



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Gráficas y Digráficas Perfectas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Itzel Hernández Nava

TUTORA:

Dra. María del Rocío Sánchez López





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado.

### 1. Datos del alumno.

Hernández  
Nava  
Itzel  
57 88 48 57  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
310107789

### 2. Datos del tutor.

Dra.  
Sánchez  
López  
María del Rocío.

### 3. Datos del sinodal 1.

Dra.  
Galeana  
Sánchez  
Hortensia.

### 4. Datos del sinodal 2.

Mat.  
Pastrana  
Ramírez  
Laura.

### 5. Datos del sinodal 3.

Dra.  
Torres  
Ramos  
Ingrid Chantal.

### 6. Datos del sinodal 4.

Mat.  
Vázquez  
Navarro  
Ernesto Alejandro.

### 7. Datos del trabajo escrito.

Gráficas y Digráficas Perfectas.  
88 p.  
2017.

*La felicidad es inversamente proporcional a la distancia que hay entre lo que soy y lo que quiero ser. Soy matemático, toda mi vida quise ser matemático, por lo tanto: soy inmensamente feliz.*

*Alberto Barajas Celis (1989)*



# Agradecimientos

A mi madre le agradezco infinitamente por su amor y apoyo incondicional. Gracias mamá por hacerme crecer como persona, ayudándome a salir adelante en momentos difíciles y por hacer de mí lo que hoy soy. Porque eres y por siempre serás el mejor ejemplo a seguir en mi vida. Gracias porque sin ti nada de esto hubiera sido posible.

A Fabián y a sus papás les agradezco por ser una segunda familia para mí y por siempre recibirme en su hogar. Gracias Fabián por ser mi compañero de vida durante todos estos años, por todos los buenos y malos momentos, pero sobretodo, gracias por creer en mí aún cuando yo dejé de hacerlo.

A mi asesora Rocío Sánchez le agradezco por todo el tiempo y paciencia que invirtió en mí. Gracias por corregir todos mis errores, gracias porque con su paciencia hizo que disfrutara la realización de este trabajo.

A Laura Pastrana le agradezco por transmitirme su amor hacia las gráficas. Gracias por introducirme al hermoso mundo de las gráficas y por guiarme en todo momento.

A mis sinodales: Dra. Hortensia Galeana, Mat. Laura Pastrana, Dra. Ingrid Torres y Mat. Ernesto Vázquez les agradezco por su tiempo y correcciones para hacer de éste un mejor trabajo.

A todos mis maestros de Matemáticas a lo largo de la vida les agradezco por reforzar mi amor y pasión por las Matemáticas. Gracias por motivar mi decisión de estudiar esta licenciatura.



# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	6
1.2. Tipos de gráficas . . . . .	9
1.3. Caminos . . . . .	9
1.4. Resultados básicos . . . . .	10
<b>2. Gráficas Bipartitas</b>	<b>15</b>
2.1. Apareamientos . . . . .	16
2.2. Independencia y cubiertas . . . . .	18
<b>3. Coloración por vértices</b>	<b>25</b>
3.1. Número cromático . . . . .	27
<b>4. Gráficas Perfectas</b>	<b>31</b>
4.1. Teorema Débil de Gráficas Perfectas . . . . .	37
4.2. Gráficas imperfectas . . . . .	47
4.3. Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas . . . . .	54
<b>5. Digráficas Perfectas</b>	<b>57</b>
5.1. Definiciones básicas . . . . .	58
5.2. Resultados previos . . . . .	65
5.3. Un Teorema Fuerte de Digráficas Perfectas . . . . .	71
5.4. Un Teorema Débil de Digráficas Perfectas . . . . .	77
5.5. Núcleos y núcleo solubilidad . . . . .	81
<b>Conclusión</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>



# Índice de figuras

1.1.	Ejemplo de una gráfica. . . . .	6
1.2.	Ejemplo de dos gráficas isomorfas $G_1$ y $G_2$ . . . . .	7
1.3.	Ejemplos de subgráficas. . . . .	8
2.1.	Ejemplo de una gráfica $G$ y un apareamiento $M$ . . . . .	16
2.2.	Ejemplo de una trayectoria $M$ -alternante de longitud par, la cual empieza con una arista de $M^c$ y termina con una arista de $M$ . . . . .	17
2.3.	Ejemplo de una trayectoria $M$ -alternante de longitud impar, la cual empieza y termina con aristas de $M^c$ . . . . .	17
2.4.	Gráfica $G$ con $\alpha(G)=3$ y $\alpha'(G)=3$ . . . . .	19
2.5.	Gráfica $G$ con $\beta(G)=4$ y $\beta'(G)=3$ . . . . .	20
2.6.	Gráfica $G$ con cubierta $C=(V_1-S)\cup T$ . . . . .	23
3.1.	Gráfica $G$ con distintas coloraciones. . . . .	26
4.1.	Gráfica $G=C_3 \cup C_5$ . . . . .	32
4.2.	Ejemplo gráfico de los conjuntos $S$ y $T$ . . . . .	34
4.3.	Ejemplo de una $k'$ -coloración propia de $V(G)$ en la afirmación 2. . . . .	35
4.4.	Ejemplo de una gráfica $G$ y $R_v(G)$ . . . . .	37
4.5.	Ejemplo de una gráfica $G$ con una $\chi(G)$ -coloración. . . . .	40
4.6.	Ejemplo de $G^*=G[V(G)-V']$ . . . . .	40
4.7.	Ejemplo de $G^*$ con una $(k-1)$ -coloración propia. . . . .	41
4.8.	Ejemplo de $R_v(G)$ con una $k$ -coloración propia. . . . .	41
4.9.	Gráfica de Petersen. . . . .	47
4.10.	Gráficas no isomorfas con $p=1$ y $p=2$ . . . . .	48
4.11.	Gráficas no isomorfas con $p=3$ . . . . .	48
4.12.	Gráficas no isomorfas con $p=4$ . . . . .	49
4.13.	Gráficas no isomorfas con $p=5$ . . . . .	50
4.14.	Gráficas no isomorfas con $p=5$ . . . . .	51
4.15.	Gráficas no isomorfas con $p=5$ . . . . .	52
4.16.	Gráficas con número cromático igual a 3 y número de clan igual a 2. . . . .	53

4.17. Gráfica $H$ imperfecta conexa y mínima por contención. . . . .	54
5.1. Ejemplo de una digráfica $D$ . . . . .	58
5.2. Ejemplo de $Sim(D)$ . . . . .	59
5.3. Ejemplo de $Asim(D)$ . . . . .	59
5.4. Ejemplo de $Sub(D)$ . . . . .	60
5.5. Ejemplo de un hoyo lleno impar. . . . .	61
5.6. Ejemplo de un antihoyo lleno impar. . . . .	62
5.7. Ejemplo de una digráfica $D$ con $\vec{\chi}(D)=3$ . . . . .	62
5.8. Ejemplo de las subdigráficas inducidas por las clases de color de la digráfica anterior. . . . .	63
5.9. Ejemplo de una súper orientación. . . . .	64
5.10. Ejemplo de $(Sim(D))^c$ . . . . .	68
5.11. Ejemplo de $D$ y sus digráficas asociadas. . . . .	70
5.12. Ejemplo de digráficas imperfectas. . . . .	72
5.13. Ejemplo de $\vec{C}_n$ con $(u, v)$ una cuerda. . . . .	75
5.14. $\vec{C}_4$ y $(\vec{C}_4)^c$ . . . . .	77
5.15. $\vec{C}_5$ y $(\vec{C}_5)^c$ . . . . .	78
5.16. Digráficas $D$ y $D^c$ . . . . .	83

# Introducción

Todos los días estamos rodeados de innumerables conexiones y redes: carreteras y vías férreas, líneas telefónicas e internet, circuitos electrónicos e incluso enlaces moleculares. También hay redes sociales entre amigos y familias. Todos estos sistemas se pueden modelar por medio de puntos, llamados vértices, los cuales están conectados por líneas, llamadas aristas. En matemáticas, todas estas configuraciones se llaman gráficas.

La teoría de gráficas estudia las gráficas y sus propiedades. Es una de las áreas más visuales de la matemática que tiene innumerables aplicaciones importantes. La teoría de gráficas tuvo sus inicios en problemas de matemáticas recreativas, pero se ha convertido en un área significativa de investigación, con aplicaciones en química, investigación de operaciones, ciencias sociales y ciencias de la computación.

La historia de la teoría de gráficas se puede remontar específicamente a 1735, cuando el matemático suizo Leonhard Euler resolvió el problema de los puentes de Königsberg, el cual era un viejo rompecabezas sobre la posibilidad de encontrar un camino sobre cada uno de los siete puentes que abarcan un río bifurcado que fluye más allá de una isla, pero sin cruzar ningún puente dos veces. Euler argumentó que no existe tal camino. Su prueba implicaba sólo referencias a la disposición física de los puentes, pero esencialmente probó el primer teorema en la teoría de gráficas.

En esta teoría existen muchas líneas de investigación, una de ellas es la teoría de las gráficas perfectas, la cual relaciona el concepto de coloración por vértices con el concepto del número de clan. Se dice que una gráfica  $G$  es *perfecta* si para toda subgráfica inducida  $H$  de  $G$  se cumple que su número cromático es igual a su número de clan. Además de tener una estructura interesante, las gráficas perfectas son consideradas importantes por tres razones: primero, se sabe que varias clases comunes de gráficas son siempre perfectas; segundo, una serie de algoritmos importantes trabajan sólo en gráficas perfectas; tercero, las gráficas perfectas pueden ser usadas en una amplia variedad de aplicaciones, que van desde la programación de la teoría de orden hasta la teoría de comunicación.

La teoría de gráficas perfectas se desarrolló a partir de un resultado de Tibor Gallai en 1958, que en lenguaje moderno puede ser interpretado como establecer que el complemento de una gráfica bipartita es perfecto; este resultado también puede ser visto como una simple equivalencia al teorema de König, un resultado mucho más antiguo relacionando con apareamientos y cubiertas por vértices en gráficas bipartitas. El teorema de König en teoría de gráficas establece que una cubierta por vértices mínima en una gráfica bipartita corresponde a un apareamiento máximo, y viceversa; ésto puede ser interpretado como la perfección de los complementos de las gráficas bipartitas.

El primer uso del término “gráfica perfecta” aparece en 1961 en un artículo de Claude Berge [7]. En ese artículo, Berge unificó el resultado de Gallai con algunos resultados similares al definir las gráficas perfectas, y propuso la “Conjetura Fuerte de Gráficas Perfectas”, probablemente la pregunta abierta más hermosa en teoría de gráficas, dicha conjetura dice que una gráfica es perfecta si y sólo si es una gráfica Berge, es decir, si no contiene hoyos impares o antihoyos impares como subgráficas inducidas. Después de dicho resultado, las gráficas perfectas son también llamadas gráficas Berge.

En 1999 Peter Sarnak (quien en ese entonces era el presidente del departamento de matemáticas de Princeton) se reunió con Paul Seymour y le propuso que se postulara para una beca del AIM (American Institute of Mathematics). Robertson, Seymour y Thomas, habían trabajado juntos antes en algunos proyectos, y querían hacerlo nuevamente, así que aquello parecía la oportunidad ideal para ellos.

En aquel entonces, habían dos problemas abiertos de clase mundial: la conjetura de Hadwiger y la conjetura fuerte de gráficas perfectas de Berge. El grupo alrededor de Gérard Cornuéjols pensaba que toda gráfica Berge podía ser construida a partir de unas pocas clases básicas de gráficas mediante algunas construcciones razonables.

A pesar de que Robertson, Seymour y Thomas no tenían experiencia en gráficas perfectas, decidieron poner ambos problemas en la propuesta para conseguir la beca, la cual finalmente obtuvieron.

De esta forma, en enero del 2000, Robertson y Thomas llegaron a Princeton para empezar a trabajar junto con Seymour casi de tiempo completo. Tiempo después, en el verano del 2001 se uniría una estudiante de Seymour, Maria Chudnovsky.

La conjetura de Berge duró poco más de 40 años, hasta que finalmente, después de atacar dicha conjetura durante 28 meses, en mayo del 2002 (justo antes de la muerte de Berge) Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour y Robin Thomas anunciaron que habían demostrado la famosa “Conjetura Fuerte de

Gráficas Perfectas” y posteriormente, en 2006 publicaron su resultado en [14]. La demostración es difícil y consiste de unas 150 páginas, y una visión general puede dar solamente una vaga idea de ella. Dicho resultado se conoce como el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas (SPGT por sus siglas en inglés).

En 1961, Claude Berge también propuso la “Conjetura Débil de Gráficas Perfectas”, la cual establece que una gráfica es perfecta si y sólo si su complemento también es una gráfica perfecta. Primero se atacó el problema considerando diversos tipos de gráficas de manera particular y se obtuvo que algunas familias de gráficas son perfectas: gráficas completas, gráficas bipartitas, complementos de gráficas bipartitas, gráficas de líneas de gráficas bipartitas, complementos de gráficas de líneas de gráficas bipartitas, gráficas comparativas, complementos de gráficas comparativas, etcétera. Finalmente, Lovász demostró en 1972 en [16] la Conjetura Débil de Gráficas Perfectas. Para demostrar la conjetura, Lovász utilizó una operación, la cual consiste en reemplazar cada vértice de una gráfica por un clan; Berge ya sabía que, si una gráfica es perfecta, la gráfica formada por este proceso de reemplazo también es perfecta. Al resultado demostrado por Lovász se le conoce como el Teorema Débil de Gráficas Perfectas.

Más tarde, las gráficas núcleo solubles fueron introducidas por Berge y Duchet, quienes notaron que los hoyos impares y los antihoyos impares no son núcleo solubles. De esta forma, en 1983, Berge y Duchet conjeturaron que las gráficas núcleo solubles y las gráficas perfectas son equivalentes. Las siguientes dos conjeturas fueron establecidas en [8]: “Las gráficas perfectas son núcleo solubles” y “Las gráficas núcleo solubles son perfectas”. La primera conjetura fue previamente demostrada para algunos casos especiales de clases de gráficas perfectas, incluyendo las gráficas de líneas [17, 19], las multigráficas de líneas [9], las gráficas cordales, las gráficas de Gallai [15, 18] y el complemento de gráficas fuertemente perfectas [5].

La demostración del caso general fue dada por Boros y Gurvich en 1996 en [10], la cual está basada en varios resultados de teoría de juegos cooperativos.

La segunda conjetura, se puede deducir del Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas y de observar que las subgráficas inducidas de una gráfica núcleo soluble, son también núcleo solubles. Demostraciones independientes son conocidas sólo para algunas clases especiales de gráficas, incluyendo las gráficas de líneas [17, 19] y las multigráficas de líneas [9].

Finalmente, con base en los resultados obtenidos por Chudnovsky y su equipo de trabajo, en 2013 Stephan Andres y Winfried Hochstättler dieron una extensión de dichos resultados en digráficas. Andres y Hochstättler dieron una caracterización de digráficas perfectas a partir de un conjunto de subdigráficas inducidas prohibidas. Esto resulta en que las digráficas perfectas son exactamente los complementos

de súper orientaciones clan acíclicas de gráficas perfectas. Así, obtuvieron como corolario que los complementos de digráficas perfectas tienen núcleo.

El objetivo de esta tesis es presentar algunos de los resultados antes mencionados y principalmente, mostrar la extensión del concepto de gráfica perfecta a la teoría de digráficas. Veremos qué es una digráfica perfecta y cómo se caracteriza a partir del Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas y del Teorema Débil de Gráficas Perfectas.

En el primer capítulo de esta tesis, se darán algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas, así como resultados básicos que se utilizarán en las demostraciones de los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo, daremos resultados importantes de las gráficas bipartitas, los cuales nos ayudarán a demostrar el teorema de Gallai y el teorema de König, éste último será esencial para demostrar en el capítulo 4 que toda gráfica cuyo complemento es bipartito es perfecta.

En el tercer capítulo hablaremos sobre la coloración por vértices y se dará la definición del número cromático, además encontraremos el número cromático de algunas familias de gráficas ya conocidas.

En el cuarto capítulo se relacionan los conceptos de número cromático y número de clan para introducir la definición de una gráfica perfecta. Veremos cuáles familias de gráficas son perfectas y además, introduciremos el Teorema Débil de Gráficas Perfectas y el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas y daremos una demostración del Teorema Débil.

Por otra parte, analizaremos las gráficas que no son perfectas, es decir, las gráficas imperfectas y las gráficas imperfectas minimales.

En el quinto y último capítulo, daremos algunas definiciones básicas de la teoría de digráficas y usando el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas visto en el capítulo 4, daremos los resultados matemáticos obtenidos por Stephan Andres y Winfried Hochstättler en digráficas perfectas.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se darán las definiciones básicas de la teoría de gráficas, veremos algunos tipos de gráficas y resultados que serán útiles para capítulos posteriores, más específicamente, veremos que si  $G$  es una gráfica tal que todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 2, entonces  $G$  contiene un ciclo. Además que todo camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar. Los ciclos impares serán de gran importancia en nuestro trabajo de tesis.

Demostraremos una caracterización de las gráficas bipartitas, es decir, si  $G$  es una gráfica no trivial,  $G$  es bipartita si y sólo si  $G$  no contiene ciclos de longitud impar y como corolario obtendremos que todo árbol  $T$  es bipartito.

## 1.1. Definiciones básicas

Una **gráfica**  $G$  es una pareja  $(V(G), A(G))$ , donde  $V(G)$  denota a un conjunto finito no vacío de objetos llamados **vértices** y  $A(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de distintos elementos de  $V(G)$  cuyos elementos son llamados **aristas**. Si  $a=(u, v)\in A(G)$ , entonces decimos que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**; o bien, decimos que  $u$  y  $v$  son vértices extremos de la arista  $a$  y que  $a$  **incide** en  $u$  y en  $v$ .

Un **lazo** es una arista de la forma  $(u, u)$ . Las **aristas múltiples** o **paralelas** son aquellas que tienen los mismos vértices extremos.

**Ejemplo:** Sea  $G=(V(G), A(G))$  donde  $V(G)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  y  $A(G)=\{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_5), (x_4, x_5)\}$ .

Siempre es posible asignar una representación geométrica de una gráfica  $G$  en el plano como sigue: a cada vértice de  $G$  le asociamos un punto en el plano y dibujamos una línea entre dos puntos si los vértices correspondientes son adyacentes en  $G$ .

La figura 1.1 exhibe una representación gráfica del ejemplo anterior.

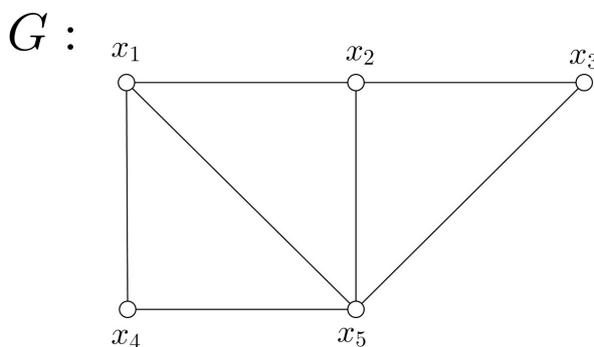


Figura 1.1: Ejemplo de una gráfica.

Una **gráfica simple** es aquella que no tiene lazos ni aristas múltiples. Para fines prácticos, a lo largo de este trabajo el término gráfica significará gráfica simple.

Cuando una gráfica  $G$  consiste de un sólo vértice, se dice que  $G$  es **trivial**, en otro caso  $G$  es **no trivial**.

El **orden** de  $G$  es la cardinalidad de  $V(G)$  y el **tamaño** de  $G$  es la cardinalidad de  $A(G)$ , los cuales son denotados por  $p$  y  $q$ , respectivamente.

Sea  $S$  un subconjunto de  $V(G)$ . Definimos la **vecindad de  $S$** , denotado por  $N(S)$ , como  $\{x \in V(G) : (x, y) \in A(G) \text{ para algún } y \text{ en } S\}$ .

En particular, si  $v$  es un vértice de  $G$ , definimos la **vecindad de  $v$** , denotada por  $N(v)$ , como  $\{u \in V(G) : (u, v) \in A(G)\}$ . Definimos el **grado de  $v$** , denotado por  $\delta(v)$ , como la cardinalidad de  $N(v)$ , es decir,  $\delta(v) = |N(v)|$ . Si  $\delta(v) = 0$ , entonces a  $v$  le llamaremos **vértice aislado**.

Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas. Diremos que  $G_1$  y  $G_2$  son **isomorfas**, denotado por  $G_1 \cong G_2$ , si existe una función  $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  biyectiva tal que  $(u, v) \in A(G_1)$  si y sólo si  $(f(u), f(v)) \in A(G_2)$ .

La figura 1.2 muestra dos gráficas isomorfas  $G_1$  y  $G_2$ .

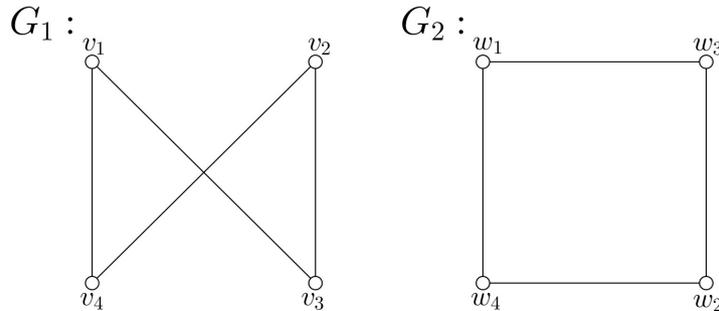


Figura 1.2: Ejemplo de dos gráficas isomorfas  $G_1$  y  $G_2$ .

Una **subgráfica  $H$**  de  $G$ , es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ . Sean  $G$  una gráfica y  $H$  una subgráfica de  $G$ . Diremos que:

1.  $H$  es **generadora** si  $V(H) = V(G)$ .
2.  $H$  es **inducida** si para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $V(H)$  se tiene que  $(u, v) \in A(H)$  si y sólo si  $(u, v) \in A(G)$ .

Sean  $G$  una gráfica y  $S$  un subconjunto de  $V(G)$ . La **gráfica inducida por  $S$** , denotada por  $G[S]$ , es la gráfica tal que:

1.  $V(G[S]) = S$ ,
2.  $A(G[S]) = \{(u, v) \in A(G) : \{u, v\} \subseteq S\}$ .

**Ejemplo:** La figura 1.3 muestra una gráfica  $G$  y sus respectivas subgráficas.

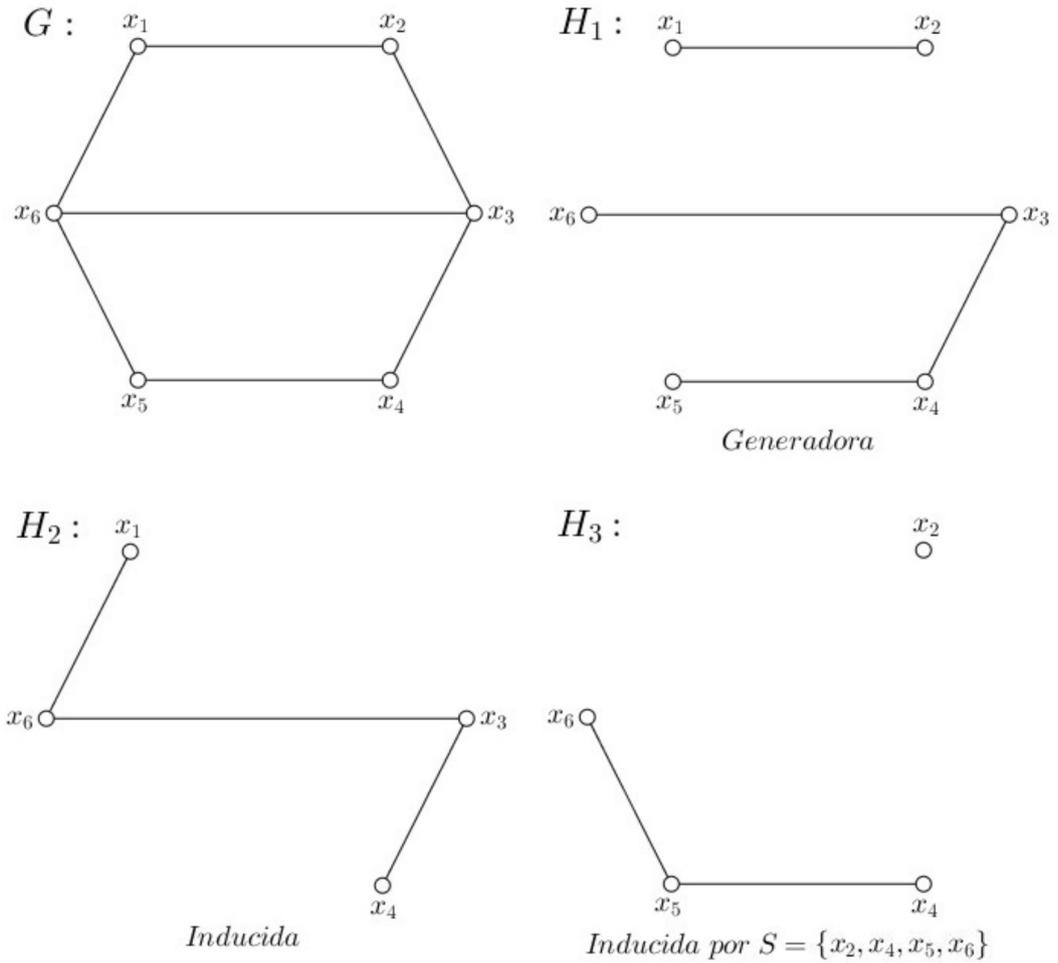


Figura 1.3: Ejemplos de subgráficas.

Análogamente también podemos definir a la gráfica inducida por un conjunto de aristas. Sean  $G$  una gráfica y  $S'$  un subconjunto de  $A(G)$ . La **gráfica inducida por  $S'$** , denotada por  $G[S']$ , es la gráfica tal que:

1.  $A(G[S']) = S'$ ,
2.  $V(G[S']) = \{v \in V(G) : (v, u) \in S' \text{ para algún } u \text{ en } V(G)\}$ .

Decimos que un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  es un conjunto **independiente** si  $A(G[S]) = \emptyset$ .

Sea  $G$  un gráfica y  $v$  en  $V(G)$ . La gráfica  **$G-v$**  se define como la gráfica  $G[V(G)-\{v\}]$ .

Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas. Definimos la **unión** de  $G_1$  y  $G_2$ , denotado por  $G_1 \cup G_2$ , como la gráfica tal que  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$  y  $A(G_1 \cup G_2) = A(G_1) \cup A(G_2)$ .

## 1.2. Tipos de gráficas

Existen distintas familias de gráficas, de las cuales algunas de ellas serán de gran importancia a lo largo de este trabajo.

El **complemento** de una gráfica  $G$ , denotado por  $G^c$ , es la gráfica tal que  $V(G^c) = V(G)$  y  $(u, v) \in A(G^c)$  si y sólo si  $(u, v) \notin A(G)$ .

Decimos que una gráfica  $G$  de orden  $p$ , es **completa** si  $\delta(v) = p - 1$  para todo vértice  $v$  de  $G$  y la denotamos por  $K_p$ .

Un **clan** de una gráfica  $G$  es una subgráfica  $K$  de  $G$  tal que  $K$  es completa. Definimos el **número de clan** de  $G$ , denotado por  $\omega(G)$ , como el orden máximo de un clan  $K$  de  $G$ , es decir,  $\omega(G) = \max\{|V(K)| : K \text{ es un clan de } G\}$ .

Una gráfica  $G$  es  **$k$ -partita** si existe una partición de los vértices de  $G$  en  $k$  conjuntos independientes. Una gráfica 2-partita será llamada **bipartita**.

A una gráfica  $G$  le asociamos una nueva gráfica, llamada la **gráfica de líneas**, denotada por  $L(G)$ , en la cual  $V(L(G)) = A(G)$  y para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $V(L(G))$  se tiene que  $(u, v) \in A(L(G))$  si y sólo si  $u$  y  $v$  inciden en el mismo vértice como aristas en  $G$ .

## 1.3. Caminos

Diremos que una sucesión  $W = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$  de vértices de  $G$  es un **camino** si  $(x_i, x_{i+1}) \in A(G)$  para cada  $i$  en  $\{0, \dots, n-1\}$ . Un camino que no repite aristas recibe el nombre de **paseo**. Un camino que no repite vértices y por lo tanto tampoco aristas, recibe el nombre de **trayectoria**. Si  $x_0 = x_n$ , entonces  $W$  es llamado un **camino cerrado**. Dado un camino  $W = (x_0, \dots, x_n)$ , definimos la **longitud** de  $W$  como  $n$ , denotado por  $l(W)$ .

Si  $W=(u=x_0, x_1, \dots, x_n=v)$  es un camino (trayectoria), entonces  $W$  es llamado un  $uv$ -camino ( $uv$ -trayectoria). El  $vu$ -camino ( $v = x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0 = u$ ) será denotado por  $W^{-1}$ .

Si  $W=(x_0, x_1, \dots, x_n)$  es un camino y  $\{x_i, x_j\}$  es un subconjunto de  $V(W)$ , con  $i < j$ , entonces el camino  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$  será denotado por  $(x_i, W, x_j)$ .

Si  $W_1=(u=x_0, \dots, x_n=v)$  y  $W_2=(v=y_0, \dots, y_m=w)$  son dos caminos, entonces el  $uw$ -camino  $(u=x_0, \dots, x_n=v=y_0, \dots, y_m)$  será denotado por  $W_1 \cup W_2$ .

Un **ciclo**  $C$  es un camino cerrado que sólo repite el primer y el último vértice, con  $l(C) \geq 3$ . Al ciclo de longitud  $n$  lo denotaremos por  $C_n$ .

Definimos la **distancia** entre  $u$  y  $v$ , denotada por  $d(u, v)$ , como la mínima de las longitudes de todas las  $uv$ -trayectorias en  $G$ .

Diremos que una gráfica  $G$  es **conexa** si para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $V(G)$  existe una  $uv$ -trayectoria. En caso contrario, diremos que  $G$  es **no conexa** o **inconexa**.

Diremos que  $H$  es una **componente conexa** de  $G$  si  $H$  es una subgráfica inducida de  $G$  máxima con la propiedad de ser conexa. Notemos que si  $G$  es no conexa, entonces existe una partición de  $V(G)$  en componentes conexas.

Un **árbol**  $T$  es una gráfica conexa y acíclica, es decir, sin ciclos.

## 1.4. Resultados básicos

**Teorema 1.1.** *Si  $G$  es una gráfica tal que  $\delta(v) \geq 2$  para cada  $v$  en  $V(G)$ , entonces  $G$  contiene un ciclo.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica tal que  $\delta(v) \geq 2$  para cada  $v$  en  $V(G)$ . Consideremos  $T=(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$  una trayectoria de longitud máxima de  $G$ . Como  $\delta(v_n) \geq 2$ , entonces existe  $w$  en  $V(G)$ , con  $w \neq v_{n-1}$ , tal que  $(v_n, w) \in A(G)$ .

Afirmamos que  $w=v_i$  para algún  $i$  en  $\{0, \dots, n-2\}$ . En caso contrario,  $T'=(v_0, T, v_n) \cup (v_n, w)$  es una trayectoria tal que  $l(T') > l(T)$ , lo cual contradice que  $T$  es de longitud máxima. Por lo tanto,  $C=(w = v_i, T, v_n) \cup (v_n, v_i = w)$  es un ciclo de  $G$ .  $\square$

**Teorema 1.2.** *Todo camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar.*

*Demostración.* Sea  $W$  un camino cerrado de longitud  $n$  tal que  $n$  es impar y  $n \geq 3$ . Procederemos por inducción sobre  $l(W)=n$  tal que  $n$  es impar, con  $n \geq 3$ .

*Base de inducción.* Si  $l(W)=3$ , entonces el camino cerrado  $W=(u_0, u_1, u_2, u_3=u_0)$  es un ciclo ya que sólo repite el primer y el último vértice y además, es de longitud impar.

*Hipótesis de inducción.* Supongamos que si  $W'$  es un camino cerrado de longitud impar tal que  $l(W') < n$ , entonces  $W'$  contiene un ciclo de longitud impar.

*Paso inductivo:* Sea  $W$  un camino cerrado tal que  $l(W)=n$ , con  $n$  impar. Consideremos  $W=(x_0, x_1, \dots, x_n=x_0)$ , entonces tenemos los siguiente dos casos.

**Caso 1:**  $W$  sólo repite el primer y el último vértice.  
Entonces  $W$  es un ciclo y además,  $l(W)$  es impar.

**Caso 2:**  $W$  repite al menos dos vértices.

Sea  $x_i$  el primer vértice de  $W$  distinto de  $x_0$  tal que  $x_i=x_j$  para algún  $i < j$ , con  $\{i, j\}$  un subconjunto de  $\{0, \dots, n\}$ .

Ahora, consideremos los caminos cerrados  $W_1$  y  $W_2$  tales que  $W_1=(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i=x_j, x_{j+1}, \dots, x_0)$  y  $W_2=(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j=x_i)$ .

Por construcción sabemos que  $l(W_1)+l(W_2)=l(W)$ . Puesto que la longitud de  $W$  es impar, entonces  $l(W_1)$  es impar o  $l(W_2)$  es impar.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad supongamos que  $l(W_1)$  es impar. Como  $l(W_1) < n$ , entonces por hipótesis de inducción tenemos que  $W_1$  contiene un ciclo  $\gamma$  de longitud impar.

Análogamente se demuestra cuando  $l(W_2)$  es impar.

Puesto que  $\gamma$  está contenido en  $W_1$  y  $W_1$  está contenido en  $W$ , entonces  $W$  contiene un ciclo de longitud impar, a saber  $\gamma$ , que era lo que se quería demostrar.  $\square$

**Teorema 1.3.** *Sea  $G$  una gráfica conexa no trivial.  $G$  es bipartita si y sólo si  $G$  no contiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es bipartita.

$(\Rightarrow)$  Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes.

Si  $G$  no tiene ciclos, en particular  $G$  no tiene ciclos de longitud impar. Supongamos entonces que  $G$  contiene un ciclo  $\gamma=(x_1, \dots, x_n, x_1)$  y sin pérdida de generalidad  $x_1 \in V_1$ . Dado que  $V_1$  y  $V_2$  son conjuntos independientes, entonces  $x_2 \in V_2, x_3 \in V_1, \dots$ , etcétera. De esta forma,  $x_{2k} \in V_2$  y  $x_{2k-1} \in V_1$ . Como  $(x_1, x_n) \in A(G)$ , entonces  $x_n \in V_2$ ,

lo cual implica que  $n$  es par y por lo tanto  $\gamma$  tiene longitud par.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $G$  no tiene ciclos de longitud impar. Sea  $x_0$  un vértice de  $G$ . Definimos los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{x \in V(G) : d(x, x_0) \text{ es par}\} \text{ y}$$

$$V_2 = \{x \in V(G) : d(x, x_0) \text{ es impar}\}.$$

Demostremos que  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes.

$V_1 \neq \emptyset$  pues  $d(x_0, x_0) = 0$  y entonces  $x_0 \in V_1$ . Por otro lado, como  $p > 1$  y  $G$  es conexa, entonces  $\delta(x_0) \geq 1$ , lo cual implica que existe  $x_1$  en  $V(G)$  tal que  $(x_0, x_1) \in A(G)$ . Por lo tanto,  $x_1 \in V_2$  y así,  $V_2 \neq \emptyset$ .

Ahora, veamos que  $V_1 \cup V_2 = V(G)$ . Por definición de  $V_1$  y  $V_2$  tenemos que  $(V_1 \cup V_2) \subseteq V(G)$ , por lo tanto resta demostrar que  $V(G) \subseteq (V_1 \cup V_2)$ . Sea  $w$  en  $V(G)$ . Como  $G$  es conexa, entonces existe  $T$  una  $wx_0$ -trayectoria. Si  $T$  es de longitud par, entonces  $w \in V_1$ ; si  $T$  es de longitud impar, entonces  $w \in V_2$ . Por lo tanto,  $w \in (V_1 \cup V_2)$  y así,  $V(G) \subseteq (V_1 \cup V_2)$ .

Se sigue que  $V_1 \cup V_2 = V(G)$ .

Además,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , de lo contrario existiría  $T_1$  una  $x_0x$ -trayectoria de longitud mínima par y  $T_2$  una  $x_0x$ -trayectoria de longitud mínima impar para algún  $x$  en  $V_1 \cap V_2$ , lo cual implica que  $T_1 \cup T_2^{-1}$  es un camino cerrado de longitud impar, el cual contiene un ciclo de longitud impar (por el teorema 1.2), lo cual no es posible.

Demostremos que  $V_1$  y  $V_2$  son conjuntos independientes en  $G$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $V_1$  no es un conjunto independiente, entonces existe un subconjunto  $\{x_1, x_2\}$  de  $V_1$  tal que  $(x_1, x_2) \in A(G)$ . Por definición de  $V_1$ , existe  $T_1$  una  $x_0x_1$ -trayectoria de longitud mínima par y existe  $T_2$  una  $x_0x_2$ -trayectoria de longitud mínima par. Así,  $T_1 \cup (x_1, x_2) \cup T_2^{-1}$  es un camino cerrado de longitud impar, el cual contiene un ciclo de longitud impar (por el teorema 1.2), contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto,  $V_1$  es independiente. De manera análoga se demuestra que  $V_2$  es independiente.

Así, concluimos que  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes. Por lo tanto,  $G$  es bipartita.  $\square$

**Corolario 1.3.1.** *Sea  $G$  una gráfica no trivial.  $G$  es bipartita si y sólo si  $G$  no contiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es bipartita.

( $\Rightarrow$ ) Procediendo como en la demostración del teorema anterior podemos

concluir que  $G$  no contiene ciclos de longitud impar.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $G$  sin ciclos de longitud impar. Si  $G$  es conexa, terminamos. De otra forma, sean  $G_1, G_2, \dots, G_k$  las componentes conexas no triviales de  $G$ . Por el teorema anterior sabemos que cada componente conexa es bipartita. Por lo tanto, sea  $\{X_i, Y_i\}$  una partición de  $V(G_i)$  en conjuntos independientes para cada  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ . Supongamos que  $G_{k+1}, \dots, G_m$  son las componentes triviales de  $G$ .

Sin pérdida de generalidad, consideremos los siguientes conjuntos:

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k \cup V(G_{k+1}) \cup \dots \cup V(G_m) \text{ y } Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k.$$

Podemos concluir que  $\{X, Y\}$  es una partición de los vértices de  $G$  en conjuntos independientes y por lo tanto,  $G$  es bipartita.  $\square$

**Corolario 1.3.2.** *Todo árbol  $T$  es bipartito.*

*Demostración.* Por definición de árbol,  $T$  es conexo y no contiene ningún ciclo, en particular, no contiene ningún ciclo de longitud impar. Por lo tanto,  $T$  es bipartito.  $\square$



# Capítulo 2

## Gráficas Bipartitas

A pesar de que existen distintos tipos de gráficas, las gráficas bipartitas serán de gran importancia para las demostraciones de algunos resultados en los capítulos posteriores.

En este capítulo, primero estudiaremos un poco de la teoría de apareamientos, definiremos apareamientos máximos y apareamientos perfectos. Demostraremos un resultado de Claude Berge aplicado a la teoría de apareamientos.

Posteriormente veremos conjuntos independientes y cubiertas en gráficas, específicamente en gráficas bipartitas. Estableceremos una relación entre el número de independencia por aristas y el número de cubierta por vértices.

Por último, veremos de qué manera los apareamientos se relacionan con el número de independencia por aristas y el número de cubierta por vértices. Demostraremos el teorema de König, el cual nos servirá para demostrar un teorema importante en el capítulo 4.

## 2.1. Apareamientos

Sean  $G$  una gráfica y  $M$  un subconjunto de  $A(G)$ . Diremos que  $M$  es un **apareamiento** si para cada subconjunto  $\{a, b\}$  de  $M$  se tiene que  $a$  y  $b$  no tienen un vértice extremo un común.

Sean  $G$  una gráfica y  $M$  un apareamiento en  $G$ .

- Diremos que un vértice  $v$  de  $G$  es  **$M$ -saturado** si existe una arista en  $M$  que incide en  $v$ . En caso contrario diremos que  $v$  es **no  $M$ -saturado**.
- Sea  $\{u, v\}$  un subconjunto de  $V(G)$ , diremos que  $u$  y  $v$  están  **$M$ -apareados** si  $(u, v) \in M$ .
- Diremos que  $M$  es un apareamiento **máximo** si no existe un apareamiento  $M'$  tal que  $|M| < |M'|$ .
- Diremos que  $M$  es **perfecto** si  $M$  satura a cada vértice de  $G$ .

**Ejemplo:** En la figura 2.1 se muestra un apareamiento  $M = \{(v_1, v_8), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$ . Tenemos que  $v_1$  es  $M$ -saturado mientras que  $v_7$  es no  $M$ -saturado, y  $v_1$  y  $v_8$  están  $M$ -apareados. Además,  $M$  es máximo y no es perfecto ya que no satura a todos los vértices de  $G$ .

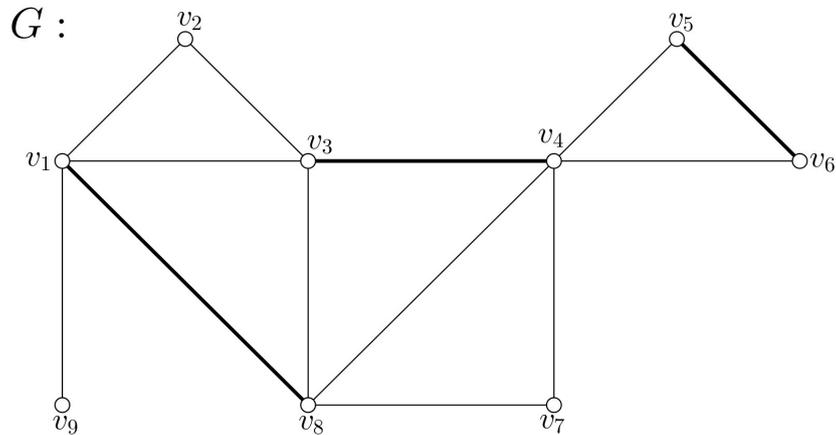


Figura 2.1: Ejemplo de una gráfica  $G$  y un apareamiento  $M$ .

Para presentar una caracterización de apareamientos máximos en una gráfica, introduciremos dos nuevas definiciones. Diremos que una trayectoria  $T$  es  **$M$ -alternante** si va alternando aristas en  $M$  y  $M^c$ ; y diremos que  $T$  es  **$M$ -augmentante** si es  $M$ -alternante y empieza y termina en vértices no  $M$ -saturados.

Sean  $M$  un apareamiento y  $T=(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$  una trayectoria  $M$ -alternante. Observemos qué sucede si  $T$  empieza con una arista de  $M$  y termina con una arista de  $M^c$ , qué sucede si  $T$  empieza y termina con aristas de  $M^c$  y, análogamente, qué sucede si  $T$  empieza y termina con aristas de  $M$ .

**Observación 1:** Si  $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-1}, x_n)\} \subseteq M$  (ver figura 2.2), entonces notemos que el número de aristas de  $T$  que están en  $M$  es el mismo número de aristas que están en  $M^c$ . Por lo tanto,  $n$  es par, es decir,  $T$  es de longitud par.

Análogamente, si  $T$  empieza con una arista que está en  $M$  y termina con una arista que está en  $M^c$ , entonces el número de aristas de  $T$  que están en  $M$  y en  $M^c$  son el mismo. Por lo tanto,  $T$  es de longitud par.

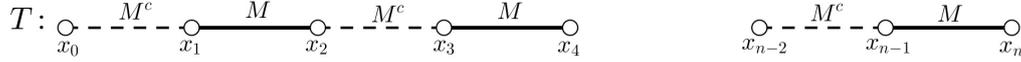


Figura 2.2: Ejemplo de una trayectoria  $M$ -alternante de longitud par, la cual empieza con una arista de  $M^c$  y termina con una arista de  $M$ .

**Observación 2:** Si  $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1})\} \subseteq M$  (ver figura 2.3), entonces considerando la subtrayectoria  $T'=(x_0, T, x_{n-1})$ , por la observación anterior,  $n-1$  es par y por lo tanto,  $n$  es impar, es decir,  $T$  es de longitud impar. Supongamos que  $n=2k+1$ , entonces  $|M \cap A(T)|=k$ , lo que implica que  $|A(T) - M|=k+1$ .

Análogamente, si  $T$  empieza y termina con aristas de  $M$ , entonces  $|A(T) - M|=k$  y  $|M \cap A(T)|=k+1$ .

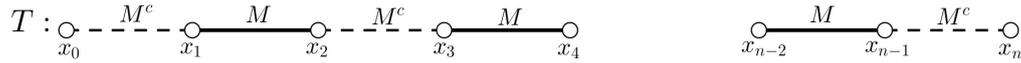


Figura 2.3: Ejemplo de una trayectoria  $M$ -alternante de longitud impar, la cual empieza y termina con aristas de  $M^c$ .

Notemos que toda gráfica contiene un apareamiento, a saber,  $M=\emptyset$ . Si  $A(G) \neq \emptyset$ , entonces  $M=\{a\}$ , con  $a \in A(G)$ , es un apareamiento. Lo interesante sería preguntarnos cuál es el número máximo de aristas en un apareamiento. El siguiente resultado nos da respuesta al planteamiento anterior.

**Teorema 2.1** (Berge). *Sean  $G$  una gráfica y  $M$  un apareamiento de  $G$ .  $M$  es máximo si y sólo si  $G$  no tiene trayectorias  $M$ -aumentantes.*

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es un apareamiento máximo de  $G$ , con  $|M|=m$ .

( $\Rightarrow$ ) Por contradicción, supongamos que  $G$  contiene al menos una trayectoria  $M$ -aumentante, digamos  $T=(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Como  $M_1=\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1})\} \subseteq M$ , entonces por la observación 2 concluimos que  $n=2k+1$  para algún  $k$  en  $\mathbb{N}$  y además  $|M \cap A(T)|=k$  y  $|A(T) - M|=k+1$ .

Consideremos  $M_2 \subseteq A(G)$ , donde  $M_2=A(T)-\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2k-1}, x_{2k})\} = \{(x_0, x_1), (x_2, x_3), \dots, (x_{2k}, x_{2k+1})\}$ . Por lo tanto,  $M'=(M - M_1) \cup M_2$  es un apareamiento tal que  $|M'|=(m-k)+(k+1) > |M|=m$ , lo cual contradice que  $M$  es un apareamiento máximo. Concluimos que  $G$  no tiene trayectorias  $M$ -aumentantes.

( $\Leftarrow$ ) Por contradicción, supongamos que  $G$  no tiene trayectorias  $M$ -aumentantes y que  $M$  es un apareamiento de  $G$  tal que no es máximo.

Entonces existe  $M'$  un apareamiento de  $G$  tal que  $|M'| > |M|$ .

Sea  $H=G[(M - M') \cup (M' - M)]$ . Observe que en  $H$  cada vértice tiene grado 1 o 2 ya que a cada vértice le puede incidir a lo más una arista de  $M$  y una arista de  $M'$ . Entonces cada componente conexa de  $H$  es un ciclo (teorema 1.1) o una trayectoria que alternan aristas de  $M$  y  $M'$ .

Por lo anterior, cada componente de  $H$  que es un ciclo es de longitud par, lo cual implica que la mitad de las aristas de esos ciclos son de  $M$  y la otra mitad son de  $M'$ . Pero como  $|M'| > |M|$ , entonces existe una componente de  $H$  que es una trayectoria  $T$  de longitud impar, la cual empieza y termina con aristas de  $M'$  (observación 2), es decir,  $T$  empieza y termina en vértices  $M'$ -saturados en  $H$  pero que son no  $M$ -saturados en  $G$ . Por lo tanto,  $T$  es una trayectoria  $M$ -aumentante de  $G$ , contradiciendo que  $G$  no tiene trayectorias  $M$ -aumentantes. Concluimos que  $M$  es máximo.  $\square$

A pesar de que los apareamientos son interesantes en todas las gráficas, para nuestro trabajo nos enfocaremos en los apareamientos en las gráficas bipartitas.

## 2.2. Independencia y cubiertas

Recordemos que un subconjunto  $S$  de  $V(G)$  es *independiente* si cualesquiera dos vértices de  $S$  son no adyacentes. Notemos que toda gráfica tiene un conjunto independiente, a saber, el conjunto vacío o el que consiste de un sólo vértice. Lo interesante sería preguntarnos cuál es el número máximo de vértices en un conjunto independiente. El número máximo de vértices en un conjunto independiente es llamado el *número de independencia* de  $G$  y se denota por  $\alpha(G)$ .

Análogamente, un subconjunto  $I$  de  $A(G)$  es *independiente por aristas* si cualesquiera dos aristas de  $I$  no tienen extremos en común. Por lo tanto, un

apareamiento  $M$  es un conjunto independiente por aristas. Como ya habíamos mencionado antes, lo interesante sería preguntarnos cuál es el número máximo de aristas en un conjunto independiente por aristas. El número máximo de aristas en un conjunto independiente por aristas es llamado el **número de independencia por aristas** de  $G$  y se denota por  $\alpha'(G)$ .

**Ejemplo:** En la figura 2.4 se muestra una gráfica  $G$  tal que  $\alpha(G)=3$  y  $\alpha'(G)=3$  (los vértices negros son un conjunto independiente máximo y las aristas gruesas son un conjunto independiente por aristas máximo).

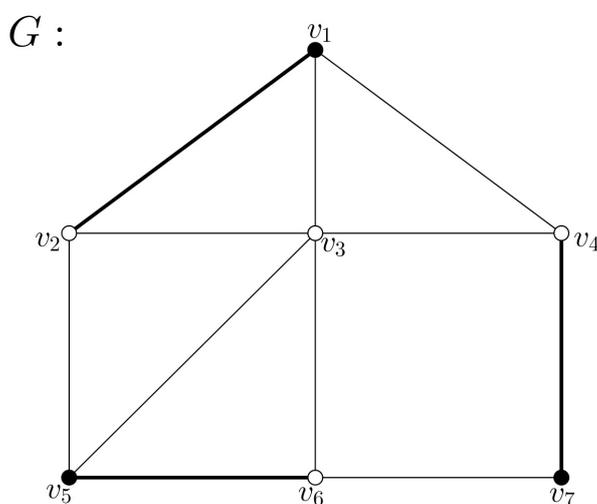


Figura 2.4: Gráfica  $G$  con  $\alpha(G)=3$  y  $\alpha'(G)=3$ .

Notemos que todo conjunto independiente por vértices en  $G$  induce una subgráfica completa en  $G^c$ . Sea  $W$  un conjunto independiente por vértices tal que  $|W|=\alpha(G)$ , entonces  $W$  induce una subgráfica completa de orden máximo en  $G^c$  y viceversa. Por lo tanto, para toda gráfica  $G$  se cumple que

$$\alpha(G) = \omega(G^c). \quad (2.1)$$

Una **cubierta por vértices** de una gráfica  $G$  (o simplemente cubierta) es un subconjunto  $C$  de  $V(G)$  tal que toda arista de  $G$  tiene al menos un extremo en  $C$ . Notemos que toda gráfica tiene una cubierta, a saber, el conjunto de todos los vértices de  $G$ . Definimos el **número de cubierta** de  $G$ , denotado por  $\beta(G)$ , como el mínimo número de vértices en una cubierta de  $G$ .

Una **cubierta por aristas** de una gráfica  $G$  es un subconjunto  $C'$  de  $A(G)$  tal que todo vértice de  $G$  es extremo de al menos una arista de  $C'$ , es decir, una

cubierta por aristas es un subconjunto de aristas tal que la unión de los extremos de las aristas de  $C'$  es igual a  $V(G)$ . Por lo tanto, sólo las gráficas sin vértices aislados tienen cubiertas por aristas. Notemos que toda gráfica (sin vértices aislados) tiene una cubierta por aristas, a saber, el conjunto de todas las aristas de  $G$ . Definimos el **número de cubierta por aristas** de  $G$ , denotado por  $\beta'(G)$ , como el mínimo número de aristas en una cubierta por aristas de  $G$ .

**Ejemplo:** En la figura 2.5 se muestra una gráfica  $G$  tal que  $\beta(G)=4$  y  $\beta'(G)=3$  (los vértices negros son una cubierta mínima y las aristas gruesas son una cubierta por aristas mínima).

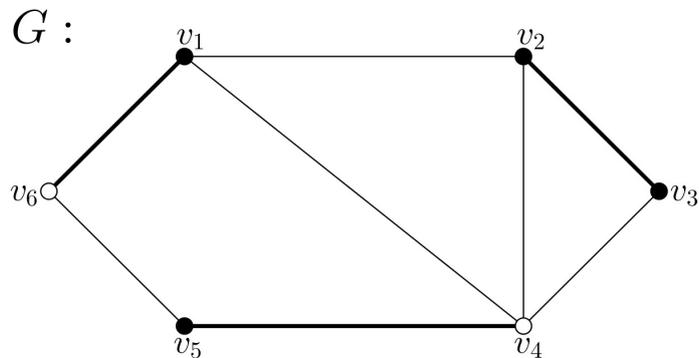


Figura 2.5: Gráfica  $G$  con  $\beta(G)=4$  y  $\beta'(G)=3$ .

**Teorema 2.2** (Gallai). *Si  $G$  es una gráfica de orden  $p$ , entonces  $\alpha(G)+\beta(G)=p$ .*

*Demostración.* Sea  $I$  un conjunto independiente en  $G$  tal que  $|I|=\alpha(G)$ .

Consideremos  $C=V(G)-I$ . Afirmamos que  $C$  es una cubierta de  $G$ .

Supongamos que  $C$  no es cubierta, entonces existe una arista  $(u, v)$  en  $G$  tal que  $u \notin C$  y  $v \notin C$ . Esto implica que  $\{u, v\} \subseteq I$ , lo cual contradice que  $I$  es independiente. Por lo tanto,  $C$  es una cubierta de  $G$  y entonces  $\beta(G) \leq |C|$ . De esta manera,  $\beta(G) \leq |V(G)| - |I|$ .

Por lo tanto,

$$\alpha(G) + \beta(G) \leq p.$$

Ahora, sea  $C$  una cubierta de  $G$  tal que  $|C|=\beta(G)$ . Consideremos  $I=V(G)-C$ . Afirmamos que  $I$  es un conjunto independiente de  $G$ .

Supongamos que  $I$  no es independiente, entonces existe un subconjunto  $\{u, v\}$  de  $I$  tal que  $(u, v) \in A(G)$ . Como  $u \notin C$  y  $v \notin C$ , entonces encontramos una contradicción con el hecho de que  $C$  es cubierta de  $G$ . Por lo tanto,  $I$  es un conjunto independiente

de  $G$  y entonces  $|I| \leq \alpha(G)$ . Así,  $|V(G)| - |C| \leq \alpha(G)$ , lo que implica que

$$p \leq \alpha(G) + \beta(G).$$

Concluimos que  $\alpha(G) + \beta(G) = p$ .  $\square$

Notemos que si  $C$  es una cubierta de  $G$  y  $M$  es un apareamiento de  $G$ , entonces  $C$  contiene al menos un extremo de cada una de las aristas de  $M$ . Por lo tanto, para cualquier apareamiento  $M$  y cualquier cubierta por vértices  $C$ , se cumple que  $|M| \leq |C|$ . De hecho, si  $M$  es un apareamiento máximo y  $C$  es una cubierta mínima, entonces

$$\alpha'(G) \leq \beta(G). \quad (2.2)$$

**Teorema 2.3.** *Si  $G$  es una gráfica de orden  $p$ , entonces  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ .*

*Demostración.* Sean  $C$  una cubierta mínima de  $G$  tal que  $|C| = \beta(G)$  e  $I$  un conjunto independiente máximo de aristas tal que  $|I| = \alpha'(G)$ . Como  $C$  es cubierta, entonces para cada arista  $a$  en  $I$ , existe un vértice  $v$  en  $C$  tal que  $v$  es extremo de  $a$ . Además, para cualesquiera dos aristas distintas  $b$  y  $c$  en  $I$  se tiene que sus vértices extremos son distintos. Por lo tanto,  $|I| \leq |C|$ , lo cual implica que  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ .  $\square$

En general, la igualdad en (2.2) no se cumple (ver figura 2.5, en donde  $\alpha'(G) = 3$  y  $\beta(G) = 4$ ). Sin embargo, si  $G$  es bipartita entonces la igualdad se cumple. Este resultado fue descubierto independientemente por König y Eugene Egerváry.

**Teorema 2.4** (König). *Si  $G$  es una gráfica bipartita, entonces  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes.

Por el teorema 2.3 sabemos que  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ , entonces resta probar que  $\beta(G) \leq \alpha'(G)$ .

Sea  $M$  un apareamiento  $G$  tal que  $|M| = \alpha'(G)$ .

Si  $M$  satura a todos los vértices de  $V_1$ , entonces  $|M| = |V_1|$ . Por otro lado, como  $V_1$  es una cubierta por vértices de  $G$ , entonces  $\beta(G) \leq |V_1| = |M| = \alpha'(G)$ .

Análogamente llegamos a que  $\beta(G) \leq |V_2| = |M| = \alpha'(G)$  si  $M$  satura a todos los vértices de  $V_2$ .

Por lo tanto, supongamos que existen vértices no  $M$ -saturados en  $V_1$  y en  $V_2$ . Denotemos por  $U$  al conjunto de todos los vértices no  $M$ -saturados en  $V_1$ . Notemos que  $|M| = |V_1| - |U|$ .

Ahora, sea  $W$  el conjunto de todos los vértices de  $G$  que están conectados a algún vértice de  $U$  mediante una trayectoria  $M$ -alternante.

**Observación:**  $U \subseteq W$  ya que  $P=(a)$  es una  $aa$ -trayectoria  $M$ -alternante para cada  $a$  en  $U$ .

**Afirmación 1:** Todo vértice en  $W - U$  es  $M$ -saturado.

Sea  $x$  en  $W - U$ . Supongamos que  $x$  es no  $M$ -saturado, por definición existe  $u$  en  $U$  tal que  $u$  y  $x$  están conectados por una trayectoria  $M$ -alternante, como  $u$  es no  $M$ -saturado, entonces la  $ux$ -trayectoria es una trayectoria  $M$ -aumentante, lo cual contradice que  $M$  es máximo (teorema 2.1).

Ahora definimos los conjuntos  $S=W \cap V_1$  y  $T=W \cap V_2$ .

**Afirmación 2:** Para todo vértice  $w$  en  $S - U$  existe  $t$  en  $T$  tal que  $(w, t) \in M$ .

Como  $(S - U) \subseteq W$ , entonces  $w \in W$ . Por definición de  $W$ , existe una  $uw$ -trayectoria  $M$ -alternante, digamos  $P=(u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = w)$  para algún  $u$  en  $U$ . Como  $u$  es no  $M$ -saturado, entonces  $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n})\} \subseteq M$ . Puesto que  $P'=(x_0, P, x_{2n-1})$  es una trayectoria  $M$ -alternante, entonces  $x_{2n-1} \in W$  y como  $x_{2n} \in V_1$ , se deduce que  $x_{2n-1} \in V_2$ . Por lo tanto,  $x_{2n-1} \in (W \cap V_2) = T$ ; así,  $x_{2n-1}$  es el vértice buscado.

**Afirmación 3:** Para todo vértice  $t$  en  $T$  existe  $w$  en  $S - U$  tal que  $(t, w) \in M$ .

Como  $t \in T$ , en particular,  $t \in W$ . Por definición de  $W$ , existe una  $ut$ -trayectoria  $M$ -alternante, digamos  $P=(u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} = t)$  para algún  $u$  en  $U$ . Como  $u$  es no  $M$ -saturado, entonces  $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n})\} \subseteq M$ . Por la afirmación (1) tenemos que  $t$  es  $M$ -saturado, entonces existe  $y$  en  $V(G)$  tal que  $(t, y) \in M$ . Notemos que  $y \notin V(P)$  ya que todo vértice de  $P$ , excepto  $u$ , es  $M$ -saturado.

Puesto que  $P'=(x_0, P, x_{2n+1} = t) \cup (t, y)$  es una  $uy$ -trayectoria  $M$ -alternante, entonces  $y \in W$ . Como  $t \in V_2$ , se deduce que  $y \in V_1$  y por lo tanto,  $y \in (W \cap V_1) = S$ . Así,  $y$  es el vértice buscado.

**Afirmación 4:**  $N(S) \subseteq T$ .

Sea  $x$  en  $N(S)$ . Por definición, existe  $s$  en  $S$  tal que  $(x, s) \in A(G)$ . Como  $S \subseteq W$ , entonces  $s \in W$ . Por definición de  $W$ , existe una  $us$ -trayectoria  $M$ -alternante, digamos  $P=(u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = s)$  para algún  $u$  en  $U$ . Como  $u$  es no  $M$ -saturado, entonces  $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n})\} \subseteq M$ . Por lo tanto, si  $x \notin V(P)$ , entonces  $P'=P \cup (x_{2n} = s, x)$  es una trayectoria  $M$ -alternante, lo que implica que  $x \in (W \cap V_2) = T$ . De otra forma, si  $x = x_i$  para algún  $i$  en  $\{0, \dots, 2n-1\}$ , entonces  $P'=(x_0, P, x_i = x)$  es una trayectoria  $M$ -alternante y por lo tanto,  $x \in (W \cap V_2) = T$ . Concluimos que  $N(S) \subseteq T$ .

**Afirmación 5:**  $C=(V_1 - S) \cup T$  es una cubierta de  $G$  (ver figura 2.6).

Sea  $(x, y)$  en  $A(G)$ . Por demostrar que  $x \in C$  o  $y \in C$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \in V_1$ .

Supongamos que  $x \in S$ , demostraremos que  $y \in C$ . Como  $x \in S$  y  $(x, y) \in A(G)$ , entonces  $y \in N(S)$ , lo que implica que  $y \in T$  (porque  $N(S) \subseteq T$ ). Por lo tanto,  $y \in C$ . Concluimos que  $C = (V_1 - S) \cup T$  es una cubierta de  $G$ .

Notemos que las afirmaciones (2) y (3) implican que  $|T| = |S| - |U|$ . Por lo tanto, junto con la afirmación (5) tenemos que:

$$|C| = |V_1| - |S| + |T| = |V_1| - |S| + (|S| - |U|) = |V_1| - |U| = |M|.$$

Es decir,  $|C| = |M|$  y entonces  $\beta(G) \leq |C| = |M| = \alpha'(G)$ .

$G$  :

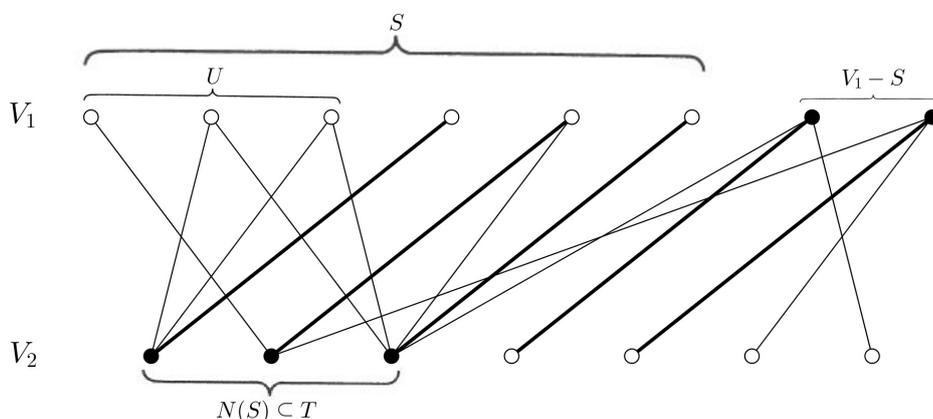


Figura 2.6: Gráfica  $G$  con cubierta  $C = (V_1 - S) \cup T$ .

Concluimos que  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .

□



# Capítulo 3

## Coloración por vértices

La coloración de gráficas se ha convertido en un tema de gran interés. Los problemas que se ocupan de la coloración de gráficas que han recibido la mayor atención involucran la coloración de los vértices de una gráfica.

En este capítulo daremos algunas definiciones para entender la coloración por vértices y el número cromático de una gráfica.

Empezaremos definiendo qué es una  $k$ -coloración, qué es una coloración propia y qué es el número cromático de una gráfica.

Caracterizaremos a las gráficas con número cromático igual a 1 y a las gráficas con número cromático igual a 2. Además, veremos cuál es el número cromático de las gráficas completas y cuál es el número cromático de los ciclos  $C_n$ , dependiendo de la paridad de  $n$ .

También, dada una gráfica  $G$  y una subgráfica de ella, veremos cómo se relacionan sus respectivos números cromáticos.

Daremos una cota inferior para el número cromático de una gráfica que involucra su número de clan, y otra cota inferior para el número cromático de cualquier gráfica  $G$  que depende de su orden y su número de independencia por vértices.

Una ***k*-coloración**  $c$  es una asignación de  $k$  colores a los vértices de  $G$ , es decir, es una función  $c:V(G)\rightarrow\{1, \dots, k\}$ .

Notemos que podríamos asignar el mismo color a vértices adyacentes.

Decimos que  $c$  es una ***coloración propia*** si cualesquiera dos vértices adyacentes en  $G$  tienen asignado un color distinto, esto es, si  $c(u)\neq c(v)$  para  $u$  y  $v$  vértices distintos de  $G$  tales que  $(u, v)\in A(G)$ .  $G$  es ***k*-coloreable** si existe una  $k$ -coloración propia de los vértices de  $G$ .

Notemos que una  $k$ -coloración propia de  $V(G)$  parte a los vértices de  $G$  en  $k$  conjuntos independientes  $V_1, V_2, \dots, V_k$ ; donde en  $V_i$  están todos los vértices con color  $i$ . Cada uno de estos conjuntos es llamado ***clase de color***.

Asignándole un color distinto a cada vértice de una gráfica  $G$ , obtenemos que toda gráfica de orden  $p$  es  $p$ -coloreable. A dicha  $p$ -coloración le llamaremos la ***coloración trivial***. Lo interesante será encontrar el menor número de colores que podemos utilizar para asignar una coloración propia a  $V(G)$ .

El ***número cromático*** de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios para dar una coloración propia a  $V(G)$ .

Notemos que de la definición se sigue que  $G$  es  $k$ -coloreable si y sólo si  $\chi(G)\leq k$ . Diremos que  $G$  es ***k*-cromática** si  $\chi(G)=k$ .

En la figura 3.1 se muestra una gráfica  $G$  con diferentes coloraciones. En (a)  $G$  tiene una 2-coloración, en (b)  $G$  tiene una 5-coloración propia y en (c)  $G$  tiene una 3-coloración propia mínima, es decir,  $\chi(G)=3$ .

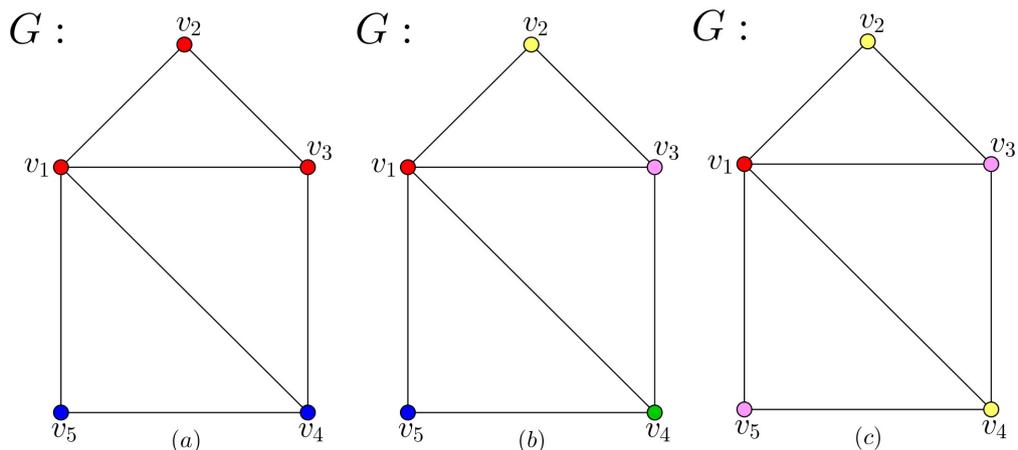


Figura 3.1: Gráfica  $G$  con distintas coloraciones.

### 3.1. Número cromático de algunas familias de gráficas ya conocidas

Primero notemos que si  $G$  contiene al menos una arista, entonces necesitamos al menos dos colores para colorear a  $G$ .

**Proposición 3.1.** *Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$ .*

a)  $\chi(G)=1$  si y sólo si  $G \cong K_p^c$ ,

b)  $\chi(K_p)=p$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$ .

a) Supongamos que  $\chi(G)=1$ .

Sea  $c$  una 1-coloración propia de  $V(G)$ . Como  $c(u)=c(v)=1$  para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $V(G)$ , se tiene que  $u$  y  $v$  no son adyacentes. Y así,  $G$  consiste únicamente de vértices aislados, es decir,  $G \cong K_p^c$ .

Por otro lado, ahora supongamos que  $G \cong K_p^c$ . Como  $G$  no tiene aristas, entonces podemos colorear a cada vértice con un sólo color y así obtenemos una 1-coloración propia de  $V(G)$ . Lo que implica que  $\chi(G)=1$ .

b) Sea  $G$  una gráfica completa de orden  $p$ . Entonces necesitamos al menos tantos colores como el número de vértices, pero sabemos que todos los vértices son adyacentes entre sí. Por lo tanto, necesitamos exactamente  $p$  colores para obtener una coloración propia de  $V(K_p)$ , es decir,  $\chi(K_p)=p$ . □

**Proposición 3.2.** *Sean  $G$  y  $H$  gráficas. Si  $H$  es una subgráfica de  $G$ , entonces  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $c$  una coloración propia de  $V(G)$  que utiliza  $\chi(G)$  colores. Como  $c$  restringida a  $V(H)$  también es una coloración propia para  $H$ , entonces se sigue de la definición de número cromático que  $\chi(H) \leq \chi(G)$ . □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición 3.2.

**Corolario 3.2.1.** *Toda gráfica  $G$  cumple  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .*

*Demostración.* Sean  $G$  una gráfica y  $K$  un clan de  $G$  de orden  $\omega(G)$ . Puesto que  $K$  es una subgráfica de  $G$ , se sigue de la proposición anterior que  $\chi(K) \leq \chi(G)$ . Luego, de la proposición 3.1 inciso (b) se sabe que  $\chi(K)=|V(K)|$  y como  $|V(K)|=\omega(G)$ , entonces  $\omega(G) \leq \chi(G)$ . □

**Proposición 3.3.** *Sea  $G$  una gráfica con  $q \geq 1$ .  $G$  es bipartita si y sólo si  $\chi(G)=2$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es bipartita.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes.

Como  $q \geq 1$ , entonces  $2 \leq \chi(G)$ . Ahora, asignamos una 2-coloración propia a  $V(G)$  de la siguiente manera:  $c(v)=1$  si  $v \in V_1$  y  $c(v)=2$  si  $v \in V_2$ . Como  $V_1$  y  $V_2$  son conjuntos independientes, se tiene que vértices adyacentes tienen asignado un color distinto, así  $\chi(G) \leq 2$ . Por lo tanto,  $\chi(G)=2$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\chi(G)=2$ . Sean  $c$  una 2-coloración propia de  $V(G)$  y  $V_1$  y  $V_2$  las clases de color de  $G$ . Notemos que  $V_1 \cup V_2 = V(G)$  y  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ya que  $c$  es función; además,  $V_1 \neq \emptyset$  y  $V_2 \neq \emptyset$  ya que  $c$  es mínima. Por lo tanto,  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(G)$  en conjuntos independientes. Con ésto concluimos que  $G$  es bipartita.  $\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición 3.3 es que si  $T$  es un árbol no trivial, entonces  $\chi(T)=2$ .

**Proposición 3.4.** *El número cromático de  $C_n$  es 2 si  $n$  es par, y es 3 si  $n$  es impar.*

*Demostración.* Sea  $C_n$  un ciclo de longitud  $n$ .

Primero notemos que todo ciclo tiene al menos una arista y por lo tanto,  $2 \leq \chi(C_n)$ .

Cuando  $n$  es par, entonces el ciclo es bipartito y por la proposición anterior, el número cromático es 2.

Cuando  $n$  es impar, al no ser  $C_n$  una gráfica bipartita, entonces  $\chi(C_n) > 2$ . Sea  $v$  un vértice de  $C_n$  y consideremos  $H = C_n - v$ . Notemos que  $H$  es bipartita por ser una trayectoria, por lo tanto, por la proposición anterior podemos asignar una 2-coloración propia a  $V(H)$ . Asignando un tercer color a  $v$ , distinto a los dos utilizados en  $H$ , obtenemos una 3-coloración propia de  $C_n$ . Por lo tanto,  $\chi(C_n) \leq 3$ . Se sigue que  $\chi(C_n) = 3$ .  $\square$

**Teorema 3.1.** *Para toda gráfica  $G$ ,  $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ .*

*Demostración.* Sean  $G$  una gráfica y  $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, \chi(G)\}$  una  $\chi(G)$ -coloración propia. Consideremos  $V_1, \dots, V_{\chi(G)}$  las clases de color de  $G$ . Puesto que cada clase de color es un conjunto independiente y  $\alpha(G)$  es el tamaño del conjunto independiente de vértices más grande de  $G$ , entonces se cumple que  $|V_i| \leq \alpha(G)$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, \chi(G)\}$ . Por lo tanto,

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G).$$

Lo que implica que  $|V(G)| \leq \chi(G)\alpha(G)$ . Como  $\alpha(G) \geq 1$ , concluimos que  $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ .  $\square$

A pesar de que se han mencionado algunos ejemplos de gráficas para las cuales se puede determinar fácilmente su número cromático, es importante mencionar que en general determinar el número cromático de una gráfica no es un problema trivial.



# Capítulo 4

## Gráficas Perfectas

En el corolario 3.2.1 del capítulo anterior, vimos que el número de clan de una gráfica  $G$  es una cota inferior para el número cromático. Mientras que hay algunos ejemplos de gráficas para las cuales  $\chi(G)=\omega(G)$ , como las gráficas completas y las gráficas bipartitas, también hay algunas gráficas cuyo número cromático excede su número de clan, tales como los ciclos impares de longitud al menos 5. Dichas gráficas tienen número cromático igual a 3 y número de clan igual a 2.

En este capítulo, nos enfocaremos en las gráficas que cumplen que  $\chi(G)=\omega(G)$  y que además, todas sus subgráficas inducidas propias también cumplen la igualdad. Demostraremos que las gráficas completas y las gráficas bipartitas cumplen la propiedad anterior, además de sus correspondientes complementos.

Utilizaremos resultados de capítulos anteriores para poder deducir y demostrar el Teorema Débil de Gráficas Perfectas.

Además, daremos la definición de una gráfica imperfecta y demostraremos que los ciclos impares de longitud al menos 5 son gráficas imperfectas, entre otras gráficas.

Analizaremos todas las gráficas no isomorfas con 1, 2, 3, 4 y 5 vértices, para posteriormente construir una gráfica que cumplirá la igualdad  $\chi(G)=\omega(G)$ , pero que sin embargo, será imperfecta y mínima por contención con las propiedades mencionadas.

Finalmente, a partir de los resultados vistos a lo largo del capítulo, podremos deducir la “Conjetura” Fuerte de Gráficas Perfectas.

**Proposición 4.1.** Sean  $G$  una gráfica y  $K$  un clan de  $G$ . Si  $c$  es una coloración propia de  $G$ , entonces  $c$  asigna un color distinto a cada vértice de  $K$ .

*Demostración.* Sean  $G$  una gráfica y  $K$  un clan de  $G$ . Supongamos que el orden de  $K$  es  $m$ . Como  $K$  es una gráfica completa, de la proposición 3.1 inciso (b), se deduce que  $\chi(K)=m$ . Por lo tanto,  $c$  debe asignar un color distinto a cada vértice de  $K$ .  $\square$

**Proposición 4.2.** Sean  $G$  una gráfica y  $c$  una  $k$ -coloración propia de  $V(G)$ . Si  $\omega(G)=k$ , entonces  $\omega(G)=\chi(G)$ .

*Demostración.* Por definición de número cromático se tiene que  $\chi(G)\leq k$  y por hipótesis  $\omega(G)=k$ , lo que implica que  $\chi(G)\leq\omega(G)$ . Del corolario 3.2.1 se sigue que  $\omega(G)=\chi(G)$ .  $\square$

Como podemos observar, el número cromático y el número de clan son de gran importancia en nuestro estudio, por lo tanto, es natural que surja la pregunta: ¿qué gráficas  $G$  cumplen la igualdad anterior?, es decir, que  $\omega(G)=\chi(G)$ . Consideremos la gráfica de la figura 4.1, donde  $G=C_3\cup C_5$ .

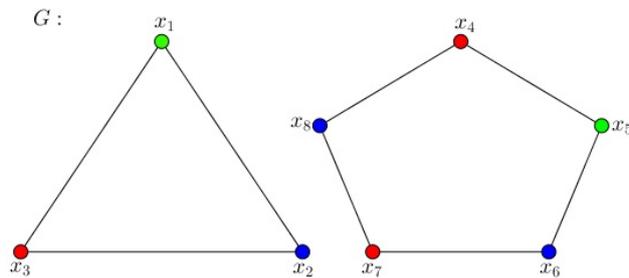


Figura 4.1: Gráfica  $G=C_3\cup C_5$ .

Notemos que por la proposición 3.4,  $\chi(C_3)=3$  y  $\chi(C_5)=3$  ya que ambos son ciclos de longitud impar. Además, la subgráfica completa más grande de  $G$  es  $C_3$ , es decir,  $\omega(G)=3$ . De esta forma,  $\chi(G)=3=\omega(G)$ .

Existen varias gráficas para las cuales se cumple la igualdad anterior, sin embargo, lo interesante sería que también toda subgráfica inducida de  $G$  cumpliera dicha igualdad. Por ejemplo, la gráfica  $G$  de la figura 4.1 cumple que  $\chi(G)=\omega(G)$ ; sin embargo, para  $C_5$  como subgráfica inducida de  $G$  se tiene que  $\chi(C_5)=3>\omega(C_5)=2$ .

Para mantener el interés en este tipo de gráficas, el matemático francés Claude Berge propuso que la propiedad  $\chi(G)=\omega(G)$  fuera hereditaria para toda subgráfica de  $G$ , dando pie a la siguiente definición.

Una gráfica  $G$  es **perfecta** si  $\chi(H)=\omega(H)$  para toda subgráfica inducida  $H$  de  $G$ .

Observemos que si  $H$  es una subgráfica inducida de  $G$ , toda subgráfica inducida de  $H$  también es una subgráfica inducida de  $G$ . Por lo tanto, si  $G$  es perfecta, entonces toda subgráfica inducida de  $G$  también es perfecta. Además, si  $G$  y  $F$  son gráficas tales que  $G \cong F$ , entonces se cumple que  $G$  es perfecta si y sólo si  $F$  es perfecta.

**Teorema 4.1.** *Toda gráfica completa es perfecta.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica completa de orden  $p$ . Entonces  $\omega(G)=p$  y por la proposición 3.1 inciso (b) sabemos que  $\chi(G)=p$ , lo que implica que  $\chi(G)=\omega(G)$ . Además, toda subgráfica inducida  $H$  de una gráfica completa, es también una gráfica completa, lo que nos lleva a que  $\chi(H)=\omega(H)$ . Por lo tanto, toda gráfica completa es perfecta.  $\square$

**Teorema 4.2.** *Toda gráfica bipartita es perfecta.*

*Demostración.* Sean  $G$  una gráfica bipartita y  $H$  una subgráfica inducida de  $G$ .

Si  $|V(H)|=1$ , entonces sabemos que  $H$  es perfecta. Por lo tanto, supongamos que  $|V(H)| \geq 2$ . Note que en este caso  $H$  es bipartita. Si  $H$  tiene al menos una arista, entonces  $\chi(H)=2$  (proposición 3.3) y  $\omega(H)=2$ ; si  $|A(H)|=0$ , entonces  $\chi(H)=\omega(H)=1$  (proposición 3.1 inciso (a)). En cualquier caso se cumple que  $\chi(H)=\omega(H)$  y por lo tanto  $G$  es perfecta.  $\square$

**Corolario 4.2.1.** *Toda gráfica cuyo complemento es bipartito es perfecta.*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$  tal que  $G^c$  es bipartita.

Como toda gráfica completa no trivial es perfecta (teorema 4.1) y su complemento es bipartito, entonces supongamos que  $G$  no es una gráfica completa.

Recordemos que la gráfica trivial es perfecta. Como el complemento de cada subgráfica inducida no trivial de  $G$  es también bipartita, para verificar que  $G$  es perfecta, basta con probar que  $\chi(G)=\omega(G)$ .

Supongamos que  $\chi(G)=k$  y  $\omega(G)=l$ . Sabemos por el corolario 3.2.1 que  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , entonces resta probar que  $\chi(G) \leq \omega(G)$ .

Sea  $c$  una  $k$ -coloración propia de  $V(G)$ . Notemos que cada clase de color de  $G$  consiste ya sea de uno o dos vértices; de otra forma, si  $G$  contiene una clase de color con tres o más vértices, entonces  $G^c$  contiene un  $C_3$ , lo cual no es posible ya que  $G^c$  es bipartita.

Sean  $V_1, \dots, V_k$  las  $k$  clases de color, en donde todos los vértices de  $V_i$  tienen color  $i$ . Supongamos que  $m$  clases contienen un sólo vértice y las  $n=k-m$  clases restantes contienen dos vértices, entonces  $k=m+n$  y  $m+2n=p$ .

Sean  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  el conjunto de vértices de  $G$  tales que  $s_i \in V_i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, m\}$  y  $T = V_{m+1} \cup V_{m+2} \cup \dots \cup V_k$  tal que  $V_j = \{u_j, v_j\}$  para cada  $j$  en  $\{m+1, \dots, k\}$  (ver figura 4.2).

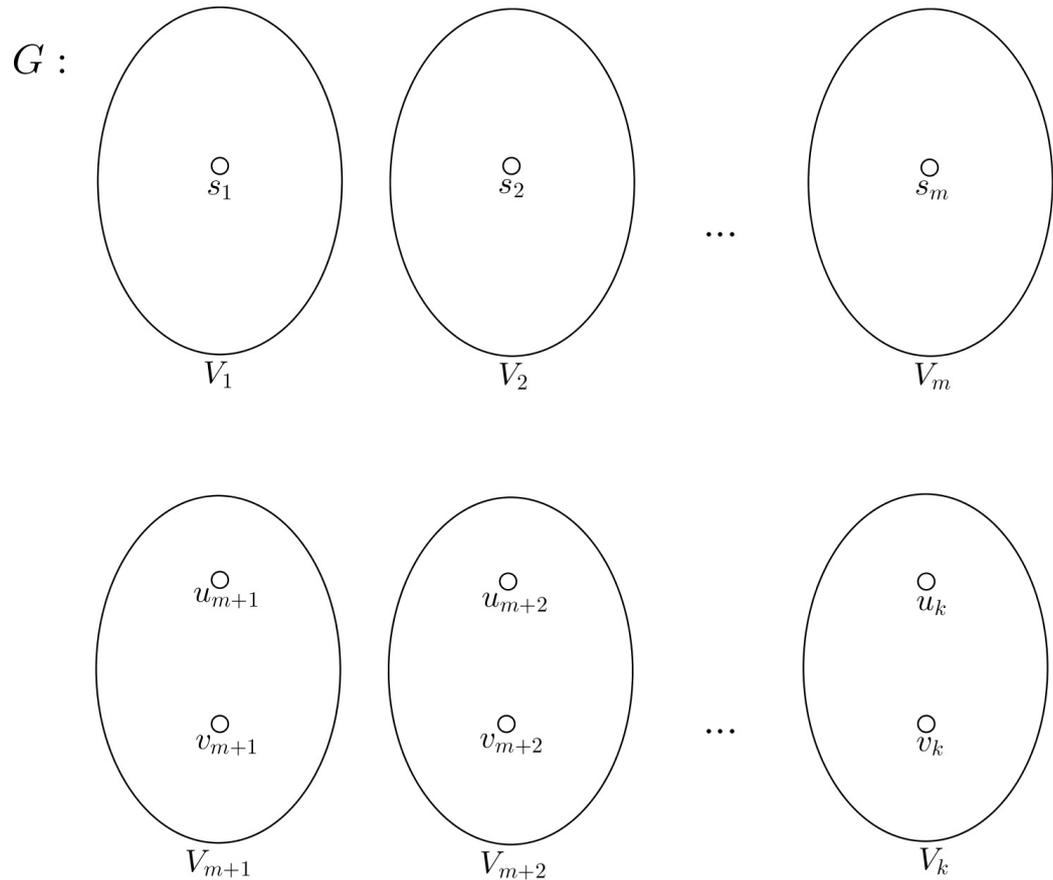


Figura 4.2: Ejemplo gráfico de los conjuntos  $S$  y  $T$ .

**Afirmación 1:**  $G[S] = K_m$ .

Supongamos que existe un subconjunto  $\{x, y\}$  de  $S$ , con  $x \neq y$ , tal que  $(x, y) \notin A(G)$ , entonces podemos asignar el color  $c(x)$  a  $y$  y al resto de los vértices les dejamos el mismo color que asignó originalmente  $c$ . De esta manera obtenemos una  $(k-1)$ -coloración propia para  $G$ , lo que implica que  $\chi(G) \leq k-1$ , lo cual no es posible. Por lo tanto, todo par de vértices de  $S$  son adyacentes en  $G$ , entonces  $G[S] = K_m$  y así,  $G^c[S] = K_m^c$ .

**Afirmación 2:** Ninguna coloración propia de  $V(G)$  resulta en más de  $n$  clases de color que contienen dos vértices.

Primero notemos que  $k=m+n=(p-2n)+n$ , por lo tanto,  $k=p-n$ .

Sea  $c'$  una  $k'$ -coloración propia de  $V(G)$ . Supongamos que existen  $n+1$  clases de color  $C_1, \dots, C_{n+1}$  que contienen dos vértices y las  $p-2(n+1)$  clases restantes contienen un sólo vértice (ver figura 4.3). Considerando esta partición de  $V(G)$  en clases de color, vamos a dar una nueva coloración propia a los vértices de  $G$ . Asignemos una coloración trivial a  $V(G)-(C_1 \cup \dots \cup C_{n+1})$  y a los vértices en  $C_i$  les dejamos su color original dado por  $c'$  de tal manera que los colores utilizados en  $V(G)-(C_1 \cup \dots \cup C_{n+1})$  son distintos a los representados por las clases de color  $C_i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, n+1\}$ . Así, la nueva coloración  $c''$  es propia.

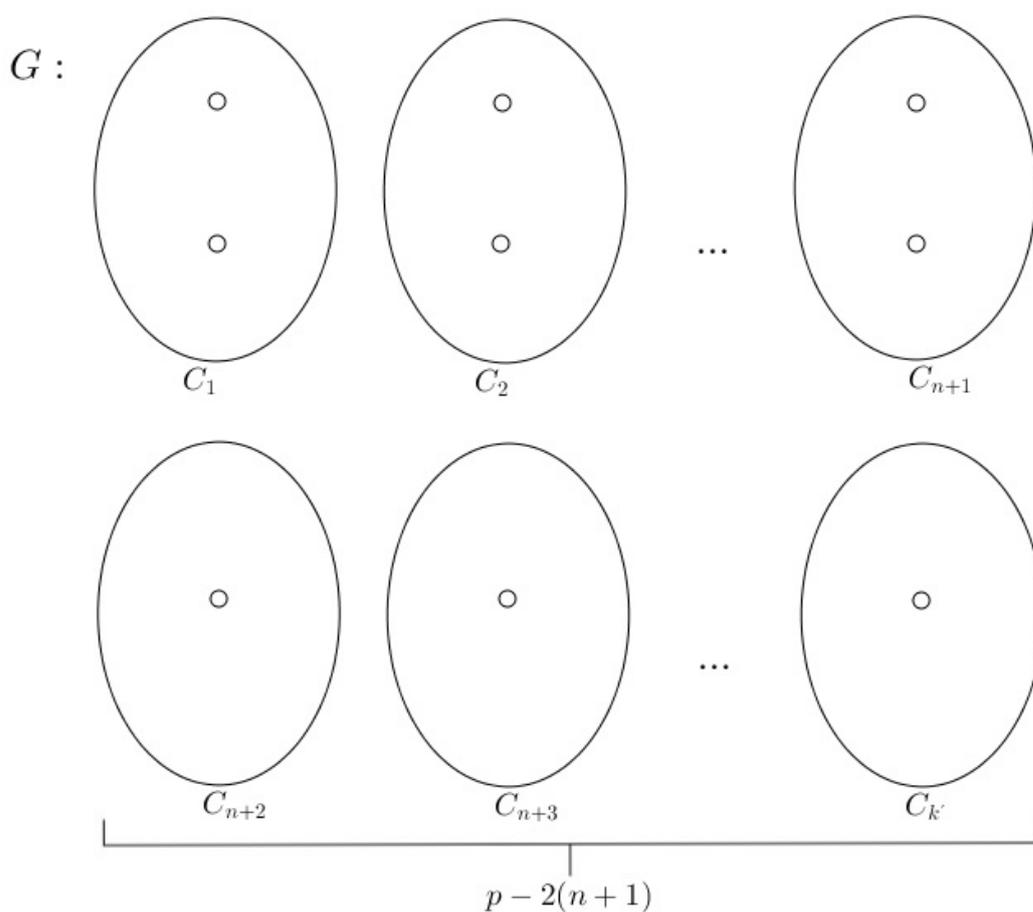


Figura 4.3: Ejemplo de una  $k'$ -coloración propia de  $V(G)$  en la afirmación 2.

Supongamos que  $c''$  es una  $k''$ -coloración. Entonces,  $k''=(n+1)+(p-2(n+1))$  y por lo tanto,  $k''=p-(n+1)$ . Pero ésto implica que  $k''=p-(n+1) < k=p-n$ , lo cual no es posible ya que  $k$  es mínima.

Por lo tanto, ninguna coloración propia de  $V(G)$  resulta en más de  $n$  clases de

color que contienen dos vértices.

**Afirmación 3:** Todo apareamiento  $M$  en  $G^c$  induce una coloración propia en  $G$ .

Sea  $M = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_r, v_r)\}$  un apareamiento en  $G^c$ . Consideremos el conjunto  $C_i = \{u_i, v_i\}$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, r\}$ . Como  $(u_i, v_i) \in A(G^c)$  implica que  $(u_i, v_i) \notin A(G)$ , entonces  $C_i$  es un conjunto independiente en  $G$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, r\}$ .

Ahora procedamos a dar una coloración propia a  $V(G)$  como sigue: a los vértices de  $C_i$  les asignamos el color  $i$  para cada  $i$  en  $\{1, \dots, r\}$  y a los vértices de  $V(G) - (C_1 \cup \dots \cup C_r)$  les damos una coloración trivial con colores distintos a los del conjunto  $\{1, \dots, r\}$ .

**Observación:** La coloración propia para  $G$  que induce el apareamiento  $M$  de la afirmación (3) produce  $r$  clases de color que contienen dos elementos.

**Afirmación 4:**  $\alpha'(G^c) \leq n$ .

Procediendo por contradicción, supongamos que  $n < \alpha'(G^c)$ . Esto implica que existe un apareamiento  $M$  en  $G^c$  con  $n + 1$  elementos (porque  $G^c$  tiene un apareamiento máximo con al menos  $n + 1$  elementos). De la observación anterior se deduce que  $M$  induce una coloración propia para  $G$  que produce  $n + 1$  clases de color que contienen dos elementos, lo cual contradice la afirmación (2).

Por lo tanto,

$$\alpha'(G^c) \leq n. \quad (4.1)$$

Ahora, sabemos por el teorema 2.2 que  $\alpha(G^c) + \beta(G^c) = p$  y además como  $G^c$  es bipartita, por el teorema de König (teorema 2.4) se cumple que  $\alpha'(G^c) = \beta(G^c)$ . Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que  $\alpha(G^c) + \alpha'(G^c) = p$  y entonces

$$\alpha(G^c) = p - \alpha'(G^c). \quad (4.2)$$

Por lo tanto, (4.1) y (4.2) implican que

$$\alpha(G^c) = p - \alpha'(G^c) \geq p - n. \quad (4.3)$$

Como  $p = m + 2n$ , entonces  $\alpha(G^c) \geq (m + 2n) - n = m + n$  y así,  $\alpha(G^c) \geq m + n$ . Por otro lado, sabemos que  $\omega(G) = \alpha(G^c)$ , lo cual implica que  $\omega(G) \geq m + n$ , pero  $m + n = k = \chi(G)$ , es decir,  $\omega(G) \geq \chi(G)$ .

Se sigue que  $\chi(G) = \omega(G)$ .

Concluimos que  $G$  es perfecta. □

## 4.1. Teorema Débil de Gráficas Perfectas

Como ya hemos visto, si  $G$  es una gráfica completa o una gráfica bipartita, entonces  $G$  y  $G^c$  son perfectas. De hecho, en 1961 Claude Berge propuso la siguiente conjetura.

**Conjetura Débil de Gráficas Perfectas:** *Una gráfica es perfecta si y sólo si su complemento es perfecto.*

En 1972, László Lovász demostró que esta conjetura es cierta.

Antes de exhibir la demostración del Teorema Débil de Gráficas Perfectas es necesario introducir algunas definiciones y establecer algunos resultados previos.

Sean  $G$  una gráfica y  $v$  un vértice de  $G$ . La **gráfica de replicación** de  $G$  (con respecto a  $v$ ), denotada por  $R_v(G)$ , es la gráfica obtenida a partir de  $G$  de forma que  $V(R_v(G))=V(G)\cup\{v'\}$  y  $A(R_v(G))=A(G)\cup\{(v,v')\}\cup\{(v,x) : x \text{ es vecino de } v \text{ en } G\}$ . Decimos que  $R_v(G)$  es obtenida a partir de  $G$  mediante la **replicación del vértice  $v$** .

**Ejemplo:** La figura 4.4 muestra una gráfica  $G$  y la gráfica obtenida al replicar el vértice  $v$ ,  $R_v(G)$ .

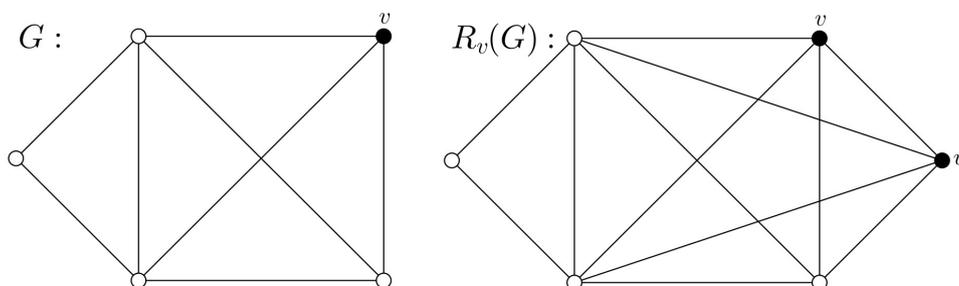


Figura 4.4: Ejemplo de una gráfica  $G$  y  $R_v(G)$ .

Antes de demostrar la conjetura, necesitamos el siguiente teorema.

**Teorema 4.3** (Lema de Replicación). *Si  $G$  es una gráfica perfecta, entonces  $R_v(G)$  es perfecta para todo vértice  $v$  de  $G$ .*

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre el orden  $p$  de una gráfica perfecta  $G$ .

*Base de inducción.* Para  $p=1$  tenemos que  $G=K_1$  la cual es perfecta por ser completa y  $R_v(G)=K_2$  también es perfecta por ser completa.

*Hipótesis de inducción.* Ahora, supongamos que si  $G'$  es una gráfica perfecta de orden menor o igual que  $p$ , entonces  $R_v(G')$  es perfecta para cualquier vértice  $v$  de  $G'$ .

*Paso inductivo.* Sean  $G$  una gráfica perfecta de orden  $p+1$ ,  $v$  en  $V(G)$  y  $R_v(G)$  la gráfica obtenida al replicar el vértice  $v$ . Demostraremos que  $R_v(G)$  es perfecta, es decir, que  $\chi(H)=\omega(H)$  para toda subgráfica inducida  $H$  de  $R_v(G)$ .

Primero notemos que por hipótesis  $G$  es perfecta y por lo tanto

$$\chi(F) = \omega(F) \text{ para toda subgráfica inducida } F \text{ de } G. \quad (4.4)$$

Ahora, procederemos a demostrar los tres posibles casos para cuando  $H$  es una subgráfica inducida propia de  $R_v(G)$ .

Primero demostraremos que toda subgráfica inducida propia  $H$  de  $R_v(G)$  cumple la igualdad (4.4).

**Caso 1:**  $v'$  no está en  $V(H)$ .

Por construcción de  $R_v(G)$  se tiene que  $H$  es subgráfica inducida de  $G$  y por (4.4) tenemos que  $\chi(H)=\omega(H)$ .

**Caso 2:**  $v'$  es vértice de  $H$  pero  $v$  no lo es.

Como  $H \cong G[(V(H)-\{v'\}) \cup \{v\}]$  y  $G' = G[(V(H)-\{v'\}) \cup \{v\}]$  es una subgráfica inducida de  $G$ , entonces  $\chi(G')=\omega(G')$ . Por lo tanto,  $\chi(H)=\omega(H)$ .

**Caso 3:**  $\{v, v'\} \subseteq V(H)$ .

En este caso  $H$  es la gráfica de replicación (respecto a  $v$ ) de la gráfica  $H' = G[V(H)-\{v'\}]$ , pero  $H'$  tiene orden menor o igual que  $p$  y por hipótesis de inducción,  $H'$  es perfecta. Por lo tanto,  $\chi(H)=\omega(H)$ .

Ahora, vamos a demostrar que  $\chi(R_v(G))=\omega(R_v(G))$ . Por el corolario 3.2.1 sabemos que  $\chi(R_v(G)) \geq \omega(R_v(G))$ , por lo tanto, sólo resta demostrar que

$$\chi(R_v(G)) \leq \omega(R_v(G)). \quad (4.5)$$

Consideremos dos casos sobre  $v$ .

**Caso I:**  $v$  pertenece a algún clan  $K$  de  $G$  de orden  $\omega(G)$ .

Primero notemos que como  $v$  pertenece a un clan máximo  $K$ , al replicar  $v$  tenemos que también  $v'$  pertenece a un clan  $K'$  de orden  $\omega(G)+1$  en  $R_v(G)$ . De esta forma

$$\omega(R_v(G)) = \omega(G) + 1. \quad (4.6)$$

Ahora, sea  $c:V(G)\rightarrow\{1, \dots, k\}$  una  $k$ -coloración propia de  $G$  tal que  $k=\chi(G)$ . Consideremos  $c':V(R_v(G))\rightarrow\{1, \dots, k, k+1\}$  una  $(k+1)$ -coloración de  $R_v(G)$  como sigue:

$$c'(u) = \begin{cases} c(u) & \text{si } u \in V(G) \\ k+1 & \text{si } u \notin V(G). \end{cases}$$

Veamos que  $c'$  es una  $(k+1)$ -coloración propia para  $G$ . Sean  $x$  y  $y$  dos vértices distintos en  $R_v(G)$  tales que  $(x, y) \in A(R_v(G))$ . Consideremos dos casos sobre  $x$  y  $y$ .

- Caso 1:  $\{x, y\} \subseteq V(G)$ .

Entonces  $c'(x)=c(x) \neq c(y)=c'(y)$  ya que  $c$  es una coloración propia.

- Caso 2:  $x \in V(G)$  y  $y \notin V(G)$ .

Como  $y \notin V(G)$ , entonces  $c'(y)=k+1$ . Por lo tanto,  $c'(y) \neq c(x)=c'(x)$  ya que  $k+1$  es un color distinto de los  $k$  colores utilizados en  $c$ .

Se argumenta de manera análoga cuando  $x \notin V(G)$  y  $y \in V(G)$ .

Por lo tanto,  $\chi(R_v(G)) \leq k+1 = \chi(G)+1$ . Entonces por (4.6) y por ser  $G$  perfecta tenemos que

$$\chi(R_v(G)) \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(R_v(G)). \quad (4.7)$$

Se sigue que  $\chi(R_v(G)) = \omega(R_v(G))$ .

**Caso II:**  $v$  no pertenece a algún clan  $K$  de  $G$  de orden  $\omega(G)$ .

**Observación:** Como todo clan de  $G$  es también un clan de  $R_v(G)$ , entonces

$$\omega(G) \leq \omega(R_v(G)). \quad (4.8)$$

Supongamos que  $\chi(G) = \omega(G) = k$  (por ser  $G$  perfecta). Sean  $c:V(G)\rightarrow\{1, \dots, k\}$  una  $k$ -coloración propia de  $G$  y  $V_1, \dots, V_k$  las  $k$  clases de color, donde todos los vértices de  $V_i$  tienen color  $i$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $c(v)=1$ , es decir,  $v$  está en  $V_1$  (ver figura 4.5).

Para demostrar el caso II necesitamos la siguiente afirmación.

**Afirmación:** Si  $K^*$  es un clan de  $G$  de orden  $\omega(G)$ , entonces  $V(K^*) \cap V_i \neq \emptyset$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ .

Como  $K^*$  es una subgráfica inducida de  $G$ , entonces  $K^*$  es también perfecta, es decir,  $\chi(K^*) = \omega(K^*) = \omega(G) = k$  y puesto que  $c$  utiliza exactamente  $k$  colores, entonces todo vértice de  $K^*$  pertenece a una clase de color distinta. Así,  $V(K^*) \cap V_i \neq \emptyset$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, k\}$ .

Ahora, puesto que  $v$  no pertenece a algún clan de orden  $\omega(G)$ , entonces por la afirmación anterior  $|V_1| \geq 2$ .

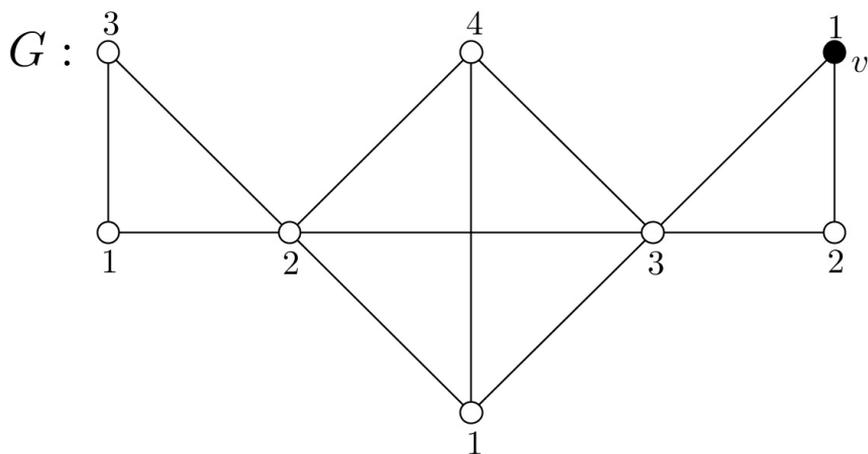


Figura 4.5: Ejemplo de una gráfica  $G$  con una  $\chi(G)$ -coloración.

Consideremos  $V' = V_1 - \{v\}$  y  $G^* = G[V(G) - V']$  (ver figura 4.6).

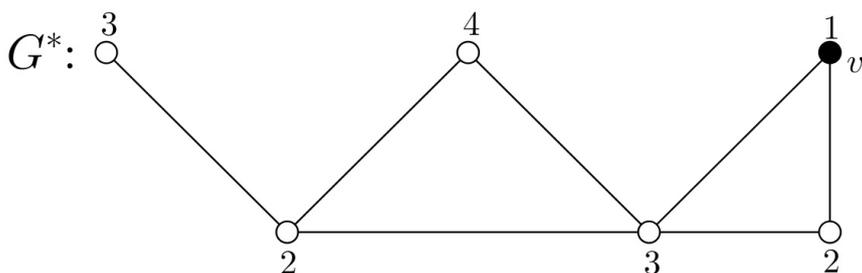


Figura 4.6: Ejemplo de  $G^* = G[V(G) - V']$ .

Ya que todo clan de orden  $\omega(G)$  contiene un vértice de  $V'$ , se sigue que  $\omega(G^*) = \omega(G) - 1 = k - 1$ . Como  $G$  es perfecta y  $G^*$  es una subgráfica inducida de  $G$ , entonces  $G^*$  también es perfecta. Por lo tanto,  $\chi(G^*) = \omega(G^*) = k - 1$ .

Sea  $c^*: V(G^*) \rightarrow \{1, \dots, k - 1\}$  una  $(k - 1)$ -coloración propia de  $G^*$  (ver figura 4.7). Consideremos  $c': V(R_v(G)) \rightarrow \{1, \dots, k - 1, k\}$  una  $k$ -coloración de  $R_v(G)$  como sigue:

$$c'(u) = \begin{cases} c^*(u) & \text{si } u \in V(G^*) \\ k & \text{si } u \notin V(G^*). \end{cases}$$

Veamos que  $c'$  es una  $k$ -coloración propia (ver figura 4.8). Sean  $x$  y  $y$  dos vértices distintos en  $R_v(G)$  tales que  $(x, y) \in A(R_v(G))$ .

- Caso 1:  $\{x, y\} \subseteq V(G^*)$ .

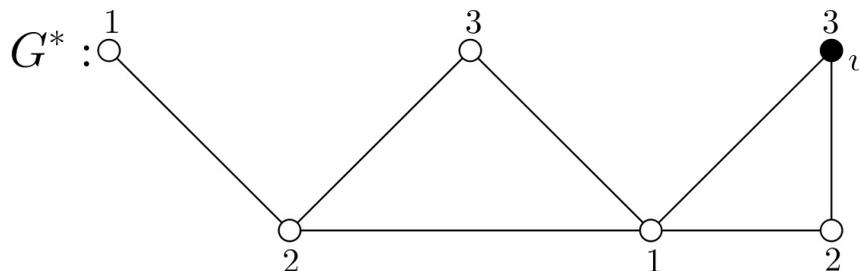


Figura 4.7: Ejemplo de  $G^*$  con una  $(k - 1)$ -coloración propia.

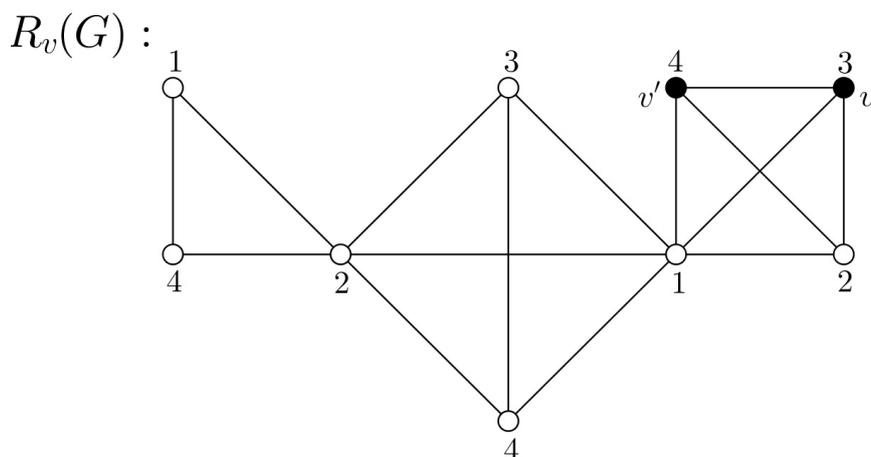


Figura 4.8: Ejemplo de  $R_v(G)$  con una  $k$ -coloración propia.

Entonces  $c'(x) = c^*(x) \neq c^*(y) = c'(y)$  ya que  $c^*$  es una coloración propia.

- Caso 2:  $x \in V(G^*)$  y  $y \notin V(G^*)$ .

Como  $y \notin V(G^*)$ , entonces  $c'(y) = k$ . Por lo tanto,  $c'(y) \neq c^*(x) = c'(x)$  ya que  $k$  es un color distinto de los  $(k - 1)$  colores utilizados en  $c^*$ .

Se argumenta de manera análoga cuando  $x \notin V(G^*)$  y  $y \in V(G^*)$ .

- Caso 3:  $\{x, y\} \not\subseteq V(G^*)$ .

Entonces  $\{x, y\} \subseteq (V' \cup \{v'\})$ . Puesto que  $V_1$  es un conjunto independiente de vértices en  $G$ , entonces  $V' \cup \{v'\}$  también es independiente por la definición de  $R_v(G)$ . Por lo que este caso no es posible porque  $(x, y) \in A(R_v(G))$ .

Así,  $c'$  es una coloración propia.

Por lo tanto,  $\chi(R_v(G)) \leq k$ .

Por lo anterior y por (4.8) tenemos que

$$\chi(R_v(G)) \leq k = \omega(G) \leq \omega(R_v(G)). \quad (4.9)$$

Se sigue que  $\chi(R_v(G)) = \omega(R_v(G))$ .

Concluimos que  $R_v(G)$  es perfecta ya que  $\chi(H) = \omega(H)$  para toda subgráfica inducida  $H$  de  $R_v(G)$ . □

**Teorema 4.4** (Teorema Débil de Gráficas Perfectas). *Una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si  $G^c$  es perfecta.*

*Demostración.* Como toda gráfica  $G$  cumple que  $(G^c)^c = G$ , basta demostrar que si  $G$  es perfecta, entonces  $G^c$  es perfecta.

Procederemos por inducción sobre el orden  $p$  de una gráfica perfecta  $G$ .

*Base de inducción.* Para  $p=1$  tenemos que  $G=K_1$  la cual es perfecta por ser completa. Además, como  $G=G^c$ , se sigue que  $G^c$  es perfecta.

*Hipótesis de inducción.* Ahora supongamos, para un entero  $p \geq 2$ , que el complemento de toda gráfica perfecta de orden menor que  $p$ , es perfecta.

*Paso inductivo.* Sea  $G$  una gráfica perfecta de orden  $p$ . Si  $G$  es completa, entonces el tamaño de  $G^c$  es 0, lo cual implica que  $G^c$  es perfecta por ser bipartita. Por lo tanto, supongamos que  $G$  no es completa. Demostraremos que  $G^c$  es perfecta, es decir,  $\chi(F) = \omega(F)$  para toda subgráfica inducida  $F$  de  $G^c$ .

Notemos que para toda subgráfica inducida propia  $F$  de  $G^c$ , existe una subgráfica inducida propia  $H$  de  $G$  tal que  $H^c = F$ , a saber,  $H = F^c$ . Como  $G$  es perfecta, entonces  $H$  es perfecta, además como  $H$  tiene orden menor que  $p$  por ser propia, se sigue por hipótesis de inducción que  $F = H^c$  es perfecta y entonces  $\chi(F) = \omega(F)$  para toda subgráfica inducida propia  $F$  de  $G^c$ . Por lo tanto, resta probar que  $\chi(G^c) = \omega(G^c)$ .

Como  $\chi(G^c) \geq \omega(G^c)$  por el corolario 3.2.1, sólo tenemos que demostrar que

$$\chi(G^c) \leq \omega(G^c). \quad (4.10)$$

Consideremos los conjuntos  $S$  y  $T$  definidos como  $S = \{C \subseteq V(G) : G[C] \text{ es un clan}\}$  y  $T = \{I \subseteq V(G) : I \text{ es un conjunto independiente y } |I| = \alpha(G)\}$ . Notemos que de la definición de  $S$ , tenemos que si  $U \in S$ , entonces  $U$  es un conjunto independiente de vértices en  $G^c$ .

Afirmamos que existe algún conjunto  $U$  en  $S$  con la propiedad de que

$$U \cap W \neq \emptyset \text{ para todo } W \text{ en } T. \quad (4.11)$$

Supongamos lo contrario, es decir, que para todo conjunto  $U$  en  $S$ , existe algún conjunto  $W_U$  en  $T$  tal que  $U \cap W_U = \emptyset$ .

Para todo  $x$  en  $V(G)$ , definimos  $m_x = |\{U \in S : x \in W_U\}|$ . Notemos que, a partir de nuestra suposición,  $m_x$  es el número de los distintos  $U$  en  $S$  a los cuales no pertenece  $x$ . Ahora, a partir de  $G$  y  $m_x$ , construiremos una nueva gráfica  $G'$  como sigue: todo vértice  $x$  de  $G$  para el cual  $m_x = 0$  es removido de  $G$ ; si  $m_x > 0$ , entonces  $x$  es reemplazado en  $G$  por una gráfica completa  $G_x$  de orden  $m_x$ . Si  $x$  y  $y$  son dos vértices adyacentes de  $G$  tales que  $m_x > 0$  y  $m_y > 0$ , entonces todo vértice de  $G_x$  es unido a cada vértice de  $G_y$  en  $G'$ . Observemos que todo clan de  $G'$  es de la forma  $G'[\bigcup_{x \in C} V(G_x)]$  para algún  $C$  en  $S$ .

**Afirmación 1:** Existe algún vértice  $u$  de  $G$  tal que  $m_x \neq 0$ .

Consideremos sin pérdida de generalidad  $W_{U_1}$  y sea  $z$  un vértice de  $W_{U_1}$ .

Notemos que  $U_1 \in \{U \in S : z \in W_U\}$ . Por definición,  $m_z = |\{U \in S : z \in W_U\}| \geq 1$ . Por lo tanto,  $m_z \neq 0$ . Así,  $z$  es el vértice buscado.

Ahora, sea  $H = G[\{x \in V(G) : m_x > 0\}]$ . Como  $H$  es una subgráfica inducida de la gráfica perfecta  $G$ , se sigue que  $H$  es perfecta. Como la gráfica  $G'$  puede ser obtenida a partir de  $H$  mediante una secuencia de replicaciones de vértices de  $G$ , se sigue por el teorema 4.3 que  $G'$  es perfecta y entonces

$$\chi(G') = \omega(G'). \quad (4.12)$$

Primero consideremos  $\omega(G')$ . Sea  $H'$  un clan de  $G'$  tal que  $|V(H')| = \omega(G')$ . Como  $H' = G'[\bigcup_{y \in Y} V(G_y)]$  para algún  $Y$  en  $S$ , entonces

$$\begin{aligned} \omega(G') &= |V(H')| = \sum_{y \in Y} |V(G_y)| = \sum_{y \in Y} m_y = \sum_{y \in Y} |\{U \in S : y \in W_U\}| \\ &= \sum_{U \in S} |Y \cap W_U| = \left( \sum_{U \in S - \{Y\}} |Y \cap W_U| \right) + |Y \cap W_Y|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Note que  $|Y \cap W_U| \leq 1$  para todo  $U$  en  $S$ ; de otra manera, existirían dos vértices distintos  $x$  y  $y$  en  $W_U$  tal que  $\{x, y\} \subseteq Y$ , ésto nos lleva a una contradicción ya que  $G[Y]$  es completa y  $W_U$  es un conjunto independiente en  $G$ . Además, se sigue de nuestra suposición que  $|Y \cap W_Y| = 0$ . Por lo tanto,

$$\omega(G') = \sum_{U \in S - \{Y\}} |Y \cap W_U| \leq \sum_{U \in S - \{Y\}} 1 = |S| - 1.$$

Es decir,

$$\omega(G') \leq |S| - 1. \quad (4.14)$$

Ahora consideremos  $\chi(G')$ . Notemos que

$$|V(G')| = \sum_{x \in V(G)} m_x = \sum_{x \in V(G)} |\{U \in S : x \in W_U\}| = \sum_{U \in S} |V(G) \cap W_U| = \sum_{U \in S} |W_U|.$$

Por otro lado, como  $W_U$  está en  $T$ , entonces  $|W_U| = \alpha(G)$ , lo que implica que

$$\sum_{U \in S} |W_U| = |S|\alpha(G).$$

Por lo tanto,

$$|V(G')| = |S|\alpha(G). \quad (4.15)$$

**Afirmación 2:**  $\alpha(G') \leq \alpha(G)$ .

Sea  $I'$  un conjunto independiente de vértices en  $G'$  tal que  $|I'| = \alpha(G')$ . Consideremos  $I' = \{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha(G')}\}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v_i \in V(G_{x_i})$  y  $x_i \in V(G)$  para todo  $i$  en  $\{1, 2, \dots, \alpha(G')\}$ . Notemos que para  $v_i$  y  $v_j$  con  $i \neq j$ , se tiene que  $G_{x_i}$  es distinto de  $G_{x_j}$ . De otra manera, si  $G_{x_i} = G_{x_j}$  entonces por ser  $G_{x_i}$  una gráfica completa, implica que  $(v_i, v_j) \in A(G')$ , contradiciendo que  $I'$  es independiente.

Demostremos que  $I = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha(G')}\}$  es un conjunto independiente en  $G$ . Supongamos lo contrario, es decir, que existen vértices distintos  $x_i$  y  $x_j$  tales que  $(x_i, x_j) \in A(G)$ , para algún subconjunto  $\{i, j\}$  de  $\{1, 2, \dots, \alpha(G')\}$ . Por la construcción de  $G'$ , entonces  $(v_i, v_j) \in A(G')$  para  $v_i \in V(G_{x_i})$  y  $v_j \in V(G_{x_j})$ , lo cual contradice que  $I'$  es un conjunto independiente en  $G'$ . Por lo tanto,

$$\alpha(G') = |I'| = |I| \leq \alpha(G). \quad (4.16)$$

Del teorema 3.1, de (4.15) y (4.16), tenemos que

$$\chi(G') \geq \frac{V(G')}{\alpha(G')} \geq \frac{V(G')}{\alpha(G)} = |S|. \quad (4.17)$$

Se sigue de (4.14) y (4.17) que

$$\chi(G') \geq |S| > |S| - 1 \geq \omega(G')$$

y así  $\chi(G') > \omega(G')$ , lo cual contradice (4.12).

Por lo tanto, existe algún conjunto  $U$  en  $S$  tal que  $U \cap W \neq \emptyset$  para todo  $W$  en  $T$ , es decir,  $U$  es un clan que interseca a cada conjunto independiente máximo de cardinalidad  $\alpha(G)$ . Notemos que  $|W \cap U| = 1$  para todo  $W \in T$ . Por otro lado, como  $G$  no es completa, entonces  $|W| \geq 2$  para todo  $W$  en  $T$ .

Consideremos  $G[V(G) - U]$ . Como  $G$  es perfecta, entonces  $G[V(G) - U]$  es perfecta por ser una subgráfica inducida propia, además es de orden menor que  $p$ , entonces por hipótesis de inducción,  $(G[V(G) - U])^c$  es perfecta.

**Afirmación 3:**  $\alpha(G[V(G) - U]) = \alpha(G) - 1$ .

Sea  $W$  un conjunto independiente en  $G$  tal que  $|W| = \alpha(G)$ . Ya que  $|W \cap U| = 1$  para cada  $W$  en  $T$ , entonces al quitar a  $U$  de la gráfica  $G$ , a cada conjunto independiente le estamos quitando un elemento.

Primero veremos que  $\alpha(G[V(G) - U]) \leq \alpha(G) - 1$ .

Sea  $W'$  un conjunto independiente en  $G[V(G) - U]$  tal que  $|W'| = \alpha(G[V(G) - U])$ . Notemos que  $W'$  es también un conjunto independiente en  $G$ , por lo tanto,  $|W'| = \alpha(G[V(G) - U]) \leq \alpha(G)$ . Por otro lado, se deduce que  $|W'| \neq \alpha(G)$ , ya que  $W' \cap U = \emptyset$  y  $|W \cap U| = 1$  para cada  $W$  en  $T$ . Entonces  $|W'| < \alpha(G)$ , es decir,  $|W'| \leq \alpha(G) - 1$ , lo que implica que  $\alpha(G[V(G) - U]) \leq \alpha(G) - 1$ .

Ahora demostraremos que  $\alpha(G[V(G) - U]) \geq \alpha(G) - 1$ .

Sea  $W$  un conjunto independiente en  $G$  tal que  $|W| = \alpha(G)$ . Como  $W' = W - (W \cap U)$  es un conjunto independiente en  $G[V(G) - U]$ , entonces  $|W'| \leq \alpha(G[V(G) - U])$ . Lo que implica que  $\alpha(G) - 1 = |W| - 1 = |W'| \leq \alpha(G[V(G) - U])$ , ya que  $|W \cap U| = 1$ .

Concluimos que  $\alpha(G[V(G) - U]) = \alpha(G) - 1$ .

Por lo tanto, la afirmación (3) y (2.1) implican que

$$\omega((G[V(G) - U])^c) = \alpha(G[V(G) - U]) = \alpha(G) - 1 = \omega(G^c) - 1.$$

Se sigue que

$$\omega((G[V(G) - U])^c) + 1 = \omega(G^c). \quad (4.18)$$

**Afirmación 4:**  $\chi(G^c) \leq \chi((G[V(G) - U])^c) + 1$ .

Sea  $c: V((G[V(G) - U])^c) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una  $k$ -coloración propia de  $(G[V(G) - U])^c$  tal

que  $k = \chi((G[V(G) - U])^c)$ . Consideremos  $c': V(G^c) \rightarrow \{1, \dots, k, k + 1\}$  una  $(k + 1)$ -coloración de  $G^c$  como sigue:

$$c'(u) = \begin{cases} c(u) & \text{si } u \in V((G[V(G) - U])^c) \\ k + 1 & \text{si } u \notin V((G[V(G) - U])^c). \end{cases}$$

Veamos que  $c'$  es una  $(k + 1)$ -coloración propia. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos en  $G^c$  tales que  $(u, v) \in A(G^c)$ .

- Caso 1:  $u \in V((G[V(G) - U])^c)$  y  $v \in V((G[V(G) - U])^c)$ .

Entonces  $c'(u) = c(u) \neq c(v) = c'(v)$  ya que  $c$  es una coloración propia.

- Caso 2: Sin pérdida de generalidad,  $u \in V((G[V(G) - U])^c)$  y  $v \notin V((G[V(G) - U])^c)$ .

Como  $v \notin V((G[V(G) - U])^c)$ , entonces  $c'(v) = k + 1$ . Por lo tanto,  $c'(v) \neq c(u) = c'(u)$  ya que  $k + 1$  es un color distinto de los  $k$  colores utilizados en  $c$ .

Se argumenta de manera análoga cuando  $u \notin V((G[V(G) - U])^c)$  y  $v \in V((G[V(G) - U])^c)$ .

Notemos que si  $u \notin V((G[V(G) - U])^c)$  y  $v \notin V((G[V(G) - U])^c)$ , entonces  $u \in U$  y  $v \in U$ , lo cual no es posible ya que  $U$  es un conjunto independiente en  $G^c$ .

Por lo tanto,  $\chi(G^c) \leq k + 1 = \chi((G - U)^c) + 1$ .

Puesto que  $(G[V(G) - U])^c$  es perfecta, entonces

$$\chi((G[V(G) - U])^c) = \omega((G[V(G) - U])^c).$$

La afirmación (4) y (4.18) implican que

$$\chi(G^c) \leq \chi((G[V(G) - U])^c) + 1 = \omega((G[V(G) - U])^c) + 1 = \omega(G^c).$$

Se sigue que  $\chi(G^c) \leq \omega(G^c)$ .

Concluimos que  $G^c$  es perfecta. □

## 4.2. Gráficas imperfectas y gráficas imperfectas minimales

Una gráfica *imperfecta* es aquella que no es perfecta, es decir, una gráfica  $G$  es imperfecta si existe una subgráfica inducida  $H$  de  $G$  tal que  $\omega(H) < \chi(H)$ .

**Proposición 4.3.** *Cualquier ciclo impar de longitud al menos cinco es imperfecto. De hecho se cumple que, para  $t \geq 2$ ,  $\chi(C_{2t+1}) > \omega(C_{2t+1})$ .*

*Demostración.* Sabemos por la proposición 3.4 que  $\chi(C_{2t+1})=3$  y además para cualquier ciclo de longitud impar, en particular para cualquier ciclo impar de longitud al menos cinco, se tiene que  $\omega(C_{2t+1})=2$ . Se sigue que  $\chi(C_{2t+1}) > \omega(C_{2t+1})$ .  $\square$

Una gráfica muy conocida es la *gráfica de Petersen* ( $GP$ ), debido a que sirve como un útil ejemplo y contraejemplo en la teoría de gráficas. Definimos a la gráfica de Petersen de la siguiente manera: el conjunto de vértices es  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y su conjunto de aristas es  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_1), (v_1, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_4), (u_5, v_5)\}$ .

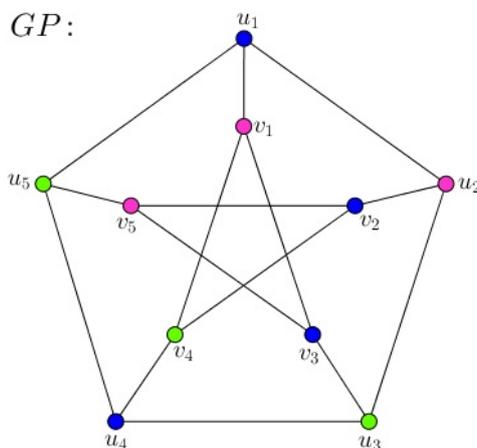


Figura 4.9: Gráfica de Petersen.

En la figura 4.9 se exhibe una representación geométrica de la gráfica de Petersen. Consideremos la siguiente proposición respecto a esta gráfica.

**Proposición 4.4.** *La gráfica de Petersen es imperfecta.*

*Demostración.* Consideremos la gráfica de la figura 4.9.

Primero notemos que  $GP$  tiene más de una arista y por lo tanto, el número cromático debe de ser al menos 2. Sea  $H=G[\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}]$ . Como  $H$  es un ciclo

de longitud impar, entonces su número cromático es 3. Así, por la proposición 2,  $3 \leq \chi(GP)$ . Como en la figura 4.9 se muestra una 3-coloración propia de  $V(GP)$ , se sigue que  $\chi(GP)=3$ .

Por otro lado, la subgráfica completa más grande es  $K_2$ , es decir,  $\omega(GP)=2$ . De esta forma,  $\omega(GP) < \chi(GP)$  y por lo tanto,  $GP$  es imperfecta.  $\square$

Ahora analicemos las siguientes gráficas no isomorfas con 1, 2, 3, 4 y 5 vértices, respectivamente, mostradas en las figuras 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15, las cuales tienen asignada una  $\chi(G)$ -coloración.

Notemos que para  $p=1$  y  $p=2$  (ver figura 4.10) tenemos que  $G_1 \cong K_1$  y  $G_2 \cong K_2$ , entonces por el teorema 4.1, son perfectas. Para  $G_3$  tenemos que no contiene ciclos de longitud impar, es decir, es bipartita y por el teorema 4.2, es perfecta.



Figura 4.10: Gráficas no isomorfas con  $p=1$  y  $p=2$ .

Ahora, para  $p=3$  (ver figura 4.11), análogamente al razonamiento anterior, para  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ , tenemos que son bipartitas y por lo tanto, son perfectas. Como  $G_4$  es completa, por el teorema 4.1 también es perfecta. Así, se sigue que todas las gráficas con 3 vértices son perfectas.

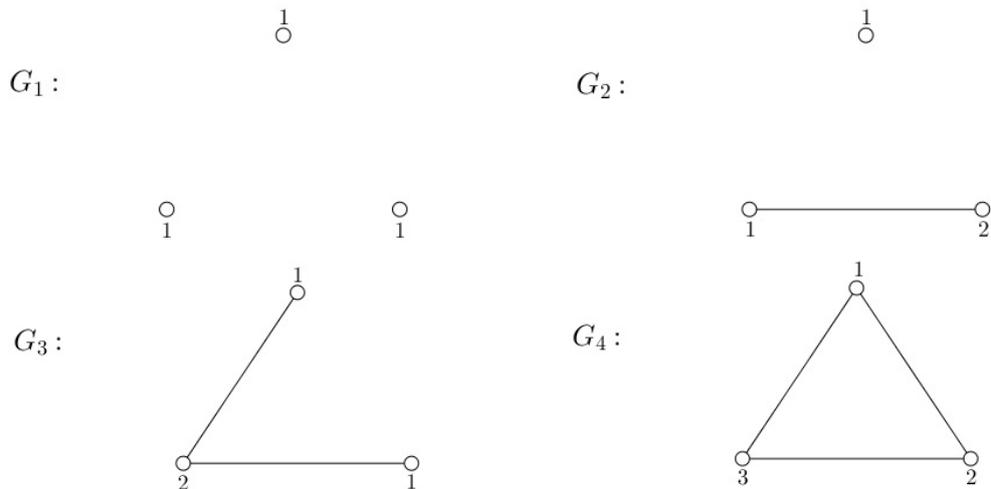


Figura 4.11: Gráficas no isomorfas con  $p=3$ .

Para  $p=4$  (ver figura 4.12), notemos que de  $G_1$  hasta  $G_7$ , son gráficas bipartitas y nuevamente por el teorema 4.2, son perfectas. Para  $G_8$ ,  $G_9$  y  $G_{10}$  tenemos que la subgráfica completa más grande es  $K_3$ , lo que implica que  $\omega(G)=3$  y puesto que cada gráfica tiene una 3-coloración propia, tenemos que  $\chi(G)=3$ . Además, toda subgráfica inducida propia tiene 1, 2 ó 3 vértices, pero ya vimos que dichas gráficas son perfectas. Por lo tanto,  $G_8$ ,  $G_9$  y  $G_{10}$  son perfectas. Finalmente,  $G_{11}$  es completa y por el teorema 4.1, es perfecta. Concluimos que todas las gráficas con 4 vértices son perfectas.

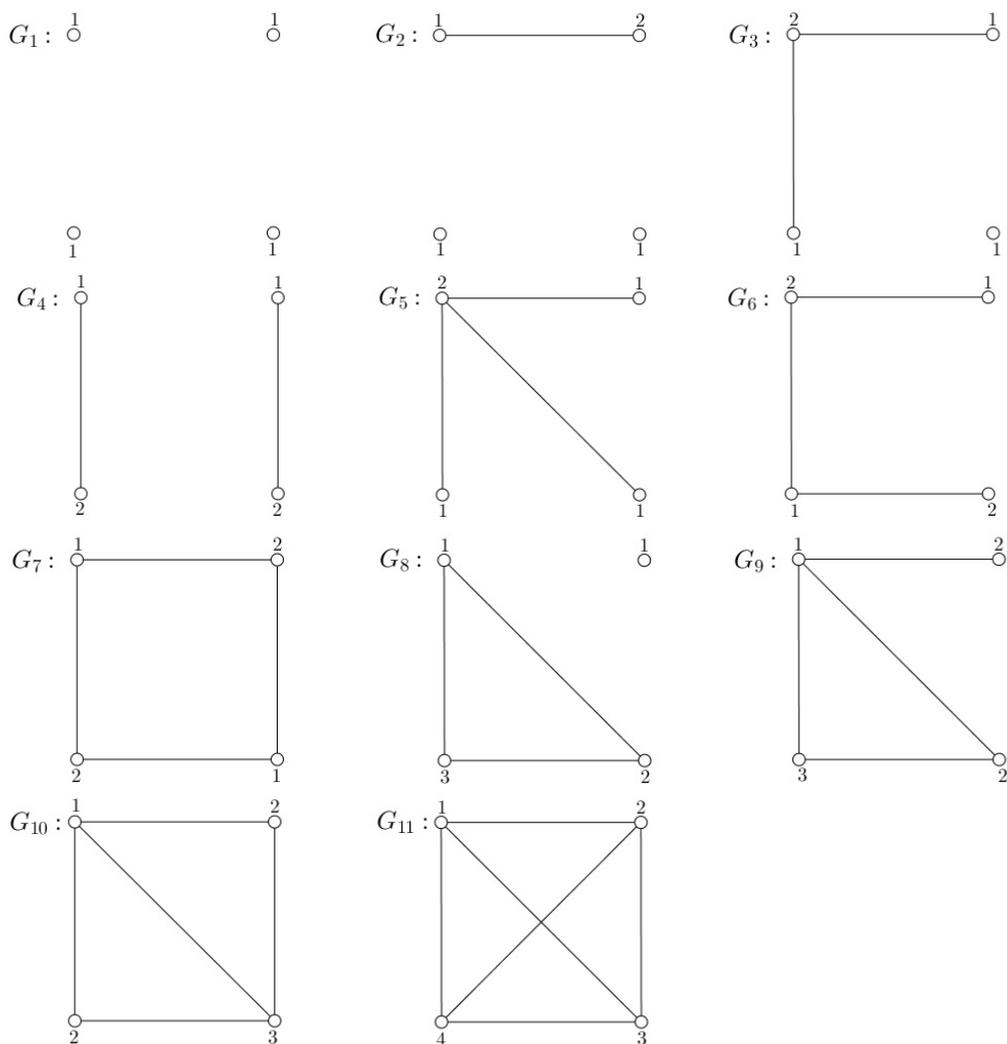


Figura 4.12: Gráficas no isomorfas con  $p=4$ .

Para  $p=5$  (ver figuras 4.13, 4.14 y 4.15), veamos que de  $G_1$  hasta  $G_{13}$ , son gráficas bipartitas y por el teorema 4.2, son perfectas. Para  $G_{14}$  hasta  $G_{28}$  tenemos que la

subgráfica completa más grande es  $K_3$ , lo que implica que  $\omega(G)=3$  y  $\chi(G)=3$  ya que cada gráfica tiene una 3-coloración propia. Y para  $G_{29}$ ,  $G_{30}$ ,  $G_{31}$  y  $G_{32}$  tenemos que la subgráfica completa más grande es  $K_4$ , lo que implica que  $\omega(G)=4$  y  $\chi(G)=4$  ya que cada gráfica tiene una 4-coloración propia. Además, toda subgráfica inducida propia de  $G_{14}$  hasta  $G_{32}$  tiene 1, 2, 3 ó 4 vértices, pero ya vimos que dichas gráficas son perfectas. Por lo tanto, de  $G_{14}$  hasta  $G_{32}$  son perfectas. Como  $G_{33}$  es completa, por el teorema 4.1, es perfecta.

Finalmente,  $G_{34}$  es un ciclo de longitud 5, por la proposición 4.3 sabemos que  $G_{34}$  es imperfecta.

Concluimos que todas las gráficas con 5 vértices, a excepción de  $G_{34} \cong C_5$ , son perfectas.

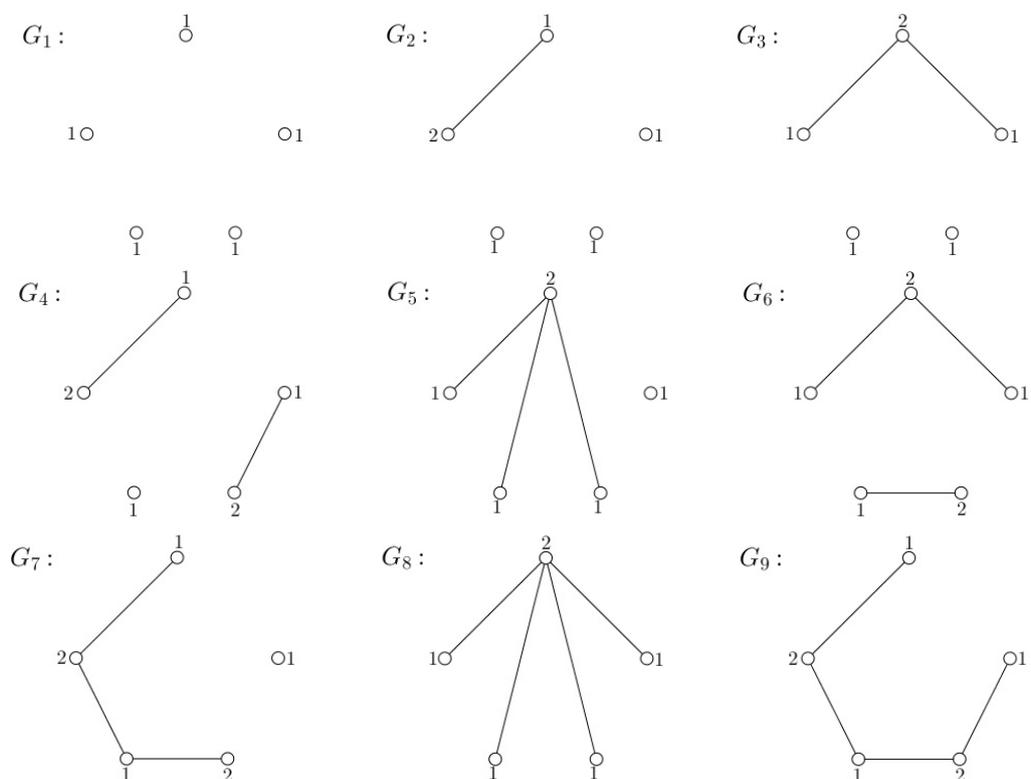


Figura 4.13: Gráficas no isomorfas con  $p=5$ .

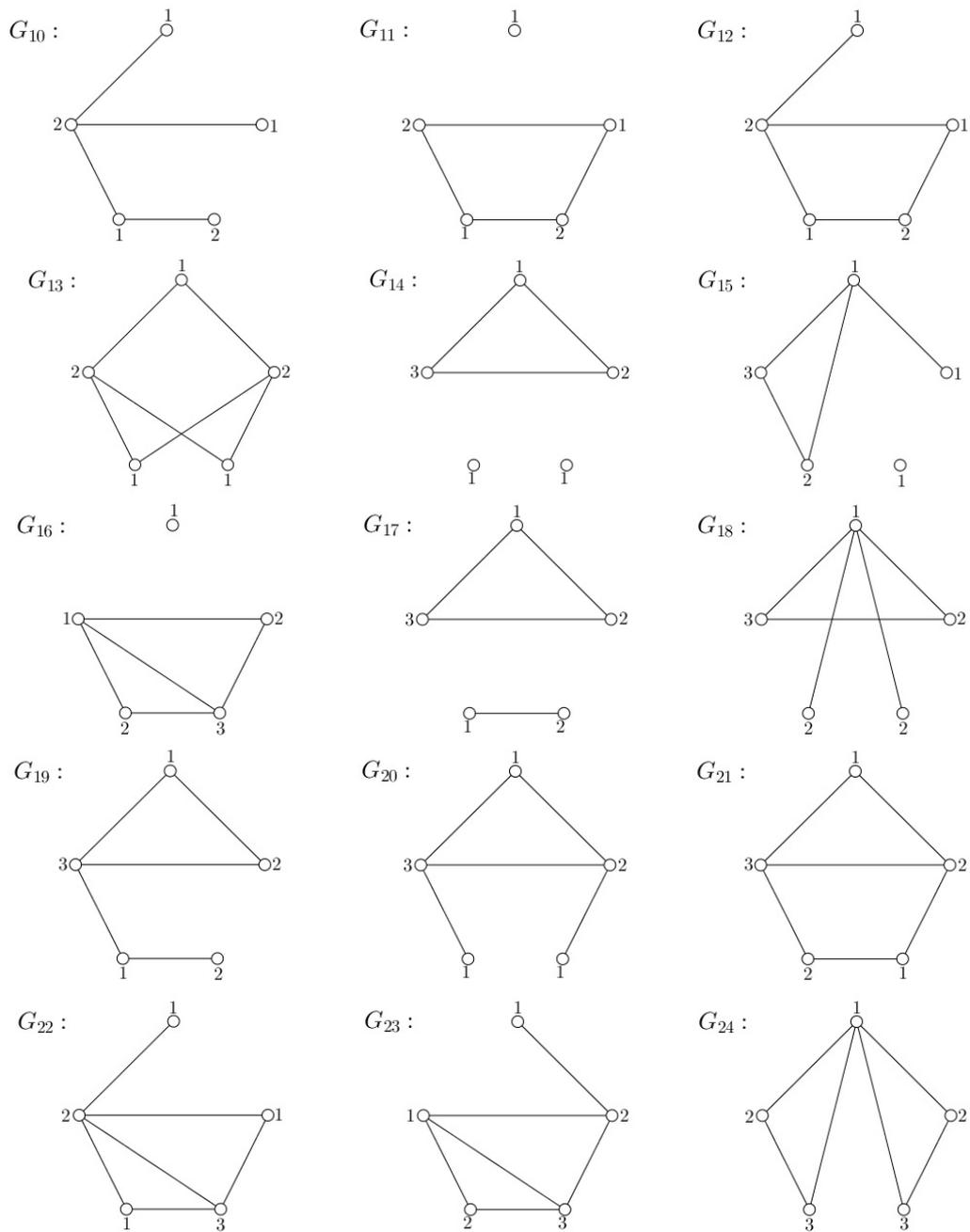
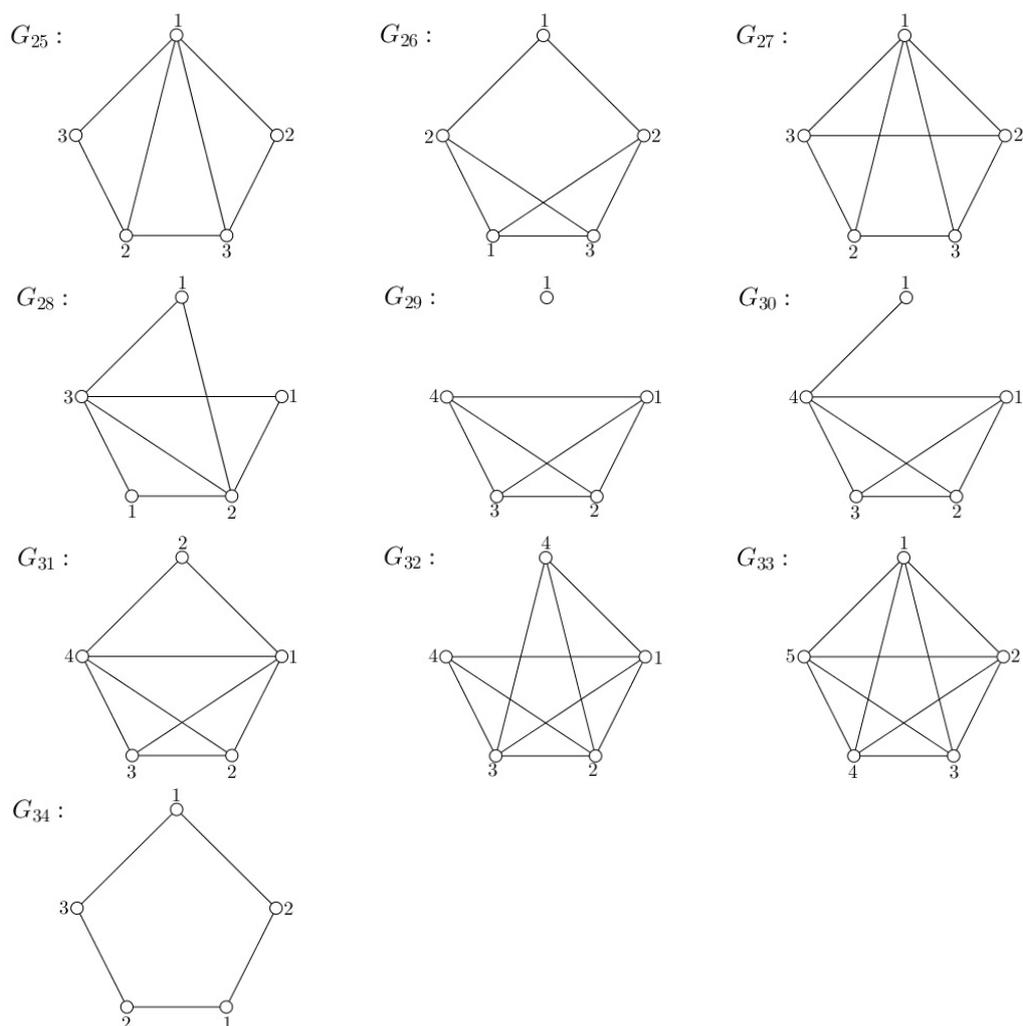


Figura 4.14: Gráficas no isomorfas con  $p=5$ .

Figura 4.15: Gráficas no isomorfas con  $p=5$ .

Puesto que  $G_{34}$  es imperfecta y toda subgráfica inducida propia de  $G_{34}$  es perfecta (porque toda subgráfica inducida propia tiene 1, 2, 3 ó 4 vértices), entonces ésto nos lleva a establecer la siguiente definición.

Una gráfica  $G$  es **imperfecta minimal** si no es perfecta pero todas sus subgráficas inducidas propias son perfectas.

Como  $C_5$  cumple la definición anterior, tenemos que  $C_5$  es imperfecta minimal.

Ahora, retomando nuevamente la gráfica  $G$  de la figura 4.1 y la gráfica  $GP$  de la figura 4.9, tenemos que  $G \cong C_3 \cup C_5$  es inconexa y además demostramos

que  $\chi(G)=\omega(G)$ . Por otro lado,  $GP$  es conexa; sin embargo, demostramos que  $\omega(GP)=2 \neq \chi(GP)=3$ . Notemos que ambas gráficas son imperfectas ya que contienen a  $C_5$ .

Por lo tanto, lo que haremos será encontrar una gráfica  $H$  imperfecta, la cual será conexa, cumplirá con  $\chi(H)=\omega(H)$  y además, será mínima por contención con estas propiedades.

Como ya vimos,  $C_5$  es una gráfica imperfecta minimal tal que  $\chi(C_5)=3$  y  $\omega(C_5)=2$ . Entonces partiremos de ella para construir la gráfica  $H$  que queremos.

Supongamos que  $C_5=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = x_1)$ . Como todas las gráficas con 5 vértices, a excepción de  $C_5$  son perfectas, entonces agregaremos al menos un vértice a  $C_5$ . Por la conexidad de la gráfica que buscamos, agregaremos un vértice, digamos  $v$ , el cual deberá ser adyacente a al menos un vértice de  $C_5$ , pero si agregamos una arista de  $v$  a cualquier vértice de  $C_5$ , se sigue cumpliendo que en la nueva gráfica, el número cromático es 3 y el número de clan es 2 (ver figura 4.16 inciso (a)).

Por lo tanto, tendríamos que agregar al menos dos aristas entre  $v$  y  $C_5$ . Vemos en la figura 4.16 inciso (b), que si  $v$  es adyacente a cualesquiera dos vértices no consecutivos en  $C_5$ , se sigue cumpliendo que el número cromático es 3 y el número de clan es 2.

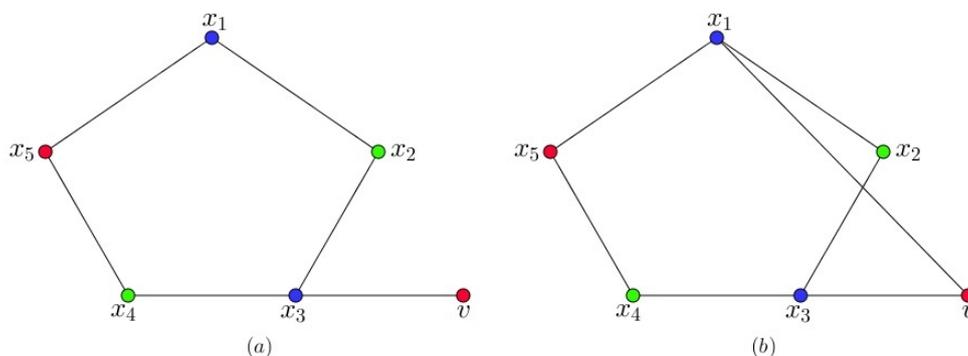


Figura 4.16: Gráficas con número cromático igual a 3 y número de clan igual a 2.

Finalmente, si  $v$  es adyacente a cualesquiera dos vértices consecutivos en  $C_5$ , ahora en esta gráfica se cumple que el número cromático es 3 y el número de clan es 3.

Por lo tanto, la gráfica  $H$  mostrada en la figura 4.17 es la gráfica imperfecta conexa buscada.

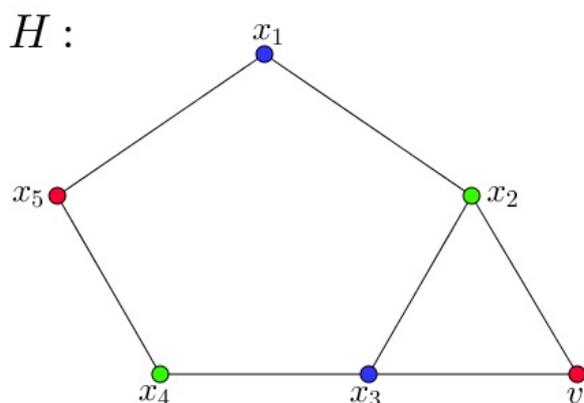


Figura 4.17: Gráfica  $H$  imperfecta conexa y mínima por contención.

### 4.3. Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas

Ahora, consideremos nuevamente los ciclos impares de longitud al menos cinco, a dichos ciclos los llamaremos *hoyos impares*. Y a sus complementos los llamaremos *antihoyos impares*.

Decimos que una gráfica  $G$  es *Berge* si y sólo si no contiene hoyos impares o antihoyos impares como subgráficas inducidas.

Por la proposición 4.3 sabemos que los hoyos impares son gráficas imperfectas, entonces por el Teorema Débil de Gráficas Perfectas (teorema 4.4), sus complementos también son imperfectos, es decir, los antihoyos impares también son gráficas imperfectas.

Por lo tanto, observamos que si una gráfica contiene un hoyo impar o un antihoyo impar como subgráfica inducida, entonces no es perfecta. Esta observación llevó a establecer una conjetura, a la cual se le llamó la *Conjetura Fuerte de Gráficas Perfectas*, ésta también fue propuesta en 1961 por Claude Berge.

**Conjetura Fuerte de Gráficas Perfectas:** *Una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si  $G$  es una gráfica Berge.*

Después de atacar esta conjetura durante 28 meses, en 2002 Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour y Robin Thomas demostraron que es cierta. Dando como resultado el siguiente teorema.

**Teorema 4.5** (Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas). *Una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si  $G$  es una gráfica Berge.*

Debido a la extensión de la demostración del Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas, en este trabajo no analizaremos dicha prueba, ya que la prueba original abarca 144 páginas. Si el lector está interesado en revisar la demostración, lo puede consultar en [14].



# Capítulo 5

## Digráficas Perfectas

En este capítulo trabajaremos con digráficas, para ésto, primero daremos todas las definiciones básicas necesarias para las demostraciones de nuestros resultados.

Con base en los resultados obtenidos por Chudnovsky y su equipo de trabajo, en 2013 Stephan Andres y Winfried Hochstättler dieron una extensión de dichos resultados en digráficas, al definir qué es una digráfica perfecta a partir de su número dicromático y su número de clan.

En este capítulo daremos los resultados matemáticos obtenidos por Stephan Andres y Winfried Hochstättler en [3].

## 5.1. Definiciones básicas

Una **digráfica**  $D$  es una pareja ordenada  $(V(D), F(D))$ , donde  $V(D)$  denota a un conjunto finito no vacío de objetos llamados **vértices**, y  $F(D)$  es un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de  $V(D)$  cuyos elementos son llamados **flechas**.

Dada una digráfica  $D$  podemos dar una representación geométrica de ella en el plano, en donde a cada vértice se le asocia un punto en el plano y vamos a dibujar una flecha del punto asociado al vértice  $u$  hacia el punto asociado al vértice  $v$  si  $(u, v) \in F(D)$ .

**Ejemplo:** Sea  $D=(V(D), F(D))$  donde  $V(D)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y  $F(D)=\{(v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_5), (v_6, v_2), (v_2, v_6), (v_6, v_1), (v_1, v_6)\}$ . La figura 5.1 muestra una representación geométrica de la digráfica del ejemplo.

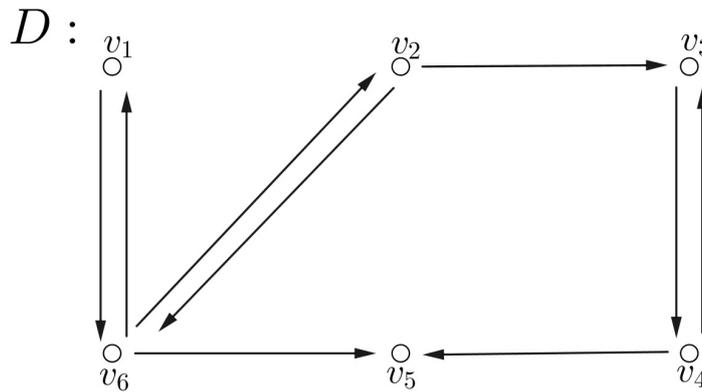


Figura 5.1: Ejemplo de una digráfica  $D$ .

El **orden** de  $D$ , denotado por  $p$ , es la cardinalidad de  $V(D)$  y el **tamaño** de  $D$ , denotado por  $q$ , es la cardinalidad de  $F(D)$ .

**Nota:** En este capítulo una arista será denotada por  $[u, v]$  y una flecha será denotada por  $(u, v)$ .

Si  $f=(u, v)$  es una flecha de  $D$ , llamaremos a  $u$  y a  $v$  los extremos de  $f$ . Nos referiremos a  $u$  como **vértice inicial** y a  $v$  como **vértice final** de  $f$ . Si  $f=(u, u)$ , decimos que  $f$  es un **lazo**. Dada  $f=(u, v)$  en  $F(D)$  tenemos dos tipos de flechas:  $f$  es **simétrica** si también  $(v, u) \in F(D)$ ;  $f$  es **asimétrica** si  $(v, u) \notin F(D)$ . A partir de estas definiciones, decimos que una digráfica  $D$  es **simétrica** si todas sus flechas son simétricas, y diremos que  $D$  es **asimétrica** si todas sus flechas son asimétricas.

La **parte simétrica** de una digráfica  $D$ , denotada por  $Sim(D)$ , es la digráfica que tiene como conjunto de vértices a  $V(D)$  y su conjunto de flechas es el conjunto de todas las flechas simétricas de  $D$ . Análogamente, la **parte asimétrica** de  $D$ , denotada por  $Asim(D)$ , tiene como conjunto de vértices a  $V(D)$  y sus flechas son todas las flechas asimétricas de  $D$ .

Las figuras 5.2 y 5.3 muestran la parte simétrica y asimétrica de la digráfica mostrada en la figura 5.1, respectivamente.

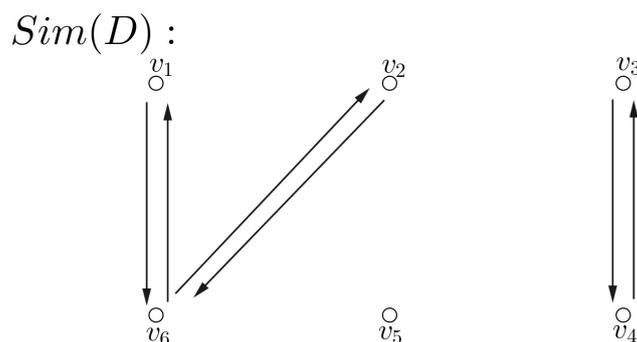


Figura 5.2: Ejemplo de  $Sim(D)$ .

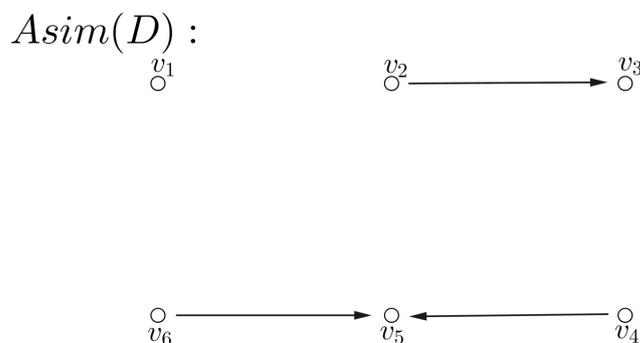


Figura 5.3: Ejemplo de  $Asim(D)$ .

**Observación 5.1.** Una gráfica  $G$  puede ser considerada como la digráfica simétrica  $D_G$  con  $V(D_G)=V(G)$  y existe una flecha simétrica entre  $u$  y  $v$  en  $D_G$  si y sólo si  $[u, v] \in A(G)$ . De esta forma, de ahora en adelante no se hará distinción entre  $G$  y  $D_G$ .

La **invecindad** de un vértice  $v$  es el conjunto  $\{u \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$ , que denotaremos por  $N^-(v)$ . La **exvecindad** de  $v$ , que denotaremos por  $N^+(v)$ ,

es el conjunto  $\{u \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$ . La **vecindad** de  $v$  es el conjunto  $N(v) = N^-(v) \cup N^+(v)$ . El **ingrado** de  $v$  es  $|N^-(v)|$ , denotado por  $\delta^-(v)$ ; el **exgrado** de  $v$  es  $|N^+(v)|$ , denotado por  $\delta^+(v)$ ; y el **grado** de  $v$  es  $|N^-(v)| + |N^+(v)|$ , denotado por  $\delta(v)$ . Si  $\delta(v) = 0$ , entonces a  $v$  le llamaremos **vértice aislado**.

Una **subdigráfica**  $H$  de  $D$ , es una digráfica tal que  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ .

Sean  $D$  una digráfica y  $S$  un subconjunto de  $V(D)$ . La **subdigráfica inducida por  $S$** , denotada por  $D[S]$ , es la digráfica tal que  $V(D[S]) = S$  y  $F(D[S]) = \{(u, v) \in F(D) : \{u, v\} \subseteq S\}$ .

Decimos que una digráfica  $D$  de orden  $p$ , es **completa** si para cualesquiera dos vértices distintos,  $u$  y  $v$ , se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, u) \in F(D)$ .

Un **clan** de una digráfica  $D$  es una subdigráfica  $\vec{K}$  de  $D$  tal que  $\vec{K}$  es completa. Definimos el **número de clan** de  $D$ , denotado por  $\vec{\omega}(D)$ , como el orden máximo de un clan  $\vec{K}$  de  $D$ .

Sea  $D$  una digráfica, definimos a la **gráfica subyacente** de  $D$ , denotada por  $Sub(D)$ , en la cual  $V(Sub(D)) = V(D)$  y existe exactamente una arista entre  $u$  y  $v$  en  $Sub(D)$  si y sólo si  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ , es decir, la gráfica subyacente es aquella que se obtiene al reemplazar cada flecha (simétrica o asimétrica) de  $D$  por su arista correspondiente (ver figura 5.4).

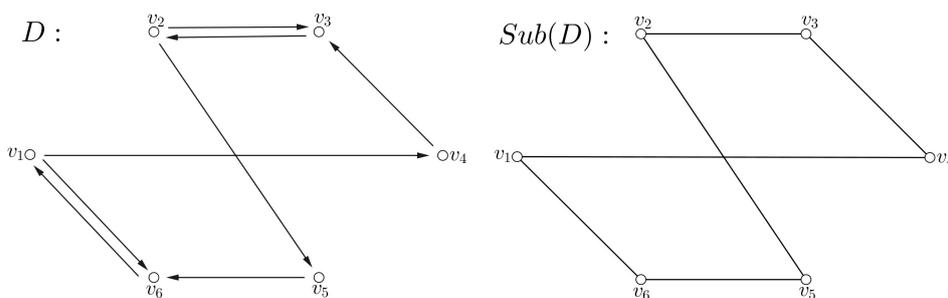


Figura 5.4: Ejemplo de  $Sub(D)$ .

El **complemento** de una digráfica  $D$ , denotado por  $D^c$ , es una digráfica tal que  $V(D^c) = V(D)$  y  $(u, v) \in F(D^c)$  si y sólo si  $(u, v) \notin F(D)$ .

Diremos que una sucesión  $W = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  de vértices de  $D$  es un **camino no dirigido** si  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  o  $(x_{i+1}, x_i) \in F(D)$  para cada  $i$  en  $\{0, \dots, n-1\}$ .

Diremos que  $W$  es un **camino dirigido** si  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  para cada  $i$  en  $\{0, \dots, n-1\}$ . El número  $n$  es llamado la **longitud** del camino, denotado por  $l(W)$ . Si  $x_0 = x_n$ , entonces  $W$  es llamado un **camino dirigido cerrado**. Una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices. Un **ciclo dirigido** de  $n$  vértices, denotado por  $\vec{C}_n$ , es un camino dirigido cerrado, de longitud al menos 2, que sólo repite el primer y el último vértice. Llamaremos **ciclo no dirigido** a un camino no dirigido cerrado que sólo repite el primer y último vértice.

Si  $W = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  es un camino dirigido y  $\{x_i, x_j\}$  es un subconjunto de  $V(W)$ , con  $i < j$ , entonces el camino dirigido  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$  será denotado por  $(x_i, W, x_j)$ .

Si  $W_1 = (u = x_0, \dots, x_n = v)$  y  $W_2 = (v = y_0, \dots, y_m = w)$  son dos caminos dirigidos, entonces el  $uw$ -camino dirigido  $(u = x_0, \dots, x_n = v = y_0, \dots, y_m)$  será denotado por  $W_1 \cup W_2$ .

Una **cuerda** de un ciclo dirigido  $\vec{C}_n$  es una flecha que une dos vértices no consecutivos de  $\vec{C}_n$ .

**Nota:** De ahora en adelante, cuando hablemos de ciclos dirigidos inducidos, con  $n \geq 3$ , nos referiremos a ciclos asimétricos y sin cuerdas.

Un **hoyo lleno impar** es una digráfica  $H$  tal que  $Sim(H)$  vista como una gráfica es un hoyo impar, es decir,  $D_{C_n} = Sim(H)$ , para algún  $n$  impar mayor o igual a 5. Por otro lado, un **antihoyo lleno impar** es una digráfica  $H$  tal que  $Sim(H)$  vista como una gráfica es un antihoyo impar, es decir,  $D_{(C_n)^c} = Sim(H)$ , para algún  $n$  impar mayor o igual a 5.

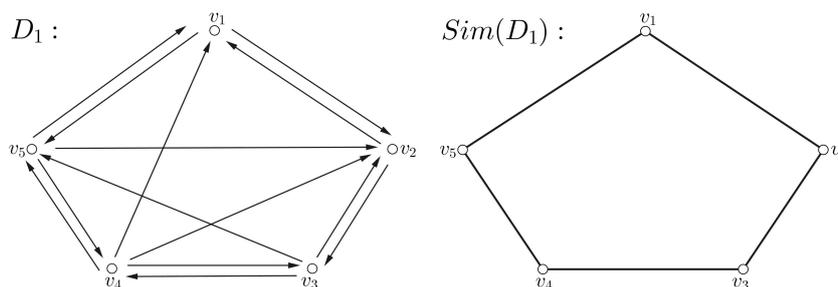


Figura 5.5: Ejemplo de un hoyo lleno impar.

Las figuras 5.5 y 5.6 muestran un ejemplo de un hoyo lleno impar y un antihoyo lleno impar, respectivamente; en donde  $Sim(D_1)$  y  $Sim(D_2)$  son vistas como

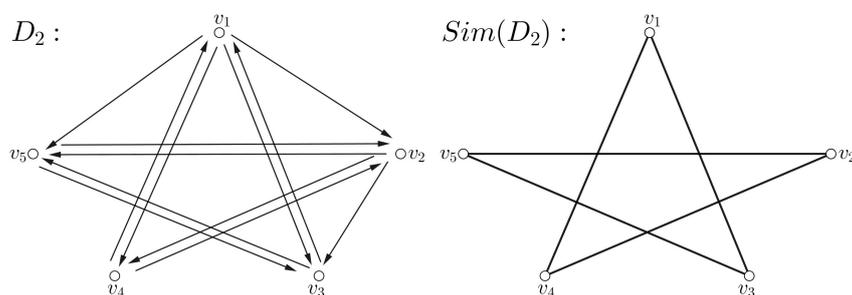


Figura 5.6: Ejemplo de un antihoyo lleno impar.

gráficas, y  $Sim(D_1)=D_{C_5}$  y  $Sim(D_2)=D_{(C_5)^c}$ .

El **número dicromático** de  $D$ , denotado por  $\vec{\chi}(D)$ , es la mínima cardinalidad de un conjunto de colores  $C$ , tal que es posible asignar un color de  $C$  a cada vértice de  $D$  con la propiedad de que para cada color  $c$  en  $C$ , la subdigráfica inducida por los vértices con color  $c$  es acíclica, es decir, que no contiene ciclos dirigidos. A dicha coloración que cumple con la propiedad anterior la llamaremos **coloración mínima**; además a cada conjunto  $V_i$  que contiene todos los vértices con color  $i$  le llamaremos **clase de color**.

**Ejemplo:** La figura 5.7 muestra una digráfica  $D$  con número dicromático igual a 3.

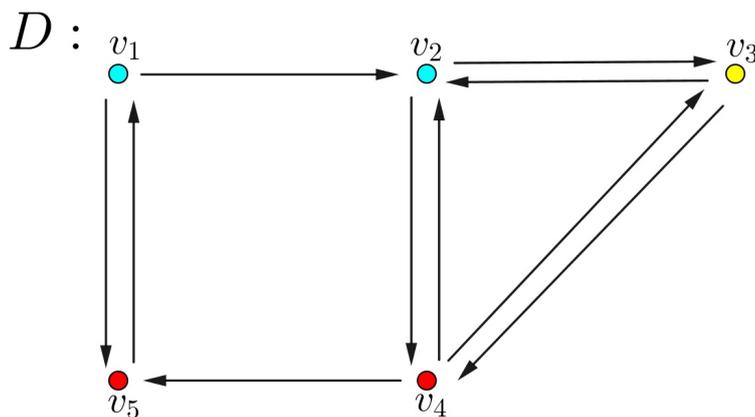


Figura 5.7: Ejemplo de una digráfica  $D$  con  $\vec{\chi}(D)=3$ .

Veamos que en efecto, el número dicromático de la digráfica anterior es igual a 3. A continuación se muestran las subdigráficas inducidas por cada clase de color, las cuales claramente son acíclicas (ver figura 5.8). Esto implica que  $\vec{\chi}(D)\leq 3$ .

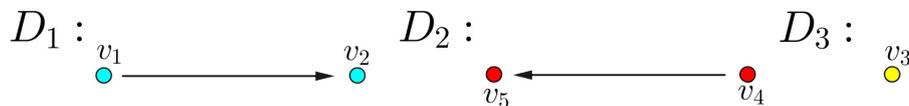


Figura 5.8: Ejemplo de las subdigráficas inducidas por las clases de color de la digráfica anterior.

Por otro lado, como  $(v_2, v_3)$  es una flecha simétrica y en particular es un ciclo dirigido, entonces  $\vec{\chi}(D) \geq 2$ . Además, como  $\vec{C} = (v_2, v_3, v_4, v_2)$  es también un ciclo dirigido simétrico de 3 vértices, entonces  $\vec{\chi}(D) \geq 3$ .

Por lo tanto,  $\vec{\chi}(D) = 3$ .

Notemos, en el ejemplo anterior, que si asignamos la misma coloración de  $V(D)$  a  $V(\text{Sub}(D))$ , dicha coloración no necesariamente es propia ya que existen vértices adyacentes en  $\text{Sub}(D)$  que tienen asignado el mismo color.

**Observación 5.2.** *Si  $D$  es una digráfica simétrica, entonces una coloración mínima de  $D$  es también una coloración propia y viceversa.*

En efecto, sea  $C$  una coloración mínima de  $D$ . Vamos a demostrar que  $C$  es una coloración propia, es decir, para cualesquiera dos vértices distintos  $u$  y  $v$  tales que  $(u, v) \in F(D)$ , se tiene que  $C(u) \neq C(v)$ . Consideremos al ciclo dirigido  $(u, v, u)$ , como  $C$  es una coloración mínima, entonces  $C(u) \neq C(v)$ .

Ahora, sea  $C$  una coloración propia de  $D$ . Consideremos  $c$  un color en  $C$  y sea  $H$  la subdigráfica inducida en  $D$  por los vértices con color  $c$ . Demostraremos que  $H$  es acíclica. Supongamos que existe un ciclo dirigido  $\vec{\gamma}$  en  $H$  y sean dos vértices distintos  $u$  y  $v$  en  $\vec{\gamma}$  tales que  $(u, v) \in F(\vec{\gamma})$ . Como todos los vértices de  $H$  tienen asignado el mismo color, en particular,  $C(u) = C(v)$ , contradiciendo el hecho de que  $C$  es una coloración propia. Por lo tanto,  $H$  es acíclica y  $D$  es una coloración mínima de  $D$ .

**Observación 5.3.** *El número dicromático de todo clan de orden  $p$  es igual a  $p$ .*

Sean  $\vec{K}$  un clan de orden  $p$  y  $C$  una coloración mínima de  $\vec{K}$ , como todo clan es una digráfica simétrica, entonces por la observación anterior tenemos que  $C$  es una coloración propia de  $\vec{K}$ . Además, como todos los vértices de  $\vec{K}$  están relacionados entre sí,  $C$  usa exactamente  $p$  colores.

Decimos que una digráfica  $D$  es **perfecta** si y sólo si  $\vec{\omega}(H) = \vec{\chi}(H)$  para toda subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ .

Observemos que si  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$ , toda subdigráfica inducida de  $H$  también es una subdigráfica inducida de  $D$ . Por lo tanto, si  $D$  es perfecta, entonces toda subdigráfica inducida de  $D$  también es perfecta.

Un subconjunto  $I$  de  $V(D)$  es **independiente** si para todo subconjunto  $\{u, v\}$  de  $I$  se cumple que  $\{(u, v), (v, u)\} \cap F(D) = \emptyset$ . Un subconjunto  $A$  de  $V(D)$  es **absorbente** si para todo  $u$  en  $V(D) - A$  existe  $v$  en  $A$  tal que  $(u, v) \in F(D)$ .

Decimos que un subconjunto  $N$  de  $V(D)$  es un **núcleo** si  $N$  es independiente y absorbente.

Una digráfica  $D$  es una **súper orientación** de una gráfica  $G$  si  $G = \text{Sub}(D)$ . En la figura 5.9  $D$  es una súper orientación de  $G$ .

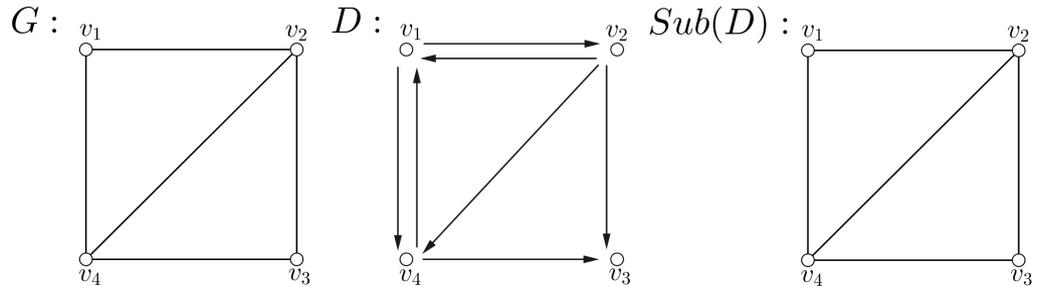


Figura 5.9: Ejemplo de una súper orientación.

Una súper orientación  $D$  de una gráfica  $G$  es **clan acíclica** si no existe un clan de  $G$  tal que es inducido por el conjunto de vértices de un ciclo dirigido de  $\text{Asim}(D)$ , es decir,  $D$  es clan acíclica si para todo clan  $K$  de  $G$ , la digráfica inducida por el conjunto de vértices que inducen  $K$ ,  $D[V(K)]$ , tiene núcleo.

Notemos que la súper orientación del ejemplo anterior es clan acíclica ya que  $G[\{v_1, v_2, v_4\}]$  y  $G[\{v_2, v_3, v_4\}]$  son clanes de  $G$ ; sin embargo, no son inducidos por el conjunto de vértices de algún ciclo dirigido de  $\text{Asim}(D)$ .

Finalmente, decimos que una gráfica  $G$  es **núcleo soluble** si toda súper orientación clan acíclica de  $G$  tiene núcleo.

## 5.2. Resultados previos

**Lema 5.1.** Sean  $D$  y  $H$  digráficas. Si  $H$  es una subdigráfica de  $D$ , entonces  $\vec{\chi}(H) \leq \vec{\chi}(D)$ .

*Demostración.* Sean  $H$  una subdigráfica de  $D$  y  $C$  una coloración mínima de  $V(D)$  que utiliza  $\vec{\chi}(D)$  colores. Como  $C$  restringida a  $V(H)$  también es una coloración tal que para cada color  $c$  en  $C$ , la subdigráfica inducida por los vértices con color  $c$  es acíclica, entonces se sigue de la definición de número dicromático que  $\vec{\chi}(H) \leq \vec{\chi}(D)$ .  $\square$

**Corolario 5.1.1.** Toda digráfica  $D$  cumple  $\vec{\omega}(D) \leq \vec{\chi}(D)$ .

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica y  $\vec{K}$  un clan de  $D$  de orden  $\vec{\omega}(D)$ . Puesto que  $\vec{K}$  es una subdigráfica de  $D$ , se sigue de la proposición anterior que  $\vec{\chi}(\vec{K}) \leq \vec{\chi}(D)$ . Luego, de la observación 5.3 sabemos que  $\vec{\chi}(\vec{K}) = |V(\vec{K})|$  y como  $|V(\vec{K})| = \vec{\omega}(D)$ , entonces  $\vec{\omega}(D) \leq \vec{\chi}(D)$ .  $\square$

**Lema 5.2.** Si  $D$  es una digráfica, entonces  $\vec{\omega}(D) = \vec{\omega}(\text{Sim}(D))$ .

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica y  $\vec{K}$  un clan de  $D$  de orden  $\vec{\omega}(\text{Sim}(D))$ . Como  $\text{Sim}(D)$  es una subdigráfica de  $D$ , entonces  $\vec{\omega}(\text{Sim}(D)) \leq \vec{\omega}(D)$ .

Ahora, sea  $\vec{K}^*$  un clan de  $D$  de orden  $\vec{\omega}(D)$ . Por definición,  $\vec{K}^*$  es una subdigráfica completa de  $D$  tal que tiene orden máximo, la cual es simétrica; lo que implica que  $\vec{K}^*$  es una subdigráfica completa de  $\text{Sim}(D)$ . Por lo tanto,  $\vec{\omega}(D) \leq \vec{\omega}(\text{Sim}(D))$ .

De esta forma,  $\vec{\omega}(D) = \vec{\omega}(\text{Sim}(D))$ .  $\square$

**Observación 5.4.** A partir de la observación 5.1, notemos que dada una gráfica  $G$ , el número dicromático de  $D_G$  es igual al número cromático de  $G$ ,  $\chi(G)$ . Análogamente, el número de clan de  $D_G$  es igual al número de clan de  $G$ ,  $\omega(G)$ . Por lo tanto,  $D_G$  es perfecta si y sólo si  $G$  es perfecta.

Ahora, analicemos el caso contrario. Como ya hemos mencionado, las digráficas simétricas pueden ser vistas como gráficas al intercambiar cada flecha simétrica por una arista. Esto es equivalente a decir que si  $D$  es una digráfica simétrica, entonces  $\text{Sim}(D) = D_{\text{Sub}(\text{Sim}(D))}$ .

**Lema 5.3.** Si  $D$  es una digráfica simétrica, entonces  $\vec{\omega}(D) = \omega(\text{Sub}(D))$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica simétrica.

Sea  $K$  un clan de  $Sub(D)$  de orden  $\omega(Sub(D))$ . Por definición de  $Sub(D)$  y por ser  $D$  una digráfica simétrica, entonces  $K'=D[V(K)]$  es un clan en  $D$  de orden  $\omega(Sub(D))$ . Por lo tanto,  $\omega(Sub(D)) \leq \vec{\omega}(D)$ .

Ahora, sea  $\vec{K}$  un clan de  $D$  de orden  $\vec{\omega}(D)$ , entonces  $Sub(\vec{K})$  es un clan de  $Sub(D)$ . Por lo tanto,  $\vec{\omega}(D) \leq \omega(Sub(D))$ .

Concluimos que  $\vec{\omega}(D) = \omega(Sub(D))$ . □

**Lema 5.4.** *Si  $D$  es una digráfica simétrica, entonces  $\vec{\chi}(D) = \chi(Sub(D))$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica.

Sea  $C$  una coloración mínima de  $D$ . Por la observación 5.2 sabemos que  $C$  es una coloración propia. Por lo tanto,  $C$  también es una coloración propia para  $Sub(D)$ . Esto implica que  $\chi(Sub(D)) \leq \vec{\chi}(D)$ .

Ahora, sea  $c$  una coloración propia de  $Sub(D)$  y supongamos que  $c$  no es una coloración mínima para  $D$ , es decir, existe una clase de color  $V_i$  tal que induce un ciclo dirigido  $\vec{C}$  en  $D$ . Por lo tanto, todos los vértices de  $\vec{C}$  tienen asignado el mismo color. Esto implica que todos los vértices de  $G[V(\vec{C})]$  tienen asignado el mismo color, lo cual es una contradicción ya que  $c$  es una coloración propia y en  $G[V(\vec{C})]$  hay al menos dos vértices adyacentes. Así,  $c$  es una coloración mínima para  $D$ .

Por lo tanto,  $\vec{\chi}(D) \leq \chi(Sub(D))$ .

Concluimos que  $\vec{\chi}(D) = \chi(Sub(D))$ . □

**Lema 5.5.** *Sea  $D$  una digráfica simétrica.  $D$  es perfecta si y sólo si  $Sub(D)$  es perfecta.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica simétrica.

( $\Rightarrow$ ) Sean  $D$  una digráfica perfecta y  $H$  una subgráfica inducida de  $Sub(D)$ . Como  $D$  es perfecta, entonces  $D[V(H)]$  también es perfecta y por lo tanto,  $\vec{\omega}(D[V(H)]) = \vec{\chi}(D[V(H)])$ .

Por los lemas 5.3 y 5.4 tenemos que

$$\omega(Sub(D[V(H)])) = \vec{\omega}(D[V(H)]) = \vec{\chi}(D[V(H)]) = \chi(Sub(D[V(H)])). \quad (5.1)$$

**Afirmación:**  $H = Sub(D[V(H)])$ .

Como  $V(H) = V(D[V(H)])$  y por definición de gráfica subyacente  $V(D[V(H)]) = V(Sub(D[V(H)]))$ , entonces  $V(H) = V(Sub(D[V(H)]))$ .

Ahora veremos que  $[u, v] \in A(H)$  si y sólo si  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D[V(H)]))$ .

Sea  $[u, v]$  una arista de  $H$ . Como  $H$  es una subgráfica inducida en  $\text{Sub}(D)$ , entonces  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D))$ , lo que implica que  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ . Como  $D$  es simétrica, tenemos que  $(u, v)$  es una flecha simétrica en  $D[V(H)]$ . Luego, por definición de gráfica subyacente,  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D[V(H)]))$ .

Por otro lado, sea  $[u, v]$  una arista de  $\text{Sub}(D[V(H)])$ . Como  $D[V(H)]$  es subgráfica de  $D$ , entonces  $\text{Sub}(D[V(H)])$  es subgráfica de  $\text{Sub}(D)$ , lo que implica que  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D))$ . Como  $\{u, v\} \subseteq V(H)$  y  $H$  es inducida en  $\text{Sub}(D)$ , se concluye que  $[u, v] \in A(H)$ .

Se sigue que  $H = \text{Sub}(D[V(H)])$ .

Por lo tanto, se deduce de (5.1) que

$$\omega(H) = \omega(\text{Sub}(D[V(H)])) = \chi(\text{Sub}(D[V(H)])) = \chi(H)$$

para toda subgráfica inducida  $H$  de  $\text{Sub}(D)$ . Concluimos que  $\text{Sub}(D)$  es perfecta.

( $\Leftarrow$ ) Sean  $\text{Sub}(D)$  una gráfica perfecta y  $\vec{H}$  una subgráfica inducida de  $D$ . Como  $\text{Sub}(D)$  es perfecta, entonces  $\text{Sub}(D[V(\vec{H})])$  también es perfecta (porque  $\text{Sub}(D[V(\vec{H})])$  es una subgráfica inducida de  $\text{Sub}(D)$ ) y por lo tanto,

$$\omega(\text{Sub}(D[V(\vec{H})])) = \chi(\text{Sub}(D[V(\vec{H})])).$$

Por los lemas 5.3 y 5.4 tenemos que

$$\vec{\omega}(D[V(\vec{H})]) = \omega(\text{Sub}(D[V(\vec{H})])) = \chi(\text{Sub}(D[V(\vec{H})])) = \vec{\chi}(D[V(\vec{H})]).$$

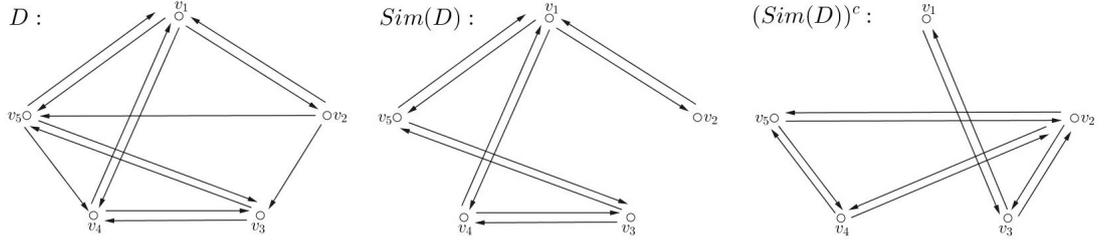
De manera similar como se procedió anteriormente, tenemos que  $\vec{H} = D[V(\vec{H})]$ .

Por lo tanto,  $\vec{\omega}(\vec{H}) = \vec{\chi}(\vec{H})$  para toda subgráfica inducida  $\vec{H}$  de  $D$ . Se sigue que  $D$  es perfecta.  $\square$

Notemos que a partir de la definición del complemento y de la parte simétrica de una digráfica  $D$ , podemos afirmar que  $(\text{Sim}(D))^c$  es también una digráfica simétrica (ver figura 5.10).

**Lema 5.6.** *Para cualquier digráfica  $D$  se cumple que  $(\text{Sim}(D))^c$  es una digráfica simétrica.*

*Demostración.* Sean  $D$  una digráfica y  $(u, v)$  una flecha en  $(\text{Sim}(D))^c$ . Vamos a demostrar que  $(v, u) \in F((\text{Sim}(D))^c)$ .

Figura 5.10: Ejemplo de  $(Sim(D))^c$ .

Supongamos lo contrario, es decir, que  $(v, u) \notin F((Sim(D))^c)$ . Entonces, por definición,  $(v, u) \in F(Sim(D))$  y por ser una digráfica simétrica tenemos que  $(u, v) \in F(Sim(D))$ , lo cual no es posible ya que  $(u, v) \in F((Sim(D))^c)$ . Por lo tanto,  $(v, u) \in F((Sim(D))^c)$ . Concluimos que  $(Sim(D))^c$  es una digráfica simétrica.  $\square$

Sean  $D$  una digráfica y  $G = Sub(D^c)$ , entonces por la observación 5.1 sabemos que  $Sub(D^c)$  puede ser considerada como una digráfica, digamos  $D_G$ , al reemplazar cada arista por una flecha simétrica. Por lo tanto, tenemos el siguiente lema.

**Lema 5.7.** *Si  $D$  es una digráfica y  $G = Sub(D^c)$ , entonces  $(Sim(D))^c = D_G$ .*

*Demostración.* Consideremos las siguientes afirmaciones.

**Afirmación 1:**  $V((Sim(D))^c) = V(D_G)$ .

Por definición de complemento y parte simétrica tenemos que  $V(((Sim(D))^c)^c) = V(Sim(D)) = V(D)$ .

Por otro lado, por definición de la gráfica subyacente tenemos que  $V(D) = V(D^c) = V(Sub(D^c)) = V(D_G)$ . Por lo tanto,  $V((Sim(D))^c) = V(D_G)$ .

**Afirmación 2:**  $(u, v) \in F((Sim(D))^c)$  si y sólo si  $(u, v) \in F(D_G)$ .

Primero demostraremos que si  $(u, v) \in F((Sim(D))^c)$ , entonces  $(u, v) \in F(D_G)$ .

Supongamos lo contrario, es decir, que  $(u, v) \notin F(D_G)$ . Como  $D_G$  es simétrica, entonces  $(v, u) \notin F(D_G)$ . Esto implica, por definición de  $D_G$ , que  $[u, v] \notin A(Sub(D^c))$ . Por lo tanto,  $(u, v) \notin F(D^c)$  y  $(v, u) \notin F(D^c)$ . Por definición de complemento, entonces  $(u, v)$  es una flecha simétrica en  $D$ , lo cual es una contradicción con el hecho de que  $(u, v) \in F((Sim(D))^c)$ .

Se sigue que  $(u, v) \in F(D_G)$ .

Ahora demostraremos que si  $(u, v) \in F(D_G)$ , entonces  $(u, v) \in F((Sim(D))^c)$ .

Si  $(u, v) \in F(D_G)$ , entonces  $(v, u) \in F(D_G)$  ya que  $D_G$  es simétrica. Luego de la definición de  $D_G$  se tiene que  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D^c))$ . Por definición de la gráfica subyacente tenemos que  $(u, v) \in F(D^c)$  o  $(v, u) \in F(D^c)$ .

**Caso 1:**  $(u, v)$  es una flecha simétrica en  $D^c$ .

Entonces  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \notin F(D)$ . Por lo tanto,  $(u, v) \notin F(\text{Sim}(D))$  y  $(v, u) \notin F(\text{Sim}(D))$ . Por definición de complemento tenemos que  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$  y  $(v, u) \in F((\text{Sim}(D))^c)$ .

**Caso 2:**  $(u, v)$  es una flecha asimétrica en  $D^c$ .

Entonces  $(u, v) \notin F(D)$  y  $(v, u) \in F(D)$ . Por definición de  $\text{Sim}(D)$  tenemos que  $(u, v) \notin F(\text{Sim}(D))$  y  $(v, u) \notin F(\text{Sim}(D))$ ; y por definición de complemento tenemos que  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$  y  $(v, u) \in F((\text{Sim}(D))^c)$ .

En cualquiera de los casos  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$ .

Por lo tanto,  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$  si y sólo si  $(u, v) \in F(D_G)$ .

Concluimos que  $(\text{Sim}(D))^c = D_G$ . □

En la figura 5.11 ejemplificamos el resultado del lema 5.7.

**Corolario 5.7.1.** *Si  $D$  es una digráfica, entonces  $\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c) = \text{Sub}(D^c)$ .*

*Demostración.* Sean  $G = \text{Sub}(D^c)$  y  $D_G$  su digráfica asociada.

**Observación:** Por el lema 5.7 tenemos que  $(\text{Sim}(D))^c = D_G$ , es decir,  $V((\text{Sim}(D))^c) = V(D_G)$  y  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$  si y sólo si  $(u, v) \in F(D_G)$ .

Por definición de gráfica subyacente tenemos que

$$V((\text{Sim}(D))^c) = V(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c)). \quad (5.2)$$

Por lo tanto, por la observación y por (5.2), se tiene que

$$V(\text{Sub}(D^c)) = V(G) = V(D_G) = V((\text{Sim}(D))^c) = V(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c)),$$

es decir,  $V(\text{Sub}(D^c)) = V(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c))$ .

Ahora demostraremos que  $[u, v] \in A(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c))$  si y sólo si  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D^c))$ .

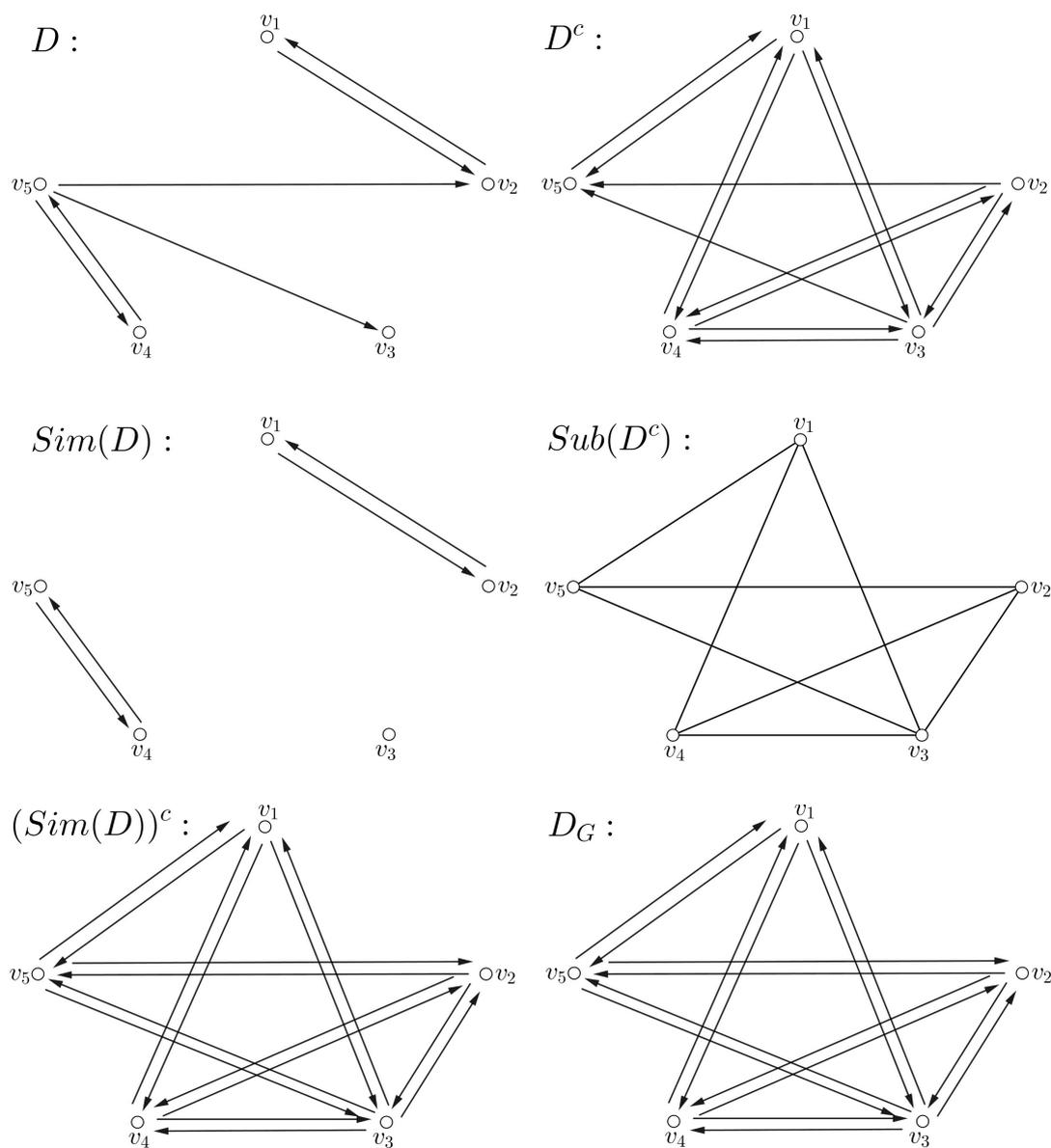


Figura 5.11: Ejemplo de  $D$  y sus digráficas asociadas.

Si  $[u, v] \in A(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c))$ , entonces  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$  (recuerde que  $(\text{Sim}(D))^c$  es una digráfica simétrica). Por la observación tenemos que  $(u, v) \in F(D_G)$ ; como  $D_G$  es la digráfica asociada a  $\text{Sub}(D^c)$ , entonces  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D^c))$ .

Análogamente, si  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D^c))$ , es decir, si  $[u, v] \in A(G)$ , entonces  $(u, v) \in F(D_G)$  y por ser  $D_G$  la digráfica asociada a  $D^c$  tenemos que  $(u, v) \in F(D^c)$ .

Luego, por la observación tenemos que  $(u, v) \in F((\text{Sim}(D))^c)$ ; y por definición de gráfica subyacente obtenemos que  $[u, v] \in A(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c))$ .

Por lo tanto,  $[u, v] \in A(\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c))$  si y sólo si  $[u, v] \in A(\text{Sub}(D^c))$ .

Concluimos que  $\text{Sub}((\text{Sim}(D))^c) = \text{Sub}(D^c)$ .  $\square$

### 5.3. Un Teorema Fuerte de Digráficas Perfectas

Decimos que una digráfica  $D$  es *imperfecta* si no es perfecta, es decir, si existe alguna subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  tal que  $\vec{\omega}(H) < \vec{\chi}(H)$ .

En esta sección demostraremos que los ciclos dirigidos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , no son perfectos.

**Teorema 5.1.** *Los ciclos dirigidos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , son imperfectos.*

*Demostración.* Sea  $\vec{C}_n$  un ciclo dirigido, con  $n \geq 3$ .

**Afirmación 1:** El número de clan de  $\vec{C}_n$  es 1.

Por el lema 5.2 tenemos que  $\vec{\omega}(\vec{C}_n) = \vec{\omega}(\text{Sim}(\vec{C}_n))$ . Como  $n \geq 3$ , entonces  $\vec{C}_n$  no tiene flechas simétricas y por lo tanto, la parte simétrica de  $\vec{C}_n$  consiste de vértices aislados. Esto implica que  $\vec{\omega}(\text{Sim}(\vec{C}_n)) = 1$ .

Se sigue que  $\vec{\omega}(\vec{C}_n) = 1$ .

**Afirmación 2:** El número dicromático de  $\vec{C}_n$  es 2.

Supongamos que  $\vec{\chi}(\vec{C}_n) = 1$ , como la subdigráfica inducida por los vértices con color 1 es igual a  $\vec{C}_n$ , entonces no cumple con ser acíclica, contradiciendo la definición de número dicromático. Por lo tanto,  $\vec{\chi}(\vec{C}_n) > 1$ .

Ahora, etiquetemos los vértices de  $\vec{C}_n$  del 1 a  $n$ . Asignando un color  $\alpha$  a los vértices del 1 a  $n-1$  y un color  $\beta$  al vértice  $n$  obtenemos una coloración mínima ya que  $T_1 = (1, 2, \dots, n-1)$  y  $T_2 = (n)$  son trayectorias dirigidas inducidas por los vértices con colores  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, que cumplen con ser acíclicas. Por lo tanto,  $\vec{\chi}(\vec{C}_n) \leq 2$ .

Se sigue que  $\vec{\chi}(\vec{C}_n) = 2$ .

Por lo tanto, obtenemos que  $\vec{\omega}(\vec{C}_n) = 1 < \vec{\chi}(\vec{C}_n) = 2$ . Concluimos que los ciclos dirigidos, con  $n \geq 3$ , son imperfectos.  $\square$

Recordemos que el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas nos dice que una gráfica  $G$  es perfecta si y sólo si no contiene ciclos impares de longitud al menos cinco o a sus complementos como subgráficas inducidas. ¿Será suficiente

con pedir que una digráfica  $D$  no contenga ciclos dirigidos impares de longitud al menos cinco o a sus complementos como subdigráficas inducidas para ser perfecta?

En la figura 5.12 podemos ver que  $C_3$  no es perfecta por el teorema 5.1 y  $D$  no es perfecta ya que su número dicromático es 3 y su número de clan es 2. Por lo tanto, dichas digráficas no contienen ciclos dirigidos impares de longitud al menos cinco o a sus complementos como subdigráficas inducidas y sin embargo no son perfectas.

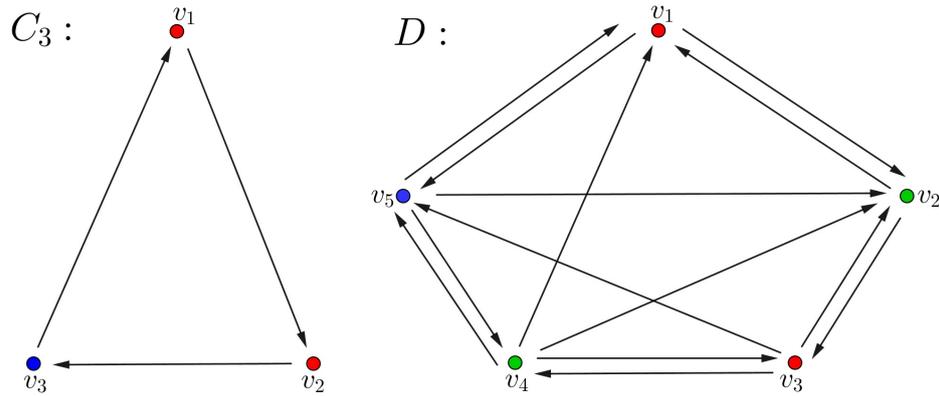


Figura 5.12: Ejemplo de digráficas imperfectas.

El siguiente resultado es el Teorema Fuerte de Digráficas Perfectas.

**Teorema 5.2.** *Sea  $D$  una digráfica.  $D$  es perfecta si y sólo si  $Sim(D)$  es perfecta y  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $D$  perfecta. Procediendo por contradicción, supongamos que  $Sim(D)$  no es perfecta o  $D$  contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas. Veremos que existe una subdigráfica inducida  $D'$  de  $D$  tal que  $\vec{\omega}(D') < \vec{\chi}(D')$ .

Supongamos que  $Sim(D)$  no es perfecta. Entonces existe una subdigráfica inducida  $H$  de  $Sim(D)$  tal que  $\vec{\omega}(H) < \vec{\chi}(H)$ .

**Afirmación 1:**  $Sim(D[V(H)]) = H$ .

Para demostrar esta afirmación veremos que  $V(Sim(D[V(H)])) = V(H)$  y que  $(u, v) \in F(Sim(D[V(H)]))$  si y sólo si  $(u, v) \in F(H)$ .

**Afirmación 1.1:**  $V(Sim(D[V(H)])) = V(H)$ .

Por definición de la parte simétrica tenemos que  $V(\text{Sim}(D[V(H)]))=V(D[V(H)])$ . Además, por definición de subdigráfica inducida tenemos que  $V(D[V(H)])=V(H)$ .

Por lo tanto,  $V(\text{Sim}(D[V(H)]))=V(H)$ .

**Afirmación 1.2:**  $(u, v) \in F(\text{Sim}(D[V(H)]))$  si y sólo si  $(u, v) \in F(H)$ .

Primero veamos que si  $(u, v) \in F(\text{Sim}(D[V(H)]))$ , entonces  $(u, v) \in F(H)$ .

Supongamos lo contrario, es decir, que  $(u, v) \notin F(H)$ . Como  $H$  es simétrica por estar en la parte simétrica de  $D$ , entonces  $(v, u) \notin F(H)$ . Esto implica que  $(u, v) \notin F(D[V(H)])$  y  $(v, u) \notin F(D[V(H)])$ ; y por lo tanto,  $(u, v) \notin F(\text{Sim}(D[V(H)]))$  y  $(v, u) \notin F(\text{Sim}(D[V(H)]))$ , lo cual es una contradicción. Se sigue que  $(u, v) \in F(H)$ .

Ahora veamos que si  $(u, v) \in F(H)$ , entonces  $(u, v) \in F(\text{Sim}(D[V(H)]))$ .

Sea  $(u, v)$  una flecha en  $H$ , como  $H$  es una subdigráfica inducida de  $\text{Sim}(D)$ , entonces  $(v, u) \in F(H)$ . Por definición de subdigráfica inducida, tenemos que  $(u, v) \in F(D[V(H)])$  y  $(v, u) \in F(D[V(H)])$ . Por lo tanto, como  $(u, v)$  es una flecha simétrica, entonces  $(u, v) \in F(\text{Sim}(D[V(H)]))$ .

Por lo tanto,  $\text{Sim}(D[V(H)])=H$ .

Por el lema 5.2 tenemos que:

$$\vec{\omega}(D[V(H)]) = \vec{\omega}(\text{Sim}(D[V(H)])) = \vec{\omega}(H) < \vec{\chi}(H) = \vec{\chi}(\text{Sim}(D[V(H)])).$$

Además, como  $\text{Sim}(D[V(H)])$  es una subdigráfica de  $D[V(H)]$ , entonces por el lema 5.1 tenemos que  $\vec{\chi}(\text{Sim}(D[V(H)])) \leq \vec{\chi}(D[V(H)])$ .

Por lo tanto,  $\vec{\omega}(D[V(H)]) < \vec{\chi}(D[V(H)])$  y así,  $D[V(H)]$  es la digráfica  $D'$  buscada, lo cual contradice que  $D$  es perfecta ya que  $D[V(H)]$  es una subdigráfica inducida de  $D$ .

Ahora, supongamos que  $D$  contiene algún ciclo dirigido  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , como subdigráfica inducida. Sabemos por el teorema 5.1 tenemos que  $\vec{C}_n$  es una digráfica imperfecta. Por lo tanto,  $D$  no es perfecta, lo cual es una contradicción.

Se sigue que  $\text{Sim}(D)$  es perfecta y  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $D$  tal que no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas y tal que  $\text{Sim}(D)$  es perfecta.

Supongamos que  $D$  no es perfecta, es decir, existe una subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  tal que  $\vec{\omega}(H) < \vec{\chi}(H)$ . Veremos que  $D$  contiene un ciclo dirigido, con al menos 3 vértices, como subdigráfica inducida.

**Afirmación:**  $Sim(H)$  es una subdigráfica inducida de  $Sim(D)$ .

Como  $H$  es una subdigráfica de  $D$ , es fácil ver que  $Sim(H)$  es una subdigráfica de  $Sim(D)$ . Por lo tanto, resta probar que  $Sim(H)$  es inducida en  $Sim(D)$ , es decir, dados  $u$  y  $v$  dos vértices de  $Sim(H)$ , si  $(u, v) \in F(Sim(D))$ , entonces  $(u, v) \in F(Sim(H))$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $Sim(H)$  tales que  $(u, v) \in F(Sim(D))$ , por definición de la parte simétrica de  $D$ , entonces  $(u, v)$  y  $(v, u)$  son flechas de  $D$ . Como  $V(Sim(H)) = V(H)$  y  $H$  es subdigráfica inducida de  $D$ , entonces  $(u, v)$  es también una flecha simétrica de  $Sim(H)$ , lo que implica que  $(u, v) \in F(Sim(H))$ .

Ahora, como  $Sim(D)$  es perfecta, tenemos que  $Sim(H)$  también es perfecta, es decir,  $\vec{\chi}(Sim(H)) = \vec{\omega}(Sim(H))$ . Recordemos que toda coloración mínima en una digráfica simétrica es también una coloración propia, por lo tanto, existe una coloración propia  $C$  de  $Sim(H)$  con  $\vec{\omega}(Sim(H))$  colores, es decir, por el lema 5.2, con  $\vec{\omega}(H)$  colores. Como  $\vec{\omega}(H) < \vec{\chi}(H)$ , entonces dicha coloración  $C$ , no es una coloración mínima para  $H$ . Esto implica que existe un ciclo dirigido (no necesariamente inducido)  $\vec{C}_m$ , con  $m \geq 3$ , en  $Asim(H)$  tal que todos sus vértices tienen asignado el mismo color  $c$ .

Consideremos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , un ciclo dirigido de longitud mínima en  $H$  tal que todos sus vértices tienen asignado el mismo color. Supongamos que  $\vec{C}_n$  no es inducido en  $H$ , entonces existe  $(u, v)$  en  $F(H)$  tal que  $(u, v)$  es una cuerda de  $\vec{C}_n$ .

**Caso 1:**  $(u, v)$  es una cuerda simétrica de  $\vec{C}_n$ .

Como todos los vértices de  $\vec{C}_n$  tienen asignado el mismo color, en particular,  $C(u) = C(v)$ , lo cual contradice que  $Sim(H)$  tiene una coloración propia.

**Caso 2:**  $(u, v)$  es una cuerda asimétrica de  $\vec{C}_n$ .

Entonces existe  $\vec{C}'$  un ciclo dirigido tal que  $\vec{C}'$  es de longitud menor que  $\vec{C}_n$ , a saber,  $\vec{C}' = (u, v) \cup (v, \vec{C}_n, u)$  o  $\vec{C}' = (v, \vec{C}_n, u) \cup (u, v)$ , lo cual contradice que  $\vec{C}_n$  es mínimo (ver figura 5.13).

En ambos casos en los que  $(u, v)$  es una cuerda de  $\vec{C}_n$  llegamos a una contradicción. Por lo tanto,  $\vec{C}_n$  es un ciclo dirigido inducido, con  $n \geq 3$ , en  $H$ .

Como  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$ , entonces  $\vec{C}_n$  también es una

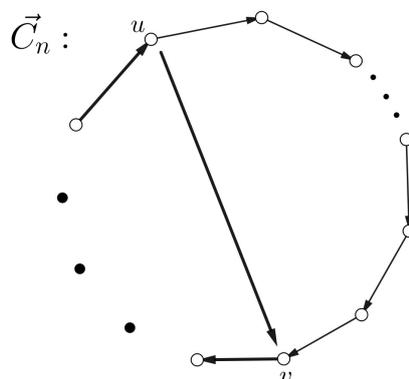


Figura 5.13: Ejemplo de  $\vec{C}_n$  con una cuerda  $(u, v)$ .

subdigráfica inducida de  $D$ , lo cual contradice el hecho de que  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas.

Por lo tanto,  $D$  es perfecta.

Concluimos que  $D$  es perfecta si y sólo si  $Sim(D)$  es perfecta y  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas.  $\square$

**Nota:** Observemos que si  $D$  es una digráfica perfecta, entonces cualquier coloración mínima de  $Sim(D)$  es también una coloración mínima para  $D$ .

En efecto, sea  $D$  una digráfica perfecta y  $C$  una coloración mínima de  $Sim(D)$ . Consideremos  $c$  un color en  $C$  y  $H$  la subdigráfica inducida por los vértices con color  $c$  en  $D$ . Demostraremos que  $H$  no contiene ciclos dirigidos.

Por contradicción, supongamos que existe un ciclo dirigido  $\vec{\gamma}$  en  $H$ .

Notemos que  $\vec{\gamma}$  es un ciclo dirigido en  $Asim(H)$ , ya que por la observación 5.2 tenemos que toda coloración mínima de  $Sim(H)$  también es una coloración propia de  $Sim(H)$ .

Consideremos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , un ciclo dirigido de longitud mínima en  $Asim(H)$  y supongamos que  $\vec{C}_n$  no es inducido en  $D$ . Procediendo como en la demostración del teorema 5.2, obtenemos que  $\vec{C}_n$  es un ciclo dirigido inducido, con  $n \geq 3$ , en  $D$ . Lo cual es una contradicción, ya que por el teorema anterior,  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas por ser  $D$  perfecta.

Por lo tanto,  $C$  es una coloración mínima para  $D$ .

Ahora, retomando la digráfica  $D$  de la figura 5.12, podemos notar que  $Sim(D)$  no es perfecta y además,  $D$  es un hoyo lleno impar. Por lo tanto, por el Teorema

Fuerte de Digráficas Perfectas se deduce que los hoyos llenos impares y los antihoyos llenos impares también son imperfectos.

**Teorema 5.3.** *Los hoyos llenos impares son imperfectos.*

*Demostración.* Sea  $\vec{C}$  un hoyo lleno impar. Por definición, sabemos que  $Sim(\vec{C})=D_{C_n}$  para algún  $n$  impar mayor o igual que 5. Por el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas tenemos que  $C_n=Sub(D_{C_n})$  es imperfecta. Por lo tanto, por el lema 5.5 se tiene que  $D_{C_n}$  es imperfecta. Lo que implica que  $Sim(\vec{C})$  es imperfecta.

Como  $Sim(\vec{C})$  es imperfecta, por el teorema 5.2 se tiene que  $\vec{C}$  es imperfecto.

Concluimos que los hoyos llenos impares son imperfectos.  $\square$

**Teorema 5.4.** *Los antihoyos llenos impares son imperfectos.*

*Demostración.* Sea  $\vec{C}'$  un antihoyo lleno impar. Por definición, sabemos que  $Sim(\vec{C}')=D_{(C_n)^c}$  para algún  $n$  impar mayor o igual que 5. Por el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas tenemos que  $(C_n)^c=Sub(D_{(C_n)^c})$  es imperfecta. Por lo tanto, por el lema 5.5 se tiene que  $D_{(C_n)^c}$  es imperfecta. Lo que implica que  $Sim(\vec{C}')$  es imperfecta.

Como  $Sim(\vec{C}')$  es imperfecta, por el teorema 5.2 se tiene que  $\vec{C}'$  es imperfecto.

Concluimos que los antihoyos llenos impares son imperfectos.  $\square$

Como mencionamos al inicio del capítulo, daremos una caracterización de digráficas perfectas mediante un conjunto de subdigráficas inducidas prohibidas. Por los teoremas 5.1, 5.3 y 5.4 tenemos que las siguientes digráficas son imperfectas:

1. Hoyos llenos impares.
2. Antihoyos llenos impares.
3. Ciclos dirigidos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ .

Notemos que basta con que una digráfica  $D$  contenga alguna de las tres digráficas anteriores como subdigráfica inducida para ser imperfecta. Por lo tanto, a las tres digráficas anteriores las llamaremos **estructuras prohibidas**.

**Corolario 5.4.1.** *Sea  $D$  una digráfica.  $D$  es perfecta si y sólo si  $D$  no contiene ninguna de las siguientes estructuras como subdigráficas inducidas:*

1. Hoyos llenos impares.
2. Antihoyos llenos impares.
3. Ciclos dirigidos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $D$  perfecta y supongamos que  $D$  contiene alguna de las tres estructuras prohibidas. Como dichas estructuras no son perfectas y son subdigráficas inducidas de  $D$ , se sigue que  $D$  no es perfecta, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $D$  no contiene ninguna de las estructuras prohibidas como subdigráficas inducidas.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $D$  tal que no contiene ninguna de las estructuras prohibidas como subdigráficas inducidas. Como  $Sim(D)$  es una subdigráfica de  $D$ , entonces  $Sim(D)$  tampoco contiene hoyos llenos impares ni antihoyos llenos impares. Esto es equivalente a decir que si a  $Sim(D)$  la vemos como una gráfica, entonces  $Sim(D)$  no contiene hoyos impares ni antihoyos impares. Por lo tanto, por el Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas tenemos que  $Sim(D)$  es perfecta vista como gráfica. Concluimos que  $Sim(D)$  es perfecta como digráfica.

Finalmente, ya que  $Sim(D)$  no contiene ninguna de las estructuras prohibidas y en particular no contiene ciclos dirigidos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , se sigue por el teorema 5.2 que  $D$  es perfecta.  $\square$

## 5.4. Un Teorema Débil de Digráficas Perfectas

Como podemos observar, a comparación de la perfección en gráficas a partir del Teorema Fuerte de Gráficas Perfectas, en digráficas tenemos que pedir más condiciones para poder llegar a un teorema equivalente para la perfección en digráficas. La pregunta ahora sería ¿qué condiciones hay que pedir para obtener un teorema en digráficas equivalente al Teorema Débil de Gráficas Perfectas?

En la figura 5.14 podemos ver que el complemento de  $\vec{C}_4$ ,  $(\vec{C}_4)^c$ , es una digráfica perfecta, sin embargo,  $\vec{C}_4$  no es perfecta (por corolario 5.4.1).

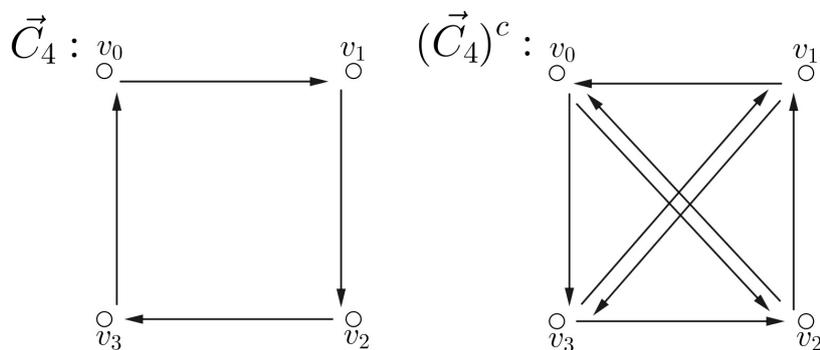


Figura 5.14:  $\vec{C}_4$  y  $(\vec{C}_4)^c$ .

También en la figura 5.14 y en la figura 5.15 podemos ver que si  $\vec{C}_n=(v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$  es un ciclo dirigido de  $n$  vértices, entonces  $(\vec{C}_n)^c$  consiste de  $(\vec{C}_n)^{-1}=(v_n, v_{n-1}, \dots, v_0 = v_n)$  y todas las cuerdas simétricas incluidas en  $(\vec{C}_n)^{-1}$ .

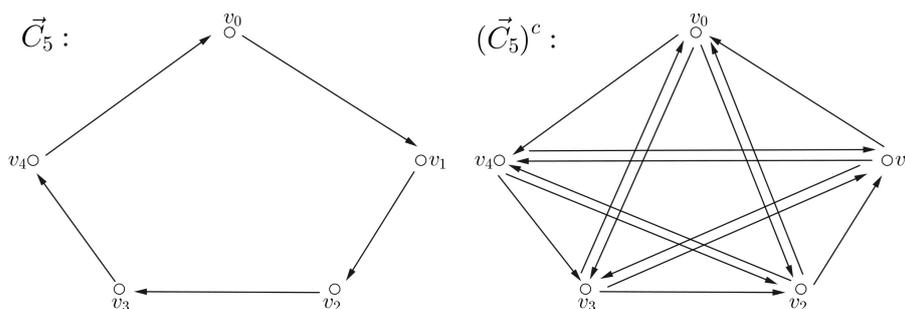


Figura 5.15:  $\vec{C}_5$  y  $(\vec{C}_5)^c$ .

**Observación 5.5.** Si  $\vec{C}_n=(v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$  es un ciclo dirigido de  $n$  vértices, entonces:

1.  $V((\vec{C}_n)^c)=V(\vec{C}_n)$  y
2.  $F((\vec{C}_n)^c)=\{(v_i, v_j) : \{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n-1\} \text{ con } i \neq j\} - F(\vec{C}_n)$ .

**Lema 5.8.** Sea  $D$  una digráfica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (i)  $D$  no contiene ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.
- (ii)  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.
- (iii)  $D^c$  es clan acíclica.

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $D$  no contiene ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas, entonces  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

Sea  $D$  tal que no contiene ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas y por contradicción supongamos que  $D^c$  contiene un complemento de un ciclo dirigido como subdigráfica inducida. Sea  $(\vec{C}_n)^c$  el complemento de un ciclo dirigido tal que  $(\vec{C}_n)^c$  es una subdigráfica inducida de  $D^c$ . Sabemos por la observación 5.5 que  $((\vec{C}_n)^c)^c = \vec{C}_n$ ,

pero  $\vec{C}_n$  es una subdigráfica inducida de  $(D^c)^c = D$ , lo cual es una contradicción ya que  $D$  no contiene ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

Por lo tanto,  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas, entonces  $D$  no contiene ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

Sea  $D^c$  tal que no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas y por contradicción supongamos que  $D$  contiene un ciclo dirigido como subdigráfica inducida. Sea  $\vec{C}_n$  un ciclo dirigido de  $n$  vértices tal que  $\vec{C}_n$  es una subdigráfica inducida de  $D$ . Entonces  $(\vec{C}_n)^c$  es una subdigráfica inducida de  $D^c$ , lo cual es una contradicción ya que  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

Por lo tanto,  $D$  no contiene ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Si  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas, entonces  $D^c$  es clan acíclica.

Sea  $D^c$  tal que no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas y por contradicción supongamos que  $D^c$  no es clan acíclica, es decir, supongamos que existe un ciclo dirigido en  $D^c$  tal que es inducido por los vértices de un clan de  $Sub(D^c)$ .

Consideremos  $\vec{C}_n$ , con  $n \geq 3$ , un ciclo dirigido de longitud mínima en  $D^c$  tal que es inducido por los vértices de un clan de  $Sub(D^c)$  y sea  $(u, v)$  en  $F(D^c)$  una cuerda de  $\vec{C}_n$ .

Supongamos que  $(u, v)$  es una cuerda asimétrica, entonces existe  $\vec{C}'$  un ciclo dirigido tal que  $\vec{C}'$  es de longitud menor que  $\vec{C}_n$  en  $Asim(D)$ , a saber,  $\vec{C}' = (u, v) \cup (v, \vec{C}_n, u)$  o  $\vec{C}' = (v, \vec{C}_n, u) \cup (u, v)$ , lo cual contradice que  $\vec{C}_n$  es mínimo (ver figura 5.13). Por lo tanto, todas las cuerdas de  $\vec{C}_n$  son cuerdas simétricas en  $D^c$ .

Notemos que como  $\vec{C}_n$  es un ciclo dirigido inducido por los vértices de un clan de  $Sub(D^c)$ , entonces para cualesquiera dos vértices no consecutivos  $u$  y  $v$  en  $\vec{C}_n$ , se tiene que  $[u, v] \in A(Sub(D^c))$  y por lo tanto, existe una flecha entre  $u$  y  $v$  en  $D^c$ . Así, por lo mencionado anteriormente, tenemos que para cualesquiera dos vértices no consecutivos  $u$  y  $v$  de  $\vec{C}_n$ ,  $(u, v)$  es una flecha simétrica en  $D^c$ . Por lo tanto, por la observación 5.5,  $\vec{C}_n$  induce el complemento de un ciclo dirigido en  $D^c$ , lo cual es una contradicción.

Concluimos que  $D^c$  es clan acíclica.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Si  $D^c$  es clan acíclica, entonces  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

Sea  $D^c$  una digráfica clan acíclica y por contradicción supongamos que  $D^c$  contiene un complemento de algún ciclo dirigido como subdigráfica inducida.

Consideremos  $\vec{C}_n$  un ciclo dirigido inducido de  $D$  y sea  $(\vec{C}_n)^c$  el complemento de  $\vec{C}_n$ . Por la observación 5.5, tenemos que  $V(\text{Asim}((\vec{C}_n)^c))$  inducen un clan en  $\text{Sub}(D^c)$ . Lo cual es una contradicción ya que  $D^c$  es clan acíclica.

Concluimos que  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.  $\square$

El lema anterior nos servirá para demostrar el siguiente teorema que puede ser considerado como un Teorema Débil de Digráficas Perfectas.

**Teorema 5.5.** *Sea  $D$  una digráfica.  $D$  es perfecta si y sólo si  $D^c$  es una súper orientación clan acíclica de una gráfica perfecta.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica.

Por el Teorema Fuerte de Digráficas Perfectas (teorema 5.2) tenemos que  $D$  es perfecta si y sólo si  $\text{Sim}(D)$  es perfecta y  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas. Por el lema 5.8, lo anterior es equivalente a decir que  $D$  es perfecta si y sólo si  $\text{Sim}(D)$  es perfecta y  $D^c$  es clan acíclica.

Por otra parte, por el lema 5.5 tenemos que  $\text{Sim}(D)$  es perfecta como digráfica si y sólo si  $\text{Sub}(\text{Sim}(D))$  es perfecta. Por el Teorema Débil de Gráficas Perfectas,  $\text{Sub}(\text{Sim}(D))$  es perfecta si y sólo si  $(\text{Sub}(\text{Sim}(D)))^c$  es perfecta.

Nuevamente, por el lema 5.5,  $(\text{Sub}(\text{Sim}(D)))^c$  es perfecta si y sólo si  $(\text{Sim}(D))^c$  es perfecta como digráfica. Por el lema 5.7, lo anterior es equivalente a decir que  $(\text{Sub}(\text{Sim}(D)))^c$  es perfecta si y sólo si  $D_G$  es perfecta, con  $G = \text{Sub}(D^c)$ . Por lo tanto, por definición,  $D^c$  es una súper orientación de una gráfica perfecta, a saber, de  $G$ .

De lo anterior, se sigue que  $\text{Sim}(D)$  es perfecta si y sólo si  $D^c$  es una súper orientación de una gráfica perfecta.

Finalmente, se deduce que  $D$  es perfecta si y sólo si  $D^c$  es una súper orientación de una gráfica perfecta y  $D^c$  es clan acíclica.

Concluimos que  $D$  es perfecta si y sólo si  $D^c$  es una súper orientación clan acíclica de una gráfica perfecta.

□

## 5.5. Núcleos y núcleo solubilidad

La noción de núcleo en una digráfica fue introducida por primera vez por von Neumann y Morgenstern para proporcionar un concepto abstracto de solución en la teoría de juegos cooperativos. Desde entonces la teoría de núcleos ha sido estudiada extensivamente por los teóricos de digráficas.

La teoría de núcleos es muy importante, ésto debido a las múltiples aplicaciones que tiene. Sin embargo, Chvátal demostró que en general, decidir si una digráfica tiene núcleo es un problema  $NP$ -completo. Por otro lado, si una digráfica tiene núcleo, el problema ahora es saber cuál es o cómo encontrarlo. Por esta razón, cada resultado que se exhibe respecto a la teoría de núcleos es muy significativo ya que contribuye al estudio de la teoría.

La noción de núcleo solubilidad tiene importantes aplicaciones en combinatoria, listas de coloración y teoría de juegos. Resulta que la núcleo solubilidad es equivalente a la perfección, como fue conjeturado por Berge y Duchet en 1983.

Recordando la definición, decimos que una gráfica  $G$  es **núcleo soluble** si toda súper orientación clan acíclica de  $G$  tiene núcleo, observamos que la núcleo solubilidad es una propiedad hereditaria.

Las gráficas núcleo solubles fueron introducidas por Berge y Duchet en [8], quienes establecieron los siguientes resultados.

**Proposición 5.1.** *Toda subgráfica inducida de una gráfica núcleo soluble es también núcleo soluble.*

El siguiente corolario es consecuencia de la proposición anterior.

**Corolario 5.1.1.** *Toda súper orientación clan acíclica de una gráfica núcleo soluble es también núcleo soluble.*

Berge y Duchet también establecieron que los hoyos impares y antihoyos impares no son núcleo solubles. Estos autores, motivados por estos resultados, propusieron la conjetura de que las gráficas núcleo solubles y las gráficas perfectas son equivalentes.

**Conjetura:** Sea  $G$  una gráfica.  $G$  es perfecta si y sólo si  $G$  es núcleo soluble.

La conjetura fue demostrada previamente para algunas clases especiales de gráficas, por ejemplo, para la gráfica de líneas [17, 19]. Una demostración de que las gráficas de líneas cumplen la conjetura de Berge y Duchet se puede encontrar en el trabajo de tesis escrito por Laura Pastrana Ramírez [20].

En [10] Boros y Gurvich demostraron lo siguiente:

**Teorema 5.6.** *Toda gráfica perfecta es núcleo soluble.*

La demostración general del teorema 5.6 en [10] está basada en algunos resultados de teoría de juegos cooperativos. Una demostración más sencilla, dada por Aharoni y Holzman [2], está basada en una generalización de núcleos. Sin embargo, esta última demostración tampoco es independiente de la teoría de juegos, ya que utiliza fuertemente un resultado dado por Scarf [21]. Una demostración del teorema 5.6 se puede encontrar en el trabajo de tesis escrito por María del Pilar Valencia Saravia en [23].

El teorema 5.6 nos dice que si  $G$  es una gráfica perfecta, entonces  $G$  es núcleo soluble. Por definición, lo anterior es equivalente a decir que si  $G$  es una gráfica perfecta, entonces toda súper orientación clan acíclica de  $G$  tiene núcleo.

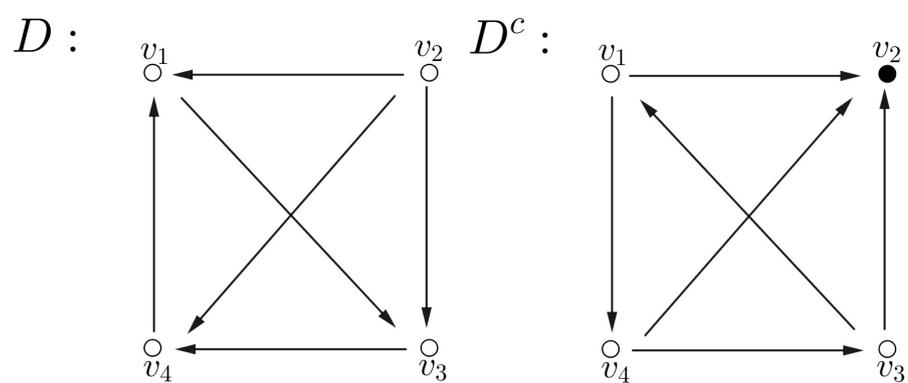
**Corolario 5.6.1.** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  es perfecta, entonces  $D^c$  tiene núcleo.*

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica perfecta. Por el teorema 5.5, se sigue que  $D^c$  es una súper orientación clan acíclica de una gráfica perfecta  $G$ . Entonces usando el resultado de Boros y Gurvich (teorema 5.6), tenemos que  $D^c$  tiene núcleo.  $\square$

Para todos nuestros resultados de perfección en digráficas se han dado equivalencias, por lo tanto, es natural preguntarnos: ¿se cumplirá que si  $D^c$  tiene núcleo, entonces  $D$  es perfecta?

En la figura 5.16 tenemos que  $N=\{v_2\}$  es núcleo de  $D^c$ , sin embargo,  $D[\{v_1, v_3, v_4\}]$  es un ciclo dirigido de longitud 3 en  $D$  y por el corolario 5.4.1,  $D$  no es perfecta. Por lo tanto, si  $D^c$  tiene núcleo, no necesariamente se cumple que  $D$  sea perfecta.

Finalmente, notemos que el corolario anterior exhibe una condición para garantizar que una digráfica tiene núcleo, y que además, une los resultados de gráficas y digráficas perfectas a partir de nuestro Teorema Débil de Digráficas Perfectas, ésto mediante la teoría de núcleo solubilidad.

Figura 5.16: Digráficas  $D$  y  $D^c$ .



# Conclusión

A partir de las condiciones que se necesitan para que una gráfica  $G$  sea perfecta, a lo largo de este trabajo lo que estudiamos es lo siguiente.

**Teorema 5.7.** *Sea  $G$  una gráfica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  $G$  es perfecta.
2.  $G^c$  es perfecta.
3.  $G$  no contiene ciclos de longitud al menos 5 ni a sus complementos.
4.  $G^c$  no contiene ciclos de longitud al menos 5 ni a sus complementos.
5.  $G$  es núcleo soluble.

Por otra parte, para las digráficas hemos demostrado lo siguiente.

**Teorema 5.8.** *Sea  $D$  una digráfica. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  $D$  es perfecta.
2.  $\text{Sim}(D)$  es perfecta y  $D$  no contiene ciclos dirigidos, con al menos 3 vértices, como subdigráficas inducidas.
3.  $D$  no contiene hoyos llenos impares.
4.  $D$  no contiene antihoyos llenos impares.
5.  $D^c$  no contiene complementos de ciclos dirigidos como subdigráficas inducidas.

Y finalmente, el resultado que relaciona la teoría de gráficas y digráficas perfectas es el siguiente.

**Teorema 5.9.** *Sea  $G$  una gráfica y  $D$  una súper orientación de  $G$ .*

1.  *$D$  es perfecta.*
2.  *$D^c$  es clan acíclica.*
3.  *$D^c$  es una súper orientación clan acíclica de una gráfica perfecta.*

Asimismo, en nuestro último resultado vimos que únicamente se satisface que si  $D$  es una digráfica perfecta, entonces  $D^c$  tiene núcleo.

Como ya hemos visto, las gráficas completas, las gráficas bipartitas, y sus respectivos complementos, son gráficas perfectas. A partir de las caracterizaciones dadas en el trabajo de tesis, ahora sería interesante saber específicamente qué otras familias de gráficas, además de las ya conocidas, son perfectas. Análogamente, sería interesante saber específicamente qué familias de digráficas son perfectas.

# Bibliografía

- [1] Alberti M. (2010). *Small Survey on Perfect Graphs*, ENS Lyon, 1-12.
- [2] Aharoni R., Holzman R. (1998). *Fractional kernels in digraphs*. J. Combin. Theory.
- [3] Andres S.D., Hochstättler W. (2013). *Perfect Digraphs*, Wiley Online Library, 21-29.
- [4] Ballen P. *Perfect graphs and the perfect graph theorems*. Notas. <http://www.cis.upenn.edu/~pballen/brinkmann.pdf>.
- [5] Blidia M., Duchet P., Maffray F. (1994). *On the orientation of Meyniel graphs*. J. Graph Theory 18, pp. 7, 705-711.
- [6] Bondy J. A., Murty U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*. New York: American Elsevier.
- [7] Berge C. (1961). *Färbung von graphen deren sämtliche bzw., ungerade kreise starr sind (zusammen-fassung)* math. Nat. Reihe Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle Wittenberg. pp. 114.
- [8] Berge C., Duchet P. (1983). *Probleme, Seminaire MSH*. Paris.
- [9] Borodin O.V., Kostochka A.V., Woodall D.R. (1998). *On kernel-perfect orientations of line graphs*. Graph theory (Elgersburg, 1996). Discrete Math, 191, pp. 1-3, 45-49.
- [10] Boros E., Gurvich V. (1996). *Perfect graphs are kernel-solvable*. Discrete Math. 159, pp. 35-55.
- [11] Boros E., Gurvich V. (2006). *Perfect graphs, kernels, and cores of cooperative games*. Discrete Math. 306, pp. 2336-2354.
- [12] Chartrand G., Lesniak L., Zhang P. (2016). *Graphs and digraphs*. (6th ed.). CRC Press.

- [13] Chartrand G., Zhang P. (2009). *Chromatic Graph Theory*. U.S.A. CRC Press.
- [14] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. (2006). *The strong perfect graph theorem*. Ann Math. 164, 51-229.
- [15] Jacob H. (1979). *Etude theorique du noyau d'un graphe*. Thesis, Paris 6.
- [16] Lovász L. (1972). *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*. Discrete Math. 2, 253-267.
- [17] Maffray F. (1984). *Sur l'existence des noyaux dans les graphes parfaits*. Thesis. Paris VI.
- [18] Maffray F. (1986). *On kernels in  $i$ -triangulated graphs*. Discrete Math. 61, 2-3, 247-251.
- [19] Maffray F. (1992). *Kernels in perfect line-graphs*. J. Combin. Theory (Ser. B) 55 (1), 1-8.
- [20] Pastrana Ramírez L. (1990). *Gráficas y digráficas de líneas*. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM.
- [21] Scarf H. (1967). *The core of  $n$  person game*. Econometrica 35.
- [22] Seymour P. (2006). *How the proof of the strong perfect graph conjecture was found*. Princeton University.
- [23] Valencia Saravia M. P. (1996). *La teoría de juegos y la conjetura de Berge-Duchet*. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM.