UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS DE FRAGMENTOS DE *ZFC*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

FRANCISCO SALVADOR MARADIAGA DÍAZ

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto
Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Hoja de datos del Jurado.

1. Datos del alumno
Maradiaga
Díaz
Francisco Salvador
55660918
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
308582790

2. Datos del tutor
Dr
Osvaldo Alfonso
Téllez
Nieto

3. Datos del sinodal 1
M en C
Rafael
Rojas
Barbachano

4. Datos del sinodal 2
Dr
David
Meza
Alcántara

5. Datos del sinodal 3
Dra
Gabriela
Campero
Arena

6. Datos del sinodal 4
M en C
Luis Jesús
Turcio
Cuevas

7. Datos del trabajo escrito
Modelos de fragmentos de ZFC
67 p
2017

„Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.“

Ludwig Wittgenstein

A mi hermana Giselle y a mis padres Francisco y Dora.

Resumen

El presente trabajo expone las condiciones en las que se presenta la igualdad entre tres *modelos* de la teoría de conjuntos empleados para demostrar la independencia de los axiomas de *reemplazo*, *potencia* y *unión*. Los primeros dos se encuentran en el libro Kunen (2013) y el tercero en el artículo Oman (2010).

El primer capítulo se divide en dos secciones: conceptos y modelos de la teoría de conjuntos. En la primera sección se presentan las nociones de cerradura transitiva, la clase de los conjuntos bien fundados y la función rango, así como sus propiedades, mismas que fundamentan el desarrollo de este trabajo. En la segunda sección se obtienen condiciones suficientes para que se satisfagan los axiomas de Zermelo-Fraenkel-Elección (ZFC).

El segundo capítulo contiene las nociones de conjuntos de rango menor que κ ($R(\kappa)$), conjuntos hereditarios menores que κ ($H(\kappa)$) y conjuntos pseudo-hereditarios de cardinalidad menor a κ (H_κ). Además, se muestra que, dependiendo de κ, las colecciones de tales conjuntos son modelos estándar de las teorías ZC, $ZFC - P$, $ZFC - U$ respectivamente, donde ZC es ZFC sin el axioma de reemplazo, P denota al axioma de potencia y U al de unión.

El tercer capítulo consiste de un análisis comparativo entre los modelos presentados a lo largo de los capítulos anteriores, en el cual se establecen las características que debe tener un cardinal κ para que se cumpla la relación: $H(\kappa) = H_\kappa = R(\kappa)$.

Debido a la temática y el lenguaje empleado en el presente trabajo, es recomendable que el lector tenga nociones básicas sobre la teoría de conjuntos y lógica de primer orden.

Índice general

Capítulo 1

Los modelos de la teoría de conjuntos

La independencia de los axiomas de ZFC y la consistencia de sus fragmentos forman parte de la fundamentación de la teoría de conjuntos; hoy en día, para la demostración de la independencia de algunos axiomas y consistencia de sus fragmentos se emplea la *teoría de modelos*.

Los *modelos* de la teoría de conjuntos son *colecciones* de conjuntos con una *relación* binaria (no obligatoriamente la pertenencia ($\in$)) llamadas *clases*[1], en las cuales ciertos axiomas se satisfacen. La aplicación de la teoría de modelos a la teoría de conjuntos toma gran importancia a partir de los resultados de Gödel en 1938 y Cohen en 1963, quienes construyeron los modelos que demuestran la independencia de la *hipótesis del continuo* (HC) de ZFC.

El propósito de este capítulo es establecer las características que debe cumplir una clase para que sea modelo de algún fragmento de ZFC, para ello, es necesario definir algunos conceptos y mostrar algunas de sus propiedades.

[1]Adicionalmente, la clases son determinadas mediante una fórmula con una variable libre en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

1.1. Conceptos

Uno de los casos *patológicos* que se consiguió eliminar durante la *axiomatización* de la teoría de conjuntos fue el de la existencia de un conjunto x tal que $x \in x$, debido a que se obtendría una cadena infinita $x \ni x \ni x \ni x \ldots$. Para evitar esto, se formuló el axioma de fundación, el cual, establece que cualquier conjunto no vacío es ajeno con al menos uno de sus elementos.

En esta sección se establece una caracterización de la colección de conjuntos que cumplan el enunciado de este axioma. Para lo cual, se emplean los conceptos de la+ *cerradura transitiva*, la *clase* de los *conjuntos bien fundados* y el *rango* de un conjunto.

Algunos de los resultados de este capítulo son *deducibles* en ZFC sin el axioma de fundación (ZFC^{-}), es decir, para su demostración no se utiliza el axioma de fundación a menos que se indique lo contrario.

La notación empleada se basa en el Kunen (2013) y el libro Jech (2013). Así, con κ, λ y μ, se denota a los cardinales; α, β y γ, a los ordinales. Además, ω denota al primer ordinal infinito y $s(n)$ denota al *sucesor* de un conjunto n. También, se anexa el apéndice A, en el cual se encuentra la teoría básica de conjuntos (TBC), la cual se comprende de los axiomas de extensión, comprensión, par y unión.

Cerradura transitiva

Se dice que un conjunto x es *transitivo* si y sólo si para cualquier $y \in x$ se obtiene $y \subseteq x$. De una forma parecida, aunque haciendo un abuso de notación en el caso de una clase propia A, en el cual $a \in A$ denota que a cumple la fórmula que define a A, así como $a \subseteq A$ denota que todos los elementos de a cumplen la fórmula que define a A. Una clase A es transitiva si y sólo si para cualquier $a \in A$ se obtiene $a \subseteq A$.

La *cerradura transitiva* del conjunto A debe ser un conjunto T transitivo que contenga a A ($T \supseteq A$). Además, tiene que ser el conjunto *más pequeño* que cumpla eso respecto a la contención ($\subseteq$), es decir, no hay un conjunto transitivo H distinto a T tal que $A \subseteq H \subseteq T$. En principio, no es posible asegurar la existencia de la cerradura transitiva de un conjunto en ZFC^-, sin embargo, el siguiente teorema lo garantiza.

Teorema 1.1.1 *Para todo conjunto A, existe un conjunto transitivo que lo contiene. Más aún, entre los conjunto transitivos que contienen a A, existe uno que es mínimo respecto a la contención.*

Demostración: Sea A un conjunto. Recursivamente sobre ω se define lo siguiente:

$$A_0 = A$$
$$A_{s(n)} = \bigcup A_n$$

Donde $s(n)$ denota al sucesor de un conjunto, el cual es posible usar gracias a la proposición A.1.7.

De esta manera, para cualquier $n < \omega$, A_n es conjunto; y, por el axioma de reemplazo, es posible construir $\{A_n : n < \omega\}$. Así, por el axioma de unión, $T = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$ es un conjunto.

Ahora, por la definición, $A = A_0 \subseteq T$, por lo cual $A \subseteq T$. Además, si $x \in T$ y $y \in x$, entonces $x \in A_n$ para algún $n < \omega$ y como $y \in x$, $y \in A_{s(n)}$, de esta forma $y \in T$, es decir, T es un conjunto transitivo. Por otra parte, sea R un conjunto transitivo tal que $A \subseteq R$. Por inducción en ω se muestra que $A_n \subseteq R$ para cualquier $n < \omega$.

- Si $n = 0$, entonces, por definición, $A_n = A_0 = A$ y, por hipótesis $A \subseteq R$, por lo cual $A_0 \subseteq R$.
- Si $n = s(m)$ para algún $m < \omega$ tal que $A_m \subseteq R$, entonces $A_n = \bigcup A_m$. Así, para cualquier $x \in A_n$ hay una $y \in A_m$ tal que $x \in y$. Además, por hipótesis, $A_m \subseteq R$,

entonces $y \in R$ y como R es transitivo, $x \in R$, así $A_n \subseteq R$. Por lo tanto, $A_n \subseteq R$ para cualquier $n < \omega$.

Entonces, si $x \in T$, $x \in A_n$ para alguna $n < \omega$ y por lo anterior $x \in R$. Por lo cual, $T \subseteq R$. De esta forma, $T \subseteq R$ para cualquier R transitivo tal que $A \subseteq R$, es decir, T es el mínimo conjunto (respecto a la contención) tal que $A \subseteq T$. $\square$

Definición 1.1.2 *Para cualquier conjunto A se denota por $CT(A) = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$ a la cerradura transitiva de A.*

Por el teorema 1.1.1, $CT(A)$ es un conjunto para cualquier conjunto A. Adicionalmente, $CT(A)$ es el mínimo conjunto transitivo respecto a la contención ($\subseteq$) tal que $A \subseteq CT(A)$.

Como se muestra en las siguientes observaciones, para cualquier conjunto A, $CT(A)$ **contiene** a las cerraduras transitivas de los elementos de A. Además, la cerradura transitiva respeta el *orden* dado por la contención.

Observación 1.1.3 *Sean A y B conjuntos. Si $B \in A$, entonces $CT(B) \subseteq CT(A)$.*

Demostración: Sean A y B tales que $B \in A$. Como $A \subseteq CT(A)$, $B \in CT(A)$. Además, $CT(A)$ es un conjunto transitivo, así $B \subseteq CT(A)$ y por ser $CT(B)$ mínimo con respecto a la contención, $CT(B) \subseteq CT(A)$. $\square$

Observación 1.1.4 *Sean A y B conjuntos. Si $B \subseteq A$, entonces $CT(B) \subseteq CT(A)$.*

Demostración: Sean A y B tales que $B \subseteq A$. Como $A \subseteq CT(A)$, $B \subseteq CT(A)$. Además, $CT(A)$ es un conjunto transitivo, así, por ser $CT(B)$ mínimo respecto a la contención, $CT(B) \subseteq CT(A)$. $\square$

Los conjuntos bien fundados

Se dice que un conjunto X es **bien fundado** por la *pertenencia* ($\in$) siempre y cuando para cualquier subconjunto no vacío de X, exista un elemento $\in$-minimal. Cuando algún conjunto A cumpla que $CT(A)$ es bien fundada por $\in$ se dice que es un **conjunto bien fundado**. La colección de los conjuntos bien fundados se denota por BF. También, es usual decir para un conjunto X bien fundado por $\in$ que $\in$ es buena fundación en X.

Una de las características de BF es la posibilidad de asignarle un *nivel* a los conjuntos que le pertenecen considerando el orden $\langle BF, \in \rangle$. Para que esto suceda se necesita del **rango** de un conjunto x ($\rho(x)$), donde el *nivel asignado* a cada conjunto $x \in BF$ es un ordinal α si y sólo si $\rho(x) = \alpha$.

El rango de un conjunto

Para la definición de *rango* se emplea la teoría ZFC ya que requiere del teorema de *recursión transfinita*, el cual necesita del axioma de fundación. Es más, BF es modelo de ZFC (Kunen, 2013, cap. II), de esta manera, el rango de un conjunto está bien definido en la clase BF.

Definición 1.1.5 *(ZFC) Sea A una clase. Se define recursivamente $\rho : A \longrightarrow OR$, donde OR es la clase de todos los ordinales y para cada $a \in A$, $\rho(a) = \rho_{A,\in} = \bigcup\{s(\rho(b)) : b \in a\}$. Si $a \notin A$, entonces $\rho(a) = \emptyset$.*

El comportamiento del rango en la clase BF se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: En la clase BF con la relación $\in$ se obtiene lo siguiente

- $\rho(\emptyset) = 0$
- $\rho(\{\emptyset\}) = 1$
- $\rho(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = 2$
- $\rho(\omega) = \omega$

Para que el rango divida de manera *correcta* a los elementos de BF por niveles, es necesario que cualquier $x \in BF$ cumpla que $\rho(x) > \rho(y)$ para todo $y \in x$; lo cual se garantiza por lo siguiente

Observación 1.1.6 *Sean $a, b \in BF$. Si $b \in a$, entonces $\rho(b) < \rho(a)$.*

Demostración: Por la definición, $\rho(a) = \bigcup\{s(\rho(b)) : b \in a\}$. Como $\rho(b) < s(\rho(b))$ y por hipótesis $b \in a$, $\rho(b) < \bigcup\{s(\rho(b)) : b \in a\}$. Por lo tanto, $\rho(b) < \rho(a)$. □

Gracias a la última observación, para cada $x \in BF$ se sigue $\rho(x) = \bigcup\{s(\rho(y)) : y \in x\}$, de esta manera se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.7 *La relación $\in$ es buena fundación en BF.*

Demostración: Sea A un conjunto tal que $A \subseteq BF$ y $A \neq \emptyset$. Por reemplazo es posible construir el conjunto $X = \{\rho(a) : a \in A\}$, que, por la definición de rango es una colección de ordinales. Ya que el orden usual en los ordinales ($<$) es un buen orden en OR y $X \neq \emptyset$, existe $\alpha \in X$ $<$-mínimo. De esta forma, $\alpha = \rho(a)$ para algún $a \in A$. Además, si existe $b \in a$ tal que $y \in A$, se sigue $\rho(b) \in X$ y como $b \in a$, por la observación 1.1.6, $\rho(b) < \rho(a) = \alpha$. Pero esto contradice que α sea $<$-mínimo. Por lo tanto, a es $\in$-minimal en A. □

Ya establecidas las nociones de CT, BF y ρ, se obtienen resultados que otorgan un poco de más estructura a BF utilizando la cerradura transitiva de sus elementos y sus rangos.

Observación 1.1.8 *BF es una clase transitiva.*

Demostración: Sea $b \in BF$. Entonces, por la observación 1.1.3, $CT(x) \subseteq CT(b)$, para cualquier $x \in b$, esto implica que $\in$ es buena fundación en $CT(x)$ y por ello $x \in BF$. □

Con todo lo que se ha obtenido de BF hasta el momento, solamente es posible garantizar que BF es una *subclase* de la clase de todos los conjuntos V, es decir, $BF \subseteq V$. Es más, el siguiente teorema muestra qué es necesario para deducir $V = BF$.

Teorema 1.1.9 *El axioma de fundación es equivalente a que BF es la clase de todos los conjuntos V.*

Demostración: Se tiene, por hipótesis, el axioma de fundación. Sea x un conjunto no vacío (un resultado casi inmediato es $\emptyset \in BF$, debido a que $CT(\emptyset) = \emptyset$). Sea $X \subseteq CT(x)$ con $X \neq \emptyset$, entonces, por el *axioma de fundación*, existe alguna $y \in X$ tal que $X \cap y = \emptyset$, de manera para cualquier $z \in X$ se cumple que $z \notin y$, esto significa que $y \in X$ es un $\in$-minimal en X, entonces $x \in BF$ y por ello $V \subseteq BF$. Por lo tanto, $BF = V$.

Por otro lado, de suponer que BF es la clase de todos los conjuntos V y x un conjunto no vacío, como $V = BF$, $x \in BF$, por la observación 1.1.8, se tiene $x \subseteq BF$, así, por la proposición 1.1.7, sea $y \in x$ un elemento $\in$-minimal de x, entonces para cualquier conjunto z, si $z \in x$, entonces $z \notin y$; de la misma forma, si $z \in y$, entonces $z \notin x$, de ahí, $x \cap y = \emptyset$ y con ello x satisface el axioma de fundación. Concluyéndose, el axioma de fundación se satisface en BF. □

El teorema anterior implica que, al omitir el axioma de fundación, sólo es posible afirmar que BF es una subclase de V. Sin embargo, BF es una clase no vacía, debido a que $OR \subseteq BF$. Además, como los conjuntos bien fundados cumplen con el axioma de fundación, el rango de un conjunto está bien definido en BF aun utilizando ZFC^-.

Proposición 1.1.10 *Sean $a \in BF$ y $\beta \in OR$ tales que $\beta < \rho(a)$. Entonces, $\beta = \rho(b)$ para algún $b \in CT(a)$.*

Demostración: Para la demostración, se fija a un ordinal β y se observa la siguiente colección de conjuntos bien fundados:

$$X = \{a \in BF : \beta < \rho(a) \wedge \neg\exists b \in BF[\rho(b) = \beta \wedge b \in CT(a)]\}$$

Si $X = \emptyset$, entonces la proposición se satisface y no hay más que demostrar. Por otro lado, si $X \neq \emptyset$, entonces, por la proposición 1.1.7, X tiene algún elemento $\in$-minimal.

Sea $a \in X$ un elemento $\in$-minimal con $\alpha = \rho(a)$, así $\beta < \bigcup\{s(\rho(b)) : b \in BF \wedge b \in a\}$ y sea $t \in BF$ tal que $t \in a$ y $s(\rho(t)) > \beta$, entonces $\rho(t) \geqslant \beta$. De esto se sigue

- Si $\rho(t) = \beta$, entonces $a \notin X$, debido a que $t \in a$ implica que $t \in CT(a)$.
- Si $\rho(t) > \beta$, entonces $t \notin X$, ya que a es $\in$-minimal. Luego $\rho(b) = \beta$ para alguna $b \in CT(t)$, pero esto implica, por la observación 1.1.3, que $b \in CT(a)$, contradiciendo que $a \in X$.

De esta manera $X = \emptyset$. Por lo tanto, existe un $b \in CT(a)$ tal que $\beta = \rho(b)$. □

La proposición anterior permite escribir $\rho(a) = \{\rho(b) : b \in CT(a)\}$ para cualquier $a \in BF$, lo cual enriquece la estructura de todo conjunto bien fundado dada por su rango en BF.

Adicionalmente, para cualesquiera $x, y \in BF$ se tiene $\mathcal{P}(x) \subseteq BF$ y $\{x, y\}, \bigcup x, \mathcal{P}(x)$ y $CT(x)$ son elementos de BF. Incluso, es posible calcular su rango, lo cual se muestra en los siguientes

Lema 1.1.11 *Si $y \in BF$ y $z \subseteq y$, entonces $z \in BF$ y $\rho(z) \leqslant \rho(y)$.*

Demostración: Se tiene que $z \subseteq CT(y)$, debido a que $y \subseteq CT(y)$. Además, $CT(z) \subseteq CT(y)$, ya que $CT(z)$ es el conjunto transitivo $\subseteq$-mínimo que contiene a z. De esta forma, si $X \subseteq CT(z)$ con $X \neq \emptyset$, entonces $X \subseteq CT(y)$ con $y \in BF$, por lo cual hay algún elemento $\in$-minimal de X. Por lo tanto, $z \in BF$.
Por otro lado, se tiene $\{s(\rho(u)) : u \in z\} \subseteq \{s(\rho(v)) : v \in y\}$, entonces $\rho(z) = \bigcup\{s(\rho(u)) : u \in z\} \leqslant \bigcup\{s(\rho(v)) : v \in y\} = \rho(y)$. Concluyéndose, $\rho(z) \leqslant \rho(y)$.
□

Lema 1.1.12 *Sean $x, y \in BF$, entonces:*

1. *$\{x, y\} \in BF$ y $\rho(\{x, y\}) = s(max\{\rho(x), \rho(y)\})$;*
2. *$\mathcal{P}(x) \in BF$ y $\rho(\mathcal{P}(x)) = s(\rho(x))$;*

3. $\bigcup x \in BF$ *y* $\rho(\bigcup x) \leqslant \rho(x)$*;*

4. $CT(x) \in BF$ *y* $\rho(CT(x)) = \rho(x)$*.*

Demostración:

1. Sean $X \subseteq CT(\{x, y\})$ con $X \neq \emptyset$. De esta manera, para cada $z \in X$ se tiene $z \in \{x, y\}$ o $z \in CT(w)$ para algún $w \in \{x, y\}$. Si $X \subseteq \{x, y\}$, entonces alguno entre x y y es elemento $\in$-minimal de X. Sea $X' = X \setminus \{x, y\}$. Si $X' \subseteq CT(x)$ o $X' \subseteq CT(y)$, entonces hay algún elemento z $\in$-minimal en X', el cual cumple, sin pérdida de generalidad $z \in CT(x)$, por lo cual z es $\in$-minimal en X. También, si $X' \cap CT(x) \neq \emptyset$, entonces hay un elemento z $\in$-minimal de $X' \cap CT(x)$, ya que $X' \cap CT(x) \subseteq CT(x)$. De este modo, para $w \in z \cap X'$, se tiene que $w \in CT(x)$, debido a que $CT(x)$ es transitiva, lo cual contradice que z es $\in$-minimal en $X' \cap CT(x)$, entonces $z \cap X' = \emptyset$. Así, z es $\in$-minimal en X'. Como $z \in CT(x)$, z es $\in$-minimal en X.
   Por otro lado, $\rho(\{x, y\}) = \{s(\rho(z)) : z \in \{x, y\}\}$, entonces $\rho(\{x, y\}) = \{s(\rho(x)), s(\rho(y))\}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase $\rho(x) \leqslant \rho(y)$, luego $\rho(y) = max(\rho(x), \rho(y))$. De esta forma, $\rho(\{x, y\}) \subseteq \{s(\rho(y))\} = s(\rho(y))$, obteniéndose $\rho(\{x, y\}) \leqslant s(\rho(y))$. También, como $y \in \{x, y\}$, $\rho(y) < \rho(\{x, y\})$. Entonces, $\rho(\{x, y\}) = s(\rho(y))$. Por lo tanto, $\rho(\{x, y\}) = s(max\{\rho(x), \rho(y)\})$.

2. Como $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$, $CT(\mathcal{P}(x)) = CT(x) \cup \mathcal{P}(x)$. De esta manera, para $X \subseteq CT(\mathcal{P}(x))$ con $X \neq \emptyset$ se tiene $X \subseteq CT(x) \cup \mathcal{P}(x)$. Ahora, si $X \cap CT(x) = \emptyset$, entonces $X \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus CT(x)$. Así, para $z \in X$ y $w \in z \cap X$ se infiere $w \in z$, por lo cual $w \in x$, ya que $z \subseteq x$, de ahí $w \in CT(x)$, lo cual contradice que $X \cap CT(x) = \emptyset$, entonces $z \cap X = \emptyset$. De esta manera z es un elemento $\in$-minimal de X. También, si $X \cap CT(x) \neq \emptyset$, entonces, debido a que $X \cap CT(x) \subseteq CT(x)$, hay algún elemento $\in$-minimal de $X \cap CT(x)$, llámese z. Así, para $w \in z \cap X$ se tiene $w \in CT(x)$, ya que $CT(x)$ es transitivo, entonces $w \in X \cap CT(x)$, lo cual contradice que z sea $\in$- minimal en $X \cap CT(x)$, por lo cual $z \cap X = \emptyset$. De esta manera, z es un elemento $\in$-minimal en X. Por lo tanto, $\mathcal{P}(x) \in BF$. Por otro

lado, $\rho(\mathcal{P}(x)) = \bigcup\{s(\rho(z)) : z \in \mathcal{P}(x)\}$. Como para cualquier $z \in \mathcal{P}(x)$ se tiene $\rho(z) \leqslant \rho(x)$, $s(\rho(z)) \leqslant s(\rho(x))$, entonces $\rho(\mathcal{P}(x)) \leqslant \rho(x)$. Además, $x \in \mathcal{P}(x)$, por lo cual $\rho(x) < \rho(\mathcal{P}(x))$. Concluyéndose, $\rho(\mathcal{P}(x)) = s(\rho(x))$.

3. Sea $X \subseteq CT(\bigcup x)$ con $X \neq \emptyset$. Como $CT(\bigcup x) = CT(x) \setminus x$, $X \subseteq CT(x)$, entonces hay algún elemento $\in$-minimal en X. Por lo tanto, $\bigcup x \in BF$.
Por otro lado, $\rho(\bigcup x) = \bigcup\{s(\rho(z)) : z \in \bigcup x\}$. Sea $z \in \bigcup x$, entonces $z \in y$ con $y \in x$, de este modo $\rho(z) < \rho(y) < \rho(x)$, por lo cual $s(\rho(z)) < \rho(x)$. Concluyéndose $\rho(\bigcup x) \leqslant \rho(x)$.

4. Sea $X \subseteq CT(CT(x))$ con $X \neq \emptyset$. Se tiene que $CT(CT(x)) = CT(x)$ por ser un conjunto transitivo, entonces $X \subseteq CT(x)$, por lo cual hay algún elemento $\in$-minimal en X. Por lo tanto, $CT(x) \in BF$.
Ahora, si $z \in CT(x)$, entonces $\rho(z) < \rho(x)$, por lo cual $s(\rho(z)) \leqslant \rho(x)$. Así, $\rho(CT(x)) \leqslant \rho(x)$. Por otro lado, $x \subseteq CT(x)$, entonces, por el lema 1.1.11, $\rho(x) \leqslant \rho(CT(x))$. Por lo tanto, $\rho(CT(x)) = \rho(x)$. □

De esta manera, *informalmente*, se cumplen axiomas como unión, potencia y par en BF, para lo cual es necesario establecer fundamentos de teoría de modelos a modo de formalizar dicha afirmación.

Por otro lado, con la noción de *colapso de Mostowski* es posible construir isomorfismos de un conjunto a otro. En específico se pretende construir isomorfismos de conjuntos bien fundados a otros para así dotar de una estructura dada por la relación $\in$ a la clase BF.

Colapso de Mostowski

Definición 1.1.13 *Sea A una clase en la cual $\in$ es buena fundación. Se define recursivamente, para cada $y \in A$, $mos(y) = mos_{A,\in}(y) = \{mos(x) : x \in y\downarrow\}$, donde $y\downarrow = \{x \in y : x \in A\}$. Esta función es llamada el* ***colapso de Mostowski***

Originalmetene el colapso de Mostowski está definido para cualquier relación $R \subseteq A \times A$. Sin embargo, para efectos del presente trabajo se utiliza la relación pertenencia $\in$ en la clase A, por lo cual, en caso de ser A una clase transitiva, para cualquier $y \in A$ se tiene $y \downarrow = y$. Uno de los resultados que se obtienen a partir del colapso es que la imagen de A ($mos[A]$) en un conjunto transitivo.

Proposición 1.1.14 *Sea A una clase en la cual $\in$ es buena fundación y para cualquier $y \in A$, $y \downarrow$ es un conjunto. Entonces $mos[A]$ [1] es transitivo.*

Demostración: Sea $t \in mos[A]$, entonces, para alguna $y \in A$ se establece $t = mos(y) = \{mos(x) : x \in y \downarrow\}$. Así, para cada $u \in t$, $u = mos(x)$ para alguna $x \in y \downarrow$, eso implica que $u = mos(x)$ para alguna $x \in A$. Por lo tanto, $u \in mos[A]$. $\square$

Para las siguientes propiedades del colapso de Mostowski es necesaria la noción de *relación extensible* y una caracterización de una clase transitiva a partir de este concepto.

Definición 1.1.15 *Sea A una clase. Se dice que una relación R es **extensible** en A si y sólo si en $\langle A, R\rangle$ se satisface el axioma de extensión, es decir, se cumple el siguiente enunciado:*

$$\forall x, y, z \in A[(zRx \leftrightarrow zRy) \rightarrow x = y]$$

Proposición 1.1.16 *Si A sea una clase transitiva, entonces la relación $\in$ es extensible en A.*

Demostración: Sean A transitivo y $x, y \in A$. Si para cualquier $z \in A$ se cumple que $z \in x$ si y sólo si $z \in y$, entonces sea $t \in x$. Como A es transitivo, $t \in A$, así, $t \in y$ y por ello $x \subseteq y$. Análogamente $y \subseteq x$, de modo que $x = y$, lo cual quiere decir que en $\langle A, \in\rangle$ se satisface el axioma de extensión. Por lo tanto, $\in$ es extensible en A. $\square$

Con las propiedades de ser extensible y bien fundar es posible deducir que con la relación $\in$ en cualquier clase transitiva, el colapso de Mostowski tiene puntos fijos.

[1] $mos[A]$ denota a la imagen directa de A bajo la función mos

Proposición 1.1.17 *Sea $T \subseteq A$ transitivo. Si $\in$ es una buena fundación y extensible en A, entonces $mos_A(y) = y$ para toda $y \in T$.*

Demostración: Sea $B = \{y \in T : mos_{A,\in}(y) \neq y\} \neq \emptyset$, es decir, hay algún $x \in T$ tal que $mos_{A,\in}(x) \neq x$. Como $\in$ es buena fundación en A y $B \neq \emptyset$, sea a un $\in$-minimal de B. También, se tiene que $a \in A$, por ello, $mos_A(a) = \{mos(x) : x \in a \downarrow\} = \{mos_A(x) : x \in A \wedge x \in a\}$ Además, T es un conjunto transitivo y a es $\in$-minimal de B, entonces, para cada $x \in a$, se obtiene $x \in T \subseteq A$ y $mos_A(x) = x$, por lo cual $mos_A(a) = \{x \in A : x \in a\} = a$, lo cual contradice que $a \in B$. Por lo tanto, para cualquier $y \in T$, $mos_{A,\in}(y) = y$. □

Las proposiciones anteriores indican que, efectivamente, el colapso establece una estructura en cualquier clase A, en la cual $\in$ es buena fundación y es extensible. A partir de ello, se desprenden los siguientes resultados:

Proposición 1.1.18 *Sean A y B conjuntos transitivos con $A \in BF$ y sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de $\langle A, \in\rangle$ a $\langle B, \in\rangle$. Entonces, se tiene $f = id_A$, por lo cual $A = B$.*

Demostración: Sea $a \in A$ con $f(a) = b$. Como f es isomorfismo y tanto A como B son transitivos, para cualquier y, $y \in b$ si y sólo si existe $x \in a$ tal que $f(x) = y$. Por lo cual, $f(a) = \{f(x) : x \in a\}$. Además, al ser A transitivo, $f(a) = \{f(x) : x \in a\} = \{f(x) : x \in a \downarrow\}$. De esta manera, f es el colapso de Mostowski y por la proposición 1.1.17, $f = id_A$. Por lo tanto, $A = B$. □

Es necesario suponer que al menos uno de A o B están en BF, debido a que es consistente en ZFC^- que si $A = \{A\}$ y $B = \{B\}$ con $A \neq B$, entonces A y B son transitivos y $\langle A, \in\rangle \cong \langle B, \in\rangle$.

Lema 1.1.19 *Si $A \in BF$ y $\langle CT(A) \cup \{A\}, \in\rangle \cong \langle CT(B) \cup \{B\}, \in\rangle$, entonces $A = B$.*

Demostración: Al ser $CT(A) \cup \{A\}$ y $CT(B) \cup \{B\}$ conjuntos transitivos, de la proposición 1.1.18, se deduce que $CT(A) \cup \{A\} = CT(B) \cup \{B\}$.

Por otro lado, hay que notar que para cualquier $y \in CT(x) \cup \{x\}$, $y \in CT(x)$ o $y = x$.

De esta manera, si $y \neq x$, entonces, $y \in CT(x)$ y por la proposición 1.1.10, $\rho(y) < \rho(x)$, así $x \notin y$ y por ello x es el único $\in$-máximo en $CT(x) \cup \{x\}$.
Ahora, A es el único $\in$-máximo en $CT(A) \cup \{A\}$ y B es el único $\in$-máximo en $CT(B) \cup \{B\}$, como $CT(A) \cup \{A\} = CT(B) \cup \{B\}$, $A = B$. □

Otro resultado es que la propiedad de que $\in$ sea buena fundación en $CT(A) \cup \{A\}$ puede ser heredada de que $\in$ sea buena fundación en $CT(x)$. Es más, son enunciados equivalentes.

Proposición 1.1.20 *Para cualquier conjunto x, $\in$ es buena fundación en $CT(x)$ si y sólo si $\in$ es buena fundación en $CT(x) \cup \{x\}$*

Demostración: El resultado es inmediato si $x \in CT(x)$, por lo cual falta mostrar para el caso en el que $x \notin CT(x)$. Por hipótesis, $\in$ es buena fundación en $CT(x)$. Sea A un subconjunto no vacío de $CT(x) \cup \{x\}$.

- Si $x \notin A$, entonces $A \subseteq CT(x)$ y por la hipótesis, A tiene un elemento $\in$-minimal.
- En el caso de que $A = \{x\}$, entonces, por ser unitario, x es su elemento $\in$-minimal, debido a que si no se cumpliera esto se tendría que $x \in x$ y así $x \in CT(x)$, lo cual contradice la hipótesis de que $x \notin CT(x)$.
- Ahora, si $\{x\} \subsetneqq A$, entonces $A \setminus \{x\} \subseteq CT(x)$, de esta forma, $A \setminus \{x\}$ tiene un elemento $\in$-minimal. Sea a un elemento $\in$-minimal de $A \setminus \{x\}$, de esto se tiene $a \in A$ y para cualquier $b \in A$, si $b \neq x$, entonces $b \in A \setminus \{x\}$ y así $b \notin a$. También, si $b \in x$, entonces, suponer que $x \in a$ implica que $x \in CT(x)$, lo cual contradice la hipótesis de que $x \notin CT(x)$. Por lo tanto, $x \notin a$.

Esto implica que cualquier subconjunto no vacío de $CT(x) \cup \{x\}$ tiene algún elemento $\in$-minimal, por lo tanto, $\in$ es buena fundación en $CT(x) \cup \{x\}$.
Recíprocamente, supóngase que $\in$ es buena fundación en $CT(x) \cup \{x\}$. Como $CT(x) \subseteq CT(x) \cup \{x\}$, cualquier subconjunto de $CT(x)$ es subconjunto de $CT(x) \cup \{x\}$. Por lo cual, si A es un subconjunto no vacío de $CT(x)$, entonces A es un subconjunto no vacío

de $CT(x) \cup \{x\}$. Así, por hipótesis, A tiene algún elemento $\in$-minimal. Por lo tanto, $\in$ es buena fundación en $CT(x)$. $\square$

El resultado obtenido en la proposición 1.1.20 no depende del axioma de fundación, debido a que este axioma implica que para cualquier conjunto x se infiera $x \notin CT(x)$.

1.2. Modelos estándar de la teoría de conjuntos

En esta sección se analizan las condiciones suficientes que deben tener algunas clases para que sean *modelos* de ciertos axiomas de ZFC. Cabe resaltar que el núcleo de esta sección recae en la teoría $ZF^- - P$, es decir, no se emplean los axiomas de fundación, potencia ni elección. Sin embargo, algunos resultados emplearán los axiomas de potencia y elección, en ese caso, se indica de manera precisa al momento de enunciar el lema o teorema en cuestión.

Primero, dado un lenguaje $\mathcal{L}$, se dice que un *modelo* $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-*estructura* $\mathfrak{A}(A, \phi)$ para $\mathcal{L}$ consiste en una colección de conjuntos no vacía A junto con una *asignación* ϕ, la cual interpreta y verifica los enunciados (correctamente formados) de $\mathcal{L}$, es decir, o bien un enunciado o su negación se satisfacen en el modelo.

Un modelo $\mathfrak{A}$ para una teoría T y un lenguaje $\mathcal{L}$ es una estructura donde los axiomas y teoremas de T se satisfacen. En particular, para la teoría de conjuntos, se tiene que $\mathcal{L} = \{\in\}$ y $\mathfrak{A} = (A, R)$, donde A es una clase no vacía y $R \subset A \times A$. En el presente trabajo se establece que $\mathcal{L}$ es el lenguaje de la teoría de conjuntos y $R =\in$, por lo cual se tiene la siguiente definición.

Definición 1.2.1 *Un **modelo estándar** de la teoría de conjuntos es cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = (A, R)$tal que A es una clase transitiva no vacía y $R = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$.*

Se debe tomar en cuenta que los modelos definidos en el presente trabajo son *conjuntos* no vacíos de ZFC^-, de esta manera, son modelos estándar y no necesitan de *relativización* para demostrar el enunciado de los lemas 1.2.3 - 1.2.6. Antes de enunciar algún resultado sobre modelos, es pertinente mostrar la equivalencia entre un enunciado y el axioma de reemplazo, lo cual está en el siguiente

Lema 1.2.2 *Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula tal que para cada $x \in A$ existe un único y tal que $\varphi(x, y)$ se cumple. Entonces se satisface el axioma de reemplazo si y sólo si existe una función f con $dom(f) = A$ tal que para cada $x \in A, f(x)$ es el único y tal que $\varphi(x, y)$.*

Demostración: Debido al axioma de reemplazo, existe un B tal que para cada $x \in A$ existe $z \in B$ tal que $\varphi(x, z)$. Entonces, sea $f = \{z \in B : \exists x \in A(\varphi(x, z))\} = \{(x, y) \in B : \exists x \in A(\varphi(x, z))\}$. Se tiene que f es función, porque si existiera alguna $x \in A$ tal que $(x, y), (x, y') \in f$, entonces $\varphi(x, y)$ y $\varphi(x, y')$ y así $y = y'$, por hipótesis. Además, para cada $x \in A = dom(f), f(x)$ es la única y tal que $\varphi(x, y)$.
Por otro lado, sea una función f con $dom(f) = A$ tal que para cada $x \in A, f(x)$ es la única y tal que $\varphi(x, y)$ se satisface. En la sección 2.1 se demuestra que existe $ran(f)$, así sea $y \in ran(f)$, entonces existe $x \in dom(f) = A$ tal que $f(x) = y$ y por la hipótesis, $f(x)$ es la única y tal que $\varphi(x, y)$ se satisface. Si $x \in A = dom(f)$, entonces $f(x) \in ran(f)$ y $f(x)$ es la única y tal que $\varphi(x, y)$ se satisface. Entonces, existe B tal que $y \in B$ si y sólo si existe $x \in A$ tal que $\varphi(x, y)$. Por lo tanto se cumple el axioma de reemplazo. □

Ahora, es posible demostrar, en la teoría $ZF^- - P$, qué propiedades debe de tener un conjunto M para modelar algunos de los axiomas de ZFC.

Lema 1.2.3 *($ZF^- - P$) Para cualquier conjunto M:*

1. *Si $\emptyset \in M$, entonces el axioma de existencia se satisface en M.*
2. *Si M es transitivo, entonces el axioma de extensión se satisface en M.*
3. *Si para cualesquiera $z \in M$ y $y \subseteq z$ se cumple que $y \in M$, entonces el esquema de comprensión se satisface en M.*
4. *Si para cualesquiera $x, y \in M$ se cumple que $\{x, y\} \in M$, entonces el axioma del par se satisface en M.*
5. *Si para cualquier $\mathcal{F} \in M$, se cumple que $\bigcup \mathcal{F} \in M$, entonces se satisface el axioma de unión en M.*

7. *Si $M \subseteq BF$, entonces el axioma de fundación se satisface en M.*

9. *Si M es transitivo y para cualquier función f se cumple que $dom(f) \in M$ y $ran(f) \subseteq M$, entonces $ran(f) \in M$. Entonces el axioma de reemplazo se satisface en M.*

Demostración:

1. El axioma de existencia en M queda como: «hay un conjunto $B \in M$ vacío». Como $\emptyset \in M$, en M va a existir un conjunto vacío, a saber, $\emptyset$. Por lo tanto, el axioma de existencia se satisface en M.

2. Sea M es un conjunto transitivo, entonces, por la proposición 1.1.16, $\in$ es extensible en M, es decir, $\langle M, \in \rangle$ satisface el axioma de extensión.

3. Sea φ una fórmula de $ZF^- - P$ donde y no sea una variable libre. Es posible que φ contenga como variables libres a x y a z y posiblemente también otras variables como libres $v_0, ..., v_{n-1}$, así que es oportuno escribir a φ como $\varphi(x, z, \overrightarrow{v})$. De esta forma, para obtener lo que se quiere basta con verificar que en M se satisface el siguiente enunciado.

$$\forall z, v_0, ..., v_{n-1} \in M \exists y \in M \forall x \in M [x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x, z, \overrightarrow{v})] \tag{1.1}$$

   Es decir, el esquema de comprensión para los conjuntos que pertenecen a M. Hay que resaltar que $\varphi(x, z, \overrightarrow{v})$ puede contener variables cuantificadas, pero $\varphi(x, z, \overrightarrow{v})$ es una fórmula sobre conjuntos en M.
   Ahora, si para cualesquiera $z \in M$ y $y \subseteq z$ se cumple que $y \in M$, entonces, al definir a la colección $y = \{x \in z : \varphi(x, z, \overrightarrow{v})\}$, se infiere que y es un conjunto en $ZF^- - P$ gracias al axioma de comprensión (que es parte de $ZF^- - P$). Además, se tiene que, si $x \in y$, entonces $x \in z$, por lo cual $y \subseteq z$ y por hipótesis $y \in M$, así, en M se satisface el enunciado (1.1). Por lo tanto el esquema de comprensión se satisface en M.

4. El axioma del par en M queda como: «para cualesquiera conjuntos $X, Y \in M$ existe un conjunto $Z \in M$ tal que $W \in Z$ implica que $W = X$ o $W = Y$». Sean $x, y \in M$, entonces $\{x, y\} \in M$, por hipótesis. Así, es posible definir a $z = \{x, y\}$. De esta manera, z es tal que $z \in M$ y x y y son los únicos elementos de z. Por lo tanto en M se satisface el axioma del par.

5. El axioma de unión en M queda como: «para cualquier conjunto $\mathcal{F} \in M$, existe un conjunto $U \in M$ tal que para cualquier $x \in M$: $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$ si y sólo si $x \in U$».

   Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es un conjunto, entonces la proposición A.1.5 garantiza que $\bigcup \mathcal{F}$ es un conjunto para $ZF^- - P$. Es más, $\bigcup \mathcal{F}$ es tal que $x \in \bigcup \mathcal{F}$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$. Y como, por hipótesis, $\bigcup \mathcal{F} \in M$, en M se satisface que existe $U \in M$ tal que para para cualquier $x \in M$ se cumple que, si $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$, entonces $x \in U$. Por lo tanto, se satisface el axioma de unión en M.

7. El axioma de fundación en M queda como: «para cada conjunto no vacío $A \in M$ existe $u \in M$ tal que si $u \in A$, entonces u y A son ajenos». Por otro lado, $\in$ es una relación en BF por la proposición 1.1.7, y como, por hipótesis, $M \subseteq BF$, $\in$ es buena fundación en M. Entonces, sea $A \in M$ no vacío con $A \cap M \neq \emptyset$, así $A \cap M \subseteq M$ tiene elementos $\in$-mínimos. Sea u un $\in$-mínimo en $A \cap M$ y si existe algún $z \in M$ tal que $z \in A \cap u$, entonces $z \in A \cap M$ y $z \in u$, lo cual contradice que u sea $\in$-mínimo en $x \cap M$. Así, $u \in A \cap M$ es tal u y A son ajenos. Por lo tanto, el axioma de fundación se satisface en M.

9. Si M es transitivo y para cualquier función f se cumple que $dom(f) \in M$ y $ran(f) \subseteq M$.

   La demostración de este inciso es parecida a la del inciso 3. Entonces, sean φ una fórmula de $ZF^- - P$ donde B no sea una variable libre, $A \in M$ y si se supone que para cualquier $x \in M$, si $x \in A$, entonces existe un único $y \in M$ tal que $\varphi(x, y)$. Si se logra obtener algún $B \in M$ tal que en M se satisface: $y \in B$ si y sólo si $\varphi(x, y)$

para algún $x \in A$, entonces se obtiene la conclusión deseada. Dicho esto, sea f una función con $dom(f) = A$ y que $f(x)$ sea la (única) $y \in M$ tal que $\varphi(x, y)$. Entonces, por el esquema reemplazo (en $ZF^- - P$), f es un conjunto en $ZF^- - P$ debido a la proposición 1.2.2. Utilizando la fórmula: $\psi(x, y) \equiv \varphi(x, y) \wedge y \in M$. Entonces, sea $B = ran(f)$, así B satisface parcialmente lo que se quiere obtener, sólo falta ver que $B \in M$, debido a que, si $x \in A$, entonces, por hipótesis, existe un único $y \in M$ tal que $\varphi(x, y)$, entonces $f(x) = y \in B$. Por otro lado, por la definición de f, si $y \in B$, entonces $y = f(x) \in M$ para algún $x \in M$. Además, y es la única (en M) tal que $\varphi(x, y)$. Es más, $y \in B$ implica que $B \subseteq M$, entonces, por hipótesis, $B \in M$. Por lo tanto, el axioma de reemplazo se satisface en M. $\square$

Es importante resaltar que las condiciones mencionadas en los incisos anteriores no son obligatoriamente *necesarias*. Por otra parte, para dar una condición de suficiencia para que un conjunto M sea modelo del axioma de potencia, se utiliza la noción del conjunto potencia, por ello, se necesita fundamentar este resultado en la teoría ZF^-.

Lema 1.2.4 *(ZF^-) Sea M una clase transitiva. Entonces*

6. *Si para cualquier $x \in M$, se cumple que $\mathcal{P}(x) \cap M \in M$, entonces el axioma de potencia se satisface en M.*
   El inverso se cumple si en M se satisface el esquema de comprensión.

Demostración:

6. Sea $x \in M$, por hipótesis, $\mathcal{P}(x) \cap M \in M$. De esta manera, si $z \in M$ con $z \subseteq x$, entonces $z \subseteq x \subseteq M$, ya que M es transitivo. Así, $z \in \mathcal{P}(x) \cap M \in M$. Debido a que en M existe un y, a saber $\mathcal{P}(x) \cap M$, tal que para toda $z \in M$, si $z \subseteq x$ entonces $z \in y$, implica que en M se satisface el axioma de potencia.
   Recíprocamente, por hipótesis, se satisfacen los axiomas de potencia y esquema de comprensión en M. Sean $x, y \in M$ con y el conjunto que existe por el axioma de potencia en M para x (es decir, para cualquier $z \in M$, si $z \subseteq x$, entonces $z \in y$), entonces, por el esquema de compresión en M, se tiene $\{z \in y : z \subseteq x\} \in M$. Sea

$z \in \mathcal{P}(x) \cap M$, así $z \subseteq x$ en ZF^- y $z \in M$. Además, al ser M transitivo, $z \subseteq x$ implica que $z \subseteq x$, con esto $z \in y$ y por esa razón $\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq \{z \in y : z \subseteq x\}$. Por otro lado, si $z \in \{z \in y : z \subseteq x\} \in M$, en particular $z \in y$ y por la transitividad de M, $z \in M$, por la misma razón, $z \subseteq x$ en ZF^- lo cual implica que $z \in \mathcal{P}(x)$, de ahí que $z \in \mathcal{P}(x) \cap M$ por lo cual $\{z \in y : z \subseteq x\} \subseteq \mathcal{P}(x) \cap M$. Así, $\{z \in y : z \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap M$. Por lo tanto $\mathcal{P}(x) \cap M \in M$. □

Ahora, sólo falta señalar qué características debe tener un conjunto M para modelar a los axiomas de infinito y elección, para lo cual se utiliza la noción de *conjunto de elección*.

Definición 1.2.5 *Sea F una familia de conjuntos no vacíos. Un* ***conjunto de elección*** *para F es un conjunto C tal que $SING(C \cap x)$*[1] *para toda $x \in F$.*

Lema 1.2.6 *($ZF^- - P$) Sea M un conjunto transitivo, en la cual, los axiomas de extensión, esquema de comprensión y par se satisfacen. Entonces*

8. *Si $\omega \in M$, entonces el axioma de infinito se satisface en M.*

10. *El axioma de elección se satisface en M si y sólo si cualquier familia de conjuntos no vacíos y ajenos en M tiene un conjunto de elección en M.*

Demostración: Por hipótesis, M modela a TBC [2], entonces, por las proposiciones A.1.2 - A.1.8, en M existen los conjuntos: $\emptyset$, $s(y)$ (para cada $y \in M$), $u \cap w$ (para $u, w \in M$) y x tal que $SING(x)$. Además, M es transitivo, eso quiere decir que $x \subseteq M$ para cualquier $x \in M$. Por lo cual, se obtiene lo siguiente.

8. Para que el axioma de infinito se satisfaga en M, debe de existir $x \in M$, con $\emptyset \in x$ y para cualquier $y \in x$, $s(y) \in y$. Como $\emptyset \in \omega$ y para cada $y \in \omega$, $s(y) \in \omega$, ω es un conjunto como el que plantea el axioma de infinito. Así, que $\omega \in M$ es razón suficiente para que este axioma se satisfaga.

[1] *véase* definición A.1.4, página 65
[2] *véase* definición A.1.1, página 63

10. El axioma de elección en M garantiza la existencia de un conjunto de elección en $C \in M$ para cualquier familia $F \in M$ de conjuntos no vacíos y ajenos. Inversamente, si existe $C \in M$ un conjunto de elección para cualquier $F \in M$ una familia de conjuntos no vacíos y ajenos, entonces en M se satisface el axioma de elección. $\square$

Gracias a los lemas 1.2.3 y 1.2.6 se tienen las condiciones para que algún conjunto M sea modelo de algún fragmento de ZFC. Cabe repetir que no todas las condiciones que dichos lemas establecen son necesarias, simplemente son suficientes.

Capítulo 2

Tres modelos estándar

2.1. Los conjuntos de rango menor que κ

Para efectos de simplificación se refiere como *axioma de reemplazo* a un *esquema* de axioma que afirma para cada fórmula, φ, sin B libre, el siguiente enunciado se cumple:

$$\forall A[\forall x \in A \exists! y \varphi(x,y) \to \exists B(y \in B \leftrightarrow \exists x \in A(\varphi(x,y))]^{1}.$$

Esto es, si para cada $x \in A$ se asocia un *único* objeto y_x (la única y tal que $\varphi(x,y)$). Entonces es *posible* construir el conjunto $B = \{y_x : x \in A\}$ *reemplazando* cada $x \in A$ por y_x, donde para cada $x \in A$, y_x es el único conjunto que cumple $\varphi(x, y_x)$.

Por ejemplo, si A es un conjunto y denotamos como $A^* = \{y : \exists x(x \in A \wedge y = \{x\})\}$. Intuitivamente A^* *debería* de existir, pero no es posible fundamentar ese hecho mediante los axiomas de TBC.

Usando el axioma de *reemplazo*, A^* existe, debido a que es la C de la discusión anterior, donde $\varphi(x,y)$ es el enunciado $x \in y \wedge \forall z \in y(x = z)$, es decir, $y = \{x\}$.

En esta sección se muestra que en ZFC hay un modelo de ZC, a saber V_κ, para después verificar que *reemplazo* es un axioma independiente a los de ZC, es decir, que el axioma de reemplazo no es *teorema* de dicha teoría.

[1]Donde se denota como $\exists! x\varphi(x)$ al enunciado $\exists x\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \to y = x)$

2.1.1. Independencia del axioma de reemplazo

En el presente trabajo se utiliza a la colección $R(\alpha)$ para demostrar que *reemplazo* es un axioma independiente a los de ZC. Para esto, es pertinente definir tal colección y exhibir su existencia en ZFC^-. Además, es necesario exhibir que, en efecto, $R(\alpha)$ es modelo de la teoría ZC, la cual comprende de todos los axiomas de ZFC a excepción del axioma de reemplazo.

Primero, se tiene que establecer la definición de la colección $R(\alpha)$:

Definición 2.1.1 *Para cada ordinal α se denota $R(\alpha) = \{x \in BF : \rho(x) < \alpha\}$.*

Debido a que se define de una manera parecida a la forma de construir conjunto mediante el axioma de comprensión, se deduce para cualquier ordinal α, se tiene $R(\alpha) \subseteq BF$. No obstante, aún no es posible concluir que dicha colección es conjunto en ZFC^-, ya que BF no lo es. Sin embargo, es posible mostrar que la colección $R(\alpha)$ tiene las siguientes características:

Observación 2.1.2 *Sean α y β ordinales. Si $\beta \leqslant \alpha$ entonces $R(\beta) \subseteq R(\alpha)$.*

Demostración: Si $\beta \leqslant \alpha$ con $x \in R(\beta)$. Como $\beta \leqslant \alpha$ y por definición $\rho(x) < \beta$, $\rho(x) < \alpha$. Así $R(\beta) \subseteq R(\alpha)$. $\square$

Proposición 2.1.3 *Para cualquier conjunto b y ordinal α se tiene $b \in R(s(\alpha))$ si y sólo si $b \subseteq R(\alpha)$.*

Demostración: Sea $b \in R(s(\alpha))$. Por definición $b \in BF$ y $\rho(b) < s(\alpha)$, de forma que $\rho(b) \leqslant \alpha$. Si $x \in b$, por la observación 1.1.8, $x \in BF$. Además, $\rho(x) < \rho(b)$, debido a que $\rho(x) < s(\rho(x)) < \bigcup\{s(\rho(x)) : x \in b\} = \rho(b) \leqslant \alpha$. De esta forma $\rho(x) < \alpha$ y por eso $x \in R(\alpha)$. Por lo tanto, $b \subseteq R(\alpha)$.
Ahora, sea $b \subseteq R(\alpha)$. Se tiene que $b \subseteq BF$, debido a que si $x \in b$, entonces $x \in R(\alpha)$. Además, por definición, $x \in BF$ y, por la observación 1.1.8, BF es transitivo, así $CT(b) \subseteq BF$. Como $\in$ es buen orden en BF, $\in$ es buen orden $CT(b)$, de lo cual se concluye $b \in BF$. $\square$

Las propiedades anteriores muestran que la colección $R(\alpha)$ respeta la estructura dada por el orden $\in$ en los ordinales a $\subseteq$. Además, dan pauta a construir más clases $R(\alpha)$ a partir de la función sucesor en los ordinales.

Sin embargo, todavía no es posible afirmar que la colección $R(\alpha)$ es un conjunto. Para hacer tal afirmación, se utiliza la noción de recursión y el axioma de potencia, así, se establece en el siguiente

Lema 2.1.4 *Suponiendo el axioma de potencia, $R(\alpha)$ es un conjunto para cada ordinal α y además:*

- $R(0) = \emptyset$
- $R(s(\alpha)) = \mathcal{P}(R(\alpha))$
- $R(\alpha) = \bigcup\{R(\beta) : \beta < \alpha\}$ *si y sólo si α es un ordinal límite.*

Demostración: Por inducción sobre α:

- Si $\alpha = 0$, entonces, por definición, $R(0) = \{x \in BF : \rho(x) < 0\}$ y se tiene $\{x \in BF : \rho(x) < 0\} = \emptyset$. Por lo cual, $R(0) = \emptyset$ y $\emptyset$ es un conjunto.

- Si $\alpha = s(\beta)$ y $R(\beta)$ es un conjunto, entonces, por la proposición 2.1.3, $b \in R(\alpha)$ si y sólo si $b \subseteq R(\beta)$, de esta manera $b \in R(\alpha)$ si y sólo si $b \in \mathcal{P}(R(\beta))$ y por eso $R(\alpha) = \mathcal{P}(R(\beta))$ y, por el axioma de potencia, $R(s(\beta))$ es un conjunto.

- Si α es un ordinal límite y $R(\beta)$ es un conjunto para cualquier $\beta < \alpha$, por definición, $R(\alpha) = \{x \in BF : \rho(x) < \alpha\}$, así, para cualquier $x \in R(\alpha)$, se obtiene que $\rho(x) < \alpha$. Como α es límite, $s(\rho(x)) < \alpha$, por lo cual $x \in R(s(\rho(x)))$, que es conjunto por hipótesis. Además, por el axioma de reemplazo, $\{R(\beta) : \beta < \alpha\}$ es un conjunto, así, por el axioma de unión, $\bigcup\{R(\beta) : \beta < \alpha\}$ también es conjunto. Sólo falta demostrar que $R(\alpha) = \bigcup\{R(\beta) : \beta < \alpha\}$.
  Sea $x \in R(\alpha)$. Como $\rho(x) < s(\rho(x)) < \alpha$, $x \in R(s(\rho(x)))$ y con eso se deduce $x \in \bigcup\{R(\beta) : \beta < \alpha\}$. Ahora, sea $x \in \bigcup\{R(\beta) : \beta < \alpha\}$. Entonces $x \in R(\beta)$ para alguna $\beta < \alpha$ y por la observación 2.1.2, $R(\beta) \subseteq R(\alpha)$. Por lo tanto, $x \in R(\alpha)$. $\square$

De esta forma, por la unicidad que brinda el teorema de recursión, la colección $R(\alpha)$ es la jerarquía acumulativa (V_α) descrita en el libro (Enderton, 1977, p. 200).

Debido a que en la sección 1.2, se necesita que una colección sea transitiva para poder ser modelo estándar, es conveniente mostrar que $R(\alpha)$ es una colección transitiva..

Proposición 2.1.5 *Para cualquier ordinal* $\alpha, R(\alpha)$ *es un conjunto transitivo.*

Demostración:

- Si $\alpha = \emptyset$, entonces, por el lema 2.1.4, $R(\alpha) = \emptyset$ y $\emptyset$ es transitivo por vacuidad. De esta manera, $\alpha \neq \emptyset$.

- Supóngase $\alpha = s(\beta)$ para algún ordinal β tal que $R(\beta)$ es un conjunto transitivo. Sean $x \in R(\alpha)$ y $y \in x$, entonces, por el lema 2.1.4, $x \subseteq R(\beta)$, de esta forma $y \in R(\beta)$. Como $R(\beta)$ es transitivo, $y \subseteq R(\beta)$, lo cual implica, gracias al lema 2.1.4, $y \in R(\alpha)$. En consecuencia, $R(\alpha)$ es un conjunto transitivo.

- Supóngase α límite tal que para cualquier $\beta < \alpha$ se tenga $R(\beta)$ es un conjunto transitivo. Sean $x \in R(\alpha)$ y $y \in x$, entonces, por el lema 2.1.4, $x \in R(\beta)$ para algún $\beta < \alpha$. Como $R(\beta)$ es transitivo, $y \in R(\beta)$, entonces $y \in R(\alpha)$, de lo cual se infiere que $R(\alpha)$ es un conjunto transitivo.

Por lo tanto, $R(\alpha)$ es transitivo para cualquier ordinal α. $\square$

Dado que $V_\alpha = R(\alpha)$, se utiliza sin distinción a cualquiera de los dos en el presente trabajo. Cabe resaltar el hecho de que la definición de V_α necesita del axioma de potencia, mientras que para $R(\alpha)$ este axioma fue utilizado únicamente para demostrar que es conjunto y no en definir dicha familia de conjuntos.

En el Enderton (1977) se encuentra al rango de un conjunto definido a partir de V_α, es decir, depende directamente del axioma de potencia, en cambio, en la definición del Kunen (2014) (utilizada en el presente trabajo), la función ρ no depende de potencia.

Ambas definiciones logran exhibir distintas propiedades de la misma colección. Mientras que la definición utilizada en este trabajo hace posible prescindir del axioma de potencia (sin olvidar que se usa potencia para demostrar que es conjunto).

Por otra parte, el conjunto $R(\omega)$ cuenta con la característica de *tener* a los números naturales como elementos, es decir, $\omega \subseteq R(\omega)$, lo cual se muestra en la siguiente

Proposición 2.1.6 $\omega \subseteq R(\omega)$

Demostración: Por inducción en los naturales, se muestra para cualquier $n \in \omega$ que $\rho(n) = n$.

- Para $n = \emptyset$ se tiene $\rho(0) = \bigcup\{s(\rho(p)) : p \in 0\} = \bigcup\emptyset = \emptyset = 0$. Por lo cual, $\rho(0) = 0$.

- Sea $n = s(m)$ para algún $m \in \omega$ tal que $\rho(m) = m$. Se tiene $\rho(n) = \bigcup\{s(\rho(p)) : p \in n\}$. También, $\bigcup\{s(\rho(p)) : p \in n\} = \bigcup\{s(\rho(p)) : p \in m\} \cup s(\rho(m)) = \rho(m) \cup s(m) = m \cup s(m) = s(m) = n$. Por lo cual, $\rho(n) = n$.

De este modo, para cada $n \in \omega$, se tiene $\rho(n) < \omega$. Por lo tanto, $\omega \subseteq R(\omega)$. $\square$

En la literatura básica de la teoría de conjuntos se define a la clase BF como la colección $\bigcup\limits_{\alpha \in OR} V_\alpha$ que es equivalente a $BF = \bigcup\limits_{\alpha \in OR} R(\alpha)$. Entonces, falta mostrar dicha igualdad.

Proposición 2.1.7 $BF = \bigcup\limits_{\alpha \in OR} R(\alpha)$.

Demostración: Sea $x \in BF$, entonces $\rho(x) = \beta$ para algún ordinal β. Además, por la definición de ρ, se deduce que $\rho(\{x\}) = s(\beta)$. Asimismo, que $CT(\{x\}) = CT(x) \cup \{x\}$ y $x \in BF$ implica, por la proposición 1.1.20, que $\{x\} \in BF$. Por otra parte, si $\alpha = s(s(\beta))$, entonces $\rho(\{x\}) < \alpha$. De este modo, $\{x\} \in R(\alpha)$. Como $x \in \{x\} \in R(\alpha)$, $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in OR} R(\alpha)$.
Por otro lado, sea $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in OR} R(\alpha)$, entonces hay algún ordinal α tal que $x \in R(\alpha)$. Como $R(\alpha) \subseteq BF$ por definición, $x \in BF$. $\square$

Hasta ahora solamente se han enunciado propiedades del conjunto $R(\alpha)$, pero no se ha demostrado que es un modelo estándar de $ZC-$ *reemplazo*, para lo cual se recurre a las propiedades establecidas en la sección 1.2.

Proposición 2.1.8 *(ZFC^-) Sea α un ordinal, entonces:*

1. *Si $\alpha \neq 0$, entonces en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de existencia.*

2. *El axioma de extensión se satisface en $R(\alpha)$.*

3. *El esquema de comprensión se satisface en $R(\alpha)$.*

4. *Si α es* límite, *entonces el axioma del par se satisface en $R(\alpha)$.*

5. *El axioma de unión se satisface en $R(\alpha)$.*

6. *Si α es un ordinal límite, entonces el axioma de potencia se satisface en $R(\alpha)$.*

7. *El axioma de fundación se satisface en $R(\alpha)$.*

8. *Si $\alpha > \omega$, el axioma de infinito se satisface en $R(\alpha)$.*

10. *El axioma de elección se satisface en $R(\alpha)$*

Demostración: Sea α un ordinal, entonces:

1. Basta con demostrar que $\emptyset \in R(\alpha)$. Sea $\alpha \neq \emptyset$, entonces $\emptyset < \alpha$. Además, $\emptyset \in BF$ y como $\rho(\emptyset) = \emptyset < \alpha, \emptyset \in R(\alpha)$. Así, por el lema 1.2.3, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de existencia.

2. Por la proposición 2.1.5, $R(\alpha)$ es un conjunto transitivo, de manera que, por el lema 1.2.3, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de extensión.

3. Sea $x \in R(\alpha)$ y $z \subseteq x$. Supóngase que $x \neq \emptyset$, debido a que si $x = \emptyset$, entonces $z = \emptyset$ y con ello $z \in R(\alpha)$. Ahora, por el lema 1.1.11 $z \in BF$. Además, se tiene que $\rho(x) = \bigcup\{s(\rho(y)) : y \in x\}$ y $\rho(z) = \bigcup\{s(\rho(y)) : y \in z\}$. Como $z \subseteq x$, para cualquier $y \in z$, $y \in x$, entonces $\{s(\rho(y)) : y \in z\} \subseteq \{s(\rho(y)) : y \in x\}$

obteniéndose $\rho(z) = \bigcup\{s(\rho(y)) : y \in z\} \leqslant \bigcup\{s(\rho(y)) : y \in x\} = \rho(x) < \alpha$. Por lo cual, $z \in R(\alpha)$. Así, por el lema 1.2.3, en $R(\alpha)$ se satisface el esquema de comprensión.

4. Sean $x, y \in R(\alpha)$. Por el lema 1.1.12 se tiene $\{x, y\} \in BF$ y $\rho(\{x, y\}) = s(max(\rho(x), \rho(y)))$. Si $\beta = max(\rho(x), \rho(y))$, entonces $\beta < \alpha$. Además, como α es límite, $\rho(\{x, y\}) = s(\beta) < \alpha$. Por lo tanto, $\{x, y\} \in R(\alpha)$. Así, por el lema 1.2.3, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma del par.

5. Sea $\mathcal{F} \in R(\alpha)$. Por el lema 1.1.12 se tiene $\bigcup\mathcal{F} \in BF$ y $\rho(\bigcup\mathcal{F}) \leqslant \rho(\mathcal{F})$. Ahora, como $\rho(\mathcal{F}) < \alpha$, $\rho(\bigcup\mathcal{F}) < \alpha$. De esta manera $\bigcup\mathcal{F} \in R(\alpha)$. Así, por el lema 1.2.3, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de unión.

6. Sea $x \in R(\alpha)$. Por el lema 1.1.12 se tiene $\mathcal{P}(x) \in BF$ y $\rho(\mathcal{P}(x)) = s(\rho(x))$, Además, por el lema 1.1.11, $\mathcal{P}(x) \cap R(\alpha) \in BF$ y $\rho(\mathcal{P}(x) \cap R(\alpha)) \leqslant s(\rho(x))$, ya que $\mathcal{P}(x) \cap R(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(x)$. Como α es límite y $\rho(x) < \alpha$, $\rho(\mathcal{P}(x) \cap R(\alpha)) < \alpha$. Por lo cual, $\mathcal{P}(x) \cap R(\alpha) \in R(\alpha)$. Así, por el lema 1.2.4, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de potencia.

7. Por definición, si $x \in R(\alpha)$, entonces $x \in BF$. Así $R(\alpha) \subseteq BF$ y por el lema 1.2.3, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de fundación.

Para los siguientes incisos se obtiene que, por la proposición 2.1.5, $R(\alpha)$ es un conjunto transitivo. Además, por los incisos anteriores, los axiomas de extensión, esquema de comprensión y par se satisfacen en $R(\alpha)$.

8. Por el corolario **??** y la proposición 2.1.6, se obtiene que $\omega \subseteq R(\omega)$. Entonces, por la proposición 2.1.3, $\omega \in R(s(\omega))$. Además, por hipótesis, $\omega < \alpha$, entonces $s(\omega) \leqslant \alpha$. Así, por la observación 2.1.2, $R(s(\omega)) \subseteq R(\alpha)$, por lo cual $\omega \in R(\alpha)$. Concluyéndose, por el lema 1.2.6, que en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de infinito.

10. Sean F una familia de conjuntos ajenos no vacíos en $R(\alpha)$ y C un conjunto (no obligatoriamente $C \in R(\alpha)$) de elección para F. Como en $R(\alpha)$ se cumple el

axioma de unión, $\bigcup F \in R(\alpha)$, entonces, para $C' = C \cap \bigcup F$ se tiene, por el lema 1.1.11, $C' \in BF$ y $\rho(C') \leqslant \rho(\bigcup F) < \alpha$, de esta manera $C' \in R(\alpha)$. Ahora, si $x \in F$, entonces $C \cap x = \{a\}$ para alguna $a \in x$, de esta manera $a \in C$ y $a \in \bigcup F$, por lo cual $a \in C'$, entonces $C' \neq \emptyset$ y $C' \cap x = \{a\}$. Por lo cual, C' es un conjunto de elección para F y $C' \in R(\alpha)$. Así, por el lema 1.2.6, en $R(\alpha)$ se satisface el axioma de elección. □

Con la proposición anterior no es posible asegurar la independencia del axioma de reemplazo de los axiomas de ZC, para esto es necesario mostrar que en $R(\alpha)$ se satisface la negación del enunciado de dicho axioma, lo cual no sucede para cualquier ordinal. Sin embargo, basta que se cumpla para algún ordinal κ tal que $R(\kappa)$ siga siendo modelo de ZC, esto es, que κ sea un ordinal límite mayor que ω.

Un buen candidato para un ordinal de tales características es $\omega \cdot 2$, el cual es el menor ordinal límite mayor que ω, por lo cual $R(\omega \cdot 2)$ es modelo de ZC. Ahora, basta demostrar que algún elemento de $R(\omega \cdot 2)$ no satisfaga el enunciado del axioma de reemplazo para demostrar su independencia de ZC.

Lema 2.1.9 *Hay una estructura bien ordenada en $R(\omega \cdot 2)$ cuyo ordinal relacionado no está en $R(\omega \cdot 2)$.*

Demostración: Se sabe, por la proposición 2.1.6, que $\omega \subseteq R(\omega)$, de este modo, si $A \subseteq \omega$, entonces $A \subseteq R(\omega)$, por lo cual $A \in \mathcal{P}(R(\omega)) = R(s(\omega))$, luego $\mathcal{P}(\omega) \subseteq R(s(\omega))$, de ahí $\mathcal{P}(\omega) \in R(s(s(\omega)))$ y por ello $\rho(\mathcal{P}(\omega)) < s(s(\omega))$. Además, como $s(s(\omega)) < \omega \cdot 2, \mathcal{P}(\omega) \in R(\omega \cdot 2)$. También, debido a que $\omega \in \mathcal{P}(\omega)$, se tiene que $\rho(\omega) < \rho(\mathcal{P}(\omega))$, de lo cual se sigue, $\omega < \rho(\mathcal{P}(\omega)) < s(s(\omega))$ y de esta forma $\rho(\mathcal{P}(\omega)) = s(\omega)$. Análogamente $\rho(\mathcal{P}\mathcal{P}(\omega)) = s(s(\omega))$ y $\rho(\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\omega)) = s(s(s(\omega)))$.
Por otro lado, gracias al *teorema del buen orden* (es posible ya que el axioma de elección es parte de ZC), existe un buen orden $(<)$ en $\mathcal{P}(\omega)$. Además, $<\subseteq \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega) \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}(\omega)$, entonces $\rho(<) \leqslant s(s(s(\omega)))$. Asimismo, $(\omega, a) \in <$, donde a es algún elemento de $\mathcal{P}(\omega)$, de ahí que $\rho(a) \leqslant \omega$ y $\rho((\omega, a)) = \bigcup\{s(\rho(x)) : x \in (\omega, a)\} = \bigcup\{s(s(\omega))\} =$

$s(s(\omega))$, luego $s(s(\omega)) < \rho(<) \leqslant s(s(s(\omega)))$, de lo cual se obtiene $\rho(<) = s(s(s(\omega))) < s(s(s(s(\omega))))$, así que $<\in R(s(s(s(s(\omega)))))$ y por consecuencia $\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle \in R(\omega \cdot 2)$.
Ahora, por el *teorema de Cantor*, $|\omega| < |\mathcal{P}(\omega)|$, entonces $\mathcal{P}(\omega)$ no es un conjunto numerable, por lo cual el ordinal isomorfo a $\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle$, dígase α, no es numerable. Por lo tanto, $\alpha \notin R(\omega \cdot 2)$. $\square$

Corolario 2.1.10 *En $R(\omega \cdot 2)$ se satisface la negación del* axioma de reemplazo.

Demostración: Sean σ la fórmula de la teoría de conjuntos: «*Para cada estructura bien ordenada $\langle S, < \rangle$ existe un ordinal α tal que $\langle S, < \rangle$ es isomorfo a $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.*» y $B = \{\langle S, < \rangle \in R(s(s(s(s(\omega))))) : \langle S, < \rangle$ *es un buen orden*$\}$.
Se tiene que si $\sigma(\langle S, < \rangle, \alpha)$ y $\sigma(\langle S, < \rangle, \beta)$, como $\langle S, < \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ y $\langle S, < \rangle \cong \langle \beta, \in_\beta \rangle$ (son estructuras isomorfas), $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \cong \langle \beta, \in_\beta \rangle$, debido a que la relación $\cong$ es transitiva. Además, al ser α y β son ordinales, se obtiene $\alpha = \beta$, por lo cual el ordinal que cumple lo que estipula σ es *único* para cada elemento de B.
También $\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle$ es una estructura bien ordenada en $R(\omega \cdot 2)$ y sea α un ordinal tal que $\sigma(\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle, \alpha)$, entonces $\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle$ es isomorfo a $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.Entonces, por el lema 2.1.9, $\alpha \notin R(\omega \cdot 2)$.
Ahora, B es subconjunto de $R(s(s(s(s(\omega))))) \in R(\omega\dot{2})$, luego es elemento de $R(\omega\dot{2})$ gracias al axioma de comprensión. Sin embargo, $\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle \in B$ y $\sigma(\langle \mathcal{P}(\omega), < \rangle, \alpha)$ se satisface y se tiene que para cualquier $B \in R(\omega \cdot 2), \alpha \notin B$, ya que si existiera algún $B \in R(\omega \cdot 2)$ con $\alpha \in B$, entonces $\alpha \in R(\omega \cdot 2)$ lo cual no es posible. Por lo tanto, en $R(\omega \cdot 2)$ se satisface la negación del axioma de reemplazo. $\square$

Teorema 2.1.11 *El axioma de reemplazo no es teorema de ZC.*

Demostración: Si el axioma de reemplazo fuera teorema de ZC, entonces para cualquier modelo de ZC se debería de satisfacer su enunciado. De la proposición 2.1.8 se sigue que en $R(\lambda)$ es modelo de ZC siempre y cuando λ sea un ordinal límite mayor a ω. Entonces para $\omega \cdot 2$, el cual es el menor ordinal límite mayor a ω, se tiene que $R(\omega \cdot 2)$ debería modelar el axioma de reemplazo. Sin embargo, esta afirmación contradice el corolario anterior, ya que $R(\omega \cdot 2)$ modela a la negación del axioma de reemplazo. Por lo tanto, el axioma de reemplazo no es teorema de ZC. $\square$

El teorema 2.1.11 muestra que dentro de la teoría ZC no es posible deducir el axioma de reemplazo, eso quiere decir, es independiente de los demás axiomas de ZFC^{-}.

2.2. Los conjuntos hereditarios menores que κ

El **axioma de potencia** establece que para cada conjunto x, hay un conjunto y tal que cualquier subconjunto de x es elemento de dicha y, es decir, se cumple el siguiente enunciado:

$$\forall z(z \subseteq x \to z \in y))$$

Entonces, aplicando el axioma de comprensión, $\{z : z \subseteq x\}$ es conjunto, el cual es el conjunto potencia de x denotado por $\mathcal{P}(x)$.

El axioma de *potencia* se puede usar en lugar de *reemplazo* para demostrar la existencia de A^*, ya que $A^* = \{y \in \mathcal{P}(A) : \exists x(x \in A \land y = \{x\})\}$.

De esta manera, es posible construir por medio de alguno de los dos axiomas, ya sea *reemplazo* o *potencia*, al conjunto ω^*. Pero al usar el axioma de potencia, se necesita un conjunto *no numerable*, $\mathcal{P}(\omega)$, para construir ω^*, que es *numerable*. Esta es una de las razones de que el uso de reemplazo es preferido para este tipo de resultados.

En esta sección el análisis se centra en la teoría $ZFC - P$, es decir, ZFC sin el axioma de potencia. De forma similar a la sección 2.1, se muestra que existe un modelo de $ZFC - P$, a saber $H(\kappa)$, para después verificar que *potencia* es un axioma independiente de $ZFC - P$.

2.2.1. Independencia del axioma de potencia

Definición 2.2.1 *Sea κ un cardinal cualquiera. Se denota a la colección de conjuntos* hereditarios menores que κ *por* $H(\kappa) = \{x \in BF : |CT(x)| < \kappa\}$.

Gracias a la proposición 3.3.4, se concluye que $H(\kappa)$ es un conjunto en ZFC^- para cualquier cardinal κ. Además, $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo para cualquier ordinal κ, como se muestra en lo siguiente

Proposición 2.2.2 *$H(\kappa)$ es un conjunto transitivo para κ cualquier ordinal.*

Demostración: Sean $x \in H(\kappa)$ y $y \in x$. Entonces, por definición de $H(\kappa)$, se tiene $|CT(x)| < \kappa$. Además, $CT(y) \subseteq CT(x)$, así $|CT(y)| \leqslant |CT(x)|$, de esta manera $|CT(y)| < \kappa$. Por lo tanto, $y \in H(\kappa)$. □

Definición 2.2.3 *Sea α un ordinal. Se dice que α es* regular *si y sólo si $cf(\alpha) = \alpha$.*

Teorema 2.2.4 *Sea κ un cardinal no numerable,* regular *y **no*** inaccesible fuerte, *entonces:*

1. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de existencia.*
2. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de extensión.*
3. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de comprensión.*
4. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma del par.*
5. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de unión.*
6. *En $H(\kappa)$ se satisface la negación del axioma del conjunto potencia.*
7. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de fundación.*
8. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de infinito.*
9. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de reemplazo.*
10. *En $H(\kappa)$ se satisface el axioma de elección.*

Demostración: De la proposición 2.2.2 se infiere $H(\kappa)$ es transitivo:

1. Por hipótesis $\aleph_0 < \kappa$. Como $|CT(\emptyset)| = \emptyset < \aleph_0, |CT(\emptyset)| < \kappa$, de esta forma $\emptyset \in H(\kappa)$. Por lo tanto, gracias al lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de existencia.

2. De la proposición 2.2.2 se sigue $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo, entonces, por el lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de extensión.

3. Para $x \in H(\kappa)$ y $y \subseteq x$ se tiene, por el lema 1.1.11, $y \in BF$. Además, por definición, $|CT(x)| < \kappa$ y, por la observación 1.1.4, $CT(y) \subseteq CT(x)$, de esta forma $|CT(y)| \leqslant |CT(x)|$, así $|CT(y)| < \kappa$, luego $y \in H(\kappa)$. Entonces, por el lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de comprensión.

4. Para $x, y \in H(\kappa)$, se tiene, por el lema 1.1.12, $\{x, y\} \in BF$. Además,$|CT(x)| < \kappa$ y $|CT(y)| < \kappa$ y $CT(\{x, y\}) = \{x, y\} \cup CT(x) \cup CT(y) = \bigcup\{\{x, y\}, CT(x), CT(y)\}$. También, $\kappa > \aleph_0$ y *regular*, $|\bigcup\{\{x, y\}, CT(x), CT(y)\}| = |\{x, y\}| + |CT(x)| + |CT(y)| - \bigcap\{\{x, y\}, CT(x), CT(y)\} < \kappa$ gracias a la porposición 3.1.2. Así, $|CT(\{x, y\})| = |\bigcup\{\{x, y\}, CT(x), CT(y)\}| < \kappa$, luego $\{x, y\} \in H(\kappa)$. Entonces, por el lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma del par.

5. Sean $A \in H(\kappa)$ y $B = \bigcup A$. Por el lema 1.1.12 $B \in BF$. También, $|CT(A)| < \kappa$. Ahora, sea $x \in CT(B)$, entonces se cumple alguna de las siguientes opciones:

   - Si $x \in B$, entonces $x \in y$ para algún $y \in A$. De esta manera, $x \in CT(A)$.
   - Si $x \notin B$, entonces existe algún $z \in B$ tal que $x \in CT(z)$. Por el inciso anterior, $z \in CT(A)$ y como $CT(A)$ es transitivo, $z \subseteq CT(A)$, entonces $CT(z) \subseteq CT(A)$, por lo cual $x \in CT(A)$.

   De esta forma $CT(B) \subseteq CT(A)$, así $|CT(B)| \leqslant |CT(A)|$. Como $|CT(A)| < \kappa, |CT(B)| < \kappa$. Por lo tanto, $B \in H(\kappa)$. Entonces, por el lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de unión.

6. Como κ no es fuerte, sea $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geqslant \kappa$. Como λ es ordinal, $CT(\lambda) = \lambda$, entonces $|CT(\lambda)| < \kappa$, así $\lambda \in H(\kappa)$.
   Por otro lado, se sabe que $|\mathcal{P}(\lambda)| = 2^\lambda$, es más, como $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq CT(\mathcal{P}(\lambda)), |\mathcal{P}(\lambda)| \leqslant |CT(\mathcal{P}(\lambda))|$, entonces $|CT(\mathcal{P}(\lambda))| \geqslant 2^\lambda \geqslant \kappa$. Por lo tanto, $\lambda \in H(\kappa)$ pero $\mathcal{P}(\lambda) \notin H(\kappa)$.
   Por lo tanto, en $H(\kappa)$ se satisface la negación del axioma de potencia.

7. Por definición, $H(\kappa) \subseteq BF$, entonces, por el lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de fundación.

8. De la proposición 2.2.2 se sigue $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo, también, por los incisos anteriores en $H(\kappa)$ se satisfacen los axiomas de extensión, comprensión, par y unión. Además, al ser $\aleph_0 < \kappa$, se tiene $|\omega| < \kappa$. Como ω es transitivo, $CT(\omega) = \omega$. Entonces $|CT(\omega)| < \kappa$. Por lo tanto, $\omega \in H(\kappa)$. Entonces, por el lema 1.2.6, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de infinito.

9. Se tiene que $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo por la proposición 2.2.2. Ahora, sea f una función tal que $dom(f) \in H(\kappa)$ y $ran(f) \subseteq H(\kappa)$. Así, $|CT(dom(f))| < \kappa$ y para cada $y \in ran(f)$ se sigue que $|CT(y)| < \kappa$. Además, de $|ran(f)| \leqslant |dom(f)|$ y $dom(f) \subseteq CT(dom(f))$ se sigue $|ran(f)| < \kappa$. Como κ es no numerable, regular y $CT(ran(f)) = \{CT(y) : y \in ran(f)\}$ (el cual es conjunto gracias a los axiomas de reemplazo y unión), $|CT(ran(f))| < \kappa$, por la proposición 3.1.2, de esta forma $ran(f) \in H(\kappa)$. Entonces, por el lema 1.2.3, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de reemplazo.

10. Sean $F \in H(\kappa)$ una colección no vacía de conjuntos ajenos y C un conjunto de elección para F
Debido a que no es posible asegurar que $C \in H(\kappa)$, sea $C' = C \cap \bigcup F$. Así, si $x \in F$, entonces $C \cap x = \{a\}$, de esta manera $a \in x$ y $a \in C$, por lo cual $a \in \bigcup F$ y $a \in C$, de ahí que $a \in C \cap \bigcup F = C'$, por eso se sigue que $a \in C' \cap x$ y si $b \in C' \cap x$, entonces, como $C' \subseteq C, b \in C$, así $b \in C \cap x = \{a\}$, luego $a = b$, por lo cual, $C' \cap x = \{a\}$. También, por los lemas 1.1.11 y 1.1.12, $C' \in BF$, ya que $C' \subseteq \bigcup F \in BF$.
Por otra parte, $C' \subseteq \bigcup F$ y como en $H(\kappa)$ es válido el *axioma de unión* y $F \in H(\kappa), \bigcup F \in H(\kappa)$, entonces $\bigcup F \in H(\kappa)$, es más $|CT(\bigcup F)| \leqslant |CT(F)| < \kappa$, y como $C' \subseteq \bigcup F, CT(C') \subseteq CT(\bigcup F)$, de esta forma $|CT(C')| < \kappa$. Por lo tanto, $C' \in H(\kappa)$. Entonces, por el lema 1.2.6, en $H(\kappa)$ se satisface el axioma de elección. □

A partir del teorema 2.2.4 junto con la proposición 2.2.2 se sigue que $H(\kappa)$ es un modelo transitivo de $ZFC - P + \neg P$, donde P denota al *axioma de potencia*. Por lo tanto, es posible obtener los siguientes resultados.

Corolario 2.2.5 *(ZFC) Si $ZFC^{-} - P$ es consistente, entonces el axioma de potencia es independiente de $ZFC - P$.*

Demostración: Si se supone que el axioma de potencia se deduce de $ZFC - P$ y que $ZFC - P$ es consistente, entonces $ZFC - P + \neg P$ no sería consistente, pero el teorema 2.2.4 muestra la existencia de un modelo de $ZFC - P + \neg P$, de forma que $ZFC - P + \neg P$ es consistente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el axioma de potencia es independiente de $ZFC - P$. □

Corolario 2.2.6 *Si ZFC^{-} es consistente, entonces no es posible demostrar en ZFC^{-} que ZFC^{-} es equiconsistente con $ZFC - P$.*

Demostración: Supóngase que ZFC^{-} es consistente y que en ZFC^{-} es posible deducir la consistencia de ZFC^{-} mediante la consistencia de $ZFC - P$.
Por el teorema 2.2.4, ZFC^{-} demuestra la consistencia de $ZFC - P$ y de esa manera, por la suposición anterior, se obtiene que ZFC^{-} deduce su propia consistencia. Lo cual contradice el *segundo teorema de incompletitud de Gödel*. Por lo tanto, no es posible demostrar en ZFC^{-} que ZFC^{-} es equiconsistente con $ZFC - P$. □

El corolario 2.2.5 muestra que no es posible deducir el axioma de potencia en la teoría $ZFC - P$, de esta manera se tiene la independencia del axioma de potencia de los demás axiomas de ZFC^{-}. Por otra parte, del corolario 2.2.6 se concluye que en la teoría $ZFC - P$ no es posible construir un modelo de ZFC^{-}.

2.3. Los conjuntos pseudo-hereditarios de cardinalidad menor a κ

Esta sección tiene base en el artículo «On the axiom of union» (Oman, 2010), en el cual se analiza la teoría $ZFC - U$, donde U denota al axioma de unión. De una manera parecida a la sección anterior, se define a la colección de los conjuntos *pseudo-hereditarios* de cardinalidad menor a κ y se muestra que es un modelo estándar de $ZFC - U$ en el cual se satisface la negación de unión, concluyendo la independencia de unión de $ZFC - U$.

2.3.1. Independencia del axioma de unión

Este apartado se desarrolla en la teoría ZFC, donde se establece la noción de ser conjunto *pseudo-hereditario* de cardinalidad menor a κ, para κ un cardinal, con el propósito de demostrar que la colección de conjuntos pseudo-hereditarios menores que κ es un modelo estándar de la teoría $ZFC - U + \neg U$. Por ello, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.3.1 *Sea κ un cardinal infinito*
Un conjunto X es pseudo-hereditario de cardinalidad menor a κ si y sólo si:

$$|X| < \kappa \tag{2.1}$$

$$\forall y \in CT(X)(|y| < \kappa) \tag{2.2}$$

Definición 2.3.2 *Se denota como H_κ a la colección de todos los conjuntos que son pseudo-hereditario de cardinalidad menor a κ.*

Cabe mencionar que las colecciones $H(\kappa)$ y H_κ se comportan distinto, lo cual es notorio en el cardinal finito 2, ya que $\{\{\emptyset\}\} \in H_2$ pero $\{\{\emptyset\}\} \notin H(2)$. Es decir, no siempre un conjunto pseudo-hereditario de cardinalidad menor que κ es hereditario menor que κ. Como resultado del lema 3.3.2 y gracias al axioma de comprensión es posible decir que

H_κ es *conjunto* para cualquier cardinal inifinito κ, ya que si se tiene un cardinal infinito κ, si κ es regular $H_\kappa \subseteq R(\kappa)$ que es un conjunto. Es más, en el caso de que κ no es un cardinal regular, existe algún cardinal regular, llámese λ, tal que $\kappa < \lambda$, por lo cual $H_\kappa \subseteq H_\lambda \subseteq R(\lambda)$.

Proposición 2.3.3 *Sea κ un cardinal límite singular fuerte. Entonces H_κ es una clase transitiva.*

Demostración: Sea $x \in H_\kappa$, entonces x cumple (2.1) y (2.2). Sea $y \in x$, entonces $y \in CT(x)$ y por (2.2) $|y| < \kappa$. Por lo cual, y cumple (2.1). Por otro lado, como $y \in x$, por la observación 1.1.3, $CT(y) \subseteq CT(x)$. Así, si $z \in CT(y)$, entonces $z \in CT(x)$ y por (2.2) $|z| < \kappa$. Por lo cual, y cumple (2.2). Por lo tanto, y es un conjunto *pseudo-hereditario de cardinalidad menor a κ* y así $y \in H_\kappa$. □

Teorema 2.3.4 *Sea κ un cardinal límite singular fuerte. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *En H_κ se satisface el axioma de existencia.*
2. *En H_κ se satisface el axioma de extensión.*
3. *En H_κ se satisface el esquema de comprensión.*
4. *En H_κ se satisface el axioma del par.*
5. *En H_κ se satisface la negación del axioma de unión.*
6. *En H_κ se satisface el axioma de potencia.*
7. *En H_κ se satisface el axioma de fundación.*
8. *En H_κ se satisface el axioma de infinito.*
9. *En H_κ se satisface el axioma de reemplazo.*
10. *En H_κ se satisface el axioma de elección.*

Demostración:

1. Primero, se tiene que $|\emptyset| = 0 < \kappa$, pues $\kappa > \omega > 0$, por lo cual $\emptyset$ cumple con (2.1). Después, $CT(\emptyset) = \emptyset$, entonces, si $t \in CT(\emptyset)$, se tiene que $|t| < \kappa$ por vacuidad. Así, $\emptyset$ cumple con (2.2). Por lo tanto, $\emptyset \in H_\kappa$. Así, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el axioma de existencia.

2. Como, por la proposición 2.3.3, H_κ es transitivo, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el axioma de extensión.

3. Sean $x \in H_\kappa$ y $y \subseteq x$- Por definición, $|y| \leqslant |x| < \kappa$, así y cumple (2.1). Además, por la *observación 1.1.4*, $CT(y) \subseteq CT(x)$, por lo cual, si $z \in CT(y)$, entonces $z \in CT(x)$ y así, por definición, $|z| < \kappa$. De ahí que, y cumple (2.2). De esta manera $y \in H_\kappa$. Así, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el esquema de comprensión.

4. Sean $x, y \in H_\kappa$ y sea $B = \{x, y\}$. Entonces, $|B| = 2 < \omega < \kappa$, ya que κ es límite fuerte, así B cumple (2.1).
   Sea $b \in CT(B)$, entonces:

   a) $b \in B$ o

   b) $b \in t$ para algún $t \in CT(B)$.

   Si $b \in B$, entonces $b = x$ o $b = y$ y como $x, y \in H_\kappa$, $b \in H_\kappa$. Entonces, por (2.1), $|b| < \kappa$. Por otro lado, si $b \in t$ para algún $t \in CT(B)$, entonces, sin pérdida de generalidad, supóngase $t \in CT(x)$, por lo cual $b \in CT(x)$, debido a la trasitividad de $CT(x)$. Como $x \in H_\kappa$, por (2.2), $|b| < \kappa$. De esta manera, B cumple (2.2) y de ahí, $B \in H_\kappa$. Así, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el axioma del par.

5. Como κ es un cardinal singular, hay un cardinal $\lambda < \kappa$ tal que $cf(\kappa) = \lambda$.
   Sean $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ una función cofinal y $\mathcal{F} = \{S \in \kappa : S \in ran(f)\}$.
   Obsérvese que $|\mathcal{F}| \leqslant \lambda$ y si $S \in \mathcal{F}$, entonces $S \subseteq \kappa$, debido a que κ es transitivo. Además, $|S| < \kappa$, ya que $S \in \kappa$ y κ es cardinal. También, si $x \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces $x \in S$, para algún $S \in \mathcal{F}$, entonces $x \in S \in \kappa$ y como κ es transitivo, $x \in \kappa$.

Por lo cual $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \kappa$. Por otro lado, si $x \in \kappa$, como f, es cofinal, $x \in f(\alpha)$, para algún $\alpha \in \lambda$. Además, $f(\alpha) \in \mathcal{F}$, por lo cual $x \in \bigcup \mathcal{F}$. De esta forma, $\bigcup \mathcal{F} = \kappa$. Entonces, hay una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de κ con $|\mathcal{F}| < \kappa$ lo cual implica que $\mathcal{F}$ cumple con (2.1). Adicionalmente, se tiene que $|S| < \kappa$ para toda $S \in \mathcal{F}$ y $\bigcup \mathcal{F} = \kappa$.

Ahora, sea $t \in CT(\mathcal{F})$, entonces:

a) $t \in \mathcal{F}$ o

b) $t \in CT(y)$ para algún $y \in \mathcal{F}$

Si $t \in \mathcal{F}$, entonces $t \in \kappa$ y como κ es cardinal, $|t| < \kappa$. Por otra parte, si $t \in CT(y)$ para algún $y \in \mathcal{F}$, como $y \in \kappa$ y κ es transitivo, $t \in \kappa$. Entonces $|t| < \kappa$, pues κ es cardinal. Por lo cual, $\mathcal{F}$ cumple (2.2) y así $\mathcal{F} \in H_\kappa$. Sin embargo, como $\bigcup \mathcal{F} = \kappa$ y $\kappa \nless \kappa$, $\bigcup \mathcal{F} \notin H_\kappa$. Por lo tanto, en H_κ se satisface la **negación** del axioma de unión.

6. Por la proposición 2.3.3, H_κ es transitivo. Sean $x \in H_\kappa$ y $\mathcal{P}(x)$, entonces, $|x| < \kappa$, ya que $x \in H_\kappa$. Como κ es singular fuerte, $2^{|x|} < \kappa$. Por otro lado, como $\mathcal{P}(x) \cap H_\kappa \subseteq \mathcal{P}(x)$, $|\mathcal{P}(x) \cap H_\kappa| \leqslant |\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|}$. De esta manera $|\mathcal{P}(x)| < \kappa$ y con eso $\mathcal{P}(x) \cap H_\kappa$ cumple con (2.1).

   Ahora, sea $t \in CT(\mathcal{P}(x) \cap H_\kappa)$, luego sucede alguna de las siguientes opciones:

   a) $t \in \mathcal{P}(x) \cap H_\kappa$ o

   b) $t \in CT(y)$ para algún $y \in \mathcal{P}(x) \cap H_\kappa$

   Si $t \in \mathcal{P}(x) \cap H_\kappa$, entonces $t \subseteq x$ y $t \in H_\kappa$, de esta manera $|t| < \kappa$. Por otro lado, si $t \in CT(y)$ para algún $y \in \mathcal{P}(x) \cap H_\kappa$, entonces, $|t| < \kappa$, ya que $y \in H_\kappa$. Así, $\mathcal{P}(x) \cap H_\kappa$ cumple (2.2) y por ello $\mathcal{P}(x) \cap H_\kappa \in H_\kappa$. Entonces, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el axioma de potencia.

7. Por definición $H_\kappa \subseteq BF$, ya que en ZFC se tiene el axioma de fundación, de esta forma, por el teorema 1.1.9, para cada $x \in H_\kappa$, se tiene $x \in BF$. Entonces, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el axioma de fundación.

8. Por la proposición 2.3.3, H_κ es transitivo. También, por resultados anteriores, los axiomas de extensión, esquema de comprensión y par se satisfacen en H_κ. Como κ es un cardinal singular fuerte, $|\omega| < \kappa$, entonces ω cumple (2.1). Por otro lado, como ω es transitivo, $CT(\omega) = \omega$. Además, para cualquier $n \in \omega$ se obtiene que $|n| < \omega$. De esta manera, si $n \in CT(\omega), |n| < \omega < \kappa$, así $|n| < \kappa$ y ω cumple (2.2). Por lo tanto, $\omega \in H_\kappa$. Así, por el lema 1.2.6, en H_κ se satisface el axioma de infinito.

9. Por la proposición 2.3.3, H_κ es transitivo. Sea f una función tal que $dom(f) \in H_\kappa$ y $ran(f) \subseteq H_\kappa$. Como f es función, $|ran(f)| \leqslant |dom(f)|$. También, que $dom(f) \in H_\kappa$ implica $|dom(f)| < \kappa$, por eso $|ran(f)| < \kappa$, así $ran(f)$ cumple con (2.1).
   Sea $t \in CT(ran(f))$, entonces:

   i) $t \in ran(f)$ o

   ii) $t \in CT(y)$ para alguna $y \in ran(f)$.

   Para cada $t \in ran(f)$, como $ran(f) \subseteq H_\kappa$, $t \in H_\kappa$, así $|t| < \kappa$. Por otra parte, si $t \in CT(y)$ para alguna $y \in ran(f)$, entonces, por lo anterior $y \in H_\kappa$, de ahí $|t| < \kappa$. De esto, se sigue que $ran(f)$ cumple con (2.2). Por lo tanto, $ran(f) \in H_\kappa$. Así, por el lema 1.2.3, en H_κ se satisface el axioma de reemplazo.

10. Por la proposición 2.3.3, H_κ es transitivo, además, por resultados anteriores los axiomas de extensión, esquema de comprensión y par se satisfacen en H_κ. De esta forma, sea $F \in H_\kappa$ no vacío tal que sus elementos sean ajenos, entonces por el axioma de elección en ZFC, existe un conjunto C un conjunto de lección para F. Además, por el axioma de unión (en ZFC), existe $\bigcup F$. De esta forma, sea $C' = C \cap \bigcup F$.
    Ahora, para $x \in F$ se tiene $C \cap x = \{a\}$ para algún a, de esta manera $a \in x$ y $a \in C$, con eso $a \in \bigcup F$ y $a \in C$, por lo cual $a \in C \cap \bigcup F = C'$, luego $a \in C' \cap x$. También, si $b \in C' \cap x$, entonces $b \in x$ y $b \in C' \subseteq C$, por lo cual $b \in x$ y $b \in C$, y como $C \cap x = \{a\}$, $b = a$. Por lo tanto, $C' \cap x = \{a\}$. Así, C' cumple que para

cualquier $x \in F$, $C' \cap x = \{a\}$, es decir, C' es un conjunto de elección para F. Ahora, basta verificar que $C' \in H_\kappa$

Sean $f = \{(a, x) \in C' \times F : a \in x\}$, $a \in C'$ y $x, y \in F$, si $(a, x), (a, y) \in f$, entonces $a \in x$ y $a \in y$, por lo cual se tiene que $a \in x \cap y$, pero los elementos de F son ajenos, de esta manera, $x = y$. Por lo tanto, f es función. Por otro lado, sea $x \in F$ y si $(a, x), (b, x) \in f$, entonces $a \in x$ y $b \in x$, eso quiere decir que $a, b \in C' \cap x$, como $C' \cap x = \{c\}$ para algún c, entonces se tiene que $a = c$ y $b = c$, así $a = b$. Por lo tanto, f es inyectiva. Así, $|C'| \leqslant F$. Además, como $F \in H_\kappa$, $|F| < \kappa$, entonces $|C'| < \kappa$, por lo cual C' cumple (2.1).

Sea $t \in CT(C')$, entonces:

i) $t \in C'$ o

ii) $t \in CT(s)$ para algún $s \in C'$

Si $t \in C'$, como $C' \subseteq \bigcap F$, $t \in x$ para algún $x \in F$, así $t \in CT(F)$. Por otro lado, si $t \in CT(s)$ para algún $s \in C'$, como $s \in x$ para algún $x \in F$, se tiene que $t \in CT(x)$, entonces $t \in CT(F)$. Y como $F \in H_\kappa$, $|t| < \kappa$. Por lo cual, C' cumple (2.2) y por lo tanto $C' \in H_\kappa$. Así, por el lema 1.2.6, en H_κ se satisface el axioma de elección. □

El teorema 2.3.4 muestra que, en efecto, H_κ es un modelo transitivo de $ZFC - U + \neg U$, por lo cual se obtienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.3.5 *Si $ZFC - U$ es consistente, entonces el axioma de unión no es teorema de $ZFC - U$.*

Demostración: Supóngase que el axioma de unión es teorema de $ZFC - U$. Por hipótesis, $ZFC - U$ es consistente, entonces $ZFC - U + \neg U$ no es consistente, pero el teorema 2.3.4 muestra un modelo de $ZFC - U + \neg U$, así $ZFC - U + \neg U$ es consistente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el axioma de unión no es teorema de $ZFC - U$

□

Corolario 2.3.6 *Si ZFC es consistente, entonces no es posible demostrar en ZFC que ZFC es equiconsistente con $ZFC - U$.*

Demostración: Por hipótesis, ZFC es consistente y, por el teorema 2.3.4, ZFC demuestra la consistencia de $ZFC - U$, de esa manera, suponer que, dentro de ZFC, la consistencia de $ZFC - U$ implica la consistencia de ZFC, se obtiene que la consistencia de ZFC es deducible en ZFC. Lo cual contradice el *segundo teorema de incompletitud de Gödel*. Por lo tanto, no es posible demostrar en ZFC que ZFC es equiconsistente con $ZFC - U$. $\square$

El corolario 2.3.5 muestra que no es posible desarrollar dentro de ZFC el axioma de unión, esto es, que el axioma de unión es independiente de los demás axiomas. Mientras que el corolario 2.3.6 muestra que en ZFC no es posible demostrar que la consistencia de ZFC implique la consistencia de $ZFC - U$.

Capítulo 3

Comparación de modelos

Esta sección es una comparación de los modelos construidos en capítulos anteriores, es decir, $R(\alpha)$, $H(\alpha)$ y H_α. Se muestra su tamaño y la relación que existe entre ellos mediante la contención.

Para lo primero, se requieren propiedades de cardinales, las cuales se encuentran en la primera sección; para lo segundo, se observa que para algunos cardinales κ se cumple que los modelos son iguales, lo cual da pie a cuestionar si siempre se cumple la igualdad o para qué tipo de cardinales se cumple, lo cual se encuentra en la segunda y última sección.

Cabe resaltar que los resultados de este capítulo están basados en la teoría ZFC, en caso contrario se hace la aclaración de la teoría utilizada.

3.1. Resultados sobre cardinales

En esta sección se demuestran algunos resultados sobre cardinales, los cuales pueden ser encontrados en el (Kunen, 2013). Se utiliza la noción de que un cardinal κ es **infinito** si y sólo si $\omega \leqslant \kappa$.

Las primeras dos proposiciones muestran de qué manera un cardinal infinito acota la unión de alguna familia de conjuntos. La primera es para cualquier cardinal infinito, la cual muestra que la unión de la familia tiene a lo más el cardinal infinito en cuestión. La segunda es para cardinales infinitos regulares, es decir, aquellos que son iguales a su cofinalidad, en la cual se muestra que el cardinal de la unión de la familia es menor al cardinal infinito en cuestión.

Proposición 3.1.1 *Sea κ un cardinal infinito. Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos con $|\mathcal{F}| \leqslant \kappa$ y $|X| \leqslant \kappa$ para toda $X \in \mathcal{F}$, entonces $|\bigcup \mathcal{F}| \leqslant \kappa$.*

Demostración: Supóngase que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (si fuera vacío el resultado sería trivial) y también que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (debido a que $\emptyset$ no aporta elementos a la unión.). Sea $f : \kappa \to \mathcal{F}$ suprayectiva y, para cada $X \in \mathcal{F}$ sea $g_X : \kappa \to X$ suprayectiva. Para $S = {}^{\kappa}(\bigcup \mathcal{F})$, por el axioma de elección, existe r tal que $\langle S, r \rangle$ es un buen orden. Ahora, para cada $\alpha \in \kappa$ sea $B_\alpha = \{g \in S : ran(g) = f(\alpha)\}$, el cual existe por comprensión y no es vacío porque para cada $\alpha \in \kappa$ se tiene que $f(\alpha) = X$, para algún $X \in \mathcal{F}$ y existe $g_X : \kappa \to X$ suprayectiva, por lo cual $ran(g_X) = X$, es decir, $ran(g_X) = f(\alpha)$. Además, se tiene $g_X \in S$, entonces $g_X \in B_\alpha$. De esta manera, B_α tiene un r-mínimo, al cual, por conveniencia se denota por $g_{X,\alpha}$. Por lo cual, es posible construir la función $h : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $h(\alpha, \beta) = g_{X,\alpha}(\beta)$. También, h es suprayectiva, debido a que si $x \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$ y como f es suprayectiva, existe $\alpha \in \kappa$ tal que $f(\alpha) = X$ y con ello $ran(g_{X,\alpha}) = X$, por lo cual existe $\beta \in \kappa$ tal que $g_{X,\alpha}(\beta) = x$. De esta forma, $h(\alpha, \beta) = g_{X,\alpha}(\beta) = x$ y por lo ello h es suprayectiva.
Además, como $|\kappa \times \kappa| = \kappa$, existe una función biyectiva $G : \kappa \to \kappa \times \kappa$, así $h \circ G$ es una función suprayectiva de κ sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Por lo tanto, $|\bigcup \mathcal{F}| \leqslant \kappa$. □

Proposición 3.1.2 *Si κ es un cardinal regular infinito y $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos tal que $|\mathcal{F}| < \kappa$ y que $|S| < \kappa$ para toda $S \in \mathcal{F}$, entonces $|\bigcup \mathcal{F}| < \kappa$.*

Demostración: Por la proposición 3.1.1, $|\bigcup \mathcal{F}| \leqslant \kappa$. Supóngase $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$, entonces existe $g : \bigcup \mathcal{F} \longrightarrow \kappa$ suprayectiva, por lo cual para cada $\alpha < \kappa$ hay algún $x \in \bigcup \mathcal{F}$ tal que $g(x) = \alpha$. También, sea $f : \mathcal{F} \longrightarrow \kappa$ tal que $f(S) = \bigcup g[S]$, lo cual está bien definido ya que para cada $S \in \mathcal{F}$ se tiene $|g[S]| < |S| < \kappa$, de esta forma $g[S] \subsetneq \kappa$ y por

ello $\bigcup g[S] < \kappa$.
Ahora, sea $\beta < \kappa$, entonces hay algún $x \in \bigcup \mathcal{F}$ tal que $g(x) = \beta$. Como $x \in S$ para algún $S \in \mathcal{F}$, $g(x) \in g[S]$, de lo cual se tiene $\beta = g(x) < \bigcup g[S] = f(S)$, es decir, para todo $\alpha < \kappa$ hay un $S \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha < f(S)$. Esto implica que f es una función cofinal, por lo cual $cf(\mathcal{F}) = \kappa$, pero esto contradice que κ es regular. Por lo tanto, $|\bigcup \mathcal{F}| < \kappa$.
$\square$

El funcional *aleph* ($\aleph$) tiene gran importancia en la teoría de conjuntos, ya que se comporta como un epimorfismo entre la clase de los ordinales y la clase de los cardinales infinitos, lo que da lugar a que todo cardinal infinito sea de la forma $\aleph_\alpha$ para algún ordinal α. El cardinal $\aleph_0$ representa la cantidad de elementos de un conjunto infinito como el de los números naturales (ω), de hecho este cardinal es el infinito más pequeño.

Definición 3.1.3 $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ *se construye mediante recursión transfinita sobre* α *de la siguiente manera.*

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$.
- $\aleph_{s(\alpha)} = \omega_{s(\alpha)} = (\aleph_\alpha)^+$.
- $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ *siempre que* α *sea un ordinal límite.*

A diferencia de $\aleph$, el funcional *beth* ($\beth$) es utilizado para la construcción de cardinales fuertes, ya que $\aleph$ no garantiza que, para cualquier α, $\aleph_\alpha$ sea fuerte, sólo garantiza que es infinito. Por ejemplo, $\aleph_\omega$ es un cardinal límite débil.

Definición 3.1.4 $\beth_\alpha$ *se construye mediante recursión transfinita sobre* α *de la siguiente manera.*

- $\beth_0 = \aleph_0 = \omega$.
- $\beth_{s(\alpha)} = 2^{\beth_\alpha}$.
- $\beth_\alpha = \bigcup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\}$ *siempre que* α *sea un ordinal límite.*

Se sabe que la *hipótesis del continuo* (HC) es equivalente a que $\beth_1 = \aleph_1$, y que la *hipótesis del continuo generalizada* (HCG) es equivalente a que $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$ para cualquier α.

En cuanto a relación de tamaños y cofinalidad entre $\beth_\alpha$ y $\aleph_\alpha$ se obtiene los siguientes

Proposición 3.1.5 *Para cualquier ordinal α, $\alpha \leqslant \aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha$.*

Demostración: Por inducción transfinita sobre α:
Primero se muestra que $\alpha \leqslant \aleph_\alpha$.

- Si $\alpha = 0$, entonces, por definición, $\aleph_\alpha = \aleph_0 = \omega$ y se sabe que $0 = \emptyset \in \omega$. Por lo cual, $0 \leqslant \aleph_0$.
- Si $\alpha = s(\beta)$ para algún β tal que $\beta \leqslant \aleph_\beta$, entonces sea $\gamma \in s(\beta)$, por la hipótesis, $\gamma \leqslant \beta \leqslant \aleph_\beta$, así $\gamma \leqslant \aleph_\beta < \aleph_{s(\beta)}$ y por ello, $\gamma < \aleph_{s(\beta)}$. Por lo cual, $s(\beta) \subseteq \aleph_{s(\beta)}$ y por ser ordinales $s(\beta) \in \aleph_{s(\beta)}$ o $s(\beta) = \aleph_{s(\beta)}$. Por lo tanto, $s(\beta) \leqslant \aleph_{s(\beta)}$.
- Si α es un ordinal límite y para cada $\beta < \alpha, \beta \leqslant \aleph_\beta$, entonces sea $x \in \alpha$, recordando que $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$ y $\aleph_\alpha = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}, x \in \beta$ para algún $\beta < \alpha$ y como, por hipótesis, $\beta \leqslant \aleph_\beta, x \in \aleph_\beta$ así $x \in \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ y por eso $\alpha \subseteq \aleph_\alpha$. Por lo tanto, $\alpha \leqslant \aleph_\alpha$.

Ahora falta mostrar por qué $\aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha$.

- Si $\alpha = 0$, entonces, por definición, $\aleph_\alpha = \aleph_0 = \omega = \beth_0$, entonces $\aleph_0 = \beth_0$. Por lo cual, $\aleph_0 \leqslant \beth_0$.
- Si $\alpha = s(\beta)$ para algún β tal que $\aleph_\beta \leqslant \beth_\beta$, entonces sea $\gamma \in \aleph_{s(\beta)}$, así $|\gamma| \leqslant \aleph_\beta$ y por la hipótesis, $\aleph_\beta \leqslant \beth_\beta$, entonces $|\gamma| \leqslant \beth_\beta$ y por ello, $\gamma \subseteq \beth_\beta$, entonces $\gamma \in \mathcal{P}(\beth_\beta)$ y como $|\mathcal{P}(\beth_\beta)| = 2^{\beth_\beta}$ y γ es ordinal, $\gamma \in 2^{\beth_\beta} = \beth_{s(\beta)}$. Por lo cual, $\aleph_{s(\beta)} \subseteq \beth_{s(\beta)}$ y por ser ordinales $\aleph_{s(\beta)} \leqslant \beth_{s(\beta)}$.
- Si α es un ordinal límite y para cada $\beta < \alpha, \aleph_\beta \leqslant \beth_\beta$, entonces sea $x \in \aleph_\alpha$, recordando que $\aleph_\alpha = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\beth_\alpha = \bigcup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\}, x \in \aleph_\beta$ para algún

$\beta < \alpha$ y como, por hipótesis, $\aleph_\beta \leqslant \beth_\beta, x \in \beth_\beta$ así $x \in \bigcup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\}$ y por eso $\aleph_\alpha \subseteq \beth_\alpha$. Por lo tanto, $\aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha$. □

Corolario 3.1.6 *Si α es tal que $\alpha = \beth_\alpha$, entonces $\alpha = \aleph_\alpha$.*

Demostración: El resultado es inmediato de la proposición 3.1.5, debido a que si $\alpha = \beth_\alpha$, entonces $\alpha \leqslant \aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha$. Por lo tanto, $\alpha = \aleph_\alpha$. □

Proposición 3.1.7 *Si α es un ordinal límite, entonces $cf(\alpha) = cf(\aleph_\alpha) = cf(\beth_\alpha)$.*

Demostración: Primero se muestra que $cf(\alpha) = cf(\aleph_\alpha)$.
Sea $f : \alpha \longrightarrow \aleph_\alpha$ tal que, para cada $\beta \in \alpha, f(\beta) = \aleph_\beta$, como $\aleph$ es un funcional estrictamente creciente (es decir, si $\gamma < \delta$, entonces $\aleph_\gamma < \aleph_\delta$) y $f = \aleph_{\restriction\alpha}$, f es una función estrictamente creciente. Además, $f[\alpha] = \{\aleph_\beta : \beta \in \alpha\}$ y por definición $\aleph_\alpha = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta \in \alpha\} = \bigcup f[\alpha]$, así $f[\alpha]$ es no acotada en $\aleph_\alpha$, por lo cual f es una función cofinal estrictamente creciente- Así, $cf(\alpha) = cf(\aleph_\alpha)$.
Ahora falta mostrar que $cf(\alpha) = cf(\beth_\alpha)$.
La prueba es análoga a lo anterior, debido a que si $g : \alpha \longrightarrow \beth_\alpha$ tal que para cada $\beta \in \alpha, g(\beta) = \beth_\beta$, como $\beth$ es un funcional estrictamente creciente y $g = \beth_{\restriction\alpha}$, g es una función estrictamente creciente. Además, $g[\alpha] = \{\beth_\beta : \beta \in \alpha\}$ y por definición $\beth_\alpha = \bigcup\{\beth_\beta : \beta \in \alpha\} = \bigcup g[\alpha]$, así $g[\alpha]$ es no acotada en $\beth_\alpha$, por lo cual g es una función cofinal estrictamente creciente. Así, $cf(\alpha) = cf(\beth_\alpha)$. □

Como resultado de la proposición anterior, si κ es un cardinal regular y $\kappa = \aleph_\kappa$, entonces $\aleph_\kappa$ es regular. De la misma manera, si κ es un cardinal regular y $\kappa = \beth_\kappa$, entonces $\beth_\kappa$ es regular.

A continuación se muestran algunas hipótesis necesarias para que el cardinal κ tenga la propiedad de que $\kappa = \aleph_\kappa$ o $\kappa = \beth_\kappa$, para lo cual se utiliza la noción de cardinal débil y cardinal fuerte.

Por otro lado, en el presente trabajo es necesaria la noción de cardinales que sean suficientemente *grandes*, por lo cual se define lo siguiente:

Definición 3.1.8 *Sea κ un cardinal infinito. Se dice que κ es **débil** si y sólo si $\kappa > \lambda^+$ para cualquier $\lambda < \kappa$, donde λ^+ es el menor de los cardinales más grandes que λ. Y κ es **fuerte** si y sólo si $\kappa > 2^\lambda$ para cualquier $\lambda < \kappa$.*
Adicionalmente, se tiene que κ es un cardinal inaccesible débil (fuerte) si y sólo si $\kappa < \omega$, κ es débil (fuerte) y κ es regular.

Es importante aclarar que la noción de cardinales inaccesibles no implica su existencia en ZFC, es más, en el corolario 3.3.10 se establece es la existencia de un modelo de ZFC a partir de la teoría $ZFC+$ «*existe un cardinal inaccesible fuerte*». Por lo tanto, suponer que a partir de ZFC se deduce la existencia de cardinales inaccesibles implica que en ZFC es posible construir un modelo de sí mismo, lo cual contradice el segundo teorema de Gödel.

Para cardinales débiles y fuertes se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1.9 *Si κ es débil, entonces $\kappa = \aleph_\kappa$. Si κ es fuerte, entonces $\kappa = \beth_\kappa$*

Demostración: Sea κ un cardinal inaccesible débil. Por inducción sobre α, se demuestra que si $\alpha < \kappa$, entonces $\aleph_\alpha < \kappa$.
Sea $\alpha < \kappa$.

- Si $\alpha = 0$, entonces $\aleph_\alpha = \aleph_0 = \omega < \kappa$, de esta forma $\aleph_\alpha < \kappa$.
- Si $\alpha = s(\beta)$ con $\beta < \kappa$ tal que $\aleph_\beta < \kappa$, entonces $\aleph_\alpha = \aleph_{s(\beta)} = \aleph_\beta^+$ y debido a que, por hipótesis, κ es débil y $\aleph_\beta < \kappa$, se obtiene $\aleph_\beta^+ < \kappa$, por lo cual $\aleph_\alpha < \kappa$.
- Si α es límite y para todo $\beta < \alpha$, $\aleph_\beta < \kappa$, entonces $\aleph_\alpha = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\mathcal{F} = \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ es tal que $|\mathcal{F}| < \kappa$ y por hipótesis, para cualquier $S \in \mathcal{F}$, $|S| < \kappa$, entonces, por la proposición 3.1.2, $|\bigcup\mathcal{F}| < \kappa$. Así, $\aleph_\alpha = |\aleph_\alpha| = |\bigcup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}| = |\bigcup\mathcal{F}| < \kappa$, por lo cual $\aleph_\alpha < \kappa$.

Además, si $\mathcal{F} = \{\aleph_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces $|\mathcal{F}| \leqslant \kappa$ y, por lo anterior, para cada $S \in \mathcal{F}$, $|S| < \kappa$, también κ es un cardinal infinito, entonces, por la proposición 3.1.1, $|\bigcup\mathcal{F}| \leqslant \kappa$. Y al ser κ un cardinal infinito, κ es límite, entonces $\aleph_\kappa = \bigcup\{\aleph_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Así, se tiene que $\aleph_\kappa \leqslant \kappa$.

Por otro lado, la proposición 3.1.5 afirma que $\kappa \leqslant \aleph_\kappa$. Por lo tanto, $\kappa = \aleph_\kappa$.

Ahora, sea κ un cardinal fuerte. Por inducción sobre α, se demuestra que si $\alpha < \kappa$, entonces $\beth_\alpha < \kappa$.

Sea $\alpha < \kappa$.

- Si $\alpha = 0$, entonces $\beth_\alpha = \beth_0 = \omega < \kappa$, de esta forma $\beth_\alpha < \kappa$.
- Si $\alpha = s(\beta)$ con $\beta < \kappa$ tal que $\beth_\beta < \kappa$, entonces $\beth_\alpha = \beth_{s(\beta)} = 2^{\beth_\beta}$ y como, por hipótesis, κ es fuerte y $\beth_\beta < \kappa$, $2^{\beth_\beta} < \kappa$, por lo cual $\beth_\alpha < \kappa$.
- Si α es límite y para todo $\beta < \alpha$, $\beth_\beta < \kappa$, entonces $\beth_\alpha = \bigcup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\mathcal{F} = \{\beth_\beta : \beta < \alpha\}$ es tal que $|\mathcal{F}| < \kappa$ y por hipótesis, para cualquier $S \in \mathcal{F}$, $|S| < \kappa$, entonces, por la proposición 3.1.2, $|\bigcup \mathcal{F}| < \kappa$. Así, $\beth_\alpha = |\beth_\alpha| = |\bigcup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\}| = |\bigcup \mathcal{F}| < \kappa$, por lo cual $\beth_\alpha < \kappa$.

Además, si $\mathcal{F} = \{\beth_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces $|\mathcal{F}| \leqslant \kappa$ y, por lo anterior, para cada $S \in \mathcal{F}$, $|S| < \kappa$. También κ es un cardinal infinito, entonces, por la proposición 3.1.1, $|\bigcup \mathcal{F}| \leqslant \kappa$. Asimismo, κ es límite, entonces $\beth_\kappa = \bigcup\{\beth_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Así, se tiene que $\beth_\kappa \leqslant \kappa$.

Por otro lado, la proposición 3.1.5 afirma que $\kappa \leqslant \beth_\kappa$. Por lo tanto, $\kappa = \beth_\kappa$. □

3.2. Tamaño de $R(\kappa)$

En esta sección se lleva a cabo un estudio más profundo de los modelos construidos en capítulos pasados, se muestra el tamaño de $R(\alpha)$ y su relación con los cardinales de tipo $\beth_\beta$.

Un buen comienzo es probar que $R(\omega)$ es numerable, para lo cual es suficiente el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1 *Para cualquier $n \in \omega, R(n)$ es finito.*

Demostración: Por inducción sobre $n \in \omega$:

- Si $n = 0$, entonces $R(n) = R(0) = \emptyset$ y $\emptyset = 0 < \omega$. Así $|R(n)| < \omega$.
- Si $n = s(m)$ para algún $m < \omega$ tal que $|R(m)| = p < \omega$, entonces $R(n) = R(s(m)) = \mathcal{P}(R(m))$. Como $|R(m)| = p, |\mathcal{P}(R(m))| = 2^p$. También, como $p < \omega, 2^p < \omega$. Así $|R(n)| < \omega$. □

La proposición anterior acota el tamaño de cualquier $R(n)$ para $n \in \omega$, lo cual, además de el hecho de que ω es un cardinal regular, se emplea para probar que el tamaño de $R(\omega)$ es ω.

Lema 3.2.2 $|R(\omega)| = \omega$.

Demostración: Por la proposición 2.1.6, $\omega \subseteq R(\omega)$, debido a eso $\omega \leqslant R(\omega)$.
Por otro lado, como ω es un ordinal límite, $R(\omega) = \bigcup\{R(n) : n < \omega\}$- Además, $R(0) = \emptyset$, de esta manera $R(0)$ no aporta elementos a la unión, por lo cual $\bigcup\{R(n) : n < \omega\} = \bigcup\{R(n) : n < \omega/\{\emptyset\}\}$. Sea $\mathcal{F} = \{R(n) : n < \omega/\{\emptyset\}\}$ y obsérvese que $|\mathcal{F}| = \omega$, de ahí que $|\mathcal{F}| \leqslant \omega$. También, se sabe que si $X \in \mathcal{F}$, entonces $X = R(n)$ para alguna $n \in \omega/\{\emptyset\}$, luego $X < R(\omega)$ y, por la proposición 3.2.1, $|X| < \omega$, entonces $|X| \leqslant \omega$. De esta manera, se tiene un cardinal infinito, ω tal que $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos con $|\mathcal{F}| \leqslant \kappa$ y $|X| \leqslant \kappa$ para toda $X \in \mathcal{F}$, entonces, por la proposición 3.1.1 $|\bigcup\mathcal{F}| \leqslant \kappa$. Además, $R(\omega) = \bigcup\{R(n) : n < \omega\} = \bigcup\{R(n) : n < \omega/\{\emptyset\}\} = \bigcup\mathcal{F}$, de esta forma $|R(\omega)| \leqslant \omega$.
Entonces, por el *teorema de Cantor-Bernstein-Schröder*, $|R(\omega)| = \omega$. □

El lema anterior es un gran resultado, no obstante ω es el más pequeño de los cardinales infinitos, por lo cual es interesante observar el comportamiento del tamaño de $R(\kappa)$ para cualquier κ infinito. Para esto se emplea la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3 *$\omega + \alpha = \alpha$ para todo ordinal $\alpha \geqslant \omega^2$.*

Demostración: Por inducción sobre $\alpha \geqslant \omega^2$.

- Para el caso base, se tiene $\alpha = \omega^2$ y $\omega + \omega^2 = \bigcup\{n + (\omega \dot{m}) : n, m \in \omega\} = \bigcup\{\omega \dot{n} : n \in \omega \setminus \{\emptyset\}\} = \omega^2$.

- Ahora, supóngase $\alpha = s(\beta)$ para $\beta \geqslant \omega^2$ con $\omega + \beta = \beta$. Así, $\omega + \alpha = \omega + s(\beta) = s(\omega + \beta) = s(\beta) = \alpha$.

- Por último, sea α límite, tal que para cualquier $\beta < \alpha$ con $\beta \geqslant \omega^2$ se tiene $\omega + \beta = \beta$. Entonces, $\omega + \alpha = \bigcup\{\omega + \beta : \beta < \alpha\}$. Además, si $\gamma < \alpha$ es tal que $\gamma < \omega^2$, entonces $\gamma < \delta$ para algún $\omega^2 \leqslant \delta < \alpha$, por lo cual $\omega + \gamma < \omega + \delta = \delta$. Así, $\omega + \alpha = \bigcup\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$. Por lo tanto, $\omega + \alpha = \alpha$ para $\alpha \geqslant \omega^2$.

De esta forma se obtiene el siguiente

Lema 3.2.4 $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$ *para todo ordinal* α *y* $|R(\alpha)| = \beth_\alpha$ *para todo* $\alpha \geqslant \omega^2$.

Demostración: Primero por inducción sobre α se muestra que $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$.

- Si $\alpha = 0$, entonces $R(\omega + \alpha) = R(\omega)$ y, por el lema 3.2.2, $|R(\omega)| = \omega$ y, por definición del funcional $\beth, \beth_0 = \omega$. Así, $|R(\omega)| = \beth_0$. Por lo tanto, $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$.

- Si $\alpha = s(\beta)$ para algún ordinal β tal que $|R(\omega + \beta)| = \beth_\beta$, entonces $R(\omega + \alpha) = R(\omega + s(\beta)) = R(s(\omega + \beta)) = \mathcal{P}(R(\omega + \beta))$. Así, $|R(\omega + \alpha)| = |\mathcal{P}(R(\omega + \beta))| = 2^{|R(\omega+\beta)|}$ y por la hipótesis de inducción $2^{|R(\omega+\beta)|} = 2^{\beth_\beta} = \beth_{s(\beta)} = \beth_\alpha$. Por lo tanto, $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$.

- Si α es un ordinal límite y para cada $\beta < \alpha, |R(\omega + \beta)| = \beth_\beta$, entonces para $F = \{R(\omega + \beta) : \beta < \alpha\}$ se tiene, debido a la proposición 3.1.5, $|F| = |\alpha| \leqslant \beth_\alpha$. También, para cada $X \in F$ se tiene $X = R(\omega + \beta)$ para algún $\beta < \alpha$ y por hipótesis $|X| = \beth_\beta < \beth_\alpha$. De este modo, por la proposición 3.1.1, $|\bigcup F| \leqslant \beth_\alpha$. Como $\bigcup F = R(\omega + \alpha)$, $|R(\omega + \alpha)| \leqslant \beth_\alpha$.
  Por otro lado, para $G = \{\beth_\beta : \beta < \alpha\}$ se tiene $|G| = |\alpha|$. Además, como $\alpha < \omega + \alpha$, $\rho(\alpha) < \omega + \alpha$, de ahí $\alpha \in R(\omega + \alpha)$, por lo cual $\alpha \subseteq R(\omega + \alpha)$. Así, $|G| \leqslant |R(\omega + \alpha)|$. También, para cada $X \in G$ se tiene $X = \beth_\beta$ para alguna $\beta < \alpha$, entonces, por hipótesis, $|X| = |R(\omega + \beta)| \leqslant |R(\omega + \alpha)|$. De este modo, por la

proposición 3.1.1, $|\bigcup G| \leqslant |R(\omega + \alpha)|$. Como $\bigcup G = \beth_\alpha$, $\beth_\alpha \leqslant |R(\omega + \alpha)|$. Por lo tanto, $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$.

Ahora, por la proposición 3.2.3, para cualquier $\alpha \geqslant \omega^2$ se tiene $R(\omega + \alpha) = R(\alpha)$. Por lo tanto, $|R(\alpha)| = \beth_\alpha$ para $\alpha \geqslant \omega^2$. □

3.3. Relación entre los modelos

Esta sección contiene una comparativa de los modelos H_κ, $H(\kappa)$ y $R(\kappa)$ respecto a la relación que tienen entre sí y las características que debe cumplir el cardinal κ para que se cumpla la igualdad entre los tres modelos.

Los resultados que relacionan a $H(\kappa)$ y $R(\kappa)$ se encuentran en el Kunen (2013), mientras que los resultados correspondientes a H_κ con relación a los otros dos modelos no se encontraron en la literatura consultada.

La idea de que existe una relación entre los tres modelos nace de su comportamiento cuando κ es igual a 0, 1 o 2.

Cuadro 3.1: Comparación de los modelos H_κ, $H(\kappa)$ y $R(\kappa)$

	Modelos		
κ	H_κ	$H(\kappa)$	$R(\kappa)$
0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$
2	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Como se muestra en el cuadro 3.1 los modelos H_κ, $H(\kappa)$ y $R(\kappa)$ son iguales cuando κ es igual a alguno de los cardinales 0 o 1. No obstante, a partir de $\kappa = 2$ el modelo $H(\kappa)$ se comporta de una manera distinta a los otros dos modelos, los cuales siguen siendo iguales, es decir, $H_2 = R(2)$.

Es necesario aclarar que para κ finito y $4 \leqslant \kappa$, los tres modelos son distintos, dado que el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in R(4)$, lo cual no sucede en H_4 ni en $H(4)$. Ahora, se lleva a cabo un análisis para cardinales infinitos.

Como primer resultado para cardinales infinitos, algunos elementos de H_κ pertenecen a $R(\kappa)$ cuando κ es un cardinal infinito regular.

Proposición 3.3.1 *Sea κ un cardinal infinito y regular. Si $x \in H_\kappa$ es tal que $x \subseteq R(\kappa)$, entonces $x \in R(\kappa)$.*

Demostración: Sea $x \in H_\kappa$ tal que $x \subseteq R(\kappa)$. Entonces $x \in R(s(\kappa))$, es decir, $\rho(x) < s(\kappa)$, esto implica que $\rho(x) \leqslant \kappa$. Si $\rho(x) < \kappa$, entonces, por definición $x \in R(\kappa)$. De manera que basta con probar que no es posible que $\rho(x) = \kappa$ para obtener el resultado deseado.

Sea $\{s(\rho(y)) : y \in x\}$[1].Se obtiene que $|\{s(\rho(y)) : y \in x\}| \leqslant |x||\kappa$, ya que $x \in H_\kappa$. Asimismo, como $x \subseteq R(\kappa)$, $\rho(y) < \kappa$ para cualquier $y \in x$, por lo cual $s(\rho(y)) < \kappa$ para cualquier $y \in x$ debido a que κ es un cardinal infinito. Es más, al ser $s(\rho(y))$ un ordinal y κ un cardinal tales que $s(\rho(y)) < \kappa$, resulta que $|s(\rho(y))| < \kappa$. Entonces, por la proposición 3.1.2, $\rho(x) < \kappa$. Por lo tanto, $x \in R(\kappa)$. □

Con ayuda del resultado anterior se obtiene el siguiente lema, el cual exhibe una relación de contención entre los modelos H_κ y $R(\kappa)$.

Lema 3.3.2 *Sea κ un cardinal infinito y regular. Entonces $H_\kappa \subseteq R(\kappa)$.*

Demostración: Sean $x \in H_\kappa$ y $A = \{y \in CT(x) : \rho(y) \geqslant \kappa\}$, es decir, A es el conjunto de los elementos de $CT(x)$ tales que no pertenecen a $R(\kappa)$. Por lo cual, $H_\kappa \nsubseteq R(\kappa)$ si y sólo si $A \neq \emptyset$, así que para esta demostración se hace la suposición de que $A \neq \emptyset$.

Por otro lado, por el teorema 2.3.4, $x \in BF$ y como $A \subseteq CT(x)$ con $A \neq \emptyset$, A tiene algún elemento $\in$-minimal. Sea a_0 un elemento $\in$-minimal de A. Si $z \in a_0$, entonces $z \in CT(x)$ y $\rho(z) < \kappa$, ya que si fuera de otra forma, $z \in A$ lo cual contradice la

[1] $\{s(\rho(y)) : y \in x\}$ es un conjunto debido al axioma de reemplazo y $\bigcup\{s(\rho(y)) : y \in x\} = \rho(x)$.

minimalidad de a_0, de esta manera $z \in R(\kappa)$, por lo cual $a_0 \subseteq R(\kappa)$. Además, como $a_0 \in CT(x)$ y $x \in H_\kappa$, $|a_0| < \kappa$ y $a_0 \in H_\kappa$, ya que $CT(x) \subseteq H_\kappa$ por la proposición 2.3.3. Así, por la proposición 3.3.1, $a_0 \in R(\kappa)$, lo cual contradice que $a_0 \in A$, luego $A = \emptyset$. Por lo tanto, $H_\kappa \subseteq R(\kappa)$. □

Por otro lado, $\aleph_0$ es un cardinal regular, por lo cual se cumple la relación descrita por el lema anterior, pero no sólo eso, se cumple la igualdad de los tres modelos como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.3 $H_\omega = R(\omega) = H(\omega)$.

Demostración:

$R(\omega) = H(\omega)$

Sea $x \in R(\omega)$. Como $R(\omega) = \bigcup\{R(n) : n < \omega\}$, $x \in R(n)$ para algún $n \in \omega$. Entonces, por la transitividad de $R(n)$, $x \subseteq R(n)$ y por la definición de $CT(x)$, $CT(x) \subseteq R(n)$. Además, por la proposición 3.2.1, $|CT(x)| < \omega$. Por lo cual, $x \in H(\omega)$. Ahora, sea $x \in H(\omega)$, entonces $|CT(x)| < \omega$ y como $x \subseteq CT(x)$, $|x| < \omega$. Por otro lado, $x \in BF$, entonces $\rho(x) = \alpha$ para algún ordinal α y por la proposición 1.1.10, $\alpha = \{\rho(y) : y \in CT(x)\}$. Así, $|\alpha| = |CT(x)| < \omega$ y como ω es un cardinal, $\alpha < \omega$. Por lo tanto, $x \in R(\omega)$.

$H_\omega = R(\omega)$

Por el lema 3.3.2, se tiene que $H_\omega \subseteq R(\omega)$. Ahora, sea $x \in R(\omega)$. Por la proposición 3.2.1, $|x| < \omega$, por lo cual x cumple con 2.1. Además, $CT(x) \subseteq R(\omega)$, debido a que $R(\omega)$ es un conjunto transitivo. Por lo cual, para cada $y \in CT(x)$, $y \in R(\omega)$, así, por la proposición 3.2.1, $|y| < \omega$, de esta manera x cumple con 2.2. Por lo tanto, $x \in H_\omega$. □

Este resultado abre la posibilidad de comparar los modelos $R(\alpha)$, $H(\alpha)$ y H_α y verificar qué debe de cumplir α para que se cumpla alguna de las igualdades. El lema 3.3.2, establece que α tiene que ser un cardinal regular para que $H_\alpha \subseteq R(\alpha)$, mientras que la siguiente proposición pide que κ sea un cardinal infinito para que $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$.

Proposición 3.3.4 *Para cualquier cardinal infinito κ, $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$ y $H(\kappa)$ es un conjunto de tamaño $2^{<\kappa}$.*

Demostración: Sea $x \in H(\kappa)$. Entonces $x \in BF$ y $|CT(x)| < \kappa$. Sea $\alpha = \rho(x)$, por la proposición 1.1.10, $\alpha = \{\rho(y) : y \in CT(x)\}$. Así, $|\alpha| = |CT(x)| < \kappa$ y como κ es un cardinal infinito, $\alpha < \kappa$, de esta forma $x \in R(\kappa)$. Por lo tanto, $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$.

Ahora, para el tamaño de $H(\kappa)$ se tiene lo siguiente.

Sea $\lambda < \kappa$. Como λ es transitivo, $CT(\lambda) = \lambda$ y como κ es un cardinal, $|CT(\lambda)| < \kappa$. Así, $\lambda \in H(\kappa)$. Además, si $X \subseteq \lambda$, entonces $X \subseteq CT(\lambda)$ y así $|X| < \kappa$. Por lo cual, $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq H(\kappa)$. Entonces, para cada $\lambda < \kappa$ se tiene $2^{\lambda} \leqslant |H(\kappa)|$. De esta manera, por la proposición 3.1.1, $2^{<\kappa} = \bigcup\{2^{\lambda} : \lambda < \kappa\} \leqslant |H(\kappa)|$.

Por otro lado, para cada $x \in H(\kappa)$, al ser κ infinito y $|CT(x)| < \kappa$, $|CT(x) \cup \{x\}| < \kappa$. Sea $\lambda_x < \kappa$ fijo con $\lambda_x = |CT(x) \cup \{x\}|$. Por el axioma de elección, es posible obtener una función biyectiva f_x de $CT(x) \cup \{x\}$ a λ_x, para así definir una relación $F(x) \subseteq \lambda_x \times \lambda_x$ tal que $\langle CT(x) \cup \{x\}, \in\rangle \cong_{f_x} \langle \lambda_x, F(X)\rangle$. De esta manera, sea $F : H(\kappa) \longrightarrow \bigcup\{\mathcal{P}(\lambda \times \lambda) : \lambda < \kappa\}$ con $F(x)$ denotando a la relación establecida anteriormente para cada $x \in H(\kappa)$. Se tiene que F es función, debido a que para cada $x \in H(\kappa)$, el cardinal λ_x es único, así como la función f_x, ya que fue elegida por una función de elección, ya con esto, $F(x)$ tiene que ser único. Ahora, supóngase que $x, y \in H(\kappa)$ son tales que $F(x) = F(y)$. De esta manera, $dom(F(x)) = dom(F(y))$ y como x y y son los únicos $\in$-maximales de $CT(x) \cup \{x\}$ y $CT(y) \cup \{y\}$ respectivamente, se tiene que tanto x como y son los únicos elementos de $CT(x) \cup \{x\}$ y $CT(y) \cup \{y\}$ respectivamente tales que $x \notin dom(F(x))$ y $y \notin dom(F(y))$. Así, $|CT(x)| = |f_{x \restriction_{CT(x)}}| = |dom(F(x))| = |dom(F(y))| = |f_{y \restriction_{CT(y)}}| = |CT(y)|$, por lo cual $|CT(x)| = |CT(y)|$, lo cual implica que $\lambda_x = \lambda_y$. Por ello, $\langle CT(x) \cup \{x\}, \in\rangle \cong \langle CT(y) \cup \{y\}, \in\rangle$ y por el lema 1.1.19 se obtiene que $x = y$. Por lo tanto, F es inyectiva, lo cual implica que $|H(\kappa)| \leqslant 2^{<\kappa}$. Entonces, $H(\kappa)$ es un conjunto de tamaño $2^{<\kappa}$. □

Ahora, falta verificar que $H(\alpha) \subseteq H_\alpha$ para que se forme una relación entre los tres modelos respecto con su contención: $H(\alpha) \subseteq H_\alpha \subseteq R(\alpha)$.

Proposición 3.3.5 *Para cualquier cardinal κ. Se tiene que $H(\kappa) \subseteq H_\kappa$*

Demostración: Sea $X \in H(\kappa)$, entonces $|CT(X)| < \kappa$. Como $X \subseteq CT(X)$, $|X| \leqslant$

$|CT(X)|$ por lo cual $|X| < \kappa$, así X cumple con 2.1. Además, debido a que $CT(X)$ es transitivo, si $t \in CT(X)$, entonces $t \subseteq CT(X)$ y por ello $|t| < \kappa$. De esta manera, cualquier $t \in CT(X)$ cumple con 2.2. Por lo tanto, $X \in H_\kappa$. $\square$

De esta manera, por el lema 3.3.2 y la proposición 3.3.5, si κ es un cardinal infinito regular, entonces $H(\kappa) \subseteq H_\kappa \subseteq R(\kappa)$.

La proposición 3.3.3 muestra que $H(\omega) = H_\omega$. El siguiente teorema muestra una condición suficiente que debe cumplir κ para que $H(\kappa) = H_\kappa$.

Teorema 3.3.6 *Para cualquier κ regular e infinito, $H(\kappa) = H_\kappa$.*

Demostración: Es consecuencia de la proposición 3.3.5 que $H(\kappa) \subseteq H_\kappa$. Ahora, sea $A \in H_\kappa$, entonces $|A| < \kappa$ y para cada $t \in CT(A)$, se sigue $|t| < \kappa$. Además, $A \in BF$, por el teorema 2.3.4
Por inducción sobre $n < \omega$ se obtiene que $|A_n| < \kappa$, donde A_n pertenece a una sucesión de $A_i \subseteq CT(A)$ con $i < \omega$ como la del teorema 1.1.1.

- Por definición $|A| < \kappa$, de esta manera, si $A_0 = A$, entonces $|A_0| < \kappa$.
- Supóngase que $|A_m| < \kappa$ y sea $t \in A_m$. Como $A_m \subseteq CT(A)$, $t \in CT(A)$, por lo cual $|t| < \kappa$. De esta manera, por la proposición 3.1.2, se infiere $|\bigcup A_m| < \kappa$. Como $A_{s(m)} = \bigcup A_m$, se deduce $|A_{s(m)}| < \kappa$

Con ello, se concluye $|A_n| < \kappa$ para cualquier $n < \omega$. Ahora, por la la proposición 3.1.2, se obtiene $|\bigcup\{A_n : n < \omega\}| < \kappa$. Como $CT(A) = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$, $|CT(A)| < \kappa$. Así, $A \in H(\kappa)$. Por lo tanto, $H(\kappa) = H_\kappa$. $\square$

De esta forma, se concluye que es suficiente que κ sea un cardinal infinito regular, para que $H(\kappa) = H_\kappa$.
Ahora, de las proposiciones 3.3.4 y 3.3.5 se infiere que $H(\kappa) \subseteq H_\kappa \cap R(\kappa)$ siempre y cuando κ sea un cardinal infinito; en particular $H(\omega) = H_\omega \cap R(\omega)$, debido a la proposición 3.3.3. La siguiente proposición establece una característica suficiente al cardinal κ para que $H(\kappa) = H_\kappa \cap R(\kappa)$.

Corolario 3.3.7 *Para cualquier cardinal regular e infinito, κ. Se tiene que $H(\kappa) = H_\kappa \cap R(\kappa)$.*

Demostración: Del lema 3.3.2 se sigue $H_\kappa \subseteq R(\kappa)$, entonces $H_\kappa = H_\kappa \cap R(\kappa)$. Además, del teorema 3.3.6, $H(\kappa) = H_\kappa$. Por lo tanto, se concluye $H(\kappa) = H_\kappa \cap R(\kappa)$.□

Hasta el momento se han mostrado condiciones suficientes para que $H_\kappa = H(\kappa)$ por lo cual falta ver cuando $H(\kappa) = R(\kappa)$. El siguiente resultado es una caracterización de κ para que se cumpla esa igualdad.

Teorema 3.3.8 *Para cardinales $\kappa > \omega$. $H(\kappa) = R(\kappa)$ si y sólo si $\kappa = \beth_\kappa$.*

Demostración: Por la proposición 3.1.5, se tiene $\kappa \leqslant \beth_\kappa$ y por hipótesis, $H(\kappa) = R(\kappa)$. Como $\omega < \kappa$ y κ es cardinal, κ es un ordinal límite y $\omega^2 < \kappa$. Además, cada vez que $\omega^2 \leqslant \alpha < \kappa$, por el lema 3.2.4, $R(\alpha)$ es un conjunto transitivo de tamaño $\beth_\alpha$ y por definición, $R(\alpha) \in R(\kappa) = H(\kappa)$, por lo cual $\beth_\alpha < \kappa$. Por otro lado, si $\beta < \omega^2$, entonces $R(\beta) \subseteq R(\alpha)$ para algún $\omega^2 \leqslant \alpha < \kappa$, por lo cual $|R(\beta)| \leqslant \beth_\alpha < \kappa$. Así, por la proposición 3.1.1, $\beth_\kappa \leqslant \kappa$. Por lo tanto, $\kappa = \beth_\kappa$.
Recíprocamente, por la proposición 3.3.4, se tiene $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$ y por hipótesis $\kappa = \beth_\kappa$. Si $x \in R(\kappa)$, entonces $x \in R(\alpha)$ para algún α con $\omega^2 \leqslant \alpha < \kappa$ y como $R(\alpha)$ es transitivo por 2.1.5, $x \subseteq R(\alpha)$. Así, $CT(x) \subseteq R(\alpha)$, entonces $|CT(x)| \leqslant |R(\alpha)| = \beth_\alpha < \beth_\kappa = \kappa$ (donde la primera igualdad es por el lema 3.2.4 y la última por hipótesis), por lo cual $x \in H(\kappa)$ y de esta manera $R(\kappa) \subseteq H(\kappa)$. Concluyéndose $H(\kappa) = R(\kappa)$. □

Para que se cumpla $H(\kappa) = H_\kappa = R(\kappa)$ se requiere que un resultado que relacione H_κ con $H(\kappa)$ y $R(\kappa)$; una condición para que esto pase es la regularidad de κ, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.3.9 *Para cardinales $\kappa > \omega$ tales que κ sea regular, $H(\kappa) = H_\kappa = R(\kappa)$ si y sólo si $\kappa = \beth_\kappa$.*

Demostración: La condición de suficiencia es análoga al teorema 3.3.8. Por otro lado, si $\kappa = \beth_\kappa$, gracias al teorema 3.3.8 se obtiene $H(\kappa) = R(\kappa)$. Además, se infiere $H(\kappa) = H_\kappa$, debido al teorema 3.3.6. Por lo tanto, $H(\kappa) = H_\kappa = R(\kappa)$. □

De esta manera, se concluye $H(\kappa) = H_\kappa = R(\kappa)$ si y sólo si $\kappa = \beth_\kappa$, con $\kappa < \omega$ regular. Se pide que $\kappa > \omega$ ya que la proposición 3.3.3 muestra que $H(\omega) = H_\omega = R(\omega)$, pero $\omega \neq \beth_\omega$.

En los dos siguientes resultados se emplea la existencia de cardinales inaccesibles fuertes, lo cual es algo independiente de ZFC. Por lo cual, se añade ese enunciado a nuestra teoría y con ello se obtiene la teoría $ZFC+$ «Existen cardinales inaccesibles fuertes».

Corolario 3.3.10 *Sea κ un cardinal inaccesible fuerte. Entonces $R(\kappa) = H_\kappa = H(\kappa)$ y $R(\kappa)$ es un modelo estándar de ZFC.*

Demostración: Como κ es inaccesible fuerte, por la proposición 3.1.9, $\kappa = \beth_\kappa$. Entonces, por el corolario 3.3.9, $H(\kappa) = H_\kappa = R(\kappa)$.
Además, por la proposición 2.1.5, $R(\kappa)$ es un conjunto transitivo. También, $R(\kappa)$ es modelo transitivo de ZFC sin axioma de reemplazo, pero tal axioma se satisface en $H(\kappa)$ y $R(\kappa) = H(\kappa)$. Por lo tanto, $R(\kappa)$ es modelo de ZFC. $\square$

Este resultado puede facilitar la construcción de modelos de ZFC en teorías, en las cuales se complique la construcción del modelo $R(\kappa)$. Debido a que se puede optar por construir otro dos modelo; ya sea H_κ o $H(\kappa)$.

Apéndice A

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Es de suponer que el lector tiene la noción de lo que la axiomática de *Zermelo - Fraenkel* más el *axioma de elección* (ZFC) es. Aún así, a continuación se encuentra una lista de dichos axiomas.

Además, se nombran algunas *subteorías* de ZFC, como $ZF - P$, la cual es ZFC sin el axioma de elección y sin el axioma de potencia. En la mayoría de las áreas de matemáticas estas subteorías no son de gran interés, uno no se pregunta usualmente qué pruebas usan el axioma de potencia.

Sin embargo, al estudiar los modelos de la teoría de conjuntos y algunas demostraciones de independencia es importante tener noción de qué axiomas se utilizan durante el desarrollo elemental de la teoría de conjuntos.

No hay un orden natural para enumerar los axiomas de ZFC, aquí aparecen en el orden establecido en el apéndice del libro (Apéndice A. Hernández Hernández, 2011). Se puede decir que los axiomas de extensión, esquema de comprensión, par y unión son los más *básicos* debido a que a partir de ellos es posible desarrollar varios hechos acerca de emparejamientos, uniones finitas, relaciones, funciones y los números naturales $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

No obstante, estos axiomas no son suficientes para demostrar que el producto cartesiano $A \times B$ siempre existe. También, el axioma de infinito se puede considerar *básico*, debido a que sin éste no es posible obtener al conjunto ω de todos los números naturales.

Axioma 1. (de Existencia) Hay un conjunto que no tiene elementos.

$$\exists B(\neg \exists x(x \in B))$$

Axioma 2. (de Extensión) Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.

$$\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Axioma 3. (Esquema de Comprensión) Sea φ una fórmula. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ si y solo si $x \in A$ y x satisface la fórmula φ.

$$\forall A \exists B(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x)))$$

Axioma 4. (del Par) Para cualesquiera conjuntos X y Y existe un conjunto Z tal que para cualquier $W \in Z$ se tiene que $W = X$ o $W = Y$.

$$\forall X \forall Y \exists Z(W \in Z \rightarrow (W = X \vee W = Y))$$

Axioma 5. (de Unión) Para cualquier conjunto A, existe un conjunto U tal que para cualquier x: $x \in X$ para algún $X \in A$ si y sólo si $x \in U$.

$$\forall A \exists U \forall x((x \in X \wedge X \in A) \longleftrightarrow x \in U))$$

Axioma 6. (del Conjunto Potencia) Para cualquier conjunto X, existe un conjunto S tal que para cualquier A: si $A \subseteq X$, entonces $A \in S$

$$\forall X \exists S(A \subseteq X \rightarrow A \in S)$$

Axioma 7. (de Fundación) En cada conjunto no vacío A existe $u \in A$ tal que u y A son ajenos.

$$\forall A(\exists y(y \in A) \rightarrow \exists u(u \in A \wedge \neg \exists z(z \in A \wedge z \in u)))$$

Axioma 8. (de Infinito) Existe un conjunto inductivo.

$$\exists B(\emptyset \in B \wedge \forall y \in B(s(y) \in B))$$

Axioma 9. (Axioma de reemplazo) Sea φ una fórmula de ZFC tal que para todo conjunto A y $x \in A$ existe un único y para el cual $\varphi(x, y)$ se satisface. Para todo conjunto A, existe un conjunto B tal que $\varphi(x, y)$ se satisface para algún $x \in A$ si y solo si $y \in B$.

$$\forall A[\forall x \in A \exists ! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B[\exists x \in A(\varphi(x, y)) \leftrightarrow y \in B]]$$

Axioma 10. (de Elección) Si F es una familia de conjuntos no vacíos y ajenos, entonces, existe C tal que para cada $x \in F$ se satisface que $C \cap x$ es un conjunto con un único elemento.

$$\forall F(\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \rightarrow x \cap y \neq \emptyset) \rightarrow \exists C \forall x \in F(SING(C \cap x)))$$

- ZFC = Axiomas 1- 10.
- ZF = Axiomas 1-9.
- ZC y Z son ZFC y ZF, respectivamente, sin el axioma de reemplazo.
- X^- denota a X sin el axioma de fundación.
- $X - P$ denota a X sin el axioma de potencia.
- $X - U$ denota a X sin el axioma de unión.

A.1. Teoría básica de conjuntos

La enunciación de la mayoría de los axiomas es simple, sin embargo, para enunciar a los axiomas 6, 8 y 10 se utilizan conceptos como: subconjunto ($\subseteq$), conjunto vacío ($\emptyset$ o 0), función sucesor ($s(y)$), intersección ($\cap$) y x es un conjunto de un único elemento ($SING(x)$), los cuales tienen base en los axiomas 1, 2, 3, 4 y 5 . Para lograr justificar esta afirmación se necesitan los siguientes resultados.

Definición A.1.1 *La* ***teoría básica de conjuntos*** *(TBC) denota a la teoría que comprende a los axiomas de extensión, esquema de comprensión, par y unión.*

La noción de subconjunto ($\subseteq$) es familiar para casi cualquiera que haya estado en contacto con la teoría de conjuntos (incluso la teoría *intuitiva* de conjuntos), pero esta no se encuentra en el lenguaje de ZFC, pues en éste sólo se utiliza la relación de pertenencia ($\in$). Por lo cual, es necesario definir que x es **subconjunto** de y ($x \subseteq y$) si y sólo si para cualquier conjunto z, si $z \in x$, entonces $z \in y$.

Al igual que la contención, el conjunto vacío ($\emptyset$) es una parte importante de la teoría de conjuntos. Por lo que se define y es **vacío** ($vac(y)$) si y sólo si y es un conjunto que no tiene elementos. Por el *axioma de existencia* existe al menos un conjunto y tal que $vac(y)$ se cumpla, aún así no se asegura su unicidad. Es por ello la importancia de demostrar (en TBC) que solamente es posible la existencia de un conjunto con tales características.

Proposición A.1.2 *(TBC) Existe un único conjunto y tal que $vac(y)$.*

Demostración: Sin utilizar el axioma de existencia, sea v un conjunto cualquiera. Es posible obtener, por el axioma de comprensión, al conjunto $y = \{x \in v : x \neq x\}$. Si $x \in y$, entonces $x \in v$ y $x \neq x$, pero $z \in x$ si y sólo si $z \in x$, entonces, por extensión $x = x$, lo cual contradice que $x \in y$. De esta forma, $vac(y)$ existe, i.e. Se satisface el axioma de existencia. Por otro lado, gracias al axioma de existencia es posible suponer que y es un conjunto tal que $vac(y)$. Ahora, sólo falta demostrar que es único. Si existe y' tal que $vac(y')$, entonces, como $x \in y$ es falso, se cumple que $x \in y'$. Análogamente, si $x \in y'$, entonces, $x \in y$. Por lo que, $x \in y$ si y sólo si $x \in y'$, entonces, por el axioma de extensión, $y = y'$. Por lo tanto y es único. $\square$

Definición A.1.3 *Se define a $\emptyset$ como el único conjunto y tal que $vac(y)$.*

Por otra parte, la noción de un conjunto de un único elemento es necesaria para la enunciación del axioma de elección presentada en este texto. Por eso, se dice que un conjunto x tiene la propiedad $SING(x)$ si y sólo si únicamente un elemento y pertenece a x.

Proposición A.1.4 *(TBC) Existen conjuntos x tales que tengan la propiedad $SING(x)$.*

Demostración: Sea y un conjunto, por el axioma del par, existe un conjunto Z tal que $y \in Z$ y $y \in Z$, entonces existe $x = \{z \in Z : z = y\}$ por el esquema de comprensión. Por otro lado, $x \neq \emptyset$ debido a que $y \in x$, además $z \in x$ si y sólo si $z = y$. Por lo tanto x existe y es tal que $SING(x)$. $\square$

$\bigcup \mathcal{F}$ es un conjunto muy utilizado en la teoría de conjuntos y en otras áreas matemáticas como la topología y el análisis matemático, pero hasta ahora no se puede asegurar su existencia (en TBC). Así que para cada conjunto $\mathcal{F}$ se define a $\bigcup \mathcal{F}$ como $\bigcup \mathcal{F} = \{x : \exists X \in \mathcal{F}(x \in X)\}$. Ya definido se tiene que demostrar que en efecto es un conjunto (en TBC).

Proposición A.1.5 *(TBC) Si $\mathcal{F}$ es un conjunto, entonces $\bigcup \mathcal{F}$ existe.*

Demostración: Sea U de la forma que se presenta en el axioma de unión. Entonces U es un conjunto y por el axioma de comprensión $B = \{x \in U : \exists X \in \mathcal{F}(x \in X)\}$ existe. De esta manera, si $x \in B$, entonces $x \in U$ y además $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$ y así $x \in \bigcup \mathcal{F}$; inversamente, si $x \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$, y por la forma de U, $x \in U$, así $x \in B$. Por lo que $x \in B$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{F}$, así $B = \bigcup \mathcal{F}$ y por lo tanto $\bigcup \mathcal{F}$ existe. $\square$

Cabe resaltar que usualmente se utiliza $x \cup y$ para denotar $\bigcup \{x, y\}$, pero para que esto tenga sentido se necesita que $\{x, y\}$ sea un conjunto, lo cual no es garantía sólo con el axioma del par, debido a que se necesita el axioma de comprensión para justificar su existencia.

Proposición A.1.6 *(TBC) $\{x, y\}$ existe.*

Demostración: Sean x, y conjuntos. Por el axioma del par, existe Z con $x, y \in Z$, de esta manera, por el axioma de comprensión, existe $P = \{z \in Z : z = x \vee z = y\}$. y por el axioma de extensión $P = \{x, y\}$. $\square$

En un curso usual de teoría de conjuntos se presenta el uso del **sucesor** de un conjunto x, el cual se define como la colección de elementos tal que $z \in s(x)$ si y sólo si $z \in x$ o $z = x$.

Proposición A.1.7 *(TBC) Para cualquier conjunto x, $s(x)$ es conjunto y es único.*

Demostración: Sea x un conjunto. Por la *proposición A.1.4*, existe $SING(z)$ con $x \in SING(z)$, así, por la *proposición A.1.6*, $\{x, SING(z)\}$ existe. Ahora, por el axioma de unión $\bigcup\{x, SING(z)\} = x \cup SING(z)$ existe. Además, $y \in x \cup SING(z)$ si y sólo si $y \in x$ o $y \in SING(z)$, por lo que $y \in x \cup SING(z)$ si y sólo si $y \in x$ o $y = x$. Asimismo, por el axioma de extensión, $x \cup SING(z) = s(x)$. Por otro lado, el axioma de extensión garantiza la unicidad de $s(x)$. □

También, en la teoría de conjuntos se presenta la intersección $(u \cap v)$ de conjuntos, esta se define como la colección de elementos tal que $z \in u \cap w$ si y sólo si $z \in v$ y $z \in w$. Ahora sólo falta demostrar que es válido hablar de intersección de dos conjuntos en TBC.

Proposición A.1.8 *(TBC) Para cualesquiera u y v conjuntos, $u \cap v$ existe.*

Demostración: Sean u y w conjuntos. Por el esquema de comprensión, existe $B = \{z \in u : z \in w\}$. De esta manera, $z \in B$ si y sólo si $z \in u$ y $z \in w$. Por lo tanto $B = u \cap w$. □

Bibliografía

Enderton, H. B. (1977). *Elements of set theory*. Academic Press, ACADEMIC PRESS, INC. 111 Fifth Avenue, New York, New York 10003, 1 edition. 26

Hernández Hernández, F. (2011). *Teoría de Conjuntos: una introducción*, volume 13 of *Serie Textos: Aportaciones Matemáticas*. Sociedad Matemática Mexicana, Instituto de Matemáticas UNAM, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, Distrito Federal, 3 edition. 61

Jech, T. (2013). *Set theory*. Springer Science & Business Media. 2

Kunen, K. (2013). *Set Theory*, volume 34 of *Studies in Logic*. College Publications, King's College London, Strand, London WC2R 2LS, UK, 1 edition. vii, 2, 5, 45, 54

Kunen, K. (2014). *Set Theory an Introduction to Independence Proofs*, volume 102 of *Studies in logic and the foundations ot mathematics*. Elsevier, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHER B.V. Sara Burgerhartstraat 25 P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands, 5 edition. 26

Oman, G. (2010). On the axiom of union. *Archive for Mathematical Logic*, 49(3):283–289. vii, 38