (ver figura 9). Dentro de este tubo se escoge una curva tipo temporal  $L$  arbitraria, con coordenadas  $X^\mu$ , que representará a la partícula. Como la curva es arbitraria existe ambigüedad en la descripción del método hasta este punto. Para obtener un resultado sin arbitrariedades se hará la aproximación de partícula puntual. Esta consiste en suponer que el tensor de energía momento de la partícula solo será distinto de cero en una bola de radio  $R$  centrada en  $X^\mu$  y al tomar el límite  $R \rightarrow 0$  se obtendrá la aproximación deseada.

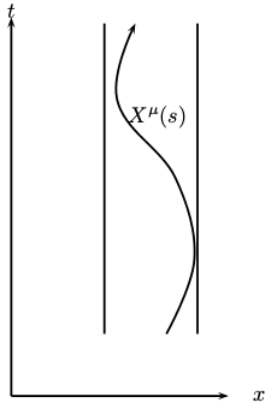


Figura 9: Diagrama espacio-tiempo del problema.

A partir de aquí se realiza una expansión multipolar que considera la estructura interna de la partícula. Como en otros ejemplos en física, considerar momentos multipolares altos complica la computabilidad del problema. Por tal razón, en el presente trabajo solo se considerará la primera aproximación, el caso monopolar, que corresponde a una partícula puntual

<sup>1</sup>El tensor de energía-momento  $T^{ab}$  y la torsión  $T^c{}_{ab}$  se distinguen por la cantidad de índices

sin momento angular intrínseco.

### 5.1. Caso sin torsión: volviendo a GR

Las hipótesis del problema antes mencionado, para el caso sin espín, se pueden escribir matemáticamente de la siguiente manera:

1. Se conoce la métrica de fondo  $g_{ab}$
2. Se tiene  $D_b \tau^{ab} = 0$  para la partícula, donde  $\tau^{ab} \equiv \sqrt{-g} T^{ab}$  y  $T^{ab}$  es el tensor de energía momento de la partícula.
3. Si para cualesquiera coordenadas  $\{x^\mu\}$  tal que  $x^0 = t$  es una coordenada tipo tiempo, si  $X^\alpha = X^\alpha(t)$  denota la posición de la partícula, entonces  $\tau^{\mu\nu}$  será diferente de cero solo en una bola de radio  $R$  pequeño centrada en  $X^\alpha$  y al tomar el límite  $R \rightarrow 0$  se obtendrá la aproximación deseada.
4. Si se define  $\delta x^\alpha := x^\alpha - X^\alpha$  y se consideran integrales tridimensionales (en la hipersuperficie  $\Sigma_t$  de coordenada  $t$  constante):

$$\int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\nu} dv, \int_{\Sigma_t} \delta x^\alpha \tau^{\mu\nu} dv, \int_{\Sigma_t} \delta x^\alpha \delta x^\beta \tau^{\mu\nu} dv, \dots$$

entonces  $\int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\nu} dv \neq 0$  para algún  $(\mu, \nu)$  pero  $0 = \int_{\Sigma_t} \delta x^\alpha \tau^{\mu\nu} dv = \int_{\Sigma_t} \delta x^\alpha \delta x^\beta \tau^{\mu\nu} dv = \dots$  siempre que aparezca un factor  $\delta x^\rho$  o más.

La conservación local de energía-momento de la partícula (condición 2) se puede escribir

$$\frac{\partial \tau^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} = 0, \quad (5.1)$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} (x^\alpha \tau^{\beta\gamma}) = \tau^{\beta\alpha} - x^\alpha \Gamma^\beta_{\mu\nu}.$$

Integrando las dos ecuaciones anteriores en hipersuperficies  $\Sigma_t$ , con la misma extensión de coordenadas usada en la última hipótesis, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha 0} dv = - \int_{\Sigma_t} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} dv, \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^\alpha \tau^{\beta 0} dv = \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta\alpha} - \int_{\Sigma_t} x^\alpha \Gamma^\beta_{\mu\nu} dv. \quad (5.3)$$

Hasta aquí las ecuaciones obtenidas son válidas a cualquier orden en la expansión multipolar. La aproximación que toma en cuenta la estructura interna viene de desarrollar  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  en serie de Taylor en el interior de la partícula

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = {}_0\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + 0 \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + \dots \quad (5.4)$$



donde el subíndice cero significa que se está evaluando en  $X^\alpha$ . Sustituyendo esta serie de potencias en la ecuación (5.2) y recordando que es partícula monopolar (condición 4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha 0} dv &= - \int_{\Sigma_t} ({}_0\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + {}_0 \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + \dots) \tau^{\mu\nu} dv \\ &= - \int_{\Sigma_t} {}_0\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} dv = -{}_0\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\nu} dv. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ahora sustituyendo la serie en (5.3)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^\alpha \tau^{\beta 0} dv = \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta\alpha} dv - \int_{\Sigma_t} x^\alpha ({}_0\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} + {}_0 \frac{\partial \Gamma^\beta{}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + \dots) \tau^{\mu\nu} dv, \quad (5.6)$$

utilizando la aproximación monopolar y sustituyendo  $X^\alpha$  por  $x^\alpha$  en las integrales anteriores se obtiene

$$\frac{dX^\alpha}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv + X^\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv = \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta\alpha} dv - X^\alpha \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\nu} dv, \quad (5.7)$$

donde ya se ha quitado el subíndice cero en  $\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}$  recordando que donde aparezca está evaluado en  $X^\alpha$ . Con la ecuación obtenida previamente se llega a

$$\int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\beta} dv = \frac{dX^\alpha}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv. \quad (5.8)$$

Definiendo  $u^\alpha = \frac{dX^\alpha}{ds}$ , con  $s$  un parámetro afín sobre la curva, y  $M^{\alpha\beta} = u^0 \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha\beta} dv$  la ecuación (5.8) se escribe

$$\frac{M^{\alpha\beta}}{u^0} = u^\alpha \frac{ds}{dt} \frac{M^{\beta 0}}{u^0},$$

pero  $ds/dt = 1/u^0$  y entonces

$$M^{\alpha\beta} = u^\alpha \frac{M^{\beta 0}}{u^0} \quad (5.9)$$

y sustituyendo  $\beta = 0$  en (5.9)

$$M^{\alpha 0} = u^\alpha \frac{M^{00}}{u^0}. \quad (5.10)$$

Definiendo  $m := M^{00}/(u^0)^2$  se puede escribir

$$M^{\alpha\beta} = m u^\alpha u^\beta. \quad (5.11)$$

Utilizando estas definiciones la ecuación (5.5) queda

$$\frac{d}{ds} m u^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} m u^\mu u^\nu = 0. \quad (5.12)$$

Por último, recordando que  $u_\mu u^\mu = -1$  implica  $u^\nu u_\alpha \nabla_\nu u^\alpha = 0$ , y utilizando esto en (5.12) se sigue que  $\frac{dm}{ds} = 0$  y así

$$\frac{d}{ds} u^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 \quad (5.13)$$

que es justo la ecuación geodésica (2.37).

Este es el cálculo de Papapetrou a orden monopolar y es una forma de demostrar que las partículas de prueba, en una primera aproximación, describen geodésicas al evolucionar en el espacio-tiempo. Para responder la pregunta central del capítulo se considerará ahora, además de una métrica, una torsión de fondo. Sin embargo la torsión aparece al utilizar un operador derivada  $\nabla_a$ , de modo que antes de atacar el problema directamente se generalizará la ley de conservación, que se escribirá ahora con un operador derivada con torsión.

## 5.2. Caso con torsión

Antes de revisar el caso con torsión es necesario escribir las leyes de conservación, de modo que se comenzará por ello para después generalizar la sección anterior. Suponiendo que la acción está dada por  $S = S_g + S_M$ , con  $S_g$  la acción de gravedad y  $S_M$  la acción de la materia, se va a pedir que tanto  $S_g$  como  $S_M = S_M(g, C, \phi)$  sean invariantes ante difeomorfismos (para que  $S$  lo sea). En particular, suponiendo que la teoría es invariante para grupos uniparamétricos de difeomorfismos generados por campos vectoriales  $\xi^a$ , la ecuación para  $S_M$  se escribe:

$$0 = \delta S_M = \int \left( \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta S_M}{\delta C^a{}_{bc}} \delta C^a{}_{bc} + \frac{\delta S_M}{\delta \phi} \delta \phi \right). \quad (5.14)$$

Ahora,  $\delta S_M / \delta C^a{}_{bc}$  suele ser proporcional al espín [6] de la partícula y como se supondrá que esta no tiene espín se tomará  $\delta S_M / \delta C^a{}_{bc} = 0$ . Además, que la materia satisfaga su ecuación de movimiento implica  $\delta S_M / \delta \phi = 0$ .

Definiendo el tensor de energía momento  $T_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}$  la invarianza ante difeomorfismos se escribe entonces

$$0 = \delta S_M = \int \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} = \int 2T_{ab} \delta g^{ab}. \quad (5.15)$$

Por último nótese que, de acuerdo con la ref. [1],  $\delta g^{ab} = L_\xi g^{ab} = -2\nabla^{(a} \xi^{b)} - 2\xi^c T^{(a}{}_{cd} g^{b)d}$  y entonces, escribiendo  $\nabla_a$  en términos de  $D_a$  se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \sqrt{-g} T_{(ab)} \left( \nabla^{(a} \xi^{b)} + \xi^c T^{(a}{}_{cd} g^{b)d} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} T_{ab} \left( \nabla^a \xi^b + \xi^c T^a{}_{cd} g^{bd} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} T_{ab} g^{ac} \left( D_c \xi^b + K^b{}_{cd} \xi^d \right) + \xi^c T_{ab} T^a{}_{cd} g^{bd} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\xi^b D^c T_{cb} + T_{ab} (g^{ac} K^b{}_{cd} \xi^d + \xi^c T^a{}_{cd} g^{bd}) \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} - \xi^b \left( D^c T_{cb} - g^{ac} T_{ad} K^d{}_{cb} - g^{ed} T_{ae} T^a{}_{bd} \right), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó la simetría de  $T_{ab}$  y en la cuarta se integró por partes y se supusieron condiciones de frontera apropiadas. Como estas ecuaciones se deben valer para cualquier campo vectorial  $\xi^a$  se sigue que

$$D^c T_{cb} - g^{ac} T_{ad} K^d{}_{cb} - g^{ac} T_{ad} T^d{}_{bc} = 0 \quad (5.16)$$

que es otra forma de escribir

$$D^c T_{cb} = 0. \quad (5.17)$$

De aquí se ve que, con esta aproximación, la ley de conservación se ve igual. Como el método de Papapetrou parte de esta ecuación, es de esperarse que en este caso las partículas también describan geodésicas.

Para no hacer referencia a  $D_a$  en la ecuación (5.17) esta se puede reescribir usando (2.7) y la expresión para la contorsión como

$$\nabla^c T_{cb} - T_{eb} T^c_{cd} g^{ed} - T^d_{ba} T_{de} g^{ea} = 0. \quad (5.18)$$

Volviendo al problema de las partículas de prueba, las hipótesis que cambian a comparación de la sección anterior son:

1. Se conocen  $g_{\mu\nu}$  y  $T^\alpha_{\mu\nu}$  de fondo.
2.  $\sigma^\mu_{\alpha\beta} = 0$  para la partícula sin espín, de donde  $\tau^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma \tau^{\mu\gamma} + T^\sigma_{\sigma\nu} \tau^{\nu\mu}$

Dando coordenadas la ecuación (5.18) se puede escribir

$$\frac{\partial \tau^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + C^\alpha_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} = T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma \tau^{\mu\gamma}, \quad (5.19)$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} (x^\alpha \tau^{\beta\gamma}) = \tau^{\beta\alpha} + x^\alpha T^\beta_\mu{}^\gamma_\nu \tau^{\mu\nu} - x^\alpha C^\beta_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu}.$$

Haciendo la integral 3-dimensional las ecuaciones anteriores toman la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha 0} dv = - \int_{\Sigma_t} C^\alpha_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} dv + \int_{\Sigma_t} T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma \tau^{\mu\gamma} dv, \quad (5.20)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^\alpha \tau^{\beta 0} dv = \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta\alpha} dv + \int_{\Sigma_t} x^\alpha T^\beta_\mu{}^\gamma_\nu \tau^{\mu\nu} dv - \int_{\Sigma_t} x^\alpha C^\beta_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} dv. \quad (5.21)$$

Desarrollando  $C^\alpha_{\mu\nu}$  y  $T^\alpha_{\mu\nu}$  en serie de Taylor centrada en  $X^\alpha(s)$  se tiene

$$\begin{aligned} C^\alpha_{\mu\nu} &= {}_0C^\alpha_{\mu\nu} + 0 \frac{\partial C^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + \dots \\ T^\alpha_{\mu\nu} &= {}_0T^\alpha_{\mu\nu} + 0 \frac{\partial T^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación (5.20) y recordando que es partícula monopolar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha 0} dv &= - \int_{\Sigma_t} ({}_0C^\alpha_{\mu\nu} + 0 C^\alpha_{\mu\nu,\sigma} \delta x^\sigma + \dots) \tau^{\mu\nu} dv \\ &\quad + \int_{\Sigma_t} ({}_0T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma + 0 T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma,\sigma \delta x^\sigma + \dots) \tau^{\mu\gamma} dv \\ &= - \int_{\Sigma_t} {}_0C^\alpha_{\mu\nu} \tau^{\mu\nu} dv + \int_{\Sigma_t} {}_0T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma \tau^{\mu\gamma} dv \\ &= - {}_0C^\alpha_{\mu\nu} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\nu} dv + {}_0T^\alpha_\mu{}^\beta_\gamma \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu\gamma} dv. \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo en la ecuación (5.21)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} x^\alpha \tau^{\beta 0} dv &= \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta \alpha} dv + \int_{\Sigma_t} x^\alpha ({}_0T_\mu^\beta{}_\gamma + {}_0T_\mu^\beta{}_{\gamma, \sigma} \delta x^\sigma + \dots) \tau^{\mu \gamma} dv \\
&- \int_{\Sigma_t} x^\alpha ({}_0C^\beta{}_{\mu \nu} + {}_0C^\beta{}_{\mu \nu, \sigma} \delta x^\sigma + \dots) \tau^{\mu \nu} dv \\
&= \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta \alpha} dv + {}_0T_\mu^\beta{}_\gamma \int_{\Sigma_t} x^\alpha \tau^{\mu \gamma} dv - {}_0C^\beta{}_{\mu \nu} \int_{\Sigma_t} x^\alpha \tau^{\mu \nu} dv.
\end{aligned}$$

Ahora, como la partícula es monopolar, se puede reemplazar  $x^\alpha$  por  $X^\alpha$  en las integrales anteriores. Desarrollando

$$\frac{dX^\alpha}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv + X^\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0} dv = \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta \alpha} dv + X^\alpha \left( {}_0T_\mu^\beta{}_\gamma \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu \gamma} dv - {}_0C^\beta{}_{\mu \nu} \int_{\Sigma_t} \tau^{\mu \nu} dv \right)$$

y usando la ecuación obtenida anteriormente se llega a

$$\int_{\Sigma_t} \tau^{\alpha \beta} dv = \frac{dX^\alpha}{dt} \int_{\Sigma_t} \tau^{\beta 0}. \quad (5.22)$$

Observando que (5.22) es igual a (5.8) se sigue nuevamente la ecuación (5.11) para las mismas definiciones de  $m$ ,  $M^{\alpha \beta}$  y  $u^\alpha$ .

Con esto

$$\frac{d}{ds} (m u^\alpha) + m C^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu - m T_\mu^\alpha{}_\gamma u^\mu u^\gamma = 0. \quad (5.23)$$

Contrayendo con  $u_\alpha$

$$-\frac{dm}{ds} + m \left( u_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} + u_\alpha C^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu \right) = -\frac{dm}{ds} = 0 \quad (5.24)$$

es decir, la masa  $m$  se conserva en la trayectoria y la ecuación (5.23) queda

$$m \left( \frac{du^\alpha}{ds} + C^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu - T_\mu^\alpha{}_\gamma u^\mu u^\gamma \right) = 0. \quad (5.25)$$

Si  $m \neq 0$  la ecuación anterior es la ecuación geodésica pues

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{du^\alpha}{ds} + C^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu - T_\mu^\alpha{}_\gamma u^\mu u^\gamma \\
&= \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} T^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu + \frac{1}{2} (T_\mu^\alpha{}_\nu + T_\nu^\alpha{}_\mu) u^\mu u^\nu - T_\mu^\alpha{}_\gamma u^\mu u^\gamma \\
&= \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha{}_{\mu \nu} u^\mu u^\nu.
\end{aligned} \quad (5.26)$$

Este es un resultado muy interesante pues nos dice que la torsión no afecta el movimiento de las partículas con la estructura interna más simple. Entonces, para estudiar el posible efecto de la torsión se necesita ir a mayores órdenes en la expansión multipolar y generalizar la ley de conservación. Esto parece un problema subsecuente interesante, quedando pendiente para un futuro trabajo.

## 6. Conclusiones

La aparición de la torsión en geometría diferencial suele ser ignorada en virtud de que la conexión inducida sobre una variedad, cuando esta se encuentra encajada en  $\mathbb{R}^n$ , no tiene torsión [29]. Sin embargo, esta suposición es cuestionable desde el punto de vista físico al pensar que la variedad es el espacio-tiempo mismo, además de que es posible formular una teoría física consistente que incorpore a este objeto. Sorprendentemente, todos los experimentos en Relatividad General son consistentes con una torsión no nula [31]. Con tal motivación, los primeros capítulos de la tesis fueron dedicados a comprender el lenguaje matemático asociado con este tensor, obteniendo resultados interesantes y presentándolos en la notación de la referencia [1].

En los capítulos 2, 3 y 4 de la tesis se notó cómo la torsión juega un papel muy importante en la caracterización de la geometría de una variedad. El concepto esencial que cambia de Relatividad General, de donde surgió toda la generalización aquí presentada, es el de *transporte paralelo* y la torsión caracteriza todos los distintos tipos de éste que se pueden definir en una variedad riemanniana pidiendo que se respete la condición de metricidad (ecuación (2.17)). Con esto se notó que la definición de curvas análogas a rectas cambia y se encontró la contribución adicional a la ecuación del caso conocido.

Una vez expuesto el concepto de torsión se siguió a expresar los conceptos de simetría en este lenguaje, para poder hablar de cantidades conservadas en autoparalelas. Para ello se encontró una hipótesis extra que se le debía agregar a los vectores que generan la simetría, de modo que se pudo extender el teorema de Killing al caso con torsión. Con esto se desarrollaron ejemplos de ecuaciones autoparalelas. Una observación interesante de los ejemplos es que, en ciertos espacio-tiempos planos (*i.e.* sin curvatura) conocidos, agregar una torsión particular induce aceleración entre autoparalelas, resultado que sería probado formalmente en el capítulo siguiente.

Se siguió en el capítulo 4 con el concepto de curvatura dadas estas nuevas condiciones. Se encontró que, para poder definir un operador puntual, es necesario cambiar la definición del tensor de curvatura. El resultado más fuerte, sin duda, es la prueba de que tanto la curvatura como la torsión inducen aceleración entre autoparalelas cercanas. Por último se encontró una forma de calcular el tensor de curvatura, encontrando inesperadamente una expresión con una forma idéntica al caso sin torsión, salvo la definición de los objetos que aparecen en dicha fórmula.

Hasta aquí el trabajo dio un entendimiento mucho más profundo de las hipótesis matemáticas que llevan a los resultados conocidos de los cursos (*e.g.* de geometría riemanniana o de Relatividad). Es sorprendente que relajar una suposición tan sencilla como hacer cero el lado derecho de la ecuación (2.2) lleva a toda una teoría matemática nueva. Además, este lenguaje puede servir para formular una teorías físicas consistentes, siendo sumamente interesante su estudio para explorar las posibles desviaciones de la física con respecto a la Relatividad General.

Por último se utilizó el lenguaje desarrollado para resolver el problema físico de interés:

encontrar la ecuación de movimiento de partículas de prueba. En Relatividad General se suele asumir que las partículas de prueba siguen geodésicas. Sin embargo este no es un postulado, sino más bien un resultado de una aproximación y se prueba en la referencia [26]. En el capítulo 5 se presenta este método y, extendiéndolo, se probó que en una primera aproximación las partículas no sienten la presencia de la torsión, es decir, siguen satisfaciendo la ecuación geodésica del espacio-tiempo. Como consecuencia, el espín intrínseco de la partícula debe ser no nulo para que la torsión del espaciotiempo entre en juego en su ecuación de movimiento. Con tal resultado queda como trabajo subsecuente el cálculo al siguiente nivel de aproximación, en donde parece factible que la torsión juegue un papel importante.

## Apéndices: demostraciones

•**Proposición:**  $R_{[abc]}^d = -\nabla_{[a}T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab}T^d{}_{c]e}$

**Demostración:** Dando coordenadas, de la ecuación (2.11)

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \partial_a \partial_b \omega_c - (\partial_a C^d{}_{bc})\omega_d - C^d{}_{bc} \partial_a \omega_d - C^e{}_{ab} \partial_e \omega_c + C^e{}_{ab} C^d{}_{ec} \omega_d - C^e{}_{ac} \partial_b \omega_e + C^e{}_{ac} C^d{}_{be} \omega_d$$

con lo que

$$\begin{aligned} \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} &= -\omega_d (\partial_{[a} C^d{}_{bc]}) - C^d{}_{[bc} \partial_a] \omega_d - C^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} + C^e{}_{[ab} C^d{}_{|e|c]} \omega_d - C^e{}_{[ac} \partial_b] \omega_e + C^e{}_{[ac} C^d{}_{b]e} \omega_d \\ &= -\omega_d (\partial_{[a} C^d{}_{bc]}) - C^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} + C^e{}_{[ab} C^d{}_{|e|c]} \omega_d + C^e{}_{[ac} C^d{}_{|e|b]} \omega_d + C^e{}_{[ac} T^d{}_{b]e} \omega_d \\ &= -\omega_d (\partial_{[a} C^d{}_{bc]}) - C^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} + C^e{}_{[ab} T^d{}_{|e|c]} \omega_d \\ &= \frac{1}{2} (-\omega_d (\partial_{[a} T^d{}_{bc]}) - T^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} - T^e{}_{[ab} T^d{}_{c]e} \omega_d) \end{aligned}$$

donde para la segunda igualdad se cancelaron dos términos y se reescribió el último usando (2.7) y para la última se usó nuevamente (2.7).

De aquí, usando (4.4)

$$\begin{aligned} R_{[abc]}^d \omega_d &= 2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} + T^d{}_{[ab} \nabla_{|d|} \omega_{c]} \\ &= -\omega_d (\partial_{[a} T^d{}_{bc]}) - T^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} - T^e{}_{[ab} T^d{}_{c]e} \omega_d + T^d{}_{[ab} \partial_{|d|} \omega_{c]} - T^d{}_{[ab} C^e{}_{|d|c]} \omega_e \\ &= -\omega_d (\partial_{[a} T^d{}_{bc]}) - T^e{}_{[ab} T^d{}_{c]e} \omega_d - T^d{}_{[ab} C^e{}_{|d|c]} \omega_e \\ &= -\partial_{[a} T^d{}_{bc]} \omega_d - T^d{}_{[ab} C^e{}_{c]d} \omega_e \end{aligned} \quad (6.1)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (-\nabla_{[a} T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab} T^d{}_{c]e}) \omega_d &= -(\partial_{[a} T^d{}_{bc]} + C^d{}_{a|e|} T^e{}_{bc} \\ &\quad - C^e{}_{[ab} T^d{}_{|e|c]} - C^e{}_{[ac} T^d{}_{b]e}) \omega_d + T^e{}_{[ab} T^d{}_{c]e} \omega_d \\ &= (-\partial_{[a} T^d{}_{bc]} - C^d{}_{[a|e|} T^e{}_{bc]}) \omega_d. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Como ambas expresiones de valen para cualquier  $\omega_d$  se concluye que son iguales, como se esperaba.

•**Proposición:**  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = T^f{}_{[ab} R_{c]fd}{}^e$

**Demostración:**

Por la ecuación (4.7) aplicada a  $\nabla_c \omega_d$  se tiene

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T^e{}_{ab} \nabla_e) \nabla_c \omega_d = R_{abc}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{abd}{}^e \nabla_c \omega_e.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \nabla_a (\nabla_b \nabla_c \omega_d - \nabla_c \nabla_b \omega_d + T^e{}_{bc} \nabla_e \omega_d) &= \nabla_a (R_{bcd}{}^e \omega_e) \\ &= \omega_e \nabla_a R_{bcd}{}^e + R_{bcd}{}^e \nabla_a \omega_e. \end{aligned}$$

Antisimetrizando ambas ecuaciones en  $a$ ,  $b$ , y  $c$  se sigue que

$$R_{[abc]}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{[ab|d]}{}^e \nabla_{c]} \omega_e = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e + R_{bc|d]}{}^e \nabla_a \omega_e - \nabla_{[a} T^e{}_{bc]} \nabla_e \omega_d.$$

Cancelando los términos iguales y sustituyendo la expresión para  $R_{[abc]^d}$  se sigue que

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = T^f{}_{[ab}R_{c]fd}{}^e$$

que es lo que se quería probar.

•**Proposición:**

$$\begin{aligned} 2R_{abcd} &= 2R_{cdab} - \nabla_{[a}T_{d|bc]} - \nabla_{[b}T_{a|cd]} - \nabla_{[c}T_{b|ad]} - \nabla_{[d}T_{c|ba]} \\ &\quad + T^e{}_{[bc}T_{a|d]e} + T^e{}_{[ca}T_{b|d]e} + T^e{}_{[db}T_{c|a]e} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

**Demostración:**

Por las propiedades 1-3 del tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{cabd} - R_{bcad} - \nabla_{[a}T_{d|bc]} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e} \\ &= R_{cadb} + R_{bcda} - \nabla_{[a}T_{d|bc]} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e} \\ &= (-R_{dcab} - R_{adcb} - \nabla_c T_{b|ad]} + T^e{}_{[ca}T_{b|d]e}) + R_{bcda} - \nabla_{[a}T_{d|bc]} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e} \\ &= R_{cdab} + (R_{bcda} - R_{dabc}) - \nabla_{[a}T_{d|bc]} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e} - \nabla_c T_{b|ad]} + T^e{}_{[ca}T_{b|d]e} \end{aligned} \quad (6.4)$$

que se puede reescribir como

$$R_{abcd} - R_{cdab} = R_{bcda} - R_{dabc} - \nabla_{[a}T_{d|bc]} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e} - \nabla_c T_{b|ad]} + T^e{}_{[ca}T_{b|d]e}. \quad (6.5)$$

Si se escribe la ecuación anterior cambiando índices  $a \mapsto b$ ,  $b \mapsto c$ ,  $c \mapsto d$ ,  $d \mapsto c$ :

$$R_{bcda} - R_{dabc} = R_{cdab} - R_{abcd} - \nabla_{[b}T_{a|cd]} + T^e{}_{[bc}T_{a|d]e} - \nabla_d T_{c|ba]} + T^e{}_{[db}T_{c|a]e}, \quad (6.6)$$

que se reescribe

$$R_{abcd} - R_{cdab} = -(R_{bcda} - R_{dabc}) - \nabla_{[b}T_{a|cd]} + T^e{}_{[bc}T_{a|d]e} - \nabla_d T_{c|ba]} + T^e{}_{[db}T_{c|a]e}. \quad (6.7)$$

Sumando las ecuaciones 6.5 y 6.7 se obtiene

$$\begin{aligned} 2(R_{abcd} - R_{cdab}) &= -\nabla_{[a}T_{d|bc]} - \nabla_{[b}T_{a|cd]} - \nabla_{[c}T_{b|ad]} - \nabla_{[d}T_{c|ba]} \\ &\quad + T^e{}_{[bc}T_{a|d]e} + T^e{}_{[ca}T_{b|d]e} + T^e{}_{[db}T_{c|a]e} + T^e{}_{[ab}T_{d|c]e} \end{aligned} \quad (6.8)$$

•**Proposición:**  $a^a = T^c \nabla_c (X^d T^b T^a{}_{bd}) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d$

**Demostración:** Utilizando que  $T^a$  y  $X^a$  conmutan al ser campos vectoriales coordinados, la ecuación autoparalela y la ecuación (4.6)

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \\ &= T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a + T^b X^d T^a{}_{bd}) \\ &= (T^c \nabla_c X^b) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a + T^a{}_{bd} T^b T^c \nabla_c X^d + X^d T^b T^c \nabla_c T^a{}_{bd} \\ &= (T^c \nabla_c X^b) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b T^c T^d{}_{cb} \nabla_d T^a - X^b T^c R_{cbd}{}^a T^d \\ &\quad + T^a{}_{bd} T^b T^c \nabla_c X^d + X^d T^b T^c \nabla_c T^a{}_{bd} \\ &= (X^c \nabla_c T^b + X^c T^d T^b{}_{dc}) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b T^c T^d{}_{cb} \nabla_d T^a \\ &\quad - X^b T^c R_{cbd}{}^a T^d + T^a{}_{bd} T^b T^c \nabla_c X^d + X^d T^b T^c \nabla_c T^a{}_{bd} \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) + X^c T^d T^b{}_{dc} \nabla_b T^a - X^b T^c T^d{}_{cb} \nabla_d T^a + T^a{}_{bd} T^b T^c \nabla_c X^d \\ &\quad + X^d T^b T^c \nabla_c T^a{}_{bd} - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= T^c \nabla_c (X^d T^b T^a{}_{bd}) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d. \end{aligned}$$



## Referencias

- [1] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [2] Tejinder P Singh. General relativity, torsion, and quantum theory. *arXiv preprint arXiv:1512.06982*, 2015.
- [3] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [4] Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. Extended theories of gravity. *Physics Reports*, 509(4):167–321, 2011.
- [5] Michael Edward Peskin. *An introduction to quantum field theory*. Westview press, 1995.
- [6] Friedrich W Hehl, Paul Von der Heyde, G David Kerlick, and James M Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, 48(3):393, 1976.
- [7] James B Hartle. *Gravity: An introduction to einstein’s general relativity*, 2003.
- [8] J Clerk Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London*, 13:531–536, 1863.
- [9] Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, USA, 1899.
- [10] Albert Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. 1905.
- [11] et al. Reinhardt. Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities. *Nature Physics*, 3(12):861–864, 2007.
- [12] Peter Wolf, Frédéric Chapelet, Sébastien Bize, and André Clairon. Cold atom clock test of lorentz invariance in the matter sector. *Physical review letters*, 96(6):060801, 2006.
- [13] Bárbara Almela Lovett Cline et al. Los creadores de la nueva física: los físicos y la teoría cuántica. *Breviarios del fondo de cultura económica;*, 1973.
- [14] Albert Einstein. The Formal Foundation of the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1914:1030–1085, 1914.
- [15] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [16] A Sillanpaa, S Haarala, MJ Valtonen, B Sundelius, and GG Byrd. Oj 287-binary pair of supermassive black holes. *The Astrophysical Journal*, 325:628–634, 1988.
- [17] Holger Müller, Achim Peters, and Steven Chu. A precision measurement of the gravitational redshift by the interference of matter waves. *Nature*, 463(7283):926–929, 2010.
- [18] B. P. et al. Abbott. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [19] Élie Cartan. Sur une généralisation de la notion de courbure de riemann et les espaces à torsion. *Comptes Rendus, Ac. Sc. Paris*, 174:593–595, 1922.

- [20] Elie Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie)(suite). In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 41, pages 1–25. Elsevier, 1924.
- [21] Elie Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 42, pages 17–88. Elsevier, 1925.
- [22] Tom WB Kibble. Lorentz invariance and the gravitational field. *Journal of mathematical physics*, 2(2):212–221, 1961.
- [23] DW Sciama. Recent developments in general relativity, festschrift for infeld, 1962.
- [24] Ilya Lvovitch Shapiro. Physical aspects of the space–time torsion. *Physics Reports*, 357(2):113–213, 2002.
- [25] Albert V Minkevich. Accelerating universe with spacetime torsion but without dark matter and dark energy. *Physics Letters B*, 678(5):423–426, 2009.
- [26] Achille Papapetrou. Spinning test-particles in general relativity. i. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 209, pages 248–258. The Royal Society, 1951.
- [27] John M Lee. Smooth manifolds. In *Introduction to Smooth Manifolds*, pages 1–29. Springer, 2003.
- [28] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [29] John M Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.
- [30] Jorge José and Eugene Saletan. *Classical dynamics: a contemporary approach*, 2000.
- [31] Yuri Bonder. Torsion or not torsion, that is the question. *International Journal of Modern Physics D*, 25(12):1644013, 2016.