UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD TOPOLÓGICA Y SUS EQUIVALENCIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

LORENZO GUSTAVO REYES NÚÑEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALBERTO LEÓN KUSHNER SCHNUR

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2017

Estabilidad topológica y sus equivalencias

Lorenzo Gustavo Reyes Núñez

15 de noviembre de 2017

Índice general

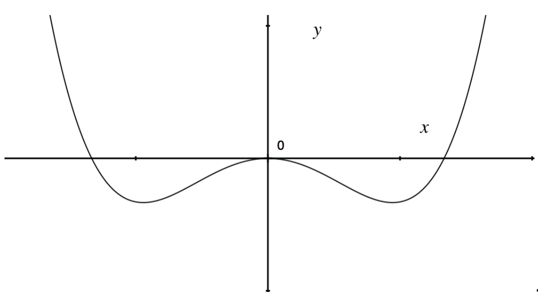
Capítulo 1

Introducción

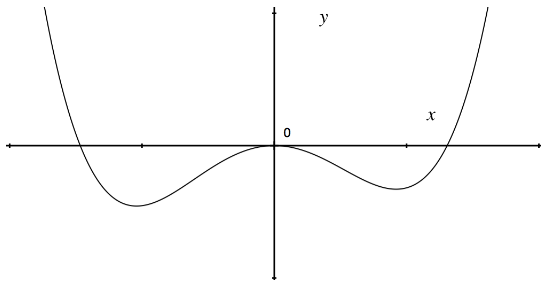
En física decimos que un fenómeno es observable si al perturbarlo un poco sigue siendo "igual". En nuestro caso, un fenómeno va a ser representado por una función $f : M \to N$ de clase C^∞ con M y N variedades diferenciables. La parte de que un fenómeno sea observable se traduce en que si $f' : M \to N$ es suficientemente cercana a f, entonces existen $g : M \to M$ y $h : N \to N$ difeomorfismos tales que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M & \xrightarrow{f'} & N. \end{array}$$

Al pedirle a g y a h que sean difeomorfismos garantizamos que f y f' sean "iguales". En nuestro caso, a las funciones observables las llamaremos estables. Por ejemplo, nos podemos tomar la función cuya gráfica es:



Podemos hacer una pequeña deformación de esta función de modo que obtengamos una función del siguiente estilo:



Nuesta función original no será estable, ya que, los difeomorfismos en particular son funciones biyectivas, entonces en la primera imagen los valores críticos tienen cardinalidad 2 y en la segunda tienen 3. Hasta el momento hemos hablado de que dos funciones estén cercanas, esto se refiere a que el espacio de funciones de clase C^∞ entre M y N tiene una topología. Esta topología se le conoce como topología C^∞ de Whitney, debida al matemático Hassler Whitney.

En este trabajo intentamos exponer de una manera clara y simple esta teoría. Aunque nuestros resultados se presenten en contextos más generales nuestro propósito será demostrarlos en el caso de mapeos entre espacios euclidianos y cuando sea posible demostrarlos en variedades. Iniciamos con un capítulo de preliminares exponiendo lo más esencial de topología diferencial y dando ejemplos que nos serán útiles en capítulos posteriores.

En el capítulo 3, definiremos la topología C^∞ de Whitney además daremos las propiedades más importantes de este espacio, como que es un espacio de Baire, el teorema de transversalidad de Thom [1956] y el teorema de inmersión de Whitney.

En el siguiente capítulo empezaremos dando la definición formal de estabilidad topológica, lo primero que notaremos será que con nuestra definición es muy difícil determinar si un mapeo es estable. Nuestra meta será encontrar criterios suficientes y necesarios para saber si una función es estable, para esto demostraremos el teorema de Mather[1968-70] el cual introduce un nuevo tipo de estabilidad, conocido como estabilidad infinitesimal. Para demostrar que estabilidad topológica es equivalente a estabilidad infinitesimal daremos nuevos tipos de estabilidad equivalentes a estos dos. Estabilidad infinitesimal es una definición mucho más manejable ya que demostraremos que es una condición de orden finito gracias al teorema de preparación de Malgrange [1962-63]. Finalizamos este capítulo dando ejemplos de funciones estables.

En el último capítulo iniciamos resolviendo el problema de estudiar los mapeos estables entre variedades de dimensión 2. Para finalizar este trabajo mencionamos en cuales casos los mapeos estables forman un conjunto denso.

Capítulo 2

Preliminares

El propósito de este capítulo es recordar conceptos básicos de topología diferencial, ponernos de acuerdo en la notación y desarrollar ejemplos que nos servirán en capítulos posteriores.

2.1. Variedades diferenciables

Definición 2.1.1. Una *variedad topológica* M^m de dimensión m es un espacio topólogico que es Hausdorff, segundo numerable y localmente euclidiano. Esto último quiere decir que si $p \in M$ existe un abierto $U \subseteq M^m$, un abierto U' de $\mathbb{R}^m$ y un homeomorfismo de U a U', el cual denotaremos como ϕ_p. El mapeo ϕ_p diremos que es una carta. A partir de este momento omitiremos el superíndice de la definición, las variedades serán denotadas por letras mayúsculas (normalmente M y N) y su dimensión por la misma letra pero en minúscula.

Un punto $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ lo podemos describir por una enéada $(x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ para toda i. Entonces alrededor de cada punto mediante las cartas podemos darle coordenadas a nuestra vecindad U. Antes de dar la definición de variedad diferenciable, necesitaremos revisar el concepto de atlas diferenciable.

Definición 2.1.2. Una colección de cartas sobre una variedad M $\{\phi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ donde A es un conjunto de índices, se dice que es un *atlas* $\mathfrak{A}$ de clase C^∞(diferenciable) si:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$, donde U_α es el dominio de la carta correspondiente a ϕ_α.

2. Si tenemos cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) con $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ entonces $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local de clase C^∞.

Diremos que dos atlas diferenciables $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son compatibles si $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ vuelve a ser un atlas diferenciable. Dado un atlas $\mathfrak{A}$ de M, una estructura diferenciable en M es la unión de todos los atlas que son compatibles con A. Una variedad es una pareja $(M, \mathfrak{A})$ donde M es una variedad topológica y $\mathfrak{A}$ es una estructura diferenciable en M.

Ejemplos:

1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces U es un abierto con la topología inducida y con una única carta $Id : U \to U$.

2. La esfera $S^n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\bar{x}\| = 1\}$ es una variedad cuyas cartas están dadas por laa proyecciones estereográficas.

3. El conjunto de todos los subespacios de dimensión s de $\mathbb{R}^n$, esta variedad se llama el grassmanniano de s-planos en $\mathbb{R}^n$ y se denota como $G(s, \mathbb{R}^n)$. Sea W el subconjunto de V^s de s vectores linealmente independientes de V, donde $V = \mathbb{R}^n$. Definimos en W la siguiente relación de equivalencia; $w_1 \sim w_2 \iff \langle w_1 \rangle = \langle w_2 \rangle$. Esto claramente es una relación de equivalencia.

   Por como definimos $\sim$, tenemos que $G(s, \mathbb{R}^n) = W/\sim$ como conjuntos, entonces podemos darle a $G(s, \mathbb{R}^n)$ la topología cociente, lo primero que podemos notar es que con esta topología $G(s, \mathbb{R}^n)$ es segundo numerable.

   Para dar las cartas nos tomamos V un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión s y sea π_V la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en V. Sea $\pi_{U,V}$ la restricción de π_V a U, donde U es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - k$. Sea $W_V = \{U \in G(s, \mathbb{R}^n) \mid \pi_{U,V}$ es una biyección$\}$.

   Definimos $\rho_V : W_V \to \mathrm{Hom}(V, V^\perp)$, $\rho_V(U) = \pi_{U,V^\perp} \circ \pi_{U,V}^{-1}$. Por como definimos W_V, esta función tiene inversa y por lo tanto es un homeomorfismo.

4. Sean M y N dos variedades, podemos definir el producto topológico $M \times N$ y darle estructura diferenciable de la siguiente manera. Sean $\mathfrak{A} = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ y $\mathfrak{B} = (V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in J}$ atlas en M y N respectivamente, definimos $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ como $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)_{\alpha \times \beta \in I \times J}$.

Hasta el momento hemos definido nuestros objetos de interés; lo que ahora necesitamos es relacionar estos objetos, esto lo haremos mediante funciones diferenciables. Diremos que $\rho : M \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞ si para toda carta ϕ el mapeo $\rho \circ \phi^{-1} : \mathrm{imagen}(\phi) \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞.

Ahora si tenemos una función $f : M \to N$ diremos que es de clase C^∞ si para toda función $\rho : N \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ la composición $f \circ \rho$ es de clase C^∞. Diremos que f es un difeomorfismo si tiene inversa suave, es decir, existe

$g : N \to M$ tal que $f \circ g = Id_M$ y $g \circ f = Id_N$. A las funciones C^∞ también se les llama funciones suaves. A partir de este momento todas las funciones con las que trabajaremos serán suaves y nuestras variedades también.

En $\mathbb{R}^n$ los abiertos vuelven a ser variedades con la topología inducida, también podemos pensar a $\mathbb{R}^k$ "encajado" en $\mathbb{R}^n$ (con $k \leqslant n$) como $i_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ donde mandamos a $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^k \times \{\bar{0}\}$, para cada punto $\bar{v}$ en $\mathbb{R}^k \times \{\bar{0}\}$ y para toda vecindad $N_{\bar{v}}$ abierta de él si la intersecamos con la imagen de i_k obtendremos un "abierto"de $\mathbb{R}^k$, una manera de generalizar este detalle es la siguiente:

Definición 2.1.3. Sea M^m variedad y $N^n \subseteq M$, decimos que N es una *subvariedad* de dimensión n de M si para todo $x \in N$ existe una carta $\phi : \mathrm{dom}(\phi) \to \mathbb{R}^m$ cuyo dominio contenga a x tal que $U \cap N = \phi^{(-1)}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Denotamos a la codimensión de N en M como $\mathrm{codim}(N) = \dim M - \dim N$.

2.2. Espacio tangente

Sea M^m una variedad diferenciable y $x \in M$, sea $C^\infty(M)$ el anillo de funciones C^∞ de M a $\mathbb{R}$ con la suma y producto puntual. Definimos en este conjunto la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff \exists U_x \text{ vecindad de } x \text{ tal que } f_{|U_x} = g_{|U_x}.$$

Sea $C_x^\infty(M) = C^\infty(M)/\sim$, a este conjunto le podemos dar estructura de anillo mediante suma y producto de representantes, y además de $\mathbb{R}$-álgebra con el morfismo $\mathbb{R} \to C_x^\infty(M)$ que a cada número real le asigna la clase de la función constante, es claro que estas operaciones están bien definidas. Denominaremos a $C_x^\infty(M)$ como el anillo de gérmenes alrededor de x, a un elemento de este anillo le llamaremos germen y a la clase de $f \in C^\infty(M)$ la denotamos por $\bar{f}$.

Lo primero que vamos a demostrar de este anillo es que es local (tiene un único ideal maximal), sea $\mathfrak{m}_x(M) \equiv \{\bar{f} \in C_x^\infty(M) \mid \bar{f}(x) = 0\}$. Aquí cuando evaluamos al germen $\bar{f}$ en x en realidad estamos evaluando a un representante, pero es evidente que si tomamos cualquier otro representante de la clase de $\bar{f}$ éste también se anulará en x.

Claramente el germen $\bar{0} \in \mathfrak{m}_x(M)$, si $\bar{f}$, $\bar{g} \in \mathfrak{m}_x$, nos tomamos f y g representantes de cada clase correspondiente, entonces $(f+g)(x) = 0$ y esto obviamente no dependerá del representante elegido. Sea $\bar{f} \in \mathfrak{m}_x(M)$ y $\bar{h} \in C_x^\infty(M)$, nos tomamos un representante de cada clase f y h respectivamente, entonces $(fh)(x) = f(x)h(x) = 0$, entonces $\bar{f}\bar{h} \in \mathfrak{m}_x(M)$. Por lo tanto, $\mathfrak{m}_x(M)$ es ideal.

Ahora si nos tomamos $\bar{h}$ en el complemento de $\mathfrak{m}_x(M)$ y sea h un representante de esta clase. Por como definimos a nuestro ideal, existe una vecindad

V_x de x tal que $h_{|V_x} \neq 0$. Entonces h y $h_{|V_x}$ pertenecen a la misma clase $\bar{h}$ en $C_x^\infty(M)$, entonces $h_{|V_x}$ es invertible y su inverso está dado por $1/h_{|V_x} : V_x \to \mathbb{R}$. Entonces el complemento de nuestro ideal $\mathfrak{m}_x(M)$ nada más está conformado por unidades, por lo tanto nuestro anillo es local.

Definición 2.2.1. Una *derivación* X es un mapeo lineal de $C_x^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que cumple la regla de Leibniz, es decir,

$$X(\overline{f} \cdot \bar{g}) = X(\overline{f}) \cdot \bar{g}(x) + \overline{f}(x)X(\bar{g}).$$

Claramente el conjunto de derivaciones es un subespacio vectorial de los mapeos lineales entre $C_x^\infty(M)$ y $\mathbb{R}$, lo llamaremos espacio tangente en x, y la notación que usaremos a lo largo de este trabajo será T_xM.

La dimensión de T_xM coincide con la de M, la base para T_xM esta dada por el conjunto $\{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\}$, donde cada una de estas derivaciones es derivar parcialmente con respecto a su coordenada correspondiente.

Esta definición de espacio tangente es muy útil para hacer cálculos pero le hace falta geometría, si pensamos en un abierto de un espacio euclidiano el espacio tangente en un punto x es el espacio de velocidades con las cuales puede pasar una curva suave c en x. Para poder ocupar esta definición en variedades ocuparemos cartas. Sea W el conjunto de curvas suaves de $(-1, 1)$ en M tales que $c(0) = x$ para toda curva c. Definimos en W la siguiente relación de equivalencia, $c_1 \sim c_2 \iff (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$ para alguna carta ϕ fija tal que su dominio contenga a x. A $W/\sim$ le podemos dar estructura de espacio vectorial mediante nuestra carta ϕ, las operaciones estarán dadas por:

1. $\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{\phi^{-1}((\phi(c_1) + \phi(c_2)'(0))}$. Esta última clase de equivalencia corresponde a la línea recta que pasa por el origen con velocidad constante $(\phi(c_1(0)) + \phi(c_2(0))'$.
2. $\lambda \cdot \overline{c_1} = \overline{\phi^{-1}(\lambda((\phi \circ c_1)'(0))}$.

Debido a la linealidad de la derivada estas operaciones no dependerán del representante. En este caso para definir el espacio tangente ocupamos nada más una carta, ϕ, ¿si ocupáramos otra carta obtendríamos el mismo espacio vectorial? La respuesta es sí. Esto se debe a que los cambios de carta son difeomorfismos, entonces nuestra definición de espacio tangente mediante curvas no depende de la carta.

Estaremos usando las dos definiciones de espacio tangente dependiendo de lo que estemos haciendo, pero no es difícil convencerse de que estas definiciones son equivalentes.

Si tenemos un mapeo $f : M \to N$ suave, con $f(x) = y$, f nos induce un mapeo lineal $(df)_x : T_xM \to T_yN$, donde a una clase $\bar{c}$ la enviamos a $\overline{f \circ c}$.

Definición 2.2.2. Sea $f : M^m \to N^n$ suave con $f(x) = y$, si $(df)_x$ tiene rango máximo decimos que f es:

1. Una *sumersión* en x si $m \geqslant n$,
2. Una *inmersión* en x si $m \leqslant n$.

Decimos que f es una inmersión o sumersión si es una inmersión o sumersión respectivamente en cada uno de sus puntos.

Definición 2.2.3. Sean M y N variedades, $f : M \to N$ suave, $x \in M$ y $y \in N$, entonces:

1. $\operatorname{corango}(df)_x = \operatorname{mín}\{\dim M, \dim N\} - \operatorname{rango}((df)_x)$.
2. x es un *punto crítico* si $\operatorname{corango}(df)_x > 0$,
3. y es un *valor crítico* si $f^{-1}(y)$ tiene un punto crítico,
4. x es un *punto regular* si no es un punto crítico,
5. y es un *valor regular* si no es un valor crítico. En particular si $y \notin Im(f)$ entonces y es un valor regular.

Teorema 2.2.4. *Sea $f : M^m \to N^n$ suave con $f(x) = y$, si f es una inmersión en x, entonces existen cartas ϕ_x y ψ_y alrededor de x y y respectivamente tal que $\phi_x^{-1} \circ f \circ \psi_y : \operatorname{dom} \phi_x^{-1} \to \operatorname{rango} \psi_y$ es la inclusión canónica de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. (Podemos cambiar que f sea una sumersión en x para que el mapeo $\phi_x^{-1} \circ f \circ \psi_y : \operatorname{dom} \phi_x^{-1} \to \operatorname{rango} \psi_y$ sea la proyección canónica de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$).*

Este teorema no lo demostraremos, pero es una consecuencia del teorema de la función implícita de cálculo vectorial.

2.3. Algunas cosas útiles

Antes de seguir daremos algunas definiciones y teoremas que necesitaremos en el futuro, cuyas demostraciones se pueden encontrar en cualquier libro básico de topología diferencial [2, 1].

Definición 2.3.1. Sea M^m una variedad y $A \subset M$. A tiene *medida cero* en M si existe una colección de cartas $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{dom}(\phi_i)$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\phi_i(\operatorname{dom}(\phi_i)) \cap A$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$.

Notemos que si para una cubierta A tiene medida cero entonces para cualquier cubierta lo tendrá ya que los mapeos de transición son suaves y mandan conjuntos de medida cero en medida cero. También le pedimos a la cubierta que sea numerable porque si una cubierta no numerable cubre a A entonces existirá una subcubierta numerable ya que las variedades son segundo numerable.

Teorema 2.3.2. *Sea M^m variedad, $N^n \subset M^m$ subvariedad con $n < m$, entonces N tiene medida cero en M.*

Teorema 2.3.3. *Sea M variedad, $U \subset M$ abierto, entonces U no tiene medida cero.*

Teorema 2.3.4. *Teorema de Sard. Sean M y N variedades, $f : M \to N$ suave, entonces el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero en N.*

Definición 2.3.5. Sea M una variedad, $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ cubiertas de M, entonces:

1. $\{V_j\}_{j\in J}$ es un refinamiento de $\{U_i\}_{i\in I}$ si para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$.
2. $\{V_j\}_{j\in J}$ es localmente finita si para todo $x \in M$ existe una vecindad W tal que $W \cap V_j = \varnothing$ para casi toda $j \in J$, es decir, $V \cap U_j \neq \varnothing$ nada más para un número finito de índices.

Teorema 2.3.6. *Sea M variedad. Toda cubierta de M tiene una subcubierta localmente finita.*

Definición 2.3.7. Sea M variedad, entonces

1. Sea $\rho : M \to \mathbb{R}$, el *soporte* de ρ, denotado por $\mathrm{sop}(\rho)$, es la cerradura del conjunto $\{x \in M \mid \rho(x) \neq 0\}$
2. Una *partición de la unidad* en M es una familia de funciones suaves real valuadas $\{\rho_i\}_{i\in I}$ tales que
   a. $\{\mathrm{sop}(\rho_i)\}_{i\in I}$ es una cubierta de M localmente finita.
   b. $\rho_i(x) \geqslant 0$ para todo $i \in I$ y para todo $x \in M$.
   c. $\sum\limits_{i\in I} \rho_i(x) \equiv 1$ para todo $x \in M$. La suma siempre será finita por a.
   d. Una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i\in I}$ en M es subordinada a una cubierta $\{U_j\}_{j\in J}$ si para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $\mathrm{sop}(\rho_i) \subset U_j$.

Teorema 2.3.8. *Sea M variedad y $\{U_i\}_{i\in I}$ cubierta abierta de M, entonces existe una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i\in I}$ subordinada a esta cubierta.*

2.4. Haces vectoriales

Definición 2.4.1. Sean E^{m+k} y M^m variedades y $\pi : E \to M$ una sumersión. Decimos que E es un *haz vectorial* sobre M de rango k si:

1. Para toda $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión k, cuyas operaciones son funciones suaves en $\pi^{-1}(x)$. A $\pi^{-1}(x)$ le llamaremos la fibra de x en E.

2. Para todo $x \in M$ existe una vecindad U_x, tal que existe un difeomorfismo de $\phi_x : \pi^{-1}(U_x) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$,

Normalmente a E le pondremos superíndice la dimensión de la fibra en lugar de la dimensión de variedad diferenciable, entonces en lugar de escribir E^{n+k} escribiremos E^k. De 2) podemos concluir que π, además de ser una sumersión, es suprayectiva. A M le llamaremos el espacio base de E.

Definición 2.4.2. Sean E y F haces vectoriales sobre M. Una función diferenciable $f : E \to F$ es un *homomorfismo entre haces vectoriales* si $f \circ \pi_F = \pi_E$ y para todo $x \in M$ $f|_{E_x} : E_x \to F_x$ es una transformación lineal entre espacios vectoriales.

Definición 2.4.3. Sea E un haz vectorial sobre M. Una *sección* de E es una transformación diferenciable $X : M \to E$ tal que $\pi \circ X \equiv Id_M$.

Lo que hace una sección es que a cada x en M le asigna un vector en su fibra $\pi^{-1}(x)$. El conjunto de secciones de un haz E sobre M es un conjunto no vacío, ya que cada espacio vectorial tiene un punto especial, el neutro aditivo 0, entonces si a cada $x \in M$ le asignamos el vector 0 en su fibra obtendremos claramente una sección.

Ejemplos:

1. Sea M una variedad, el producto $M \times \mathbb{R}^k$ es un haz vectorial sobre M con la topología producto, cuya fibra tiene dimensión k. A esta clase de haces les llamaremos haces triviales.

2. Sea M una variedad, $\bigcup\limits_{x \in M} T_xM$ con la topología de la unión disjunta, adquiere estructura de haz vectorial, en cada x de M tendremos su espacio tangente. A este haz en particular le llamaremos haz tangente. A las secciones de este haz se les llama campos vectoriales.

3. Sean M y N variedades diferenciables, $f : M \to N$ suave y E un haz vectorial sobre N con proyección π, el *haz pullback* sobre M se define

como $f^*E = \{(v,x) \in E \times M \mid f(x) = \pi(v)\}$ con la topología inducida por el producto. La proyección de este haz es la restricción de la proyección canónica $\rho : E \times M \to M$ a f^*E. Este haz sobre M tiene fibra en x a $E_{f(x)}$, entonces la dimensión de f^*E es la misma que la dimensión de E. Si $g, f : M \to N$ son suaves, entonces f^*E y g^*E no necesariamente son isomorfos como haces sobre M.

4. Sea $Vect_{\mathbb{R}}$ la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Sea $T : Vect_{\mathbb{R}} \to Vect_{\mathbb{R}}$ funtor covariante. Para cualesquiera V y W en $Vect_{\mathbb{R}}$ T nos induce un mapeo $T : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(T(V), T(W))$. Como $\mathrm{Hom}(V,W) \cong \mathbb{R}^{\dim V \cdot \dim W}$ y lo mismo para $\mathrm{Hom}(T(V), T(W))$, tenemos un morfismo entre variedades diferenciables, en caso de que T sea suave para cualesquiera par de espacios vectoriales diremos que el funtor T es un funtor suave.

   Teorema 2.4.4. *Sea M una variedad suave, E un haz vectorial sobre M y $T : Vect_k \to Vect_k$ funtor covariante (contravariante) suave. Entonces $T(E) = \bigcup_{x \in M} T(E_x)$ es un haz vectorial sobre M con la topología de la unión disjunta.*

   Demostración: Lo primero que podemos notar es que ya tenemos un mapeo $\pi : X \to T(E)$ suprayectivo que para toda $x \in M$ cumple que $\pi^{-1}(x) = T(E_x)$, es decir, las fibras de este mapeo son espacios vectoriales. Entonces si a $T(E)$ le damos estructura de variedad diferenciable tal que con π, $T(E)$ se convierta en un haz sobre M nuestro problema estaría resuelto. Si existiera F un haz vectorial sobre M con proyección π_F y una función biyectiva $\phi : T(E) \to F$ que es lineal en fibras tal que $\pi = \pi_F \circ \phi$ entonces le podemos dar una estructura diferenciable a $T(E)$ inducida por ϕ tal que $T(E)$ sea un haz sobre M.

   a. Si tenemos dos haces F y G sobre M y $\phi : F \to G$ un morfismo de haces, entonces hay un mapeo $T(\phi) : T(E) \to T(F)$ que es lineal en fibras, es decir, $\phi|_{T(E_x)} : T(E_x) \to T(F_x)$ es lineal.

   b. Supongamos que $E = M \times \mathbb{R}^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Entonces $T(E) = M \times T(\mathbb{R}^k)$, entonces $T(E)$ con esta identificación obtiene estructura de variedad diferenciable y de haz vectorial sobre M.

   c. Ahora supongamos que existe un isomorfismo $\phi : E \to M \times V := F$, por *a* tenemos un mapeo biyectivo lineal en fibras $T(\phi) : T(E) \to T(F)$, por el inciso *b* podemos darle estructura de haz vectorial a $T(E)$ tal que $T(\phi)$ sea un isomorfismo de haces vectoriales.

      Tenemos que demostrar que esta definición no depende de ϕ, es decir, si existe un isomorfismo de haces $\psi : E \to M \times \mathbb{R}^k := G$ entonces $T(\psi \circ \phi^{-1})$ es un isomorfismo. Como ϕ y ψ son isomorfismos entonces $\psi \circ \phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to M \times \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo, al cual lo podemos pensar como un mapeo $\lambda : M \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, donde $\lambda(x) = \psi \circ \phi^{-1}|_{x \times \mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Entonces $T(\psi \circ \phi^{-1}) : M \times T(\mathbb{R}^k) \to M \times \mathbb{R}^k$, la podemos pensar como $T\circ\lambda$. Como ψ y ϕ son suaves $\psi\circ\phi^{-1}$ es suave, λ es suave al igual que T, entonces $T\circ\lambda$ es suave. Entonces $T(\psi\circ\phi^{-1})$ es suave y es un isomorfismo (es evidente quién es su inverso). Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T(E) \arrow[r, "T(\phi)"] \arrow[d, "id"] & T(F) \arrow[d, "T(\psi\circ\phi^{-1})"] \\
T(E) \arrow[r, "T(\psi)"] & T(G)
\end{tikzcd}$$

e implica que las estructuras son equivalentes.

d. Sea E un haz vectorial sobre M (no necesariamente trivial) con proyección π, entonces para todo x en M existe una vecindad U_x, tal que $\pi^{-1}(U_x)$ es un haz trivial sobre U_x. Por c, $T(U_x)$ tiene una única estructura de haz vectorial. Si tenemos dos abiertos trivializadores U_x y U_y tal que $U_x\cap U_y\neq\varnothing$, entonces $T(U_x\cap U_y)$ tiene dos estructuras de haz vectorial heredadas por $T(U_x)$ y $T(U_y)$, pero por c las estructuras heredadas son equivalentes, es decir, los mapeos de transición de $T(E)$ serán suaves, entonces $T(E)$ es un haz vectorial sobre M.

El caso de funtor contravariante se hace de manera análoga. ■

Como ejemplo tenemos al funtor $\mathrm{Hom}(\_,\mathbb{R})$, que a cada espacio vectorial le asigna su espacio dual. Si M es una variedad suave y E es su haz tangente, a $\mathrm{Hom}(E,\mathbb{R})$ le llamaremos haz cotangente, a una sección de este haz le llamaremos 1-forma.

También si nos tomamos un espacio vectorial $\mathbb{R}^k$ nos induce un funtor suave dado por $\_\bigoplus\mathbb{R}^k$ que a cada espacio vectorial V le asigna el espacio vectorial $V\bigoplus\mathbb{R}^k$.

5. Sea $G(s,\mathbb{R}^n)$ el grasmanniano de s planos en $\mathbb{R}^n$. Para cada $x\in G(s,\mathbb{R}^n)$ sea E_x el subespacio vectorial de dimensión s asociado a x. Entonces $E:=\bigcup\limits_{x\in G(s,\mathbb{R}^n)} E_x$ es un haz vectorial sobre $G(s,\mathbb{R}^n)$, a este haz le llamaremos el haz tautológico de $G(s,\mathbb{R}^n)$.

Al igual que las variedades tienen subvariedades, las haces vectoriales tendrán subhaces definidos de una manera similar.

Definición 2.4.5. Sea M una variedad suave y E un haz vectorial sobre M, decimos que $F\subseteq E$ es un *subhaz vectorial* de E si F es una subvariedad de E, $\pi|_F : F\to M$ cumple la definición de haz vectorial y sus cartas son las restricciones canónicas.

Definición 2.4.6. Sean $\pi_E : E\to M$ y $\pi_F : F\to N$ haces vectoriales sobre M y N, decimos que $\phi : E\to F$ es un *homomorfismo de haces* si:

1. Existe una función suave $f : M \to N$ llamada función base tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_E"] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "f"] & N. \end{tikzcd}$$

2. ϕ es suave.

3. Es lineal en fibras, es decir, $\phi|_{E_x} : E_x \to F_{f(x)}$ es lineal para todo $x \in M$. Sabemos que este mapeo esta bien definido por 1.

Sea $f : M \to N$ función suave, entonces para cada $x \in M$ tenemos la transformación lineal $(df)_x : T_xM \to T_{f(y)}N$, entonces podemos definir $(df) : TM \to TN$ el cual es claramento un homomorfismo con función base f.

Proposición 2.4.7. *Sean $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to N$ haces vectoriales sobre M y N, $\phi : E \to F$ un homomorfismo con función base f. Supongamos que ϕ_x tiene el mismo rango para toda $x \in M$, entonces $Ker\phi = \bigcup_{x \in M} Ker\phi_x$ es un subhaz vectorial de E.*

Esta proposición no la demostraremos pero nos será útil en el futuro. Para finalizar esta sección daremos la definición de vecindad tubular y enunciaremos un teorema de existencia.

Definición 2.4.8. Sea M variedad con $N \subset M$ subvariedad. Una *vecindad tubular* de N en M es un abierto L de M con una sumersión $\pi : L \to N$ tal que

1. L es un haz vectorial sobre N con proyección π.

2. $N \subset L$ es la imagen de la sección cero de este haz.

Teorema 2.4.9. *Sea M variedad y $N \subset M$ subvariedad, entonces existe una vecindad tubular de N.*

Como le pedimos a la vecindad tubular que sea un abierto de M podemos notar que la dimensión de las fibras de este haz será la codimensión de la subvariedad.

2.5. Haces fibrados

Cuando tenemos $\pi : E \to M$ un haz vectorial sobre M, cada fibra $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, pero un espacio vectorial de dimensión finita al mismo tiempo es una variedad suave, entonces podemos cambiar nuestra definición de haz vectorial y en un lugar de poner espacio vectorial lo podemos cambiar por variedad.

Definición 2.5.1. Sean E, F y M variedades, $\pi : E \to M$ una sumersión. Entonces E es un *haz fibrado* sobre M si para todo $x \in M$, existe una vecindad U_x y un difeomorfismo $\phi_{U_x} : \pi^{-1}(U_x) \to U_x \times F$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_x) \arrow[r, "\phi_{U_x}"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_x \times F \arrow[d, "\pi_{U_x}"] \\ & U_x \end{tikzcd}$$

donde π_{U_x} es la proyección canónica en el primer factor.

Podemos notar que cada fibra de π es difeomorfa a F, si restringimos ϕ_{U_x}. A diferencia de los haces vectoriales aquí no tenemos necesariamente un punto distinguido en F, entonces, no necesariamente van a existir secciones de E.

Como ejemplos tenemos a los haces vectoriales y a los haces fibrados producto, es decir, nos tomamos dos variedades M y F, entonces el producto $M \times F$ con la proyección $\pi : M \times F \to M$ es un haz fibrado sobre M. En este trabajo estaremos trabajando con un haz fibrado muy particular que definiremos a continuación.

Definición 2.5.2. Sean M y N variedades suaves, $x \in M$. Supongamos que $f, g : M \to N$ son funciones suaves, con $f(x) = g(x) = y$.

1. Decimos que f tiene *contacto de primer orden* con g en x si $(df)_x = (dg)_x$ como transformaciones lineales de $T_xM \to T_yN$.
2. Decimos que f tiene *contacto de orden* k con g en x si $(df) : TM \to TN$ tiene contacto de orden $(k-1)$ con (dg) en todo punto de T_xM. Esto lo vamos a denotar como $f \sim_k g$ en x, ocupamos esta notación ya que ésta es, obviamente, una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones suaves de M en N tales que $f(x) = y$.
3. Sea $J^k(M,N)_{x,y}$ el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación $\sim_k$ en x.
4. Sea $J^k(M,N) := \bigcup\limits_{(x,y) \in M \times N} J(M,N)_{x,y}$. A un elemento σ de este conjunto le llamaremos k-jet de mapeos (o k-jet) de M en N.

Nuestra intención es demostrar que $J^k(M,N)$ es una variedad diferenciable y un haz fibrado sobre M para toda $k \in \mathbb{N}$, pero aplazaremos esta demostración para notar algunos hechos y demostrar unos lemas que nos ayudarán con esto.

Sea σ un k-jet, entonces existen $x \in M$ y $y \in N$ tales que $\sigma \in J^k(M,N)_{x,y}$, a x lo llamaremos la fuente de σ y a y el blanco de σ. Entonces tenemos dos mapeos, $\alpha : J^k(M,N) \to M$ que a cada k-jet le asignamos su fuente y $\beta : J^k(M,N) \to N$ que a cada k-jet le asigna su blanco. Es claro que α y β están bien definidas por el inicio de este párrafo. A partir de este momento usaremos las letras α y β exclusivamente para estos mapeos.

Dada una función $f : M \to N$, ésta nos induce un mapeo $j^k(f) : M \to J^k(M,N)$ llamado el k-jet de f que a cada $x \in M$ le asigna la clase de f en $J^k(M,N)_{x,f(x)}$. En caso de que $J^k(M,N)$ fuera una variedad diferenciable, nos gustaría que los mapeos α, β y $j^k(f)$ fueran diferenciables, ya que definirlos probablemente sería una pérdida de tiempo si no lo fueran. Cuando $k = 0$ a $J^0(M,N)$ lo podemos identificar con $M \times N$, a cada 0-jet le asignamos su fuente y su blanco en $M \times N$, es decir, $j^0(f)(x) = (x, f(x))$.

Lema 2.5.3. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $y \in U$. Sean $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ suaves. Entonces $f \sim_k g$ en y $\iff$*

$$\frac{\partial^{|\gamma|} f_i}{\partial x^\gamma}(y) = \frac{\partial^{|\gamma|} g_i}{\partial x^\gamma}(y)$$

para todo multiíndice γ con $|\gamma| \leqslant k$ y $1 \leqslant i \leqslant m$. Donde f_i y g_i son las funciones coordenadas de f y g respectivamente y x_i las coordenadas en U.

<u>Demostración:</u> Para $k = 1$, $f \sim_1 g$ en y $\iff$ $(df)_y = (df)_y$ como transformaciones lineales, pero esto nos dice que las entradas de las matrices son exactamente las mismas, por lo tanto, las derivadas parciales de primer orden de f y g en y son iguales.

Supongamos que el lema es cierto para $k-1$. Sean $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ las coordenadas correspondientes a $\mathbb{R}^n$ en $U \times \mathbb{R}^n = TU$ (los haces tangentes de abiertos de $\mathbb{R}^n$ son siempre triviales). Con estas coordenadas podemos ver a $(df)_y : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ está dada por $(x, \bar{x}) \to (f(x), \overline{f_1}(x, \bar{x}), \ldots, \overline{f_m}(x, \bar{x}))$ donde

$$\overline{f_i}(x, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\overline{x_j}.$$

Podemos hacer lo mismo para (dg) (cuando escribimos $\overline{f_i}$ nos estamos refiriendo a las funciones coordenadas de $\overline{f_i}$, lo mismo para $\bar{x}$).

Por hipótesis de inducción $(df) \sim_{k-1} (df)$ para todo punto $(y, v) \in \{y\} \times \mathbb{R}^n$ lo cual implica que las derivadas de (df) y (dg) son iguales en estos puntos. Sea γ un multiíndice con $|\gamma| \leqslant k - 1$ entonces

$$\frac{\partial^{|\gamma|} \overline{f_i}}{\partial x^\gamma}(y, v) = \frac{\partial^{|\gamma|} \overline{g_i}}{\partial x^\gamma}(y, v).$$

Evaluamos en $v_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ con 1 en la j-ésima coordenada, entonces

$$\frac{\partial^{|\gamma|}\partial f_i}{\partial x^\gamma \partial x_j}(y) = \frac{\partial^{|\gamma|}\partial g_i}{\partial x^\gamma \partial x_j}(y).$$

Este proceso lo podemos hacer para cada j tal que $1 \leqslant j \leqslant n$, y obtenemos lo deseado. La otra implicación es obvia. ∎

De la prueba anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.5.4. *$f, g : U \to \mathbb{R}^m$ contacto de orden k en $y \in U$ si y sólo si los polinomios de Taylor de f y g en y de grado k son iguales.*

También como consecuencia del lema anterior y de la regla de la cadena tenemos:

Corolario 2.5.5. *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto. Sean $f_1, f_2 : U \to V$ y $g_1, g_2 : V \to \mathbb{R}^l$ suaves. Supongamos que existe $x \in U$ tal que $f_1 \sim_k f_2$ en x y $g_1 \sim_k g_2$ en $f_1(x) = f_2(x)$, entonces $g_1 \circ f_1 \sim_k g_2 \circ f_2$ en x.*

Como consecuencia de estos dos corolarios tenemos:

Proposición 2.5.6. *Sean M_1, M_2, M_3, M_4 variedades suaves y $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Sea $h : M_2 \to M_3$ suave, entonces h induce un mapeo $h_* : J^k(M_1, M_2) \to J^k(M_1, M_3)$ definido de la siguiente manera; sea $\sigma \in J^k(M_1, M_2)_{x,y}$ y f un representante de σ, entonces $h_*(\sigma) = \overline{h \circ f(x)} \in J^k(M_1, M_3)_{x,h(y)}$.*
2. *Sea $\gamma : M_3 \to M_4$ suave. Entonces $\gamma_* \circ h_* = (\gamma \circ h)_*$ como mapeos de $J^k(M_1, M_2) \to J^k(M_1, M_4)$ y $(id_{M_2})_* = id_{J^k(M_2,M_2)}$. Entonces si h es un difeomorfismo, h_* será una biyección.*
3. *Sea $g : M_3 \to M_1$ difeomorfismo, entonces g induce un mapeo $g^* : J^k(M_1, M_2) \to J^k(M_3.M_2)$ definido de la siguiente manera, sea $\tau \in J^k(M_1, M_2)_{x,y}$ y f un representante de τ. Entonces $g^*(\tau) = \overline{f \circ g(g^{-1}(x))} \in J^k(M_1, M_3)_{g^{-1}(x),y}$.*
4. *Sea $\xi : M_4 \to M_3$ difeomorfismo. Entonces $\xi^* \circ g^* = (g \circ \xi)^*$ como mapeos de $J^k(M_1, M_2) \to J^k(M_4, M_2)$ y $(id_{M_1})^* = id_{J^k(M_1,M_1)}$ tal que g^* es una biyección.*

Demostración: Para demostrar 1 y 3, ocupamos el último corolario para ver que están bien definidas. Para 2 y 4 ocupamos el hecho de que los difeomorfismos tienen inversa suave. ∎

Sea $\mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$ el espacio vectorial de polinomios en n variables de grado menor o igual que k que tienen término constante 0 sobre $\mathbb{R}$. Este es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces le podemos dar estructura de variedad diferenciable. Sea $V^k_{n,m} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$. Como tenemos un número finito de sumandos, este vuelve a ser un espacio vectorial de dimensión finita, de la misma manera es una variedad diferenciable.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ suave. Definimos $p_k(f) : U \to \mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$, que a cada x_0 nos lo manda a los primeros k términos del polinomio de Taylor de f centrado en x_0 sin contar el término constante.

Lema 2.5.7. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, entonces hay una biyección $\phi^k_{U,V}$: $J^k(U,V) \to U \times V \times \mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$ donde*

$$\phi^k_{U,V}(\sigma) = (\alpha(\sigma), \beta(\sigma), p_k(f_1)(x_0), \ldots, p_k(f_m)(x_0))$$

con $f : U \to V$ suave representante de σ.

Por lo que demostramos anteriormente la función está bien definida y es inyectiva, la suprayectividad es aún más clara. ■

Lema 2.5.8. *Sean U y U' abiertos de $\mathbb{R}^n$, V y V' abiertos de $\mathbb{R}^m$. Sean $h : V \to V'$ y $g : U \to U'$ suaves con g un difeomorfismo. Entonces*

$$\phi^k_{U',V'} \circ (g^{-1})^* h_* \circ (\phi^k_{U,V})^{-1} : U \times V \times V^k_{n,m} \to U' \times V' \times V^k_{n,m}$$

es suave.

Demostración: Sea $p = (x_0, y_0, f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0))$ con $f_i \in \mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = y_0 + (f_1(x - x_0), \ldots, f_m(x - x_0))$. Entonces $f(x_0) = y_0$ ya que cada $f_i \in \mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$. Sea σ la clase de equivalencia en $J^k(U,V)_{x_0,y_0}$, entonces $\phi^k_{U,V}(\sigma) = p$. Por definición de $(g^{-1})^*$ y h_* tenemos que $(g^{-1})^* \circ h_*(\sigma) = j^k(h \circ f \circ g^{-1})(x_0)$.

Entonces

$$\phi^k_{U',V'} \circ (g^{-1})^* \circ h_* \circ (\phi^k_{U,V})^{-1}(p) = \phi^k_{U',V'}(j^k(h \circ f \circ g^{-1})(x_0)) =$$

$$(g(x_0), h(y_0), p_k(h \circ f \circ g^{-1})_1(g(x_0)), \ldots, p_k(h \circ f \circ g^{-1})_m(g(x_0)),$$

donde $(h \circ f \circ g^{-1})_i$ son las funciones coordenadas de la composición. Para demostrar que el mapeo es suave, nada más tenemos que demostrar que las funciones coordenadas son suaves, es claro que las dos primeras coordenadas del mapeo son suaves ya que la composición de mapeos suave es suave. Entonces para ver que es suave, nada más nos hace falta restringir el codominio a $V^k_{n,m}$. Sea $\delta = (h \circ f \circ g^{-1})$. Entonces

$$p_k(\delta_i)(g(x_0)) = \sum_{1 \leqslant |\gamma| \leqslant k} \frac{\partial^{|\gamma|} \delta_i}{\partial x^{|\gamma|}}(g(x_0))(x - x_0)^\gamma.$$

Como la δ_i depende de las derivadas parciales de g, h y f, ésta será suave para todo multiíndice γ y para cada i. ■

Como las variedades son localmente euclidianas podemos notar que lo que estamos intentando hacer es que si las cartas de $J^k(M,N)$ son de la forma $J^k(U,V)$, con U y V cartas de M y N respectivamente, entonces $J^k(M,N)$ sería localmente euclidiano.

Teorema 2.5.9. *Sean M^m, N^n y L^l variedades, entonces*

1. *$J^k(M,N)$ es una variedad de dimensión $m + n + \dim(V^k_{n,m})$.*
2. *$\alpha : J^k(M,N) \to M$, $\beta : J^k(M,N) \to N$ y $\alpha \times \beta : J^k(M,N) \to M \times N$ son sumersiones (las sumersiones son suaves).*
3. *Si $h : N \to L$ suave, entonces $h_* : J^k(M,N) \to J^k(M,L)$ es suave. Si $g : M \to N$ es un difeomorfismo entonces $g^* : J^k(N,L) \to J^k(M,L)$ es un difeomorfismo.*
4. *Si $g : M \to N$ suave, entonces $j^k(g) : M \to J^k(M,N)$ es suave.*

Demostración:

1. Es claro que $J^k(M,N)$ es segundo numerable y además es Hausdorff por ser unión ajena de Hausdorff indexados por un espacio Hausdorff. Sea U_1 dominio de una carta ξ_1 en M y V_1 dominio de una carta ψ_1 en N. Sea $U_1' = \xi_1(U_1)$ y $V_1' = \psi_1(V_1)$. Entonces tenemos el mapeo $(\xi^{-1})^* \circ \psi_* : J^k(U,V) \to J^k(U',V')$. Sea $\tau_{U,V} := \phi^k_{U',V'} \circ (\xi^{-1})^* \circ \psi_* : J^k(U,V) \to U' \times V' \times V^k_{n,m}$, las cartas de $J^k(M,N)$ las definimos como las $\tau_{U,V}$, para ser variedad diferenciable nos faltaría probar que los cambios de cartas son diferenciables, pero esto es una simple consecuencia del lema anterior.

   Para calcular la dimensión nada más nos hace falta calcular la dimensión de $V^k_{n,m}$. Los polinomios homogéneos de grado 0 tienen dimensión 1, los de grado 1 tienen dimensión $n = \binom{n+1-1}{1}$. Supongamos que la dimensión de los polinomios homogéneos de grado k es $\binom{n+k-1}{k}$. Ahora calculamos la dimensión de los de grado $k+1$, a x_n^0 le corresponde un espacio de dimensión $\binom{n+k-1}{k}$, a x_n^1 uno de dimensión $\binom{n+k-2}{k-1}$, así hasta x_n^{k+1} al cual le corresponde uno de dimensión $\binom{n}{0}$. Entonces

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-1}{k}$$

$$= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+k-1}{k}$$
$$= \cdots = \binom{n+k}{k}.$$

Entonces la dimensión de $V_{n,m}^k$ es

$$1 - 1 + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} \cdots + \binom{n+k-1}{k}$$
$$= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+k-1}{k} - 1$$
$$= \cdots = \binom{n+k}{k} - 1.$$

2. En coordenadas locales α y β son la proyección en el primer y segundo factor respectivamente, entonces son sumersiones. De la misma manera $\alpha \times \beta$ también lo es.

3. Que una función sea suave en un punto es una condición local, entonces por como definimos las cartas de $J^k(M,N)$ y por el lema anterior, h_* es suave, de la misma manera g^* será suave, y es un difeomorfismo ya que existe g' función inversa de g que es un difeomorfismo, lo cual implica que $(g')^*$ es suave, por lo tanto $(g')^*$ es la función inversa de g^*, por lo tanto g^* es un difeomorfismo.

4. Procedemos de la misma manera, como la suavidad de una función es una condición local, por como definimos nuestras cartas y por el lema anterior $j^k(g)$ es suave. ■

Corolario 2.5.10. *Sean M y N variedades, $k, l \in \mathbb{N}$ con $k > l$. Entonces existe una proyección canónica suave $\pi_{k,l} : J^k(M,N) \to J^l(M,N)$ que a cada k-jet nos lo manda a su clase de l-jet.*

Demostración: Por como definimos nuestras cartas lo que hace $\pi_{k,l}$ es nada más olvidarse de los términos de orden $> l$ de cada k-jet, es decir, en coordenadas locales es una proyección, por lo tanto es suave. ■

Por como definimos las cartas es claro que $J^k(M,N)$ es un haz fibrado sobre M, en general no será un haz vectorial, pero si $N \cong \mathbb{R}^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $J^k(M,N)$ sí será un haz vectorial sobre M. También es claro que $J^1(M,N) \cong \mathrm{Hom}(TM, TN)$. Finalmente, por nuestro último corolario, si $k > l$ entonces $J^k(M,N)$ es un haz fibrado sobre $J^l(M,N)$ con proyección $\pi_{k,l}$.

Capítulo 3

Topología de Whitney

Cuando definimos una topología en un conjunto X, estamos definiendo un concepto de "cercanía" , por ejemplo, estamos diciendo cuales sucesiones convergen o no. En el área de análisis, al espacio de funciones entre dos espacios métricos le damos la topología del supremo, en la cual dos funciones están cerca si y sólo si sus imágenes están cerca. En nuestro caso de funciones entre variedades diferenciables tenemos más estructura, ya que no sólo vamos a querer que las imágenes de dos funciones estén cerca, sino también que sus derivadas estén cerca. En este capítulo definiremos la topología de Whitney en $C^\infty(M, N)$ con la ayuda de los haces de k-jets y desarrollaremos las propiedades más elementales de este espacio.

3.1. Definiciones

Definición 3.1.1. Sean M y N variedades suaves.

1. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea $U \subseteq J^k(M, N)$, definimos $P^k(U) \subseteq C^\infty(M, N)$ de la siguiente manera:

$$P^k(U) := \{f \in C^\infty(M, N) \mid j^k(f)(M) \subset U\}.$$

   Es claro que $P^k(U) \cap P^k(V) = P^k(U \cap V)$. Si el contexto nos lo permite omitiremos la k de $P^k(U)$.

2. La familia de subconjuntos $\{P^k(U)\}$ con $U \in J^k(M, N)$ abierto forman una base de una única topología en C^∞. Esta topología se llama la *topología C^k de Whitney*. A los abiertos de esta topología los denotamos como W_k.

3. La *topología C^∞ de Whitney (o simplemente topología de Whitney)* en $C^\infty(M,N)$ es la topología cuya base es $W = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$. Ésta es una base bien definida ya que $W_l \subset W_k$ cuando $k > l$, ya que el mapeo $\pi_{k,l}$: $J^k(M,N) \to J^l(M,N)$ es una sumersión.

En nuestra definición de esta topología nunca le pedimos nada a M y a N (sólo que sean variedades diferenciables), pero si M es compacta obtendremos una topología muy distinta a cuando M no lo es (para nuestra suerte en el futuro solo trabajaremos cuando M es compacta).

Como $J^k(M,N)$ es una variedad, existe una métrica d compatible con la topología. Sea $f \in C^\infty(M,N)$, definimos

$$B_\delta(f) := \{g \in C^\infty(M,N) \mid \forall x \in M,\ d(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x)\},$$

donde $\delta : M \to \mathbb{R}^+$ es una función continua. Entonces si probamos que $B_\delta(f)$ es abierto en $J^k(M,N)$ para toda δ de este estilo tendremos que $P(B_\delta(f))$ es una vecindad abierta de f en C^∞.

Sea $\gamma : J^k(M,N) \to \mathbb{R}$ definida como $\gamma(\sigma) = \delta(\alpha(\sigma)) - d(j^k f(\alpha(\sigma), \sigma))$. Este es un mapeo continuo, ya que γ en M es continua y los otros mapeos son diferenciables. Sea $U = \gamma^{-1}(0,\infty)$ abierto en $J^k(M,N)$, y por como definimos $B_\delta(f)$ tenemos que $B_\delta(f) = P(U)$. Ahora, si tenemos $W \subseteq C^\infty(M,N)$ vecindad de f demostraremos que existe $\delta : X \to \mathbb{R}$ tal que $W = B_\delta(f)$.

Como W es vecindad de f, existe $V \subseteq C^\infty(M,N)$ abierto tal que $f \in P(V) \subseteq W$, sea $m(x) = \inf\{d(\sigma, j^k f(x)) \mid \sigma \in \alpha^{-1}(x) \cap (J^k(M,N) - V)\}$ (la x está fija). Notamos que $m(x) = 0$ si $\alpha^{-1}(x) \subset V$. Sea $\gamma : X \to \mathbb{R}^+$ función continua tal que $\delta(x) < m(x)\ \forall x \in M$. Como m alcanza su ínfimo en cualquier subconjunto compacto de M, entonces podemos definir δ localmente para que cumpla lo que queremos, luego con un argumento de particiones de la unidad la podemos definir globalmente (cualquier variedad es unión numerable de compactos). Entonces $B_\delta(f) \subseteq W$. De cierta manera estamos "metrizando" las vecindades de f, aunque $C^\infty(M,N)$ no sea necesariamente un espacio métrico.

Si tenemos $\delta, \eta : M \to \mathbb{R}^+$ continuas, sea $\gamma : M \to \mathbb{R}^+$ definida como $\gamma(x) = \inf\{\delta(x), \eta(x)\}$, como la función ínf es continua entonces γ es continua, y además $B_\gamma(f) = B_\delta(f) \cap B_\eta(x)$. Entonces $\{B_\delta(f)\}$ son una base de vecindades de f en la topología C^k de Whitney en C^∞.

Toda función de un compacto en $\mathbb{R}^+$ está acotada por abajo por la función constante $\frac{1}{n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces cuando M es compacta tenemos que para toda δ existe una n que cumple lo anterior, es decir, $B_{\frac{1}{n}}(f) \subset B_\delta(f)$, entonces acabamos de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2. *Sean M y N variedades con M compacta, entonces $C^\infty(M,N)$*

es primero numerable y la base de vecindades para $f \in C^\infty(M,N)$ estará dada por $\{B_{\frac{1}{n}}(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Corolario 3.1.3. *Sean M y N variedades con M compacta, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M,N)$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C\infty(M,N)$ en la topología C^k si y sólo si $j^k f_n$ converge uniformemente a j^k.*

Esto es una consecuencia simple de como definimos nuestras bolas en $C^\infty(M,N)$. Como todas las vecindades de una función $f \in C^\infty(M,N)$ son de la forma $B_\delta(f)$ con $\delta : M \to \mathbb{R}^+$ continua, entonces cuando M no es compacta $C^\infty(M,N)$ aparentemente no será primero numerable ya que ocupamos fuertemente la compacidad de M en la prueba anterior.

Teorema 3.1.4. *Sean M y N variedades, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M,N)$. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología C^k si y sólo si existe un compacto $K \subset M$ tal que $j^k f_n$ converge uniformemente a $j^k f$ en K y nada más un número finito de f_n son diferentes a f fuera de K.*

Demostración: La suficiencia es obvia, así que nada más tenemos que demostrar la necesidad. Lo haremos por contradicción, supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f pero no existe K con la propiedad deseada. Sean $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ una sucesión de compactos tales que $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ y $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Existe una función f_{n_1} distinta a f. Entonces existe $x_{n_1} \in M$ tal que $d(j^k f_{n_1}(x_{n_1}), j^k f(x_{n_1}) = a_{n_1} > 0$, entonces existe m_1 tal que $x_{n_1} \in K_{m_1}$. Sea $\delta_1 : M \to \mathbb{R}^+$ tal que $\delta_1(K_{m_1}) \equiv a_{n_1}$. Inductivamente elegimos $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{s}$ para alguna $s \in \mathbb{N}$, que para cada s existirá una $x_{n_s} \in K_{m_s}$ y una función continua $\delta_s : X \to \mathbb{R}^+$ tales que $d(j^k f_{n_s}(x_{n_s}), j^k f(x_{n_s}) > \delta_s(x_{n_s})$.

Ahora elegimos $f_{n_{s+1}}$ tal que sea distinta a f fuera de algún compacto K_{m_s+1}. Sea $x_{n_{s+1}} \notin K_{m_{s+1}}$ con $d(j^k f_{n_{s+1}}(x_{s+1}), j^k f(x_{n_{s+1}})) = a_{n_{s+1}} > 0$. Entonces $x_{n_{s+1}} \in K_{m_{s+1}}$ para algún m_{s+1}, y elegimos δ_{s+1} de la misma manera. Elegimos una partición de la unidad asociada a nuestra cubierta de K_i y "pegamos"las δ_s en una función $\delta : M \to \mathbb{R}^+$ continua, que vale $a_{n_{s+1}} \in (K_{m_{s+1}} - K_{m_s+1})$. Entonces estamos construyendo una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y una función δ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$, $f_{n_i} \notin B_\delta(f)$, es decir, $\{f_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ no converge a f. ■

Corolario 3.1.5. *Si M no es compacta entonces $C^\infty(M,N)$ no es primero numerable.*

Demostración: Supongamos que si es primero numerable. Sea $f \in C^\infty(M,N)$ y $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de f. Para cada $i \in \mathbb{N}$ elegimos $\delta_i : M \to \mathbb{R}^+$ tal que $B_{\delta_i}(f) \subseteq W_i$ y una sucesión de puntos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que no tenga punto límite. Elegimos una función $\delta : M \to \mathbb{R}^+$ tal que $\delta(x_i) < \delta_i(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, podemos construir a δ localmente y luego la podemos extender con una partición de la unidad. Como $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de f entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $W_m \subset B_\delta(f)$ lo cual implica que $B_{\delta_m}(f) \subset B_\delta(f)$. Esto es una contradicción, ya que construimos δ para que esto no pasara. $\blacksquare$.

Definición 3.1.6. Sea X un espacio topológico. Decimos que

1. $Y \subseteq X$ es *residual* si es la intersección numerable de abiertos densos de X.

2. X es un *espacio de Baire* si todo subconjunto Y residual es denso en X.

Proposición 3.1.7. *Sean M y N variedades, entonces $C^\infty(M,N)$ es un espacio de Baire con la topología C^∞ de Whitney.*

Demostración: Para $k \in \mathbb{N}$ elegimos una métrica d_k para $J^k(M,N)$. Sean $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M,N)$ abiertos densos y $V \subset C^\infty(M,N)$ abierto. Si $C^\infty(M,N)$ fuera un espacio de Baire, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ sería denso si y sólo si $V \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i\right) \neq \varnothing$ ya que V es arbitrario.

Como V es abierto entonces existe k_0 y $W \subset J^{k_0}(M,N)$ abierto tal que $P(\overline{W}) \subset V$ con $P(W) \neq \varnothing$. Entonces en realidad vamos a demostrar que $M(\overline{W})(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i) \neq \varnothing$, lo cual obviamente implica la afirmación.

Sean $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(M,N)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$ elegimos $W_i \subset J^{k_i}(M,N)$ abierto que satisfaga:

1. $f_i \in P(W) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} M(W_j)\right) \cap U_i$,

2. $P(\overline{W_i}) \subseteq U_i$ y $f_i \in P(W_i)$ y

3. $(i > 1)$ $d_s(j^s f_i(x), j^s f_{i-1}(x)) < 2^{-1}$ para todo $x \in M$ y $1 \leqslant s \leqslant i$.

Supongamos que esto es cierto. Definimos $g^s(x) = \lim_{i\to\infty} j^s f_i(x)$. Como d_s convierte a $J^s(X,Y)$ en un espacio métrico completo y por 3 $\{j^s f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto g^s está bien definido. Como $j^0 f_i(x) = (x, f_i(x))$ (localmente), podemos definir $g: M \to N$ tal que $g^0(x) = (x, g(x))$. Si g queda definida de esta forma, tendríamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i \in P(W)$ por 1, entonces $g = \lim_{i\to\infty} f_i \in P(\overline{W})$. Por 2, W_s fue elegido tal que $P(\overline{W_s}) \subset U_s$ y por 1 cada f_i con $i > s$ está en $P(W_s)$. Entonces $g \in P(\overline{W_s})$, como s es arbitrario $g \in P(\overline{W}) \cap (\bigcap_{s=1}^{\infty} U_s)$, y obtenemos el resultado.

Para ver que g es suave es suficiente ver que es suave en algún $x \in M$ arbitrario. Sean $x \in M$, $K \subset M$ vecindad compacta de M y $L \subset N$ vecindad compacta de

$g(x)$ (las variedades son localmente compactas) con $g(K) \subset L$. Podemos suponer que K y L se encuentran en dominios de cartas (en caso de que no lo fueran las podemos hacer más pequeñas para que cumplan esto), entonces podemos suponer $K \subset \mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^m$ (hacemos énfasis en que la diferenciabilidad de una función es una propiedad local).

Recordemos que elegimos d_s métrica en $J^s(M,N)$ tal que fuera compatible con la topología, por 3, $\{j^s f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g en K. Si le damos coordenadas a $J^s(M,N)$ entonces $j^s f_i(x)$ es simplemente el polinomio de Taylor de orden s, es decir, es $\sum\limits_b \partial^{|b|} f_i/\partial x^{|b|}$ con $|b| \leqslant s$, por 3 estas derivadas parciales convergen uniformemente en K. Entonces

$$\frac{\partial^{|b|} f_i}{\partial x^b}(y) = \frac{g^{|b|}}{\partial x^b}(y) \text{ para toda } y \in K \text{ y para todo } |b| \leqslant s.$$

Como s fue arbitrario, entonces las derivadas parciales de todos los órdenes de g existen en x, por lo tanto, g es suave.

Sea $f_1 \in P(W) \cap U_1$, existe ya que U_1 es denso y $P(W)$ es abierto. Entonces satisface 1. Como U_1 es abierto y $f \in U_1$ elegimos k_1 y $W_1 \subset J^{k_1}(M,N)$ abierto, de modo que $f_1 \in P(W_1)$ y $P(\overline{W_1}) \subset U_1$, entonces 2 se cumple y 3 por vacuidad. Supongamos que esto lo podemos hacer para $j \leqslant i-1$. Sea

$$D_i = \{g \in C^\infty(M,N) \mid d_s(j^s g(x), j^s f_{i-1}(x)) \leqslant \frac{1}{2^i} \text{ para } 1 \leqslant s \leqslant i$$
$$\text{y para todo } x \in M\}.$$

Si $D_i \subset C^\infty(M,N)$ fuera abierto, sea $E_i := P(W) \cap (\bigcap\limits_{j=1}^{i-1} P(W_j)) \cap D_i$ sería abierto (intersección finita de abiertos es abierto). Entonces $f_{i-1} \in E_i$ por hipótesis y por como definimos D_i. Como E_i es abierto (no vacío) y U_i es denso, entonces existe $f_i \in E_i \cap U_i$. Entonces E_i cumple 1 y además por como está definido D_i cumple 3. Entonces tenemos que demostrar que D_i es abierto. Sea

$$F_s = \{g \in C^\infty(M,N) \mid d_s(j^s g(x), j^s f_{i-1}(x)) < \frac{1}{2^i}, \quad \forall x \in M\}.$$

Entonces $D_i = \bigcap\limits_{j=1}^{i} F_j$, si cada F_j fuera abierto, entonces D_i será abierto por ser intersección finita de abiertos. Sea $B_x = \alpha^{-1}(x) \cap B(\frac{1}{2^i}, j^s f_{i-1}(x))$ (recordemos que α es el mapeo fuente) con:

$$B(2{-}1, j^s f_{i-1}(x)) := \{\sigma \in J^s(M,N) \mid d_s(\sigma, j^s f_{i-1}(x)) < 2^{-1}\}.$$

Sea $G := \bigcup\limits_{x\in M} B_x$. Por como definimos B_x, tenemos que $F_s = P(G)$, entonces nuestro problema se redujo a demostrar que G es abierto en $J^s(M,N)$. Sea $\sigma \in G$

y $x_\sigma = \alpha(\sigma)$. Sea $\psi : M \to \mathbb{R}$ definido como $\psi(q) = d_s(j^s f_{i-1}(q), j^s f_{i-1}(x))$, como la métrica es compatible con la topología de $J^s(M,N)$ y α es diferenciable, el mapeo ψ es continuo. Sea $H := \alpha^{-1}(\psi^{-1}(\frac{-\delta}{2}, \frac{\delta}{2}))$, con $\delta = \frac{1}{2^i} - d_s(\sigma, j^s f_{i-1}(x))$, como ψ y α son continuas, H es abierto en M. Entonces $H \cap B(\frac{\delta}{2}, \sigma)$ es abierto y contiene a σ.

Sea $\tau \in H \cap B(\frac{\delta}{2}, \sigma)$, si $\tau \in G$ cumpliría que $d_s(\tau, j^s f_{i-1}\alpha(\tau)) < 2^{-1}$, pero

$$d_s(\tau, j^s(f_{i-1}(\alpha(\tau))) \leqslant d_s(\tau,\sigma) + d_s(\sigma, j^s f_{i-1}(x)) +$$
$$d_s(j^s f_{i-1}(x), j^s f_{i-1}(\alpha(\sigma))) < \frac{\delta}{2} + \left(\frac{1}{2^i} - \delta\right) + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2^i}$$

Entonces $H \cap B(\frac{\delta}{2}, \sigma) \subset G$, por lo tanto G es abierto. ■

Que $C^\infty(M,N)$ sea un espacio de Baire nos dice que los abiertos densos son muy "grandes", ya que su intersección vuelve a ser densa. Por el momento seguiremos demostrando otras propiedades de $C^\infty(M,N)$ pero que éste sea un espacio de Baire será una de las bases de este trabajo.

Proposición 3.1.8. *Sean M y N variedades. Entonces el mapeo j^k : $C^\infty(M,N) \to C^\infty(M, J^k(M,N)$ es continuo en la topología C^∞.*

Demostración: Sea $U \subset J^l(M, J^k(M,N))$ abierto entonces $P(U) \subset C^\infty(M, J^k(M,N))$ es abierto, para que j^k sea continua tenemos que demostrar que $(j^k)^{-1}(P(U))$ es abierto, ya que los conjuntos de la forma $P(U)$ forman una base de la topología C^∞. Sea

$$a_{k,l} : J^{k+l}(M,N) \to J^l(M, J^k(M,N)),$$

sea $\sigma \in J^{k+l}(M,N)$ cuya fuente es $x \in M$ y $f : M \to N$ un representante de σ, definimos $a_{k,l}(\sigma) = j^l(j^k f)(x)$, por lo cual $a_{k,s}$ es suave.

Entonces sabemos que $a_{k,l}^{-1}(U)$ es abierto en $J^{k+l}(M,N)$. Por como definimos a $a_{k,l}$, $a_{k,l} \circ j^{k+l} f \equiv j^l \circ j^k(f) : M \to J^l(J^k(M,N))$, entonces $P(a_{k,l}^{-1}(U)) = (j^k)^{-1}(P(U))$, por lo tanto, j^k es continua. ■

Proposición 3.1.9. *Sean M, N y L variedades, $\phi : N \to L$ diferenciable. Entonces $\phi_* : C^\infty(M,N) \to C^\infty(M,L)$ es continuo en la topología C^∞ de Whitney.*

Demostración: Esto es una consecuencia trivial de que $\phi_* : J^k(M,N) \to J^k(M,L)$ es diferenciable para toda $k \in \mathbb{N}$. ■

Ahora estudiaremos las propiedades de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Nos gustaría que $C^\infty(M,\mathbb{R})$ fuera un espacio vectorial topológico, es decir, que las operaciones de este espacio vectorial sean compatibles con la topología de Whitney. En el caso cuando M no es compacta no lo será. Por ejemplo, elegimos $f : M \to \mathbb{R}$ tal que tenga soporte no compacto, podemos elegir una función constante. Entonces si las operaciones fueran continuas tendríamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{n} \equiv 0$, pero esto no es posible por cómo es la convergencia en este espacio y f tiene soporte no compacto. Es claro que con la suma y multiplicación de funciones puntualmente no pasará esto.

Lema 3.1.10. *Sean M, N y L variedades. Sea*

$$J^k(M,N) \times_M J^k(M,L) := \{(x,y) \in J^k(M,N) \times J^k(M,L) \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y)\}$$

con $\alpha_1 : J^k(M,N) \to M$ y $\alpha_2 : J^k(M,L) \to M$ los mapeos fuente, y a este conjunto le damos la topología de subespacio en $J^k(M,N) \times J^k(M,L)$. Sean $K \subset J^k(M,N)$ y $L \subset J^k(M,L)$ compactos, tales que $\alpha_1|_L$ y $\alpha_2|_K$ son propias. Sea U vecindad abierta de $K \times_M L$, entonces existen vecindades V de K y W de L, tales que $V \times_M W \subseteq U$.

Aunque este lema lo necesitaremos, no lo vamos a demostrar ya que la demostración no es de nuestro interés. Este espacio se llama producto fibrado de $J^k(M,N)$ y $J^k(M,L)$ sobre M.

Proposición 3.1.11. *Sean M, N y L variedades. Entonces $\phi : C^\infty(M,N) \times C^\infty(M,L) \to C^\infty(M, N \times L)$ donde $\phi(f(x),g(x)) = (f(x),g(x))$, es un homeomorfismo en la topología C^∞.*

Demostración: Sean $\pi_N : N \times L \to N$ y $\pi_L : N \times L \to L$ las proyecciones canónicas, éstas son claramente diferenciables, entonces nos inducen mapeos continuos

$$(\pi_N)_* : C^\infty(M, N \times L) \to C^\infty(M,N) \text{ y } (\pi_L)_* : C^\infty(M, N \times L) \to C^\infty(M,L).$$

Es claro que $\phi \equiv \pi_N \times \pi_L$, entonces ϕ es continua y además biyectiva, entonces si ϕ es abierta, su inversa (la cual existe por ser biyectiva) será continua, por lo tanto, ϕ será un homeomorfismo.

Sea $(f,g) \in C^\infty(M, N \times L)$ (a una función la podemos identificar con sus funciones coordenadas en N y en L). Sea $W \subset J^k(M, N \times L)$ abierto tal que $(f,g) \in P(W)$. Notemos que $J^k(M, N \times L) = J^k(M,N) \times_M J^k(M,L)$ (esto es claro por la aclaración anterior). Ocupando el lema anterior existen abiertos $U \subset J^k(M,N)$ y $V \times J^k(M,L)$ tales que $U \times_M V \subset W$, entonces $P(U) \times P(V) \subset ((\pi_N)_* \times (\pi_L)_*)(P(W))$ por lo tanto ϕ es abierta. ■

Corolario 3.1.12. *Sea M variedad, entonces la adición y multiplicación (puntual) de funciones son continuas en la topología C^∞ de Whitney.*

Demostración:

1. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces
$$+_* : C^\infty(M, \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$
es continua, por lo tanto, la adición es continua.
2. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces
$$\cdot_* : C^\infty(M, \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$
es continua, por lo tanto, la multiplicación es continua. ■

Proposición 3.1.13. *Sean M, N y L variedades, con M compacta. Entonces $\circ : C^\infty(M, N) \times C^\infty(N, L) \to C^\infty(M, L)$ dado por la composición es continua en la topología C^∞ de Whitney.*

Demostración: Sea $D := J^k(M, N) \times_N J^k(N, L)$ (ahora, en lugar de tomarnos el producto fibrado con el mapeo fuente dos veces, ocuparemos el mapeo fuente primero y el mapeo blanco respectivamente, el lema sigue siendo cierto, lo hacemos de esta manera para que componer k-jets tenga sentido). Sea $\gamma : D \to J^k(M, L)$, dado por $\gamma(\sigma, \tau) = \tau \circ \sigma$, claramente este mapeo está bien definido.

Si $f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, L)$ y $V \subset J^k(X, Z)$ abierto con $g \circ f \in P(V)$, entonces existen abiertos $U \subset J^k(M, N)$ y $W \subset J^k(N, L)$ con $\gamma(U \times_N W) \subset P(V)$, entonces si $f' \in P(U)$ y $g' \in P(W)$ tendremos que $g' \circ f' \in P(V)$, si probamos esto tendremos que la composición de k-jets es continua para toda k, por lo tanto, la composición será continua en la topología C^∞ de Whitney.

Por la regla de la cadena tenemos que $j^k(g \circ f)(M) = \gamma(j^k f(M) \times_N j^k g(N))$, entonces $j^k f(M) \times_N j^k f(N) \subset \gamma^{-1}(V)$. Entonces si aplicamos el lema anterior con $K = j^k f(M)$, $L = j^k g(N)$ y a $\gamma(V)$ obtendremos la U y W deseada. ■

Esta proposición no será cierta si M no es compacta, pero como ya hemos mencionado, en el futuro nada más estaremos trabajando con funciones suaves con dominio compacto.

Proposición 3.1.14. *Sean M y N variedades. Sea $l \in \mathbb{N}$, entonces los mapeos $\gamma^l : C^\infty(M, N)^l \to C^\infty(M^l, N^l)$ dados por $\gamma^l((f_1, \ldots, f_l)(x)) = f_1(x) \times \cdots \times f_l(x)$ son continuos en la topología C^∞ de Whitney para toda $l \in \mathbb{N}$.*

La proposición se demuestra exactamente igual que las últimas proposiciones, (ocupamos el mismo lema de la misma manera) entonces la omitiremos.

3.2. Transversalidad

En esta sección daremos la definición de transversalidad y daremos algunas proposiciones que necesitaremos, en particular el teorema de transversalidad de Thom, que con junto con que $C^\infty(M,N)$ es un espacio de Baire, serán los mayores protagonistas para el estudio de mapeos estables.

Definición 3.2.1. Sean M y N variedades, $L \subset N$ subvariedad y $x \in M$. Entonces f *interseca transversalmente* a L en x ($f \pitchfork L$ en x) si ocurre uno de los siguientes casos:

1. $f(x) \notin L$.
2. $f(x) \in L$ y $T_{f(x)}N = T_{f(x)}L + (df)_x(T_xM)$. Si f interseca transversalmente a L para todo $x \in M$ lo denotaremos simplemente como $f \pitchfork L$.

La suma de espacios tangentes la estamos pensando como suma de espacios vectoriales, entonces si $f(x) \in L$ es claro que para que $f(x) \pitchfork L$ le tenemos que pedir alguna condición a las dimensiones de las variedades por el teorema de la dimensión.

Ejemplos:

1. $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x^2)$ y $L = \mathbb{R} \times \{0\}$, entonces $f \pitchfork L$ para todo $x \in \mathbb{R}$ a excepción del 0.
2. Si $f : M \to N$ es una sumersión entonces $f \pitchfork L$ para cualquier subvariedad L de N.
3. Si $f(M) \cap L = \varnothing$ entonces $f \pitchfork L$.

Proposición 3.2.2. *Sean M y N variedades, $L \subset N$ subvariedad. Supongamos que* $\dim M + \dim L < \dim N$. *Si $f : M \to N$ es tal que $f \pitchfork L$, entonces $f(M) \cap L = \varnothing$.*

<u>Demostración:</u> Supongamos que $f(x) \in L$ para algún $x \in M$. Entonces

$$\dim N = \dim(T_{f(x)}L + (df)_x(T_xM)) \leqslant \dim T_{f(x)}L + \dim T_xM =$$

$$\dim L + \dim M < \dim N.$$

Lo cual es una contradicción. ■

Lema 3.2.3. *Sean M y N variedades, $L \subset N$ subvariedad y $f : M \to N$. Sea $x \in M$ tal que $f(x) \in L$. Supongamos que existe $U \subset N$ vecindad de $f(x)$ en N y una sumersión $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ con $k = \operatorname{codim} L$ tal que $L \cap U = \phi^{-1}(0)$. Entonces $f \pitchfork L$ en x si y sólo si $\phi \circ f$ es una sumersión en* 0.

<u>Demostración:</u> La vecindad U de $f(x)$ siempre existirá, nos podemos tomar una carta de L vista como subvariedad de N y cumplirá con lo deseado. Por como definimos U tenemos que $\ker(d\phi)_{f(x)} = T_{f(p)}L$. Entonces $f \pitchfork L$ en x

$$\iff T_{f(x)} + (df)_x(T_xM) = T_{f(x)}N$$

$$\iff \ker(d\phi)_{f(x)} + (df)_x(T_xM) = T_xN.$$

Al aplicar $(d\phi)_{f(p)}$ en ambas igualdades obtenemos el resultado. ■

Teorema 3.2.4. *Sean M y N variedaes, $L \subset N$ subvariedad. Sea $f : M \to N$ tal que $f \pitchfork L$. Entonces $f^{-1}(L)$ es una subvariedad de M.*

Esto es una consecuencia trivial del lema anterior y el teorema de la sumersión.

Proposición 3.2.5. *Sean M y N variedades, $L \subset N$ subvariedad. Sea*

$$T_L := \{f \in C^\infty(M,N) \mid f \pitchfork L\}.$$

Entonces T_L es abierto en $C^\infty(M,N)$ si L es una subvariedad cerrada.

Demostración: Sea

$$U := \{\sigma \in J^1(M,N) \mid y \notin L \text{ ó } y \in L \text{ con } T_yN = T_yL + (df)_x(T_xM)\},$$

donde x y y son la fuente y el blanco respectivamente de σ y $f : M \to N$ un representante de σ. Es claro que $P(U) = T_L$, si U fuera abierto entonces T_L sería abierto.

U es abierto si y sólo si $V := J^1(M,N) - U$ es cerrado. Sea $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V$ convergente cuyo límite es σ. Sea $p = \alpha(\sigma)$ y $q = \beta(\sigma)$. Como $\beta(\sigma_i) \in L$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y β es diferenciable, tenemos que $q \in L$ ya que L es cerrado por hipótesis. Sea $g : M \to N$ un representante de σ. Elegimos coordenadas U alrededor de p y U' alrededor de q tal que $f(U) \subset U'$. Podemos suponer que $U = \mathbb{R}^n$ y $U' = \mathbb{R}^m$ con $p = 0$ y $q = 0$. Sea $k = \text{rango}(dg)_0$.

Sea $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m/\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^{m-k}$ la proyección canónica. Entonces $f \pitchfork L$ en 0 si y sólo si $\phi \circ g$ es una sumersión en 0 si y sólo si $\phi \circ (dg)_0 \notin F$, donde

$$F := \{A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-k}) \mid \text{rango}\, A < m - k\}.$$

Sea $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-k})$ dado por $\eta(s,t,B) = \phi \circ B$. F es cerrado ya que proyectar y obtener el determinante son diferenciables, y F lo podemos ver como la imagen inversa del 0 de una proyección y el determinante. Como η es continua entonces $\eta^{-1}(F)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, el cual es cerrado en $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Entonces $V = \eta^{-1}(F)$, ya que si $\tau = (x, y, (dh)_x)) \in V$ si y sólo si $y \in \mathbb{R}^k$ y h no interseca transversalmente a $\mathbb{R}^k$ en 0 si y sólo si $\eta(\tau) \in F$, por lo tanto, $\sigma \in V$. ■

Proposición 3.2.6. *Sean M, N y Z variedades, $W \subset Z$ subvariedad. Sea $j : Z \to C^\infty(M,N)$ una función (no necesariamente continua) y $\Phi : M \times Z \to N$ dada por $\Phi(x,y) = j(y)(x)$. Si Φ es suave y $\Phi \pitchfork W$ entonces $\{z \in Z \mid j(z) \pitchfork W\}$ es denso en Z.*

Demostración: Como $\Phi \pitchfork W$, $\Phi^{-1}(W)$ es una subvariedad de $M \times Z$. Sea $\pi : \Phi^{-1}(W) \to Z$, $\pi = \pi_Z \circ i_\Phi$, donde $\pi : M \times Z \to Z$ es la proyección canónica en el segundo factor y $i_\Phi : \Phi^{-1}(W) \to M \times Z$ la inclusión canónica. Si $\dim(\Phi^{-1}(W)) < \dim Z$ entonces, $\pi(\Phi^{-1}(W))$ tiene medida cero en Z, entonces el complemento de $(\Phi^{-1}(W))^c$ es denso en Z, por lo tanto, $j(y) \pitchfork W$ para todo $y \notin \Phi^{-1}(W)$.

Ahora el caso cuando $\dim(\Phi^{-1}(W)) \geqslant \dim Z$. Si $y \in \Phi^{-1}(W)$ es un valor regular π y esto implicará que $j(y) \pitchfork W$, entonces por el teorema de Sard, esto pasaría para un conjunto denso. Sea $y \in Z$ un valor regular de π y $x \in M$. Si $(x, b) \notin \Phi^{-1}(W)$, entonces $j(y)(x) \notin W$ lo cual implica que $j(y) \pitchfork W$. Si $(x, y) \in W$, como supusimos que y es un valor regular de π tenemos que

$$T_{x,y}(M \times Z) = T_{x.y}\Phi^{-1}(W) + T_{x,y}(X \times y).$$

Aplicamos $(d\Phi)_{x,y}$ de ambos lados de nuestra igualdad y obtenemos

$$(d\Phi)_{(x.y)}(T_{x,y}(M \times Z)) = T_{j(y)(x)}W + (dj(y))_x(T_xM).$$

Por hipótesis sabemos que $\Phi \pitchfork W$, entonces combinamos la igualdad anterior con la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} T_{\Phi(x.y)}N &= T_{\Phi(x,y)}W + (d\Phi)_{(x.y)}(T_{x,y}(M \times Z) \\ T_{j(y)(x)}N &= T_{j(y)(x)}W + (dj(y))_x(T_xM)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $j(y) \pitchfork W$ en x. Y como y fue un valor regular arbitrario de π, por el teorema de Sard tenemos lo deseado. ■

La notación que usamos para j en este teorema no fue una simple casualidad, el caso que nos interesa es cuando nuestra familia de mapeos es de la forma $j(f) : M \to J^k(M, N)$, con $f : M \to N$ (ya demostramos que $j(f)$ es suave para cualquier f).

Teorema 3.2.7. *(de transversalidad de Thom) Sean M y N variedades, $L \subset J^k(M, N)$ subvariedad. Entonces $T_L := \{f \in C^\infty(M, N) \mid j^k f \pitchfork L\}$ es un conjunto residual en $C^\infty(M, N)$ con la topología C^∞.*

Demostración: Como toda subvariedad es unión de compactos, por el lema anterior nada más tenemos que probar el caso euclidiano, es decir, cuando $L \subset J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es compacto.

Como $j^k : C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^m, J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ es continuo tenemos que $(j^k)^{-1}(T_L)$ es abierto por la proposición 3.2.5. Entonces nada más tenemos que probar que es denso.

Sean $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ y $\rho' : \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ suaves tales que

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{en una vecindad de } \alpha(L) \\ 0 & x \notin \alpha(L). \end{cases}$$

$$\rho'(y) = \begin{cases} 1 & \text{en una vecindad de } \beta(L) \\ 0 & y \notin \beta(L), \end{cases}$$

Recordemos que en el capítulo 2 definimos a $V^k_{n,m}$ el espacio vectorial de polinomios en n variables con m entradas, con coeficientes hasta k sin término constante. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y $q \in V^k_{n,m}$, definimos $f_q : M \to N$ de la siguiente manera

$$f_q(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \alpha(L) \text{ o } f(x) \notin \beta(L) \\ \rho(x)\rho'(f(x))q(x) + f(x)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que f_q es diferenciable para todo $q \in V^k_{n,m}$, además podemos definir el mapeo $F : \mathbb{R}^m \times V^k_{n,m} \to \mathbb{R}^n$ como $F(x, q) = f_q(x)$, el cual es suave por como están definidas las f_q.

Sea $\Phi : \mathbb{R}^m \times V^k_{n,m} \to J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ definida como $\Phi(x, q) = j^k f_q(x)$, nos gustaría que $\Phi \pitchfork L$, para poder usar la proposición anterior, esto no necesariamente será cierto pero si restringimos nuestro dominio a una vecindad del 0 en $V^k_{n,m}$, es decir si existe una vecindad del 0 en $B_0 \subset V^k_{n,m}$, tal que $\Phi : \mathbb{R}^m \times V_0 \to J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sea transversal a L podríamos usar la proposición anterior. Si esto pasara dada $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existirá $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset V_0$ que converja a 0, tal que $j^k f_{q_i} \pitchfork L$ (un conjunto es denso en V_0 si y sólo si cualquier elemento de V_0 se puede aproximar por elementos del denso). Y por como es la convergencia en $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tenemos que $f_{q_i} \to f$ cuando $i \to \infty$. En resumen, si encontramos V_0 vecindad del 0 en $V^k_{n,m}$, tal que $\Phi : \mathbb{R}^m \times V_0 \to J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sea transversal a L acabaríamos esta demostración.

Sea $\epsilon = \frac{1}{2} \min\{d(\mathrm{sop}(\rho'), \mathbb{R}^m - \alpha(L)), d(\eta_i(\beta(L)), (\rho')^{-1}[0, 1))$. Recordemos que la distancia entre dos conjuntos es el ínfimo de las distancias entre cualesquiera dos elementos de éstos. Sea $V_0 = \{q \in V_0 \mid |q(x)| < \epsilon \ \forall x \in \mathrm{sop}(\rho)\}$, entonces V_0 es abierto (distinto del vacío). Supongamos que $(x, q) \in \mathbb{R}^m \times V_0$ y que $\Phi(x, q) \in L$, entonces $x \in \alpha(L)$ y $f_q(x) \in \beta(L)$. Entonces $s = d((f(x)), (f_q(x))) < \epsilon$, ya que

$$\eta(f_q(x)) = \rho(x)\rho'(f(x)q(x) + f(x).$$

Entonces $f(x) \in Int(\rho')^{-1}(1)$ ya que $f_b(x) \in \beta(L)$. Como $\rho = 1$ en una vecindad de $\alpha(L)$ entonces $f_b(x) = b(x) + f(x)$ es una propiedad abierta para x y para b, entonces Φ es un difeomorfismo local cerca de (x, b). ■

Corolario 3.2.8. *Sean M y N variedades, con $L \subset J^k(M, N)$ subvariedad, tal que $\alpha(\overline{L}) \subset U$ abierto de M. Sea $f : M \to N$ suave y $V \subset C^\infty(M, N)$ vecindad de f, entonces existe $g \in V$ tal que $j^k g \pitchfork L$ y $g \equiv f$ fuera de U.*

Esto es una consecuencia inmediata de cómo construimos la familia de funciones f_q del teorema de Thom.

Corolario 3.2.9. *Sean M y N variedades, $L \subset N$ subvariedad. Entonces:*

1. *El conjunto de mapeos de M en N que intersecan transversalmente a L es denso en $C^{\infty}(M, N)$, si L es abierta entonces también será abierto.*

2. *Sean $U_1, U_2 \subset M$ abiertos con $\overline{U_1} \subset U_2$. Sea $f : M \to N$ y V una vecindad de f en $C^{\infty}(M, N)$. Entonces existe $g \in V$ tal que $g \equiv f$ en U_1 y $g \pitchfork L$ fuera de U_2.*

Demostración:

1. Recordemos que $J^0(M, N) = M \times N$ y que el mapeo blanco $\beta :$ $J^0(M, N) \to N$ es una sumersión. Si $L \subset N$ es una subvariedad, entonces $\beta^{-1}(L)$ es una subvariedad de $M \times N$. Entonces para un conjunto denso de $C^{\infty}(M, N)$ el mapeo $j^0 f : M \to M \times N$ interseca transversalmente a $\beta^{(-1)}(L)$. Si $j^0 f \pitchfork \beta^{-1}(L)$ implicará que $f \pitchfork L$ obtendríamos lo deseado. Supongamos que $j^0 f \pitchfork \beta^{-1}(L)$, si $j^0 f(x) \notin \beta^{-1}(L)$ entonces $f(x) \notin L$, por lo tanto $f \pitchfork L$ en x. Ahora, si $j^0(x) \in \beta^{-1}(L)$ tenemos

$$T_{(x,f(x))}\beta^{-1}(L) + (dj^0 f)_x(T_x M) = T_{(x,f(x))}(M \times N).$$

   Aplicamos $(d\beta)_{(x,f(x))}$ en ambos lados de la igualdad y obtenemos

$$T_{f(x)}L + (df)_x(T_x M) = T_{f(x)}N.$$

   Por lo tanto $f \pitchfork L$ en x.

2. Notemos que el conjunto $(M \times N) - \alpha^{-1}(\overline{U_2})$ es abierto en $M \times N$, entonces es una variedad. Y además $\beta^{-1}(L) \cap ((M \times N) - \alpha^{-1}(\overline{U_2})) = L'$ es una subvariedad de él, con $\alpha(L') \subset M - \overline{U_1}$, entonces ocupamos el corolario anterior para encontrar la g deseada y cumplirá lo que deseamos por el inciso anterior. ■

Ahora presentaremos una generalización de lo que acabamos de ver pero que nos servirá para estudiar la autointersección de mapeos. Sean M y N variedades. Sea

$$M^{(s)} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^s = \prod_{i=1}^{s} M \mid x_i \neq x_j \text{ para } 1 \leqslant i < j \leqslant s\}.$$

A $M^{(s)}$ siempre lo pensaremos con la topología de subespacio de M^s (M^s tiene la topología producto). Definimos $\alpha^s : (J^k(M, N))^s \to M^s$ como $\alpha^s = \prod_{i=1}^{s} \alpha$, es diferenciable por ser diferenciable en todas sus entradas. A $J^k_s = (\alpha^s)^{-1}(M^{(s)})$ le llamaremos *s-doblez de un haz de k-jets*. Un *haz de multijets* es un s-doblez de un haz de k-jets, si el contexto nos lo permite nada más le llamaremos doblez o s-doblez. Recordemos que α es una sumersión, por como definimos α^s también será una sumersión y como $M^{(s)}$ es un abierto de X^s, entonces los dobleces serán variedades, además de la misma dimensión de $(J^k(M,N))^s$ por ser un abierto de éste. Si $f : M \to N$ es suave, entonces tenemos el mapeo suave $j^k_s : X^{(s)} \to J^k_s(M,N)$ definido de manera obvia.

De la misma manera que para los haces de k-jets, tendremos teoremas similares para los dobleces.

Teorema 3.2.10. *(de transversalidad de multijets) Sean M y N variedades, $L \subset J^k_s(M,N)$ subvariedad. Entonces*

$$T_L := \{f \in C^\infty(M,N) \mid j^k_s f \pitchfork L\}$$

es un conjunto residual de $C^\infty(M,N)$ en la topología C^∞. Más aún, si L es cerrada, T_L será abierto.

La demostración procede de igual manera que el teorema de transversalidad de Thom, el detalle importante es modificar un poco los incisos c) y d) de la demostración, pero si $x \in M^{(s)}$ tenemos que $x = (x_1, \ldots, x_s)$ con $x_i \neq x_j$ cuando $i \neq j$, como M es variedad es un espacio Hausdorff y x es una n-ada finita, entonces existen vecindades $U_i \in M$ de cada x_i tales que $U_i \cap U_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$, estas vecindades son las que nos sirven y una aplicación adecuada de particiones de la unidad nos permite demostrar lo deseado.

3.3. Teorema de inmersión de Whitney

Antes de comenzar con el estudio de los mapeos estables, estudiaremos los mapeos entre dos variedades agregando ciertas hipótesis sobre sus dimensiones. Los mapeos más fáciles entre dos variedades son las inmersiones y sumersiones, en esta sección nos dedicaremos al estudio de las inmersiones, en particular si éstas son densas cuando las dimensiones entre dos variedades son adecuadas. A partir de este momento M y N denotarán siempre variedades. En particular en esta sección asumiremos que $\dim(M) \leqslant \dim(N)$.

Definición 3.3.1. Sea $\sigma \in J^1(M,N)$, con $f : M \to N$ un representante de σ y $x = \alpha(\sigma)$.

1. Definimos el *corango de* σ como $\text{corango}(\sigma) = \text{corango}((df)_x)$. Es claro que esta definición no depende del representante (de igual manera se define el rango de σ).
2. $S_r(M,N) := \{\sigma \in J^1(M,N) \mid \text{corango}(\sigma) = r\}$, si el contexto nos lo permite nada más escribiremos S_r.

Como las transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita tienen un rango máximo, entonces S_r será vacío para casi toda $r \in \mathbb{N}$. Cuando S_r tenga sentido nos gustaría que fuera una subvariedad (subhaz fibrado) de $J^1(M,N)$, todavía nos hace falta un poco para demostrar eso, pero lo primero que podemos notar es la siguiente afirmación.

Lema 3.3.2. *$f : M \to N$ es una inmersión si y sólo si* $j^1 f(M) \cap \left(\bigcup_{r \neq 0} S_r \right) = \varnothing$.

Lema 3.3.3. *Sea S una matriz de $m \times n$ donde*

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

con A una matriz de $k \times k$ invertible. Entonces $\operatorname{rango}(S) = k$ *si y sólo si* $D - CA^{-1}B = 0$.

<u>Demostración:</u> Sea

$$T = \begin{bmatrix} Id_{k\times k} & 0 \\ -CA^{-1} & Id_{m-k\times m-k} \end{bmatrix}$$

una matriz de $m \times m$ invertible. Entonces $\operatorname{rango}(S) = \operatorname{rango}(TS)$, entonces multiplicamos las matrices y obtenemos

$$TS = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

y esta matriz tiene rango k si y sólo si $D - CA^{-1}B = 0$. ■

Sean V^n y W^m espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Recordemos que $\operatorname{Hom}(V,W) \cong \mathbb{R}^{mn}$, es decir es una variedad de dimensión mn, definimos $L_r(V,W) = \{S \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{corango}(S) = r\}$.

Lema 3.3.4. *$L_r(V,W)$ es una subvariedad de* $\operatorname{Hom}(V,W)$ *con* $\operatorname{codim}(L_r(V,W)) = (m-q+r)(n-q+r)$ *donde* $q = \operatorname{mín}\{n,m\}$.

<u>Demostración:</u> Sea $S \in L_r(V,W)$ y $k = \operatorname{rango}(S)$. Elegimos bases en V y W tales que

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

donde A es una matriz invertible de $k \times k$. Sea $U \in \operatorname{Hom}(V,W)$ vecindad de S, tal que si $S' \in U$ entonces $S' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ con A' matriz invertible de $k \times k$ (recordemos que proyectar es continuo y el determinante también). Sea $f : U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{m-k})$ dada por $f(S') = D' - C'(A')^{-1}B'$. Es claro que f es una sumersión (nada más fijamos las coordenadas A, B y C). Entonces por como definimos f tenemos que $f^{-1}(0) = L_r(V, W) \cap U$, la cual es una subvariedad por f ser sumersión.

Además $\operatorname{codim}(L_r(V, W)) = \dim(\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{m-k}) = (n-k)(m-k)$. ■

Teorema 3.3.5. *$S_r(M, N)$ es una subvariedad de $J^1(M, N)$.*

El lema anterior es el que nos da las cartas de subvariedad claramente. Además tenemos que $S_0(M, N)$ es un abierto de $J^1(M, N)$, esto es claro ya que el determinante es continuo y aplicamos el lema anterior (en este caso las fibras serán abiertos de las fibras originales). Sea $\operatorname{Inm}(M, N) \subset C^\infty(M, N)$ las inmersiones de M a N, por esta última aclaración tenemos el siguiente lema:

Lema 3.3.6. *$Inm(M, N)$ es abierto en $C^\infty(M, N)$ en la topología C^∞.*

Teorema 3.3.7. *(de inmersión de Whitney) Supongamos que $dim(N) \geqslant 2dim(M)$ entonces $Inm(M, N)$ es un abierto denso de $C^\infty(M, N)$.*

Demostración: Sabemos que $\operatorname{codim}(S_r) = (n - q + r)(m - q + r)$ con $q = \operatorname{ínf}\{n, m\}$, entonces si $r \geqslant 1$ tenemos

$$\operatorname{codim}(S_r) = r(m - n + r) \geqslant r(n + r) \geqslant n + 1.$$

En este caso, si $f : M \to N$, $j^k f \pitchfork S_r$ si y sólo si $j^k f(M) \cap S_r = \varnothing$, por el teorema de transversalidad de Thom y el primer lema de esta sección finaliza nuestra demostración. ■

Teorema 3.3.8. *Supongamos que* $\dim(N) \geqslant 2\dim(M) + 1$. *Entonces el conjunto de inmersiones 1 a 1 es un conjunto residual de $C^\infty(M, N)$.*

Demostración: Sea $W = (\beta^2)^{-1}(\Delta N) \subset J_2^0(M, N)$ subvariedad (β es sumersión). Si $f : M \to N$ es una inmersión 1 a 1 cumple que $j_2^0 f : M \to J_2^0(M, N)$ no intersecta a W. Como $\operatorname{codim}(W) = \operatorname{codim}(\Delta N) = \dim(N) > 2\dim(M) = \dim(M^{(2)})$ (recordemos que $M^{(2)}$ es abierto en M^2), entonces $j_2^0 f \pitchfork W$ si y sólo si $j_2^0(M^{(2)}) \cap W = \varnothing$, aplicamos el teorema de multitransversalidad. ■

3.4. Funciones de Morse

Ahora estudiaremos el caso cuando la dimensión del codominio es menor a la del dominio, nada más que trabajaremos el caso más simple (no trivial), cuando el codominio es exactamente $\mathbb{R}$, en este caso las funciones siempre serán "iguales"(recordemos que en topología diferencial luego nos referimos que son iguales cuando en realidad lo son bajo un cambio de coordenadas). Como $\mathbb{R}$ es de dimensión 1, las únicas subvariedades de la forma S_r no vacías son S_0 y

S_1. Entonces $x \in M$ es un punto crítico (también llamado una singularidad) de $f : M \to \mathbb{R}$ si $j^1 f(x) \in S_1$. Si está en S_0 entonces es una sumersión en x, por lo tanto, es un punto regular.

Definición 3.4.1. 1. Sea $x \in M$ un punto crítico de $f : M \to \mathbb{R}$, decimos que x es *no degenerado* si $j^1 f(x) \pitchfork S_1$.

2. f es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Por como definimos a las funciones de Morse (una condición de transversalidad) en conjunto con el teorema de transversalidad tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.2. *El conjunto de las funciones de Morse es denso y abierto en $C^\infty(M, N)$.*

De nuestra definición no podemos decir a primera vista cómo son las funciones de Morse, para nuestra buena suerte las funciones de Morse son de las más simples que estudiaremos, debido a un teorema de forma normal, es decir, localmente todas las funciones de Morse son iguales módulo un difeomorfismo.

Teorema 3.4.3. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ suave, sea $x \in U$ un punto crítico. x es no degenarado si y sólo si el hessiano de f en x es no singular.*

Demostración: Recordemos que $J^1(U, \mathbb{R}) \cong U \times \mathbb{R} \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces la proyección canónica $\pi : J^1(U, \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es una sumersión y además $\pi^{-1}(0) = S_1$.

Entonces $j^1 f \pitchfork S_1$ en x si y sólo si $\pi \circ j^1 f$ es una sumersión en x. Pero

$$\pi \circ j^1 f(x) = (df)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Para que este mapeo ($\pi \circ j^1 f$) sea una sumersión en x nada más tenemos que calcular la matriz jacobiana, entonces derivamos las funciones coordenadas y obtenemos

$$(d(\pi \circ j^1 f))_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}$$

y esta matriz es no singular en x si y sólo si su determinante es no cero. Además podemos observar que los puntos de Morse son aislados. ■

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Es una función de Morse ya que, si $x \neq 0$ entonces f es una sumersión en x. Si $x = 0$ tenemos $(df)_0 = 0$, pero el hessiano en 0 es 2^n.

En nuestra demostración anterior vimos que $(d(\pi \circ j^1 f))_x$ es un difeomorfismo local cuando x es un punto crítico no degenarado, entonces bajo un cambio de coordenadas adecuado podemos suponer que es la matriz identidad en nuestro punto crítico.

Lema 3.4.4. *(de Hadamard) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave con U convexo y $f(0) = 0$. Entonces*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

para algunas funciones suaves $g_i : U \to \mathbb{R}$ que cumplen $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

<u>Demostración:</u>

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial t} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i dt.$$

Sea $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i dt$. ■

Lema 3.4.5. *(de Morse) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave con U vecindad de 0 y f función de Morse. Si 0 es un punto crítico de f entonces existe un cambio de coordenadas alrededor del 0 tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = \pm x_1^2 \cdots \pm x_n^2$.*

No demostraremos este lema ya que necesitamos saber qué es el índice de una función, pero el lector que sí esté relacionado con estos temas la demostración nada más se reduce a una aplicación del lema de Hadamard (en realidad se ocupa dos veces), este lema aunque lo hayamos enunciado en contexto euclidiano también aplica a variedades ya que las variedades son localmente euclidianas. Un lema que nos será útil en el futuro es el siguiente.

Lema 3.4.6. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave con $x \in U$ un punto crítico no degenerado. $\phi : U \to U$ difeomorfismo tal que $\phi(x) = x$, entonces $f \circ \phi$ es de Morse y además 0 es un punto crítico no degenerado de $f \circ \phi$.*

Este es una consecuencia de la regla de la cadena, para finalizar este capítulo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.4.7. *El conjunto de funciones de Morse cuyos valores críticos son distintos es residual en $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Demostración: Sea $S = (S_1 \times S_1) \cap J_2^1(M, \mathbb{R}) \cap (\beta^2)^{-1}(\Delta\mathbb{R})$, una subvariedad de $J_2^1(M, \mathbb{R})$. Aplicamos el teorema de multitransversalidad, entonces el conjunto de transformaciones tales que $j_2^1 f \pitchfork S$ es residual, pero $j_2^1 f \pitchfork S$ si y sólo si $j_2^1(M^{(2)}) \cap S = \varnothing$ por las dimensiones. Si $(x, y) \in M^{(2)}$ son puntos críticos de f entonces $j_2^1(x, y) \notin S$ entonces $f(x) \neq f(y)$. ■

Capítulo 4

Estabilidad topológica

4.1. Lo más básico

Definición 4.1.1.

Sean $f, f' \in C^\infty(M,N)$. Decimos que f es *equivalente* a f' si existen difeomorfismos $g : M \to M$ y $h : N \to N$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M & \xrightarrow{f'} & N \end{array}$$

$f \in C^\infty(M,N)$ es estable si existe una vecindad W_f de f en $C^\infty(M,N)$ tal que cualquier $g \in W_f$ es equivalente a f.

Que una función sea estable significa que todas las funciones cercanas son iguales a f salvo un cambio de coordenadas. Aparentemente nuestra definición es muy complicada, es decir, a primera vista es muy difícil decir si una función es o no estable, pues recordemos que nuestra topología es bastante complicada. Nuestro propósito es dar un criterio más sencillo para saber cuando una función es estable (ni squiera sabemos si existen las funciones estables). En el caso del capítulo anterior, cuando considerábamos las funciones de $C^\infty(M,\mathbb{R})$, si una función $f : M \to \mathbb{R}$ era estable entonces ésta necesariamente sería una función de Morse con valores críticos distintos dos a dos.

Una acción de grupo G en un conjunto C es una operación $\cdot : G \times C \to C$ que cumple que $(gg') \cdot a = g \cdot (g'a)$ y $e_G \cdot a = a$ donde e_G es el neutro de nuestro grupo. Denotemos a $(\mathrm{Dif}(M), \circ)$ al grupo de difeomorfismos de M con la composición usual. Sea $G = \mathrm{Dif}(M) \times \mathrm{Dif}(N)$, el cual es un grupo con las operaciones puntuales, entonces G actúa en $C^\infty(M, N)$ del siguiente modo, sea $(g, h) \in G$ y $f \in C^\infty(M, N)$, $(g, h) \cdot f = h \circ f \circ g^{-1}$. La órbita de f bajo la acción de G se denota como $\mathcal{O}_f = \{f' \in C^\infty(M, N) \mid f' = h \circ f \circ g^{-1} \text{ con } (g, h) \in G\}$.

Lema 4.1.2. *Sea $f \in C^\infty(M, N)$. Entonces f es estable si y sólo si la órbita de f bajo la acción de G es abierta.*

Demostración: Sea $(g, h) : C^\infty(M, N) \to C^\infty(M, N)$ donde $(g, h) = (h_*) \circ (g^{-1})^*$ el cual es continuo por ser composición de mapeos continuos, además como g y h son difeomorfismos en M y N respectivamente, (g, h) es un homeomorfismo con inversa (g^{-1}, h^{-1}).

Por definición sabemos que f' está en la órbita de f si y sólo si f' es equivalente a f. Como cualquier vecindad de f puede ser trasladada por (g, h) obtenemos lo deseado. ■

Definición 4.1.3. Sea $f : M \to N$ suave.

1. Sea $\pi_N : TN \to N$ la proyección canónica, sea $\omega : M \to TN$, decimos que ω es un *campo vectorial sobre* f si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
TN \arrow[dr, "\pi_N"] & \\
M \arrow[u, "\omega"] \arrow[r, "f"] & N.
\end{tikzcd}$$

   Al conjunto de campos vectoriales sobre f lo denotaremos $C_f^\infty(M, TN)$.

2. f es *infinitesimalmente estable* si y sólo si para todo $\omega \in C_f^\infty(M, N)$, existen campos vectoriales X en M, y Y en N tales que

$$\omega = (df) \circ X + Y \circ f.$$

Recordemos que en un haz vectorial las operaciones en fibras son suaves, por lo cual sumar vectores que viven en la misma fibra tiene sentido. Si analizamos detenidamente el diagrama de la definición anterior, observamos que ω a cada $x \in M$ le asigna un vector en la fibra de $f(x)$ en TN, entonces por esta observación podemos identificar a los campos vectoriales sobre f con las secciones del haz pullback $f^*(TN)$. A las secciones suaves de un haz E las denotaremos como $C^\infty(E)$. A partir de este momento asumiremos que M es compacta, ya que nuestro propósito es demostrar el siguiente teorema de Mather.

Teorema 4.1.4. *Sea $f : M \to N$. Entonces f es estable si y sólo si f es infinitesimalmente estable.*

El teorema anterior es válido cuando M no es compacta pero tenemos que asumir que f es propia. Esta equivalencia de estabilidad es mucho más manejable ya que aquí tenemos coordenadas (localmente) y tenemos particiones de la unidad para extender el resultado local

Ejemplos:

1. Sea $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant n$. Sea $f : M^m \to N^n$ sumersión. Sea $x \in M$, como es una sumersión, el mapeo $(df)_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ es una transformación lineal suprayectiva, esto pasa para todo $x \in M$. Entonces $(df) : TM \to TN$ tiene rango constante (en fibras), lo cual es equivalente a que $\ker(df)_x$ tiene el mismo rango para todo $x \in M$. Entonces $\ker(df)$ es un subhaz vectorial de TM, cuyas fibras son $\ker(df)_x$ para todo $x \in M$, este subhaz nos induce otro subhaz de TM, su haz normal H , cuya fibra en x es el expacio normal a $\ker(df)_x$, entonces, si restringimos el mapeo $(df)_x|_{H_x} : H_x \to T_{f(x)}N$ es un isomorfismo, entonces $(df)|_H : H \to TN$ es un mapeo entre haces que es isomorfismo en fibras, por lo tanto, $(df)|_H$ nos induce un mapeo biyectivo entre $(df) : C^\infty(H) \to C^\infty_f(M, TN)$, lo cual es equivalente a que f sea infinitesimalmente estable.

Nuestra primera intención es analizar como son los mapeos infinitesimalmente estables localmente. Sea E un haz vectorial sobre M, si $x \in M$ denotemos como $C^\infty_x(E)$ al anillo de gérmenes de secciones alrededor de x.

Definición 4.1.5. Sea $f : M \to N$, con $x \in M$ y $f(x) = y$.

1. $\overline{f} \in C^\infty_x(M)$ es *infinitesimalmente estable* si para todo $\bar{\omega} \in C^\infty_x(f^*(TN))$, existen $\bar{\tau} \in C^\infty_x(TM)$ y $\bar{\eta} \in C^\infty_y(TN)$ tal que
$$\bar{\omega} = \overline{(df)(\tau)} + \overline{\eta \circ f}.$$
2. f es *localmente infinitesimalmente estable* en x si $\overline{f}$ es infinitesimalmente estable en x.

Si $f : M \to N$ es localmente infinitesimalmente estable entonces es localmente infinitesimalmente estable para todo $x \in M$. En general el regreso no es cierto ya que no sabemos qué pasa en las autointersecciones, si $x_1, x_2 \in M$ son tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$ tenemos que $\eta(f(x_1)) = \eta(f(x_2))$ entonces η tiene que resolver el problema alrededor de x_1 y x_2 simultáneamente. En el futuro agregaremos una condición que nos ayudará a resolver este problema. Por el momento como este es un problema local podemos agregarle coordenadas, entonces si pensamos a $f : U \to V$ donde $U \in \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, sea $\omega \in C^\infty(TV)$ entonces existen $\tau \in C^n(TU)$ y $\eta \in C^\infty(TV)$ tales que
$$\omega_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tau_j + \eta_i(f) \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{*}$$

donde

$$\tau = \sum_{j=1}^{n} \tau_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{y} \quad \eta = \sum_{i=1} \eta_i \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Recordemos que la base canónica de los espacios tangentes son los operadores derivadas parciales. Podemos resolver las ecuaciones de ω_i hasta orden k si existen gérmenes $\bar{\tau} \in C_0^\infty(TU)$ y $\bar{\eta} \in C_0^\infty(TV)$ tales que

$$\overline{\omega_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \overline{\tau_j} + \overline{\eta_i(f)} + O(|x|^{k+1}).$$

Esto nos acerca a facilitar el problema localmente, nada más tenemos que ver cuál es la k correcta, para ésto tenemos el siguiente teorema (no lo demostraremos ya que es un resultado meramente algebraico).

Teorema 4.1.6. *(de preparación de Malgrange) Sea $\phi : M \to N$ suave con $\phi(x) = y$. Sea A un $C_x^\infty(M)$ módulo finitamente generado. Entonces A es un $C_y^\infty(N)$ módulo finitamente generado (con la estructura inducida por ϕ) si y sólo si $A/\mathfrak{m}_y(N)A$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ finitamente generado.*

Cuando hacemos el cociente de un anillo de gérmenes y su ideal maximal obtenemos $\mathbb{R}$, ya que es un anillo local, por lo tanto tiene sentido considerar a $A/\mathfrak{m}_y(N)A$ como un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

Corolario 4.1.7. *Sea A un $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ módulo finitamente generado, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ suave con $\phi(0) = 0$, $\{e_i\}_{i=1}^k \subset A$. Entonces $\{e_i\}_{i=1}^k$ generan a A como un $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ módulo si y sólo si $\{\pi(e_i)\}_{i=1}^k$ generan a $A/\mathfrak{m}_0(\mathbb{R}^m)$ como un $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ módulo, donde $\pi : A \to A/\mathfrak{m}_0(\mathbb{R}^m)A$ es la proyección canónica.*

Corolario 4.1.8. *Si $\{\pi(e_i)\}_{i=1}^k$ son una base del espacio vectorial $A/(\mathfrak{m}_0^{k+1}(\mathbb{R}^n)A + \mathfrak{m}_0(C^\infty(\mathbb{R}^m)A)$ entonces $\{e_i\}_{i=1}^k$ es una base para A visto como $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ módulo.*

Teorema 4.1.9. *Sea $f : M^m \to N^n$ suave, $x \in M$ con $f(x) = y$. Entonces $\overline{f}$ es localmente infinitesimalmente estable en x si y sólo si la ecuación de * puede resolverse hasta orden m.*

Demostración: Notemos que $C_x^\infty(f^*(TN)) \cong \bigoplus_{i=1}^n C_x^\infty(M)$, esto es local por lo tanto tenemos el isomorfismo mediante coordenadas, entonces $C_x^\infty(f^*(TN))$ es un $C_x^\infty(M)$ módulo finitamente generado.

Sea $A = \{\omega \in C_x^\infty(f^*(TN)) \mid \omega = (df)(\tau) \text{ con } \tau \in C_x^\infty(TM)\}$. Sea $B = C_x^\infty(f^*(TN))/A$, es un $C_x^\infty(M)$ módulo finitamente generado. B es un $C_y^\infty(N)$ módulo mediante f. Sea $e_i = \pi(f^*(\partial/\partial x_i))$ con $1 \leqslant i \leqslant m$ y π la proyección canónica. Es claro que $(\mathfrak{m}_x(M))^{(k+1)}$ son los gérmenes de funciones cuya serie de Taylor en x inicia en el término $k+1$. Entonces $\overline{f} \in C_x^\infty(M, N)$ es infinitesimalmente estable si y sólo si $\{e_i\}_{i=1}^n$ generan a B como un $C_y^\infty(N)$ módulo si y sólo si

$B/\mathfrak{m}_x^{n+1}(M)B$ es generado por nuestras e_i. Entontes $\omega = \sum_{i=1}^{n}(\eta_i \circ f)e_i + (df)(\tau) + g$ donde $g \in (\mathfrak{m}_x(M))^{n+1} C_y^{\infty}(TN)$, es decir, g es de orden $n+1$.

Sea E un haz vectorial sobre M con proyección π, entonces $\pi_* : J^k(M,E) \to J^k(M,M)$ es una sumersión. Sea $I = \{\sigma \in J^k(X,X) \mid \overline{Id_M} = \sigma\}$ subvariedad de $J^k(X,X)$, entonces $J^k(E) = (\pi_*)^{-1}(I)$ es una subvariedad de $J^k(M,E)$, el cual llamaremos haz de k-jets de secciones de E, es claro también que $\alpha : J^k(E) \to X$ es un mapeo de haces fibrados, denotaremos a la fibra en $x \in M$ de este haz como $J^k(E)_x$, en este caso tenemos aún más, este será un haz vectorial sobre M, ya que las fibras serán polinomios de grado la dimensión de E. En lenguaje de jets el teorema anterior nos dice que f es infinitesimalmente estable en x depende exclusivamente de $j^{n+1}f(x)$, reformulamos el teorema anterior de la siguiente manera.

Teorema 4.1.10. *Sea $f : M^m \to N^n$ suave con $f(x) = y$. f es infinitesimalmente estable en x si y sólo si*

$$J^n(f^*(TN))_x = (df)_x J^n(TM)_x + f^* J^n(TN)_y.$$

Anteriormente dijimos que aunque podamos resolver el problema de estabilidad infinitesimalmente localmente no podemos generalizar debido a las autointersecciones de f.

Definición 4.1.11. Sea $f : M \to N$ suave, $y \in N$ y $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq f^{-1}(y)$, entonces f es *simultáneamente infinitesimalmente estable* en S si para cualesquiera $\overline{\omega_i} \in C_{x_i}^{\infty}(f^*(TN))$ con $1 \leqslant i \leqslant k$, existen $\overline{\tau_i} \in C_{x_i}^{\infty}(TM)$ con $1 \leqslant i \leqslant k$ y $\overline{\eta} \in C_y^{\infty}(TN)$ tales que

$$\overline{\omega_i} = \overline{(df)(\tau_i)} + \overline{\eta \circ f} \text{ para toda } i.$$

Sea E un haz vectorial sobre M y $S = \{x_i\}_{i=1}^k$ definimos $J^m(E)_S = \bigoplus_{i=1}^k J^m(E)_{x_i}$. De la misma manera tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.12. *Sea $f : M \to N$ suave y $S = \{x_i\}_{i=1}^k \subset f^{-1}(y)$. Entonces f es simultáneamente infinitesimalmente estable en S si y sólo si*

$$J^m(f^*(TN))_S = (df)J^m(TM)_S + f^* J^m(TN)_y.$$

Este teorema se demuestra exactamente igual que el teorema anterior. Antes de seguir con esto, introduciremos unos conceptos que nos ayudarán posteriormente.

Definición 4.1.13. Sea V un espacio vectorial real, y $\{H_i\}_{i=1}^r \subset V$ familia de subespacios de V. Decimos que $\{H_i\}_{i=1}^r$ están en *posición general* si para cualquier sucesión de enteros $\{i_j\}_{j=1}^s$ con $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant r$ tenemos

$$\operatorname{codim}(\bigcap_{j=1}^{s} H_{i_j}) = \sum_{j=1}^{s} \operatorname{codim}(H_{i_j}).$$

El caso más simple es cuando $r = 2$, entonces H_1 y H_2 están en posición general si y sólo si $H_1 + H_2 = V$, ya que

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

$$= \dim(V) - (\operatorname{codim}(H_1) + \operatorname{codim}(H_2) - \operatorname{codim}(H_1 \cap H_2),$$

entonces $\dim(H_1 + H_2) = \dim(V)$ si y sólo si H_1 y H_2 están en posición general. Este caso es bastante simple, pero en general no lo será, así que damos una nueva definición para darnos una idea cómo son los espacios que están en posición general.

Teorema 4.1.14. *Sea V un espacio vectorial real, $\{H_i\}_{i=1}^r$. Entonces $\{H_i\}_{i=1}^r$ están en posición general si y sólo si $H_i \pitchfork (\bigcap_{i \neq j} H_j)$.*

Lema 4.1.15. *Si $\{H_i\}_{i=1}^r$ están en posición general entonces cualquier subfamilia de $\{H_i\}_{i=1}^r$ están en posición general.*

Lema 4.1.16. *Sea V espacio vectorial de dimensión finita. Sean $\{H_i\}_{i=1}^r \subset V$ familia de subespacios. Entonces $\{H_i\}_{i=1}^r$ están en posición general si y sólo si dados $\{v_j\}_{j=1}^r$ existen $h_i \in H_i$ y $z \in V$ tales que $v_i = h_i + z$ para toda $1 \leqslant i \leqslant r$.*

Demostración: Sea $\pi : V \to \bigoplus_{i=1}^r V/H_i$, con funciones coordenadas las proyecciones canónicas. $\ker(\pi) = \bigcap_{i=1}^r H_i$, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to \bigcap_{i=1}^r H_i \to V \to \bigoplus_{i=1}^r V/H_i$$

Como estamos trabajando con espacios vectoriales de dimensión finita, π es suprayectiva si y sólo si $\operatorname{codim}(\bigcap_{i=1}^r H_i) = \sum_{i=1}^r \dim(V/H_i)$, pero π es suprayectiva si y sólo si dados $v_i \in V/H_i$ existe $z \in V$ tal que $\pi(z) = v_i$ para todo i. ■

Este último lema es bastante sugestivo, como los espacios tangentes son espacios vectoriales y un campo vectorial es una función que a cada punto le asigna un vector en su espacio tangente, entonces queremos aplicar la última parte de nuestro lema en este contexto.

Teorema 4.1.17. *Sea $f : M^m \to N^n$ suave. Entonces f es infinitesimalmente estable si y sólo si se cumple # para todo $q \in N$ y cualquier $S \subset f^{-1}(y)$ que tiene a lo más $n + 1$ puntos*

$$J^m(f^*TN)_S = (df)J^m(TM)_S + f^*(J^m(TN)_y). \qquad (\#)$$

La necesidad es evidente, antes de demostrar la suficiencia necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 4.1.18. *Sea $f : M \to N$ que satisface # y $S = \{x_i\}_{i=1}^k \subset f^{-1}(y)$. Sean $H_i = (df)_{x_i}(T_{x_i}M)$. Entonces $\{H_i\}_{i=1}^k \subset T_yN$ están en posición general.*

Lema 4.1.19. *Sea $f : M^m \to N^n$ que satisface #, $y \in N$. Entonces el número de puntos críticos en $f^{-1}(y)$ es $\leqslant n$.*

Demostración: Sea $S = \{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subset f^{-1}(y)$ el conjunto de todos los puntos crítocos de $f^{-1}(y)$. Entonces $\{H_i\}_{i=1}^{n+1} \subset T_yN$ están en posición general (ocupando la notación del lema anterior), entonces

$$n > \operatorname{codim}(\bigcap_{i=1}^{n+1} H_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{codim}(H_i) \geqslant n+1$$

ya que los x_i son puntos críticos, entonces $\operatorname{codim} H_i \geqslant 1$. ■

Demostración suficiencia: Es claro que el problema de estabilidad infinitesimal está en los puntos críticos de f, en los puntos regulares es claro cual es la solución, ya que en estos puntos la diferencial bajo un cambio de coordenadas adecuado es simplemente una proyección. Sea Σ el conjunto de puntos críticos de f, y sea $\Sigma_y = \Sigma \cap f^{-1}(y)$, por el lema anterior Σ_y tiene a los más n puntos para cualquier $y \in N$. Sea $\omega \in C_f^\infty(M, N)$, entonces tenemos que encontrar los campos vectoriales X en M y Y en N, primero resolveremos el problema en una vecindad de Σ.

Demostraremos que existen abiertos $\{U_i\}_{i=1}^k \subset M$, $\{V_i\}_{i=1}^k \subset N$ y $\{W_i\}_{i=1}^k \subset N$, y campos vectoriales X_i en U_i y Y_i en V_i que satisfacen

1. $f(\Sigma) \subset \bigcup_{i=1}^k W_i$.
2. $f(U_i) \subset V_i$.
3. $\omega = (df)(X_i) + f^*Y$ en U_i.
4. $f^{-1}(\overline{W_i}) \cap \Sigma \subset U_i$.
5. $\overline{W_i} \subset V_i$.

Como $f(\Sigma)$ es compacto (recordemos que M siempre es compacta) nada más tenemos que resolver el problema para una $y \in N$, entonces existirá la k por compacidad. Por una proposición anterior podemos encontrar U y V que cumplan lo anterior nada más en y, con campos vectoriales X en U y Y en V. U lo podemos elegir de tal forma que sea unión de vecindades ajenas de las preimágenes de y que son puntos críticos de f. Elegimos W de tal modo que satisfaga las dos últimas condiciones, debido a la continuidad de f y la compacidad de M.

Elegimos una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i=1}^k$ en $W = \bigcup_{i=1}^k W_i$ tal que $\text{sop}(\rho_i) \subset W_i$. Elegimos una vecindad Z de Σ tal que $f^{-1}(\overline{W_i}) \cap Z \subset W_i$. Sea $\rho : M \to \mathbb{R}$ tal que $\text{sop}(\rho) \subset Z$ y $\rho \equiv 1$ en una vecindad de σ. Sea $X = \sum_{i=1}^k \rho f^*(\rho_i) X_i$ y $Y = \sum_{i=1}^k \rho_i Y_i$. Por como definimos las funciones $\omega = (df)(X) + f^*Y$ en una vecindad de σ. Como las sumersiones son infintesimalmente estables, podemos resolver el problema en el complemento de Σ y pegar nuestras soluciones con otra partición de la unidad. ■

Ahora demostraremos dos proposiciones que nos servirán en futuras secciones.

Proposición 4.1.20. *Sea $f : M \to N$ infinitesimalmente estable. Entonces existe $W \subset C^\infty(M, N)$ vecindad de f tal que toda $g \in W$ es localmente infnitesimalmente estable.*

Demostración: Sea $x \in M$ con $y = f(x)$. Como f es infinitesimalmente estable $J^m(f * TN)_y = (df)J^m(TM)_x + f^*J^m(TN)_y$. Consideremos el siguiente mapeo suprayectivo:

$$\overline{f} : J^m(TM)_x \bigoplus J^m(TN)_y = J^m(f^*TN)_x,$$

donde $\overline{f} = (df) + f^*$, en coordenadas adecuadas este es un mapeo de $V^k_{m,m} \bigoplus V^k_{n,n} \to V^k_{n,m}$. Es claro que $\overline{f}$ depende continuamente de x y de f, entonces existe una vecindad $U_x \subset M$ de x y una vecindad $W_x \subset C^\infty(M, N)$ de f tal que si $g \in W_x$ se tiene que $\bar{g}$ es suprayectiva, entonces g es localmente infinitesimalmente estable en x' si $x' \in U_x$. Como M es compacta y U_x es una cubierta de M, existe una subcubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^k$ entonces la vecindad deseada es $\bigcap_{i=1}^k W_i$, la cual es una vecindad de f porque estamos intersecando un número finito de vecindades. ■

Es claro que nos gustaría demostrar este teorema para estabilidad infitesimal global, pero esto no será posible debido a que $M^{(s)}$ no es compacta aunque M sea compacta. Por el momento lo mejor que podremos hacer será agregar una hipótesis para forzar esto.

Definición 4.1.21. Un mapeo $f : M \to N$ infinitesimalmente estable cumple la propiedad $\mathfrak{O}$ si para todo $x \in M$ existe una vecindad $U_x \in M$ de x, y una vecindad $W_x \in C^\infty(M, N)$ de f tal que si $g \in W_x$ y $S = \{p_i\}_{i=1}^k \subset U_x \cap g^{-1}(y)$, entonces

$$J^m(g^*TN)_S = (dg)J^m(TM)_S + g^*J^m(TN)_y.$$

Lema 4.1.22. *Si $f : M \to N$ es infinitesimalmente estable que satisface la propiedad $\mathfrak{O}$, entonces existe una vecindad $W_f \in C^\infty(M, N)$ de f tal que todos los mapeos de W_f son infinitesimalmente estables.*

Demostración: Sea $(x_1, x_2) \in M \times M$. Buscaremos vecindades $U_{x_1}, U_{x_2} \subset M$ de x_1 y x_2 respectivamente y una vecindad $W_{x_1,x_2} \subset C^\infty(M,N)$ de f, tal que si $g \in W_{x_1,x_2}$, $p \in U_{x_1}$ y $q \in U_{x_2}$ con $g(x) = g(y)$ entonces $J^m(g^*TN)_{p,q} = (dg)J^m(TM)_{p,q} + g^*J^m(TN)_{g(p)}$.

1. Si $x_1 = x_2$ obtenemos las vecindades ya que f cumple la propiedad $\mathfrak{O}$.
2. Si $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) \neq f(x_2)$, elegimos U_{x_1}, U_{x_2} y W_{x_1,x_2} tal que si $g \in W_{x_1,x_2}$, $g(U_{x_1}) \cap g(U_{x_2}) = \emptyset$.
3. Si $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$ elegimos cartas ajenas U_{x_1} y U_{x_2} alrededor de x_1 y x_2 respectivamente y una vecindad de f, W_{x_1,x_2} tal que si $g \in W_{x_1,x_2}$ entonces $g(U_{x_1}) \cup g(U_{x_2})$ está contenido en una carta. Procedemos de la misma manera que cuando teníamos un punto, es decir, nos tomaremos $\bar{f} = (df) + f^*$, nada más al dominio de esta función le agregamos el espacio vectorial correspondiente al nuevo punto.

Como $M \times M$ es compacta, entonces $\{U_{x_1} \times U_{x_2}\}_{(x_1,x_2)\in M\times M}$ es una cubierta abierta, entonces existe una subcubierta finita $\{U_i, U_j\}_{i,j\in J}$, entonces la vecindad de f deseada es $\bigcap\limits_{i,j\in J} W_{i,j}$. ■

4.2. Estabilidad bajo deformaciones

Todavía no conseguimos nuestro propósito, demostrar el teorema de Thom. Para eso introduciremos un nuevo concepto de estabilidad (al final todas nuestras definiciones de estabilidad serán equivalentes), esta nueva clase de estabilidad es muy similar a homotopía, de hecho será una generalización, esta teoría se debe a Harold Levine y a René Thom. Seguiremos asumiendo que M es compacta en esta sección y en todas las posteriores.

Definición 4.2.1. Sea $f : M \to N$ suave y $I_\epsilon = (-\epsilon, +\epsilon)$, donde $\epsilon > 0$.

1. Sea $F : M \times I_\epsilon \to N \times I_\epsilon$ suave, F es una *deformación de* f si
   a. Para todo $s \in I_\epsilon$, F es de la forma $F(x,s) = (F_s(x), s)$.
   b. $F_0 = f$.
2. Sea F deformación de f. F es una *deformación trivial de* f si existen difeomorfismos $G : M \times I_\delta \to M \times I_\delta$ y $H : N \times I_\delta \to N \times I_\delta$ con $\delta \leqslant \epsilon$ donde G y H son deformaciones de la identidad de Id_M y Id_N

respectivamente, son tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times I_\delta \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"] & N \times I_\delta \arrow[d, "H"] \\ M \times I_\delta \arrow[r, "f \times Id_{I_\delta}"] & N \times I_\delta. \end{tikzcd}$$

3. f es *homotópicamente estable* si toda deformación de f es trivial.

Es claro que $f \times Id_{I_\delta}$ es una deformación de f, es la deformación más simple de f. También podemos notar que podemos pensar a $F : I_\delta \to C^\infty(M, N)$ como una curva de funciones, que a cada $t \in I_\delta$ le asignamos F_t.

Lema 4.2.2. *Sea $f : M \to N$ homotópicamente estable. Si existe una vecindad $W \in C^\infty(M, N)$ de f tal que si $g \in W$, g es homotópicamente estable, entonces f es estable.*

Demostración: Podemos asumir que W es conectable por trayectorias. Sea $g \in W$, entonces existe $F : M \times [-1, 1] \to N \times [-1, 1]$ con $F_1 \equiv g$ y $F_t \in W$ para toda $t \in I_1$. Consideremos la siguiente relación de equivalencia $\sim$ en I_1, $t \sim s$ si y sólo si F_s es equivalente a F_t, como en una deformación de las nuestras (con W conectable por trayectorias) las F_t son equivalentes entonces las clases de equivalencia son abiertas, como I_1 es conexo entonces solo hay una clase de equivalencia. ■

Si los mapeos infinitesimalmente estables formaran un conjunto abierto entonces estabilidad infinitesimal implicará estabilidad homotópica entonces los mapeos infinitesimalmente serían estables. Todavía nos hace falta demostrar estas dos casos, aún tenemos que deshacernos de la propiedad $\mathfrak{O}$. Por el momento generalizaremos el concepto de estabilidad homotópica de la manera más natural, en lugar de deformar las funciones a través de un intervalo lo haremos por un abierto $U \in \mathbb{R}^k$.

Definición 4.2.3. Sea $f : M \to N$ suave y $U \in \mathbb{R}^k$ vecindad del 0.

1. Sea $F : M \times U \to N \times U$ suave. F es una *k-deformación de f* si

   a. Para todo $u \in U$ y $x \in M$, $F(x, u) = (F_u(x), u)$.

   b. $F_0 = f$.

2. Sea $F : M \times U \to N \times U$, una k-deformación de f. F es una *k-deformación trivial de f* si existen difeomorfismos $G : M \times V \to M \times V$ y $H : N \times V \to N \times V$ k-deformaciones de Id_M y Id_N respectivamente con $V \subset U$

vecindad del 0, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"] & N \times V \arrow[d, "H"] \\ M \times V \arrow[r, "f \times Id_V"] & N \times V. \end{tikzcd}$$

3. f es *estable bajo k-deformaciones* si toda deformación de f es trivial.

Es claro que si $l \leqslant k$ entonces si f es estable bajo k-deformaciones entonces lo será bajo l-deformaciones, en particular será homotópicamente estable. Antes de seguir con nuestro propósito demostraremos algunos lemas técnicos.

Lema 4.2.4. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto convexo, $x \in K$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave. Sea*

$$g(y) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} p_\alpha (y - x)^\alpha + \sum_{|\beta| = r+1} g_\beta(y)(y - x)^\beta$$

el polinomio de Taylor de g centrado en x de grado r. Si $\|g\|_s^K < \epsilon$ entonces $\|g\|_{s-r-1} < \epsilon$ con $r < s$, donde

$$\|g\|_s^K = \sup_{y \in K,\, 0 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}(y)|.$$

<u>Demostración:</u> Podemos suponer que $x = 0$, iniciamos con el caso $r = 0$, entonces $g(y) = g(0) + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i g_i(y)$ del lema de Hadamard, donde $g_i(y) = \int\limits_0^1 (\partial g / \partial x_i)(t y_i) dt$, entonces

$$|\frac{\partial g_i^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha}(y)| \leqslant \int\limits_0^1 |\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial g}{\partial y_i}(ty)| dt < \epsilon \quad |\alpha| \leqslant s - 1$$

ya que $\|g\|_s^K < \epsilon$ entonces $\|g_i\|_{s-1}^K < \epsilon$. Para el caso general

$$g(y) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r-1} p_\alpha (y - x)^\alpha + \sum_{|\beta| = r} g_\beta(y)(y - x)^\beta,$$

aplicamos el lema de Hadamard a nuestras g_β para despues usar nuestra hipótesis de inducción. ■

En el lema anterior aunque aparentemente no ocupamos que K fuera conexo lo necesitamos para aplicar el lema de Hadamard. Sea $\mathbb{R}_n^l$ el espacio vectorial de polinomios en n variables y de grado $\leqslant l$.

Lema 4.2.5. *Sea $r, s \in \mathbb{Z}$ con $r \geqslant 0$ y $s > 0$ y $K \subset \mathbb{R}^n$. Sea $U \subset \mathbb{R}^l_n$ vecindad del 0 donde $l = (r+1)^s$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $\{x_i\}_{i=1}^s \subset K$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave es tal que $\|g\|^K_{s(r+1)} < \epsilon$, entonces existe $q \in U$ tal que*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}p}{\partial y^\alpha}(x_i) = \frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial y^\alpha}(x_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant s \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant r.$$

<u>Demostración:</u> Haremos inducción sobre s. Sea $x = x_1$, entonces

$$g(x) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} p_\alpha (y-x)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} g_\alpha(y)(y-x)^\alpha.$$

Sea $p = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} p_\alpha (y-x)^\alpha$, como los coeficientes dependen de ϵ podemos elegir ϵ tan pequeña como queramos para que $p \in U$. Supongamos que el lema es cierto para $s-1$, $\{x_i\}_{i=1}^s \subset K$ distintos dos a dos, apliquemos el lema de Taylor alrededor de x_s y obtenemos

$$g(y) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} p_\alpha (y-x_s)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} g_\alpha(y)(y-x_s)^\alpha.$$

Si $\|g\|^K_{s(r+1)} < \epsilon$ entonces $\|g\|^K_{(s-1)(r+1)} < \epsilon$, entonces podemos escoger polinomios q_α cuyo grado es $\leqslant (r+1)^{k-1}$ tal que

$$\frac{\partial^{|\alpha|q_\alpha}}{\partial y^{|\beta|}}(x_i) = \frac{\partial^{|\alpha|}g_\alpha}{\partial y^\beta}(x_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant s-1 \quad 0 \leqslant |\beta| \leqslant r.$$

Sea

$$q = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} p_\alpha (y-x_s)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} (y-x_s)^\alpha q_\alpha.$$

Por la misma razón que el caso base podemos hacer que $q \in U$. Entonces

$$\frac{\partial^\beta g}{\partial y^\beta}(x_i) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^\beta}\left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant r} p_\alpha (y-x_s)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} g_\alpha(y)(y-x_s)^\alpha \right) =$$

$$\frac{\partial |\beta| q}{\partial y^\beta}(x_i)$$

para $1 \leqslant i \leqslant s$ y $0 \leqslant |\beta| \leqslant r$. ■

Proposición 4.2.6. *Sea $f : M \to N$ infinitesimalmente estable y estable bajo k-deformaciones para algún k. Entonces f satisface la propiedad $\mathfrak{O}$.*

<u>Demostración:</u> Sea $x \in M$. Elegimos cartas de $U \subset M$ y $V \subset N$ tales que $x \in U$ y $f(\overline{U}) \subset V$. Sea $W \in C^\infty(M,N)$ vecindad de f tal que si $g \in W$ entonces $g(\overline{U}) \subset V$, sea U_x una vecindad de x convexa con cerradura compacta. Sea

$\|g\|^{\overline{U_x}} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|g_i\|^{\overline{U_x}}$. Sea $\rho : M \to \mathbb{R}$ suave que es 1 en una vecindad de $\overline{U_x}$ y es 0 fuera de U. Sean $r = s = n+1$ y $l = (m+2)^{m+1}$.

Sea $F : M \times V^l_{m,n} \to N \times V^l_{m,n}$ dada por $F(y,p) = (f(y) + \rho(x)p(x), p)$ deformación de f. Como f es estable bajo k-deformaciones existe una vecindad $Z \in V^l_{m,n}$ del 0 donde F es trivial.

Sea $W_\epsilon = \{g \in W \mid \|g - f\|^{\overline{U_x}}_{(m+1)(m+2)} < \epsilon\}$ vecindad de f. Elegimos $\epsilon > 0$ del lema anterior, es tal que si $\{x_i\}_{i=1}^s \subset U_x$ distintos dos a dos con $s \leqslant m+1$, si $g \in W_\epsilon$ entonces existe $q \in Z$ vecindad del 0 tal que $j^{m+1}(g-f)(x_i) = j^{m+1}q(x_i)$ para toda i.

Ahora demostraremos que si $g \in W_\epsilon$ entonces satisface la condición # de la sección pasada. Si esto es cierto entonces f satisface la propiedad $\mathfrak{O}$. Sea $y \in N$ y $S = \{x_i\}_{i=1}^s \subset U \cap g^{-1}(y)$. Como $g \in W_\epsilon$ entonces existe $q \in Z$ tal que $j^{m+1}g(x_i) = j^{m+1}(f+q)(x_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant s$. Por como definimos ρ tenemos que $j^{m+1}(f+q)(x_i) = j^{m+1}F_q(x_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant s$. Como f es infinitesimalmente estable entonces F_q también lo es. Entonces F_q satisface $(*)$, por lo tanto g también. $\blacksquare$.

Con la ayuda de esta proposición casi obtenemos lo que queríamos, ahora nuestro propósito será demostrar que estabilidad bajo k-deformaciones implica estabilidad infinitesimal.

Definición 4.2.7. Sea $f : M \to N$ suave, $V \subset \mathbb{R}^k$ abierto vecindad del 0 y $F : M \times V \to N \times V$ k-deformación de f. Definimos el campo vectorial sobre F

$$\omega^i_F = (dF)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) - F^*\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right),$$

donde $\{t_i\}_{i=1}^k$ son las funciones coordenadas en V.

Recordemos que una deformación en sus últimas coordenadas es la identidad, en este campo vectorial nos "olvidamos"de lo que pasa aquí y de cierta manera estamos midiendo cómo cambian las F_v con respecto al tiempo. Sea $\pi_M : M \times V \to M$ y $\pi_V : M \times V \to V$ las proyecciones canónicas. Entonces $T(M \times V) = \pi^*_M(TM) \bigoplus \pi^*_V(TV)$. Entonces tenemos el siguiente lema, no lo demostraremos ya que es evidente.

Lema 4.2.8. *Sea F una k-deformación de f. Entonces $F \equiv f \times Id_v$ si y sólo si $\omega^i_F \equiv 0$ para $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Teorema 4.2.9. *(Thom-Levine) Sea $f : M \to N$ suave y $F : M \times V \to N \times V$ una k-deformación de f. Entonces F es trivial si y sólo si existe $U \subset V$ vecindad del 0 y campos vectoriales X^i en $M \times V$ y Y^i en $N \times U$ con $1 \leqslant i \leqslant k$ que satisfacen*

1. $\pi_V(X^i) = \pi_V(Y^i) = 0$ *y*

2. $\omega_F^i = (dF)(X^i) + F^*(Y^i)$ *en* $M \times U$*.*

Para demostrar este teorema necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 4.2.10. *Sea* X *un campo vectorial en* $M \times \mathbb{R}^k$ *con soporte compacto tal que* $\pi_V(X) = 0$*. Entonces existe un difeomorfismo* $G : M \times \mathbb{R}^k \to M \times \mathbb{R}^k$ *deformación de* Id_M*, tal que*

$$(dG)(G^{-1})^* \left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = X + \frac{\partial}{\partial t_k}.$$

Demostración: Como X tiene soporte compacto y $\partial/\partial t_k$ nos define un flujo completo, es decir, existe $\phi : (M \times \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^k$ la base canónica. Aseguramos que la solución $\phi_s : M \times \{v\} \to M \times \{v + se_k\}$. Sea $(x, v) \in M \times \{v\}$ entonces

$$(d\pi_{\mathbb{R}^k})_{(x,v)} \left(\left(X + \frac{\partial}{\partial t_k}\right)|_{(x,v)}\right) = \frac{\partial}{\partial t_k}|_{(x,v)}$$

por como está definido X. Sabemos que el vector tangente a la curva ϕ_s en (x, v) es $(X + \partial/\partial t_k)|_{\phi_s(x,v)}$, además

$$\left(\frac{d}{ds}\right) \pi_{\mathbb{R}^k}(\phi_s(x, v)) = e_k.$$

Definimos la siguiente k-deformación de Id_M, $G : M \times \mathbb{R}^k \to M \times \mathbb{R}^k$ como $G(x, v) = (\phi_{v_k}(x, v - v_k e_k), v)$, es claro que efectivamente es una deformación (las curvas integrales son difeomorfismos) y además por como la definimos cumplirá lo deseado. ■

Lema 4.2.11. *Con la notación anterior;*

$X = \pi_M(dG)(G^{-1})^*(\partial/\partial t_k)$.

$X = -(dG)\pi_M(dG^{-1})(\partial/\partial t_k)$.

Demostración:

1. Como $\pi_M(\partial/\partial t_i) = 0$ aplicamos π_M a la igualdad del lema anterior y obtenemos lo deseado.

2. Aplicamos $((dG)^{-1})_{(x,v)}$ en ambos lados de la igualdad del lema anterior y obtenemos

$$(dG)^{-1}_{(x,v)} \left(\left(X + \frac{\partial}{\partial t_k}\right)|_{(x.v)}\right) = \frac{\partial}{\partial t_k}|_{G^{-1}(x,v)}.$$

Entonces

$$0 = \pi_M \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{G^{-1}(x,v)} \right) = \pi_M (dG)^{-1}_{(x,v)} (X_{(x,v)}) + \pi_M (dG)^{-1}_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right).$$

Como las últimas k entradas de X son 0 entonces también lo son las de $(dG)^{-1}(X)$, entonces $\pi_M(dG)^{-1}_{(x,v)}(X_{(x,v)} = (dG)^{-1}_{(x,v)}(X_{(x,v)}$. A esta última igualdad le aplicamos $(dG)_{G^{-1}(x,v)}$ para obtener 2. ■.

<u>Demostración del teorema de Thom-Levine:</u> Necesidad: Supongamos que $F : M \times V \to N \times V$ es trivial, entonces existe $U \subset V$ vecindad del 0 y difeomorfismos $G : M \times U \to M \times U$ y $H : N \times U \times N \times U$ deformaciones de Id_M y Id_N respectivamente tales que $H \circ F = (f \times Id_U) \circ G$. También sabemos que

$$(dF)_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right) = \frac{\partial}{\partial t_i}|_{F(x,v)}$$

ya que en U la deformación se comporta como la identidad, en general esto pasa para cualquier k-deformación (sea trivial o no). Entonces

$$(dF)_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right) = \frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)}|_{F(x,v)} + \pi_M (dF)_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right)$$

esto pasa también para cualquier deformación. Sea $y = (f \times Id_U) \circ G^{-1}(x,v)$. Entonces

$$(*) = (dF)_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} + \pi_M (dH)_y \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_y \right) +$$

$$(dH)_y (df \times Id_U)_{G^{-1}(x,v)} \pi_M (dG^{-1})_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right).$$

Sea $X^i_{(x,v)} = (dG)_{G^{-1}(x,v)} \pi_M (dF)_{(x,v)} (\partial/\partial t_i|_{(x,v)})$, entonces X^i es un campo vectorial en $M \times U$ que cumple que $\pi_U(X^i) = \pi_U \circ \pi_M (dG^{-1})(\partial/\partial t_i) = 0$.

Aplicamos $(dG)^{-1}_{(x,v)} \circ (dG)_{G^{-1}(x,v)}$ antes de π en $(*)$ y obtenemos

$$(dF)_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right) = \frac{\partial}{\partial t_i}|_{F(x,v)} + \pi_M (dH)_y \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right) + (dF)_{(x,v)} (X^i_{(x,v)}).$$

Entonces

$$\omega^i_F(x,v) = (dF)_{(x,v)} \left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_{(x,v)} \right) - \frac{\partial}{\partial t_i}|_{F(x,v)} =$$

$$\pi_M(dH)_y\left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_y\right)+(dF)_{(x,v)}(X^i_{(x,v)}).$$

Definimos $Y^i_{(x',v')}=\pi_M(dH)_{H^{-1}(x',v')}((\partial/\partial t_i|_{H^{-1}(x',v')})$ donde $(x',v')\in N\times U$, es claro que Y^i cumple lo deseado, además como la i fue arbitraria terminamos.

Suficiencia: Sea $F:M\times V\to N\times V$ k-deformación de f, X^i y Y^i campos vectoriales en $M\times V$ y $N\times V$ respectivamente que cumplan nuestras hipótesis. Como M es compacta podemos asumir que X^i tiene soporte compacto y además que Y^i también lo es. Por los lemas anteriores existen difeomorfismos $G:M\times V\to M\times V$ y $H:N\times V\to N\times V$ k-deformaciones de Id_M y Id_N respectivamente, tales que

$$-X^k=\pi_M(dG)(G^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\quad \text{y}\quad Y^k=-(dH)\pi_M(dH^{-1})\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right).$$

Sea $x=(x,v)\in M\times U$, $y=G(x)$ y $z=F\circ G(x)$, sea $\overline{F}=H^{-1}\circ F\circ G$, entonces tenemos

$$(d\overline{F})_x\left(\frac{\partial}{\partial t_k}|_x\right)=\frac{\partial}{\partial t_k}|_{\overline{F}(x)}+\pi_M(dH^{-1})_z\left(\frac{\partial}{\partial t_k}|_z\right)+$$

$$(dH^{-1})_z\pi_M(dF)_y\left(\frac{\partial}{\partial t_k}|_y\right)+(dH^{-1})_z(dF)_y\pi_M(dG)_x\left(\frac{\partial}{\partial t_k}|_x\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial t_k}|_{\overline{F}(x)}+(dH^{-1})_z(-Y^k_z+\pi_M(dF)_y\left(\frac{\partial}{\partial t_k}|_y\right)-(dF)_y(X^k_x).$$

Por hipótesis sabemos que $\omega^k_F(y)=(dF)_y(X^k_y)+Y^k_z$, entonces

$$\omega^k_{\overline{F}}(x)=(d\overline{F})_x(\frac{\partial}{\partial t_k}|_x)-\overline{F}^*(\frac{\partial}{\partial t_k})=$$

$$=(dH^{-1})_z(-\omega^k_F(y)+\pi_M(dF)_y(\frac{\partial}{\partial t_k}|_y))=0.$$

Entonces nuestra deformación en su última coordenada se comporta como la identidad, entonces nada más tenemos que ver que es una deformación trivial para $i\leqslant k-1$. Notemos que $\pi_M(d\overline{F})(\partial/\partial t_i|_G)=\omega^i_{\overline{F}}\circ G=(dH)\omega^{-1}_F-(d\overline{F})\pi_M(dG)(\partial/\partial t)$. Tenemos

$$(dH)(\omega^i_F)=\pi_M(d\overline{F})(dG)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=\pi_M(d\overline{F})(\frac{\partial}{\partial t_i}|_G)+(dG)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=$$

$$\pi_M(d\overline{F})\left(\frac{\partial}{\partial t_i}|_G\right)+(dM)\pi_M(dG)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right).$$

Definimos $\overline{X}_{G(x)} = (dG)_x(X^i_x)$ y $\overline{Y}^i_x = (dH)_{H^{-1}(y)}(Y^i_{H^{-1}(y)})$ campos vectoriales en $M \times U$ y $N \times V$ respectivamente cuyas últimas k-entradas son 0, y además $\omega^i_{\overline{F}}(G(y)) = (d\overline{F})_{G(y)}(\overline{X}_{G(y)}) + \overline{Y}^i_{\overline{F}(G(y))}$. ■

Proposición 4.2.12. *Sea $f : M \to N$ estable bajo k-deformaciones entonces f es infinitesimalmente estable.*

Demostración: Como f es estable bajo k-deformaciones entonces en particular es homotópicamente estable. Sea $\omega \in C^\infty_f(M, TN)$, entonces tenemos que encontrar $X \in C^\infty(TM)$ y $Y \in C^\infty(TN)$ que cumplan nuestra definición. Sea M_f la gráfica de f en $M \times N$, podemos pensar a ω como un campo vectorial sobre M_f de la siguiente manera, $\bar{\omega}_{(x,f(x)} = (0, \omega_x) \in T_xM \bigoplus T_{f(x)}N$, como M es compacta entonces M_f es compacta, por lo tanto, $\bar{\omega}$ tiene soporte compacto, extendemos a $\bar{\omega}$ a todo $M \times N$ de modo que siga teniendo soporte compacto. Entonces $\bar{\omega}$ nos define un flujo maximal $\phi : M \times N \times \mathbb{R} \to M \times N$.

Sea $F : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ donde $F(x,t) = (\pi_N \circ \phi_t(x, f(x)), t)$ donde $\pi_N : M \times N \to N$ es la proyección canónica y $\phi_t : M \times N \to M \times N$ es la solución en el tiempo t. $F(x,0) = (\pi_n \circ \phi_0(x, f(x), t) = (\pi_N(x.f(x)), t) = (f(x), t)$ por lo tanto es una deformación de f. Como f es homotópicamente estable por el teorema de Thom-Levine existen campos vectoriales $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ en $M \times I_\delta$ y $N \times I_\delta$ tales que $\omega_F = (dF)(\overline{X}) + F^*(\overline{Y})$ con $\delta > 0$. Restringimos la última ecuación a $M \times \{0\}$ y obtenemos $\omega_F = (df)(X) + f^*(Y)$ donde $X = \overline{X}|_{M\times\{0\}}$ y $Y = \overline{Y}|_{M\times\{0\}}$, además por como definimos F tenemos que $\omega_F|_{(x,0)} = \omega_x$. ■

Nos gustaría probar la suficiencia de este teorema, aunque la necesidad fue bastante fácil la suficiencia no lo será, primero resolveremos el caso local en el cual podemos ocupamos teorema de Malgrange.

Proposición 4.2.13. *Sea $f : M \to N$ infinitesimalmente estable en $x \in M$ y $f(x) = y$. Sea $F : M \times V \to N \times V$ deformación de f y $\bar{\omega} \in C^\infty_{(x,0)}(F^*T(N \times V))$ con $\pi_V(\bar{\omega}) = 0$. Entonces existen $\bar{\tau} \in C^\infty_{(x,0)}(T(M \times V)$ y $\bar{\eta} \in C^\infty_y(T(N \times V))$ tales que*

$$\bar{\omega} = (dF)(\bar{\tau}) + F^*(\bar{\eta})$$

y $\pi_V = (\bar{\tau}) = \pi_V(\bar{\eta}) = 0$.

Demostración: Sea $A := \{\bar{\omega} \in C^\infty_{(x,0)}(F^*(T(N \times V) \mid \pi_V(\bar{\omega}) = 0\}$ y sea $B := \{(df)(\bar{\tau}) \mid \tau \in C^\infty_{(x,0)} \mid \bar{\tau} \in C^\infty_{(x,0)}(T(M \times V), \pi_V(\bar{\tau}) = 0\}$, como F es una deformación de f no hay ambigüedad si ponemos (df) en lugar de (dF). Por como definimos a A es un $C^\infty_{(x,0)}(M \times V)$, si $\bar{\omega} \in A$, entonces

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

donde $\overline{\omega_i} \in C^\infty_{(x,0)}(M \times V)$, entonces los generadores de A visto como $C^\infty_{(x,0)}(M \times V)$ módulo son $\{F^*(\partial/\partial y_i)\}_{i=1}^n$. Sea $C = A/B$, entonces C es un

$C^{\infty}_{(x,0)}(M \times V)$ módulo finitamente generado por ser cociente de un módulo finitamente generado. Vía F^* C es un $C^{\infty}_{(y,0)}(N \times V)$ módulo, queremos demostrar que C es generado por $\{\pi(F^*(\partial/\partial y_i)\}_{i=1}^{n}$ donde $\pi : A \to C$ es la proyección canónica.

Elegimos un representante ω de $\bar{\omega}$, entonces por el teorema de Taylor tenemos

$$\omega(x,t) = \omega(x,0) + \sum_{i=1}^{k} t_i \omega_i(x,y),$$

donde $\omega(x,0)$ es un campo vectorial sobre f, entonces como f es infinitesimalmente estable existen campos vectoriales X y Y en M y N respectivamente tales que $\omega(x,0) = (df)(X) + F^*(Y)$, extendemos a X a $M \times V$ de modo que $\pi_V(X) = 0$, lo mismo para Y. Aplicamos el teorema de Taylor

$$\omega(x,0) - ((dF)(X) + F^*(Y))(x,t) = \sum_{i=1}^{k} t_i \omega_i'(x,t).$$

$$\omega(x,t) = ((dF)(X) + F^*(Y))(x,t) + \sum_{i=1}^{k} t_i \omega_i''(x,t).$$

Obtenemos esta igualdad de las dos anteriores. Consideremos el espacio vectorial $C/\langle t_i \rangle_{i=1}^{k} C$, la clase de $\bar{\omega}$ está generado por $F^*(Y)$, donde $F^*(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{Y}_i \circ f)(\partial/\partial y_i)$, recordemos que Y cumple que $\pi_V(Y) = 0$, entonces $\{\pi(F^*(\partial/\partial y_i))\}_{i=1}^{n}$ generan a este espacio vectorial.

Consideremos $C/(\mathfrak{m}_{(y,0)}(C^{\infty}(N \times V))C$ espacio vectorial, como $\{t_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathfrak{m}_{(y,0)}(C^{\infty}(N \times V)$ entonces podemos proyectar el espacio del párrafo anterior en este, aplicamos el teorema de Malgrange para obtener lo deseado, por lo tanto,

$$\bar{\omega}_F = (dF)(\overline{X}) + F^*(\sum_{i=1} \left(\overline{Y} \frac{\partial}{\partial y_i} \right),$$

aplicamos el teorema de Thom-Levine (en realidad una versión local de este teorema) para obtener que F es trivial, por lo tanto, f es estable bajo k-deformaciones. ■

Corolario 4.2.14. *Sea f infinitesimalmente estable y $F : M \times V \to M \times V$ una k-deformación de f. Sea $S = \{x_i\}_{i=1}s = f^{-1}(y)$, entonces existe una vecindad U de $S \times \{0\}$ en $M \times V$ y campos vectoriales X y Y en $M \times V$ y $N \times V$ respectivamente con $\pi_V(X) = \pi_V(Y) = 0$ y $\omega_F = (dF)(X) + F^*(Y)$ en U.*

Este corolario se resuelve con una pequeña modificación a la proposición anterior. Ahora procedemos de la misma manera que en la sección anterior y resolveremos el problema en una vecindad de los puntos críticos de f. Recordemos que al conjunto de puntos críticos de f lo denotamos como Σ y al conjunto de puntos críticos en $f^{-1}(y)$ lo denotamos como Σ_y, y además si f es infinitesimalmente estable $f^{-1}(y)$ tiene a lo más $\dim(N)$ puntos.

Teorema 4.2.15. *Sea $f : M \to N$ y $F : M \times V \to N \times V$ deformación de f. Entonces existen campos vectoriales X y Y en $M \times V$ y $N \times V$ respectivamente y una vecindad $Z \subset M \times V$ de $\Sigma \times \{0\}$ tal que $\omega_F = (dF)(X) + F^*(Y)$ en Z.*

Demostración: Recordemos que $f(\Sigma)$ es compacto, entonces existen abiertos $\{U_i\}_{i=1}^{j} \subset M$, $\{V_i\}_{i=1}^{j} \subset N$, $\{W_i\}_{i=1}^{j}$ y $\epsilon > 0$ tales que:

1. $f(\Sigma) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{j} W_i$,
2. $\overline{W_i} \subset V_i$,
3. Para todo $v \in V$ con $|v| < \epsilon$, $F_v^{-1}(\overline{W_i}) \cap \Sigma \subset U_i$,
4. Si $|v| < \epsilon$, entonces $U_i \subset F_v^{-1}(V_i)$ y
5. Existen campos vectoriales X_i y Y_i en $U_i \times B_\epsilon(0)$ y $V_i \times B_\epsilon(0)$ tales que $\pi_V(X_i) = \pi_V(Y_i) = 0$ tales que
$$\omega_F = (dF)(X_i) + F^*(Y_i) \quad \text{ en } U_i \times B_\epsilon(0).$$

Este problema lo resolvemos primero para $f^{-1}(y)$ y ocupamos el corolario anterior, luego por la compacidad existe la j. Elegimos una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i=1}^{j}$ en $\bigcup\limits_{i=1}^{j}$ tal que $\mathrm{sop}(\rho_i) \subset W_i$. Sea U vecindad de Σ tal que $f^{-1}(\overline{W_i}) \cap U \subset U_i$ para todo i. Tomemos una función $\rho : M \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{sop}(\rho) \subset U$ y $\rho \equiv 1$ en una vecindad de Σ.

Sea $X = \sum\limits_{i=1}^{j} \rho F^* \rho_i X_i$ y $Y = \sum\limits_{i=1}^{j} F^*(\rho_i Y_i)$ entonces en una vecindad de $\Sigma \times \{0\}$ obtenemos
$$(dF)(X) + F^*(Y) = (dF)\left(\sum_{i=1}^{j} \rho F^* \rho_i X_i\right) + \sum_{i=1}^{j} F^*(\rho_i Y_i) =$$
$$\sum_{i=1}^{j} F^* \rho_i((dF)(X_i) + F^*(Y_i)) = \omega_F.$$

Lo cual es lo que deseamos. ■

Teorema 4.2.16. *Sea $f : M^m \to N^n$ infinitesimalmente estable, entonces f es estable bajo k-deformaciones.*

Demostración: Si $m < n$ acabamos de demostrarlo. Podemos suponer que f es una sumersión, ya que si demostramos que las sumersiones son estables bajo k-deformaciones entonces con un argumento de particiones de la unidad podemos resolver el problema global. Sea $F : M \times V \to N \times V$ deformación de f, para $v \in V$ pequeña $F_v : M \to N$ es una sumersión. Sea H el subhaz de TM ortogonal al subhaz $\ker(dF)$, entonces $T(M \times V) = \ker(dF) \bigoplus H \bigoplus TV$.

El mapeo restricción $(dF) : H \to TN$ es un isomorfismo, entonces existe X sección de H tal que $(dF)(X) = \omega_F$. Y el teorema de Thom-Levine implica el teorema. ■

Notemos que en el último teorema la k fue arbitraria, entonces si f es infinitesimalmente estable es estable bajo k-deformaciones para cualquier k. Como corolario de esta sección obtenemos

Corolario 4.2.17. *Sea $f : M \to N$ infinitesimalmente estable entonces f es estable.*

4.3. Estabilidad transversal

En esta sección nos interesa demostrar que estabilidad implica estabilidad infinitesimal, para eso introduciremos una nueva noción de estabilidad, que será equivalente a todas las anteriores. Atacaremos el problema de la misma manera que lo hicimos anteriormente, primero atacaremos el problema de una manera local para luego hacerlo globalmente. Recordemos que $G = \mathrm{Dif}(M) \times \mathrm{Dif}(N)$ es un grupo que actúa en $J^k(M,N)$ donde $(g,h) \cdot \sigma = j^k h(y) \circ \sigma j^k g^{-1}(g(x))$ donde $\sigma \in J^k(M,N)_{(x,y)}$. Denotemos a $\mathfrak{D}_\sigma$ a la órbita de σ bajo la acción de G.

Sea $G^k(M)_x \subset J^k(M,M)_{(x,x)}$ y $G^k(N)_y \subset G^k(N)_{(y,y)}$ los grupos de k-jets invertibles, y $G^k = G^k(M)_x \times G^k(N)_{(y,y)}$, por como lo definimos G^k es un grupo de Lie, el cual actúa en $J^k(M,N)_{(x,y)}$ como $(\tau, \xi) \cdot \sigma = \xi \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ donde $\sigma \in J^k(M,N)_{(x,y)}$. Denotemos por $\mathfrak{O}_\sigma$ a la órbita de σ en $J^k(M,N)_{(m,n)}$ bajo esta acción, y $\overline{\mathfrak{O}}_\sigma$ la componente conexa de $\mathfrak{O}_\sigma$ que contiene a σ. Como G^k es un grupo de Lie, entonces $\overline{\mathfrak{O}}_\sigma$ es una subvariedad inmersa de $J^k(M,N)_{(x,y)}$.

Lema 4.3.1. *La componente conexa de la identidad en $GL(n)$ es el conjunto de las matrices de determinante positivo.*

Lema 4.3.2. *Sea $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la traslación por $a \in \mathbb{R}^n$. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces existe un difeomorfismo $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta = T_a$ en U y $\eta = Id_{\mathbb{R}^n}$ fuera de algún compacto.*

Lema 4.3.3. *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo tal que $\phi(0) = 0$. Entonces existe un difeomorfismo $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta = \phi$ en una vecindad del 0 y $\eta = \phi$ fuera de algún compacto.*

Estos lemas no los demostraremos ya que son simples las demostraciones aunque un poco largas y los métodos usados no son de nuestro interés.

Teorema 4.3.4. *$\mathfrak{D}_\sigma$ es una subvariedad inmersa de $J^k(M,N)$.*

Demostración: Sean $x \in M$ y $y \in N$, U y V cartas coordenadas alrededor de x y de y respectivamente, podemos suponer que $U = \mathbb{R}^m$ y $V = \mathbb{R}^n$ con $x = 0$ y $y = 0$. Sea $T : U \times V \times J^k(U,V)_{(x,y)} \to J^k(U,V)$ dado por $T(x', y\prime, \tau) = j^k T_{y'} \circ \sigma j^k T_{x'}$ donde $T_{x'}$ y $T_{y'}$ son las traslaciones por x' y y' respectivamente, el cual es un difeomorfismo por ser una carta de $J^k(M,N)$.

Sea $\mathfrak{D}_\sigma^{U,V}$ la componente conexa de $\mathfrak{D}_\sigma \cap J^k(U,V)$ que contiene a σ, si demostramos que $\mathfrak{D}_\sigma \cap J^k(U,V)$ tiene un conjunto numerable de componentes y que $T(U \times V \times \overline{\mathfrak{D}}_\sigma) = \mathfrak{D}_\sigma^{U,V}$ tendremos el teorema. Sea $\overline{G}^k$ la componente conexa de G^k, entonces es claro que $\overline{\mathfrak{D}}_\sigma = \overline{G}^k \cdot \sigma$. Sea $\tau \in \overline{\mathfrak{D}}_\sigma$ entonces $\tau = \overline{\beta} \circ \sigma \circ \overline{\alpha}^{-1}$ donde $\overline{\alpha} \in \overline{G}^k(M)_x$ y $\overline{\beta} \in G^k(N)_y$, podemos suponer que $\alpha : M \to M$ representante de $\overline{\alpha}$ es un difeomorfismo global, lo mismo para $\beta : N \to N$ representante de $\overline{\beta}$.

Entonces $\tau = j^k\beta(y) \circ \sigma \circ j^k(\alpha^{-1})(x)$. Por otro lado $T(x', y', \tau) = j^k T_{y'} \circ \tau \circ j^k(T_{x'}^{-1})(x')$, podemos asumir que $T_{x'} : M \to M$ y $T_{y'} : N \to N$ son difeomorfismos globales. Por lo tanto, $T(x', y', \tau) = (T_{x'} \circ \alpha, T_{y'} \circ \beta) \cdot \tau \in \mathfrak{D}_\sigma$, entonces tenemos la primera contención.

Para la otra contención, sea $\tau \in \mathfrak{D}_\sigma^{U,V}$, $x' = \alpha(\tau)$ y $y' = \beta(\tau)$. Sea $\rho = j^k(T_{q'}^{-1})(y') \circ \tau \circ j^k T_{x'}(x)$, como las traslaciones son difeomorfismos tenemos que $\rho \in \mathfrak{D}_\sigma$, entonces existen difeomorfismos $(\gamma, \xi) \in G$ tal que $\rho = j^k\xi(y) \circ \omega \circ j^k(\gamma^{-1})(x)$, entonces $\rho \in \mathfrak{D}_\sigma$, entonces $\mathfrak{D}_\sigma \cap J^k(U,V) \subset T(U \times V \times \overline{\mathfrak{D}}_\sigma$, como U y V fueron cartas $J^k(U,V) \cap \mathfrak{D}_\sigma$ tiene un conjunto numerable de componentes. ■

Definición 4.3.5. Sea $f : M^m \to N^n$ y $x \in M$ con $\sigma = j^n f(x)$. Entonces f es *transversalmente* estable en x si $j^n f(x) \pitchfork \mathfrak{D}_\sigma$ en x.

Lema 4.3.6. *Sea $f : M \to N$ estable entonces f es transversalmente estable en $x \in M$ para toda x.*

Este lema es una consecuencia trivial del teorema de transversalidad de Thom. Sea $f : M \to N$, $\omega \in C^\infty(f^*TN)$ y $\overline{\omega} \in J^k(f^*TN)_x$ un representante de ω. Sea $F : M \times I \to N \times I$ deformación de f tal que $dF/dt|_{t=0} = \omega$. Consederemos la curva $t \to j^k F_t(x)$ en $J^k(M,N)$ basada en ω, sea $\lambda(\omega)$ el vector tangente en $t = 0$. Como nuestra definición de estabilidad transversal depende de una condición de transversalidad nos ayudará en el futuro calcular los espacios tangentes.

Proposición 4.3.7. *$\lambda : J^k(f^*TN) \to T_{\overline{\omega}} J^k(M,N)$ es un monomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración: Escribimos a $\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i f^*(\partial/\partial y_i)$ con g_i función suave. Para t

cercano a 0 podemos escribir a $F_t^j = f_j + tg_j + O(t^2)$, entonces

$$j^k F_t^j(0) = \sum_{|a|\leqslant k} \frac{x^a}{a!}\frac{\partial^{|a|}}{\partial x^a}F_t^j(0) = \sum_{|a|} \frac{x^a}{a!}\left(\frac{\partial^{|a|}}{\partial x^a}f_j(0) + t\frac{\partial^{|a|}}{\partial x^a}g_j(0) + O(t^2)\right),$$

derivamos con respecto a t y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}j^k F_t^j(0)|_0 = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{x^a}{\alpha!}\frac{\partial^{|a|}}{\partial x^a}g_j(0).$$

Por esta última expresión λ está bien definida y además lineal. Si $\lambda(\bar{\omega}) = 0$ entonces $\partial^{|a|}/\partial x^a g_j(0) = 0$ para $|a| \leqslant k$, por lo tanto $\bar{\omega} = 0$. ■

Proposición 4.3.8. *La sucesión* $0 \to J^k(f^*TN)_x \xrightarrow{\lambda} T_\omega J^k(M,N) \xrightarrow{(d\alpha)_\omega} T_xM \to 0$ *es exacta, donde* $\alpha : J^k(M,N) \to M$ *es el mapeo fuente.*

Demostración: Como λ es inyectiva y α es una sumersión, nada más nos hace falta probar que $\mathrm{im}(\lambda) = \ker(d\alpha)_\omega$. Como la curva $t \to \alpha \circ j^k F_t(p)$ es constante entonces $(d\alpha)_\omega \circ \lambda = 0$, lo cual implica que $\mathrm{im}(\lambda) \subseteq \ker((d\alpha)_\omega)$. Como estos vectoriales son espacios de dimensión finita nada más nos hace falta probar que tienen la misma dimensión. $\dim(\mathrm{im}(\lambda)) = \dim(V_{n,m}^k) + \dim(N)$, por otro lado, $\dim(\ker(d\alpha)_\omega) = \dim(J^k(M,N)) - \dim(M) = \dim(V_{n,m}^k) + \dim(N)$, por lo tanto la sucesión es exacta. ■

Con la notación del teorema anterior tenemos un mapeo $(d\gamma_1) : C_y^\infty(TN) \to T_\omega\mathfrak{D}_\omega$, dado de la siguiente manera. Sea $\overline{Y} \in C_y^\infty(TN)$ y $Y \in C^\infty(TN)$ un representante de $\overline{Y}$, podemos elegir a Y de modo que tenga soporte compacto, entonces su flujo asociado ϕ es maximal. Consideremos la curva $c(t) = j^k\phi_t(y) \circ \sigma$, como ϕ_t es un difeomorfismo esta curva se encuentra en $\mathfrak{D}_\omega$, sea $(d\gamma_1)(\overline{Y}) = \partial c/\partial t|_{t=0}$. Sea $\pi^k : C_y^\infty(TN) \to J^k(TN)_y$ que a cada germen alrededor de y le asigna su k-jet.

Proposición 4.3.9. *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C_y^\infty(TN) \arrow[r, "(d\gamma_1)"] \arrow[d, "\pi^k"] & T_\omega\mathfrak{D}_\omega \\ J^k(TN)_y \arrow[r, "f^*"] & J^k(f^*TN)_y. \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

Demostración: Sean Y y ϕ como en el párrafo anterior.

$$\lambda \circ f^* \circ \pi^k(Y) = \frac{d}{dt}j^k(\phi_t \circ f)(x)|_{t=0} = \frac{d}{dt}j^k\phi_t(y) \circ \omega|_{t=0} = (d\gamma_1)(Y).$$

La igualdad es válida ya que el flujo asociado a Y es ϕ. ■

De la misma manera que acabamos de definir $(d\gamma_1)$ podemos definir un mapeo $(d\gamma_2) : C_x^\infty(TM) \to T_\omega\mathfrak{D}_\omega$, dado $\overline{X} \in C_x^\infty(TM)$ elegimos un representante $X \in C^\infty(TM)$, como X es compacta X tiene asociado un flujo maximal ψ. Consideramos la curva $c(t) = \omega \circ \psi_t(\psi^{-1}(x))$. De la misma manera podemos definir $(d\gamma_2)(\overline{X}) = dc/dt|_{t=0}$. Sea $\pi_0^k : J^k(TM)_x \to J^0(TM)_x = T_xM$ la proyección canónica.

Proposición 4.3.10. *Sea $\gamma : J^k(TM)_x \to T_\omega\mathfrak{D}_\omega$ dada por $\gamma = -\lambda \circ (df) + (dj^kf)_x \circ \pi_0^k$. Entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
C_x^\infty(TM) \arrow[r, "(d\gamma_2)"] \arrow[d, "\pi^k"] & T_\omega\mathfrak{D}_\omega \\
J^k(TM)_x. \arrow[ur, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u> Ocupando la misma notación, sea $X^k = \pi^k(\overline{X})$. Sea $F_t = f\circ\phi_t$ deformación de f que cumple $(\frac{dF}{dt})|_t = 0 = (df)(X)$. Entonces

$$\lambda \circ (df)(X^k) = \frac{d}{dt}(j^kF_t(x))|_{t=0} = \frac{d}{dt}[j^kf(\psi_t(x)) \circ j^k\psi_t(x)]|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}j^kf(\psi_t(p))|_{t=0} + \frac{d}{dt}\omega \circ j^k\psi_t(x) = (dj^kf)_x\pi^0(X) - \frac{d}{dt}\omega \circ j^k\psi_{-t}(x)|_{t=0} =$$
$$(dj^kf)_x\pi_0^k(X^k) - (d\gamma_2)(X).$$

Esta última igualdad la obtenemos debido a que $\pi^0 = \pi_0^k \circ \pi^k$ y $\psi_{-t} = \psi_t^{-1}$, despejando la última igualdad obtenemos lo deseado. ■

Proposición 4.3.11. $(d\gamma_1) + (d\gamma_2) : C_x^\infty(TM) \bigoplus C_y^\infty(TN) \to T_\omega\mathfrak{D}_\sigma \to 0$ *es exacta.*

<u>Demostración:</u> Sea $v \in T_\omega\mathfrak{D}_\sigma$ y $c : I \to \mathfrak{D}_\sigma$ una curva que representa a v. Supongamos que existe una curva de difeomorfismos en $\mathrm{Dif}(M) \times \mathrm{Dif}(N)$ de la forma $t \to (g_t, h_t)$ tal que $c(t) = j^kh_t(y) \circ \omega \circ j^kg_t(g^{-1}(t))$, primero demostraremos que si esto pasa entonces v estará en la imagen de $(d\gamma_1) + (d\gamma_2)$, luego demostraremos que es posible encontrar esta curva de difeomorfismos. Sean

$$X(x) = \frac{\partial g_t}{\partial t}(x)|_{t=0} \quad Y(y) = \frac{\partial h_t}{\partial t}(y)|_{t=0}$$

campos vectoriales en M y N respectivamente, como estamos resolviendo un problema a nivel de gérmenes podemos suponer que Y tiene soporte compacto.

Sean ϕ y ψ los flujos maximales asociados a X y Y respectivamente. Entonces la curva $\bar{c}(t) = j^k\psi_t(y) \circ \omega \circ j^k\phi_{-t}(\phi_t(x))$ satisface

$$\frac{d\bar{x}}{dt}|_{t=0} = \frac{dc}{dt}|_{t=0} = v,$$

por como la definimos. Entonces

$$(d\gamma_1) + (d\gamma_2)(\overline{X}.\overline{Y}) = \frac{d\bar{c}}{dt} = v,$$

ya que $dg/dt|_{t=0} = d\phi_t/dt_{t=0}$, lo mismo para h_t y ψ_t. Entonces ahora demostraremos que existe la curva de difeomorfismos. Recordemos que si U y V cartas alrededor de x y y entonces $T(U \times V \times \overline{\mathfrak{O}}_\omega)$ era la componente conexa que contenía a ω en $\mathfrak{O}_\omega \cap J^k(U,V)$ donde $\overline{\mathfrak{O}}_\omega$ era la órbita de ω bajo la acción de G^k. Podemos suponer que la curva $c(t)$ se encuentra en el conjunto $T(U \times V \times \overline{\mathfrak{O}}_\omega)$. Entonces $T^{-1}(c(t)) = (x(t), y(t), \omega(t))$. Entonces $c(t) = j^k(T_{y(t)}) \circ \omega(t) \circ j^k(T^{-1}_{(x(t)})$, como $\omega(t)$ es una curva en $\overline{O}_\omega$, existe una curva $(\bar{g}_t, \bar{h}_t)$ en $G^k(M)_x \times G^k(N)_y$ donde estos eran los k-jets invertibles de modo que $\bar{g}_t \circ \sigma \circ \bar{h}_t^{-1} = \omega(t)$. Sea g_t el polinomio cuyo k-jet es $\bar{g}_t$, elegimos h_t de la misma manera, podemos asumir que g_t y h_t son difeomorfismos globales. ■

Teorema 4.3.12. *Sea $f : M^m \to N^n$ suave y $x \in M$. Si f es transversalmente estable en x entonces f es infinitesimalmente estable en x.*

<u>Demostración:</u> Sea $\omega \in J^n(f^*(TN))_x$, para demostrar que f es infinitesimalmente estable en x tenemos que encontrar $X \in J^n(TM)$ y $Y \in J^n(TN)$ tales que $\omega = (df)(X) + f^*(Y)$. Sea $\lambda(\omega) \in T_\omega J^n(M,N)$, existen $v \in T_\omega\mathfrak{O}_\omega$ y $u \in T_xM$ tales que $\lambda(\omega) = v + (dj^n f)_x(u)$, por el lema anterior existen $\overline{X} \in C^\infty_x(TM)$ y $\overline{Y} \in C^\infty_{f(x)}(TN)$ tales que $v = -(d\gamma_2)(\overline{X}) + (d\gamma_1)(\overline{Y})$. Sean $X = \pi^n(\overline{X})$ y $Y = \pi^n(\overline{Y})$, aunque la notación sea igual notemos que estamos hablando de π_m distintas, tenemos $v = \lambda \circ f^*(Y) - \gamma(X)$ entonces

$$\lambda(\omega) = \lambda \circ (df)(X) - (dj^m f)_x \circ \pi^n_0(X) + \lambda \circ f^*(Y) + (dj^m f)_x(u).$$

Aplicamos $(d\alpha)_\omega$ de ambos lados,

$$0 = u - \pi^n_0(X).$$

Entonces $\lambda(\omega) = \lambda \circ (df)(X) + \lambda \circ f^*(Y)$, pero λ es inyectiva, por lo tanto $\omega = (df)(X) + f^*(Y)$. ■

Nos gustaría pasar este resultado a un ámbito global, como siempre nuestro problema son las autointersecciones, para eso introducimos la subvariedad inmersa $\mathfrak{O}^s_\omega \subset J^k_s(M,N)$ que es la órbita de ω en $J^k_s(M,N)$ bajo la órbita de $\mathrm{Dif}(M) \times \mathrm{Dif}(N)$.

Proposición 4.3.13. $\mathfrak{O}^s_\omega$ *es una subvariedad inmersa de $J^k_s(M,N)$.*

Demostración: Sea $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in J^k_s(M,N)$, dividiremos la prueba en dos casos:

1. Sea $\beta(\omega_1) = \cdots = \beta(\omega_s)$, a estos elementos los llamaremos diagonales. Elegimos vecindades $\{U_i\}_{i=1}^s$ vecindades disjuntas de $\{\alpha(\omega_u\}_{i=1}^s$ y V una vecindad coordenada de $\beta(\omega_1)$. Definimos $\overline{T} : U_1 \times \cdots \times U_s \times V \times \overline{\mathfrak{D}}_{\omega_1} \times \cdots \times \overline{\mathfrak{D}}_{\omega_s} \to J^k_s(U_1, V) \times \cdots \times J^k_s(M,N)$ dada por

$$\overline{T}(x_1, \ldots, x_s, y, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) = (T(x_1, y, \sigma_1), \ldots, T(x_s, y, \sigma_s)).$$

   De manera similar demostramos que estas son las cartas de $\mathfrak{D}^s_\omega$, el único detalle que vale la pena mencionar es que si tenemos difeomorfismos definidos en U_i no necesariamente iguales si $i \neq j$ lo podemos extender a uno global, como les pedimos a las vecindades que fueran ajenas esto es posible inductivamente.

2. Supongamos que ω no es diagonal, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s = 2$ con $\beta(\omega_1) \neq \beta(\omega_2)$. Como ser subvariedad inmersa es algo local podemos suponer que $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$, entonces $\mathfrak{D}^s_\omega = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \cap Z$, donde $Z = \{(\sigma_1, \sigma_2) \in J^k_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid \beta(\omega_1) \neq (\omega_2)$. ■

Lema 4.3.14. *Sea $f : M \to N$ estable, entonces f es transversalmente estable.*

Esto es una consecuencia trivial de la proposición anterior y el teorema de multitransversalidad de Thom.

Teorema 4.3.15. *Sea $f : M \to N$ transversalmente estable, entonces f es infinitesimalmente estable.*

Demostración: Sea $y \in N$, y $S = \{x_i\}_{i=1}^s \subset f^{-1}(y)$, donde $1 \leqslant s \leqslant n+1$, definimos $\lambda^s : J^m(f^*TN)_S = \bigoplus_{i=1}^s J^n(f^*TN)_{x_i} \to T_\omega J^n_s(M,N) = \bigoplus_{i=1}^s T_{\omega_i} J^n(M,N)$ como la suma entrada a entrada de λ, definida de esta manera λ^s es inyectiva. Entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \to J^n(f^*TN)_S \xrightarrow{\lambda^s} T_\omega J^n_\omega(M,N) \xrightarrow{(d\alpha^s)_\omega} T_{(x_1,\ldots,x_s)} M^{(s)} \to 0.$$

Definimos $(d\gamma_1^S) : C^\infty_y(TN) \to T_\omega \mathfrak{D}^s_\omega$ de la siguiente manera, sea Y un campo vectorial en N de soporte compacto y $\overline{Y}$ su clase en $C^\infty_q(TN)$, sea ϕ el flujo maximal asociado a Y, sea $c(t) = j^k_s \phi_t(y) \circ \omega$, sea $(d\gamma_1^s)(\overline{Y}) = (\frac{dc}{dt})|_{t=0}$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C^\infty_y(TN) \arrow[r, "(d\gamma_1^s)"] \arrow[d, "\pi^k"] & T_\omega \mathfrak{D}^s_\omega \\
J^n(TN)_y \arrow[r, "f^*"] & J^n(f^*TN)_S. \arrow[u, "\lambda^s"']
\end{tikzcd}$$

De manera análoga podemos definir $(d\gamma_2^s) : C^\infty(TM)_S \to T_\omega\mathfrak{D}_\omega^s$ y $\gamma : J^n(TN)_S \to T_\omega\mathfrak{D}_\omega^s$ dada por $\gamma = -\lambda^s \circ df + (dj_s^m f)_s \circ \pi_0^n$, de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C_S^\infty(TM) \arrow[r, "(d\gamma_2^s)"] \arrow[d, "\pi^k"] & T_\omega\mathfrak{D}_\omega^s \\
J^k(TM)_x. \arrow[ur, "\gamma^s"] &
\end{tikzcd}$$

Los diagramas anteriores conmutan debido a que en sus funciones coordenadas conmutan. De la misma manera $(d\gamma_1^s) + (d\gamma_2^s) : C^\infty(TM)_S \bigoplus C^\infty(TN)_s \to T_\omega\mathfrak{D}_\omega^s$, por lo tanto, $J^n(f^*TN)_S = (df)(J^n(TM)_S) + f^*(J^n(TN)_y)$. ■

Teorema 4.3.16. *Sea M compacta y $f : M \to N$ suave. Entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *f es estable.*
2. *f es infinitesimalmente estable.*
3. *f es estable bajo k-deformaciones.*
4. *f es transversalmente estable.*

Demostración: 3 implica 1 es el lema 4.2.2. 3 si y sólo si 2 es la proposición 4.2.12 y el teorema 4.2.16. 2 implica 1 es el corolorario 4.2.17. 4 implica 2 es el teorema 4.3.15. 1 implica 4 es el lema 4.3.14. ■

Lo que podemos preguntarnos ahora es la existencia de mapeos estables, es decir, dadas dos variedades arbitrarias, ¿existen los mapeos estables? o ¿son éstos un conjunto denso? En el caso cuando la dimensión del dominio es mayor a la del codominio las sumersiones son estables. En la siguiente sección analizaremos los casos más simples de mapeos estables y en el siguiente capítulo analizaremos el caso general, seguiremos asumiendo que el dominio siempre es compacto.

4.4. Ejemplos

4.4.1. Funciones de Morse

Recordemos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función de Morse si $j^1 f \pitchfork S^1$, por lo tanto, las funciones de Morse forman un conjunto denso, entonces si una función es estable esta necesariamente tiene que ser una función de Morse. Lamentablemente el regreso a esta afirmación es falso, debido al problema de las autointersecciones, ya que en un punto crítico la derivada es el morfismo cero. Por suerte, las funciones de Morse cuyos puntos criíticos tienen imágenes distintas también son un conjunto residual y como en este caso no hay autointersecciones formulamos la siguiente proposición.

Proposición 4.4.1. *Sea $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, f es estable si y sólo si f es una función de Morse cuyos puntos críticos tienen imágenes distintas.*

Demostración: La necesidad es clara por el párrafo anterior. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ función de Morse cuyos puntos críticos tienen imágenes distintas. Sea $\omega \in C^{\infty}(f^*T\mathbb{R})$, como $T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ω es de la forma $\omega(x) = (f(x), \omega(x))$, entonces podemos pensar que $\omega \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$. De la misma manera podemos pensar a un campo vectorial Y en N como $Y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Como f es una función de Morse y M es compacta, los puntos críticos de f son un conjunto finito. Sea $Y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\omega(x) = Y \circ f(x)$ en los puntos críticos de f, esto es posible por lo que acabamos de aclarar. Ahora tenemos que encontrar $X \in C^{\infty}(TM)$ tal que $\omega = (df)(X)$ cuando $\omega(x) = 0$, esto ya que podemos sustituir a ω por $\omega - Y \circ f$. Alrededor de cada punto $x \in M$ elegimos una vecindad U_x de la siguiente manera:

1. Si x es un punto regular de f, elegimos U_x de tal modo que si $x' \in U_x$ entonces $(df)_{x'} \neq 0$. Elegimos un campo vectorial X^x en U_x tal que $(df)(X^x) \neq 0$.
2. Si x es un punto crítico de f elegimos una vecindad de tal modo que f tenga la forma $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2$, asumiremos que los coeficientes de las x_i serán positivos, pero la demostración es igual si no lo son.

Entonces $\{U_x\}_{x\in M}$ es una cubierta de M, entonces existe una subcubierta finita $\{U_{x_i}\}_{i\in I}$ para algún conjunto de índices I, sea $\{\rho_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad asociada a esta subcubierta. Escogemos campos vectoriales $\{X^i\}_{i\in I}$ en M de la siguiente manera:

1. Si x_i es un punto regular
$$X^i(x) = \begin{cases} \frac{\omega(x)\rho_i(x)X^{x^i}(x)}{(df)_x(X^{x^i}(x))} & \text{si } x \in U_{x_i} \\ 0 & \text{si } x \notin U_{x_i}. \end{cases}$$
2. Si x_i es un punto crítico entonces $\omega(x_i) = 0$ y $\rho_i\omega = \sum\limits_{j=1}^{m} h_j x_j$ por el lema de Hadamard (podemos tomarnos a las vecindades U_{x_i} convexas), además

las h_j tienen soporte compacto debido a que $\rho_i\omega$ lo tiene. Sea

$$X^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

en U_{x_i} y lo extendemos suavemente fuera de U_x de modo que tenga soporte compacto. Dividimos entre 2 debido a que la derivada de una función de Morse tiene un 2 multiplicando.

Sea $X = \sum_{i \in I} X^i$, ahora nada más tenemos que ver si efectivamente este es el campo vectorial que necesitamos.

1. Si x es un punto regular tenemos que

$$(df)_x(X(x)) = \frac{\omega(x)\rho_i(x)(df)_x X^{x^i}(x)}{(df)_x(X^{x^i})(x))} = \omega(x)\rho_i(x) = \omega(x).$$

2. Si x es un punto crítico

$$(df)_x(X(x)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j(x)}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_1^2 + \cdots + x_m^2) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} h_j x_j = \rho_i(x)\omega(x) = \omega(x).$$

Por lo tanto, $(df)(X) = \omega$. ■

4.4.2. Inmersiones 1 a 1

Proposición 4.4.2. *Sea* $f : M \to N$ *con* $\dim(N) \geqslant 2\dim(M) + 1$. *Entonces* f *es estable si y sólo si* f *es una inmersión 1 a 1.*

Demostración: Necesidad. Si f es una inmersión 1 a 1 entonces cualquier función equivalente a f es una inmersión 1 a 1. Entonces si f es estable existe una vecindad $W \in C^\infty(M, N)$ donde todas las funciones son equivalentes a f. Por el teorema del encaje de Whitney tenemos que existe $g \in W$ inmersión 1 a 1 equivalente a f, por lo tanto, f es una inmersión 1 a 1.

Suficiencia. Sea ω campo vectorial sobre f, entonces elegimos Y campo vectorial definido en $f(M)$ de modo que $\omega = f^*Y$, extendemos a Y a todo N. ■.

4.4.3. Inmersiones con cruces normales

Definición 4.4.3. Sea $f : M \to N$ suave y $f^{(s)} : M^{(s)} \to N^s$ la restricción de $\prod f : M^s \to N^s$ a $M^{(s)}$. Entonces f es un *mapeo con cruces normales* si $f^{(s)} \pitchfork \Delta N^s$ para toda $s > 1$.

Que un mapeo tenga cruces normales es una condición de transversalidad por el teorema de multitransversalidad de Thom tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.4.4. *El conjunto de mapeos con cruces normales es denso en* $C^\infty(M, N)$.

Corolario 4.4.5. *Las inmersiones con cruces normales son densas en el conjunto de inmersiones.*

Proposición 4.4.6. *Si $f : M \to N$ es una inmersión estable entonces f es una inmersión con cruces normales.*

Es claro que las inmersiones 1 a 1 son inmersiones con cruces normales debido a que si $f : M \to N$ es una inmersión 1 a 1, entonces $f^{(s)}(M^{(s)}) \cap \Delta Y^s = \varnothing$ para toda $s > 1$. Nos gustaría demostrar la suficiencia de esta proposición, primero demostraremos algunos lemas que nos ayudarán para ver este hecho.

Lema 4.4.7. *Sea $f : M \to N$ inmersión con cruces normales, sea $y \in N$. Como M es compacta y f una inmersión, entonces $f^{-1}(y) = \{x_i\}_{i \in I}$ es un conjunto finito. Entonces $\{(df)_{x_i}(T_{x_i}(M)\}_{i \in I}$ están en posición general, vistos como subespacios de $T_y N$.*

Demostración: Sea $J \subseteq I$ con cardinalidad s, renombramos a $(df)_{x_j}(T_{x_j} M)$ como H_j para toda $j \in J$. Denotemos a $q \in \Delta N$ a $q = (q, \ldots, q)$. Por hipótesis tenemos que

$$T_q N^s = \bigoplus_{j \in J} H_j + T_q \Delta N.$$

Por el teorema de la dimensión tenemos que

$$s \cdot \dim(N) = \dim(\bigoplus_{j=1}^{s} H_j) + \dim(N) - \dim(\bigoplus_{j=1}^{s} H_j \cap T_q \Delta N^s).$$

Despejando $\sum_{j=1}^{s} \operatorname{codim}(H_j) = \operatorname{codim}(\bigoplus_{j=1}^{s} H_j \cap T_q \Delta N^s)$, pero $\bigoplus_{j=1}^{s} H_j \cap T_q \Delta N^s = \bigcap_{j=1}^{s} H_j$, identificando a $T_q \Delta N^s$ con $T_q N$. ■

Lema 4.4.8. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, $\{H_i\}_{i=1}^s \subset V$ familia de subespacios de V. Sea $W = \bigcap_{i=1}^{s} H_i$, entonces existen $\{F_i\}_{i=1}^s \subset V$ familia de subespacios de V tales que*

1. *$V = D \bigoplus (\bigoplus_{i=1}^{s} F_i)$,*
2. *$H_i = D \bigoplus (\sum_{i \neq j} F_j)$ y*
3. *$V = F_i \bigoplus H_i$.*

Demostración: Sea $D_i = \bigcap_{i \neq j} H_j$. Sea F_i espacio complementario a D en D_i para toda i. Tenemos que

$$\dim(F_i) = \dim(D_i) - \dim(D) =$$

$$\dim(V) - \operatorname{codim}(\bigcap_{i \neq j} H_j) - \dim(V) + \operatorname{codim}(\bigcap_{i=1}^{s} H_i) = \operatorname{codim}(H_i)$$

Entonces

$$\dim(D) + \sum_{i=1}^{s} \dim(F_i) = \dim(D) + \sum_{i=1}^{s} \operatorname{codim}(H_i) =$$

$$\dim(D) + \operatorname{codim}(\bigcap_{i=1}^{s} H_i) = \dim V.$$

Para ver que la suma de 1 es directa nos tomamos $f_1 \in F_1$, supongamos que $f_1 = d + f_2 + \cdots + f_s$ donde $d \in D$ y $f_i \in F_i$ para toda $i \neq 1$. Por como definimos a las F_i, $f_i \in D_i - D$, entonces $f_i \in H_j$ para cada $i \neq j$, entonces $d + f_2 + \cdots + f_s \in H_1$, pero $F_1 \cap H_1 = 0$ ya que $F_1 \subset D_1 - D$, por lo tanto, $f_1 = 0$. Lo mismo podemos hacer para los demás F_j, entonces la suma es directa.

Como $D \subset H_i$ y $F_j \subset H_i$ para cada $i \neq j$, entonces $H_i \supset H_i = D \bigoplus (\sum_{i \neq j} F_j)$, pero $\operatorname{codim}(H_i = D \bigoplus (\sum_{i \neq j} F_j)) = \dim(F_i) = \operatorname{codim} H_i$, por lo tanto, por el teorema de la dimensión se da la igualdad. Juntamos las igualdades de 1 y 2 para obtener 3. ■

Definición 4.4.9. Sea $L \subset M$ subvariedad y X un campo vectorial en M, decimos que X *es tangente a* L si para toda $x \in L$ se cumple que $X_x \in T_x L$.

Lema 4.4.10. *Sean* $\{H_i\}_{i=1}^{s} \subset \mathbb{R}^m$ *familia de subespacios vectoriales en posición general. Sean* $\{X_i\}_{i=1}^{s}$ *campos vectoriales en* H_i *respectivamente para toda* i*. Entonces existe* X *campo vectorial en* $\mathbb{R}^m$ *tal que para toda* i*,* $X - X_i$ *es tangente a* H_i*.*

Demostración: Elegimos $\{F_i\}_{i=1}^{s} \subset \mathbb{R}^m$ como en el lema anterior. Sea $\pi_i : \mathbb{R}^n \to H_i$ la proyección ortogonal para cada i. Como el haz tangente a $\mathbb{R}^m$ es trivial, podemos pensar a X_i como una función de H_i en $\mathbb{R}^m$. Sea $Y_i = X_i \circ \pi_i$ campo vectorial en $\mathbb{R}^m$, esto para toda i. Sea $Z_i = Y_i - \pi_i \circ X_i$. Por como nos tomamos a π_i, $\operatorname{im}(Z_i) \subset F_i$. Sea $X = \sum\limits_{i=1}^{s} Z_i$. Notemos que por el lema anterior tenemos que $\pi_j(Z_i) = Z_i$ para $i \neq j$. Entonces

$$\pi_i(X - X_i) = X - Z_i - \pi_i(X_i) = X - Y_i + \pi_i(Y_i) - \pi_i(X_i) = X - X_i,$$

por lo tanto, $X - X_i \in H_i$. ■

Definición 4.4.11. Sean $\{M_i\}_{i=1}^{s} \subset M$ familia de subvariedades de M. Sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{s} M$, decimos que $\{M_i\}_{i=1}^{s}$ están en *posición general en* x si $\{T_x M_i\}_{i=1}^{s} \subset T_x M$ están en posición general.

Aunque parezca que nos hemos desviado un poco de nuestra meta, el siguiente lema nos ayudará a relacionar lo que hemos hecho.

Lema 4.4.12. *Sean* $\{M_i\}_{i=1}^{s} \subset M^m$ *subvariedades en posición general en* x*. Entonces existen una vecindad* U *de* x *en* M*, una carta* $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ *y* $\{H_i\}_{i=1}^{s} \subset \mathbb{R}^n$ *subespacios tales que* $M_i \cap U = \phi^{-1}(H_i)$ *para toda* $1 \leqslant i \leqslant s$*.*

Demostración: Sea $m_i = \operatorname{codim}(M_i)$ en M. Para toda i existe una vecindad U_i de x en M_i, y funciones $\{f_{i,j}\}_{j=1}^{m_i}$ reales tales que

$$M_i \cap U_i = \{y \in W \mid f_{i,1}(y) = \cdots = f_{i,m_i}(y) = 0\}.$$

Estas funciones las podemos obtener de la definición de subvariedad. Sea $V = \bigcap\limits_{i=1}^{s} U_i$ y $n = m - m_1 - \cdots - m_s > 0$, sabemos que es un número positivo debido a que los espacios se encuentran en posición general. El conjunto $\{f_{i,j}\}_{(1 \leqslant i \leqslant s)(1 \leqslant j \leqslant m_i)}$ tiene cardinalidad $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i$ y el subespacio de $T_x M$ que se anula en $(df_{i,j})_x$ para todas i y j no es nada más que $\bigcap\limits_{i=1}^{s} T_x M_i$ cuya dimensión es $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i$, ya que los espacios se encuentran en posición general. Como nada más tenemos este número de $f_{i,j}$ entonces éstas deben ser linealmente independientes en $(T_x M)^*$.

Elegimos funciones $\{g_j\}_{j=1}^{n}$ reales definidas en V tales que $\{(dg_j)_x\}_{j=1}^{n}$ sean una base de $(T_xM)^*$ con las $(df_{i,j})_x$. Sea $\phi : V \to \mathbb{R}^m$ dada por $\phi(y) = (f_{1,1}(y), \ldots, g_1(y), \ldots, g_n(y))$. Por como construimos esta función, es un difeomorfismo local en x para alguna vecindad U de x en M, elegimos a esta U como la vecindad deseada y nuestra ϕ cumple lo deseado por construcción. ■

Teorema 4.4.13. *Sea $f : M \to N$ inmersión. Si f tiene cruces normales entonces f es infinitesimalmente estable.*

Demostración: Sea $y \in N$ y $\{x_i\}_{i=1}^{s} = f^{-1}(q)$. Demostraremos que existen vecindades W de y en N y vecindades $\{U_i\}_{i=1}^{s}$ vecindades de cada x_i respectivamente tales que cumplan:

1. $U_i \cap U_j = \varnothing$ para $i \neq j$,
2. $f|_{U_i}$ es una inmersión propia 1 a 1,
3. $f(U_i) \subset W$ y
4. $f^{-1}(W) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i$.

Primero elegimos vecindades $\{V_i\}_{i=1}^{s}$ vecindades de cada x_i respectivamente que cumplan 1 y 2, además existe una vecindad W de y tal que $f^{-1}(W) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} V_i$. Sea $U_i = V_i \cap f^{-1}(W)$ para toda i. Sea $N_i = f(U_i)$, por 2, tenemos que $\{N_i\}_{i=1}^{s}$ es una familia de subvariedades de N. Entonces por el lema anterior $\{N_i\}_{i=1}^{s}$ están en posición general en y. Elegimos a W como la U del lema anterior.

Para cada $y \in N$ tenemos una vecindad W_y en N que cumple los incisos anteriores, entonces $\{W_y\}_{y \in N}$ es una cubierta abierta de N, y como f es continua $\{f^{-1}(W_y)\}_{y \in N}$ es una cubierta abierta de X, como X es compacta podemos substraer una subcubierta finita $\{f^{-1}(W_i)\}_{i=1}^{r}$, elegimos una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i=1}^{r}$ subordinada a esta cubierta. Sea ω un campo vectorial a lo largo de f, tenemos que $\omega = \sum\limits_{i=1}^{r} \rho_i \omega$, de aquí obtenemos que nuestro problema lo podemos resolver nada más en una W_i para luego pegar las soluciones de todos.

Entonces W es unión de las subvariedades $\{f(U_i)\}_{i=1}^{s}$. Definimos un campo vectorial en Y_i en $f(U_i)$ como $Y_i = \omega \circ (f|_{U_i})^{-1}$. Entonces existe un campo vectorial Y definido en W tal que $Y|_{f(U_i)} - Y_i$ es tangente a $f(U_i)$. Extendemos Y a todo N de modo que $Y \equiv 0$ fuera de W, además Y tiene soporte compacto ya que las Y_i lo tienen. Sea $\omega' = \omega - Y \circ f$, el cual para todo $x \in U_i$ se tiene que $\omega'(x) = \omega(x) - Y(f(x))$ es tangente a $f(U_i)$. Por lo tanto, existe X_i campo vectorial definido en U_i tal que $(df)(X_i) = \omega'$ con soporte compacto, entonces existe $X = X_i$ en U_i para toda i con $X \equiv 0$ fuera de $f^{-1}(W)$ y que cumple lo deseado. ■

Por el teorema de Thom, tenemos que las inmersiones que tienen cruces normales son estables. Ahora, cuando $\dim(N) = 2 \cdot \dim(M)$ las inmersiones son densas en $C^\infty(M, N)$, entonces si un mapeo es estable, este necesariamente tiene que ser una inmersión, entonces bajo estas hipótesis tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.4.14. *Supongamos que* $2 \dim M \leqslant \dim N$*. Entonces* $f : M \to N$ *es estable si y sólo si* f *es una inmersión con cruces normales.*

Para finalizar este ejemplo notemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una inmersión con cruces normales, para todo $y \in N$ tenemos que este conjunto no puede tener cardinalidad mayor a 2, ya que, si $x_1, x_2, x_3 \in M$ son tales que $f(x_1) = f(x_2) = (f_3) = y$, entonces $(df)_{x_1}(T_{x_1}\mathbb{R}), (df)_{x_2}(T_{x_2}\mathbb{R}), (df)_{x_3}(T_{x_3}\mathbb{R})$ están en posición general en $T_y\mathbb{R}^2$. Como f es inmersión las dimensiones de estos espacios es 1 lo cual es equivalente a que su codimensión sea 1. Entonces la suma de las codimensiones es 3 y la codimensión de la intersección a lo más es 2. Entonces, de manera más general tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.4.15. *Sea* $f : M^m \to N^n$ *una inmersión estable y* $y \in N$*, entonces* $f^{-1}(y)$ *tiene a lo más* $n/(n - m)$ *elementos.*

4.4.4. Sumersiones con dobleces

Cuando $\dim(M) \geqslant \dim(N)$ demostramos que las sumersiones son estables, ahora debilitaremos un poco nuestras hipótesis para poder saber exactamente cuáles son todos los mapeos estables, entonces en esta sección asumiremos que la dimensión del dominio es mayor o igual a la del codominio.

Definición 4.4.16. Sea $f : M \to N$ tal que $j^1 f \pitchfork S_1(M, N)$. Llamaremos a $x \in S_1(M, N)$ *punto de doblez* de f si $T_x(S_1(f)) + \ker(df)_x = T_x M$, donde $S_1(f) = (j^1 f)^{-1}(S_1(M, N))$.

Esta definición tiene sentido ya que $\operatorname{codim}(S_1(f)) = \operatorname{codim}(S_1(M, N)) = m - n + 1$ y $\dim(\ker(df)_x) = m - n + 1$, por lo tanto, si es posible que existan los puntos de doblez y además la suma será directa, es decir, los subespacios $T_x(S_1(f))$ y $\ker(df)_x$ se intersecan en el 0 de $T_x M$ nada más.

Definición 4.4.17.
1. Diremos que $f : M \to N$ es una *sumersión con dobleces* si sus únicos puntos críticos son puntos de doblez.
2. Si $f : M \to N$ es una sumersión con dobleces a $S_1(f)$ lo llamaremos el *lugar de doblez*.

Lema 4.4.18. *Sea* $f : M \to N$ *sumersión con dobleces, entonces* f *restringida a* $S_1(f)$ *es una inmersión.*

La demostración es clara de la definición de punto de doblez. Notemos que si $f : M \to N$ es una sumersión, entonces es una sumersión con dobleces y si $N = \mathbb{R}$ las sumersiones con dobleces son las funciones de Morse.

Supongamos que $f : M \to N$ es una sumersión con dobleces, entonces f en $(M - S_1(f))$ tenemos que si $\omega \in C^\infty(f^*TN)$ entonces existen X campo vectorial definido en $(M - S_1(f))$ y Y campo vectorial en N tal que $\omega = (df)(X) + f^*(Y)$, entonces f es infinitesimalmente estable en esta parte de su dominio, si suponemos que $f|_{S_1(f)}$ además de ser una inmersión, es una inmersión con cruces normales, entonces $f|_{S_1(f)}$ también es infinitesimalmente estable, por lo tanto, si $f : M \to N$ es una sumersión con dobleces tal que $f_{S_1(f)}$ tiene cruces normales entonces es estable. Antes de enunciar este resultado como se debe demostraremos un lema para demostrar la suficiencia de esto.

Lema 4.4.19. *Sea $f : M \to N$ sumersión con dobleces $x \in S_1(f)$. Entonces existen coordenadas alrededor de x y de $f(x)$, tal que f bajo estas coordenadas es de la siguiente forma:*

$$(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_{n-1}, \pm x_n^2, \ldots, \pm x_m^2).$$

<u>Demostración:</u> Como este es un resultado local podemos suponer que $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$, y que $f|_{S_1(f)}$ es la inclusión canónica, $S_1(f)$ tiene codimensión $m-n+1$, por lo cual tiene dimensión $n-1$, entonces estamos pensando a $S_1(f)$ como $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^m$. En estas coordenadas f es de la forma

$$(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x)).$$

Si $y \in S_1(f)$ entonces $f(y) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$. Además tenemos que $\partial g/\partial x_i$ cuando $n \leqslant i \leqslant m$. Entonces por el lema de Hadamard tenemos que

$$g(y) = \sum_{i,j \geqslant n} h_{i,j}(y) x_i x_j,$$

donde la matriz $\{h_{i,j}\}_{i,j \geqslant n}$ es no singular, ya que si lo fuera entonces elegimos coordenadas tales que $\{h_{i,j}\}_{i,j \geqslant n}$ tiene entradas ± 1 y por lo menos un 0. Entonces f sería de la forma

$$(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_{n-1}, \pm x_n^2 \pm \cdots \pm x_s)$$

donde $s < m$. Pero si esto pasara tendríamos que $S_1(f)$ sería una subvariedad de codimensión $s - n + 1 < m - n + 1$ lo cual no es posible por el teorema de la dimensión. Por lo tanto, la matriz $\{h_{i,j}\}_{i,j \leqslant n}$ es un invertible, por lo tanto existe un cambio de coordenadas donde la matriz nada más tiene ± 1 en la diagonal y 0 en lo demás. ■

Lema 4.4.20. *Sea $x \in M$ punto de doblez de f y ω campo vectorial a lo largo de f en una vecindad U de x tal que $\omega|_{S_1(f) \cap U} = 0$. Entonces existe X campo vectorial en U tal que $\omega = (df)(X)$ en U.*

Demostración: Elegimos coordenadas como en el lema anterior. En estas coordenadas $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\partial/\partial y_i)$, elegimos X campo vectorial en U que en sus primeras $n-1$ entradas $X_i = \omega_i$ y que las demás entradas valgan 0. Es claro del lema anterior que definida así X cumple la igualdad. ■

Teorema 4.4.21. *Sea $f : M \to N$ sumersión con dobleces. Entonces f es estable si y sólo si $f|_{S_1(f)}$ tiene cruces normales.*

Demostración: Necesidad. Nada más es necesario demostrar que $f|_{S_1(f)} : S_1(f) \to N$ es infinitesimalmente estable. Sea ω campo vectorial a lo largo de $f|_{S_1(f)}$. Extendemos a ω a todo M, entonces existen campos vectoriales X en M y Y en N tal que $\omega = (df)(X) + f^*(Y)$. Como $TM|_{S_1(f)} = TS_1(f) \bigoplus \ker(df)$, sea $X' = \pi(X)$ donde $\pi : TM \to TS_1(f)$ es la proyección canónica. Entonces $\omega = (df|_{S_1(f)})(X') + f^*Y$.

Suficiencia. Sea ω un campo vectorial a lo largo de f. Existen campos vectoriales X' en $S_1(f)$ y Y' en N tales que $\omega = (df|_{S_1(f)})(X') + f^*(Y')$. Extendemos X' a todo M, a este campo vectorial lo denotaremos X. Sea $\omega' = \omega - (df)(X) - f^*(Y')$.

Definido de esta manera $\omega'|_{S_1(f)} = 0$. Aplicamos el lema anterior en cada punto de $x \in M$ para luego pegar todo con particiones de la unidad. ■

Capítulo 5

Clasificación de singularidades

Recordemos que $S_r(M,N) \subset J^1(M,N)$ es una subvariedad de M, si $f : M \to N$ es tal que $j^k f \pitchfork S_r(M,N)$ tenemos que $(j^1 f)^{-1}(S_r(M,N)) = S_r(f)$ es una subvariedad de M, entonces $f|_{S_r(f)} : S_r(f) \to N$ es un mapeo suave entre variedades, en este capítulo estudiaremos esta clase de mapeos. Seguiremos asumiendo que la variedad del dominio es compacta.

Definición 5.0.1. Sea $f : M \to N$, decimos que f es 1-genérico si $j^1 f \pitchfork S_r$ para toda $r \in \mathbb{N}$.

5.1. Teorema de Whitney para mapeos 1-genéricos entre 2-variedades

En esta sección asumiremos que todas las variedades tienen dimensión 2. Sea $f : M \to N$ un mapeo 1-genérico. Recordemos que $S_r(M,N)$ es una subvariedad de $J^1(M,N)$ de codimensión r^2. Entonces cuando $S_1(f)$ es una subvariedad de M de dimensión 1 y $S_2(f)$ tiene codimensión 4, lo cual no tiene sentido. Entonces, si $x \in S_1(f)$ pueden pasar dos cosas por el teorema de la dimensión:

1. $T_x S_1(f) \bigoplus \ker(df)_x = T_x M$ y
2. $T_x S_1(f) = \ker(df)_x$.

El caso 1 es el caso de un punto de doblez; en esta sección estudiaremos el caso 2. Sea X un campo vectorial a lo largo de f tal que para todo punto de

$x \in S_1(f)$, $X(x) \in \ker(df)_x$, es decir, X es tangente a $S_1(f)$. Sea $\rho : M \to \mathbb{R}$ suave tal que $\rho(S_1(f)) = 0$, entonces la función $(df)(\rho)$ tiene un cero en x.

Definición 5.1.1. Decimos que $x \in M$ es una *cúspide sumple* si este cero es un cero simple.

Ahora enunciamos el teorema principal de esta sección, el cual también es el título de esta sección.

Teorema 5.1.2. *Teorema de Whitney para mapeos* 1*-genéricos entre* 2*-variedades Sea $f : M \to N$ 1-genérico y $x \in S_1(f)$. Entonces*

a. Si 1 pasa, existen coordenadas alrededor de x tal que f es de la forma $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2^2)$.

b. Si 2 pasa, existen coordenadas alrededor de x tal que f es de la forma $(x_1, x_2) \to (x_1, x_1x_2 + x_2^3)$.

Demostración: El primer inciso es el caso de sumersiones con dobleces, que ya fue analizado en el capítulo anterior nada más tenemos que resolver el caso 2. Como este es un resultado local podemos asumir que $M = N = \mathbb{R}^2$ y que $x = 0$. Podemos elegir coordenadas alrededor de 0 tal que f sea de la forma $(x_1, x_2) \to (x_1, g(x_1, x_2))$ ya que (df) tiene rango 1 en 0. Además en estas coordenadas tenemos que

$$(df)_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\partial g/\partial x_1(0) = \partial g/\partial x_2(0) = 0$, además $d(\partial g/\partial x_2(0)) \neq 0$, ya que si no lo cumpliera tendríamos que

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_0 = 0.$$

Sea $\gamma = 1/2(\partial^2 g/\partial x_1^2)(0)$, consideremos el mapeo $(x_1, x_2) \to (x_1, \gamma x_1^2)$, el cual tiene el mismo 2-jet en 0 que f por como definimos γ, pero esta última función siempre es de rango 1.

El conjunto $S_1(f)$ son los ceros de $\partial g/\partial x_2$, entonces en cada punto de $S_1(f)$ el núcleo de (df) está generado por $\partial/\partial x_2$, entonces como tenemos una cúspide simple en 0 tenemos que

$$h(0) = \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2^3} \neq 0.$$

Por el teorema de Malgrange podemos escribir a x_2^3 de la siguiente manera;

$$x_2^3 = 3h_2(x_1, g)x_2^2 + h_1(x_1, h)x_2 + h_0(x_1, h),$$

donde h_1, h_2, h_0 son funciones definidas en una vecindad de $g(0)$ que se anulan en $g(0)$. Despejando la ecuación anterior obtenemos

$$(x_2 - h_2)^3 + h_3(x_2 - h_4) = h_5.$$

Donde h_3, h_4 y h_5 son algunas funciones adecuadas. Evaluamos en $x_1 = 0$ y obtenemos que el lado derecho es de la forma $x_2^3 + O(|x|^4)$, y como $h(0, x_2) = x_2^4 + O(|x_2|^4)$ la igualdad sigue siendo igualdad si y sólo si $\partial h_5/\partial y_2(0) \neq 0$. El primer término de la serie de Taylor de g es un múltiplo de x_1x_2, comparando los dos lados de la igualdad obtenemos que $\partial h_5/\partial y_1(0) = \partial h_3/\partial y_1(0) \neq 0$. Entonces tenemos los siguientes cambios de coordenadas

$$(x_1, x_2) \to (h_3(x_1, g), x_2 - h_2(x_1, g)) \quad \text{y} \quad (y_1, y_2) \to (h_3(y_1, y_2), h_5(y_1, y_2)).$$

Juntando estos dos cambios de coordenadas obtenemos lo deseado. ■

Teorema 5.1.3. *Existe un conjunto residual en $C^\infty(M, N)$ tal que si f pertenece a este conjunto entonces sus únicas singularidades son puntos críticos y cúspides.*

Demostraremos este teorema en un contexto más general en el futuro, pero para demostrar esto de una manera más fácil necesitaremos introducir una nueva clase de variedades para luego usar el teorema de Thom.

5.2. Derivada intrínseca

Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, recordemos que las transformaciones lineales de V a W de corango r es una subvariedad de $\mathrm{Hom}(V, W)$, este conjunto era una subvariedad de $\mathrm{Hom}(V, W)$. Sea $A \in L_r(V, W)$, $K_A = \ker(A)$ y $L_A = \mathrm{coker}(A)$. Sea $N_A : T_A \mathrm{Hom}(V, W)/T_A L_r(V, W)$, recordemos que $T_A \mathrm{Hom}(V, W) \sim \mathrm{Hom}(V, W)$, entonces definimos el mapeo $\phi = \pi \circ i : T_A \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(K_A, L_A)$ donde $i : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(K_A, W)$ es la restricción y $\pi : \mathrm{Hom}(K_a, W) \to \mathrm{Hom}(K_A, L_A)$ es la proyección.

Lema 5.2.1. *El núcleo de ϕ es el espacio tangente a A en $L_r(V, W)$.*

Demostración: Sea n el rango de A, entonces tomándonos una base adecuada A es de la forma

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vemos a $L_r(V, W)$ como la imagen inversa del 0 del mapeo

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & Z \end{bmatrix} \to Z - US^{-1}T,$$

donde S es una matriz de $n \times n$, Z de $r \times r$, T de $n \times r$ y U de $r \times n$, entonces $T = U = 0$ en A, por lo cual la derivada de este mapeo en A es ϕ por como elegimos nuestra base para A. ■

Corolario 5.2.2. *ϕ induce un isomorfismo entre N_A y $\mathrm{Hom}(K_A, L_A)$.*

Sean E y F haces vectoriales sobre M, y $\rho : E \to F$ morfismo de haces. Podemos pensar a $\rho : M \to \mathrm{Hom}(E, F)$, sea $x \in M$. La derivada intrínseca es la siguiente composición;

$$T_x M \overset{(d\rho)_x}{\to} T_{\rho(x)} \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(K_{\rho(x)}, L_{\rho(x)} \cong N_{\rho(x)}$$

donde $K_{\rho(x)}$ y $L_{\rho(x)}$ denotan al núcleo y al conúcleo respectivamente, y $N_{\rho(x)}$ al espacio normal, siendo el último mapeo la proyección canónica.

5.3. Singularidades $S_{r,s}$

Sea $f : M \to N$ 1-genérico. Entonces tenemos que $f|_{S_r(f)} : S_r(f) \to N$ es un mapeo entre variedades, la pregunta más natural que podemos hacernos es acerca de los puntos críticos de este mapeo. Denotamos al conjunto $S_{r,s}(f)$ al conjunto de puntos donde la derivada de $f|_{S_r(f)}$ disminuye de rango s. Entonces $x \in S_{r,s}(f)$ si y sólo si $(df)_x$ interseca a $T_x S_r(f)$ en un espacio de dimensión s. En el caso de 2 variedades $S_{1,0}(f)$ corresponde a los puntos de doblez y $S_{1,1}(f)$ a las cúspides.

Recordemos que $S_r \sim L_r(TM, TN)$. Dado $\sigma \in S_r(M, N)$ con $\alpha(\sigma) = x$ y $\beta(\sigma) = y$, denotamos $K = \ker(\sigma)$ y $L = \mathrm{coker}(\sigma)$, definimos haces vectoriales en S_r denotados por K y L, donde K es el haz que a cada $\sigma \in S_r$ le adjunta K, de manera análoga definimos L. Entonces el haz normal a S_r en $J^1(M, N)$ es $\mathrm{Hom}(K, L)$.

Sean V y W espacios vectoriales, denotamos al producto tensorial de V y W como $V \otimes W$, si $\{v_i\}_{i=1}^m \subset V$ y $\{w_j\}_{j=1}^n \subset W$ son bases de V y W respectivamente entonces, $\{v_i \otimes w_j\}_{(1 \leqslant i \leqslant m)(1 \leqslant j \leqslant n)}$ es base de $V \otimes W$. En el caso que $V = W$ al subespacio de $V \otimes V$ generado por $\{v_i \otimes v_i\}_{i=1}^m$ lo denotamos por $V \circ V$. Al espacio complementario a éste último lo denotaremos por $V \wedge V$. Entonces $V \otimes V = (V \circ V) \bigoplus (V \wedge V)$, a las proyecciones canónicas las denotaremos como $\pi_\circ : V \otimes V \to V \circ V$ y $\pi_\wedge : V \otimes V \to V \wedge V$. Entonces $\pi_\circ$ nos induce un morfismo $\pi_\circ^* : \mathrm{Hom}(V \circ V, W) \to \mathrm{Hom}(V \otimes V, W)$. Definimos el mapeo $\xi : \mathrm{Hom}(V \otimes V, W) \to \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V, W))$ dado por $\xi(f(v \otimes w)) = (f(v))(w)$. Sea $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)_s = \xi \circ \pi_\circ^*(L_s(V, \mathrm{Hom}(V, W))^{-1}$.

Dado un haz vectorial E sobre M cuya fibra es V podemos definir el haz vectorial $E \otimes E$ cuyas fibras son $V \otimes V$, además con la ayuda de $\pi_\circ$ también tenemos al haz vectorial $E \circ E$ cuyas fibras son $V \circ V$. Sea $S_r^{(2)} \subset J^2(M,N)$ la preimagen de S_1 bajo la proyección canónica. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S_r^{(2)} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ S_r \arrow[r] & \mathrm{Hom}(K \circ K, L). \end{tikzcd}$$

Donde la flecha $S_r^{(2)} \to \mathrm{Hom}(K \circ K, L)$ es el mapeo inducido por la derivada intrínseca, y los otros mapeos son las proyecciones. Ocupando la misma notación que hemos ocupado tenemos la siguiente proposición;

Proposición 5.3.1. $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)_s$ *es una subvariedad de* $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)$ *de codimensión*

$$\frac{1}{2}m(m+1) - \frac{n}{2}(m-s)(m-s+1) - s(m-s).$$

Demostración: Sea E el haz canónico de $G(s,V)$, sea F el haz vectorial de $G(s,V)$ cuya fibra en $x \in G(s,V)$ es $V/E_x = F_x$ donde E_x es la fibra de x en E. El conjunto $\mathrm{Hom}(F_x \circ F_x, W)_0$ es un subconjunto abierto de $\mathrm{Hom}(F_x \circ F_x, W)$, entonces $\mathrm{Hom}(F \circ F, W)_0 = \bigcup\limits_{x \in G(s,V)} \mathrm{Hom}(F_x \circ F_x, W)_0$ es un subhaz fibrado de $\mathrm{Hom}(F \circ F, W)$.

La proyección canónica $\pi_x : V \to F_x$ induce un mapeo $\pi_x \otimes \pi_x : V \otimes V \to F_x \otimes F_x$, además el mapeo $\pi_x : V \circ V \to F_x \circ F_x$ es suprayectivo. Entonces la imagen de $\pi^* : \mathrm{Hom}(F \circ F, W) \to \mathrm{Hom}(V \circ V, W)$ es $\bigcup\limits_{t \geqslant s} \mathrm{Hom}(V \circ V, W)_t$. Más aún la restricción de este mapeo a $\mathrm{Hom}(F \circ F, W)$ es una biyección con $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)_s$. Para probar que $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)$ es una subvariedad mencionamos la siguiente proposición:

Proposición 5.3.2. *El mapeo* $\pi^* : \mathrm{Hom}(F \circ F, W)_0 \to \mathrm{Hom}(V \circ V, W) - \bigcup\limits_{t > s} \mathrm{Hom}(V \circ V, W)_s$ *es una inmersión propia 1 a 1.*

Denotamos a la preimagen de $\mathrm{Hom}(K \circ K, L)_s$ en $S_r^{(2)}$ por $S_{r,s}$, el cual es una subvariedad de la misma codimensión. ■

Teorema 5.3.3. *Sean* $f : M \to N$ *1 genérico y* $x \in M$. $x \in S_{r,s}(f)$ *si y sólo si* $j^2 f(x) \in S_{r,s}$

Demostración: Sea $j^1 f(x) = \sigma \in S_r$. El espacio normal a S_r en $J_1(M,N)$ en σ es $\mathrm{Hom}(K_\sigma, L_\sigma)$, entonces la derivada de $j^1 f$ en x induce un mapeo

$$T_x M \to \mathrm{Hom}(K_\sigma, L_\sigma)$$

dado por la derivada intrínseca. Este mapeo es suprayectivo ya que $j^1 f \pitchfork S_r$ en x y su núcleo es el espacio tangente a $S_r(f)$ en x. Si $x \in S_{r,s}(f)$ el núcleo de la derivada intrínseca interseca al núcleo de $(df)_x$ en un subespacio de dimensión s, entonces la restricción de la derivada intrínseca a K_σ tiene núcleo de dimensión s, lo cual es equivalente a que $j^2 f(x) \in \mathrm{Hom}(K_\sigma \circ K_\sigma, L_\sigma)_s$. La suficiencia es una consecuencia de la demostración anterior.■

El teorema de transversalidad de Thom nos asegura que el conjunto de funciones que satisfacen $j^2 f \pitchfork S_{r,s}$ es un conjunto residual. Un mapeo que interseca transversalmente a $S_{r,s}$ para toda $r, s \in \mathbb{N}$ se llama 2-genérico.

5.4. Estratificación de Thom-Boardman

De la misma manera que definimos $S_{i,j}$ podemos definir $S_{i,j,k}$, si $f : M \to N$ es 2-genérico definimos a $S_{i,j,k}$ como los puntos en $S_{i,j}$ tales que $f|_{S_{i,j}}$ tiene corango k. Si sucediera que $S_{i,j,k}$ fuera una subvariedad de M, podríamos repetir este proceso para definir $S_{i,j,k,l}$, y así sucesivamente.

Teorema 5.4.1. *Sea $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_k \geqslant 0$ sucesión de números enteros, podemos definir $S_{r_1,\ldots,r_k}$ subhaz fibrado de $J^k(M,N)$ tal que si $j^1 f$ es transversal a $S_{r_1,\ldots,r_l}$ para $l < k$, entonces $S_{r_1,\ldots,r_k}(f)$ está bien definido y además*

$$x \in S_{r_1,\ldots,r_k}(f) \iff j^k f(x) \in S_{r_1,\ldots,r_k}.$$

Si este teorema fuera cierto, llamaremos a $f : M \to N$ *mapeo de Boardman* si $j^k f$ interseca transversalmente a $S_{r_1,\ldots,r_k}$ para toda k, entonces por el teorema de transversalidad tenemos que los mapeos de Boardman forman un conjunto residual, por lo tanto, si una función es estable entonces necesariamente será un mapeo de Boardman, lamentablemente no demostraremos este teorema. Nos gustaría que los mapeos de Boardman fueran estables. Por el momento lo mejor que podemos hacer es el siguiente teorema.

Teorema 5.4.2. *El conjunto de mapeos de Boardman que satisfacen que para cualquier conjunto de multíndices $\{I_j\}_{j=1}^s$, $\{x_j\}_{j=1}^s \subset M$ distintos con $x_j \in S_{I_j}$ respectivamente tal que $f(x_1) = \cdots = f(x_s) = y$ entonces $\{(df)_{x_j}(T_{x_j} S_{I_j}(f)\}_{j=1}^s$ están en posición general en $T_y N$, es un conjunto residual.*

Demostración: El mapeo $\beta : S_{I_1} \times \cdots \times S_{I_s} \to N \times \cdots \times N$ es una sumersión, entonces $\beta^{-1}(\Delta N)$ es una subvariedad de $S_{I_1} \times \cdots \times S_{I_s}$. Por el teorema de multitransversalidad existe un conjunto residual en $C^\infty(M,N)$ tal que $j^k f \pitchfork \beta^{-1}(\Delta N)$ si f se encuentra en este conjunto. Además es claro que si $j^k f$ es transversal a S_{I_j} entonces $j^k_s f$ es transversal a $S_{I_1} \times \cdots \times S_{I_s}$. Entonces la preimagen de $S_{I_1} \times S_{I_s}$ es $S_{I_1}(f) \times \cdots \times S_{I_s}$ sin $M^{(s)}$, denotaremos a esta subvariedad como L. Entonces $j^k_s f : L \to S_{I_1} \times \cdots \times S_{I_s}$ es transversal a $\beta^{-1}(\Delta N)$, entonces $f : L \times \cdots \times L \to N \times \cdots \times N$ es transversal a ΔN. ■

Lamentablemente los mapeos de Boardman que satisfacen la condición de este teorema no necesariamente son estables para ciertas dimensiones de nuestras variedades.

5.5. Fin

Como vimos en el teorema de Malgrange, las dimensiones de nuestras variedades juegan un papel importante en la teoría de transformaciones estables. En los casos donde las transformaciones eran densas teníamos dimensiones muy particulares. Ahora, dada cierta condición en las dimensiones estudiaremos cuando los mapeos estables no son densos.

Teorema 5.5.1. *Sean M y N variedades de dimensión n^2. Entonces existe $f : M \to N$ 1-genérico tal que $S_n(f)$ es no vacío.*

Demostración: Como la transversalidad es un problema local nada más tenemos que construir f alrededor de algún punto $x \in M$. En coordenadas elegimos f de modo que su polinomio de Taylor de grado 2, tenga todos sus coeficientes distintos de 0, luego por un argumento de particiones de la unidad la podemos extender a todo M de modo que fuera de esta vecindad no tenga puntos críticos deseados. ■

Lema 5.5.2. *Sean M y N variedades, $W \subset C^\infty(M, N)$ abierto. Entonces $A_W = \{\sigma \in J^k(M, N) \mid \exists f \in W$ y $x \in M$ con $\sigma = j^k f(x)\}$ es abierto en $J^k(M, N)$.*

Demostración: Sea $\sigma = j^k f(x) \in A_W$. Elegimos cartas coordenadas U alrededor de x y V alrededor de $f(x)$ tales que $f(\overline{U}) \in V$. Sea $\rho : M \to \mathbb{R}$ cuyo soporte esté dentro de U y que valga 1 en x. Sea

$$g_h = \begin{cases} f + \rho h & \text{en } U \\ f & \text{en } M - U, \end{cases}$$

donde h es un polinomio de grado menor o igual a k. Para h cercana al polinomio 0 tenemos que $g_h \in W$. Entonces $j^k g_h(x)$ cuando h es cercana al polinomio 0 nos da una vecindad de σ en A_W. ■

Proposición 5.5.3. *Sean M y N variedades de dimensión n^2. Sea $f : M \to N$ 1-genérico. Si $S_n(f)$ es no vacío y $n > 2$ entonces f no es estable.*

Demostración: Sabemos que $\dim(S_n(f)) = 0$, entonces $S_n(f)$ es un conjunto finito de puntos $\{x_i\}_{i=1}^s \subset M$. Sea $\omega_i = j^2 f(x_i)$. Si suponemos que f es estable existe una vecindad W_f de f en $C^\infty(M, N)$ tal que todas las funciones en esta vecindad son equivalentes a f. Entonces A_{W_f} definido como en el lema anterior es abierto en $J^2(M, N)$. Si $\alpha \in A_{W_f}$ y también está en $S_n^{(2)}$, debe ser conjugada a una de nuestras ω_i.

Entonces $A_{W_f} \cap S_n^{(2)}$ está cubierto por un conjunto numerable de órbitas de las ω_i bajo la acción de $\mathrm{Dif}(M) \times \mathrm{Dif}(N)$. Sea $\tau = j^1 f(x_1)$, $K_\tau = \ker(\tau)$ y $L_\tau = \mathrm{coker}(\tau)$. Entonces existe un abierto en $\mathrm{Hom}(K_\sigma \circ K_\sigma, L_\sigma)$ cubierto por un conjunto numerable de órbitas de $\mathrm{GL}(K_\sigma) \times \mathrm{GL}(L_\sigma)$. Si las órbitas tuvieran menor dimensión que $\mathrm{Hom}(K_\sigma \circ K_\sigma, L_\sigma)$, tendrían medida cero por ser subvariedades inmersas. Para concluir esta proposición demostraremos el siguiente lema para ver que una de las órbitas tiene que ser abierta.

Lema 5.5.4. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n. Sea $G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$. Entonces G tiene una órbita abierta en $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)$ sólo cuando $n > 3$.*

Demostración: La dimensión de $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)$ es $n^2(n+1)/2$ y la de G es $2n^2$. Entonces la órbita de G tiene dimensión menor o igual a la de G. Tenemos que $n^2(n+1)/2 \leqslant 2n^2$ cuando $n \leqslant 3$, entonces se cumple lo deseado. Ahora, si $n = 3$, las dimensiones son iguales, pero G contiene un subgrupo que actúa trivialmente en $\mathrm{Hom}(V \circ V, W)$, dado por $\langle cId_V, c^2 Id_W \rangle$ donde $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto no se puede dar la igualdad. ∎

Para finalizar mencionamos que Mather demostró que los mapeos estables entre dos variedades M^m y N^n no son densos cuando n y m cumplen cualquiera de las siguientes condiciones:

1. $n < 7(n-m) + 8$ cuando $n - m \geqslant 4$,
2. $n < 7(n-m) + 9$ cuando $3 \geqslant n - m \geqslant 0$,
3. $n < 8$ cuando $n - m = -1$,
4. $n < 6$ cuando $n - m = -2$ y
5. $n < 7$ cuando $n - m \leqslant -3$.

Bibliografía

[1] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential Topology.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[2] Th. Bröcker, K. Jänich. *Introduction to Differential Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[3] M. Golubitsky, V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities.* Springer-Verlag, New York, 1973.

[4] V. Arnold, S. Gussein-Zade, A. Varchenko *Singularities of Differentiable Maps.* Birkhaüser, Boston, 1985.