



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA HIDRÁULICA
INGENIERÍA CIVIL

**DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y VELOCIDADES EN CANALES CON
CURVATURA.
FLUJO UNIDIMENSIONAL EN COORDENADAS NATURALES.**

TESIS

QUE PARA OPTAR PARA EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. OSCAR RANGEL RAMÍREZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. NAHÚN HAMED GARCÍA VILLANUEVA
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

JIUTEPEC MORELOS SEPTIEMBRE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente

Dr. Felipe Ignacio Arreguín Cortés.

Secretario

Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares

1er vocal

Dr. Nahún Hamed García Villanueva

2do vocal

Dr. Ariosto Aguilar Chávez

3er vocal

M. I. Edmundo Pedroza González

Jiutepec Morelos

TUTOR DE TESIS

Dr. Nahún Hamed García Villanueva.

FIRMA



AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la fortaleza de seguir adelante y porque mientras más estudio más creo en ti:

A mis padres y mi familia por haberme formado con los valores del hombre que soy.

A todos mis profesores que me apoyaron en mi formación y en especial a aquellos que incidieron directamente en la realización de esta tesis: Dr. Ariosto Aguilar Chávez, Dr. Víctor Manuel Arroyo Correa y Dr. Carlos Fuentes Ruíz. Así como a todos los miembros del jurado.

A CONACYT por el apoyo brindado durante el tiempo de estudios, a la UNAM por haberme dado esta oportunidad de desarrollo y al IMTA por haber facilitado la infraestructura.

A todos mis amigos y compañeros de maestría en especial a Javier Martínez, Jonathan Pastrana, Juan Carlos Alvarado, Francisco Ramírez, Carlos Daniel de la Torre y Marco Antonio Jiménez.

Un muy especial agradecimiento a la persona que fungió la doble tarea de ser un excelente director de tesis y al mismo tiempo un motivador emocional capaz de hacerme ver la realidad con otro enfoque como ningún otro investigador. Dr. Nahún Hamed García Villanueva.

Esta tesis está dedicada a la memoria de aquellos amigos que partieron y no pudieron compartir conmigo realizar esta meta.



ÍNDICE

Nomenclatura	3
1. Introducción	5
2. Objetivo	7
3. Justificación.....	9
4. Hipótesis	11
4.1 Geometría diferencial de curvas	13
4.1.1 Vectores tangente, normal y binormal: Triedro de Frénet-Serret.....	13
4.1.2 Curvatura.....	15
4.1.3 Plano osculador	15
4.1.4 Centro de curvatura	16
4.1.5 Teorema fundamental de curvas	16
4.2 Discretización del sistema de ecuaciones diferenciales.....	17
4.2.1 Análisis de consistencia numérica.....	22
4.2.2 Análisis de estabilidad	24
5 Metodología.....	29
5.1 Obtención de las coordenadas naturales.....	29
5.2 Obtención del perfil en estado permanente.....	31
5.2.1 Fuerzas de presión	32
5.2.2 Fuerzas de gravedad.....	34
5.2.3 Fuerzas de fricción.....	35
5.2.4 Ecuación completa	36
5.2.5 Condición crítica y sección de control.....	40
5.2.6 Condición sin curvatura.....	41
5.3 Obtención del perfil en estado transitorio.....	42
6 Resultados.....	47
6.1 Modelación con datos aleatorios.....	47
6.2 Modelación de un dam break.	52



6.3	Comparativo con el artículo “Experimental verification of the Dressler curved-flow equations” de Sivakumaran y Yevjevich journal of hydraulic research, VOL. 25, 1987 , no. 3.....	53
6.4	Comparativo con el artículo “Perfil del flujo sobre un vertedor tipo cimacio y su comprobación” de Gilberto Sotelo-Ávila.	57
6.5	Comparativo con el artículo “Depth-integrated flow modelling taking into account bottom curvature” de B.J. DEWALS et al, Journal of Hydraulic Research Vol. 44, No. 6 (2006), pp. 785–795.	59
7	Conclusiones	61
8	Anexo de códigos.....	63
8.1	Código frenet.....	63
8.2	Código curvatura.....	65
8.3	Código perfil de la curvatura.....	66
8.4	Código transitorio de la curvatura.	78
9	Anexo desarrollos matemáticos	85
9.2	Ecuaciones fundamentales de la hidráulica.....	85
9.2.1	Ecuación general de conservación de propiedad.....	85
9.2.2	Ecuación de conservación de masa.....	88
9.2.3	Ecuación de conservación de cantidad de movimiento.....	93
9.2.4	Versiones conservativas y no conservativas de las ecuaciones fundamentales.....	110
9.3	Demostración de la consistencia numérica	114
10	Estado del arte	121
10.2	Artículos científicos arbitrados.....	121
10.3	Artículos de congreso.....	128
10.4	Libros y ensayos.	131
10.5	Publicaciones en sitios web.....	135
10.6	Tesis académicas.....	140
11	Referencias bibliográficas	141



Nomenclatura

A	Área de la sección transversal [L^2]
a_1	Constante de discretización [adim]
a_2	Constante de discretización [T^{-1}]
b_1	Constante de discretización [T^{-1}]
b_2	Constante de discretización [T^{-2}]
B	Vector binormal
B	Ancho de la superficie libre [L]
Bm	Ancho promedio de la superficie libre [L]
c	Signo de la curvatura [adim]
C	Coefficiente de curvatura [adim]
c_1	Constante de discretización [adim]
c_2	Constante de discretización [T^{-1}]
Ce	Coefficiente de relación [$L^{1-m} T^{-1}$]
Cm	Coefficiente de relación de curvatura parcial [L^{-2m}]
C_M	Coefficiente de curvatura global [adim]
$C_{\rho q}$	Creación de la propiedad q
Cr	Número de courant [adim]
d	Tirante medido sobre el eje n perpendicular a la plantilla [L]
d_0	Distancia del centro de gravedad a la plantilla [L]
d_m	Tirante promedio entre dos secciones [L]
$D_{\rho q}$	Tasa de creación de la propiedad
d_1	Constante de discretización [T^{-1}]
d_2	Constante de discretización [T^{-2}]
e_1	Constante de discretización [$L T^{-1}$]
e_2	Constante de discretización [$L T^{-2}$]
e_b	Vector unitario en el eje binormal [adim]
e_n	Vector unitario en el eje normal [adim]
e_s	Vector unitario en el eje tangencial [adim]
F	Fuerza [$M L T^{-2}$]
f_f	Fuerzas de fricción [$M L T^{-2}$]
g	Aceleración local de la gravedad [$L T^{-2}$]
g_s	Aceleración gravitatoria [$L T^{-2}$]
i	índice de posición espacial [adim]
I_1	Momento de inercia [$M L T^{-2}$]
j	índice de posición espacial [adim]
k	Talud del canal [adim]
k_0	Constante para el modelo de fricción [adim]
m	Coefficiente de relación [adim]
m	masa [M]
$M_{\rho q}$	Variación total de la propiedad q
n	Coefficiente de rugosidad de Manning [$T L^{-1/3}$]
\underline{n}	Vector unitario normal a la superficie de control [adim]
N	Vector normal
P	Presión [$M L^{-1} T^{-2}$]



q	Propiedad intensiva escalar
ql	Gasto lateral [$L^2 T^{-1}$]
$Q_{\rho q}$	Cantidad de la propiedad q
r	Radio de curvatura [L]
Rh	Radio hidráulico [L]
r_c	radio de curvatura [L]
s	Longitud de arco [L]
s_f	Pendiente de fricción [adim]
s_0	Pendiente de la plantilla [adim]
T	Vector tangente
u	Velocidad de la sección media [$L T^{-1}$]
v	Velocidad de la propiedad [$L T^{-1}$]
V	Volumen de control [L^3]
x	Eje coordenado x [L]
y	Eje coordenado y [L]
Y	Tirante hidráulico [L]
z	Eje coordenado z [L]
α_f	Ángulo de fricción [rad]
α_s	Componente tangencial de la aceleración [$L T^{-2}$]
γ	Peso específico [$M L^{-2} T^{-2}$]
ε	Rugosidad [L]
$\bar{\zeta}$	Centro de gravedad medido desde la superficie libre [L]
η	Distancia de un elemento diferencial de área a la plantilla [L]
θ	Factor de peso espacial [adim]
θ_i	Ángulo de inclinación con respecto de la horizontal en la sección [rad]
P	Densidad [$M L^{-3}$]
σ	Ancho de la superficie libre con respecto de un diferencial de tirante Δy [L]
τ	Esfuerzo cortante [$M L^{-1} T^{-2}$]
ϕ	Ángulo entre la vertical y la inclinación de la normal [rad]
χ	Curvatura [L^{-1}]
Ψ	Factor de peso temporal [adim]

1. Introducción

Primeramente, es necesario entender el concepto de curvatura que simplemente es la razón de cambio de la dirección de la tangente con respecto de un punto fijo, por ejemplo, en una línea recta no existe curvatura porque la razón de cambio vale cero, por el contrario, en una circunferencia la curvatura es constante debido a que la razón de cambio se incrementa en forma proporcional a la medida angular en el punto fijo también llamado centro de curvatura. En pocas palabras la curvatura es la oposición a la rectitud.

Entonces, si se parte de la observación que, al comparar un flujo en un canal con una plantilla recta con otro similar, pero con una plantilla curva, el flujo se comportará diferente.

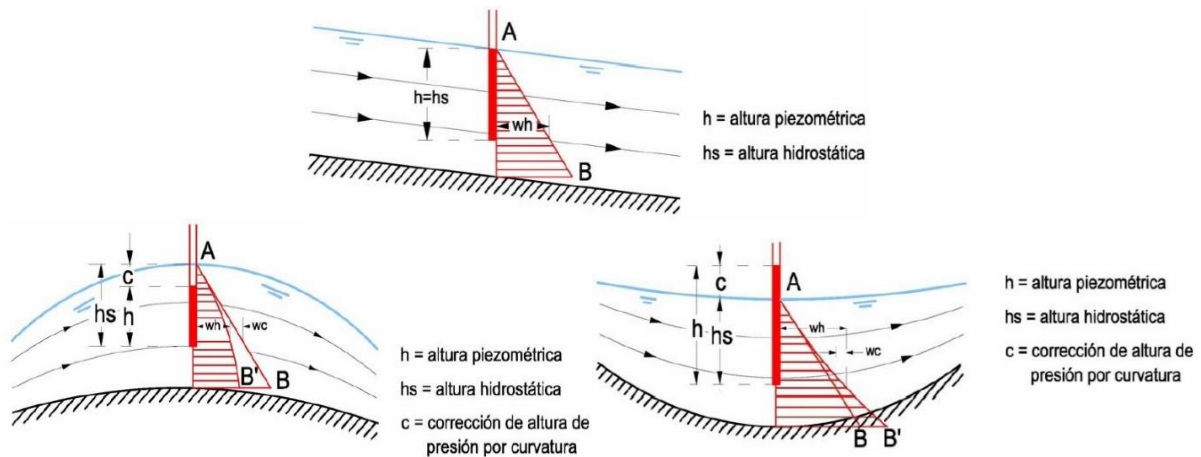


Fig. 1 Flujo con diferentes grados de curvatura (Chow, 2002)

Como soporte teórico del trabajo se incluirá un capítulo sobre geometría diferencial de curvas y la deducción de las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento para un flujo unidimensional sobre un sistema de coordenadas naturales. A partir de estas ecuaciones se derivan los modelos a desarrollar para estudiar los efectos de curvatura sobre las velocidades y las presiones en un canal

En este trabajo se estudiará la influencia de la aceleración centrípeta, tanto en canales de curvatura convexa como cóncava, para determinar su efecto sobre el decremento e incremento de las presiones desde la superficie libre hasta el fondo del canal y de la misma manera el efecto del radio de curvatura en la distribución de velocidades en la dirección perpendicular al flujo. Así como su comportamiento en el tiempo mediante un modelo transitorio que incluya las variables mencionadas para determinar el tirante, la velocidad y la variación de la presión en un modelo unidimensional.

Se realizó una recopilación de estudios disponibles relativos al fenómeno que provoca en canales la variación de la curvatura para verificar y validar el modelo desarrollado. Así mismo se realizó una comparación con otros modelos físicos. El sistema es resuelto con una solución analítica y comprobado con datos experimentales de artículos previos.



2. Objetivo

El propósito principal de este trabajo es el de representar el fenómeno que ocurre cuando un flujo circula por un canal el cual posee una cierta curvatura en el fondo desde la cinemática de partículas, recordando que cuando una partícula se mueve en el espacio describe una curva que se desarrolla en tres dimensiones, resulta entonces conveniente fijar a la partícula un sistema coordenado como marco de referencia.

Adicionalmente este trabajo contribuirá en la generalización de las ecuaciones del flujo curvilíneo para emplearse en canales, retomando la hipótesis de flujo poco profundo empleada por Dressler; mediante procedimientos numéricos.

Los resultados de la presente tesis ayudarán a tener una mejor comprensión del flujo cuando ocurre un cambio en la curvatura de la plantilla, así como contar con más herramientas técnicas que permitan predecir el comportamiento del mismo.

Para conseguir el objetivo, este trabajo se centra en tres metas que a continuación se explican:

La primera meta será desarrollar una técnica numérica que permita la caracterización de la geometría de la plantilla por medio de la transformación de puntos discretos con coordenadas rectangulares a coordenadas naturales, esta acción permitirá después determinar la curvatura, los centros de curvatura y radios de curvatura.

La segunda meta consistirá en desarrollar un modelo matemático que represente el comportamiento del flujo en función del radio de curvatura en estado permanente.

La última meta será implementar una técnica numérica que describa el cambio del flujo en el tiempo mediante variaciones de gasto (estado transitorio).

Cabe mencionar que la presente técnica resulta ser diferente pues incorpora el uso del radio de curvatura para analizar el flujo.

Finalmente se hará una comparación de los resultados obtenidos contra resultados experimentales que han realizado diversos autores y comprobar la veracidad de los mismos. La información obtenida ayudará al diseño de conductos donde se presenta la curvatura para determinar su capacidad de conducción, el perfil del fondo, el perfil del flujo del agua y la distribución de la presión.

Para el presente trabajo se analizará la distribución de presiones y la distribución del perfil de velocidades en la dirección radial, por el efecto de la aceleración centrípeta, el eje de referencia es la dirección normal del fondo del canal.

De manera particular, entre otros aspectos, se pretende analizar el caso de la distribución de velocidades al pasar de un canal de pendiente constante a uno con curvatura.



3. Justificación

La determinación de la distribución de velocidades y presiones en canales es fundamental para su estudio y dimensionamiento hidráulico; al respecto, en el ámbito académico se mantiene un interés por el estudio y la representación físico-matemática de la influencia que tiene la curvatura y consecuentemente la aceleración centrípeta sobre estas variables. Para abordar este tema, el uso de coordenadas naturales permite simplificar su representación y análisis.

Para estudiar este fenómeno, si se desarrolla dentro de un sistema de ejes coordenados rectangulares se torna muy complejo, es por eso que se plantea el problema bajo un sistema de referencia en coordenadas naturales.

Existen diversos mecanismos para comprender este fenómeno: el método de la red de flujo o, con más precisión, por un modelo de prueba. (Sotelo, 2002). Así como, los estudios que previamente se han realizado para determinar el comportamiento del flujo con curvatura. Todos estos pueden resultar difíciles en su comprensión, es por eso que cobra relevancia esta tesis pues brinda una alternativa de solución diferente basado en la simplificación del fenómeno.

La comunidad científica y académica, en el ámbito de la ingeniería hidráulica, mantienen el interés por contar con modelos físico-matemáticos que describan el comportamiento del flujo en canales con curvatura para ser acoplados a los sistemas de solución práctica bajo la hipótesis de considerar que el flujo es unidimensional. Al respecto y de acuerdo con la literatura especializada, la utilización de sistemas de coordenadas naturales para plantear y desarrollar modelos de flujo unidimensional en canales con curvatura se identifica como un espacio de oportunidad para simplificar y mejorar la representación que actualmente se tiene de los mismos. Bajo este tipo de coordenadas, al considerar el desarrollo del canal como la trayectoria de una partícula, su estudio permite introducir -de manera natural- los efectos de curvatura en las ecuaciones que rigen el flujo unidimensional a superficie libre.

Bajo esta premisa, es posible desarrollar modelos que incluyan los efectos de la aceleración centrípeta en los perfiles de velocidad y en la distribución de presiones en la dirección normal al flujo, y con ello simplificar y mejorar su representación físico-matemática.

Finalmente, el hecho de contar con una mejor precisión en los cálculos de distribución de presiones y velocidades repercute en diversas aplicaciones prácticas en el ámbito de la ingeniería pues aumenta la exactitud para realizar aforos, ayuda a un mejor diseño de obras de infraestructura hidráulica como son cimacios, vertedores, deflectores, etcétera, así como la optimización en la generación de energía pues mejora el rendimiento de los equipos electromecánicos.



4. Hipótesis

Para un mejor entendimiento se partirá de las siguientes hipótesis que servirán de base para la formulación de la solución

- *El comportamiento del flujo en una curva vertical de un canal es diferente del rectilíneo, dado que la curvatura apreciable de las líneas de corriente modifica la distribución de la presión y velocidad en cada sección por el efecto que impone la fuerza centrífuga. (Sotelo & Valdez-Izaguirre, 2004).*
- *En un canal con curvatura la aceleración centrípeta produce cambios sobre el perfil de velocidades y la distribución de presiones (Dewals, 2006).*
- *En el marco de referencia el signo de la tangente de la plantilla indica si la curvatura del fondo es cóncavo o convexo. Según la condición pendiente cóncava la distribución de presiones es mayor a la hidrostática y en el caso mayor mientras que en el convexo es menor. (Chow, 2002).*
- Para tener una comprensión del fenómeno del flujo en un cauce con una curva vertical es recomendable establecer un modelo matemático en coordenadas naturales, que determine la influencia de la aceleración centrípeta en la velocidad y la distribución de presión, lo cual permite tener una mejor representación del comportamiento físico del flujo en un canal, al asumir la hipótesis simplificatoria de considerarlo como un flujo unidimensional a superficie libre. En este trabajo se considera que los efectos de la aceleración centrípeta se generan principalmente en la dirección radial o normal a la plantilla de un canal con curvatura.
- El sistema coordenado del modelo matemático en canal en curvatura es recomendable que sea semejante a la trayectoria del fondo del canal y a su vez representa el movimiento de la trayectoria media de las partículas del flujo, las velocidades medias y la presión. Entonces, el sistema de coordenadas naturales está definido por la trayectoria del fondo del canal, como una variable independiente continua y sobre esta se pueden establecer los vectores unitarios $s = (1,0,0)$, $n = (0,1,0)$ y $b = (0,0,1)$, que corresponden a los ejes de coordenadas (s , n , b), donde s es la tangente, n es un vector vertical, y $b = s \times n$ es un vector binormal. En este modelo se considera que flujo o campo de las partículas son paralelas a la coordenada s .
- Se considera que el flujo viaja solamente en la dirección tangencial a manera de simplificación tal como lo haría un bloque sólido.
- Para hacer la transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas naturales existen fórmulas que directamente hacen la conversión, pero, si se desconocen las ecuaciones que describen la función continua, no es factible realizar esta acción, por lo que es necesario desarrollar una técnica numérica que aproxime dicha conversión.

- En un flujo rápidamente variado el cambio en el tirante es tan rápido y brusco que las líneas de corriente poseen curvatura y divergencia apreciables, y no es posible determinar una distribución de la presión similar a la del flujo rectilíneo (Sotelo, 2002). Es por ello que el método de esta tesis solo trabaja en regiones donde existe continuidad en las variables hidráulicas.
- Si el perfil se desarrolla en régimen subcrítico se genera una gran curvatura al aproximarse al valor y_c para volverse vertical en el punto en que $y = y_c$ (perfiles M2, H2, A2). En ambos casos se presenta localmente un flujo rápidamente variado curvilíneo, que no puede tratarse con la teoría aquí presentada (Sotelo, 2002).
- Para la solución en estado permanente se parte bajo la siguiente premisa: Conociendo el tirante $d1$ es posible conocer el tirante $d2$ y el cálculo del perfil de flujo deberá ser hacia aguas abajo debido a la forma en que se transmiten físicamente las perturbaciones de flujo pues se encuentra en un régimen supercrítico (Martínez, 2015)

Es importante hacer una distinción de la diferencia entre los términos “centrífuga” y “centrípeta” presentes en este fenómeno para lo cual se harán las siguientes definiciones:

Fuerza centrífuga.- Es una pseudo fuerza o fuerza ficticia que aparece cuando se describe el movimiento de un cuerpo en un sistema de referencia en rotación dirigido hacia afuera desde el centro. Se dice ficticia porque esta reacción no actúa sobre el cuerpo en movimiento sino que es ejercida por él. (Resnick & Halliday, 2004).

Fuerza centrípeta.- Tensión responsable del movimiento circular uniforme dirigida hacia el centro. (Resnick & Halliday, 2004).

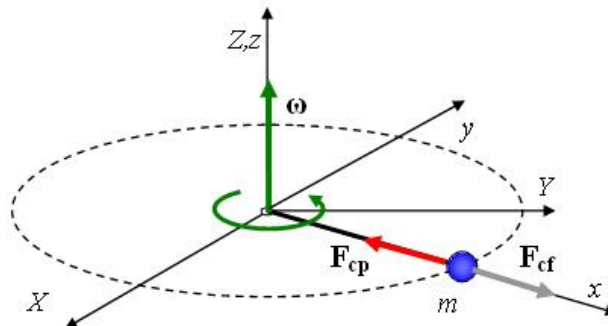


Fig. 2 Representación de fuerza centrífuga y centrípeta (Resnick & Halliday, 2004)

Aceleración centrípeta.- Variación de la posición de la velocidad tangencial (constante) con respecto del tiempo dirigida hacia el centro de curvatura. (Resnick & Halliday, 2004).

A manera de marco teórico se definirán los conceptos que intervienen en la geometría de curvas, así como la técnica de discretización del sistema de ecuaciones diferenciales y el análisis de estabilidad y consistencia del sistema discretizado.



4.1 Geometría diferencial de curvas

Las definiciones y fórmulas del presente subtema (4.1) son extraídas del libro "Geometría diferencial i relativitat", Ed. Universitat Autònoma de Barcelona, 1993 (Girbau, 1993).

En matemáticas, la geometría diferencial de curvas propone definiciones y métodos para analizar curvas simples en Variedades de Riemann, y en particular, en el Espacio Euclídeo

- Longitud de arco
- Vectores tangente, normal y binormal: Triedro de Frénet-Serret
- Curvatura
- Plano osculador
- Centro de curvatura
- Teorema fundamental de curvas

Dada una curva suficientemente suave, diferenciable y de clase $C^2 \in \mathbb{R}^3$ y se tiene un vector de posición $r(t)$ expresado mediante el parámetro t ; (Girbau, 1993)

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad t \in [a, b]$$

Por otra parte, se define el parámetro de arco s como:

$$s = \phi(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau$$

Donde $\phi(t)$ es una función potencial en las variables ortogonales x', y', z' y este modelo permite incluir una curva de seguimiento lagrangeano de una partícula, entonces:

$$\tilde{r}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))$$

donde

$$\tilde{x}(\phi(t)) = x(t), \quad \tilde{y}(\phi(t)) = y(t), \quad \tilde{z}(\phi(t)) = z(t)$$

4.1.1 Vectores tangente, normal y binormal: Triedro de Frénet-Serret

Definición. Coordenadas curvilíneas generalizadas

Dada una curva $r(t)$ según un parámetro cualquiera t se definen los vectores tangente, normal y binormal como:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = e_s$$



$$N(t) = \frac{[r'(t) \times r''(t)] \times r'(t)}{|[r'(t) \times r''(t)] \times r'(t)|} = e_n$$

$$B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|} = e_b$$

Estos tres vectores son unitarios y perpendiculares entre sí, juntos configuran un sistema de referencia móvil conocido como Triedro de Frénet-Serret a raíz del estudio de Jean Frenet y Joseph Serret. (Girbau, 1993)

Para una partícula física desplazándose en el espacio, el vector tangente es paralelo a la velocidad, mientras que el vector normal da el cambio dirección por unidad de tiempo de la velocidad o aceleración normal. (Girbau, 1993).

Si la curva está parametrizada según la longitud de arco, las fórmulas anteriores pueden simplificarse notablemente:

$$T(s) = \frac{d\hat{r}(s)}{ds} \quad N(s) = \frac{1}{\chi} \frac{dT(s)}{ds} \quad B(s) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{dN(s)}{ds} + \chi T \right)$$

Donde los parámetros χ y τ anteriores designan respectivamente a la curvatura y a la torsión. El plano formado por e_s y e_n se conoce como osculador. El vector unitario e_b está a lo largo de la dirección binormal y es perpendicular al plano osculador.

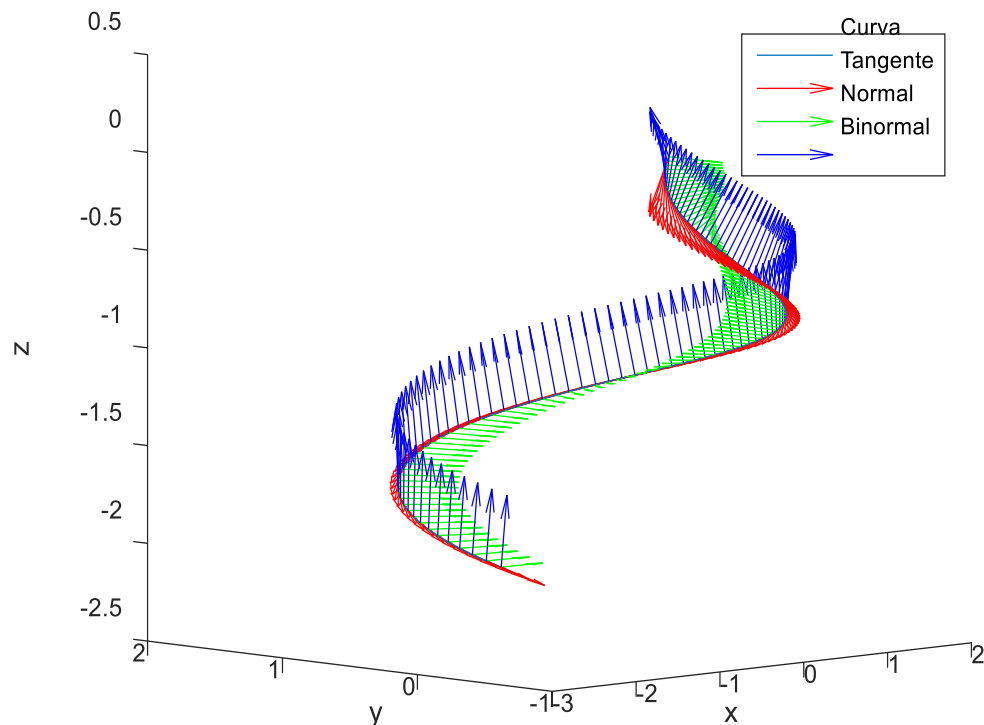


Fig. 3 Esquemización de las coordenadas naturales



4.1.2 Curvatura

La curvatura es una medida del cambio de dirección del vector tangente a una trayectoria, cuanto más rápido cambia éste a medida que se desplaza a lo largo de la curva, se dice que es más grande la curvatura. Para una curva parametrizada cualquiera la curvatura es igual a: (Girbau, 1993)

$$\chi(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

Si la curva está parametrizada por el parámetro de longitud de arco, la anterior ecuación se reduce simplemente a:

$$\chi(s) = |\tilde{r}''(s)|$$

Además de la curvatura se suele definir el llamado radio de curvatura, como el inverso de la curvatura.

4.1.3 Plano osculador

En cada punto de una curva, el plano osculador es el plano que contiene a su vector tangente y al vector normal a la curva. Para una partícula desplazándose en el espacio tridimensional, el plano osculador coincide con el plano que en cada instante contiene a la aceleración y la velocidad. La ecuación de este plano viene dada por: (Girbau, 1993)

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{bmatrix} = 0$$

Donde:

(x_0, y_0, z_0) el punto de la trayectoria.

(x'_0, y'_0, z'_0) el vector velocidad en el punto considerado.

(x''_0, y''_0, z''_0) las coordenadas de un punto genérico del plano osculador.

Si se tiene una partícula en la posición x_p , moviéndose con velocidad v y sometida a una aceleración $a \neq 0$ el plano osculador viene dado por el conjunto de puntos: (Girbau, 1993)

$$(v \times a) \cdot (x \times x_p) = 0$$

Obviamente si la partícula tiene un movimiento rectilíneo el plano osculador no está definido.

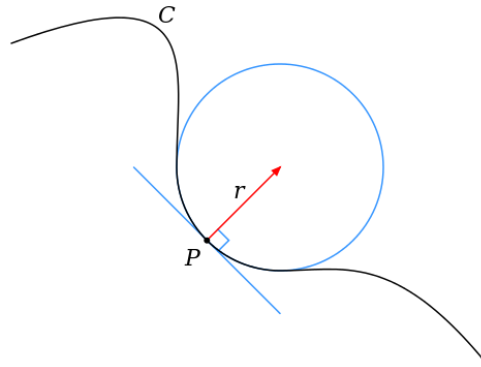


Fig. 4 Ilustración de la circunferencia oscultriz en el punto P de la curva C. (Girbau, 1993)

4.1.4 Centro de curvatura

Se define como el centro del círculo que aproxima el entorno de un punto en una curva. El radio de dicho círculo también llamado osculador coincide con el radio de curvatura (inverso de la curvatura). Y se calcula de la siguiente manera: (Girbau, 1993)

$$r_c(t) = r(t) - \frac{|r'(t)|^2 (r'(t) \cdot r''(t))}{|r'(t) \times r''(t)|^2} r'(t) + \frac{|r'(t)|^4}{|r'(t) \times r''(t)|^2} r''(t)$$

O más sencillamente en función del parámetro de arco como:

$$\tilde{r}'_c(s) = \tilde{r}(s) + \frac{\tilde{r}''(s)}{|\tilde{r}''(s)|^2}$$

4.1.5 Teorema fundamental de curvas

El teorema fundamental de curvas que se enuncia a continuación dice que, conocido un punto de una curva y su vector tangente, la curva queda totalmente especificada si se conoce la función de curvatura y de torsión. Su enunciado es el siguiente:

Sea $J \in \mathbb{R}$ $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Dadas dos funciones continuas χ y τ de J a \mathbb{R} y dado un sistema de referencia fijo (ortonormal) de \mathbb{R}^3 $\{x_0; e_1, e_2, e_3\}$, entonces existe una única curva parametrizada de \mathbb{R}^3 $x: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ y tales que: (Girbau, 1993)

La curva pasa por x_0 , y el vector tangente T a la curva en ese punto coincide con e_1 .

A lo largo de la curva pueden definirse tres campos vectoriales $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ llamados respectivamente vector tangente, normal y binormal, perpendiculares entre sí y tales que en el punto inicial coinciden con e_1, e_2, e_3 (es decir, $T(0) = e_1, N(0) = e_2, B(0) = e_3$).



Se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(s)}{ds} = T(s) \\ \frac{dN(s)}{ds} = -\chi(s)T(s) + \tau(s)B(s) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT(s)}{ds} = \chi(s)N(s) \\ \frac{dB(s)}{ds} = -\tau(s)N(s) \end{array} \right.$$

O bien, escrito matricialmente

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi & 0 \\ -\chi & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

donde el punto es la derivada con respecto al arcoparámetro s .

Esto tiene implicaciones físicas interesantes, por ejemplo, la trayectoria de una partícula queda especificada si se conocen la posición inicial, la velocidad inicial y la variación en el tiempo de las derivadas segundas (que están relacionadas con la curvatura y la torsión). Es por eso por lo que las leyes de Newton o las ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan en términos de derivadas de segundo orden que es necesario complementar con la posición y velocidades iniciales. (Girbau, 1993)

4.2 Discretización del sistema de ecuaciones diferenciales

En este capítulo se transformarán las ecuaciones 250 y 266 del capítulo 9 por otras similares en un formato algebraico, con el auxilio de un esquema de caja de Preissman, que se explicará más adelante.

Primeramente, se partirá por escribir las ecuaciones obtenidas realizando las derivaciones correspondientes.

Ecuación conservación de masa (250)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial A}{\partial s} = ql(s, t)$$

Ecuación cantidad de movimiento (266)

$$\begin{aligned} (Cr \pm C_M) A \frac{\partial}{\partial s} u^2 + (Cr \pm C_M) u^2 \frac{\partial}{\partial s} A + A u^2 \frac{\partial}{\partial s} (Cr \pm C_M) + A \frac{\partial}{\partial t} (u) + u \frac{\partial}{\partial t} (A) \\ + g \bar{\zeta} A \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} A = gA (s_0 - s_f) \end{aligned}$$

Derivando los términos no lineales con la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned} (Cr \pm C_M) 2Au \frac{\partial}{\partial s} u + (Cr \pm C_M) u^2 \frac{\partial}{\partial s} A + A u^2 \frac{\partial}{\partial s} (Cr \pm C_M) + A \frac{\partial}{\partial t} (u) + u \frac{\partial}{\partial t} (A) \\ + g \bar{\zeta} A \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} A = gA (s_0 - s_f) \end{aligned}$$

1



Dividiendo la ecuación 1 entre u:

$$(Cr \pm C_M) 2A \frac{\partial}{\partial s} u + (Cr \pm C_M) u \frac{\partial}{\partial s} A + A u \frac{\partial}{\partial s} (Cr \pm C_M) + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} (u) + \frac{\partial}{\partial t} (A) + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{g \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} A = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) \quad 2$$

Se denotará el término $Cr \pm C_M = C$ para quedar de la siguiente forma:

$$C 2A \frac{\partial}{\partial s} u + C u \frac{\partial}{\partial s} A + A u \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{g \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} A = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) \quad 3$$

Se desarrollará el primer término de la ecuación 3 para poder aplicar las propiedades de las integrales

$$C A \frac{\partial}{\partial s} u + C A \frac{\partial}{\partial s} u + C u \frac{\partial}{\partial s} A + A u \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{g \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} A = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) \quad 4$$

Como $Q = Au$ y por la definición de diferencial de un producto se puede reagrupar de esta manera:

$$C A \frac{\partial}{\partial s} u + C \frac{\partial}{\partial s} Q + A u \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{g \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} A = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) \quad 5$$

Se sabe que $A \frac{\partial}{\partial s} u = \frac{\partial}{\partial s} Q - u \frac{\partial}{\partial s} A$, entonces al sustituir se obtiene:

$$C \left(\frac{\partial}{\partial s} Q - u \frac{\partial}{\partial s} A \right) + C \frac{\partial}{\partial s} Q + A u \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{gA \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) \quad 6$$

Por la conservación de masa se cumple: $\frac{\partial}{\partial t} A = ql - \frac{\partial}{\partial s} Q$, al sustituir en (6) resulta:

$$C \left(\frac{\partial}{\partial s} Q - u \frac{\partial}{\partial s} A \right) + C \left(u \frac{\partial}{\partial s} A + A \frac{\partial}{\partial s} u \right) + A u \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + ql - \frac{\partial}{\partial s} Q + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{gA \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) \quad 7$$

Desarrollando el primer término y despejando el término de adición o sustracción de gasto ql queda:

$$C \frac{\partial}{\partial s} Q - Cu \frac{\partial}{\partial s} A + C \left(u \frac{\partial}{\partial s} A + A \frac{\partial}{\partial s} u \right) + A u \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial}{\partial s} Q + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{gA \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) - ql \quad (162) \quad 8$$



Factorizando el término $\frac{\partial}{\partial s} Q$, desarrollando el resto de la ecuación 8:

$$(C - 1) \frac{\partial}{\partial s} Q - Cu \frac{\partial}{\partial s} A + Cu \frac{\partial}{\partial s} A + CA \frac{\partial}{\partial s} u + Au \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{gA \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) - ql \quad 9$$

Reduciendo términos en 9:

$$(C - 1) \frac{\partial}{\partial s} Q + CA \frac{\partial}{\partial s} u + Au \frac{\partial}{\partial s} C + \frac{A}{u} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{g \bar{\zeta} A}{u} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \frac{gA \text{sen } \alpha_s}{u} \frac{\partial d}{\partial s} = \frac{gA}{u} (s_0 - s_f) - ql \quad 10$$

Multiplicando la (10) por u/A resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + Cu \frac{\partial}{\partial s} u + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} + (C - 1) \frac{u}{A} \frac{\partial}{\partial s} Q + u^2 \frac{\partial}{\partial s} C + g \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s = g (s_0 - s_f) - \frac{u}{A} ql \quad 11$$

Al sacar la diferencial de Q y multiplicarlo por u/A se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + Cu \frac{\partial}{\partial s} u + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} + (C - 1) \left(u \frac{\partial}{\partial s} u + \frac{u^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} A \right) + u^2 \frac{\partial}{\partial s} C + g \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s = g (s_0 - s_f) - \frac{u}{A} ql \quad 12$$

Desarrollando el producto $(C - 1) \left(u \frac{\partial}{\partial s} u + \frac{u^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} A \right)$ de la ecuación 12:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + Cu \frac{\partial}{\partial s} u + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} + Cu \frac{\partial}{\partial s} u + \frac{Cu^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} A - u \frac{\partial}{\partial s} u - \frac{u^2}{A} \frac{\partial}{\partial s} A + u^2 \frac{\partial}{\partial s} C + g \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s = g (s_0 - s_f) - \frac{u}{A} ql \quad 13$$

Factorizando los términos $u \frac{\partial u}{\partial s}$ y $\frac{u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial s}$ de la expresión 13:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (2C - 1)u \frac{\partial u}{\partial s} + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} + (C - 1) \frac{u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial s} + u^2 \frac{\partial C}{\partial s} + g \bar{\zeta} \frac{\partial \text{sen } \alpha_s}{\partial s} = g (s_0 - s_f) - \frac{u}{A} ql \quad 14$$

Al desarrollar la derivada $\frac{\partial \text{sen } \alpha_s}{\partial s}$ en la ecuación 14 queda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (2C - 1)u \frac{\partial u}{\partial s} + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} + (C - 1) \frac{u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial s} + u^2 \frac{\partial C}{\partial s} + g \bar{\zeta} \cos \alpha_s \frac{\partial \alpha_s}{\partial s} = g (s_0 - s_f) - \frac{u}{A} ql \quad 15$$



Por definición de las coordenadas naturales se sabe que: $\frac{\partial \alpha_s}{\partial s} = \frac{1}{r_0}$, $\cos \alpha_s = \sqrt{1 - e_{sx}^2}$ además por identidades trigonométricas: $\sin \alpha_s = e_{sx}$ y en un flujo a superficie libre $\frac{\partial d}{\partial s} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial s}$, por lo que al sustituir queda la ecuación de cantidad de movimiento en términos de curvatura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (2C - 1)u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{ge_{sx}}{B} \frac{\partial A}{\partial s} + (C - 1) \frac{u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial s} + u^2 \frac{\partial C}{\partial s} + \frac{g \zeta \sqrt{1 - e_{sx}^2}}{r_1} \\ = g (s_0 - s_f) - \frac{u}{A} ql \end{aligned} \quad 16$$

Si en la ecuación anterior $C=1$, conduce a que $e_{sx} = \cos \theta$, $\partial C / \partial s = 0$, $r_1 \rightarrow \infty$ y la ecuación 16 se reduce a la clásica ecuación de cantidad de movimiento de Saint-Venant (García, Hidráulica de canales Principios básicos. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua., 2016.)

Para discretizar un sistema continuo en un esquema de Preissmann, se considera una función continua $\tilde{F}: \Omega \rightarrow R^2$, donde $\Omega(x, t)$ es el espacio de solución y R es el conjunto de los números reales. A su vez se tiene una variable discreta F_j^n que se aproxima a $\tilde{F}(x, t)$ en un punto (x_j, t_n) del espacio Ω . Además, el espacio de solución $\Omega(x, t)$ es cubierto con una malla uniforme de espaciado Δx para cualquier intervalo Δt donde $\Delta x = \frac{L}{J}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$ y J, N son números enteros e indican la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de forma que $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, n\Delta t)$ (Aguilar, Lectura No. 6 Flujo no permanente en cauces y canales., 2016)

Quedando las siguientes derivadas temporales y espaciales:

Derivada temporal

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (F_j^{n+1} - F_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (F_{j+1}^{n+1} - F_{j+1}^n) \quad 17$$

Derivada espacial

$$\frac{\partial f}{\partial s} \approx \frac{(1 - \theta)}{\Delta s} (F_{j+1}^n - F_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1}) \quad 18$$

Términos adicionales

$$f(s, t) \approx \theta [\Psi f_{j+1}^{n+1} + (1 - \Psi) f_j^{n+1}] + (1 - \theta) [\Psi f_{j+1}^n + (1 - \Psi) f_j^n] \quad 19$$

Variables invariantes en el tiempo

$$f(s) \approx \frac{1}{2} [F_j + F_{j+1}] = \delta F_j \quad 20$$

Donde Ψ es el factor de peso espacial y θ es el factor de peso temporal y ambos factores varían su valor desde 0 a 1.

Siendo u, y, S_f y S_0 lo siguiente:



$$u = \delta u_j^n, A = \delta A_j^n, S_f = \delta S_{f_j}^n, S_0 = \delta S_{b_j}^n, \bar{\zeta} = \delta \bar{\zeta}_j^n$$

Entonces para construir el esquema en diferencias según el esquema de Preissmann de las ecuaciones conservativas (250) y (16) se sustituyen los operadores de discretización (17)-(19).

Recordando:

Ecuación de conservación de masa (Ecuación 250)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial s} + A \frac{\partial u}{\partial s} - ql(s, t) = 0$$

Ecuación de conservación de masa discretizada

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (A_j^{n+1} - A_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n) \\ & + \delta u_j^n \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}) \right) \\ & + \delta A_j^n \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right) - ql = 0 \end{aligned} \quad 21$$

Ecuación de cantidad de movimiento (16)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + (2C-1)u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{g e_{sx}}{B} \frac{\partial A}{\partial s} + (C-1) \frac{u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial s} + u^2 \frac{\partial C}{\partial s} + \frac{g \bar{\zeta} \sqrt{1-e_{sx}^2}}{r_1} - g(s_0 - s_f) + \frac{u}{A} ql \\ & = 0 \end{aligned}$$

Ecuación de cantidad de movimiento discretizada

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \\ & + (2C-1) \delta u_j^n \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right) \\ & + \frac{g e_{sx}}{B} \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}) \right) \\ & + (C-1) \frac{\delta u_j^{n2}}{\delta A_j^n} \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}) \right) \\ & + \delta u_j^{n2} \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (C_{j+1}^n - C_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (C_{j+1}^{n+1} - C_j^{n+1}) \right) + \frac{g \sqrt{1-e_{sx}^2}}{r_1} \delta \bar{\zeta}_j^n \\ & - g (\delta S_{b_j}^n - \delta S_{f_j}^n) + \frac{\delta u_j^n}{\delta A_j^n} ql = 0 \end{aligned} \quad 22$$

Se hará un cambio de variable $s = x$ para hacer una representación tradicional del esquema de Preissmann.

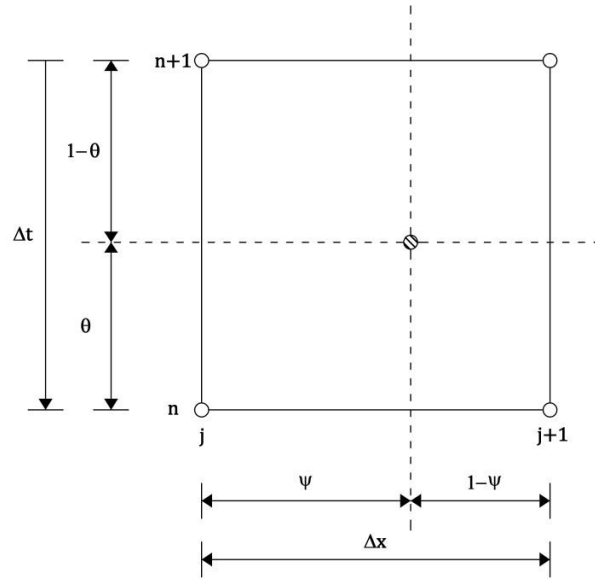


Fig. 5. Representación de un esquema de Caja o de Preissmann (Aguilar, 2016)

4.2.1 Análisis de consistencia numérica

Una vez que se tiene el sistema discreto (21) y (22), y para proceder al estudio de la determinación de la consistencia numérica, se debe tomar en cuenta que las variables discretas dependientes U_j^n , Y_j^n tienen valores sólo en la posición $P(x_j, t_n)$. Entonces se hace necesario proponer una función polinomial que pase por para cada punto de discretización del espacio, de manera que $U(x_j, t_n) = U_j^n$, $Y(x_j, t_n) = Y_j^n$ y estas funciones polinomiales U e Y tienen la propiedad de cumplir con requisitos suficientes de continuidad, de forma que permitan aplicar una expansión en serie de Taylor de grado n.

Una vez definidos los requisitos de continuidad para las funciones polinomiales Y y U, se propone realizar la aplicación de un expansión en serie de Taylor para cada uno de los cuatro puntos $F(x_j, t_{n+1})$, $F(x_{j+1}, t_{n+1})$, $F(x_j, t_n)$ y $F(x_{j+1}, t_n)$ en los que tiene influencia el esquema de Preissmann (Figura 5)

Entonces, la expansión de la esquina superior izquierda es:

$$\begin{aligned}
 f_j^{n+1} &= f[x - \Psi\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t] \\
 &= f(x, t) - \Psi\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - \theta)\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \frac{\Psi^2 \Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \\
 &\quad + \frac{(1 - \theta)^2 \Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi\Delta x (1 - \theta)\Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Esquina superior derecha:

24



$$\begin{aligned}
 f_{j+1}^{n+1} &= f[x + (1 - \Psi)\Delta x, t + (1 - \Theta)\Delta t] \\
 &= f(x, t) + (1 - \Psi)\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} + (1 - \Theta)\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j, t_n} \\
 &\quad + \frac{(1 - \Psi)^2 \Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_j, t_n} + \frac{(1 - \Theta)^2 \Delta t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j, t_n} \\
 &\quad + (1 - \Psi)\Delta x(1 - \Theta)\Delta t \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned}$$

Esquina inferior derecha:

$$\begin{aligned}
 f_{j+1}^n &= f[x + (1 - \Psi)\Delta x, t - \Theta\Delta t] \\
 &= f(x, t) + (1 - \Psi)\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} - \Theta\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j, t_n} + \frac{(1 - \Psi)^2 \Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_j, t_n} \\
 &\quad + \frac{\Theta^2 \Delta t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j, t_n} - (1 - \Psi)\Delta x\Theta\Delta t \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Esquina inferior izquierda:

$$\begin{aligned}
 f_j^n &= f[x - \Psi\Delta x, t - \Theta\Delta t] \\
 &= f(x, t) - \Psi\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} - \Theta\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j, t_n} + \frac{\Psi^2 \Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_j, t_n} \\
 &\quad + \frac{\Theta^2 \Delta t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j, t_n} + \Psi\Delta x\Theta\Delta t \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{26}$$

La demostración completa se presenta en el anexo 9.2, en este capítulo solo se resumen los resultados.

Por lo tanto, se puede evaluar el grado de aproximación, el cual varía dependiendo de los valores que puedan tomar los factores de peso espacial y temporal. Entonces, si se tiene que los valores de los factores de peso están centrados en la célula de aproximación de Preissmann, de manera que $\Psi = \theta = 1/2$, entonces se determina que el orden de aproximación de (27) y (28) es:

$$l(y, u; x, t) = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x_j, t_n} + u \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} \right) + y \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} \right) + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \tag{27}$$

$$m(y, u; x, t) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_j, t_n} + u \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} \right) + g \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} \right) + g(S_f - S_b) + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \tag{28}$$

Por otra parte, en el caso de tener un valor de $\Psi \neq 1/2$, $\theta \neq 1/2$, y manteniendo el rango de variación $\Psi \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 1]$, entonces el orden de consistencia de (29) y (30) es:

$$l(y, u; x, t) = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x_j, t_n} + u \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} \right) + y \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_j, t_n} \right) + O(\Delta x, \Delta t) \tag{29}$$



$$m(y, u; x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} \right) + g \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} \right) + g(S_f - S_b) + O(\Delta x, \Delta t) \quad 30$$

Finalmente, el grado de consistencia numérica del esquema de Preissmann se enuncia mediante el siguiente teorema:

Teorema. La aplicación del esquema de Preissmann (17)-(19) en el sistema de ecuaciones de Saint-Venant (250), (16) es consistente numéricamente bajo cualquier norma, cuando se tiene un refinamiento de la malla de forma que $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

Demostración: Se toman los sistemas de ecuaciones (250), (16) y (27), (28) y se refina la malla, de forma que se llega a la siguiente aproximación bajo cualquier norma:

$$||L(y, u; x, t) - l(y, u; x, t)|| \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad 31$$

$$||M(y, u; x, t) - m(y, u; x, t)|| \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad 32$$

4.2.2 Análisis de estabilidad

Retomando la propuesta de discretización de Preissmann en el sistema de ecuaciones localizadas (271) y (272), al substituir los operadores de derivada temporal, espacial y de términos independientes, ecuaciones (17)-(19), se genera un sistema de ecuaciones discretas en diferencias finitas lineal de coeficientes constantes como se muestra a continuación:

Ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (y_j^{n+1} - y_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (y_{j+1}^{n+1} - y_{j+1}^n) \\ & + u_0 \left(\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (y_{j+1}^n - y_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}) \right) \\ & + y_0 \left(\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (y_{j+1}^n - y_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}) \right) = 0 \end{aligned} \quad 33$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \\ & + u_0 \left(\frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right) \\ & + g \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (y_{j+1}^n - y_j^n) + g \frac{\theta}{\Delta x} (y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}) + \frac{F_1}{2} (y_j^n + y_{j+1}^n) \\ & + \frac{F_2}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n) = 0 \end{aligned} \quad 34$$



Dado que el sistema escalado de diferencias (33) y (34) es lineal de coeficientes constantes, entonces este sistema se puede solucionar aplicando una expansión en serie discreta de Fourier, por lo que las componentes discretas de Fourier para las variables de perturbación se definen a continuación (Aguilar, 2016):

$$y_j^u = y(j\Delta x, n\Delta t, m) = \hat{y}_m \rho_m^n e^{ikj\Delta x} \quad 35$$

$$u_j^u = u(j\Delta x, n\Delta t, m) = \hat{u}_m \rho_m^n e^{ikj\Delta x} \quad 36$$

Donde

y_j^u y u_j^u representan las amplitudes para el m-ésimo nodo de Fourier

ρ_m^n , factor de amplitud modificado asociado con el m-ésimo nodo

$$i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$$

k , número de onda adimensional

Sustituyendo las componentes de Fourier (35) y (36), para un modo arbitrario de Fourier, en el sistema de ecuaciones discretas (33) y (34) se tiene

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} & \left(\left(\hat{y} \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (\rho - 1) + \hat{y} \frac{\Psi}{\Delta t} e^{ikj\Delta x} (\rho - 1) \right) \right. \\ & \left. + \left(u_0 \hat{y} \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ikj\Delta x} - 1) \right] \right) \right. \\ & \left. + \left(y_0 \hat{u} \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ikj\Delta x} - 1) \right] \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad 37$$

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} & \left(\hat{u} \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (\rho - 1) + \hat{u} \frac{\Psi}{\Delta t} e^{ikj\Delta x} (\rho - 1) \right. \\ & \left. + u_0 \hat{y} \left[\frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ikj\Delta x} - 1) \right] \right. \\ & \left. + g \hat{y} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - 1) + g \hat{y} \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ikj\Delta x} - 1) + \hat{y} \frac{F_1}{2} (1 + e^{ikj\Delta x}) \right. \\ & \left. + \hat{u} \frac{F_2}{2} (1 + e^{ikj\Delta x}) \right) = 0 \end{aligned} \quad 38$$

Considerando una forma alternativa de representar los términos exponenciales tal que:

$$e^{ikj\Delta x} + 1 = 2e^{ik\Delta x/2} \cos(k\Delta x/2) \quad 39$$

$$e^{ikj\Delta x} - 1 = 2e^{\frac{ik\Delta x}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \quad 40$$

Sea $c \equiv \cos(k\Delta x/2)$, $s \equiv \operatorname{sen}(k\Delta x/2)$ y $\lambda = \Delta t/\Delta x$, y ordenando en forma matricial queda:



$$e^{ik_j \Delta x} \begin{bmatrix} (\rho - 1)[c + (2\Psi - 1)is] + 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) & 2i\lambda s y_0(1 - \theta + \theta\rho) \\ 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) + F_1 c \Delta t & (\rho - 1)[c + (2\Psi - 1)is] + 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) + F_2 c \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 41$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} (\rho - 1)[c + (2\Psi - 1)is] + 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) & 2i\lambda s y_0(1 - \theta + \theta\rho) \\ 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) + F_1 c \Delta t & (\rho - 1)[c + (2\Psi - 1)is] + 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) + F_2 c \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 42$$

Tomando la solución no trivial

Al desarrollar el determinante del sistema de ecuaciones 42 nos queda:

$$((\rho - 1)[c + (2\Psi - 1)is] + 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho))((\rho - 1)[c + (2\Psi - 1)is] + 2i\lambda s u_0(1 - \theta + \theta\rho) + F_2 c \Delta t) - (2i\lambda s y_0(1 - \theta + \theta\rho) + F_1 c \Delta t)(2i\lambda s y_0(1 - \theta + \theta\rho)) = 0$$

Cambiando variables:

$$c + (2\Psi - 1)is + \theta 2i\lambda s u_0 = k1$$

$$-c - (2\Psi - 1)is + 2i\lambda s u_0 - \theta 2i\lambda s u_0 = k2$$

$$\theta 2i\lambda s y_0 = k3$$

$$2i\lambda s y_0 - \theta 2i\lambda s y_0 = k4$$

$$\theta 2i\lambda s g = k5$$

$$2i\lambda s g - \theta 2i\lambda s g + F_1 c \Delta t = k6$$

$$F_2 c \Delta t = k7$$

$$\begin{bmatrix} \rho k1 + k2 & \rho k3 + k4 \\ \rho k5 + k6 & \rho k1 + k2 + k7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 43$$

$$(\rho k1 + k2)(\rho k1 + k2 + k7) - (\rho k3 + k4)(\rho k5 + k6) = 0$$

$$\begin{aligned} &(\rho k1 + k2)^2 + (\rho k1 + k2)k7 - (\rho^2 k3 k5 + \rho k3 k6 + \rho k4 k5 + k4 k6) \\ &= \rho^2 k1^2 + 2\rho k1 k2 + k2^2 + \rho k1 k7 + k2 k7 - \rho^2 k3 k5 - \rho k3 k6 - \rho k4 k5 \\ &\quad - k4 k6 \\ &= \rho^2 (k1^2 - k3 k5) + \rho (2k1 k2 + k1 k7 - k3 k6 - k4 k5) + k2^2 + k2 k7 - k4 k6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$k1^2 - k3 k5 = A$$

$$2k1 k2 + k1 k7 - k3 k6 - k4 k5 = B$$

$$k2^2 + k2 k7 - k4 k6 = C$$

$$\rho^2 A + \rho B + C = 0 \quad 44$$



Resolviendo

$$|\rho| \leq \left| \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right|$$

45

Sustituyendo las variables anteriores:

$$A = (\eta^2 - \theta^2 \beta^2 g y_0)$$

$$B = (\eta \gamma + \eta F_2 c \Delta t + \eta \gamma - g \delta \theta \beta y_0 - \theta \beta y_0 F_1 c \Delta t - \theta \beta g y_0 \delta)$$

$$C = -y_0 g \delta^2 - y_0 \delta F_1 c \Delta t + \gamma^2 + \gamma F_2 c \Delta t$$

Recordando que:

$$\frac{dR}{dH} = \frac{P(y) * (2 * k * y + b) - A(y) * 2 * \text{sqrt}(k^2 + 1)}{P(y)^2}$$

$$F_1 = -\frac{4}{3} n^2 \frac{|u_0| u_0}{R_0^{\frac{7}{3}}} \frac{dR}{dH} \Big|_0$$

$$F_2 = 2 n^2 \frac{|u_0|}{R_0^{\frac{4}{3}}}$$

$$s = \sin\left(\frac{k \Delta x}{2}\right); c = \cos\left(\frac{k \Delta x}{2}\right)$$

$$\lambda = dt/dx$$

$$\alpha = [c + (2\Psi - 1)is]$$

$$\beta = 2i\lambda s$$

$$\delta = \beta(1 - \theta)$$

$$\gamma = u_0 \delta - \alpha$$

$$\eta = \alpha + \theta \beta u_0$$

De esta forma obtenemos la estabilidad de ρ y se debe de cumplir con los siguientes límites:

$$\theta \geq 0.5 \text{ y } \Psi = 0.5$$



DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y VELOCIDADES EN CANALES CON CURVATURA. FLUJO UNIDIMENSIONAL EN COORDENADAS NATURALES.

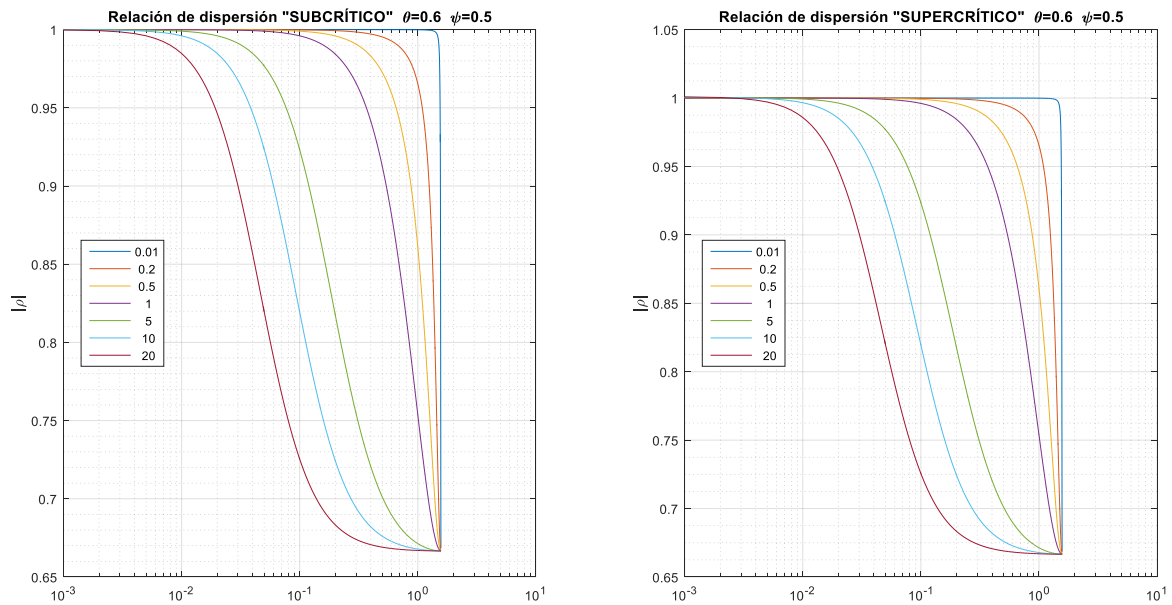


Fig. 6. Retratos de fase para diversos números de Courant (Estable)

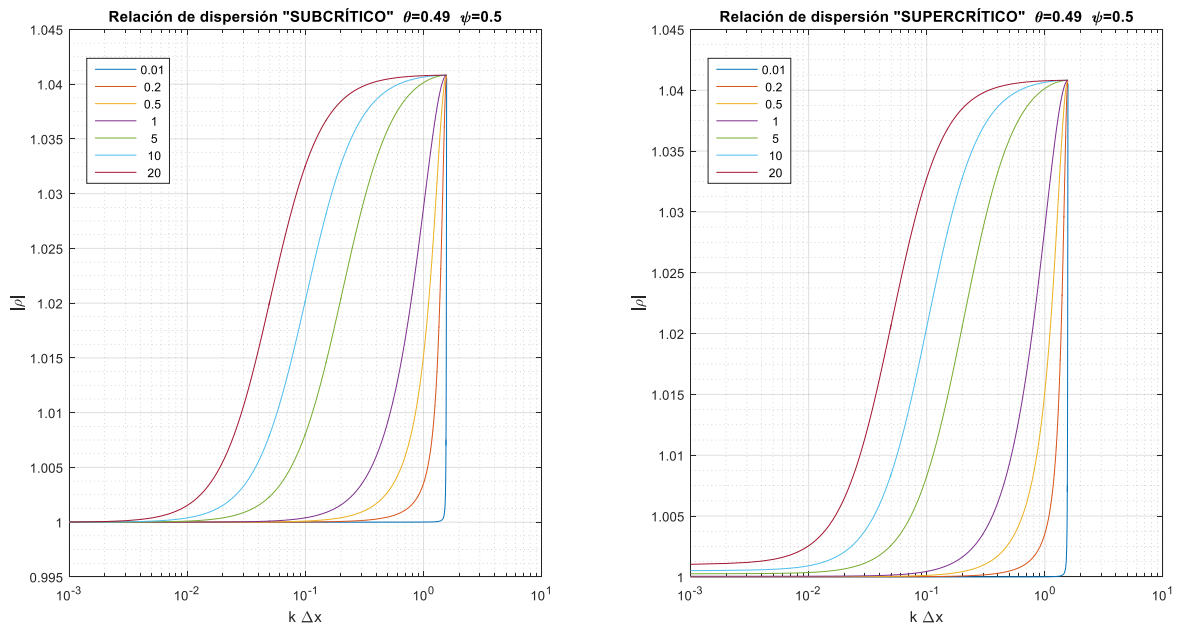


Fig. 7. Retratos de fase para diversos números de Courant (Inestable)

Se puede observar que los resultados son convergentes si $\theta \geq 0.5$ y $\Psi = 0.5$



5 Metodología

Mediante la transformación de coordenadas cartesianas a naturales a partir de puntos discretos se procede a analizar las características hidráulicas del conducto como es el gasto y el área transversal de la sección, con estos elementos será necesario proponer un modelo que determine el perfil en estado permanente en función de las características geométricas, las coordenadas naturales y el gasto. Para posteriormente analizar el comportamiento del perfil mediante un modelo transitorio que contemple la variación del gasto en el tiempo.

A continuación, se explicará en forma detallada la manera en que se procedió para solucionar el comportamiento del flujo en conductos curvilíneos.

5.1 Obtención de las coordenadas naturales.

Como parte de las acciones a realizar se obtendrán las coordenadas naturales (vectores tangente, normal y binormal) para lo cual se determinará el radio de curvatura y el eje principal (s) para trabajar en una sola dimensión a partir de puntos discretos en coordenadas rectangulares.

A continuación, se explicará el procedimiento a emplear.

Como datos iniciales se tienen las coordenadas rectangulares de los puntos discretos de una trayectoria cualquiera en tres dimensiones (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) , (x_n, y_n, z_n) .

Una vez capturados todos los puntos de la trayectoria, se procede mediante un código de programación Matlab a hacer los cálculos para que devuelva radios de curvatura, centros de curvatura y longitud de arco (coordenada s) desde un punto de vista lagrangiano. Valores que servirán para la conversión a coordenadas naturales.

A grandes rasgos el código elabora un cálculo basado en una técnica de parametrización de variables de la forma $x_1=t$, $x_2=f_1(t)$, $x_3=f_2(t)$ donde x_1 es el eje principal del flujo.

La parametrización se basa en la hipótesis de que la posición es una función del tiempo, y por consiguiente cada una de sus coordenadas es una función de posición, es decir, cada punto corresponde a un instante dado (Romero, 2011).

Una parametrización de una curva C es una función vectorial con la propiedad que al variar el parámetro t v I —su imagen $c(t)$ va describiendo los puntos de C (Calvo, 2006)

Para desarrollar esta técnica se planteó que al paso de una partícula por una trayectoria sea secuencial y que los puntos colocados describan la estela en función del tiempo.



Si la triada de puntos en un instante cualquiera está parametrizado a la variable t de la forma descrita con anterioridad se podrá entonces describir una trayectoria tridimensional de cualquier tipo

Se pueden enlazar varias curvas, pero se debe tener cuidado en el diseño pues puede existir casos de discontinuidad matemática por ejemplo que un mismo punto posea dos diferentes radios de curvatura o dos pendientes distintas lo que podría provocar discontinuidad de variables hidráulica.

Inicialmente se planteó que al paso por una trayectoria en tres dimensiones de una partícula, esta describiera dos proyecciones diferentes en los planos (x_2, x_3) y (x_1, x_3) , el código toma dos puntos consecutivos de cada proyección e interpola en forma de "spline" entre ellos para generar 3 puntos adicionales intermedios entre cada valor discreto. Entre cada valor discreto y las interpolaciones se crea funciones cúbicas con polinomios de clase C^2 garantizándose la continuidad en la 1ra y 2da derivada. Cada curva se generará un trazador o adaptador cúbico en cada proyección (x_1x_2) y (x_1x_3) . En este momento se habrán generado curvas o funciones que son diferenciables y de acuerdo a los criterios de parametrización que pueden aplicarse las fórmulas matemáticas vistas en la sección 4.1 para obtener radios de curvatura, centros de curvatura y longitud de arco (coordenada s). Debido a que en el proceso de programación se generan operaciones simbólicas repercute en la eficiencia programática. Es por ello que se buscó emplear herramientas más eficientes del propio software que realizara de una forma más veloz el cálculo de los elementos de las coordenadas naturales.

Para mejorar la eficiencia del tiempo de cálculo esencialmente se modificó una función programada (Claxton, 2006) llamada Frenet para elaborar un código que hace lo siguiente:

- Se colocan los puntos discretos (x, y, z) que se desea encontrar sus coordenadas naturales
- Se llama a la función Frenet para que realice la subrutina.
- Esta función regresa los tres vectores: tangencial, normal y binormal con sus componentes rectangulares mediante cosenos directores, así como la curvatura, el radio de curvatura, el signo de la curva para saber si es cóncava o convexa y la longitud de arco.
- En los extremos de la curva presenta problemas de aproximación los que son resueltos mediante interpolaciones lineales entre sus nodos finales e iniciales.
- Si la trayectoria está compuesta por varias curvas el código hace un enlace con los elementos de cada curva.
- Posteriormente agrupará toda la información dentro de una matriz Global donde posteriormente se extraerá la información para hacer el cálculo en estado permanente.
- Finalmente mostrará la graficación de la trayectoria vista desde las coordenadas naturales y de esta forma visualizar si la ruta está bien trazada.

Cabe hacer mención que para hacer un enlace adecuado en el caso de presentarse dos curvas hay que hacer una rotación de los ejes principales de las curvas para que éstas tengan un mismo valor de tangencia en el punto de intersección con respecto del eje principal. Esto se consigue mediante el uso de *la matriz de rotación* (Taylor & Kriegman, 1994). Si se tiene un eje arbitrario definido por el vector unitario $u = (u_x, u_y, u_z)$, donde $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$, la matriz de rotación de un ángulo θ sobre el eje definido por el vector u viene dada por:



$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta + ux^2(1 - \cos \theta) & uxuy(1 - \cos \theta) - uz \sin \theta & uxuz(1 - \cos \theta) + uy \sin \theta \\ uxuy(1 - \cos \theta) + uz \sin \theta & \cos \theta + uy^2(1 - \cos \theta) & uyuz(1 - \cos \theta) - ux \sin \theta \\ uxuz(1 - \cos \theta) - uy \sin \theta & uyuz(1 - \cos \theta) + ux \sin \theta & \cos \theta + uz^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix}$$

46

Ejemplo:

Si se tiene parametrizada la siguiente curva en tres dimensiones $c(t) = [t, \sin t, \cos t]$ y se pretende rotar primero 90° alrededor del eje x y 90° alrededor del eje y después, se procede de la siguiente forma:

Rotando alrededor del eje x:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + ux^2(1 - \cos \theta) & uxuy(1 - \cos \theta) - uz \sin \theta & uxuz(1 - \cos \theta) + uy \sin \theta \\ uxuy(1 - \cos \theta) + uz \sin \theta & \cos \theta + uy^2(1 - \cos \theta) & uyuz(1 - \cos \theta) - ux \sin \theta \\ uxuz(1 - \cos \theta) - uy \sin \theta & uyuz(1 - \cos \theta) + ux \sin \theta & \cos \theta + uz^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \Big|_{\theta = 90^\circ, ux = 1, uy = 0, uz = 0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 1(1 - 0) & 0(1 - 0) - 0 & 0(1 - 0) + 0 \\ 0(1 - 0) + 0 & 0 + 0(1 - 0) & 0(1 - 0) - 1 \\ 0(1 - 0) - 0 & 0(1 - 0) + 1 & 0 + 0(1 - 0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Rotando el resultado anterior alrededor del eje y:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + ux^2(1 - \cos \theta) & uxuy(1 - \cos \theta) - uz \sin \theta & uxuz(1 - \cos \theta) + uy \sin \theta \\ uxuy(1 - \cos \theta) + uz \sin \theta & \cos \theta + uy^2(1 - \cos \theta) & uyuz(1 - \cos \theta) - ux \sin \theta \\ uxuz(1 - \cos \theta) - uy \sin \theta & uyuz(1 - \cos \theta) + ux \sin \theta & \cos \theta + uz^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \Big|_{\theta = 90^\circ, ux = 0, uy = 1, uz = 0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 0(1 - 0) & 0(1 - 0) - 0 & 0(1 - 0) + 1 \\ 0(1 - 0) + 0 & 0 + 1(1 - 0) & 0(1 - 0) - 0 \\ 0(1 - 0) - 1 & 0(1 - 0) + 0 & 0 + 0(1 - 0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ -t \end{bmatrix}$$

Se incluye dentro de la sección de anexo los códigos correspondientes de la función Frenet así como un ejemplo de un enlace compuesto por tres curvas para transformación a coordenadas naturales

De esta manera se ha logrado reproducir la trayectoria de una partícula en tres dimensiones a partir de puntos discretos de una forma bastante aproximada a la realidad reproduciendo la pendiente, el radio de curvatura y el signo de la curvatura, vale mencionar que se compararon los valores exactos de una curva continua obteniéndose diferencias del orden de 0.01m, variaciones que no son significativas para los cálculos posteriores.

Es en este momento cuando a partir de la topografía del fondo del cauce se obtienen diversos elementos geométricos para el estudio del flujo. De aquí se extrae un gran aporte: **Dados una serie de puntos discretos en tres dimensiones (x,y,z) se ha podido establecer un método que calcule con gran aproximación la curvatura, el radio de curvatura, la inclinación con respecto de cualquier eje coordenado, el signo de curvatura, la longitud de arco y las coordenadas naturales de la serie de puntos.**

5.2 Obtención del perfil en estado permanente.

Para la obtención del perfil en estado permanente se debe tener en cuenta que al estar presente una curvatura las ecuaciones para flujo gradualmente variado (FGV) resultan escasas puesto que estas contemplan una pendiente constante o lo que es lo mismo están basadas en flujo rectilíneo como se expone a continuación. *En el tratamiento del flujo gradualmente variado se considera que ocurren cambios pequeños del tirante en la dirección del movimiento, si se comparan con la distancia en que se producen. También que no ocurra entrada o salida del agua a lo largo del tramo que se*



analiza. Para el desarrollo de la teoría se establecen las siguientes hipótesis: El fondo del canal es **plano y de pendiente uniforme** e induce sólo pequeñas curvaturas en el perfil longitudinal del flujo, y líneas de corriente prácticamente paralelas (Sotelo, 2002).

Por lo tanto, se requiere de otro método que incorpore los términos de curvatura del fondo del canal, en la literatura especializada diversos autores proponen la solución de sistemas de las ecuaciones diferenciales de Saint-Venant modificadas que incluyan la curvatura o inclusive mediante la técnica de flujo con potencial. Dentro de los alcances de esta tesis postula la solución de esta problemática mediante el uso de coordenadas naturales, por lo que se procederá a desarrollar el siguiente modelo:

Actualmente se tiene desarrollado una ecuación que estimara el perfil de flujo supercrítico en estado permanente para un canal rectangular (Martínez, 2015). En la presente tesis se abordará la hipótesis planteada y se hará una generalización para un canal trapecial.

Para la condición inicial y de frontera se establece lo siguiente: *El sistema de ecuaciones (3) y (22) constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera, que está sujeto a las condiciones iniciales para $A(x, 0) = A_0(x)$ y $Q(x, 0) = Q_0(x)$, y las condiciones de frontera se definen para flujo supercrítico como (Aguilar, Lectura No. 6 Flujo no permanente en cauces y canales., 2016):*

$$\begin{aligned} A(0, t) &= f(t) ; t > 0 \\ Q(0, t) &= g(t) ; t > 0 \end{aligned}$$

5.2.1 Fuerzas de presión

Primeramente, se abordará la obtención de las fuerzas de presión.

La presión en un punto ubicado sobre una línea de corriente puede calcularse con la expresión. (Chow, 2002)

$$P = \gamma \left[(r_{j+1} - r) \cos \theta + \frac{2u^2 d^2 (r^2 - r_{j+1}^2)}{g(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} \right] \quad 47$$

Donde z es un eje coordenado vertical, u es la velocidad de la partícula del fluido, r es el radio de curvatura a una profundidad cualquiera, d es el tirante perpendicular a la superficie en la dirección normal, r_j es el radio de curvatura de la plantilla y r_{j+1} es el radio de curvatura de la superficie libre.

Se sabe que las fuerzas de presión equivalen a la integral de la presión con respecto del radio de curvatura multiplicado por el ancho de la superficie libre (Martínez, 2015)

$$FP = B \int_{r_j}^{r_{j+1}} P dr \quad 48$$



Por lo tanto:

$$FP = B \int_{r_j}^{r_{j+1}} \gamma \left[(r_{j+1} - r) \cos \theta + \frac{2u^2 d^2 (r^2 - r_{j+1}^2)}{g(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} \right] dr \quad 49$$

Para desarrollar la ecuación anterior se hará por partes, primeramente, se integrará la parte variable del primer término teniendo en cuenta que el radio de curvatura en la superficie libre es constante.

$$\int_{r_j}^{r_{j+1}} (r_{j+1} - r) dr = \int_{r_j}^{r_{j+1}} r_{j+1} dr - \int_{r_j}^{r_{j+1}} r dr = r_{j+1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} dr - \int_{r_j}^{r_{j+1}} r dr = r_{j+1} [r]_{r_j}^{r_{j+1}} - \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_j}^{r_{j+1}}$$

Sustituyendo los límites de integración:

$$\int_{r_j}^{r_{j+1}} (r_{j+1} - r) dr = r_{j+1}(r_{j+1} - r_j) - \left(\frac{r_{j+1}^2 - r_j^2}{2} \right) = \frac{r_{j+1}^2 + r_j^2}{2} - r_{j+1}r_j \quad 50$$

Se procede de una manera similar en el segundo miembro con las mismas consideraciones hechas anteriormente sabiendo que el radio de curvatura de la plantilla también es constante:

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{r^2 - r_{j+1}^2}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} dr &= \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{r^2}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} dr - \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{r_{j+1}^2}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} dr \\ &= \left[\frac{r^3}{3(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} \right]_{r_j}^{r_{j+1}} - \left[\frac{r_{j+1}^2 r}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} \right]_{r_j}^{r_{j+1}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en los límites de integración:

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{r^2 - r_{j+1}^2}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} dr &= \frac{r_{j+1}^3 - r_j^3}{3(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} - \frac{r_{j+1}^2(r_{j+1} - r_j)}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} \\ &= \frac{1}{(r_j^2 - r_{j+1}^2)^2} \left(-\frac{2}{3}r_{j+1}^3 - \frac{r_j^3}{3} + r_{j+1}^2 r_j \right) \quad 51 \end{aligned}$$

Para el caso general de cualquier curvatura se propone llamar el signo de la misma (explicado en la introducción y citado en el estado del arte como cóncavo o convexo) como c , por lo tanto el tirante puede definirse así:

$$r_{j+1} - r_j = -\frac{d}{c} \quad 52$$

Sustituyendo 50-52 en 49 y sabiendo que c solo puede tomar valores de ± 1 , al reducir términos resulta:



$$FP = \frac{B\gamma d^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma \left(r_j - \frac{2}{3} c d\right)}{g(2 c r_j - d)^2} u^2 d^2 B \quad 53$$

Por continuidad se sabe que $u=Q/A$ y que $A=BY$ y sustituyendo estas definiciones en 53 se llega a la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} FP &= \frac{B\gamma d^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma \left(r_j - \frac{2}{3} c d\right)}{g(2 c r_j - d)^2} \left(\frac{Q}{BY}\right)^2 d^2 B \\ &= \frac{B\gamma d^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_j - \frac{2}{3} c d\right) d^2}{gB(2 c r_j - d)^2 Y^2} \quad (214) \end{aligned} \quad 54$$

Donde se aprecia la corrección $(d/Y)^2$ que para el caso particular de una sección rectangular es igual a 1 y $c=-1$, se llega a la ecuación obtenida por (Martínez, 2015).

Generalizando la expresión anterior para el tiempo futuro (i+1) se tiene:

$$FP_{i+1} = \int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dr ds = \frac{B_{i+1} \gamma d_{i+1}^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_j^{i+1} - \frac{2}{3} c d_{i+1}\right) d_{i+1}^2}{gB_{i+1} (2 c r_j^{i+1} - d_{i+1})^2 Y_{i+1}^2} \quad 55$$

5.2.2 Fuerzas de gravedad

Para el cálculo de las fuerzas de gravedad se partirá de lo visto en la ecuación 217 con la variante de que no se integrará en el tiempo al estar el flujo en estado permanente asimismo se hará un cambio de variable en la componente normal al coincidir esta con la dirección del radio de curvatura y el tirante.

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dr ds = \rho g_s \int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} db dr ds \quad 56$$

Sabiendo por la definición del volumen de control

$$V = \int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} db dr ds \quad 57$$

El volumen en términos de curvatura evaluado en los límites de integración entre r_{i+1} y r_i (Martínez, 2015) vale:

$$V = Bm \frac{\alpha_i}{2} \left[(r_m^{j+1})^2 - (r_m^j)^2 \right] \quad 58$$

Donde:

$$Bm = \frac{B_i + B_{i+1}}{2} = \text{ancho promedio de la superficie libre} \quad 59$$



$$r_m^{j+1} = \frac{r_i^{j+1} + r_{i+1}^{j+1}}{2} = \text{radio de curvatura de la superficie libre promedio} \quad 60$$

$$r_m^j = \frac{r_i^j + r_{i+1}^j}{2} = \text{radio de curvatura de la plantilla promedio} \quad 61$$

Los subíndices i e $i+1$ representan la variación espacial entre el nodo actual y el nodo siguiente. Además, debido a lo visto en la ecuación 52 se puede expresar el radio de curvatura de la superficie libre en función del radio de curvatura de la plantilla y el tirante, situación que elimina el subíndice $j + 1$:

$$r_m^{j+1} = r_m^j + d_m \quad 62$$

Si se considera el tirante promedio entre dos secciones:

$$d_m = \frac{d_i + d_{i+1}}{2} \quad 63$$

El vector de aceleración gravitatoria vale por lo visto en 218

$$g_s = g \sin \phi \quad 64$$

Se sabe que ϕ es el ángulo entre la vertical y la inclinación de la normal y por aproximación se estima como el promedio del ángulo de inclinación de la componente tangencial (s):

$$\phi = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \quad 65$$

Sustituyendo 57-65 en 56 y haciendo álgebra se obtiene:

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dr ds = \rho g B m \frac{\alpha_i}{8} [2(r_i^j + r_{i+1}^j)(d_i + d_{i+1}) + (d_i + d_{i+1})^2] \sin\left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}\right) \quad 66$$

5.2.3 Fuerzas de fricción

Básicamente se obtienen de la misma manera que las fuerzas gravitatorias de acuerdo con lo visto en la ecuación 238, en este caso el ángulo a considerar es el ángulo de fricción y la ecuación 66 se transforma en:



$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dr ds = -\rho g B m \frac{\alpha_i}{8} [2(r_i^j + r_{i+1}^j)(d_i + d_{i+1}) + (d_i + d_{i+1})^2] \sin(\alpha_f) \quad 67$$

5.2.4 Ecuación completa

Ahora se dispondrá a colocar todas las fuerzas actuantes dentro de la solución permanente. Recordando lo visto en la ecuación 163 y como se encuentra en estado permanente $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$ y por lo tanto el segundo elemento del miembro izquierdo es nulo, además no tiene significado físico integrar con respecto del tiempo, si se hace el mismo cambio de variable de $n=r$, dicha ecuación se reduce así:

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} \right] db dr ds = \int_{s_1}^{s_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dr ds \quad 68$$

El miembro derecho de la ecuación 68 se refiere a la tasa de creación de la propiedad esta tiene que ver con las fuerzas que predominan en el fenómeno como lo son: Gravedad, presión y fricción vistas en los puntos 5.2.1-5.2.3. Y retomando lo visto en la ecuación 127 la ecuación 68 queda así:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} \right] A ds = \left[\frac{B\gamma d^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_j - \frac{2}{3} cd \right) d^2}{gB(2cr_j - d)^2 Y^2} \right]_{r_1}^{r_2} + \rho g B m \frac{\alpha_i}{8} [2(r_i^j + r_{i+1}^j)(d_i + d_{i+1}) + (d_i + d_{i+1})^2] \left[\sin \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) - \sin(\alpha_f) \right] \quad 69$$

Vale la mención que el segundo término del miembro izquierdo de 69 ya está evaluado en los límites de integración como se postuló en 58

Se procederá entonces a integrar y evaluar en las fronteras la ecuación 69 simplificando subíndices ($s_2, i+1$ y r_2 corresponden a la sección 2 mientras que s_1, i y r_1 a la sección 1). Y si se suprime el subíndice j de acuerdo a lo visto en 62 pues en esta ecuación solo aparecen términos de la curvatura de la plantilla.

$$(\rho v_s^2 A)_2 - (\rho v_s^2 A)_1 = \left[\frac{B\gamma d^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma Q^2 \left(r - \frac{2}{3} cd \right) d^2}{gB(2cr - d)^2 Y^2} \right]_1^2 - \left[\frac{B\gamma d^2}{2} \cos \theta - \frac{2\gamma Q^2 \left(r - \frac{2}{3} cd \right) d^2}{gB(2cr - d)^2 Y^2} \right]_1 + \rho g B m \frac{\alpha_i}{8} [2(r_1 + r_2)(d_1 + d_2) + (d_1 + d_2)^2] \left[\sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sin(\alpha_f) \right] \quad 70$$



Evaluando en las fronteras:

$$\begin{aligned}
 & \rho v_{s2}^2 A_2 - \rho v_{s1}^2 A_1 \\
 &= \left[\frac{B_1 \gamma d_1^2}{2} \cos \theta_1 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_1 - \frac{2}{3} c d_1 \right) d_1^2}{g B_1 (2c r_1 - d_1)^2 Y_1^2} \right] \\
 & - \left[\frac{B_2 \gamma d_2^2}{2} \cos \theta_2 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_2 - \frac{2}{3} c d_2 \right) d_2^2}{g B_2 (2c r_2 - d_2)^2 Y_2^2} \right] \\
 & + \rho g B m \frac{\alpha_i}{8} [2(r_1 + r_2)(d_1 + d_2) + (d_1 + d_2)^2] \left[\sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sin(\alpha_f) \right]
 \end{aligned} \tag{71}$$

Por la continuidad vista en ec. 54:

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{Q^2}{A_2^2} A_2 - \rho \frac{Q^2}{A_1^2} A_1 \\
 &= \left[\frac{B_1 \gamma d_1^2}{2} \cos \theta_1 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_1 - \frac{2}{3} c d_1 \right) d_1^2}{g B_1 (2c r_1 - d_1)^2 Y_1^2} \right] \\
 & - \left[\frac{B_2 \gamma d_2^2}{2} \cos \theta_2 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_2 - \frac{2}{3} c d_2 \right) d_2^2}{g B_2 (2c r_2 - d_2)^2 Y_2^2} \right] \\
 & + \rho g \frac{B_1 + B_2}{2} \frac{\alpha_i}{8} [2(r_1 + r_2)(d_1 + d_2) + (d_1 + d_2)^2] \left[\sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sin(\alpha_f) \right]
 \end{aligned} \tag{72}$$

Para el caso particular de un canal trapecial se tiene:

$$A = BY \tag{73}$$

$$A = bd + kd^2 \tag{74}$$

$$B = b + 2kd \tag{75}$$

$$Y = \frac{bd + kd^2}{b + 2kd} \tag{76}$$

$$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2} \tag{77}$$

$$\alpha_i = \cos^{-1}(esx_{i+1}) - \cos^{-1}(esx_i) \text{ apertura del ángulo entre secciones} \tag{78}$$

$$\theta_i = \cos^{-1}(esx_i) \text{ áng. de incl. con respecto de la horizontal en la secc. } i \tag{79}$$

Los valores de esx corresponden al componente en el eje X de las coordenadas naturales en la dirección tangencial (s)



Para el modelo de fricción se adoptará la siguiente fórmula donde n = coeficiente de fricción de Manning:

$$\alpha_f = \tan^{-1} \left(\frac{n^2 Q \left| \frac{Q}{A_m} \right|}{\left(\frac{A_m}{P_m} \right)^{4/3}} \right) \quad 80$$

Sustituyendo y simplificando 59, 73-80 en 72 se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) &= \left(\frac{B_1 \gamma d_1^2}{2} esx_1 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_1 - \frac{2}{3} cd_1 \right) d_1^2}{g B_1 (2cr_1 - d_1)^2 Y_1^2} \right) - \left(\frac{B_2 \gamma d_2^2}{2} esx_2 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_2 - \frac{2}{3} cd_2 \right) d_2^2}{g B_2 (2cr_2 - d_2)^2 Y_2^2} \right) + \\ \rho g B m \frac{\alpha_i}{8} [2(r_1 + r_2)(d_1 + d_2) + (d_1 + d_2)^2] & \left[\sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \sin(\alpha_f) \right] \\ \rho Q^2 \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 A_2} \right) &= \left(\frac{(b + 2kd_1) \gamma d_1^2}{2} esx_1 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_1 - \frac{2}{3} cd_1 \right) d_1^2}{g (b + 2kd_1) (2cr_1 - d_1)^2 Y_1^2} \right) - \left(\frac{(b + 2kd_2) \gamma d_2^2}{2} esx_2 - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_2 - \frac{2}{3} cd_2 \right) d_2^2}{g (b + 2kd_2) (2cr_2 - d_2)^2 Y_2^2} \right) \\ &+ \rho g \left(\frac{b + 2kd_1 + b + 2kd_2}{2} \right) \left(\frac{\cos^{-1}(esx_2) - \cos^{-1}(esx_1)}{8} \right) [2(r_1 + r_2)(d_1 + d_2) \\ &+ (d_1 + d_2)^2] \left[\sin \left(\frac{\cos^{-1}(esx_1) + \cos^{-1}(esx_2)}{2} \right) - \sin \left(\tan^{-1} \left(\frac{n^2 Q \left| \frac{Q}{A_m} \right|}{\left(\frac{A_m}{P_m} \right)^{4/3}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Igualando a cero y sustituyendo los valores de A y Y:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(b + 2kd_1) g d_1^2}{2} esx_1 - \frac{(b + 2kd_2) g d_2^2}{2} esx_2 + \frac{2Q^2 \left(r_2 - \frac{2}{3} cd_2 \right)}{(b + 2kd_2) (2cr_2 - d_2)^2} \left(\frac{d_2^2 (b + 2kd_2)^2}{(bd_2 + kd_2^2)^2} \right) \right. \\ & - \frac{2Q^2 \left(r_1 - \frac{2}{3} cd_1 \right)}{(b + 2kd_1) (2cr_1 - d_1)^2} \left(\frac{d_1^2 (b + 2kd_1)^2}{(bd_1 + kd_1^2)^2} \right) \\ & + g \left(\frac{2b + 2kd_1 + 2kd_2}{2} \right) \left(\frac{\cos^{-1}(esx_2) - \cos^{-1}(esx_1)}{8} \right) [2(r_1 + r_2)(d_1 + d_2) \\ & + (d_1 + d_2)^2] \left(\sin \left(\frac{\cos^{-1}(esx_1) + \cos^{-1}(esx_2)}{2} \right) \right. \\ & \left. \left. - \sin \left(\tan^{-1} \left(\frac{n^2 Q \left| \frac{Q}{A_m} \right|}{\left(\frac{A_m}{P_m} \right)^{4/3}} \right) \right) \right) \right] \left[\frac{(bd_1 + kd_1^2)(bd_2 + kd_2^2)}{bd_1 + kd_1^2 - bd_2 - kd_2^2} \right] - Q^2 = 0 \quad 81 \end{aligned}$$

Debido a que, si se tiene una diferencia considerable de radios entre la sección 1 y la sección 2 se tomará el radio promedio de la ecuación 84, adicionalmente se sustituyen los valores de A_m y P_m de las ecuaciones 82 y 83 restructurando la 81 de esta manera:

$$A_m = b d_m + k d_m^2 \quad \text{área media} \quad 82$$



$$P_m = b + 2d_m\sqrt{1+k^2} \quad \text{perímetro mojado medio}$$

83

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (\text{radio de curvatura medio})$$

84

$$\left[\frac{(b+2kd_1)gd_1^2}{2} esx_1 - \frac{(b+2kd_2)gd_2^2}{2} esx_2 + \frac{2Q^2 \left(r_m - \frac{2}{3}cd_2 \right)}{(b+2kd_2)(2cr_2-d_2)^2} \left(\frac{d_2^2(b+2kd_2)^2}{(bd_2+kd_2^2)^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{2Q^2 \left(r_m - \frac{2}{3}cd_1 \right)}{(b+2kd_1)(2cr_1-d_1)^2} \left(\frac{d_1^2(b+2kd_1)^2}{(bd_1+kd_1^2)^2} \right) \right. \\ \left. + g(b+kd_1+kd_2) \left(\frac{\cos^{-1}(esx_2) - \cos^{-1}(esx_1)}{8} \right) [2(r_m+r_m)(d_1+d_2) \right. \\ \left. + (d_1+d_2)^2] \left(\sin \left(\frac{\cos^{-1}(esx_1) + \cos^{-1}(esx_2)}{2} \right) \right) \right. \\ \left. - \sin \left(\tan^{-1} \left(\frac{\frac{n^2Q}{A_m} \left| \frac{Q}{A_m} \right|}{\left(\frac{A_m}{P_m} \right)^{\frac{4}{3}}} \right) \right) \right] \left[\frac{(bd_1+kd_1^2)(bd_2+kd_2^2)}{bd_1+kd_1^2 - bd_1 - kd_1^2} \right] - Q^2 = 0$$

Sustituyendo el resto de los términos:

$$\left[\frac{(b+2kd_1)gd_1^2}{2} esx_1 - \frac{(b+2kd_2)gd_2^2}{2} esx_2 + \frac{2Q^2 \left(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{2}{3}cd_2 \right)}{(b+2kd_2)(2cr_2-d_2)^2} \left(\frac{d_2^2(b+2kd_2)^2}{(bd_2+kd_2^2)^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{2Q^2 \left(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{2}{3}cd_1 \right)}{(b+2kd_1)(2cr_1-d_1)^2} \left(\frac{d_1^2(b+2kd_1)^2}{(bd_1+kd_1^2)^2} \right) \right. \\ \left. + g(b+kd_1+kd_2) \left(\frac{\cos^{-1}(esx_2) - \cos^{-1}(esx_1)}{8} \right) [2(r_1+r_2)(d_1+d_2) + (d_1+d_2)^2] \left(\sin \left(\frac{\cos^{-1}(esx_1) + \cos^{-1}(esx_2)}{2} \right) \right) \right. \\ \left. - \sin \left(\tan^{-1} \left(\frac{\frac{n^2Q}{b \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right) + k \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right)^2} \left| \frac{Q}{b \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right) + k \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right)^2} \right|}{\left(\frac{b \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right) + k \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right)^2}{b + 2 \left(\frac{d_1+d_2}{2} \right) \sqrt{1+k^2}} \right)^{\frac{4}{3}}} \right) \right] \left[\frac{(bd_1+kd_1^2)(bd_2+kd_2^2)}{bd_1+kd_1^2 - bd_1 - kd_1^2} \right] = Q^2$$

85

5.2.5 Condición crítica y sección de control

Para conocer el perfil de flujo se aprecia que en la ecuación 85 solo se tienen dos incógnitas d_1 y d_2 por lo que bastará conocer d_1 para después aplicar un método numérico que permita conocer el tirante d_1 .

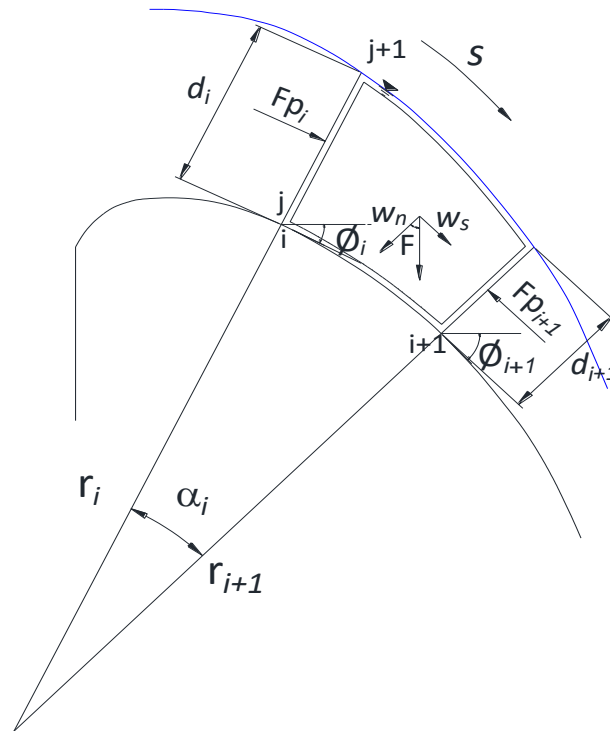


Fig. 8. Volumen de control cimacio (Martínez, 2015)

Debido a esto en este capítulo se hará el tratamiento para determinar el tirante inicial, se comenzará estableciendo un volumen de control donde no exista pendiente para eliminar la componente de la aceleración de la gravedad, dicho en otras palabras, se analizará un punto en particular donde la coordenada normal e_n sea vertical $\phi = \theta_1 = 0$, adicionalmente si se considera el inicio relativo del flujo en ese punto tampoco existirá fricción $\alpha_f = 0$. Habiendo hecho estas consideraciones en la ecuación 72 y llamando fuerza de equilibrio a los elementos de la sección 1 resulta:

$$F_e = \frac{B_1 \gamma d_1^2}{2} - \frac{2\gamma Q^2 \left(r_1 - \frac{2}{3} c d_1 \right) d_1^2}{g B_1 (2c r_1 - d_1)^2 Y_1^2} + \rho \frac{Q^2}{A_1} \tag{86}$$

Si se expresa la función anterior solo en términos de d eliminando el subíndice para simplificar, se obtiene lo siguiente:

$$F_e = \frac{(b + 2kd)\gamma d^2}{2} - \frac{2\gamma Q^2 \left(r - \frac{2}{3} c d \right) (b + 2kd)}{g (2c r_1 - d_1)^2 (b + kd)^2} + \rho \frac{Q^2}{bd + kd^2} \tag{87}$$



Si se alcanza la condición de que sobre esta sección fluye la mínima fuerza de equilibrio, se puede calcular matemáticamente con la aplicación de la derivada con respecto al tirante, igualando a cero y dividiendo todo entre ρ .

$$\frac{dF_e}{dd} = \frac{-4Q^2(4ck^2d^3 - 3kd^2(3kr - bc) + d(6ck^2r^2 - 3bkr + b^2c) - b^2r)}{3(d - 2cr)^3(kd + b)^3} - \frac{Q^2(2kd + b)}{d^2(kd + b)^2} + 3gkd^2 + bgd = 0 \quad 88$$

Verificando el resultado se observa que si $k = 0$ y $c=-1$ se obtiene la ecuación presentada por (Martínez, 2015), por lo que queda de manifiesto que se ha generalizado la ecuación para un canal trapecial con cualquier tipo de curvatura (cóncava o convexa)

La ecuación anterior se resolverá mediante el método de Newton-Raphson, que consiste en derivar la función proponer una solución inicial para después corregirla con el siguiente algoritmo:

$$d_{i+1} = d_i - \frac{z(d_i)}{dz(d_i)} \quad 89$$

Definido d_1 se está en condiciones de calcular el tirante siguiente d_2 de la ecuación 85, como esta ecuación es más extensa en términos algebraicos se empleará el método de bisección que consiste en proponer un valor inicial y verificar el signo del resultado, se propone un segundo valor y se verifica si existe un cambio de signo, en el caso de que exista la solución se encuentra dentro de ese intervalo de valores por que deberá evaluar la función en el promedio de ellos para nuevamente checar el signo del resultado que dependiendo del que resulte se conservará aquel de los iniciales que sea de signo contrario para así iniciar un nuevo ciclo hasta encontrar el valor del nodo siguiente.

Es importante mencionar que conociendo todos los elementos geométricos e hidráulicos es posible conocer el perfil de flujo, sin embargo, la ecuación que lo describe (85) es muy sensible a los cambios de posición y además presenta varias soluciones siendo válida y lógica la más cercana al tirante crítico, por lo que después de haber hecho varias pruebas se verificó numéricamente que la solución física del primer tirante se encuentra entre los valores de $[0.1d_1$ y $d_1]$ mientras que los tirantes sucesivos se encuentran entre los valores de $[0.5d_1$ y $d_1]$ y si la curva es cóncava los resultados oscilan entre $[0.99d_1$ y $1.01d_1]$

5.2.6 Condición sin curvatura

El procedimiento anteriormente mencionado no aplica situaciones en los que no exista curvatura ($r \rightarrow \infty$) como sucede en las rápidas, además de que se encuentra fuera del alcance de esta tesis, sin embargo, se aplicó un modelo clásico de flujo gradualmente variado ampliamente estudiado cuya solución se empleó el método de Runge-Kutta de 4º orden.

Una vez completado todo esto el código aprovechará la información obtenida y calculará y los coeficientes de las ecuaciones 180 y 212.



5.3 Obtención del perfil en estado transitorio.

Como se vio en el capítulo 4 en las ecuaciones 3 y 22 es importante incorporar la curvatura a las ecuaciones discretizadas, el problema radica que *en flujo supercrítico para que el sistema pueda resolverse se deben imponer las condiciones de frontera de gasto y nivel al inicio del canal* (Aguilar, 2016).

Al estar presente la curvatura se tiene un sistema abierto pues se tienen más ecuaciones que incógnitas, adicionalmente la curvatura proporciona un elemento de no linealidad, entonces, para establecer una estrategia que solucione la no linealidad de las ecuaciones de flujo, se puede optar la construcción de un algoritmo iterativo de tipo Picard (Paniconi, Aldama, & Wood, 1991); (Szymkiewicz, 2010), que se acople al esquema en diferencias finitas de Preissmann (Aguilar, 2002). O también desarrollar una propuesta de solución no lineal de segundo orden tipo Newton-Raphson (Aguilar, 2002); (Szymkiewicz, 2010).

Para poder realizar la discretización, se debe emplear un método que regrese a las ecuaciones al planteamiento original de la ecuación 16, diversos investigadores han trazado diferentes formas para hacerlo, el más empleado es el del uso de una matriz jacobiana de transformación, situación que torna compleja la solución además de presentar una excesiva carga computacional.

En esta tesis se abordará de la siguiente solución: se plantea la siguiente hipótesis: si existe una solución en estado permanente en función de la curvatura esta condición permite retomar las ecuaciones originales de Saint-Venant.

Al haber encontrado la solución en estado permanente en términos de la curvatura, dicha solución es una condición de frontera que posee en forma esencial el ingrediente necesario que permite regresar a las ecuaciones originales de Saint-Venant.

Explicado en otras palabras si la solución inicial tiene trazada la ruta que debe seguir la superficie libre entonces se tienen puestas las condiciones para comportarse como flujo unidimensional.

Entonces se procederá a trabajar una discretización simple sin tomar en cuenta la curvatura donde cobra relevancia la consistencia y estabilidad numérica demostrada en el capítulo 4.

Es ahora cuando se puede observar que *el sistema de ecuaciones es cerrado ya que se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas. Entonces para la solución supercrítica la solución es explícita para las dos condiciones de frontera aguas arriba* (Aguilar, 2016).

La información viaja aguas abajo para lo cual es necesario establecer dos condiciones de frontera aguas arriba, la primera será aquella que considere un hidrograma de entrada y la segunda condición será el nivel conocido.

Dichas condiciones se establecen así:



$$u_1^{n+1} = \frac{Q(t^{n+1})}{A_1^n} \quad 90$$

$$y_1^{n+1} = f(t^{n+1}) \quad 91$$

El proceso que calcula las velocidades y los tirantes es el siguiente:

- El código extraerá los elementos calculados en la sección 5.1 como son las características geométricas tanto de la sección transversal del canal trapecial como del fondo del cauce.
- Se propone un hidrograma de entrada que será discretizado e interpolado.
- Se utilizarán valores de θ y Ψ iguales a 0.6 y 0.5 respectivamente de acuerdo a lo visto en el análisis de estabilidad de la sección 4.2.2
- Se calculan los diferenciales espaciales y temporales de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \quad 92$$

$$\Delta t = \frac{C_r \Delta x}{u} \quad 93$$

- Se crean los vectores de tirantes, velocidad, diferenciales y coeficientes que integrarán las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento discretizadas en su formato unidimensional (21 y 22). Los coeficientes tendrán la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (y_j^{n+1} - y_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (y_{j+1}^{n+1} - y_{j+1}^n) + \delta u_j^n \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (y_{j+1}^n - y_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}) \right) \\ & + \delta y_j^n \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + \delta u_j^n \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right) \\ & + g e_{sx} \left(\frac{(1-\theta)}{\Delta s} (y_{j+1}^n - y_j^n) + \frac{\theta}{\Delta s} (y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}) \right) - g (\delta S_{b_j}^n - \delta S_{f_j}^n) = 0 \end{aligned}$$

Que reescribiendo tendrán esta forma respectivamente:

$$a_1 u_j^{n+1} + b_1 y_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + d_1 y_{j+1}^{n+1} = e_1 \quad (\text{masa}) \quad 94$$

$$a_2 u_j^{n+1} + b_2 y_j^{n+1} + c_2 u_{j+1}^{n+1} + d_2 y_{j+1}^{n+1} = e_2 \quad (\text{cantidad de movimiento}) \quad 95$$

$$a_1 = -\delta y_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 96$$

$$b_1 = \frac{1-\Psi}{\Delta t} - \delta u_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 97$$

$$c_1 = \delta y_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 98$$



$$d_1 = \frac{\Psi}{\Delta t} + \delta u_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 99$$

$$e_1 = \frac{1-\Psi}{\Delta t} y_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} y_{j+1}^n - \delta u_j^n \frac{1-\theta}{\Delta x} (y_{j+1}^n - y_j^n) - \delta y_j^n \frac{1-\theta}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad 100$$

$$a_2 = \frac{1-\Psi}{\Delta t} - \delta u_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 101$$

$$b_2 = -g \delta esx_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 102$$

$$c_2 = \frac{\Psi}{\Delta t} + \delta u_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 103$$

$$d_2 = g \delta esx_j^n \frac{\theta}{\Delta x} \quad 104$$

$$e_2 = \frac{1-\Psi}{\Delta t} u_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} u_{j+1}^n - \delta u_j^n \frac{1-\theta}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) - g \delta esx_j^n \frac{1-\theta}{\Delta x} (y_{j+1}^n - y_j^n) + g (\delta s_{b_j} - \delta s_{f_j}^n) \quad 105$$

$$\delta y_j^n = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \quad 106$$

$$\delta u_j^n = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} \quad 107$$

$$\delta s_{f_j}^n = \frac{\sin \alpha_{f_i} + \sin \alpha_{f_{i+1}}}{2} \quad 108$$

$$\delta s_{b_j} = \frac{\sin(\cos^{-1}(esx_i)) + \sin(\cos^{-1}(esx_{i+1}))}{2} \quad 109$$

$$\delta esx_j^n = \frac{esx_i + esx_{i+1}}{2} \quad 110$$

- Se crean los vectores de posicionamiento, de solución y de términos independientes, así como los coeficientes nulos de la matriz diagonal.
- Creación de la matriz de solución, que para el caso de flujo supercrítico es explícita y tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} c1 & d1 \\ c2 & d2 \\ & c1 & d1 \\ & & c2 & d2 \\ & & & c1 & d1 \\ & & & & c2 & d2 \\ & & & & & c1 & d1 \\ & & & & & & c2 & d2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ y1 \\ u2 \\ y2 \\ u3 \\ y3 \\ u4 \\ y4 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} e1 - a1Q/A1 - b1y1 \\ e2 - a2Q/A1 - b2y1 \\ e1 - a1Q/A2 - b1y2 \\ e2 - a2Q/A2 - b2y2 \\ e1 - a1Q/A3 - b1y3 \\ e2 - a2Q/A3 - b2y3 \\ e1 - a1Q/A4 - b1y4 \\ e2 - a2Q/A4 - b2y4 \end{bmatrix} \quad 111$$

- Se inicia el transitorio evaluando los gastos para cada Δt calculada.
- Se calculan las velocidades iniciales.
- Se evalúa la fricción con el modelo propuesto en la ecuación 80.
- Se calculan los coeficientes de las ecuaciones 96-110



- Se esparcen los ceros de la matriz porosa
- Se crea la matriz de la ecuación 111 para todos cada nodo existente
- Se calcula el tirante aguas arriba en la frontera de nivel para un gasto en el tiempo n
- Se resuelve el vector en el tiempo $n+1$ para los nuevos tirantes y velocidades para cada nodo
- El nuevo tirante será ahora la nueva condición de frontera en el tiempo $n+1$ que para el nuevo ciclo será el tiempo n
- En función de las coordenadas naturales se calcularán las coordenadas rectangulares de los tirantes y estos se imprimirán en una gráfica para ver su comportamiento y variaciones en el tiempo.

Este método también corrige los valores calculados en estado permanente, por lo que los primeros resultados obtenidos en el transitorio servirán para calibrar el estado permanente. Dentro de la sección de apéndice se incluye el código correspondiente que ejecuta los pasos aquí descritos.

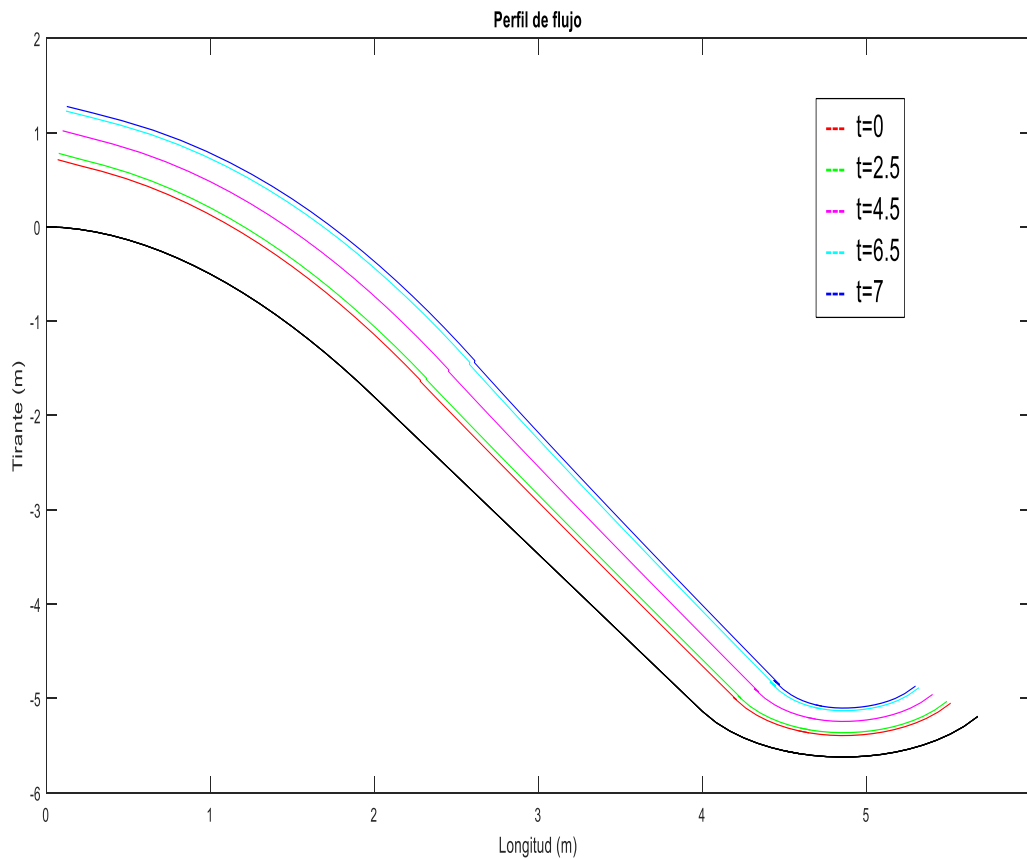


Fig. 9. Esquema del comportamiento del tirante en función del tiempo.

6 Resultados

Como se mencionó con anterioridad se compararán resultados obtenidos con este método con algunos modelos físicos, así como otros modelos numéricos hechos por diversos investigadores para medir la diferencia o posible grado de error.

6.1 Modelación con datos aleatorios.

Primeramente se analizará un caso aleatorio con estas características geométricas y configuración de fondo: El cauce está compuesto de tres curvas, la primera de ella es un cimacio que sigue la función $-\frac{1}{2}x^{1.85}$, la segunda función es una rápida que sigue la función $-\frac{37}{40}(2)^{17/20}x + \frac{17}{40}(2)^{17/20}$ y la tercer curva es un deflector que se describe con esta función $-\sqrt{x^2 + 9.175x - 22.596} - 4.623$. El punto de intersección y tangencia entre las primeras dos curvas es (2,-1.803) y entre la segunda y la tercera es (4,-5.137), el deflector termina en la coordenada x=5.715. La configuración se muestra en la figura 10

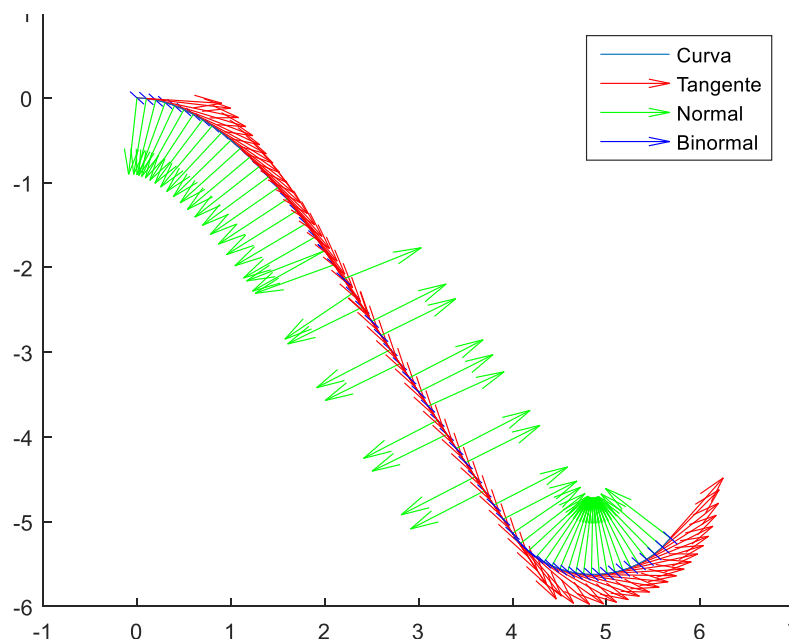


Fig. 10. Configuración de fondo del ejemplo1

Enseguida se procede a determinar el estado permanente para lo cual se proponen las siguientes características hidráulicas $Q=20 \text{ m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=10\text{m}$, talud del canal $k=0.25$, coeficiente de rugosidad de Manning = 0.014. De los cálculos se obtiene un tirante crítico en la cresta del cimacio $Y_c=0.7046\text{m}$

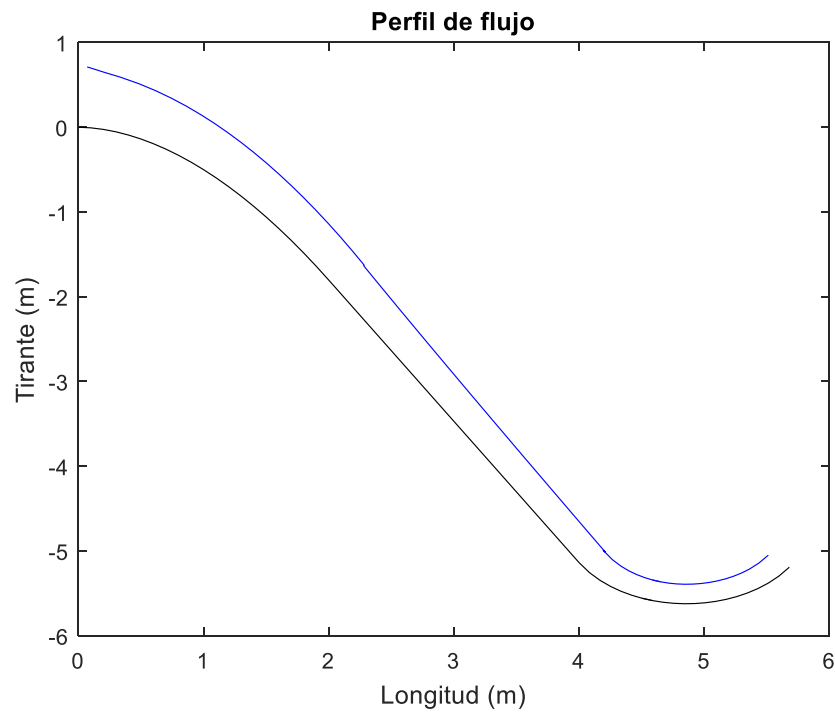


Fig. 11. Solución en estado permanente

Enseguida se calculará el transitorio con un hidrograma de entrada mostrado en la figura siguiente con un gasto pico $Q_p = 50 \text{ m}^3/\text{s}$. Se presentarán los resultados en los puntos críticos del hidrograma.

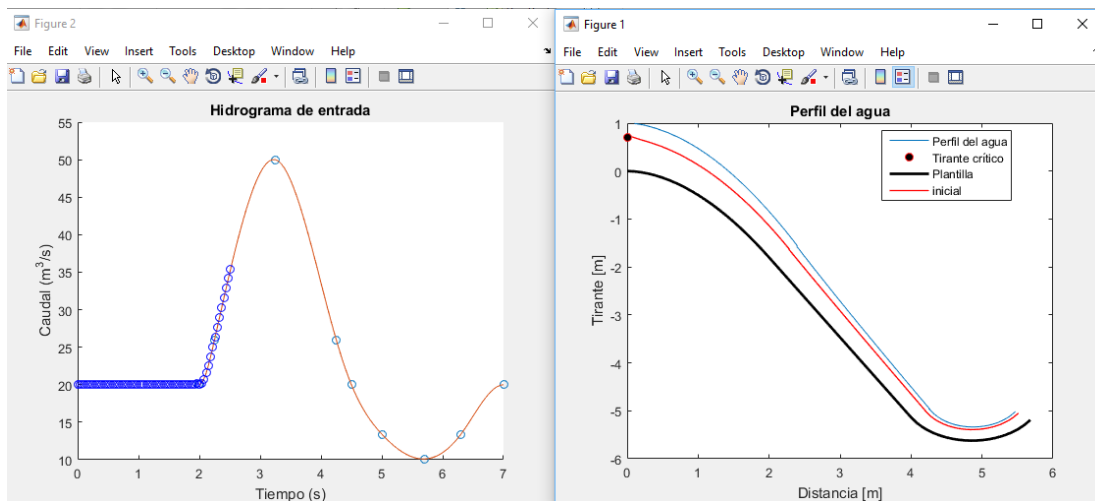


Fig. 12. Simulación al 28% del tiempo de simulación $Q=36 \text{ m}^3/\text{s}$ $Y_c=0.9 \text{ m}$

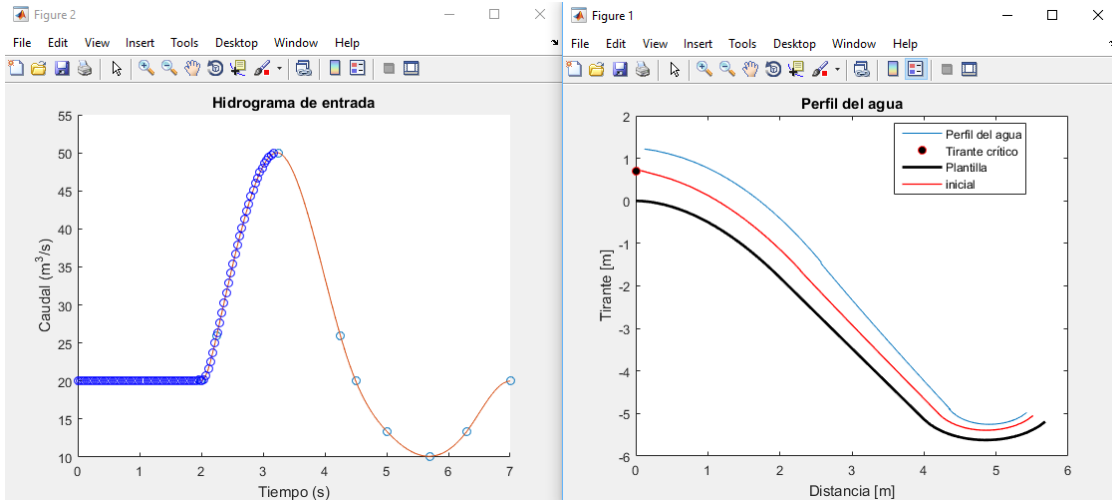


Fig. 13. Simulación al 39% del tiempo de simulación $Q=50m^3/s$ $Yc=1.3m$

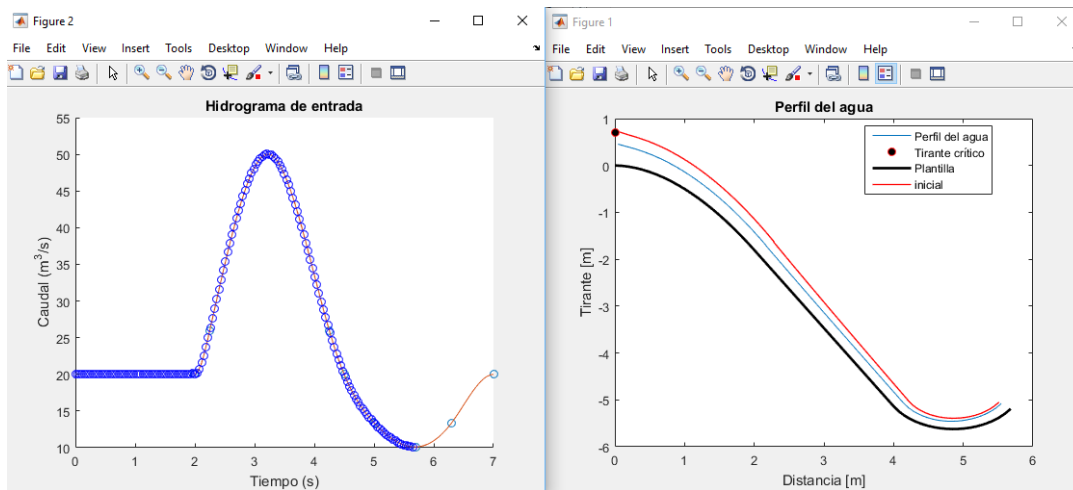


Fig. 14. Simulación al 62% del tiempo de simulación $Q=10m^3/s$ $Yc=0.55m$

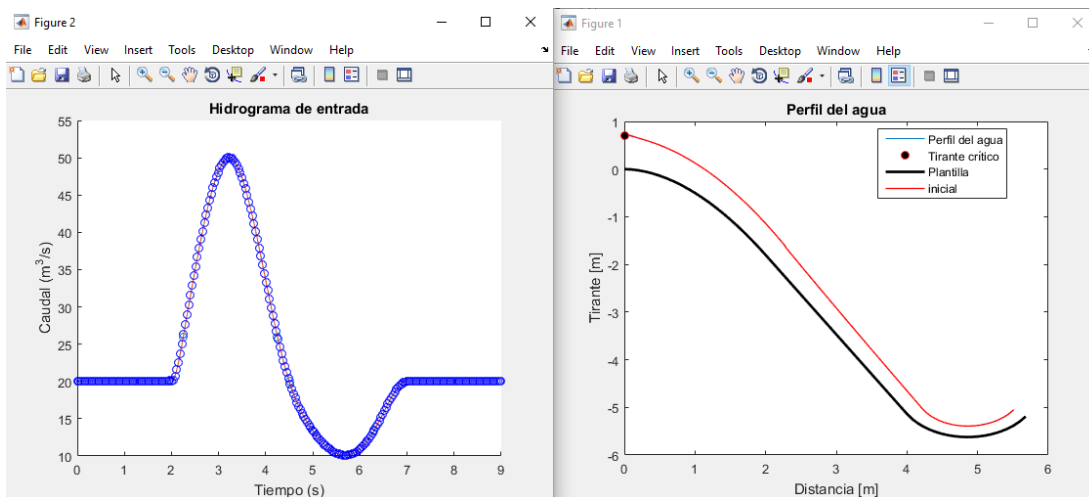


Fig. 15. Simulación al 100% del tiempo de simulación $Q=20m^3/s$ $Yc=0.7158m$



DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y VELOCIDADES EN CANALES CON CURVATURA.FLUJO UNIDIMENSIONAL EN COORDENADAS NATURALES.

x (m)	y (m)	z (m)	r (m)	esx	esy	esz	enx	eny	enz	ebx	eby	ebz	signo	s (m)	d (m)	dx (m)	dy (m)	V (m/s)	P (m)
0.000	0.000	0.000	0.716	0.998	-0.070	0.000	-0.098	-0.995	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.000	0.716	0.070	0.712	2.745	0.202
0.100	-0.007	0.000	0.888	0.992	-0.126	0.000	-0.150	-0.989	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.100	0.666	0.200	0.651	2.954	0.175
0.200	-0.025	0.000	1.060	0.974	-0.228	0.000	-0.222	-0.975	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.202	0.630	0.340	0.589	3.125	0.157
0.300	-0.054	0.000	1.233	0.949	-0.315	0.000	-0.310	-0.951	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.306	0.596	0.485	0.513	3.304	0.132
0.400	-0.092	0.000	1.415	0.921	-0.390	0.000	-0.387	-0.922	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.413	0.566	0.619	0.430	3.483	0.109
0.500	-0.139	0.000	1.623	0.890	-0.456	0.000	-0.453	-0.891	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.524	0.539	0.744	0.342	3.659	0.091
0.600	-0.194	0.000	1.862	0.858	-0.514	0.000	-0.511	-0.860	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.638	0.515	0.863	0.248	3.833	0.078
0.700	-0.258	0.000	2.138	0.826	-0.564	0.000	-0.562	-0.827	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.757	0.493	0.977	0.150	4.005	0.069
0.800	-0.331	0.000	2.452	0.794	-0.608	0.000	-0.606	-0.796	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	0.881	0.474	1.087	0.046	4.173	0.063
0.900	-0.411	0.000	2.810	0.764	-0.646	0.000	-0.644	-0.765	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.009	0.456	1.194	0.063	4.338	0.060
1.000	-0.500	0.000	3.212	0.734	-0.679	0.000	-0.678	-0.736	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.143	0.440	1.298	0.177	4.500	0.058
1.100	-0.596	0.000	3.663	0.706	-0.708	0.000	-0.707	-0.707	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.282	0.425	1.400	0.296	4.658	0.057
1.200	-0.701	0.000	4.166	0.679	-0.734	0.000	-0.733	-0.681	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.426	0.411	1.501	0.421	4.814	0.057
1.300	-0.812	0.000	4.722	0.654	-0.756	0.000	-0.755	-0.655	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.577	0.399	1.601	0.551	4.966	0.057
1.400	-0.932	0.000	5.336	0.630	-0.776	0.000	-0.775	-0.631	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.732	0.387	1.700	0.687	5.116	0.057
1.500	-1.059	0.000	6.009	0.608	-0.794	0.000	-0.793	-0.609	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	1.894	0.377	1.799	0.829	5.262	0.057
1.600	-1.193	0.000	6.745	0.587	-0.810	0.000	-0.809	-0.588	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	2.062	0.367	1.897	0.977	5.406	0.058
1.700	-1.334	0.000	7.547	0.567	-0.824	0.000	-0.823	-0.568	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	2.235	0.357	1.994	1.131	5.546	0.057
1.800	-1.483	0.000	8.416	0.549	-0.836	0.000	-0.836	-0.549	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	2.415	0.349	2.092	1.292	5.684	0.058
1.900	-1.639	0.000	8.416	0.531	-0.847	0.000	-0.844	-0.536	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	2.600	0.341	2.188	1.457	5.820	0.044
2.000	-1.803	0.000	8.416	0.523	-0.853	0.000	-0.850	-0.527	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1	2.792	0.333	2.283	1.627	5.952	0.034
2.000	-1.803	0.000	5.063E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.991	0	2.792	0.326	2.280	1.635	6.082	0.168
2.100	-1.969	0.000	7.257E+13	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.987	0	2.986	0.320	2.374	1.805	6.208	0.164
2.200	-2.136	0.000	3.612E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.993	0	3.181	0.313	2.469	1.975	6.331	0.161
2.300	-2.303	0.000	7.949E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.995	0	3.375	0.308	2.564	2.144	6.451	0.158
2.400	-2.469	0.000	2.838E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.999	0	3.570	0.302	2.659	2.314	6.568	0.155
2.500	-2.636	0.000	3.310E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.999	0	3.764	0.297	2.755	2.483	6.682	0.153
2.600	-2.803	0.000	2.838E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.999	0	3.959	0.292	2.851	2.653	6.794	0.150
2.700	-2.970	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0	4.154	0.288	2.947	2.822	6.904	0.148
2.800	-3.136	0.000	2.838E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.999	0	4.348	0.283	3.043	2.991	7.011	0.145
2.900	-3.303	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0	4.543	0.279	3.139	3.160	7.116	0.143
3.000	-3.470	0.000	3.310E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.999	0	4.737	0.275	3.236	3.328	7.220	0.141
3.100	-3.637	0.000	1.990E+15	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.997	0	4.932	0.271	3.333	3.497	7.321	0.139
3.200	-3.803	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0	5.126	0.268	3.430	3.666	7.421	0.138
3.300	-3.970	0.000	2.838E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.999	0	5.321	0.264	3.527	3.834	7.519	0.136
3.400	-4.137	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0	5.516	0.261	3.624	4.003	7.616	0.134
3.500	-4.303	0.000	3.310E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.999	0	5.710	0.258	3.721	4.171	7.711	0.133
3.600	-4.470	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0	5.905	0.255	3.818	4.339	7.804	0.131
3.700	-4.637	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	0	6.099	0.252	3.916	4.507	7.897	0.130
3.800	-4.804	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0	6.294	0.249	4.013	4.676	7.988	0.128

DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y VELOCIDADES EN CANALES CON CURVATURA. FLUJO UNIDIMENSIONAL EN COORDENADAS NATURALES.



x (m)	y (m)	z (m)	r (m)	esx	esy	esz	enx	eny	enz	ebx	eby	ebz	signo	s (m)	d (m)	dx (m)	dy (m)	V (m/s)	P (m)
3.900	-4.970	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0	6.488	0.246	4.111	-4.844	8.078	0.126
4.000	-5.137	0.000	3.970E+14	0.514	-0.858	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	6.683	0.244	4.209	-5.012	8.166	0.125
4.000	-5.137	0.000	0.882	0.576	-0.818	0.000	0.800	0.601	0.000	0.000	0.000	1.000	1	6.683	0.241	4.193	-4.992	8.252	2.336
4.084	-5.256	0.000	0.909	0.625	-0.781	0.000	0.759	0.651	0.000	0.000	0.000	0.999	1	6.829	0.239	4.265	-5.101	8.332	2.292
4.168	-5.347	0.000	0.936	0.720	-0.694	0.000	0.700	0.714	0.000	0.000	0.000	1.000	1	6.953	0.237	4.334	-5.178	8.405	2.259
4.252	-5.419	0.000	0.964	0.793	-0.609	0.000	0.613	0.790	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.063	0.235	4.396	-5.233	8.468	2.216
4.336	-5.476	0.000	0.977	0.852	-0.524	0.000	0.527	0.850	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.165	0.233	4.459	-5.278	8.522	2.204
4.420	-5.522	0.000	0.984	0.898	-0.440	0.000	0.442	0.897	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.261	0.232	4.523	-5.314	8.566	2.208
4.504	-5.558	0.000	0.988	0.935	-0.355	0.000	0.357	0.934	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.352	0.231	4.586	-5.342	8.601	2.213
4.588	-5.586	0.000	0.990	0.963	-0.271	0.000	0.272	0.962	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.441	0.231	4.651	-5.364	8.628	2.228
4.672	-5.605	0.000	0.992	0.982	-0.186	0.000	0.187	0.982	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.527	0.230	4.715	-5.379	8.645	2.225
4.756	-5.618	0.000	0.993	0.995	-0.102	0.000	0.102	0.995	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.612	0.230	4.780	-5.389	8.655	2.230
4.840	-5.623	0.000	0.993	1.000	-0.018	0.000	0.018	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.696	0.230	4.844	-5.393	8.655	2.231
4.924	-5.621	0.000	0.993	0.998	0.067	0.000	-0.067	0.998	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.780	0.230	4.909	-5.391	8.655	2.231
5.008	-5.611	0.000	0.992	0.989	0.151	0.000	-0.152	0.988	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.865	0.230	4.973	-5.384	8.662	2.234
5.092	-5.595	0.000	0.991	0.972	0.235	0.000	-0.236	0.972	0.000	0.000	0.000	1.000	1	7.951	0.229	5.038	-5.372	8.679	2.229
5.176	-5.571	0.000	0.989	0.948	0.320	0.000	-0.321	0.947	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.038	0.229	5.103	-5.354	8.705	2.241
5.260	-5.538	0.000	0.985	0.915	0.404	0.000	-0.406	0.914	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.128	0.228	5.168	-5.330	8.742	2.249
5.344	-5.497	0.000	0.980	0.872	0.489	0.000	-0.491	0.871	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.222	0.227	5.233	-5.299	8.787	2.261
5.428	-5.444	0.000	0.970	0.819	0.573	0.000	-0.577	0.817	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.321	0.225	5.298	-5.260	8.842	2.276
5.512	-5.379	0.000	0.951	0.753	0.659	0.000	-0.663	0.748	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.428	0.224	5.364	-5.212	8.905	2.328
5.596	-5.297	0.000	0.951	0.668	0.744	0.000	-0.723	0.691	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.545	0.222	5.436	-5.144	8.977	2.320
5.680	-5.192	0.000	0.951	0.623	0.782	0.000	-0.764	0.646	0.000	0.000	0.000	1.000	1	8.680	0.220	5.512	-5.050	9.055	2.324

Tabla 1. Resumen de resultados en estado permanente.



6.2 Modelación de un dam break.

Se hace la simulación de un incremento brusco del gasto mediante un hidrograma de caja

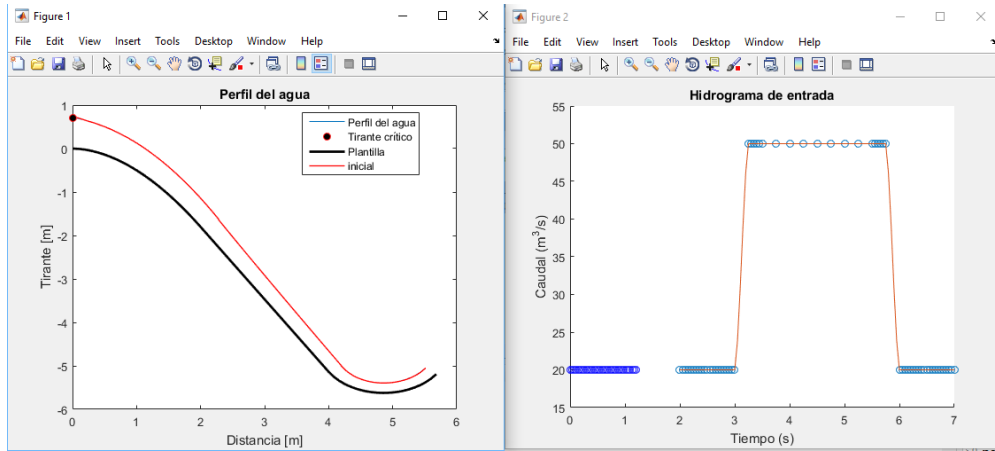


Fig. 16. Simulación al 13% del tiempo de simulación $Q=20\text{m}^3/\text{s}$ $Y_c=0.7046\text{m}$

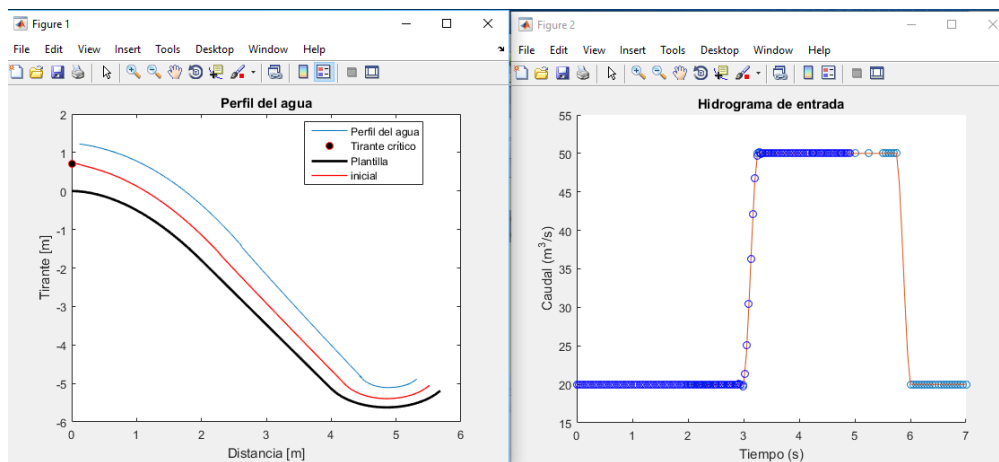


Fig. 17. Simulación al 56% del tiempo de simulación $Q=50\text{m}^3/\text{s}$ $Y_c=1.2268\text{m}$

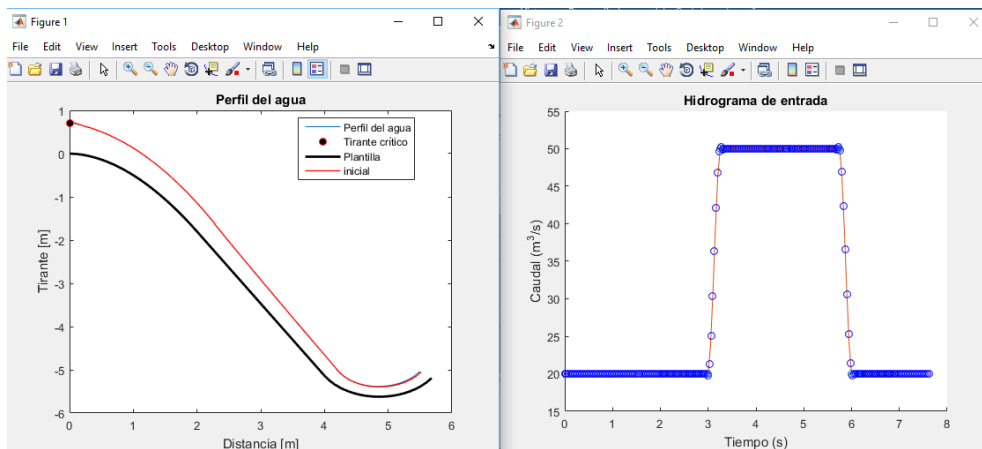


Fig. 18. Simulación al 85% del tiempo de simulación $Q=20\text{m}^3/\text{s}$ $Y_c=0.7046\text{m}$



6.3 Comparativo con el artículo “Experimental verification of the Dressler curved-flow equations” de Sivakumaran y Yevjevich journal of hydraulic research, VOL. 25, 1987 , no. 3.

Este artículo se refiere a un modelo físico donde probaron las ecuaciones de Dressler en un cimacio circular que sigue la curva $\sqrt{0.381^2 - x^2} - 0.381$ y un deflector también circular con la siguiente ecuación $-\sqrt{0.381^2 - (x^2 - 1.4732x + 0.7366^2)} - 0.186$. Las circunferencias hacen tangencia en el punto (0.3683,-0.2834)

Cabe recordar las ecuaciones de Dressler para cantidad de movimiento y conservación de masa respectivamente:

$$C_t + \frac{1}{(1 - \kappa N)^2} C C_s + \left[g \cos \theta + \frac{\kappa}{(1 - \kappa N)^3} C^2 \right] N_s - \left[\kappa g \sin \theta - \frac{\kappa'}{(1 - \kappa N)^3} C^2 \right] N + g \sin \theta = 0$$

$$N_t + \frac{1}{(1 - \kappa N)^2} C N_s - \frac{\ln(1 - \kappa N)}{(1 - \kappa N)\kappa} C_s + \frac{\kappa'}{\kappa^2} \left[\frac{\kappa}{(1 - \kappa N)^2} N + \frac{\ln(1 - \kappa N)}{(1 - \kappa N)} \right] C = 0$$

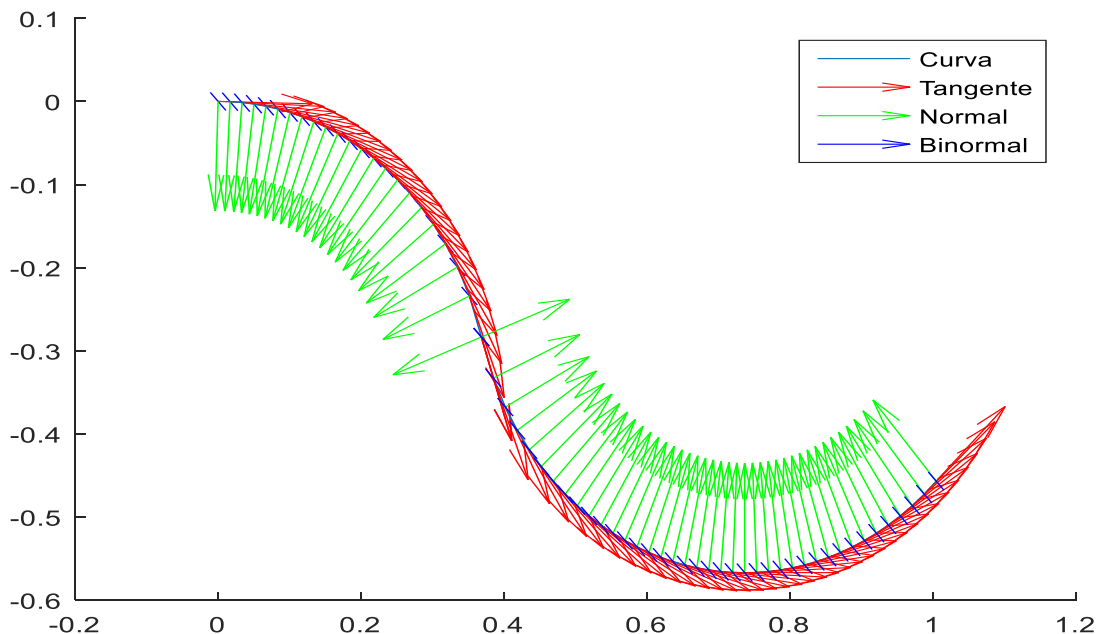


Fig. 19. Configuración del fondo de la verificación de Sivakumaran y Yevjevich en coordenadas naturales.

Enseguida se procede a comparar el estado permanente con las características hidráulicas descritas en las figuras siguientes:



DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y VELOCIDADES EN CANALES CON CURVATURA.FLUJO UNIDIMENSIONAL EN COORDENADAS NATURALES.

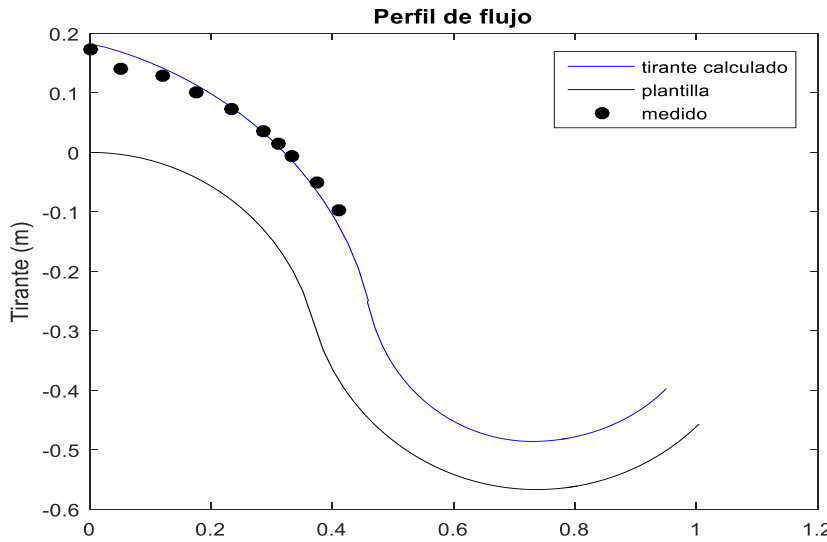


Fig. 20. Comparación tirantes calculados vs medidos:
 $Q= 0.04957377\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=0.2032\text{m}$,
 talud del canal $k=0$, se desprecia la fricción.

X_{med}	Y_{med}	X_{cal}	Y_{cal}
0.0000	0.1740	0.0060	0.1811
0.0500	0.1400	0.0486	0.1692
0.1191	0.1293	0.1179	0.1421
0.1768	0.1016	0.1837	0.1078
0.2341	0.0721	0.2259	0.0805
0.2857	0.0347	0.2874	0.0315
0.3116	0.0136	0.3074	0.0126
0.3333	-0.0058	0.3273	-0.0080
0.3757	-0.0510	0.3666	-0.0555
0.4116	-0.0975	0.4053	-0.1151

Tabla 2. Comparación de valores (metros).

De los cálculos se obtiene un tirante crítico en la cresta del cimacio $Y_c=0.1806\text{m}$, mientras que el medido fue $Y_c=0.174\text{m}$.

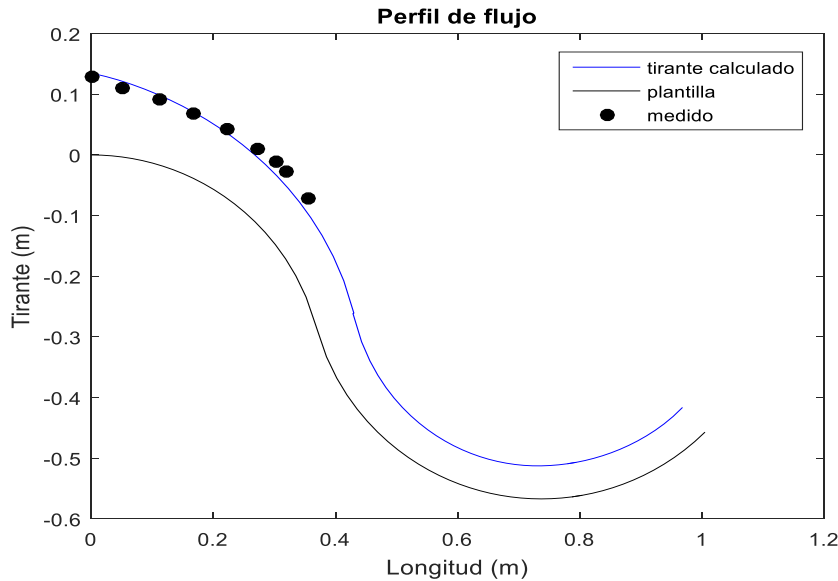


Fig. 21. Comparación tirantes calculados vs medidos:
 $Q= 0.0314007\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=0.2032\text{m}$,
 talud del canal $k=0$, se desprecia la fricción.

X_{med}	Y_{med}	X_{cal}	Y_{cal}
0.0000	0.1300	0.0044	0.1339
0.0500	0.1100	0.0445	0.1229
0.1111	0.0912	0.1082	0.0994
0.1685	0.0689	0.1691	0.0692
0.2237	0.0432	0.2278	0.0314
0.2730	0.0105	0.2660	0.0009
0.3021	-0.0111	0.3036	-0.0350
0.3184	-0.0278	0.3222	-0.0555
0.3559	-0.0721	0.3591	-0.1038

Tabla 3. Comparación de valores (metros).

De los cálculos se obtiene un tirante crítico en la cresta del cimacio $Y_c=0.1338\text{m}$, mientras que el medido fue $Y_c=0.13\text{m}$.

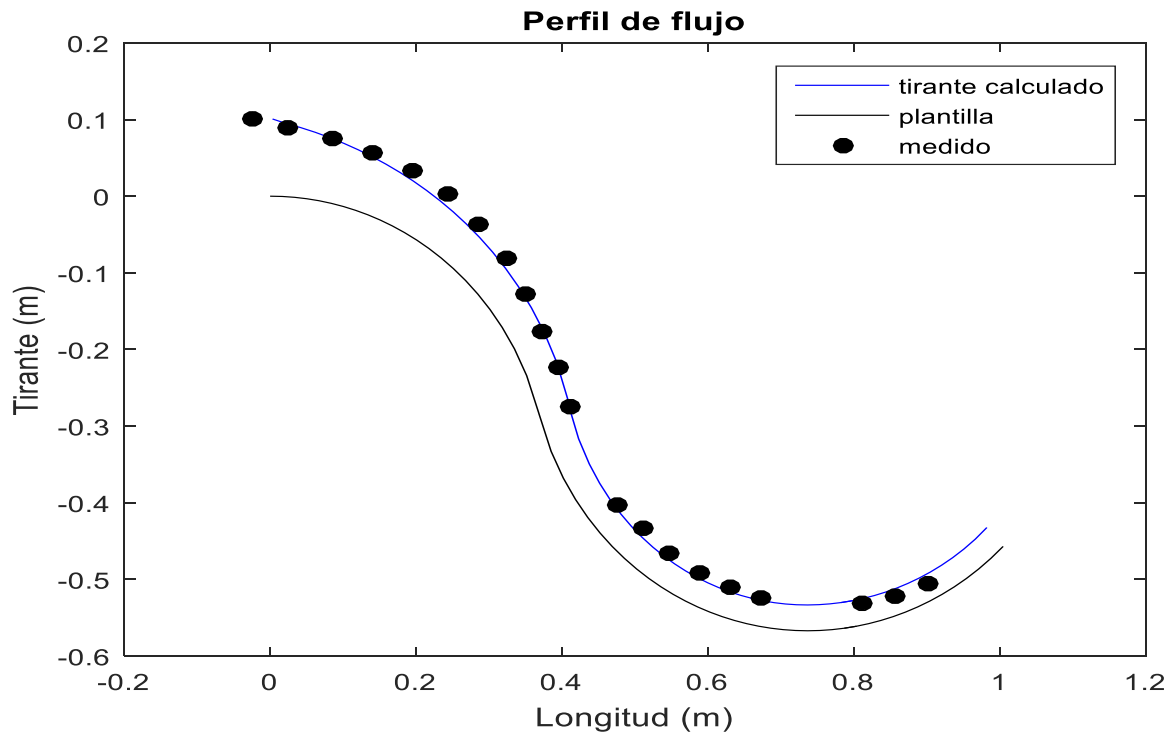


Fig. 22. Comparación tirantes calculados vs medidos: $Q=0.02043786\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=0.2032\text{m}$, talud del canal $k=0$, se desprecia la fricción.

X _{med}	Y _{med}	X _{cal}	Y _{cal}	X _{med}	Y _{med}	X _{cal}	Y _{cal}
0.0000	0.1338	0.0033	0.1007	0.4124	-0.2737	0.4103	-0.2680
0.0250	0.0900	0.0220	0.0959	0.4752	-0.4034	0.4671	-0.3949
0.0847	0.0763	0.0819	0.0776	0.5126	-0.4340	0.5108	-0.4438
0.1405	0.0573	0.1402	0.0527	0.5478	-0.4649	0.5405	-0.4680
0.1943	0.0321	0.1967	0.0209	0.5871	-0.4910	0.5854	-0.4953
0.2438	0.0025	0.2335	-0.0050	0.6305	-0.5098	0.6306	-0.5140
0.2865	-0.0363	0.2878	-0.0528	0.6739	-0.5242	0.6760	-0.5254
0.3231	-0.0800	0.3236	-0.0933	0.8123	-0.5319	0.8121	-0.5212
0.3514	-0.1266	0.3591	-0.1448	0.8580	-0.5221	0.8574	-0.5077
0.3739	-0.1756	0.3769	-0.1774	0.9017	-0.5066	0.9027	-0.4870
0.3949	-0.2238	0.3938	-0.2159				

Tabla 4. Comparación de valores (metros).

De los cálculos se obtiene un tirante crítico en la cresta del cimacio $Y_c=0.1007\text{m}$, mientras que el medido fue $Y_c=0.10\text{m}$.

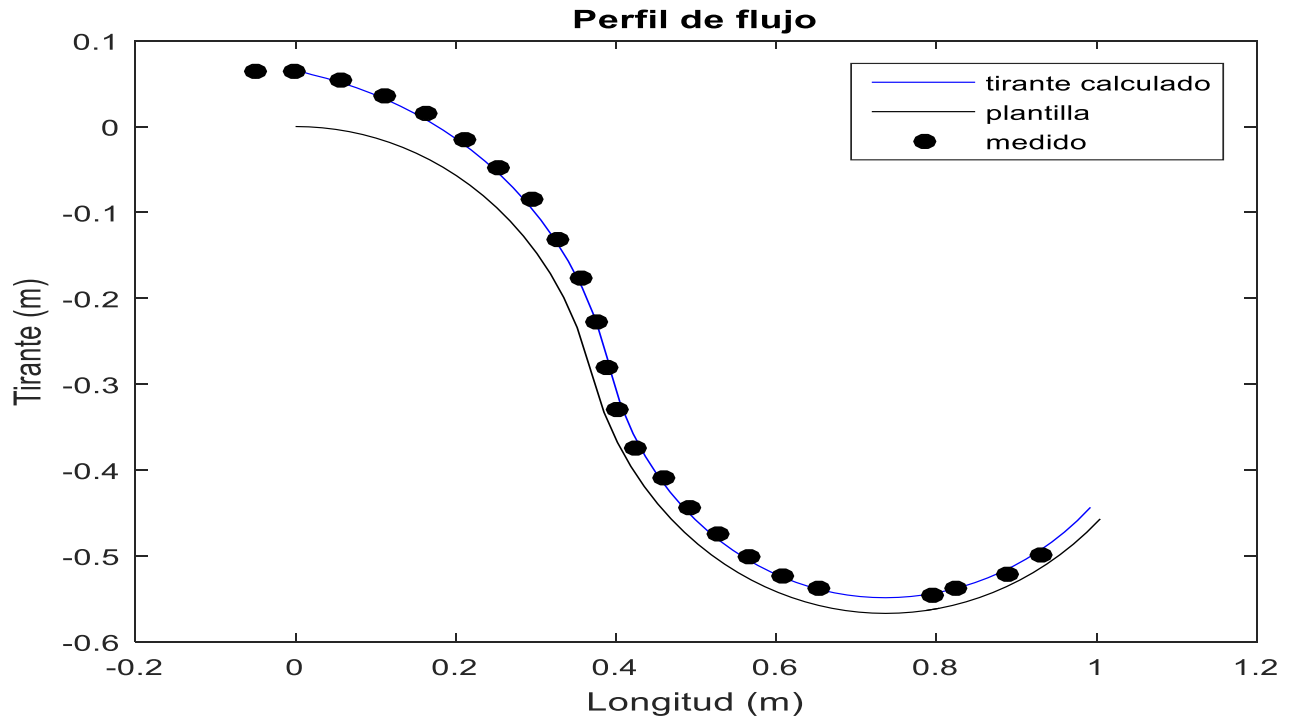


Fig. 23. Comparación tirantes calculados vs medidos: $Q=0.0106681\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=0.2032\text{m}$, talud del canal $k=0$, se desprecia la fricción.

0.0000	0.0647	0.0022	0.0654	0.4229	-0.3735	0.4224	-0.3571
0.0551	0.0543	0.0576	0.0518	0.4581	-0.4083	0.4531	-0.4056
0.1107	0.0358	0.1130	0.0324	0.4910	-0.4430	0.4997	-0.4564
0.1629	0.0147	0.1670	0.0068	0.5267	-0.4744	0.5153	-0.4697
0.2108	-0.0157	0.2200	-0.0266	0.5666	-0.5010	0.5625	-0.5014
0.2545	-0.0485	0.2375	-0.0399	0.6083	-0.5237	0.6099	-0.5234
0.2956	-0.0856	0.3069	-0.1081	0.6543	-0.5374	0.6574	-0.5376
0.3287	-0.1315	0.3241	-0.1305	0.7958	-0.5463	0.7997	-0.5397
0.3576	-0.1772	0.3586	-0.1868	0.8247	-0.5368	0.8155	-0.5364
0.3767	-0.2276	0.3754	-0.2238	0.8882	-0.5219	0.8786	-0.5159
0.3892	-0.2808	0.3913	-0.2751	0.9300	-0.4989	0.9260	-0.4913
0.4018	-0.3286	0.4069	-0.3234				

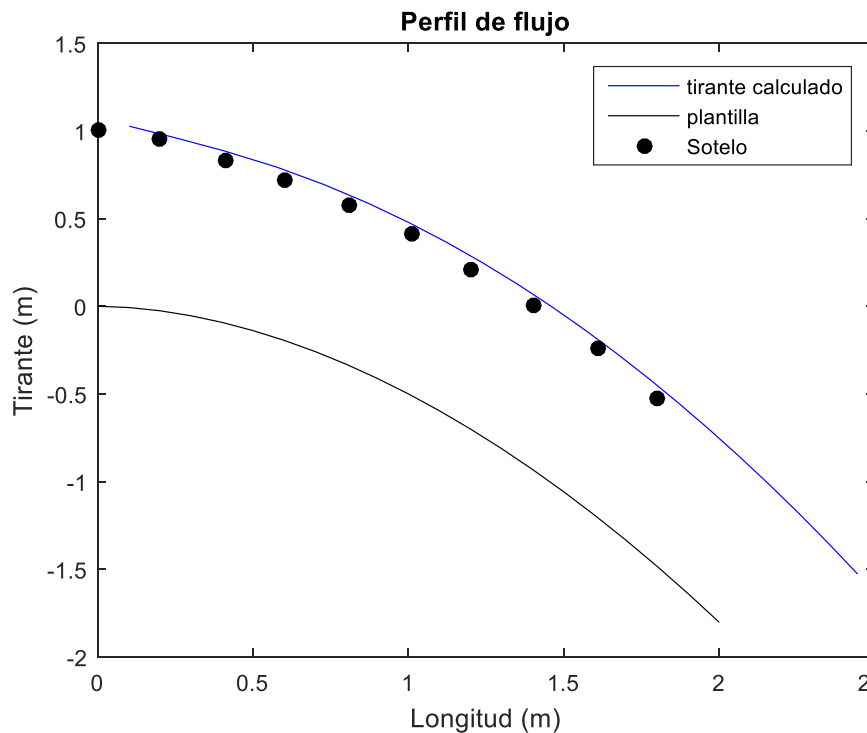
Tabla 5. Comparación de valores (metros).

De los cálculos se obtiene un tirante crítico en la cresta del cimacio $Y_c=0.0654\text{m}$, mientras que el medido fue $Y_c=0.065\text{m}$.



6.4 Comparativo con el artículo “Perfil del flujo sobre un vertedor tipo cimacio y su comprobación” de Gilberto Sotelo-Ávila.

En este artículo el autor propone un modelo numérico basado en coordenadas naturales, la ecuación de la energía y la matriz jacobiana de transformación de Dressler. El cimacio sigue la función $y = -\frac{1}{2}(x^{1.85})$



Xmed	Ymed	Xcal	Ycal
0.0000	1.0000	0.1016	1.0272
0.2000	0.9500	0.2468	0.9622
0.4000	0.8200	0.4071	0.8862
0.6000	0.7100	0.5766	0.7933
0.8000	0.5900	0.8695	0.5882
1.0000	0.4100	1.0000	0.4785
1.2000	0.2100	1.2397	0.2469
1.4000	0.0100	1.4597	-0.0009
1.6000	-0.2200	1.5648	-0.1313
1.8000	-0.5200	1.7685	-0.4060

Tabla 6. Comparación de valores (metros).

Fig. 24. Comparación tirantes calculados vs calculados por Sotelo: $Q= 3.415\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=1\text{m}$, talud del canal $k=0$, coeficiente de rugosidad de Manning= 0.014 , $Y_c=1\text{m}$



DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y VELOCIDADES EN CANALES CON CURVATURA. FLUJO UNIDIMENSIONAL EN COORDENADAS NATURALES.

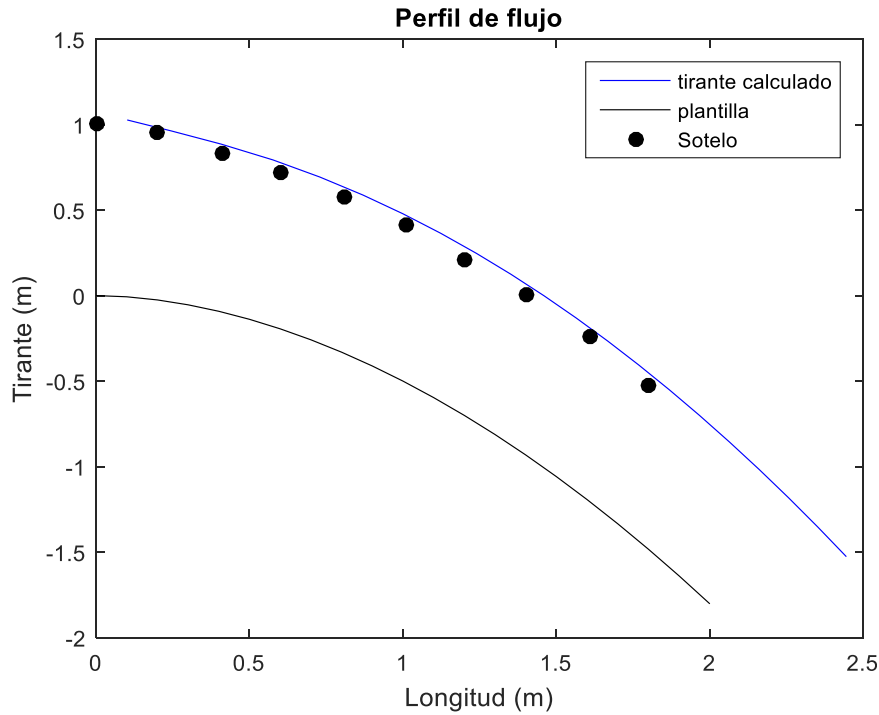


Fig. 25. Comparación tirantes calculados vs calculados por Sotelo:
 $Q= 2.289\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=1\text{m}$, talud del canal $k=0$,
 coeficiente de rugosidad de Manning= 0.014 , $Y_c=0.78\text{m}$

Xmed	Ymed	Xcal	Ycal
0.0000	0.7800	0.0783	0.7916
0.2000	0.7000	0.2115	0.7290
0.3900	0.6000	0.3561	0.6615
0.6000	0.4700	0.6447	0.4918
0.8000	0.3300	0.7730	0.3984
1.0100	0.1500	1.0092	0.1972
1.2100	-0.0600	1.2273	-0.0226
1.4100	-0.3000	1.4344	-0.2618
1.6000	-0.5800	1.6349	-0.5219
1.8000	-0.8600	1.8315	-0.8041

Tabla 7. Comparación de valores (metros).

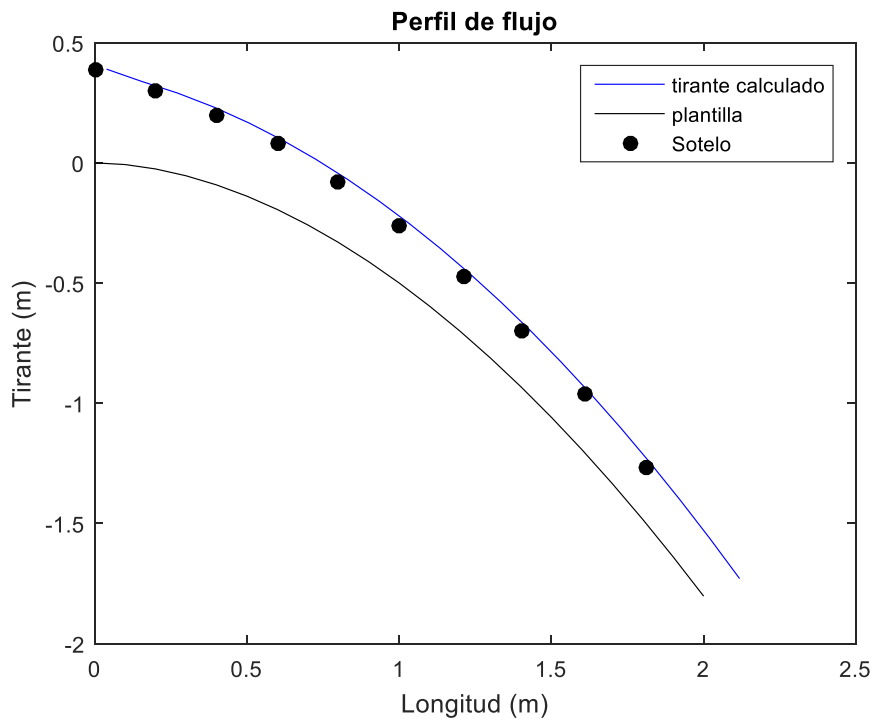


Fig. 26. Comparación tirantes calculados vs calculados por Sotelo:
 $Q= 0.777\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=1\text{m}$, talud del canal $k=0$,
 coeficiente de rugosidad de Manning= 0.014 , $Y_c=0.39\text{m}$

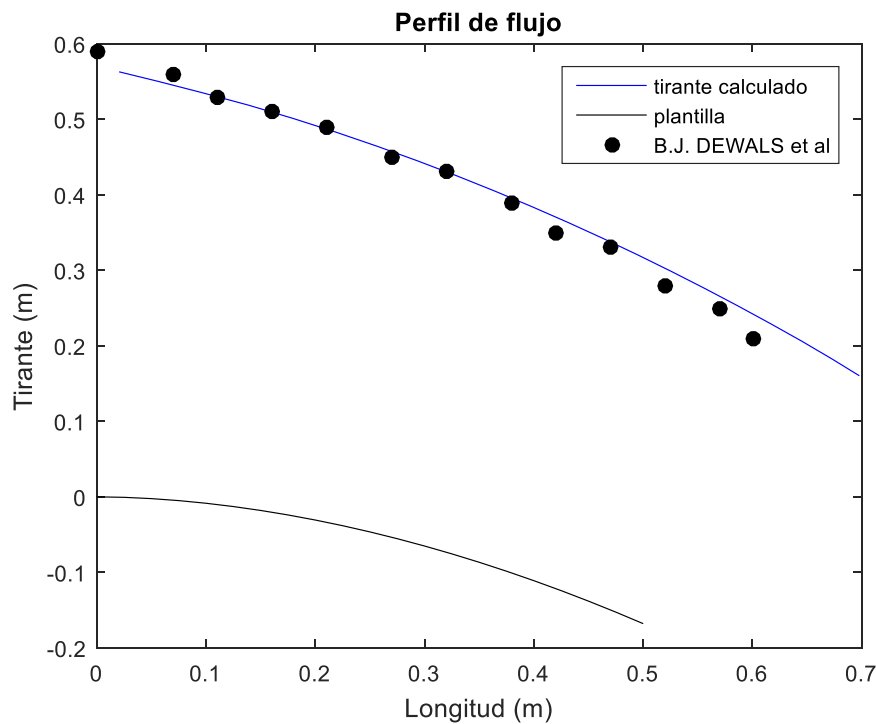
Xmed	Ymed	Xcal	Ycal
0.0000	0.3900	0.0385	0.3898
0.2000	0.3000	0.1525	0.3394
0.4000	0.2000	0.3930	0.2309
0.6000	0.0800	0.6179	0.0933
0.8000	-0.0800	0.8294	-0.0679
1.0000	-0.2600	1.0334	-0.2530
1.2100	-0.4700	1.2334	-0.4629
1.4000	-0.7000	1.4313	-0.6984
1.6100	-0.9600	1.6282	-0.9602
1.8100	-1.2700	1.8246	-1.2484

Tabla 8. Comparación de valores (metros).



6.5 Comparativo con el artículo “Depth-integrated flow modelling taking into account bottom curvature” de B.J. DEWALS et al, Journal of Hydraulic Research Vol. 44, No. 6 (2006), pp. 785–795.

En este trabajo se realiza un modelo computacional para calcular los efectos de curvatura mismos que se comparan con el de la presente tesis, el cimacio se adapta a la función $y = -0.606962(x^{1.854})$



Xmed	Ymed	Xcal	Ycal
0.0000	0.5900	0.0205	0.5627
0.0700	0.5600	0.0560	0.5502
0.1100	0.5300	0.0956	0.5354
0.1600	0.5100	0.1388	0.5186
0.2100	0.4900	0.2190	0.4828
0.2700	0.4500	0.2570	0.4640
0.3200	0.4300	0.3295	0.4250
0.3800	0.3900	0.3642	0.4048
0.4200	0.3500	0.4312	0.3633
0.4700	0.3300	0.4636	0.3419
0.5200	0.2800	0.5264	0.2980
0.5700	0.2500	0.5569	0.2755
0.6000	0.2100	0.6164	0.2294

Tabla 9. Comparación de valores (metros).

Fig. 27. Comparación tirantes calculados vs calculados por B.J. DEWALS et al: $Q= 1.36\text{m}^3/\text{s}$, ancho de plantilla $b=1\text{m}$, talud del canal $k=0$, coeficiente de rugosidad de Manning= 0.014

De los cálculos se obtiene un tirante crítico en la cresta del cimacio $Y_c=0.5538\text{m}$, mientras que el del artículo fue $Y_c=0.59\text{m}$.



7 Conclusiones

- Se consideró un canal cuyo eje y centro de curvatura se alojan sobre un plano vertical, para eliminar cualquier curvatura horizontal, pero cuya sección transversal puede tener cualquier forma trapecial. El efecto del fondo curvo se produce sobre planos verticales paralelos a los que contiene dicho eje y a los centros de curvatura.
- En el análisis se acepta que el flujo en el canal sea incompresible (dado que es a superficie libre), irrotacional, no viscoso y con fricción.
- La curvatura del fondo es la que tiene el canal sobre su eje y define el centro de curvatura de la sección, el cual mantiene la misma posición en dirección transversal. Cuando la curvatura cambia en la dirección del eje del canal, lo hace de manera continua.
- El flujo curvilíneo es el resultado del efecto que produce la curvatura a través del componente de la aceleración normal a las líneas de flujo sobre planos verticales (paralelos al plano xz), sin existir componente del movimiento en la dirección transversal.
- La coordenada s del sistema sigue fielmente la forma conocida del fondo curvo y mide la longitud de arco de dicho fondo. Define también la posición de un plano ortogonal al fondo en cada punto B sobre el eje, el cual contiene la sección transversal del canal y sobre él se mide la coordenada n .
- La coordenada n de un punto P en el campo de flujo se establece desde el punto B en dirección ortogonal al fondo hasta el nivel del punto en cuestión. El perfil de la superficie libre se desconoce, pero se representa por $n = d(s,t)$, donde d es la distancia ortogonal desde el fondo hasta la superficie libre (según n) y es también función de s y la variable t (tiempo). El reto consistió en determinar el valor del tirante (d) que está en función de la geometría y es normal al lecho, una vez que se obtuvo una manera de evaluarlo se estuvo en condiciones de integrar las fuerzas de presión para de esta forma determinar sus variaciones en función del radio de curvatura.
- Una vez caracterizada la geometría que sigue una trayectoria y conociendo las leyes de las fuerzas que actúan sobre las partículas en el sistema se puede determinar su comportamiento en cualquier instante (estado transitorio).
- El modelo empleado cuenta con todos los elementos para calcular la pérdida de energía y de esta forma ampliar el conocimiento de la curvatura
- El modelo no considera efectos inerciales por lo tanto una vez que la componente normal tiene un sentido contrario al de la gravedad y la configuración de fondo regresa a favor de la misma los resultados serán erróneos



- En el caso que el tirante fuera igual al radio de curvatura en un flujo cóncavo se tendría una singularidad matemática lo que indica que físicamente que el canal no tiene la capacidad para transportar el caudal asociado a dicho tirante
- El perfil de flujo no cambia de condiciones de flujo subcrítico a supercrítico.
- La presión en un punto ubicado sobre una línea de corriente puede calcularse con la expresión 207, donde z es un eje coordenado vertical, u es la velocidad de la partícula del fluido, r representa el radio de la curvatura medio entre la superficie libre y el lecho del cauce y d es el tirante perpendicular a la superficie de la curva en la dirección normal. Dicha presión puede ser menor que cero en curvas convexas, que significan presiones inferiores a la atmosférica y por lo tanto se puede estar en peligro de cavitación además de que se ingresa a rangos donde podría presentarse el fenómeno de vaporización por lo tanto hay que tener cuidado en la interpretación de datos pues estos fenómenos quedaron fuera del alcance de esta tesis:
- Se hizo un análisis integral de la variación de la cantidad de movimiento conservación de masa en forma unidimensional para realizar el transitorio una vez que se calculó el tirante y la velocidad en función de la curvatura en estado permanente.
- Con esta técnica será posible comprobar los perfiles de flujo en cualquier estructura con radio de curvatura variable a partir solo de sus componentes rectangulares.
- Se pueden caracterizar cualquier trayectoria en tres dimensiones a partir de datos discretos, muy útil para futuras investigaciones que involucren espacios R3.
- A pesar de las pequeñas diferencias entre los valores calculados y los valores experimentales, habría que pensar que ambos contienen imperfecciones propias de cada método.
- Se pudieron realizar comparaciones con otros modelos numéricos y físicos sin encontrar diferencias significativas por lo que puede aceptarse este método como válido.
- Este método se basó en las versiones no conservativas de las ecuaciones fundamentales de la hidráulica donde existe continuidad en la sección, por tanto, no es aplicable en saltos hidráulicos, así como tampoco es recomendable configuraciones de fondo con inflexiones y cambios en la tangente
- El modelo solo es válido para flujos supercríticos debido a que para que se cumpla la hipótesis de la velocidad angular y aceleración centrípeta vistas en el capítulo 4 para que el tirante vaya en la dirección normal es necesario que la velocidad se encuentre en la región rápida $F > 1$



8 Anexo de códigos

8.1 Código frenet.

Este código fue elaborado por (Claxton, 2006) y se modificó para que calculara los radios de curvatura y las longitudes de arco, trabaja como una función a la que le pasan en función de los datos discretos

```
function [T, N, B, s, Global] = frenet(x,y,z)
% FRENET - Frenet-Serret Space Curve Invariants
%
% [T,N,B,R,S,signo] = frenet(x,y);
% [T,N,B,R,S,signo] = frenet(x,y,z);
%
% Returns the 3 vector and 2 scalar invariants of a space curve defined
% by vectors x,y and z. If z is omitted then the curve is only a 2D,
% but the equations are still valid.
%
%  $\bar{T} = \frac{r'}{|r'|}$  (Tangent)
%
%  $\bar{N} = \frac{T'}{|T'|}$  (Normal)
%
%  $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$  (Binormal)
%
% k = |T'| (Curvature)
%
% t = dot(-B',N) (Torsion)
%
% Example:
% theta = 2*pi*linspace(0,2,100);
% x = cos(theta);
% y = sin(theta);
% z = theta/(2*pi);
% [T,N,B,k,t] = frenet(x,y,z);
% line(x,y,z), hold on
% quiver3(x,y,z,T(:,1)',T(:,2)',T(:,3)', 'color','r')
% quiver3(x,y,z,N(:,1)',N(:,2)',N(:,3)', 'color','g')
% quiver3(x,y,z,B(:,1)',B(:,2)',B(:,3)', 'color','b')
% legend('Curve','Tangent','Normal','Binormal')
% See also: GRADIENT

if nargin == 2,
    z = zeros(size(x));
end

% CONVERT TO COLUMN VECTOR
x = x(:);
y = y(:);
```



```
z = z (:);

% SPEED OF CURVE
dx = gradient(x);
dy = gradient(y);
dz = gradient(z);
dr = [dx dy dz];

ddx = gradient(dx);
ddy = gradient(dy);
ddz = gradient(dz);
ddr = [ddx ddy ddz];

% TANGENT
T = dr./mag(dr,3);

% DERIVATIVE OF TANGENT
dTx = gradient(T(:,1));
dTy = gradient(T(:,2));
dTz = gradient(T(:,3));

dT = [dTx dTy dTz];

% NORMAL
N = dT./mag(dT,3);
% BINORMAL
B = cross(T,N);
% CURVATURE
% k = mag(dT,1);
k = mag(cross(dr,ddr),1)/((mag(dr,1)).^3);
% TORSION
t = dot(-B,N,2);
% RADIUS OF CURVATURE
R = 1./k;

for i=1:length(t)
    if B(i,3)~=0
        signo(i)=sign(B(i,3));
    else
        signo(i)=sign(N(i,3));
    end
end
for i=1:length(t)-1
    s(i)=sqrt((x(i)-x(i+1))^2+(y(i)-y(i+1))^2+(z(i)-z(i+1))^2);
end
% for i=2:length(t)-1
% S(1)=s(1);
% S(i)=S(i-1)+s(i);
% end
s=1.0008*s;
signo=signo';

R(1)=interp1(x(3:10),R(3:10),x(1),'linear','extrap');
R(2)=interp1(x(3:10),R(3:10),x(2),'linear','extrap');
```



```

for i=1:2
% R(3-i)=R(3);
R(length(R)+1-i)=R(length(R)-2);
end

Global=[x y z abs(R) T N B signo];

function N = mag(T,n)
% MAGNITUDE OF A VECTOR (Nx3)
% M = mag(U)
N = sum(abs(T).^2,2).^(1/2);
d = find(N==0);
N(d) = eps*ones(size(d));
N = N(:,ones(n,1));

```

8.2 Código curvatura.

Código que hace el enlace entre diferentes curvas y concentra la información en una matriz de datos

```

clc
clear
e=21; %no. de puntos
%
%
% CURVA NO. 1
% Cimacio

t = linspace(0,2,e);
x1 = t;
y1 = -1/2*t.^1.85;
z1 = 0*t;

[T1, N1, B1, s1, Global1] = frenet(x1,y1,z1);
for i=2:length(z1)-1
S1(1)=s1(1);
S1(i)=S1(i-1)+s1(i);
end
%
% CURVA NO. 2
%Rápida
t = linspace(2,4,e);
x2 = t;
y2 = -37/40*2^(17/20)*t+17/20*2^(17/20);
z2 = 0*t;

[T2, N2, B2, s2, Global2] = frenet(x2,y2,z2);
for i=2:length(x2)-1
S2(1)=s2(1)+sum(s1);
S2(i)=S2(i-1)+s2(i);
end

```



```
%  
% CURVA NO. 3  
%Deflector  
% t = linspace(4,5.71516,e);  
t = linspace(4,5.68,e);  
x3 = t;  
y3 = -sqrt(-t.^(2)+9.7151619213315*t-22.596092789423)-4.622778634838;  
z3 = 0*t;  
  
[T3, N3, B3, s3, Global3] = frenet(x3,y3,z3);  
for i=2:length(x3)-1  
S3(1)=s3(1)+sum(s1)+sum(s2);  
S3(i)=S3(i-1)+s3(i);  
end  
  
S=[0 S1 S1(length(z1)-1) S2 S2(length(x2)-1) S3]';  
x=[x1 x2 x3];  
y=[y1 y2 y3];  
z=[z1 z2 z3];  
T=[T1' T2' T3']';  
N=[N1' N2' N3']';  
B=[B1' B2' B3']';  
Global=[Global1' Global2' Global3]';  
Global=[Global S];  
  
line(x,y,z), hold on  
quiver3(x,y,z,T(:,1)',T(:,2)',T(:,3)', 'color', 'r')  
quiver3(x,y,z,N(:,1)',N(:,2)',N(:,3)', 'color', 'g')  
quiver3(x,y,z,B(:,1)',B(:,2)',B(:,3)', 'color', 'b')  
legend('Curva', 'Tangente', 'Normal', 'Binormal')  
  
clear -regexp ^S;  
clear -regexp ^s;  
clear -regexp ^R;  
clear -regexp ^x;  
clear -regexp ^y;  
clear -regexp ^z;  
clear -regexp ^T;  
clear -regexp ^N;  
clear -regexp ^B;  
clear i e t T B N Global1 Global2 Global3  
save Global
```

8.3 Código perfil de la curvatura.

Este código calcula el perfil en estado permanente en función de la curvatura obtenida en los códigos anteriores así como de las características hidráulicas, comienza con el cálculo del tirante crítico y adiciona los nuevos datos obtenidos a la matriz global y al final realiza una calibración con el cálculo transitorio.



```

%-----
% Rutina de cálculo para analizar flujo gradualmente variado
% Oscar Rangel
% 18/06/17
%-----
%Introduzca datos iniciales

Q=20; %gasto (m3/s)
b=10; %Ancho de plantilla (m)
k=0.25; %talud del canal

tol=10^-3; %tolerancia
y=1;
n=0.014; %rugosidad del material (Manning)
load Global.mat
r=Global(1,4);
%-----
%Ecuaciones para canal prismático
% A=(b+k*y)*y; %Area
% P=b+2*y*sqrt(k^2+1); %Perímetro
% R=A/P; %Radio hidráulico (m)
%-----
Y=zeros(1,length(Global(:,1)));
%Cálculo del tirante crítico por el método de Newton Raphson
Yc=y;
c=Global(1,14);
fy=(-4*Q^(2)*(4*c*k^(2)*y^(3)-3*k*y^(2)*(3*k*r-b*c)+y*(6*c*k^(2)*r^(2)-
3*b*k*r+b^(2)*c)-b^(2)*r))/(3*(y-2*c*r)^(3)*(k*y+b)^(3))-
((Q^(2)*(2*k*y+b))/(y^(2)*(k*y+b)^(2)))+3*9.80665*k*y^(2)+b*9.80665*y;
%evaluamos la función en la posición inicial
while abs(fy)>tol
    fy=(-4*Q^(2)*(4*c*k^(2)*y^(3)-3*k*y^(2)*(3*k*r-
b*c)+y*(6*c*k^(2)*r^(2)-3*b*k*r+b^(2)*c)-b^(2)*r))/(3*(y-
2*c*r)^(3)*(k*y+b)^(3))-
((Q^(2)*(2*k*y+b))/(y^(2)*(k*y+b)^(2)))+3*9.80665*k*y^(2)+b*9.80665*y;
%evaluamos la función en la posición inicial
dfy=(-4*Q^(2)*(12*k^(2)*r^(3)*(2*k*y-b)-
12*c*k^(2)*r^(2)*y*(4*k*y-
b)+r*(36*k^(3)*y^(3)+6*b*k^(2)*y^(2)+4*b^(2)*k*y+b^(3))-
2*c*y*(6*k^(3)*y^(3)+6*b*k^(2)*y^(2)+4*b^(2)*k*y+b^(3)))/(3*(2*c*r-
y)^(4)*(k*y+b)^(4))+((2*Q^(2)*(3*k^(2)*y^(2)+3*b*k*y+b^(2)))/(y^(3)*(k*y
+b)^(3)))+6*9.80665*k*y+b*9.80665; %evaluamos la derivada en ese punto
    Yc=Yc-fy/dfy;
    y=Yc;
end
disp('tirante crítico=')
disp(Yc)
d1=Yc;
d(1)=Yc;

r1=Global(1,4);
r2=Global(2,4);

```



```
esx1=Global(1,5);
esx2=Global(2,5);
c=Global(2,14);
w=(acos(esx1)+acos(esx2))/2;
A=@(y)(b+k.*y).^y;
P=@(y)(b+2.*y*sqrt(1+k^2));
R=@(y)(A(y)/P(y));
a=acos(esx2)-acos(esx1);
F=@(d2)(3*a*(b+k*d2)^(2)*(b+k*d1)^(2)*(b+k*(d1+d2))*(c*(r1+r2)-
d2)^(2)*(c*(r1+r2)-
d1)^(2)*9.80665*d1*(d1+d2)*(d1+d2+2*(r1+r2))*d2*sin(w)-...
3*a*(b+k*d2)^(2)*(b+k*d1)^(2)*(b+k*(d1+d2))*(c*(r1+r2)-
d2)^(2)*(c*(r1+r2)-
d1)^(2)*9.80665*d1*(d1+d2)*(d1+d2+2*(r1+r2))*d2*sin(atan(n^2*Q/A((d1+d2)/
2)*abs(Q/A((d1+d2)/2))/R((d1+d2)/2)^(4/3))))+...
4*(3*b^(5)*(c*(r1+r2)-d2)^(2)*(c*(r1+r2)-
d1)^(2)*9.80665*d1*(d1^(2)*esx1-d2^(2)*esx2)*d2+6*b^(4)*(c*(r1+r2)-
d2)^(2)*(c*(r1+r2)-d1)^(2)*9.80665*k*d1*(2*d1^(3)*esx1+...
d1^(2)*d2*esx1-d1*d2^(2)*esx2-
2*d2^(3)*esx2)*d2+b^(3)*(3*c^(4)*(9.80665*k^(2)*d1*(5*d1^(4)*esx1+8*d1^(3)
)*d2*esx1+d1^(2)*d2^(2)*(esx1-esx2)-...
8*d1*d2^(3)*esx2-5*d2^(4)*esx2)*d2-2*Q^(2)*(d1-d2))*(r1+r2)^(4)-
6*c^(3)*(9.80665*k^(2)*d1*(5*d1^(4)*esx1+8*d1^(3)*d2*esx1+d1^(2)*d2^(2)*(
esx1-esx2)-...
8*d1*d2^(3)*esx2-5*d2^(4)*esx2)*d2-2*Q^(2)*(d1-
d2))*(d1+d2)*(r1+r2)^(3)+3*c^(2)*(9.80665*k^(2)*d1*(5*d1^(4)*esx1+8*d1^(3)
)*d2*esx1+...
d1^(2)*d2^(2)*(esx1-esx2)-8*d1*d2^(3)*esx2-5*d2^(4)*esx2)*d2-
2*Q^(2)*(d1-d2))*(d1^(2)+4*d1*d2+d2^(2))*(r1+r2)^(2)-
2*c*(3*9.80665*k^(2)*d1*(d1+d2)*(5*d1^(4)*esx1+...
8*d1^(3)*d2*esx1+d1^(2)*d2^(2)*(esx1-esx2)-8*d1*d2^(3)*esx2-
5*d2^(4)*esx2)*d2*(r1+r2)+2*Q^(2)*(d1-d2)*(d1*(2*d2-3*(r1+r2))-...
(3*d2-r1-
r2)*(r1+r2))*d1*d2+3*(9.80665*k^(2)*d1^(2)*(5*d1^(4)*esx1+8*d1^(3)*d2*es
x1+d1^(2)*d2^(2)*(esx1-esx2)-8*d1*d2^(3)*esx2-...
5*d2^(4)*esx2)*d2^(2)-2*Q^(2)*(d1-d2)*(d1*(d2-r1-r2)-
d2*(r1+r2))*d1*d2)+b^(2)*(3*c^(4)*(9.80665*k^(2)*d1*(2*d1^(5)*esx1+9*d1^(
4)*d2*esx1+...
5*d1^(3)*d2^(2)*esx1-5*d1^(2)*d2^(3)*esx2-9*d1*d2^(4)*esx2-
2*d2^(5)*esx2)*d2-4*Q^(2)*(d1+d2)*(d1-d2))*(r1+r2)^(4)-
6*c^(3)*(9.80665*k^(2)*d1*(2*d1^(5)*esx1+...
9*d1^(4)*d2*esx1+5*d1^(3)*d2^(2)*esx1-5*d1^(2)*d2^(3)*esx2-
9*d1*d2^(4)*esx2-2*d2^(5)*esx2)*d2-4*Q^(2)*(d1+d2)*(d1-
d2))*(d1+d2)*(r1+r2)^(3)+...
3*c^(2)*(9.80665*k^(2)*d1*(2*d1^(5)*esx1+9*d1^(4)*d2*esx1+5*d1^(3)*d2^(2)
)*esx1-5*d1^(2)*d2^(3)*esx2-9*d1*d2^(4)*esx2-2*d2^(5)*esx2)*d2-...
4*Q^(2)*(d1+d2)*(d1-d2))*(d1^(2)+4*d1*d2+d2^(2))*(r1+r2)^(2)-
2*c*(3*9.80665*k^(2)*d1*(2*d1^(5)*esx1+10*d1^(4)*d2*esx1+d1^(3)*(4*d2^(2)
)+...
(r1+r2)^(2))*esx1-d1^(2)*d2*(4*d2^(2)*esx2+esx1*(r1+r2)^(2))-
d1*d2^(2)*(10*d2^(2)-(r1+r2)^(2))*esx2-
d2^(3)*(2*d2^(2)+(r1+r2)^(2))*esx2)*d2*(r1+r2)+...
4*Q^(2)*(d1-d2)*(d1*(2*d2-3*(r1+r2))-(3*d2-r1-
r2)*(r1+r2))*d1*(d1+d2)*d2+3*(9.80665*k^(2)*d1*(2*d1^(6)*d2*esx1+d1^(5)*
(10*d2^(2)+(r1+r2)^(2))*esx1+...
```



$$\begin{aligned}
 & d1^{(4)} * d2^{(4 * d2^{(2)} + 3 * (r1+r2)^{(2)})} * esx1 - \\
 & d1^{(3)} * (4 * d2^{(4)} * esx2 + d2^{(2)} * (3 * esx1 - esx2) * (r1+r2)^{(2)} - esx1 * (r1+r2)^{(4)}) - \\
 & d1^{(2)} * d2^{(10 * d2^{(4)} * esx2 + \dots} \\
 & \quad d2^{(2)} * (esx1 - 3 * esx2) * (r1+r2)^{(2)} + esx1 * (r1+r2)^{(4)} - \\
 & d1 * d2^{(2)} * (2 * d2^{(4)} + 3 * d2^{(2)} * (r1+r2)^{(2)} - (r1+r2)^{(4)}) * esx2 - \\
 & d2^{(3)} * (d2^{(2)} + \dots \\
 & \quad (r1+r2)^{(2)}) * esx2 * (r1+r2)^{(2)} * d2 - 4 * Q^{(2)} * (d1+d2) * (d1-d2) * (d1 * (d2-r1- \\
 & r2) - \\
 & d2 * (r1+r2))) * d1 * d2 * k + b * (3 * c^{(4)} * (9.80665 * k^{(2)} * d1^{(2)} * (3 * d1^{(4)} * esx1 + \dots \\
 & \quad 5 * d1^{(3)} * d2 * esx1 + d1^{(2)} * d2^{(2)} * (esx1 - esx2) - 5 * d1 * d2^{(3)} * esx2 - \\
 & 3 * d2^{(4)} * esx2) * d2^{(2)} - 2 * Q^{(2)} * (d1 - \\
 & d2) * (d1^{(2)} + 3 * d1 * d2 + d2^{(2)})) * (r1+r2)^{(4)} - \dots \\
 & 6 * c^{(3)} * (9.80665 * k^{(2)} * d1^{(2)} * (3 * d1^{(4)} * esx1 + 5 * d1^{(3)} * d2 * esx1 + d1^{(2)} * d2^{(2)} * \\
 & (esx1 - esx2) - 5 * d1 * d2^{(3)} * esx2 - 3 * d2^{(4)} * esx2) * d2^{(2)} - 2 * Q^{(2)} * (d1 - \\
 & d2) * (d1^{(2)} + \dots \\
 & 3 * d1 * d2 + d2^{(2)})) * (d1+d2) * (r1+r2)^{(3)} + 3 * c^{(2)} * (9.80665 * k^{(2)} * d1^{(2)} * (3 * d1^{(4)} \\
 & (4) * esx1 + 5 * d1^{(3)} * d2 * esx1 + d1^{(2)} * d2^{(2)} * (esx1 - esx2) - 5 * d1 * d2^{(3)} * esx2 - \dots \\
 & \quad 3 * d2^{(4)} * esx2) * d2^{(2)} - 2 * Q^{(2)} * (d1 - \\
 & d2) * (d1^{(2)} + 3 * d1 * d2 + d2^{(2)})) * (d1^{(2)} + 4 * d1 * d2 + d2^{(2)}) * (r1+r2)^{(2)} - \\
 & 2 * c^{(3)} * (3 * 9.80665 * k^{(2)} * d1 * (d1+d2) * (4 * d1^{(5)} * d2 * esx1 + \dots \\
 & \quad d1^{(4)} * (5 * d2^{(2)} + (r1+r2)^{(2)}) * esx1 - \\
 & d1^{(2)} * d2^{(2)} * (5 * d2^{(2)} * esx2 + (esx1 - esx2) * (r1+r2)^{(2)}) - 4 * d1 * d2^{(5)} * esx2 - \\
 & d2^{(4)} * esx2 * (r1+r2)^{(2)}) * d2 * (r1+r2) + \dots \\
 & \quad 2 * Q^{(2)} * (d1 - d2) * (d1^{(3)} * (2 * d2 - 3 * (r1+r2)) + d1^{(2)} * (10 * d2^{(2)} - \\
 & 12 * d2 * (r1+r2) + 3 * (r1+r2)^{(2)}) + d1 * d2 * (2 * d2^{(2)} - \\
 & 12 * d2 * (r1+r2) + 9 * (r1+r2)^{(2)}) - \dots \\
 & \quad 3 * d2^{(2)} * (d2 - r1 - \\
 & r2) * (r1+r2))) * d1 * d2 + (3 * 9.80665 * k^{(2)} * d1 * (d1^{(6)} * (4 * d2^{(2)} + (r1+r2)^{(2)}) * es \\
 & x1 + d1^{(5)} * d2 * (5 * d2^{(2)} + 4 * (r1+r2)^{(2)}) * esx1 + \dots \\
 & \quad d1^{(4)} * (d2^{(2)} * esx2 + esx1 * (r1+r2)^{(2)}) * (r1+r2)^{(2)} - \\
 & d1^{(3)} * d2^{(3)} * (5 * d2^{(2)} * esx2 + 4 * (esx1 - esx2) * (r1+r2)^{(2)}) - \\
 & d1^{(2)} * d2^{(2)} * (4 * d2^{(4)} * esx2 + \dots \\
 & \quad d2^{(2)} * esx1 * (r1+r2)^{(2)} + (esx1 - esx2) * (r1+r2)^{(4)}) - \\
 & 4 * d1 * d2^{(5)} * esx2 * (r1+r2)^{(2)} - \\
 & d2^{(4)} * (d2^{(2)} + (r1+r2)^{(2)}) * esx2 * (r1+r2)^{(2)} * d2 - \dots \\
 & \quad 2 * Q^{(2)} * (d1 - d2) * (3 * d1^{(3)} * (d2 - r1 - r2) + d1^{(2)} * d2 * (9 * d2 - \\
 & 23 * (r1+r2)) + d1 * (3 * d2^{(3)} - 23 * d2^{(2)} * (r1+r2) - 3 * (r1+r2)^{(3)}) - \\
 & 3 * d2 * (d2^{(2)} + \dots \\
 & (r1+r2)^{(2)}) * (r1+r2))) * d1 * d2 * k^{(2)} + (3 * c^{(4)} * (9.80665 * k^{(2)} * d1^{(2)} * (d1^{(4)} * \\
 & (2) * esx1 - d2^{(2)} * esx2) * d2^{(2)} - 2 * Q^{(2)} * (d1 - d2)) * (d1+d2) * (r1+r2)^{(4)} - \dots \\
 & \quad 6 * c^{(3)} * (9.80665 * k^{(2)} * d1^{(2)} * (d1^{(2)} * esx1 - d2^{(2)} * esx2) * d2^{(2)} - \\
 & 2 * Q^{(2)} * (d1 - \\
 & d2)) * (d1+d2)^{(2)} * (r1+r2)^{(3)} + 3 * c^{(2)} * (9.80665 * k^{(2)} * d1^{(2)} * (d1^{(2)} * esx1 - \\
 & \dots \\
 & \quad d2^{(2)} * esx2) * d2^{(2)} - 2 * Q^{(2)} * (d1 - \\
 & d2)) * (d1+d2) * (d1^{(2)} + 4 * d1 * d2 + d2^{(2)}) * (r1+r2)^{(2)} - \\
 & 2 * c^{(3)} * (3 * 9.80665 * k^{(2)} * d1 * (2 * d1^{(4)} * d2 * esx1 + d1^{(3)} * esx1 * (r1+r2)^{(2)} - \dots \\
 & \quad d1^{(2)} * d2 * esx1 * (r1+r2)^{(2)} - d1 * d2^{(2)} * (2 * d2^{(2)} - (r1+r2)^{(2)}) * esx2 - \\
 & d2^{(3)} * esx2 * (r1+r2)^{(2)}) * d2 * (r1+r2) + 2 * Q^{(2)} * (d1 - d2) * (d1 * (4 * d2 - 3 * (r1+r2))) - \\
 & \dots \\
 & \quad 3 * (d2 - \\
 & 2 * (r1+r2)) * (r1+r2))) * d1 * (d1+d2) * d2 + (3 * 9.80665 * k^{(2)} * d1 * (d1^{(5)} * (2 * d2^{(2)} + 2) +
 \end{aligned}$$



```
(r1+r2)^(2))*esx1+3*d1^(4)*d2*esx1*(r1+r2)^(2)-d1^(3)*(d2^(2)*(3*esx1-
esx2)-...
    esx1*(r1+r2)^(2))*(r1+r2)^(2)-d1^(2)*d2*(2*d2^(4)*esx2+d2^(2)*(esx1-
3*esx2)*(r1+r2)^(2)+esx1*(r1+r2)^(4))-d1*d2^(2)*(3*d2^(2)-...
    (r1+r2)^(2))*esx2*(r1+r2)^(2)-
d2^(3)*(d2^(2)+(r1+r2)^(2))*esx2*(r1+r2)^(2))*d2-2*Q^(2)*(d1-
d2)*(3*d1^(2)*(d2-2*(r1+r2))+d1*d2*(3*d2-22*(r1+r2)))-...
    6*(d2^(2)+(r1+r2)^(2))*(r1+r2))*d1*d2)*k^(3)*d1*d2);
x1=0.1*d1;
x2=d1;
f=F(y);
while abs(f)>tol
    if F(x1)*F(x2)<0
        x3=(x1+x2)/2;
        if F(x1)*F(x3)<0
            x2=x3;
        else
            x1=x3;
        end
        y=x3;
        f=F(y);
        d1=y;
    else
        disp('no hay solución en el intervalo')
        break
    end
end
d(2)=d1;
% -----
for i=2:length(Global(:,1))-1
    r1=Global(i,4);
    r2=Global(i+1,4);
    esx1=Global(i,5);
    esx2=Global(i+1,5);
    c=Global(i+1,14);
    w=(acos(esx1)+acos(esx2))/2;
    A=@(y) (b+k.*y).*y;
    P=@(y) b+2.*y*sqrt(1+k^2);
    R=@(y) A(y)/P(y);
    a=acos(esx2)-acos(esx1);
    F=@(d2) 3*a*(b+k*d2)^(2)*(b+k*d1)^(2)*(b+k*(d1+d2))*(c*(r1+r2)-
d2)^(2)*(c*(r1+r2)-
d1)^(2)*9.80665*d1*(d1+d2)*(d1+d2+2*(r1+r2))*d2*sin(w)-...
    3*a*(b+k*d2)^(2)*(b+k*d1)^(2)*(b+k*(d1+d2))*(c*(r1+r2)-
d2)^(2)*(c*(r1+r2)-
d1)^(2)*9.80665*d1*(d1+d2)*(d1+d2+2*(r1+r2))*d2*sin(atan(n^2*Q/A((d1+d2)/
2)*abs(Q/A((d1+d2)/2))/(R((d1+d2)/2)^(4/3))))+...
    4*(3*b^(5)*(c*(r1+r2)-d2)^(2)*(c*(r1+r2)-
d1)^(2)*9.80665*d1*(d1^(2)*esx1-d2^(2)*esx2)*d2+6*b^(4)*(c*(r1+r2)-
d2)^(2)*(c*(r1+r2)-d1)^(2)*9.80665*k*d1*(2*d1^(3)*esx1+...
    d1^(2)*d2*esx1-d1*d2^(2)*esx2-
2*d2^(3)*esx2)*d2+b^(3)*(3*c^(4)*(9.80665*k^(2)*d1*(5*d1^(4)*esx1+8*d1^(3)
)*d2*esx1+d1^(2)*d2^(2)*(esx1-esx2))-...
```



$$8*d1*d2^2(3)*esx2-5*d2^2(4)*esx2)*d2-2*Q^2(2)*(d1-d2))*(r1+r2)^4-6*c^3(3)*(9.80665*k^2)*d1*(5*d1^4)*esx1+8*d1^3(3)*d2*esx1+d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-...$$

$$8*d1*d2^2(3)*esx2-5*d2^2(4)*esx2)*d2-2*Q^2(2)*(d1-d2))*(d1+d2)*(r1+r2)^3+3*c^2(2)*(9.80665*k^2)*d1*(5*d1^4)*esx1+8*d1^3(3)*d2*esx1+...$$

$$d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-8*d1*d2^2(3)*esx2-5*d2^2(4)*esx2)*d2-2*Q^2(2)*(d1-d2))*(d1^2(2)+4*d1*d2+d2^2(2))*(r1+r2)^2-2*c^3(3)*9.80665*k^2*d1*(d1+d2)*(5*d1^4)*esx1+...$$

$$8*d1^3(3)*d2*esx1+d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-8*d1*d2^2(3)*esx2-5*d2^2(4)*esx2)*d2*(r1+r2)+2*Q^2(2)*(d1-d2)*(d1*(2*d2-3*(r1+r2)))-...$$

$$(3*d2-r1-r2)*(r1+r2))*d1*d2+3*(9.80665*k^2)*d1^2(2)*(5*d1^4)*esx1+8*d1^3(3)*d2*esx1+d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-8*d1*d2^2(3)*esx2-...$$

$$5*d2^2(4)*esx2)*d2^2(2)-2*Q^2(2)*(d1-d2)*(d1*(d2-r1-r2)-d2*(r1+r2))*d1*d2)+b^2(2)*(3*c^4(4)*(9.80665*k^2)*d1*(2*d1^5)*esx1+9*d1^4(4)*d2*esx1+...$$

$$5*d1^3(3)*d2^2(2)*esx1-5*d1^2(2)*d2^2(3)*esx2-9*d1*d2^2(4)*esx2-2*d2^2(5)*esx2)*d2-4*Q^2(2)*(d1+d2)*(d1-d2))*(r1+r2)^4-6*c^3(3)*(9.80665*k^2)*d1*(2*d1^5)*esx1+...$$

$$9*d1^4(4)*d2*esx1+5*d1^3(3)*d2^2(2)*esx1-5*d1^2(2)*d2^2(3)*esx2-9*d1*d2^2(4)*esx2-2*d2^2(5)*esx2)*d2-4*Q^2(2)*(d1+d2)*(d1-d2))*(d1+d2)*(r1+r2)^3+...$$

$$3*c^2(2)*(9.80665*k^2)*d1*(2*d1^5)*esx1+9*d1^4(4)*d2*esx1+5*d1^3(3)*d2^2(2)*esx1-5*d1^2(2)*d2^2(3)*esx2-9*d1*d2^2(4)*esx2-2*d2^2(5)*esx2)*d2-...$$

$$4*Q^2(2)*(d1+d2)*(d1-d2))*(d1^2(2)+4*d1*d2+d2^2(2))*(r1+r2)^2-2*c^3(3)*9.80665*k^2*d1*(2*d1^5)*esx1+10*d1^4(4)*d2*esx1+d1^3(3)*(4*d2^2(2)+...$$

$$(r1+r2)^2))*esx1-d1^2(2)*d2*(4*d2^2(2)*esx2+esx1*(r1+r2)^2))-d1*d2^2(2)*(10*d2^2(2)-(r1+r2)^2))*esx2-d2^2(3)*(2*d2^2(2)+(r1+r2)^2))*esx2)*d2*(r1+r2)+...$$

$$4*Q^2(2)*(d1-d2)*(d1*(2*d2-3*(r1+r2))-(3*d2-r1-r2)*(r1+r2))*d1*(d1+d2)*d2+3*(9.80665*k^2)*d1*(2*d1^6)*d2*esx1+d1^5(5)*(10*d2^2(2)+(r1+r2)^2))*esx1+...$$

$$d1^4(4)*d2*(4*d2^2(2)+3*(r1+r2)^2))*esx1-d1^3(3)*(4*d2^2(4)*esx2+d2^2(2)*(3*esx1-esx2)*(r1+r2)^2)-esx1*(r1+r2)^4))-d1^2(2)*d2*(10*d2^2(4)*esx2+...$$

$$d2^2(2)*(esx1-3*esx2)*(r1+r2)^2)+esx1*(r1+r2)^4))-d1*d2^2(2)*(2*d2^2(4)+3*d2^2(2)*(r1+r2)^2)-(r1+r2)^4))*esx2-d2^2(3)*(d2^2(2)+...$$

$$(r1+r2)^2))*esx2*(r1+r2)^2))*d2-4*Q^2(2)*(d1+d2)*(d1-d2)*(d1*(d2-r1-r2)-d2*(r1+r2))*d1*d2)*k+b*(3*c^4(4)*(9.80665*k^2)*d1^2(2)*(3*d1^4)*esx1+...$$

$$5*d1^3(3)*d2*esx1+d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-5*d1*d2^2(3)*esx2-3*d2^2(4)*esx2)*d2^2(2)-2*Q^2(2)*(d1-d2)*(d1^2(2)+3*d1*d2+d2^2(2))*(r1+r2)^4)-...$$

$$6*c^3(3)*(9.80665*k^2)*d1^2(2)*(3*d1^4)*esx1+5*d1^3(3)*d2*esx1+d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-5*d1*d2^2(3)*esx2-3*d2^2(4)*esx2)*d2^2(2)-2*Q^2(2)*(d1-d2)*(d1^2(2)+...$$

$$3*d1*d2+d2^2(2))*(d1+d2)*(r1+r2)^3+3*c^2(2)*(9.80665*k^2)*d1^2(2)*(3*d1^4)*esx1+5*d1^3(3)*d2*esx1+d1^2(2)*d2^2(2)*(esx1-esx2)-5*d1*d2^2(3)*esx2-...$$



```

3*d2^(4)*esx2)*d2^(2)-2*Q^(2)*(d1-
d2)*(d1^(2)+3*d1*d2+d2^(2)))*(d1^(2)+4*d1*d2+d2^(2))*(r1+r2)^(2)-
2*c*(3*9.80665*k^(2)*d1*(d1+d2)*(4*d1^(5)*d2*esx1+...
d1^(4)*(5*d2^(2)+(r1+r2)^(2))*esx1-
d1^(2)*d2^(2)*(5*d2^(2)*esx2+(esx1-esx2)*(r1+r2)^(2))-4*d1*d2^(5)*esx2-
d2^(4)*esx2*(r1+r2)^(2))*d2*(r1+r2)+...
2*Q^(2)*(d1-d2)*(d1^(3)*(2*d2-3*(r1+r2))+d1^(2)*(10*d2^(2)-
12*d2*(r1+r2)+3*(r1+r2)^(2))+d1*d2*(2*d2^(2)-
12*d2*(r1+r2)+9*(r1+r2)^(2)))-...
3*d2^(2)*(d2-r1-
r2)*(r1+r2))*d1*d2+(3*9.80665*k^(2)*d1*(d1^(6)*(4*d2^(2)+(r1+r2)^(2))*es
x1+d1^(5)*d2*(5*d2^(2)+4*(r1+r2)^(2))*esx1+...
d1^(4)*(d2^(2)*esx2+esx1*(r1+r2)^(2))*(r1+r2)^(2)-
d1^(3)*d2^(3)*(5*d2^(2)*esx2+4*(esx1-esx2)*(r1+r2)^(2))-
d1^(2)*d2^(2)*(4*d2^(4)*esx2+...
d2^(2)*esx1*(r1+r2)^(2)+(esx1-esx2)*(r1+r2)^(4))-
4*d1*d2^(5)*esx2*(r1+r2)^(2)-
d2^(4)*(d2^(2)+(r1+r2)^(2))*esx2*(r1+r2)^(2))*d2-...
2*Q^(2)*(d1-d2)*(3*d1^(3)*(d2-r1-r2)+d1^(2)*d2*(9*d2-
23*(r1+r2))+d1*(3*d2^(3)-23*d2^(2)*(r1+r2)-3*(r1+r2)^(3))-
3*d2*(d2^(2)+...
(r1+r2)^(2))*(r1+r2))*d1*d2)*k^(2)+(3*c^(4)*(9.80665*k^(2)*d1^(2)*(d1^(2)
)*esx1-d2^(2)*esx2)*d2^(2)-2*Q^(2)*(d1-d2))*(d1+d2)*(r1+r2)^(4)-...
6*c^(3)*(9.80665*k^(2)*d1^(2)*(d1^(2)*esx1-d2^(2)*esx2)*d2^(2)-
2*Q^(2)*(d1-
d2))*(d1+d2)^(2)*(r1+r2)^(3)+3*c^(2)*(9.80665*k^(2)*d1^(2)*(d1^(2)*esx1-
...
d2^(2)*esx2)*d2^(2)-2*Q^(2)*(d1-
d2))*(d1+d2)*(d1^(2)+4*d1*d2+d2^(2))*(r1+r2)^(2)-
2*c*(3*9.80665*k^(2)*d1*(2*d1^(4)*d2*esx1+d1^(3)*esx1*(r1+r2)^(2))-...
d1^(2)*d2*esx1*(r1+r2)^(2)-d1*d2^(2)*(2*d2^(2)-(r1+r2)^(2))*esx2-
d2^(3)*esx2*(r1+r2)^(2))*d2*(r1+r2)+2*Q^(2)*(d1-d2)*(d1*(4*d2-3*(r1+r2))-
...
3*(d2-
2*(r1+r2))*(r1+r2))*d1*(d1+d2)*d2+(3*9.80665*k^(2)*d1*(d1^(5)*(2*d2^(2)+
(r1+r2)^(2))*esx1+3*d1^(4)*d2*esx1*(r1+r2)^(2)-d1^(3)*(d2^(2)*(3*esx1-
esx2))-...
esx1*(r1+r2)^(2))*(r1+r2)^(2)-d1^(2)*d2*(2*d2^(4)*esx2+d2^(2)*(esx1-
3*esx2)*(r1+r2)^(2)+esx1*(r1+r2)^(4))-d1*d2^(2)*(3*d2^(2))-...
(r1+r2)^(2))*esx2*(r1+r2)^(2)-
d2^(3)*(d2^(2)+(r1+r2)^(2))*esx2*(r1+r2)^(2))*d2-2*Q^(2)*(d1-
d2)*(3*d1^(2)*(d2-2*(r1+r2))+d1*d2*(3*d2-22*(r1+r2)))-...
6*(d2^(2)+(r1+r2)^(2))*(r1+r2))*d1*d2)*k^(3)*d1*d2);
if Global(i+1,4)>1000
h=Global(i+2,1)-Global(i+1,1);
Y(i+1) = d1; % Condición inicial
s=tan(acos(Global(i+1,5)));
y=Y(i+1);
k1 = (s-
n^2*Q^2/(((b+k*y)*y)^2*((b+k*y)*y)/(b+2*y*sqrt(k^2+1)))^(4/3)))/(1-
(Q/(((b+k*y)*y)*sqrt(9.80665*cos(atan(s))*((b+k*y)*y)/(b+2*k*y))))^2);
y=Y(i+1)+0.5*h*k1;
k2 = (s-
n^2*Q^2/(((b+k*y)*y)^2*((b+k*y)*y)/(b+2*y*sqrt(k^2+1)))^(4/3)))/(1-
(Q/(((b+k*y)*y)*sqrt(9.80665*cos(atan(s))*((b+k*y)*y)/(b+2*k*y))))^2);

```



```

y=Y(i+1)+0.5*h*k2;
k3 = (s-
n^2*Q^2/(((b+k*y)*y)^2*((b+k*y)*y)/(b+2*y*sqrt(k^2+1)))^(4/3)))/(1-
(Q/(((b+k*y)*y)*sqrt(9.80665*cos(atan(s))*((b+k*y)*y)/(b+2*k*y))))^2);
y=Y(i+1)+k3*h;
k4 = (s-
n^2*Q^2/(((b+k*y)*y)^2*((b+k*y)*y)/(b+2*y*sqrt(k^2+1)))^(4/3)))/(1-
(Q/(((b+k*y)*y)*sqrt(9.80665*cos(atan(s))*((b+k*y)*y)/(b+2*k*y))))^2);
d1 = Y(i+1) + (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;      % ecuación principal
else
    if Global(i+1,14)<0
        x1=0.5*d1;
        x2=d1;
    else
        x1=0.99*d1;
        x2=1.01*d1;
    end
    f=F(y);
    while abs(f)>tol
        if F(x1)*F(x2)<0
            x3=(x1+x2)/2;
            if F(x1)*F(x3)<0
                x2=x3;
            else
                x1=x3;
            end
            y=x3;
            f=F(y);
            d1=y;
        else
            % disp('no hay solución en el intervalo')
            break
        end
    end
end
d(i+1)=d1;
end

% Fórmulas para la pendiente de fricción
% B=@(y) b+2*k.*y;
A=@(y) (b+k.*y).*y;
P=@(y) b+2.*y*sqrt(1+k^2);
R=@(y) A(y)/P(y);

senaf=zeros(1,length(Global(:,1)));
=====
=====
%% 1) D A T O S   H I D R O G R A M A
theta = .6;
psi = .5;
Cr=1;
dt=Cr*(Global(2,1)-Global(1,1))/(Q/(A(d(1,1)))+sqrt(9.80665*d(1,1)));

x=Global(:,1)';
J=length(x)-1;

```



```
h=x(length(x))/J;  
senan(1,:)=sin(acos(Global(:,5)));
```

```
=====  
=====  
% 2) C R E A C I Ó N   D E   L A   M A T R I Z   Y   V E C T O R E S
```

```
% Vector para los tirantes
```

```
YY=zeros(2,J+1);
```

```
YY(1,:)=d(:);
```

```
% Vector para las velocidades
```

```
UU=zeros(2,J+1);
```

```
% Vectores para los deltas (tirante, velocidad, pendiente y pendiente fricción)
```

```
dy_prom = zeros(1,J);
```

```
du_prom = zeros(1,J);
```

```
dseanf_prom= zeros(1,J);
```

```
dsean_prom= zeros(1,J);
```

```
desx_prom= zeros(1,J);
```

```
% Vectores para los valores de ecuación de masa
```

```
a1= zeros(1,J);
```

```
b1= zeros(1,J);
```

```
c1= zeros(1,J);
```

```
d1= zeros(1,J);
```

```
e1= zeros(1,J);
```

```
% Vectores para los valores de ecuación de cantidad de movimiento
```

```
a2= zeros(1,J);
```

```
b2= zeros(1,J);
```

```
c2= zeros(1,J);
```

```
d2= zeros(1,J);
```

```
e2= zeros(1,J);
```

```
% Vectores de posicionamiento en la matriz pentadiagonal
```

```
c1i= zeros(1,J-1);
```

```
d1i= zeros(1,J-1);
```

```
c1j= zeros(1,J-1);
```

```
d1j= zeros(1,J-1);
```

```
% Vectores para los valores de ecuación de cantidad de movimiento (MATRIZ)
```

```
c2i= zeros(1,J);
```

```
d2i= zeros(1,J);
```

```
c2j= zeros(1,J);
```

```
d2j= zeros(1,J);
```

```
% Vector de términos independientes
```

```
BB=zeros(J*2,1);
```

```
=====  
% INICIA CREACIÓN DE LA MATRIZ DE POSICIONES  
=====
```




```

% Posiciones de las variables para la matriz pentadiagonal en sparse()

for i=1:J
    c1i(i)=2*(i-1)+1;
    c2i(i)=2*(i-1)+2;
    d1i(i)=2*(i-1)+1;
    d2i(i)=2*(i-1)+2;

    c1j(i)=2*(i-1)+1;
    c2j(i)=2*(i-1)+1;
    d1j(i)=2*(i-1)+2;
    d2j(i)=2*(i-1)+2;
end

norma=1;

while norma>tol
%
=====
%                               Condición de frontera aguas arriba
=====
% Velocidad en frontera aguas arriba
Q_n1=Q;
Q_n2=Q;

% Vector para las velocidades iniciales
UU(1,:)=Q_n1./(A(YY(1,:)));

% Vector para la pendiente de fricción
for i=1:J+1
    ecu_senaf=@(y) sin(atan(n^2*UU(1,i)*abs(UU(1,i))/(R(y)^(4/3))));
    senaf(i)=ecu_senaf(YY(1,i));
end
% Ciclo para calcular las deltas de tirantes, velocidades, Sf y s
for i=1:J
    du_prom(i)=(UU(1,i)+UU(1,i+1))/2;
    dy_prom(i)=(YY(1,i)+YY(1,i+1))/2;
    dsenaf_prom(i)=(senaf(i)+senaf(i+1))/2;
    dsenan_prom(i)=(senan(i)+senan(i+1))/2;
    desx_prom(i)=(Global(i,5)+Global(i+1,5))/2;
end
%
=====
%                               Llenado de los nodos intermedios de la matriz porosa
%
=====
    for j=1:J
% Conservación de masa
=====
        a1(j)=-dy_prom(j)*theta/h;
        b1(j)=(1-psi)/dt-du_prom(j)*theta/h;
        c1(j)=dy_prom(j)*theta/h;
        d1(j)=psi/dt+du_prom(1,j)*theta/h;
        e1(j)=(1-psi)/dt*YY(1,j)+(psi/dt)*YY(1,j+1)-du_prom(j)*(1-
theta)/h*(YY(1,j+1)-YY(1,j))-...

```



```
dy_prom(j)*(1-theta)/h*(UU(1,j+1)-UU(1,j));
%
% Conservación de cantidad de movimiento
=====
a2(j)=(1-psi)/dt-du_prom(j)*theta/h;
b2(j)=-9.80665*desx_prom(j)*theta/h;
c2(j)=(psi/dt)+du_prom(j)*theta/h;
d2(j)=9.80665*desx_prom(j)*theta/h;
e2(j)=(1-psi)/dt*UU(1,j)+(psi/dt)*UU(1,j+1)-du_prom(j)*(1-
theta)/h*(UU(1,j+1)-UU(1,j))-...
9.80665*desx_prom(j)*(1-theta)/h*(YY(1,j+1)-YY(1,j))-
9.80665*(dsenf_prom(j)- dsenan_prom(j));

% Matriz porosa completa
C1=sparse(c1i,c1j,c1,J*2,J*2);
C2=sparse(c2i,c2j,c2,J*2,J*2);
D1=sparse(d1i,d1j,d1,J*2,J*2);
D2=sparse(d2i,d2j,d2,J*2,J*2);
end
% Suma de las matrices porosas para crear la matriz BB
AA=C1+C2+D1+D2;

=====
% % Condiciones de frontera para el vector resultados
=====
% Nodos nones en el vector resultado
yy=1;
Ycn1=yy;
r=Global(1,4);

fy=((Q_n1^(2)*(12*k^(2)*r^(2)*yy+2*r*(15*k^(2)*yy^(2)+3*b*k*yy+b^(2))+yy*
(20*k^(2)*yy^(2)+9*b*k*yy+3*b^(2))))/(12*(r+yy)^(3)*(k*yy+b)^(3))-
((Q_n1^(2)*(2*k*yy+b))/(yy^(2)*(k*yy+b)^(2)))+3*9.80665*k*yy^(2)+b*9.8066
5*yy; %evaluamos la función en la posición inicial
while abs(fy)>tol

fy=((Q_n1^(2)*(12*k^(2)*r^(2)*yy+2*r*(15*k^(2)*yy^(2)+3*b*k*yy+b^(2))+yy*
(20*k^(2)*yy^(2)+9*b*k*yy+3*b^(2))))/(12*(r+yy)^(3)*(k*yy+b)^(3))-
((Q_n1^(2)*(2*k*yy+b))/(yy^(2)*(k*yy+b)^(2)))+3*9.80665*k*yy^(2)+b*9.8066
5*yy; %evaluamos la función en la posición inicial
dfy=((-2*Q_n1^(2)*(15*k^(3)*yy^(7)+6*b*k^(2)*yy^(6)-
4*k*yy^(5)*(30*k^(2)*r^(2)+33*b*k*r-b^(2))-
yy^(4)*(240*k^(3)*r^(3)+456*b*k^(2)*r^(2)+88*b^(2)*k*r-b^(3))-
2*yy^(3)*r*(72*k^(3)*r^(3)+300*b*k^(2)*r^(2)+144*b^(2)*k*r+11*b^(3))-
24*b*yy^(2)*r^(2)*(12*k^(2)*r^(2)+16*b*k*r+3*b^(2))-
96*b^(2)*yy*r^(3)*(2*k*r+b)-
48*b^(3)*r^(4)))/(3*yy^(3)*(yy+2*r)^(4)*(k*yy+b)^(4)))+6*9.80665*k*yy+b*9
.80665; %evaluamos la derivada en ese punto
Ycn1=Ycn1-fy/dfy;
yy=Ycn1;
end
YY(2,1)=Ycn1; %Tirantes
UU(2,1)=Q_n2/A(YY(2,1)); %Velocidades
j=1;
for i=1:2:2*J
```



```

        BB(i)=e1(j)-a1(j)*Q_n2/A(YY(1,j))-b1(j)*YY(1,j);    % Nodos NONES
en el vector resultado
        BB(i+1)=e2(j)-a2(j)*Q_n2/A(YY(1,j))-b2(j)*YY(1,j);  % Nodos PARES
en el vector resultado
        j=j+1;
    end

=====
% La solución de la matriz es:
    SOL=AA^-1*BB;
% El vector solución tiene tirantes y velocidad intercaladas:
% [y1 u2 y2 u3 y3 u4 y4 ... .. yJ*2-1 uJ*2] ^(n+1) entonces...
    j=1;
    for i=1:2:J*2
        YY(2,j+1)=SOL(i+1);    %Tirantes
        UU(2,j+1)=SOL(i);      %Velocidades
        j=j+1;
    end
norma=norm(YY(1,:)-YY(2,:));

% Actualización de los vectores de tirante y velocidad
    YY(1,:)=YY(2,:);
End

d=YY(1,:);

for i=1:length(Global(:,1))
if Global(i,4)>1000
Global(i,14)=-1;
Global(i,8)=Global(i,6);
Global(i,9)=-Global(i,5);
end
X(i)=d(i)*Global(i,8)*Global(i,14)+Global(i,1);
Y(i)=d(i)*Global(i,9)*Global(i,14)+Global(i,2);
end

for i=1:length(Global(:,1))
if Global(i,4)>1000
Global(i,14)=0;
Global(i,8)=0;
Global(i,9)=0;
end
end

for i=1:length(Global(:,1))
if Global(i,4)>1000
Global(i,16)=1;
Global(i,17)=0;
else
Global(i,16)=( (4*(3*Global(i,14)^(2)*Global(i,4)^(2)-
3*Global(i,14)*d(i)*Global(i,4)+d(i)^(2))) / (3*(2*Global(i,14)*Global(i,4)
-d(i)^(2))) );
Global(i,17)=( (2*(3*Global(i,14)*Global(i,4)-
2*d(i)*d(i)) / (3*(2*Global(i,14)*Global(i,4)-d(i)^(2))) );
end
end

```



```
figure(1)
plot(X,Y, '-b')
title('Perfil de flujo')
xlabel('Longitud (m)')
ylabel('Tirante (m)')
hold on
plot(Global(:,1),Global(:,2), '-k')
hold on

hf(1)=0;
for i=2:length(Global(:,1))
hf(i)=Global(1,2)-
Global(i,2)+d(1)*Global(1,5)+2*UU(1,1)^2*d(1)/(9.80665*(2*Global(1,14)*Global(1,4)-d(1)))-d(i)*Global(i,5)-
abs(Global(i,14))*2*(UU(1,i))^2*d(i)/(9.80665*(2*Global(i,14)*Global(i,4)-d(i)))+(UU(1,1))^2/(2*9.80665)-(UU(1,i))^2/(2*9.80665);
end

Global=[Global d' X' Y' UU(1,:) ' hf'];

save GlobalP Global Q n b k Yc tol theta psi

clear -regexp ^a;
clear -regexp ^b;
clear -regexp ^b;
clear -regexp ^c;
clear -regexp ^d;
clear -regexp ^e;
clear -regexp ^C;
clear -regexp ^D;
clear -regexp ^Q_n;
clear -regexp ^dfy;
clear -regexp ^esx;
clear -regexp ^f;
clear -regexp ^k;
clear -regexp ^r;
clear -regexp ^x;
clear a b s tol w dfy i n y Yc F h Q X Y A P R j J AA BB psi senaf SOL
senan theta thidro tinicio norma Ycn1 yy YY hf UU
```

8.4 Código transitorio de la curvatura.

Código que calcula el comportamiento de los tirantes y velocidades en el tiempo mediante condiciones de frontera de gasto y nivel

```
%=====
%           " TRÁNSITO DE UNA AVENIDA EN UN CANAL "
%
%  Obtiene datos de Condicion_Inicial
%  X  - Longitud en x para el perfil
%  Y  - Perfil del agua
%  Yc - Tirante crítico
%  Q  - Gasto
```



```

%      n - Rugosidad (Manning)
%      b - Base
%      k - Talud
%      J - Intervalos
%      plantilla - Elevación del terreno natural
%ELABORADO POR: Oscar Rangel
%=====
clear
clc

% A)      C O N D I C I Ó N   I N I C I A L
% Datos iniciales
load GlobalP.mat

% Gasto pico para el hidrograma
Qp=50;
d=Global(:,18)';
% c=(Global(:,16)'+abs(Global(:,14))'.*Global(:,17)')';
B=b+2*k.*d;
% ycp=1/6*d.*(3*b+2*d.*k)*1./(b+2*d.*k);

% Fórmulas para la pendiente de fricción
A=@(y) (b+k.*y).^y;
P=@(y) b+2.*y*sqrt(1+k^2);
R=@(y) A(y)/P(y);
senaf=zeros(1,length(Global(:,1))));
=====
% 1) D A T O S      H I D R O G R A M A
thidro      = 5;          % Tiempo de duración del hidrograma
tinicio      = 2;          % Tiempo de inicio del hidrograma
tsim = 9;      % Tiempo total de simulación
Cr=1;
dt=Cr*(Global(2,1)-Global(1,1))/(Q/(A(d(1,1))));
%      Hidrograma de entrada

tiempo = [0.00 0.05 0.25 0.45 0.50 0.60 0.74 0.86 1.00];
tau      = [0.00 0.20 1.00 0.20 0.00 -0.22 -0.33 -0.22 0.00]; % max min

tau=(Qp-Q)*tau+Q;
tiempo=tiempo*thidro+tinicio;
t_final=tiempo(length(tiempo));
t_i = tinicio:(t_final-tinicio)/100:t_final;
coef_val = spline(tiempo,[0 tau 0]); % Campana
x=Global(:,1)';
y=Global(:,2)';
X=Global(:,19)';
Y=Global(:,20)';
J=length(X)-1;
h=x(length(x))/J;
senan(1,:)=sin(acos(Global(:,5))));

% 1.1) G R A F I C A C I Ó N   D E L   P E R F I L   E   H I D R O G R
A M A

```



```
figure(1)
clf
plot(X,Y)
hold on
plot(x(1),Yc,'or','MarkerFaceColor','r')
plot(x,y,'k','LineWidth',2); %Plantilla
legend('Perfil del agua','Tirante
crítico','Plantilla','Location','best')
title('Perfil del agua')
xlabel('Distancia [m]')
ylabel('Tirante [m]')

figure(2)
clf
hold on
plot(tiempo,tau,'o',ti,ppval(ti,coef_val))
title('Hidrograma de entrada')
xlabel('Tiempo (s)')
ylabel('Caudal (m^3/s)')

=====
%% 2) C R E A C I Ó N   D E   L A   M A T R I Z   Y   V E C T O R E S
% Vector para los tirantes

YY=zeros(2,J+1);

YY(1,:)=d(:);

% Vector para las velocidades

UU=zeros(2,J+1);

% Vectores para los deltas (tirante, velocidad, pendiente y pendiente
fricción)

dy_prom = zeros(1,J);
du_prom = zeros(1,J);
dsenaf_prom= zeros(1,J);
dsenan_prom= zeros(1,J);
desx_prom= zeros(1,J);

% Vectores para los valores de ecuación de masa

a1= zeros(1,J);
b1= zeros(1,J);
c1= zeros(1,J);
d1= zeros(1,J);
e1= zeros(1,J);

% Vectores para los valores de ecuación de cantidad de movimiento

a2= zeros(1,J);
b2= zeros(1,J);
c2= zeros(1,J);
```




```
c1j(i)=2*(i-1)+1;
c2j(i)=2*(i-1)+1;
d1j(i)=2*(i-1)+2;
d2j(i)=2*(i-1)+2;
end
=====
=====
%% 3) TRANSITORIO
t=0;
while t<tsim
=====
%                               Condición de frontera aguas arriba
=====
% Velocidad en frontera aguas arriba
if t+dt <= tinicio
    for i=1:J+1
        Q_n1=Q;
        Q_n2=Q;
    end
elseif t+dt > tinicio && t<t_final
    for i=1:J+1
        Q_n1=ppval(coef_val,t);
        Q_n2=ppval(coef_val,t+dt);
    end
else
    for i=1:J+1
        Q_n1=Q;
        Q_n2=Q;
    end
end
% Vector para las velocidades iniciales
UU(1,:)=Q_n1./(A(YY(1,:)));

% Vector para la pendiente de fricción
for i=1:J+1
    ecu_af=@(y) sin(atan(n^2*UU(1,i)*abs(UU(1,i))/(R(y)^(4/3))));
    senaf(i)=ecu_af(YY(1,i));
end
% Ciclo para calcular las deltas de tirantes, velocidades, Sf y s
for i=1:J
    du_prom(i)=(UU(1,i)+UU(1,i+1))/2;
    dy_prom(i)=(YY(1,i)+YY(1,i+1))/2;
    dsenaf_prom(i)=(senaf(i)+senaf(i+1))/2;
    dsenan_prom(i)=(senan(i)+senan(i+1))/2;
    desx_prom(i)=(Global(i,5)+Global(i+1,5))/2;
end
=====
%                               Llenado de los nodos intermedios de la matriz porosa
=====
for j=1:J
% Conservación de masa
=====
    a1(j)=-dy_prom(j)*theta/h;
    b1(j)=(1-psi)/dt-du_prom(j)*theta/h;
    c1(j)=dy_prom(j)*theta/h;
    d1(j)=psi/dt+du_prom(1,j)*theta/h;
```




```

e1(j)=(1-psi)/dt*YY(1,j)+(psi/dt)*YY(1,j+1)-du_prom(j)*(1-
theta)/h*(YY(1,j+1)-YY(1,j))-...
dy_prom(j)*(1-theta)/h*(UU(1,j+1)-UU(1,j));
%
% Conservación de cantidad de movimiento
=====
a2(j)=(1-psi)/dt-du_prom(j)*theta/h;
b2(j)=-9.80665*desx_prom(j)*theta/h;
c2(j)=(psi/dt)+du_prom(j)*theta/h;
d2(j)=9.80665*desx_prom(j)*theta/h;
e2(j)=(1-psi)/dt*UU(1,j)+(psi/dt)*UU(1,j+1)-du_prom(j)*(1-
theta)/h*(UU(1,j+1)-UU(1,j))-...
9.80665*desx_prom(j)*(1-theta)/h*(YY(1,j+1)-YY(1,j))-
9.80665*(dsenf_prom(j)-dsenan_prom(j));
% Matriz porosa completa
C1=sparse(c1i,c1j,c1,J*2,J*2);
C2=sparse(c2i,c2j,c2,J*2,J*2);
D1=sparse(d1i,d1j,d1,J*2,J*2);
D2=sparse(d2i,d2j,d2,J*2,J*2);
end
% Suma de las matrices porozas para crear la matriz BB
AA=C1+C2+D1+D2;

=====
% % Condiciones de frontera para el vector resultados
=====
% Nodos nones en el vector resultado
yy=1;
Ycn1=yy;
r=Global(1,4);
c=Global(1,14);
fy=((-4*Q_n1^(2)*(4*c*k^(2)*yy^(3)-3*k*yy^(2)*(3*k*r-
b*c)+yy*(6*c*k^(2)*r^(2)-3*b*k*r+b^(2)*c)-b^(2)*r))/(3*(yy-
2*c*r)^(3)*(k*yy+b)^(3))-
((Q_n1^(2)*(2*k*yy+b))/(yy^(2)*(k*yy+b)^(2)))+3*9.80665*k*yy^(2)+b*9.8066
5*yy; %evaluamos la función en la posición inicial
while abs(fy)>tol
fy=((-4*Q_n1^(2)*(4*c*k^(2)*yy^(3)-3*k*yy^(2)*(3*k*r-
b*c)+yy*(6*c*k^(2)*r^(2)-3*b*k*r+b^(2)*c)-b^(2)*r))/(3*(yy-
2*c*r)^(3)*(k*yy+b)^(3))-
((Q_n1^(2)*(2*k*yy+b))/(yy^(2)*(k*yy+b)^(2)))+3*9.80665*k*yy^(2)+b*9.8066
5*yy; %evaluamos la función en la posición inicial
dfy=((-4*Q_n1^(2)*(12*k^(2)*r^(3)*(2*k*yy-b)-
12*c*k^(2)*r^(2)*yy*(4*k*yy-
b)+r*(36*k^(3)*yy^(3)+6*b*k^(2)*yy^(2)+4*b^(2)*k*yy+b^(3))-
2*c*yy*(6*k^(3)*yy^(3)+6*b*k^(2)*yy^(2)+4*b^(2)*k*yy+b^(3)))/(3*(2*c*r-
yy)^(4)*(k*yy+b)^(4)))+(2*Q_n1^(2)*(3*k^(2)*yy^(2)+3*b*k*yy+b^(2)))/(yy^(
3)*(k*yy+b)^(3))+6*9.80665*k*yy+b*9.80665; %evaluamos la derivada en
ese punto
Ycn1=Ycn1-fy/dfy;
yy=Ycn1;
end
YY(2,1)=Ycn1; %Tirantes
UU(2,1)=Q_n2/A(YY(2,1)); %Velocidades
j=1;
for i=1:2:2*J

```



```
BB(i)=e1(j)-a1(j)*Q_n2/A(YY(1,j))-b1(j)*YY(1,j);    % Nodos NONES
en el vector resultado
BB(i+1)=e2(j)-a2(j)*Q_n2/A(YY(1,j))-b2(j)*YY(1,j);  % Nodos PARES
en el vector resultado
j=j+1;
end
=====
% La solución de la matriz es:
SOL=AA^-1*BB;
% El vector solución tiene tirantes y velocidad intercaladas:
% [y1 u1 y2 u2 y3 u3 y4 ... ... yJ*2-1 uJ*2] ^(n+1) entonces...
j=1;
for i=1:2:J*2
    YY(2,j+1)=SOL(i+1);    %Tirantes
    UU(2,j+1)=SOL(i);      %Velocidades
    j=j+1;
end
for i=1:length(Global(:,1))
if Global(i,4)>1000
Global(i,14)=-1;
Global(i,8)=Global(i,6);
Global(i,9)=-Global(i,5);
end
XX(i)=YY(1,i)*Global(i,8)*Global(i,14)+Global(i,1);
YY(3,i)=YY(1,i)*Global(i,9)*Global(i,14)+Global(i,2);
end

for i=1:length(Global(:,1))
if Global(i,4)>1000
Global(i,14)=0;
Global(i,8)=0;
Global(i,9)=0;
end
end

figure(1)
clf
plot(XX,YY(3,:))
hold on
plot(x(1),Yc,'or','MarkerFaceColor','k')
plot(x,y,'k','LineWidth',2); %Plantilla
plot(X,Y,'r','LineWidth',1); %permanente inicial solución exacta
legend('Perfil del agua','Tirante
crítico','Plantilla','inicial','Location','best')
title('Perfil del agua')
xlabel('Distancia [m]')
ylabel('Tirante [m]')
pause(0.1)

% Actualización de los vectores de tirante y velocidad
YY(1,:)=YY(2,:);

%% 3.1) Incremento de tiempo y graficación del gasto sobre el hidrograma
figure(2)
plot(t,Q_n1,'ob')
fprintf('Tiempo simulación: %2.4f\n',t)
t=t+dt;
```

9 Anexo desarrollos matemáticos

A continuación, se presenta el desarrollo de las ecuaciones fundamentales extraído de la publicación “Hidráulica de canales Principios básicos”. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. (García, 2016.). Así como la demostración de la consistencia numérica.

9.2 Ecuaciones fundamentales de la hidráulica

La materia es un sistema de partículas que se extiende por el espacio tiempo y que contiene energía. Cuando dicho sistema cambia de estado durante el tiempo se dice que es transitorio. Se pueden proponer modelos que incluyan una malla espacio temporal de acuerdo con las leyes de las fuerzas que actúan sobre las partículas para un tiempo y posición inicial y así determinar las velocidades, presiones, carga energética, etc. de dichas partículas para cada instante y posición dados.

Para proponer un modelo que caracterice adecuadamente el fenómeno se debe considerar las ecuaciones fundamentales

9.2.1 Ecuación general de conservación de propiedad

9.2.1.1 Sistema y volumen de control

Un sistema se puede ver una masa bien definida de un cuerpo o materia que se distingue claramente de sus alrededores. Las fronteras de un sistema forman una superficie cerrada que puede cambiar en el tiempo con la condición de que siempre contenga la misma masa, es decir, que se cumpla la relación:

$$\frac{dm}{dt} = \quad 112$$

El volumen de control se refiere a una región en el espacio a través de cuyas fronteras entra y sale continuamente un flujo de una propiedad física. La frontera de un volumen de control se llama superficie de control. Este marco de referencia es la base para deducir una ley general del balance de una propiedad física.

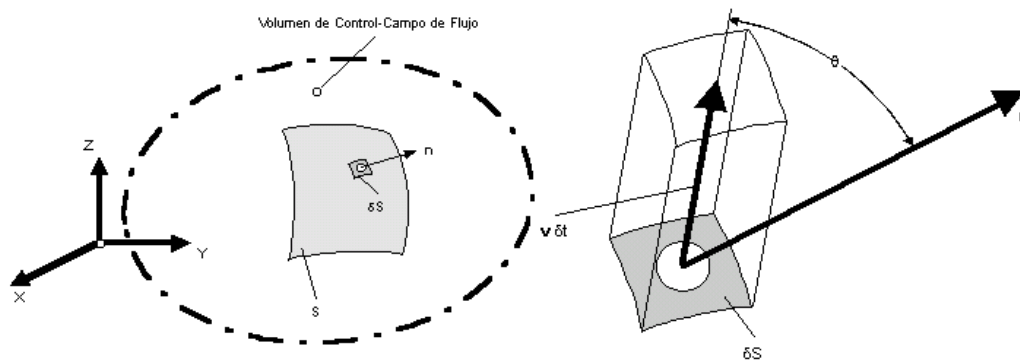


Fig. 28 Sistema y volumen de control (imagen por Escuela Superior de Ingenieros-Universidad de Navarra)



9.2.1.2 Ecuación general del balance de la propiedad

Partiendo de las siguientes definiciones:

- ρ = densidad (masa/volumen)
- q = cantidad de la propiedad intensiva (no depende de la masa) escalar y arbitraria por unidad de masa (propiedad/masa)
- ρq = cantidad de la propiedad por unidad de volumen (propiedad/volumen)

Considerando un volumen de control (V_c) como el de la figura 28 y considerando a ds como un elemento diferencial de la superficie de control envolvente (S) el cual tiene un vector unitario \underline{n} normal a éste y con \underline{v} como la velocidad con que la propiedad q atraviesa dicho elemento ds , entonces resulta que la cantidad de la propiedad q que pasa por el elemento diferencial ds por unidad de tiempo es:

$$\rho q \underline{v} \cdot \underline{n} \quad 113$$

Si se integra en toda la superficie (S) se obtendrá la cantidad de propiedad que atraviesa la superficie

$$Q_{\rho q} = \int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS \quad 114$$

NOTA:

$$Q_{\rho q} = \int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot (\rho q \underline{v}) \, dV$$

La variación en la trayectoria de la propiedad material se puede evaluar con la derivada material, entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) \, dV = \int_{S(t)} \alpha(t) \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, dV$$

Entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) \, dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{q}) \right] \, dV$$

[teorema de transporte de Reynolds] y en este caso $\alpha = \rho q$

Como el sentido \underline{n} es hacia afuera del volumen de control V_c , entonces $Q_{\rho q}$ representa la salida neta de la propiedad.

Así mismo la cantidad de la propiedad en un instante dado en un elemento diferencial de volumen dV es:

$$\rho q \, dV$$

Y su variación en el tiempo:



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV$$

Auxiliándose de la siguiente propiedad matemática:

$$\int \frac{\partial}{\partial x}(f(x) \cdot g(x))dx = g(x) \cdot \int \frac{\partial}{\partial x} f(x)dx \quad 115$$

La variación total de la propiedad se obtiene por la integración en todo el volumen de control de la expresión anterior:

$$M_{\rho q} = \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV \quad 116$$

Partiendo de la idea que dentro del volumen de control puede existir creación o destrucción de la propiedad y ésta se obtiene al integrar en el volumen de control a la tasa de creación de la propiedad $D[\rho q]$ por unidad de volumen en el tiempo.

$$C_{\rho q} = \int_{V_c} D[\rho q] dV \quad 117$$

Con base en lo anterior se establece el principio de conservación que dice que *durante una unidad de tiempo la propiedad que sale del volumen de control, más la que se acumula en su interior, es igual a la cantidad que se crea dentro del mismo. Al aplicar este principio de conservación al volumen de control analizado, se obtiene la ecuación general de balance de la cantidad de propiedad.* (Aparicio & Berezowsky, 1989)

$$Q_{\rho q} + M_{\rho q} = C_{\rho q} \quad 118$$

Al sustituir en las expresiones 114, 116 y 117 se obtiene la expresión general de balance de la propiedad

$$\int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} dS + \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV = \int_{V_c} D[\rho q] dV \quad 119$$

Al ser $\rho q \underline{v}$ una función vectorial continua y diferenciable y tener todos los términos en función del volumen de control, con la ayuda del teorema de la divergencia de Gauss:

$$\int_S \rho q \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \int_{V_c} \text{div}(\rho q \underline{v}) dV \quad 120$$



Sustituyendo 120 en 119:

$$\int_{V_c} \text{div}(\rho q \underline{v}) dV + \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV = \int_{V_c} D[\rho q] dV \quad 121$$

La relación anterior se conoce como balance de la propiedad en términos integrales del volumen de control que al integrarse en el tiempo desde t_1 hasta t_2 resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} \text{div}(\rho q \underline{v}) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_c} D[\rho q] dV dt \quad 122$$

Como:

$$\text{div}(\rho q \underline{v}) = \frac{\partial(\rho q v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho q v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho q v_b)}{\partial b}$$

Sustituyendo en 122 obtenemos la ecuación general de conservación de una propiedad q en forma integral:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho q v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho q v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho q v_b)}{\partial b} \right] db dn ds dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) \right] db dn ds dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho q] db dn ds dt \end{aligned} \quad 123$$

9.2.2 Ecuación de conservación de masa

Primeramente, se definirá a la masa como la magnitud que expresa la cantidad de materia de un cuerpo que de acuerdo a la segunda ley de Newton reacciona proporcionalmente a la aceleración cuando una fuerza externa es aplicada sobre esta. Matemáticamente se representa como $\underline{f} = m \underline{a}$.

Dicho de otra manera, un cuerpo de masa m se mantendrá en reposo o con velocidad constante a menos que una fuerza externa sea aplicada sobre él provocando un cambio en su velocidad, a la resistencia que ofrece el cuerpo a cambiar de velocidad se le conoce como inercia.

En distintos cuerpos la inercia se manifiesta en grado diferente. El cuerpo con mayor masa tendrá mayor inercia y viceversa (Irodov, 1981). Matemáticamente la razón de masas de dos cuerpos diferentes comunicados por fuerzas iguales es igual a la relación de aceleraciones.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1}{a_2}$$



De esta manera se puede analizar la comparación de dos masas mediante las aceleraciones de éstas, es decir, tomando cierto cuerpo como patrón se tiene la posibilidad de comparar la masa de cualquier otro cuerpo, de lo que se desprende los siguientes enunciados:

- La masa es una magnitud aditiva por lo tanto la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de sus diferentes masas
- Como la masa no se crea ni se destruye se puede decir que su magnitud es constante

9.2.2.1 Expresiones generales

Como se definió q en el apartado 9.2.1.2 como una propiedad intensiva escalar y si lo que se desea estudiar es la masa la expresión queda determinada de la siguiente manera:

$$q = \frac{\text{propiedad}}{\text{masa}} = \frac{\text{masa}}{\text{masa}} = 1 \quad 124$$

NOTA:

Si $\alpha = 1$

Entonces

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right] dV = 0$$

Y para agua (flujo incompresible)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Al sustituir en 123:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho v_b)}{\partial b} \right] db \, dn \, ds \, dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho) \right] db \, dn \, ds \, dt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho] db \, dn \, ds \, dt \end{aligned} \quad 125$$

Como el flujo es unidimensional es posible cancelar las direcciones n y b quedando la expresión anterior de esta forma:



$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s)}{\partial s} \right] db dn ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho) \right] db dn ds dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho] db dn ds dt \end{aligned} \quad 126$$

Si tomamos en cuenta que la doble integral en una región es el área

$$A = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn \quad 127$$

Al aplicar las propiedades de las integrales y considerar ρ como constante por tratarse de un flujo incompresible queda:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s)}{\partial s} \right] db dn ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho) \right] \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt \end{aligned} \quad 128$$

Al sustituir 127 en 128:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s)}{\partial s} \right] db dn ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho) \right] A ds dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \end{aligned} \quad 129$$

Por el teorema fundamental del cálculo y la propiedad descrita en 115

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho) \right] A dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(A\rho) \right] dt = \rho A_{t_2} - \rho A_{t_1} = \rho(A_{t_2} - A_{t_1}) \quad 130$$

Sustituyendo en 129:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(v_s)}{\partial s} \right] db dn ds dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A_{t_2}) - (A_{t_1})] ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \end{aligned} \quad 131$$

Aplicando el mismo teorema fundamental del cálculo en la primera integral tenemos:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} [(v_{s_2}) - (v_{s_1})] db dn dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A_{t_2}) - (A_{t_1})] ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \end{aligned} \quad 132$$



Considerando la curvatura se sabe que $dn=dr$, además se tiene la relación que describe la velocidad angular $v_s = Ce r^m$ (Streeter y Wylie,1978), donde Ce es un coeficiente de relación que sirve para homogenizar la expresión cuyas unidades están dadas en $[L^{1-m}/T]$, m es un coeficiente de relación que describe el grado de la función y r es el radio de curvatura. Por lo tanto:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s \, dn = \int_{r_1}^{r_2} Ce r^m \, dr = \frac{Ce}{m+1} (r_2^{m+1} - r_1^{m+1}) \quad 133$$

Se sabe que (García N. 2016):

$$Ce = \frac{(m+1)(r_{n'} - r_{n_0}) u}{r_{n'}^{m+1} - r_{n_0}^{m+1}} \quad 134$$

Si se toma $r_{n'} = r_2$ y $r_{n_0} = r_1$ y ambas se sustituyen en 134:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s \, dn = (r_2 - r_1) u \quad 135$$

Al sustituir en la ecuación 132 resulta:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{b_1}^{b_2} \{[(r_2 - r_1) u]_{s_2} - [(r_2 - r_1) u]_{s_1}\} db \, dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A_{t_2}) - (A_{t_1})] ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A \, ds \, dt \end{aligned} \quad 136$$

Como la velocidad media (u) es constante al no depender de la componente binormal (b) como quedó mencionado en la ecuación 126 como flujo unidimensional, sale de la integral y queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ u_{s_2} \int_{b_1}^{b_2} (r_2 - r_1)_{s_2} db - u_{s_1} \int_{b_1}^{b_2} (r_2 - r_1)_{s_1} db \right\} dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A_{t_2}) - (A_{t_1})] ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A \, ds \, dt \end{aligned} \quad 137$$

Se sabe que

$$\int_{r_1}^{r_2} v_s \, dr = (r_2 - r_1) u = u \int_{r_1}^{r_2} dr \quad 138$$

Y en consecuencia:



$$(r_2 - r_1) = \int_{r_1}^{r_2} dr \quad 139$$

Al reemplazar en 137:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ u_{s_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{r_1}^{r_2} dr db_{s_2} - u_{s_1} \int_{b_1}^{b_2} \int_{r_1}^{r_2} dr db_{s_1} \right\} dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A_{t_2}) - (A_{t_1})] ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \end{aligned} \quad 140$$

Y de acuerdo a la interpretación de integral doble se obtiene lo siguiente:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \int_{b_1}^{b_2} db dr \quad 141$$

Sustituyendo en 140:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [(uA)_{s_2} - (uA)_{s_1}] dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [(A_{t_2}) - (A_{t_1})] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[\rho] A ds dt \quad 142$$

Si se sabe que: $uA = Q$ y que ρ es constante, entonces:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [Q_{s_2} - Q_{s_1}] dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [A_{t_2} - A_{t_1}] ds = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[1] A ds dt \quad 143$$

Esta ecuación se puede representar en formato diferencial por el teorema fundamental del cálculo de la siguiente manera:

Vale mencionar que $D[1]$ es simplemente D (tasa de creación de la propiedad)

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt + \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial A}{\partial t} ds dt = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} D[1] A ds dt \quad 144$$

Las expresiones anteriores representan la versión integral de conservación de masa. Como está integrado doblemente respecto de las mismas variables se puede agrupar en una sola integral de esta forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \left(\rho \frac{\partial Q}{\partial s} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} - A \rho D[1] \right) ds dt = 0$$

Para que la condición se cumpla matemáticamente el integrando debe ser cero entonces:



$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = A D[1] \quad 145$$

Versión diferencial de la conservación de masa en un flujo unidimensional.

Respecto a la tasa de creación de la propiedad es importante identificar que físicamente representa adición o sustracción al fluido que impacta en el dominio de solución de las ecuaciones al que se denominará en lo sucesivo gasto lateral en función del tiempo y del espacio (Aparicio, 1988). De esta forma tenemos $A D[1] = ql(s, t)$.

Por lo tanto, las ecuaciones se reescribirán de esta forma:

$$\rho \int_{t_1}^{t_2} [Q_{s_2} - Q_{s_1}] dt + \rho \int_{s_1}^{s_2} [A_{t_2} - A_{t_1}] ds = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} ql(s, t) ds dt \quad 146$$

Versión integral de conservación de masa

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial s} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = \rho ql(s, t) \quad 147$$

Versión diferencial de conservación de masa

9.2.3 Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Entender la cantidad de movimiento tal vez sea la parte más compleja del estudio de la dinámica newtoniana, la mejor manera de definirla es como la magnitud vectorial de la masa por la velocidad de la partícula y se basa fundamentalmente en la segunda ley de Newton que establece que la fuerza instantánea aplicada a una partícula es igual al producto de la masa por la aceleración de la misma.

$$\underline{f} = m \underline{a} \quad 148$$

Al multiplicarlo por el diferencial de tiempo dt durante el cual actúa \underline{f} en ambos miembros de la ecuación:

$$\underline{f} dt = m \underline{a} dt \quad 149$$

Se sabe que el producto $\underline{a} dt = dv$, por lo que al sustituir en la ecuación 149 resulta:

$$\underline{f} dt = m dv \quad 150$$



Debido a las propiedades matemáticas de las derivadas al ser la masa constante se puede incluir en la variable independiente

$$\underline{f} dt = d(mv) \quad 151$$

El producto $\underline{f} dt$ se le conoce como impulso y al producto mv es la cantidad de movimiento, despejando la fuerza tenemos:

$$\underline{f} = \frac{d(mv)}{dt} \quad 152$$

La ecuación 152 describe la variación o cambio de la cantidad de movimiento con respecto del tiempo, si la $\underline{f} = 0$, resulta que $mv = cte$.

Para evaluar la cantidad de movimiento es necesario integrar la ecuación 151 respecto al tiempo en un intervalo de $t_2 - t_1$ y aplicar el teorema fundamental del cálculo como en la ecuación 130.

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{f} dt = (mv)_{t_2} - (mv)_{t_1} \quad 153$$

Si se considera \underline{f} independiente del tiempo, es decir, constante puede salir de la integral logrando el siguiente resultado:

$$\underline{f} (t_2 - t_1) = (mv)_{t_2} - (mv)_{t_1} \quad 154$$

Ahora bien, como el caso de estudio se trata de un sistema y como se definió con anterioridad *una de las propiedades de la masa es que ésta es aditiva, es decir, es igual a la suma de sus partes por separado, eso conlleva a que la cantidad de movimiento también sea aditiva* (Iridov, 1981) y que pueda reescribirse de esta forma:

$$m\underline{v} = \sum m\underline{v}_i \quad 155$$

Que al derivarla con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dm\underline{v}}{dt} = \sum \frac{dm\underline{v}_i}{dt} \quad 156$$

Que de acuerdo a la ecuación 152

$$\frac{dm\underline{v}}{dt} = \sum \underline{f} \quad 157$$



Adicionalmente sabemos que la fuerza \underline{f} es el resultado de la acción de todas las fuerzas que intervienen en el sistema (internas y externas), por lo tanto.

$$\frac{dmv_i}{dt} = \sum_k \underline{f}_{ik} + \underline{f}_i \quad 158$$

Donde:

\underline{f}_{ik} = Fuerzas que actúan sobre la partícula desde otras partículas del sistema (fuerzas internas)

\underline{f}_i = Fuerza que actúa sobre la partícula desde otros cuerpos que no entran en el sistema (fuerzas externas)

Si se hace la suma de todas las fuerzas obtenemos:

$$\frac{dmv_i}{dt} = \sum_i \sum_k \underline{f}_{ik} + \sum_i \underline{f}_i \quad 159$$

La doble suma representa la suma de todas las fuerzas internas que, según la tercera ley de Newton, las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema son iguales por pares según su módulo y contrarias en su dirección. Por esto, debido a esto la suma de las fuerzas internas es nula al estar en equilibrio, por lo que la ecuación 159 toma la siguiente forma:

$$\frac{dmv_i}{dt} = \sum_i \underline{f}_i = \underline{f} \quad 160$$

Donde \underline{f} es la resultante de todas las fuerzas externas

Para entender mejor la expresión cantidad de movimiento se debe poner especial atención en la ecuación 151 donde se ve que la cantidad de movimiento es una propiedad vectorial pero como se trata de flujo unidimensional a esta puede darse un tratamiento escalar, esto da la pauta para poder utilizar la expresión obtenida en 123 que es la ecuación general de conservación de una propiedad q . Para este caso la propiedad que se desea evaluar es la cantidad de movimiento en la dirección s quedando de la siguiente forma:

$$q = \frac{\text{propiedad}}{\text{masa}} = \frac{\text{cantidad de movimiento}}{\text{masa}} = \frac{m v_s}{m} = v_s \quad 161$$

Sustituyendo en 123 queda:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s v_s)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho v_s v_n)}{\partial n} + \frac{\partial(\rho v_s v_b)}{\partial b} \right] db dn ds dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_s) \right] db dn ds dt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \end{aligned} \quad 162$$



Como se está analizando el flujo en una sola dirección (unidimensional), la componente normal y binormal desaparecen de la ecuación. Al reescribir se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} \right] db dn ds dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] db dn ds$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \quad 163$$

Como el flujo es incompresible $\rho = cte$, y además v_s es independiente de la dirección binormal (b), este puede salir de la integral quedando de la siguiente manera:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \left[\frac{\partial(\rho v_s^2)}{\partial s} \right] \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] \int_{b_1}^{b_2} db dn ds$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} D[\rho v_s] \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt \quad 164$$

Como se vio en la ecuación 132, $v_s = Ce r^m$ y $dn=dr$ con lo que al sustituirlos en $\int_{n_1}^{n_2} v_s^2 dn$ resulta lo siguiente:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s^2 dn = \int_{r_1}^{r_2} (Ce r^m)^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} (Ce^2 r^{2m}) dr = Ce^2 \int_{r_1}^{r_2} r^{2m} dr = \left[Ce^2 \frac{r^{2m+1}}{2m+1} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{Ce^2}{2m+1} (r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}) \quad 165$$

De acuerdo a la ecuación 134, $Ce = \frac{(m+1)(r_2-r_1)u}{r_2^{m+1}-r_1^{m+1}}$ y sustituyendo:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s^2 dn = \frac{Ce^2}{2m+1} (r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}) = \frac{[(m+1)(r_2-r_1)u]^2}{(r_2^{m+1}-r_1^{m+1})^2} \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \quad 166$$

Realizando un procedimiento similar para resolver la expresión $\int_{n_1}^{n_2} v_s dn$, resulta:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s dn = \int_{r_1}^{r_2} Ce r^m dr = Ce \int_{r_1}^{r_2} r^m dr = \left[Ce \frac{r^{m+1}}{m+1} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Ce}{m+1} (r_2^{m+1} - r_1^{m+1}) \quad 167$$

Nuevamente al sustituir el valor de Ce como se hizo en la ecuación 166, queda de la siguiente manera:

$$\int_{n_1}^{n_2} v_s dn = \frac{Ce}{m+1} (r_2^{m+1} - r_1^{m+1}) = \frac{(m+1)(r_2-r_1)u}{r_2^{m+1}-r_1^{m+1}} \frac{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})}{m+1}$$

$$= (r_2 - r_1) u \quad (56) \quad 168$$



Como se vio en la ecuación 141

$$A = \int_{b_1}^{b_2} \int_{r_1}^{r_2} dr db = \int_{b_1}^{b_2} [r]_{r_1}^{r_2} db = \int_{b_1}^{b_2} (r_2 - r_1) db = (r_2 - r_1) \int_{b_1}^{b_2} db \quad (57) \quad 169$$

Al despejar la integral resulta:

$$\int_{b_1}^{b_2} db = \frac{A}{r_2 - r_1} \quad 170$$

Considerando el teorema fundamental del cálculo la ecuación 164 se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} [v_s^2]_{s_1}^{s_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] \int_{b_1}^{b_2} db dn ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \end{aligned} \quad 171$$

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} [(v_s^2)_{s_2} - (v_s^2)_{s_1}] \int_{b_1}^{b_2} db dn dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] \int_{b_1}^{b_2} db dn ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \end{aligned} \quad 172$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación 169

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} [(v_s^2)_{s_2} - (v_s^2)_{s_1}] \frac{A}{r_2 - r_1} dn dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_2} - (\rho v_s)_{t_1}] \frac{A}{r_2 - r_1} dn ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \end{aligned} \quad 173$$

Desarrollando términos:

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} (v_s^2)_{s_2} \frac{A}{r_2 - r_1} dn dt \\ - \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} (v_s^2)_{s_1} \frac{A}{r_2 - r_1} dn dt + \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_2}] \frac{A}{r_2 - r_1} dn ds \\ - \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} [(\rho v_s)_{t_1}] \frac{A}{r_2 - r_1} dn ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \end{aligned} \quad 174$$

Como el área (A) no depende de la coordenada normal (dn) se puede sacar de la integral quedando como sigue:



$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{A}{r_2 - r_1} \int_{n_1}^{n_2} (v_s^2)_{s_2} dn dt \\
 & \quad - \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{A}{r_2 - r_1} \int_{n_1}^{n_2} (v_s^2)_{s_1} dn dt \\
 & \quad + \int_{s_1}^{s_2} \frac{A\rho}{r_2 - r_1} \int_{n_1}^{n_2} [(v_s)_{t_2}] dn ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{A\rho}{r_2 - r_1} \int_{n_1}^{n_2} [(v_s)_{t_1}] dn ds \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt
 \end{aligned} \tag{175}$$

Continuando con las sustituciones de las ecuaciones 166 y 167:

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{A}{r_2 - r_1} \left\{ \frac{[(m+1)(r_2 - r_1)u]^2}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \right\}_{s_2} dt \\
 & \quad - \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{A}{r_2 - r_1} \left\{ \frac{[(m+1)(r_2 - r_1)u]^2}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \right\}_{s_1} dt \\
 & \quad + \int_{s_1}^{s_2} \frac{A\rho}{r_2 - r_1} [(r_2 - r_1)u]_{t_2} ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{A\rho}{r_2 - r_1} [(r_2 - r_1)u]_{t_1} ds \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt
 \end{aligned} \tag{176}$$

Eliminando términos algebraicos resulta la versión integral de la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[A \frac{(m+1)^2 (r_2 - r_1)}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} u^2 \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \right]_{s_2} \right. \\
 & \quad \left. - \left[A \frac{(m+1)^2 (r_2 - r_1)}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} u^2 \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \right]_{s_1} \right\} dt \\
 & \quad + \int_{s_1}^{s_2} [(A\rho u)_{t_2} - (A\rho u)_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt
 \end{aligned} \tag{177}$$

Expresando en forma diferencial se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[A \frac{(m+1)^2 (r_2 - r_1)}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} u^2 \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \right] \right\} ds dt \\
 & \quad + \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (A\rho u) dt ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt
 \end{aligned} \tag{178}$$

Para que sea válida la expresión anterior el integrando de la doble integral con respecto a ds y dt debe ser nulo entonces obtenemos la versión diferencial:

$$\rho \frac{\partial}{\partial s} \left[A \frac{(m+1)^2 (r_2 - r_1)}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} u^2 \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \right] + \rho \frac{\partial}{\partial t} (A\rho u) = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn \tag{179}$$



Asignando el siguiente valor a la expresión para efectos de simplificación obtenemos el número de Courant (García N. 2016):

$$Cr = \frac{(m+1)^2(r_2 - r_1)}{(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} \left(\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{2m+1} \right) \quad 180$$

Resumiendo:

Versión integral de la ecuación de la cantidad de movimiento.

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \{ [Cr u^2 A]_{s_2} - [Cr u^2 A]_{s_1} \} dt + \int_{s_1}^{s_2} [(A\rho u)_{t_2} - (A\rho u)_{t_1}] ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt \end{aligned} \quad 181$$

Versión diferencial de la ecuación de la cantidad de movimiento.

Sea la ecuación de cantidad de movimiento en coordenada generales (García, 1994) siguiente:

$$\rho \frac{\partial}{\partial s} [Cr A u^2] + \rho \frac{\partial}{\partial t} (Au) = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn \quad 182$$

Donde las variables dependientes son: $A(s, t)$ es el área transversal, y $u(s, t)$ es la velocidad media integrada en la vertical, las variables independientes son: s y t y el espacio de solución $\Omega(s, t) = [0, S] \times [0, T] \in \mathbb{R}^2$ y además ρ , es la densidad del fluido; Cr , es el número adimensional de Courant;

9.2.3.1 Expresiones completas

Como se estudió con anterioridad la creación o destrucción de la cantidad de movimiento depende de las fuerzas externas en el sistema que para el caso concreto de este trabajo se centrarán en aquellas que afecten de forma considerable las cuales son: fuerzas de presión, fuerzas de cuerpo o gravedad y fuerzas de fricción o esfuerzo cortante.

Fuerzas de presión:

Se define a estas fuerzas como la resultante que actúa sobre el volumen de control. Por convención estas fuerzas van opuestas a la dirección positiva del eje tangencial "s" y por lo tanto se consideran negativas, que al evaluarlos en la tasa de creación o destrucción de la cantidad de movimiento queda de la siguiente forma:

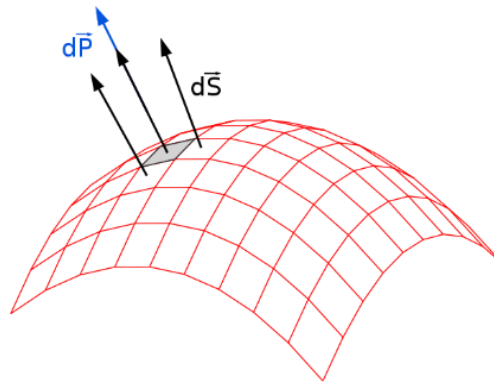


Fig. 29 Representación de distribución de presiones (Giancoli, 2004)

$$D[\rho u] = -\frac{dp}{ds} \quad 183$$

Al sustituirlo en la ecuación y aplicar el TFC:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} -\frac{dp}{ds} db dn ds dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} [p]_{s_2}^{s_1} db dn dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p_{s_2} - p_{s_1} db dn dt \end{aligned} \quad 184$$

Como se ha demostrado la presión se distribuye en un flujo con curvatura de esta manera (García, 2016.):

$$p = \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s \pm \rho g \frac{u^2(m+1)^2(r_2 - r_1)^2}{2gm(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} (r^{2m} - r_2^{2m}) \quad 185$$

Se procederá a analizar la integral doble con respecto de las componentes normal y binormal (n y b).

$$\begin{aligned} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p db dn &= \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \left[\rho g d \operatorname{sen} \alpha_s \right. \\ &\quad \left. \pm \rho g \frac{u^2(m+1)^2(r_2 - r_1)^2}{2gm(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} (r^{2m} - r_2^{2m}) \right] db dn \\ &= \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \rho g d \operatorname{sen} \alpha_s db dn \\ &\quad \pm \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \rho g \frac{u^2(m+1)^2(r_2 - r_1)^2}{2gm(r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} (r^{2m} - r_2^{2m}) db dn \end{aligned} \quad 186$$

Asignando C_m como un coeficiente de relación de curvatura parcial de la siguiente manera:



$$Cm = \frac{(m + 1)^2 (r_2 - r_1)^2}{m (r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} \quad 187$$

De aquí se puede obtener la relación con Ce visto en la ecuación 133:

$$Cm = \frac{ce^2}{m (u)^2}$$

Como los términos $\text{sen } \alpha_s$, velocidad media (u), los radios de curvatura (r_2 y r_1) y Cm no dependen de las coordenadas normal y binormal se pueden considerar constantes en la integral doble quedando de esta manera:

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p \, db \, dn = \rho g \text{sen } \alpha_s \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} d \, db \, dn \pm \rho g \frac{u^2 Cm}{2g} \int_{n_1}^{n_2} (r_2^{2m} - r_1^{2m}) \int_{b_1}^{b_2} db \, dn \quad 188$$

Para realizar correctamente la integración del primer término del segundo miembro se debe tomar en cuenta la geometría de la sección transversal de acuerdo a las siguientes relaciones.

$$dx = \cos \alpha_n \, db \quad 189$$

$$dz = \cos \alpha_n \, dn \quad 190$$

$$z = \zeta \cos \alpha_n \quad 191$$

Al multiplicar $dx \, dz$ se obtiene:

$$dx \, dz = \cos^2 \alpha_n \, db \, dn \quad 192$$

La expresión anterior al multiplicarla por z queda:

$$z \, dx \, dz = z \cos^2 \alpha_n \, db \, dn \quad 193$$

De las coordenadas naturales se sabe que:

$$\cos \alpha_n = \text{sen } \alpha_s \quad 194$$

Además también son válidas la relaciones en la sección transversal:

$$z = d \quad 195$$

$$z = \zeta \cos \alpha_n = \zeta \text{sen } \alpha_s \quad 196$$

$$dz = d\zeta \operatorname{sen} \alpha_s \quad 197$$

Sustituyendo 196 y 197 en el primer miembro, así como 194 y 195 en el segundo miembro de la ecuación 193 se tiene:

$$\zeta \operatorname{sen} \alpha_s dx d\zeta \operatorname{sen} \alpha_s = d \operatorname{sen}^2 \alpha_n db dn \quad 198$$

Simplificando:

$$\zeta dx d\zeta = d db dn \quad 199$$

Haciendo un cambio de variables $b = \zeta$ y $n = x$ y sustituyendo la 199 en el primer término del segundo miembro de 188 se obtiene:

$$\rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{b_1}^{b_2} \int_{n_1}^{n_2} d db dn = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{x_1}^{x_2} \zeta dx d\zeta \quad 200$$

Con el TFC y adicionalmente como ζ es invariante del término x puede restablecerse la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{x_1}^{x_2} \zeta dx d\zeta = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta \int_{x_1}^{x_2} dx d\zeta = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta (x_2 - x_1) d\zeta \quad 201$$

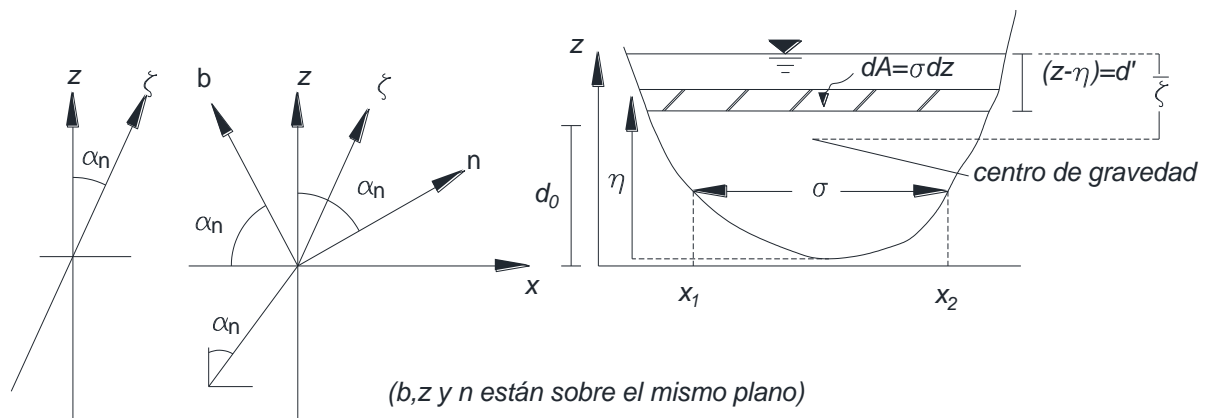


Fig. 30 Sección transversal de un canal abierto (García, 2016.)

Con relación a la figura 30 se observa que: $x_2 - x_1 = \sigma$, cabe resaltar que el término σ se define como el ancho de la superficie libre con respecto de un diferencial de tirante. Para términos prácticos este valor tiende a ser el valor del ancho del canal en el fondo (plantilla). Sustituyendo términos la ecuación 201 queda así:

$$\rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta (x_2 - x_1) d\zeta = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta \sigma d\zeta \quad 202$$



Analizando la figura y haciendo coincidir el origen de η en el fondo del canal y el origen de ζ a la profundidad a la que desea evaluar la presión como una traslación de ejes que matemáticamente se puede representar así:

$$\zeta = d_0 - \eta \rightarrow d\zeta = -d\eta$$

Reemplazando en la 202 e invirtiendo los límites de integración:

$$\begin{aligned} \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} d \, db \, dn &= \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \zeta \, \sigma \, d\zeta = \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_{d_0}^0 -(d_0 - \eta) \sigma \, dn \\ &= \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma \, dn = I_1 \end{aligned} \quad 203$$

De lo que se desprende que I_1 depende de la geometría y se le conoce como momento de inercia de la sección del canal.

Ahora se revisará la segunda expresión del segundo término de la ecuación 188 realizando un cambio de variable $n = r$

$$\begin{aligned} \rho g \frac{u^2 C_m}{2g} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_2^{2m}) \int_{b_1}^{b_2} db \, dn &= \rho g \frac{u^2 C_m}{2g} \int_{b_1}^{b_2} \int_{n_1}^{n_2} (r^{2m} - r_2^{2m}) \, dn \, db \\ &= \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \int_{n_1}^{n_2} (r^{2m} - r_2^{2m}) \, dr \, db \end{aligned} \quad 204$$

Diferenciando:

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \int_{n_1}^{n_2} (r^{2m} - r_2^{2m}) \, dr \, db \\ = \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \int_{n_1}^{n_2} r^{2m} \, dr \, db - \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \int_{n_1}^{n_2} r_2^{2m} \, dr \, db \end{aligned} \quad 205$$

Resolviendo las integrales:

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \int_{n_1}^{n_2} r^{2m} \, dr \, db - \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \int_{n_1}^{n_2} r_2^{2m} \, dr \, db \\ = \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \left[\frac{r^{2m+1}}{2m+1} \right]_{n_1}^{n_2} db - \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} r_2^{2m} \int_{n_1}^{n_2} dr \, db \end{aligned} \quad 206$$

Aplicando el TFC:



$$\int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \left[\frac{r^{2m+1}}{2m+1} \right]_{n_1}^{n_2} db - \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} r_n^{2m} \int_{n_1}^{n_2} dr db$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} db - \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} r_2^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) db \quad 207$$

Acoplando en una sola integral:

$$\int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} db - \int_{b_1}^{b_2} \rho \frac{u^2 C_m}{2} r_2^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) db$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \left[\rho \frac{u^2 C_m}{2} \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - \rho \frac{u^2 C_m}{2} r_2^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] db \quad 208$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \left[\rho \frac{u^2 C_m}{2} \frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - \rho \frac{u^2 C_m}{2} r_n^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] db$$

$$= \rho \frac{u^2}{2} \int_{b_1}^{b_2} C_m \left[\frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - r_2^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] db \quad 209$$

Dada la poca en la dirección binormal y el radio pueden considerarse constantes los términos contenidos en la integral y entonces la ecuación 209 queda de esta forma:

$$\rho \frac{u^2}{2} C_m \left[\frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - r_2^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] \int_{b_1}^{b_2} db \quad 210$$

Como se estableció en la 170 $\int_{b_1}^{b_2} db = \frac{A}{r_{n_2} - r_{n_1}}$, al sustituir y desarrollar se obtiene:

$$\rho \frac{u^2}{2} C_m \left[\frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{2m+1} - r_2^{2m} (r_{n_2} - r_{n_1}) \right] \frac{A}{r_{n_2} - r_{n_1}}$$

$$= \rho \frac{u^2}{2} A C_m \left[\frac{r_{n_2}^{2m+1} - r_{n_1}^{2m+1}}{(r_{n_2} - r_{n_1})(2m+1)} - r_2^{2m} \right] \quad 211$$

Para sintetizar se considerará C_M como el coeficiente de curvatura global y considerando que $r_{n_2} = r_2$, $r_{n_1} = r_1$ equivale a:

$$C_M = \frac{C_m}{2} \left[\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{(r_2 - r_1)(2m+1)} - r_2^{2m} \right] = \frac{(m+1)^2 (r_2 - r_1)^2}{2m (r_2^{m+1} - r_1^{m+1})^2} \left[\frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{(r_2 - r_1)(2m+1)} - r_2^{2m} \right] \quad 212$$



Quedando la ecuación

$$\rho g \frac{u^2 C_m}{2g} \int_{n_1}^{n_2} (r_n^{2m} - r_2^{2m}) \int_{b_1}^{b_2} db dn = \rho u^2 A C_M \quad 213$$

Se procede a sustituir las ecuaciones 203 y 213 en 186

$$\int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p db dn = I_1 \pm \rho u^2 A C_M \quad 214$$

Sustituyendo todos los términos en la 184 resulta:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} (p_{s_2} - p_{s_1}) db dn dt \\ &= - \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p_{s_2} db dn dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} p_{s_1} db dn dt \right) \\ &= - \left[\int_{t_1}^{t_2} (I_1 \pm \rho u^2 A C_M)_{s_2} dt - \int_{t_1}^{t_2} (I_1 \pm \rho u^2 A C_M)_{s_1} dt \right] \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} [(I_1 \pm \rho u^2 A C_M)_{s_2} - (I_1 \pm \rho u^2 A C_M)_{s_1}] dt \end{aligned} \quad 215$$

Fuerza de gravedad:

Se definirá a esta fuerza como la reacción que ejerce la masa del planeta sobre los objetos que se encuentren en su campo gravitatorio, por lo tanto, la tasa de creación o destrucción de la propiedad deberá evaluarse en términos del peso específico donde se encuentre presente implícitamente la aceleración de la gravedad quedando así:

$$D[\rho u] = \rho g_s \quad 216$$

Donde g_s es la componente gravitatoria en la dirección del flujo. Al sustituirlo en la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} \rho g_s db dn ds dt \\ &= \rho g_s \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt \end{aligned} \quad 217$$

Como quedó establecido en 141, y considerando $b=n$, $A = \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn$; al sustituir en 217:

$$\rho g_s \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} db dn ds dt = \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} g_s A ds dt \quad 218$$

Se sabe por las coordenadas naturales que $g_s = g \text{ sen } \alpha_n$ que al remplazar en 218 da:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt &= \rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} g_s A ds dt \\ &= \rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \text{sen } \alpha_n A ds dt \end{aligned} \quad 219$$

Fuerzas de fricción

Técnicamente es la reacción que se opone al movimiento entre dos superficies de contacto o deformación del fluido, que para el caso de estudio en cuestión son generadas por el esfuerzo cortante entre el líquido y las fronteras sólidas.

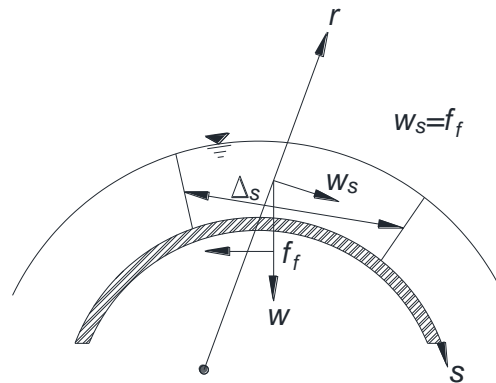


Fig. 31 Flujo uniforme con curvatura (García, 2016.)

Analizando la figura 31 se obtienen las siguientes relaciones:

$$W = \gamma_0 Vol \quad 220$$

En la dirección s:

$$W_s = \gamma_0 Vol \text{ sen } \alpha_n = \gamma_0 A \Delta s \text{ sen } \alpha_n \quad 221$$

La fuerza de fricción entonces valdrá por definición igual a la relación anterior y se evalúa así:

$$f_f = \tau_0 P \Delta s = \gamma_0 A \Delta s \text{ sen } \alpha_n \quad 222$$

Despejando al esfuerzo cortante y considerando $A/P = Rh$:

$$\tau_0 = \frac{\gamma_0 A \Delta s \text{ sen } \alpha_n}{P \Delta s} = \frac{\gamma_0 A \text{ sen } \alpha_n}{P} = \gamma_0 Rh \text{ sen } \alpha_n \quad 223$$



Para flujo turbulento se tiene según Prandtl (Daily & Harleman, 1981)

$$\tau_\tau = \tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2$$

Igualando con 223

$$\rho l^2 \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 = \gamma_0 Rh \operatorname{sen} \alpha_n \quad 224$$

Despejando $du / d\eta$

$$\frac{du}{d\eta} = \sqrt{\frac{\gamma_0 Rh \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho l^2}} \quad 225$$

Se tomará la siguiente consideración, para zonas cercanas al fondo y canales muy anchos $l = k \eta$ y $Rh = d_0 - \eta$ que al sustituir en 225

$$\frac{du}{d\eta} = \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n (d_0 - \eta)^{1/2}}{\rho k^2 \eta}} \quad 226$$

Separando las diferenciales para proceder a integrar:

$$du = \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n (d_0 - \eta)^{1/2}}{\rho k^2 \eta}} d\eta \rightarrow \int du = \int \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n (d_0 - \eta)^{1/2}}{\rho k^2 \eta}} d\eta \rightarrow$$

$$u = \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0 - \eta} - \sqrt{d_0} \ln \left| \frac{(\sqrt{d_0 - \eta} - \sqrt{d_0})^2}{\eta} \right| \right] \quad 227$$

Cabe resaltar que existen varios resultados que le dan validez a la integral obtenida debido a la dualidad de las raíces, sin embargo, el resultado que rige para el fenómeno estudiado fue el presentado en la ecuación 227. Ahora se procederá a desarrollar el resultado obtenido.

$$\sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0 - \eta} - \sqrt{d_0} \ln \left| \frac{(2d_0 - 2\sqrt{d_0 - \eta}\sqrt{d_0} - \eta)}{\eta} \right| \right] \quad 228$$

Por las propiedades de los logaritmos:



$$\sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0 - \eta} - \sqrt{d_0} \left[\ln(2d_0 - 2\sqrt{d_0 - \eta}\sqrt{d_0} - \eta) - \ln \eta \right] \right] \quad 229$$

Si se considera nula la velocidad sobre la rugosidad media de fondo ($\eta = \varepsilon$) y que en la superficie ($\eta = d_0$) se presenta se presenta una velocidad equivalente a la velocidad media u , después de integrar esta última ecuación entre los límites ε y d_0 . Lo anterior matemáticamente es válido si se sustituye $\eta = \varepsilon$

$$\sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0 - \varepsilon} - \sqrt{d_0} \left[\ln(2d_0 - 2\sqrt{d_0 - \varepsilon}\sqrt{d_0} - \varepsilon) - \ln \varepsilon \right] \right] \quad 230$$

Factorizando el signo del segundo miembro da:

$$\sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0 - \varepsilon} + \sqrt{d_0} \left[-\ln(2d_0 - 2\sqrt{d_0 - \varepsilon}\sqrt{d_0} - \varepsilon) + \ln \varepsilon \right] \right] \quad 231$$

Agrupando:

$$\sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0 - \varepsilon} + \sqrt{d_0} \ln \left[\frac{\varepsilon}{2d_0 - 2\sqrt{d_0 - \varepsilon}\sqrt{d_0} - \varepsilon} \right] \right] \quad 232$$

Si $\varepsilon \ll d_0$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0} + \sqrt{d_0} \ln \left[\frac{\varepsilon}{2d_0 - 2\sqrt{d_0}\sqrt{d_0}} \right] \right] \\ &= \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0} + \sqrt{d_0} \ln \left[\frac{\varepsilon}{2d_0 - 2d_0} \right] \right] \\ &= \sqrt{\frac{\gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2\sqrt{d_0} + \sqrt{d_0} \ln \left[\frac{\varepsilon}{4d_0} \right] \right] = \sqrt{\frac{\gamma_0 d_0 \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2}} \left[2 + \ln \left[\frac{\varepsilon}{4d_0} \right] \right] \end{aligned} \quad 233$$

Elevando al cuadrado la 233 y sustituyendo $d_0 = Rh$ resulta:

$$u^2 = \frac{\gamma_0 Rh \operatorname{sen} \alpha_n}{\rho k^2} \left[2 + \ln \left[\frac{\varepsilon}{4d_0} \right] \right]^2 \quad 234$$

Haciendo



$$\frac{1}{k_0} = \left(\frac{2 + \ln[\varepsilon/4d_0]}{k} \right)^2 \quad 235$$

Sustituyendo 223 y 235 en 234 resulta:

$$u^2 = \frac{\tau_0}{\rho k_0} \rightarrow \tau_0 = u^2 \rho k_0 \quad 236$$

τ_0 es el esfuerzo cortante en el fondo y k_0 es una constante adimensional en función de ε y Rh . Si se sustituye 236 en 223 se obtiene:

$$\gamma_0 Rh \operatorname{sen} \alpha_n = u^2 \rho k_0 \rightarrow \gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n = \frac{u^2 \rho k_0}{Rh} \quad 237$$

La cual corresponde a la fuerza por unidad de volumen en la dirección s generada por el efecto de fricción. Así pues, se puede evaluar la tasa de creación o destrucción de cantidad de movimiento por el esfuerzo cortante en la dirección s está dado por:

$$D[\rho u] = \gamma_0 \operatorname{sen} \alpha_n = \rho g \operatorname{sen} \alpha_n \quad 238$$

En esta ecuación α_n corresponde al ángulo de pendiente de fricción y para no crear confusión con las fuerzas de cuerpo (gravedad) se expresará como α_f . El signo menos (-) indica que la acción es contraria a la fuerza de gravedad, resumiendo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{n_1}^{n_2} \int_{b_1}^{b_2} D[\rho v_s] db dn ds dt = -\rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \operatorname{sen} \alpha_f A ds dt \quad 239$$

Las tres componentes de creación o destrucción de cantidad de movimiento, que se obtuvieron en los apartados anteriores son las más relevantes para el caso de estudio. Por lo tanto, sustituyendo 215, 219 y 239 en la 181 se obtiene la expresión completa de la cantidad de movimiento en su versión integral.

$$\begin{aligned} \rho \int_{t_1}^{t_2} \{ [Cr u^2 A]_{s_2} - [Cr u^2 A]_{s_1} \} dt + \int_{s_1}^{s_2} [(\rho u)_{t_2} - (\rho u)_{t_1}] ds \\ = - \int_{t_1}^{t_2} [(I_1 \pm \rho u^2 A C_M)_{s_2} - (I_1 \pm \rho u^2 A C_M)_{s_1}] dt \\ + \rho g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} (\operatorname{sen} \alpha_s - \operatorname{sen} \alpha_f) A ds dt \end{aligned} \quad 240$$

La versión diferencial es:



$$\frac{\partial}{\partial s} [\rho(Cr \pm C_M) A u^2 + I_1] + \rho \frac{\partial}{\partial t} (Au) = \rho g A (\text{sen } \alpha_n - \text{sen } \alpha_f) \quad 241$$

9.2.4 Versiones conservativas y no conservativas de las ecuaciones fundamentales

La diferencia entre este tipo de versiones radica en la forma matemática de representar las mismas puesto que unas sirven para evaluar flujo en una región donde exista continuidad de las variables expresadas y las otras pueden evaluar el flujo independientemente de que exista continuidad, a continuación, se describirá cada una de ellas para su mejor entendimiento.

9.2.4.1 Versiones conservativas

Las ecuaciones conservativas tienen la propiedad de ser aplicables a cualquier región de flujo, incluso a aquellas en que existen discontinuidades de algunas de las variables hidráulicas, como es el caso de regiones con la presencia de saltos hidráulicos, fenómenos en los que tanto el área hidráulica como la velocidad presenta discontinuidades locales. (García, 2016.).

Dicho de otra manera, la expresión $\rho(Cr \pm C_M) A u^2 + I_1$ es continua y diferenciable en forma integrada, o sea, sin que sean analizados de manera independiente cada uno de sus miembros, ya que por si solos no conservan estas propiedades, por lo tanto, no es válido desarrollar la derivada espacial por separado.

Dividiendo 146 y 147 entre ρ se tiene:

Ecuación de conservación de masa

Versión integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [Q_{s_2} - Q_{s_1}] dt + \int_{s_1}^{s_2} [A_{t_2} - A_{t_1}] ds = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} ql(s, t) ds dt \quad 242$$

Versión diferencial

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t) \quad 243$$

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Se sabe que de acuerdo a lo visto en la ecuación 203 $I_1 = \rho g \text{sen } \alpha_s \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma dn$, adicionalmente también se sabe que $\zeta = d_0 - \eta$ y de acuerdo a la figura 30 $\sigma dn = dA$, por lo tanto, sustituyendo estos valores se tiene:

$$I_1 = \rho g \text{sen } \alpha_s \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma dn = \rho g \text{sen } \alpha_s \int_0^{d_0} \zeta dA \quad 244$$



Por definición de centro de gravedad se sabe que este se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{\int_0^{d_0} \zeta dA}{A} = \bar{\zeta} \quad 245$$

Despejando el valor de la integral en 245 y sustituyendo en 244 se obtiene:

$$I_1 = \rho g \sin \alpha_s \bar{\zeta} A \quad 246$$

Con la condición de que $\bar{\zeta}$ sea referido desde la superficie libre del agua según la figura 30.

Si se sustituye 246 en 240 y 241, se dividen las ecuaciones entre ρ y sabiendo que $u = Q/A$ se tiene:

Versión integral

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[Cr \frac{Q^2}{A} \right]_{s_2} - \left[Cr \frac{Q^2}{A} \right]_{s_1} \right\} dt + \int_{s_1}^{s_2} [(Q)_{t_2} - (Q)_{t_1}] ds \\ & = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(g \sin \alpha_s \bar{\zeta} A \pm \frac{Q^2}{A} C_M \right)_{s_2} - \left(g \sin \alpha_s \bar{\zeta} A \pm \frac{Q^2}{A} C_M \right)_{s_1} \right] dt \\ & + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} (\sin \alpha_n - \sin \alpha_f) A ds dt \end{aligned} \quad 247$$

Versión diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(Cr \pm C_M) \frac{Q^2}{A} + g \sin \alpha_s \bar{\zeta} A \right] + \frac{\partial}{\partial t} (Q) = gA (\sin \alpha_n - \sin \alpha_f) \quad 248$$

9.2.4.2 Versiones no conservativas

Las ecuaciones no conservativas, a diferencia de las conservativas, no pueden ser aplicables en regiones de flujo que presenten discontinuidades en algunas de las variables hidráulicas, estas versiones incluyen únicamente las formas diferenciales. (García, 2016.)

Ecuación de conservación de masa

Partiendo de la ecuación 243 y por la continuidad $Q = A u$

$$\frac{\partial(Au)}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t) \quad 249$$

Por las propiedades de las derivadas:



$$A \frac{\partial u}{\partial s} + u \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = ql(s, t) \quad 250$$

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Como se vio en la ecuación 203 en la ecuación de cantidad de movimiento se encuentra presente la siguiente expresión:

$$\int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta \quad 251$$

Al desarrollar la diferencia de momentos de inercia con respecto de la coordenada s se llega a la versión diferencial de la cantidad de movimiento, por lo que invariablemente será necesario obtener la derivada parcial espacial de la ecuación 251 quedando de esta manera:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta \quad 252$$

Para desarrollarla es necesario auxiliarse del teorema de Leibniz para la derivación de una integral que básicamente es de la siguiente forma (Weisstein, 2017):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x) dt = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt + f(h(x), x) \frac{\partial}{\partial x} h(x) - f(g(x), x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) \quad 253$$

Aplicando la estructura de 253 en 252 resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta \\ = \int_0^{d_0(s)} \frac{\partial}{\partial s} [(d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta)] d\eta + f(d_0(s), s) \frac{\partial}{\partial s} d_0(s) \\ - f(0, s) \frac{\partial}{\partial s} 0 \end{aligned} \quad 254$$

Sustituyendo términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta \\ = \int_0^{d_0(s)} \frac{\partial}{\partial s} [(d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta)] d\eta \\ + (d_0(s) - d_0(s)) \sigma(s, d_0(s)) \frac{\partial}{\partial s} d_0(s) - (d_0(s) - 0) \sigma(s, 0) \frac{\partial}{\partial s} 0 \end{aligned} \quad 255$$

Simplificando:



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta &= \int_0^{d_0(s)} \frac{\partial}{\partial s} [(d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta)] d\eta \\ &= \int_0^{d_0(s)} \left\{ \sigma(s, \eta) \frac{\partial}{\partial s} [(d_0(s) - \eta)] + (d_0(s) - \eta) \frac{\partial}{\partial s} [\sigma(s, \eta)] \right\} d\eta \end{aligned} \quad 256$$

Si se establece que es una sección prismática y como se vio en la figura 30, σ es el valor de la plantilla, entonces, no existe variación de la plantilla a lo largo de la coordenada s , por lo que la ecuación 256 queda de esta manera al desarrollar las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta &= \int_0^{d_0(s)} \sigma(s, \eta) \frac{\partial}{\partial s} [(d_0(s) - \eta)] d\eta \\ &= \int_0^{d_0(s)} \left[\sigma(s, \eta) \frac{\partial}{\partial s} d_0(s) - \sigma(s, \eta) \frac{\partial}{\partial s} \eta \right] d\eta \end{aligned} \quad 257$$

Como la componente η no depende de s , se concluye:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0(s)} (d_0(s) - \eta) \sigma(s, \eta) d\eta = \int_0^{d_0(s)} \sigma(s, \eta) \frac{\partial}{\partial s} d_0(s) d\eta = \int_0^{d_0} \sigma \frac{\partial d}{\partial s} d\eta \quad 258$$

Como $\partial d / \partial s$ no depende de la dirección η la ecuación 258 queda de esta manera:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma d\eta = \frac{\partial d}{\partial s} \int_0^{d_0} \sigma d\eta \quad 259$$

Por definición $\int_0^{d_0} \sigma d\eta = A$, entonces sustituyendo en 259:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma d\eta = \frac{\partial d}{\partial s} A \quad 260$$

Otro elemento importante a considerar es el momento de inercia que también de acuerdo a la ecuación 246 y al derivarlo parcialmente con respecto de s se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} I_1 &= \frac{\partial}{\partial s} (\rho g \operatorname{sen} \alpha_s \bar{\zeta} A) = \rho g \frac{\partial}{\partial s} (\operatorname{sen} \alpha_s \bar{\zeta} A) = \rho g \frac{\partial}{\partial s} (\operatorname{sen} \alpha_s \bar{\zeta} A) \\ &= \rho g \bar{\zeta} A \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{sen} \alpha_s + \rho g \operatorname{sen} \alpha_s \frac{\partial}{\partial s} (\bar{\zeta} A) \end{aligned} \quad 261$$

Se puede demostrar de acuerdo a la ecuación 245 que:

$$\bar{\zeta} A = \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma d\eta \quad 262$$



Sustituyendo la 262 en el segundo elemento del miembro derecho de la ecuación 261 resulta:

$$\frac{\partial}{\partial s} I_1 = \rho g \bar{\zeta} A \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \rho g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{d_0} (d_0 - \eta) \sigma \, dn \quad 263$$

Sustituyendo la ecuación 260 en 263 se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial s} I_1 = \rho g \bar{\zeta} A \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + \rho g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} A \quad 264$$

Desarrollando la ecuación 241 queda de esta forma:

$$\rho \left[(Cr \pm C_M) A \frac{\partial}{\partial s} u^2 + (Cr \pm C_M) u^2 \frac{\partial}{\partial s} A + A u^2 \frac{\partial}{\partial s} (Cr \pm C_M) \right] + \frac{\partial}{\partial s} I_1 + \rho A \frac{\partial}{\partial t} (u) + \rho u \frac{\partial}{\partial t} (A) = \rho g A (\text{sen } \alpha_n - \text{sen } \alpha_f) \quad 265$$

Sustituyendo la expresión 264 en la ecuación 265 y dividiendo todo entre ρ se tiene la versión no conservativa de la forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$(Cr \pm C_M) A \frac{\partial}{\partial s} u^2 + (Cr \pm C_M) u^2 \frac{\partial}{\partial s} A + A u^2 \frac{\partial}{\partial s} (Cr \pm C_M) + A \frac{\partial}{\partial t} (u) + u \frac{\partial}{\partial t} (A) + g \bar{\zeta} A \frac{\partial}{\partial s} \text{sen } \alpha_s + g \text{sen } \alpha_s \frac{\partial d}{\partial s} A = g A (s_0 - s_f) \quad 266$$

9.3 Demostración de la consistencia numérica

Sustituimos 23,24,25 y 26 en 17,18 y 19 (temporal, espacial e independiente) cambiando F por f y simplificando términos

Derivada temporal

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (F_j^{n+1} - F_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (F_{j+1}^{n+1} - F_{j+1}^n)$$



$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \frac{(1-2\theta+\theta^2)\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ + \frac{\Psi}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \frac{(1-2\theta+\theta^2)\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\Psi) \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + \theta^2 \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ + \frac{\Psi}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + \theta^2 \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\Psi) \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ + \frac{\Psi}{\Delta t} \left(\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\Psi) \Delta x \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (1-\Psi) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ + \Psi \left(\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\Psi) \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (1-\Psi) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\Psi)(1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - (1-\Psi) \Psi \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} \\ + \Psi(1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi(1-\Psi) \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi(1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi^2 \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} \\ + \Psi \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi(1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} - \Psi^2 \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^2)$$

267

Derivada espacial

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (F_{j+1}^{n+1} - F_j^{n+1})$$



$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left(\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + \frac{(1-2\Psi + \Psi^2)\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Delta x \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\Psi^2 \Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ + \frac{\theta}{\Delta x} \left(\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + \frac{(1-2\Psi + \Psi^2)\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + \Delta x(1-\theta)\Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\Psi^2 \Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left(\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi^2 \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \Delta x \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\Psi^2 \Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right) \\ + \frac{\theta}{\Delta x} \left(\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + \Psi^2 \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + \Delta x(1-\theta)\Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) - \frac{\Psi^2 \Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1-\theta) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} \right) + \theta \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\theta)\Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} \right) + O(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} \right) \\ + \theta \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1-\theta)\Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} \right) + O(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} - \theta(1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + \theta^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \theta \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + \theta(1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \\ + \theta(1-\theta)\Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} - \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \theta^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + \theta \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} - \theta^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1-2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^2, \Delta t^3)$$

268

Términos adicionales

$$F = \theta[\Psi f_{j+1}^{n+1} + (1-\Psi)f_j^{n+1}] + (1-\theta)[\Psi f_{j+1}^n + (1-\Psi)f_j^n]$$



$$F = f(x, t) + (1 - \Psi)\Psi \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - \theta)\theta \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad 269$$

Invariantes en el tiempo

$$\delta F_j = \frac{1}{2} [F_j + F_{j+1}] = f(x, t) + (1 - 2\Psi) \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + [(1 - 2\Psi)^2 - 2\Psi^2] \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + O(\Delta x^3) \quad 270$$

En el caso de que los valores de los factores de peso temporal y espacial sean $\theta = 1/2$ y $\Psi = 1/2$, entonces el orden de consistencia numérica de los operadores (271)-(272) es $(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Para valores diferentes de los factores de peso, el orden de consistencia es menor.

Finalmente, la consistencia numérica del esquema de Preissmann aplicado a las ecuaciones de Saint-Venant (250) y (16) se determina sustituyendo en éstas las ecuaciones (267)-(269), de forma que:

Ecuación conservación de masa

$$\begin{aligned} l(y, u; x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - 2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} \\ &+ \left(u + (1 - \Psi)\Psi \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - \theta)\theta \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - 2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \\ &+ \left(y + (1 - \Psi)\Psi \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - \theta)\theta \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - 2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \\ &= 0 \end{aligned} \quad 271$$

Ecuación cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} m(y, u; x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - 2\theta) \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} \\ &+ \left(u + (1 - \Psi)\Psi \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - \theta)\theta \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - 2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \\ &+ g \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - 2\Psi) \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \\ &+ g \left(\left(S_f + (1 - \Psi)\Psi \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 S_f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} + (1 - \theta)\theta \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 S_f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \right. \\ &\left. - \left(S_b + (1 - 2\Psi) \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial S_b}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} + [(1 - 2\Psi)^2 - 2\Psi^2] \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 S_b}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} \right) \right) + O(\Delta x^3, \Delta t^3) = 0 \end{aligned} \quad 272$$



10 Estado del arte

10.2 Artículos científicos arbitrados.

New nonlinear shallow-flow equations with curvature. ROBERT F. DRESSLER. National Aeronautics & Space Administration Washington, DC. 20546 U.S.A. Journal of Hydraulic Research no. 16 1978

Resumen.

En este artículo se realizó la primera investigación al respecto de la curvatura y fue el precursor de todos los estudios posteriores, en este documento el investigador propone un ingenioso método consistente en resolver las ecuaciones de Saint-Venant para canales rectangulares mediante el empleo de coordenadas naturales en dos dimensiones, para incorporar la curvatura, sin embargo solo posee la capacidad de resolver el espectro de flujo en un plano bidimensional y por su complejidad solo es posible resolver las ecuaciones mediante software computacional. La parte fundamental de este método consiste en determinar el jacobiano de una matriz de transformación en el nuevo sistema coordenado natural, considerando que la velocidad como un vector que se puede descomponer en dos vectores dentro del plano. De esta forma es posible determinar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

Ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo Gilberto Sotelo Ávila. Carlos A. Escalante Sandoval. Ingeniería Hidráulica en México vol. XVI Num. 2 pp. 27-42, abril-junio 2001.

Resumen

Dressler (1978) publicó las ecuaciones que llevan su nombre para analizar el flujo en canales rectangulares de fondo curvo. Sotelo y Escalante explican en forma detallada la relación con las coordenadas naturales, adicionalmente propone una variante a las ecuaciones de Dressler que consiste en aplicarlas en forma general a cualquier sección con la ayuda de la ecuación de la energía, luego entonces propone una corrección al cálculo de la presión si en ella está involucrada la curvatura, de una forma muy interesante determina una ecuación integral del gasto en función de la curvatura. Tiene el inconveniente de que dichas ecuaciones resultan complejas y no tienen solución directa por lo que resultan imprácticas la forma de obtener las soluciones.

Efecto resistivo en las ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo Carlos A. Escalante Sandoval Gilberto Sotelo Ávila. Ingeniería Hidráulica en México vol. XVI Num. 3 pp. 57-65, julio-septiembre 2001

Resumen



Este artículo es la continuación del presentado por los mismos autores con el título: “Ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo”, que apareció publicado en esta misma revista (vol. XVI, núm. abril-junio de 2001). En este artículo se complementa al anterior mediante un modelo de fricción y disponer así del conjunto aplicable de acuerdo con la geometría de la sección, los autores proponen evaluar los esfuerzos tangenciales mediante expresiones empíricas. De esta forma se obtiene un modelo integral que para este artículo en particular se optó la sección rectangular para cuantificar resultados, los modelos empíricos varían de acuerdo al modelo de fricción seleccionado.

Ecuaciones del flujo impermanente en canales trapeciales de fondo curvo. Gilberto Sotelo Ávila. Carlos A. Escalante Sandoval. Ingeniería Hidráulica en México vol. XVI Num. 4 pp. 45-51, octubre-diciembre 2001

Resumen

El propósito de este trabajo ha sido mostrar la solución de los términos que dependen de la forma de la sección en las ecuaciones generales del flujo en canales de fondo curvo. Dichos términos se han incluido en las ecuaciones que afectan, a fin de disponer del sistema cuya solución resuelve el problema. Se presenta la valuación de los términos dependientes -que aparecen en las ecuaciones generales completas presentadas en artículos anteriores- para la sección de forma trapecial. Esto tiene el objetivo de establecer las ecuaciones aplicables al flujo en canales de fondo curvo con dicha forma de sección. También se obtienen las ecuaciones particulares para los canales rectangular y triangular Este artículo es la continuación de los llamados: “Ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo” y “Efecto resistivo en las ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo”, publicados en esta misma revista.

Régimen crítico en canales rectangulares de fondo curvo y sus aplicaciones. G. Sotelo-Ávila e I.I. Valdez-Izaguirre. Ingeniería Investigación y Tecnología V. 3. 215-228, 2004 (artículo arbitrado)

Resumen

En este artículo se presenta un desarrollo alternativo para obtener las condiciones del estado crítico del flujo curvilíneo permanente en canales rectangulares, tomando como hipótesis la ley del vórtice libre para la distribución de la velocidad en la sección. El cumplimiento de las ecuaciones del régimen crítico permite ubicar la sección de control y a partir de ésta, calcular el perfil del flujo en curvas verticales. El autor propone un número de Froude en función de la curvatura para canales rectangulares, así como el diseño de transiciones por medio de curvas verticales para enlazar dos diferentes inclinaciones en función del tirante crítico, este trabajo es el precursor de artículos posteriores donde el autor extrapola a diferentes secciones transversales.



Flujo crítico en canales trapeciales de fondo curvo. Gilberto Sotelo Ávila. Ingeniería Hidráulica en México vol. XIX Num. 1 pp. 27-40, enero-marzo 2004

Resumen

En esta publicación el autor propone determinar el régimen crítico en canales trapeciales mediante un número de Froude generalizado para flujo curvilíneo, se basa en el trabajo previo donde se calculó el régimen crítico en un canal rectangular así mismo determina las condiciones en las que hay separación de flujo debido a presiones negativas y altas velocidades y además determina la presión de cavitación si la presión en el fondo alcanza el valor de la presión de cavitación del agua.

Régimen crítico en canales circulares de fondo curvo Gilberto Sotelo Ávila. Ingeniería Hidráulica en México vol. XIX Num. 2 pp. 31-36, abril-junio 2004.

Resumen

Para el desarrollo del presente el autor desarrolla las ecuaciones del artículo anterior, pero con la variante que introduce las ecuaciones en función de la sección circular y haciendo el desarrollo conducente. Las condiciones generales del régimen crítico en canales de fondo curvo se presentan en el artículo previo titulado: "Flujo crítico en canales trapeciales de fondo curvo" (Ingeniería hidráulica en México, vol. XIX, núm. 1, enero-marzo de 2004 pp. 27-40) del mismo autor; donde también se exponen los resultados que se obtienen para el canal trapecial. En este artículo se presentan resultados similares, sólo que para el canal de sección circular. Estos resultados tienen aplicación, por ejemplo, en túneles de desfogue.

Flujo a superficie libre sobre curvas verticales cóncavas. Gilberto Sotelo Ávila. Ingeniería Hidráulica en México vol. XIX Num. 3 pp. 25-36, julio-septiembre 2004.

Resumen

En este artículo el autor propone a través de cambios de variables simplificar las ecuaciones obtenidas en los artículos anteriores y de esta forma tener elementos comparativos con modelos de flujo de otros autores es de resaltar que para este trabajo el autor considera que la velocidad V_0 en cualquier punto de la superficie libre dentro de la curva se mantiene constante e igual a la velocidad V_0 en la sección inicial. El autor hace una revisión de los estudios previos para que a continuación se citan: Sotelo y Escalante (2001) presentaron una generalización de las ecuaciones del flujo curvilíneo para emplearse en canales de cualquier forma de sección. Posteriormente, Escalante y Sotelo (2001) valoraron e incluyeron el término de resistencia al flujo en las ecuaciones generales. Además, Sotelo y Escalante (2002) calcularon los términos dependientes y establecieron las ecuaciones particulares para los canales de sección trapecial, rectangular y triangular. Por otra



parte, diversos autores han analizado teórica y experimentalmente la distribución de la presión en el fondo y a lo largo del flujo sobre curvas verticales cóncavas en canales rectangulares.

Depth-integrated flow modelling taking into account bottom curvature. B.J. Dewals. S. Erpicum. P. Archambeau. S. Detrembleur. M. Piroton. Journal of Hydraulic Research Vol. 44, No. 6 (2006), pp. 785–795

Resumen

El presente artículo se basa en las teorías presentadas por Dressler en 1978 y nuevamente con el apoyo del jacobiano de transformación realiza un modelo computacional para calcular los efectos de curvatura como a continuación describe: La modelación exitosa de flujos sobre vertedores y sobre curvas verticales es un desafío para cualquier modelo de profundidad. Este tipo de cálculo requiere el uso de ejes adecuadamente inclinados a lo largo de la dirección media del flujo en el plano vertical y una modelización de los efectos de curvatura. El modelo generalizado propuesto realiza dichos cálculos mediante coordenadas curvilíneas adecuadas en el plano vertical, lo que conduce a un enfoque totalmente integrado. Esto significa que los flujos en el depósito aguas arriba, vertedor, tanque amortiguador y aguas abajo del río son manejados en una sola simulación. El perfil de velocidad es generalizado en comparación con el uniforme que suele asumirse en las ecuaciones clásicas de aguas poco profundas. La distribución de la presión se modifica en función de la curvatura del fondo y, por lo tanto, no es puramente hidrostática. Los casos de prueba representativos, así como la aplicación del modelo ampliado al diseño de una gran estructura hidráulica en Bélgica, han dado lugar a resultados de validación satisfactorios. Dentro de este trabajo se analiza un caso de estudio que posteriormente se comparará con los resultados de esta tesis.

Modified shallow water equations for significantly varying seabeds. Denys Dutykh. Didier Clamond. Applied Mathematical Modelling 40 (2016) 9767–9787

Resumen

En el presente estudio, se propone una versión modificada de las ecuaciones de agua superficial no lineal (Saint-Venant o NSWE) para las ondas superficiales irrotacionales en el caso en que el fondo sufra algunas variaciones significativas en el espacio y el tiempo, es una extensión del artículo presentado en 2014 y presenta mas casos de estudio con diversas batimetrías. El modelo se deriva de un principio variacional eligiendo un ansatz de aguas someras apropiado e imponiendo algunas limitaciones. El procedimiento de derivación no implica explícitamente ningún parámetro pequeño y es sencillo. El nuevo sistema es una extensión no hidrostática no dispersiva de las ecuaciones clásicas de Saint-Venant. Una característica clave del nuevo modelo es que, al igual que el NSWE clásico, es hiperbólica y por lo tanto pueden utilizarse métodos numéricos. También se propone una discretización de volumen finito del sistema hiperbólico obtenido. Se presentan varios casos de



prueba para resaltar el valor añadido del nuevo modelo. También se discuten algunas implicaciones para el modelado de ondas de tsunami.

Dressler's theory for curved topography flows: iterative derivation, transcritical flow solutions and higher-order wave-type equations. Oscar Castro-Orgaz · Willi H. Hager. Environ Fluid Mech (2016)

Resumen

Las ecuaciones de Dressler son un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales para flujos de fluidos poco profundos sobre topografía curva. La teoría se originó a partir de un método de estiramiento asintótico que formula las ecuaciones de movimiento en coordenadas curvilíneas ajustadas al terreno. Aparentemente, estas ecuaciones no produjeron un perfil de flujo transcrito que cambia de condiciones de flujo sub- a supercrítico. Además, se excluyen los movimientos ondulados sobre un fondo plano porque no se tiene en cuenta el componente de velocidad normal de cama. Sin embargo, la teoría se consideró relevante para varios problemas de flujo ambiental, incluyendo corrientes de densidad sobre montañas y valles, flujo de infiltración en la hidrología de las laderas, desarrollo de antidunas, formación de depósitos geológicos de flujos hiperconcentrados y modelado de caudales de aguas poco profundas en hidráulica.

En este trabajo, la teoría de Dressler se desarrolla de una manera alternativa mediante una iteración sistemática de la corriente y las funciones potenciales en coordenadas terrestres. La primera iteración se encontró que era la teoría de Dressler, mientras que una segunda iteración de las ecuaciones gobernantes da lugar a componentes de la velocidad que generalizan la teoría de Dressler al movimiento de oleaje. La teoría de primer orden de Dressler produce una solución de flujo transcrito sobre la topografía sólo si el tirante total está fijado por un valor mínimo de la energía específica en el punto de transición. Sin embargo, la teoría se desvía de las mediciones bajo condiciones de flujo subcrítico, dado que el componente de velocidad de la cama normal es significativo.

Una segunda iteración al campo de velocidad se utilizó para producir una ecuación diferencial de segundo orden que se asemeja a la teoría de onda senoidal. Describe con precisión flujo sobre un obstáculo que incluye el punto crítico y la energía específica mínima como parte de la solución numérica. El nuevo modelo de onda senoidal se compara bien con la teoría de una superficie de Cosserat para láminas fluidas dirigidas, mientras que en la teoría de Saint-Venant no es posible evaluar con estas condiciones.

One-dimensional modelling of curvilinear free surface flow: generalized Matthew theory. Oscar Castro-Orgaz & Willi H. Hager Journal of Hydraulic Research, 52:1, 14-23. 2014

Resumen



La teoría de flujo con potencial es una buena aproximación matemática a diversos problemas en los campos de los flujos de aguas abiertas y canales abiertos de superficie libre. En ambos campos, las ecuaciones de segundo orden se derivan comúnmente utilizando métodos de perturbación para explicar la distribución de presión no hidrostática. Sin embargo, una técnica alternativa es el método de iteración de Picard, utilizado por Matthew para flujos de canales abiertos estables. Lamentablemente, esta técnica no se expandió a un flujo potencial inestable, limitando su impacto total. El propósito de este trabajo es generalizar la teoría de Matthew a un flujo de superficie libre potencial inestable, tanto para canales abiertos como para aguas subterráneas. El nuevo desarrollo es una alternativa a las técnicas de perturbación, destacando la relevancia de la obra de Matthew. Para ilustrar los problemas generalizados a los que se aplica la teoría, se realizan simulaciones para una ola de desprendimiento y para el flujo en acuíferos inclinados y curvos. En ambos casos, los resultados unidimensionales coinciden aproximadamente con los datos bidimensionales.

Hydrodynamics of Undular Free Surface Flows. Subhasish Dey, Sujit K. Bose and Oscar Castro-Orgaz. Article in GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences · January 2013.

Resumen

En este estudio se analiza teóricamente la hidrodinámica de tres tipos de problemas de flujo superficial libre undular constante. Estos flujos se rigen por las ecuaciones en estado estacionario de conservación de la masa y el impulso desarrolladas por Bose y Dey en 2007 (J Hydraul Eng. 133: 1074-1079) y 2009 (Phys Rev E80: 036304). El primer tipo de flujo es un salto hidráulico undular en un límite liso plano cuando el flujo de aproximación número de Froude excede marginalmente su valor crítico de unidad. Aquí, se establece que el fenómeno de salto hidráulico undular puede ser tratado como una inestabilidad del flujo de superficie libre descrito por el principio de inestabilidad. Los resultados revelan que el umbral de un salto hidráulico undular está representado por un aumento monótono del número de Froude de flujo de aproximación con inclinación de borde. La elevación de la superficie libre undular aumenta a medida que aumenta la inclinación del borde. Sin embargo, la amplitud de las ondas de superficie libre disminuye con la distancia descendente. El segundo tipo de flujo es aquel sobre un saliente hemi-cilíndrico sumergido (sección semicircular invertida) colocado sobre el fondo del canal con su diámetro horizontal lateral a la dirección del flujo. El análisis de flujo en estado estacionario muestra que hay una caída en la elevación de la superficie libre en el extremo aguas abajo del cilindro con un perfil de superficie libre undular. El tercer tipo de flujo es el de un límite sinusoidal continuo de un canal. Un experimento numérico muestra que existe un desfase entre el perfil de superficie libre y el perfil límite. También, se revela que si la profundidad de flujo es reducida, se produce una acumulación de onda elevada que indica un inicio de choque.



Free streamline flow over curved topography. A. C. King. M. I. G. Bloor. Quarterly Of Applied Mathematics Volume XLVIII, Number 2. 1990

Se considera la determinación de la corriente libre de un chorro de fluido ideal a través de una pared de forma arbitraria. Se utiliza una técnica de transformación para formular el problema de la mecánica de fluidos relacionando la deflexión de la superficie libre con el ángulo formado por la pared con el chorro no perturbado que se encuentra como una ecuación integral no lineal. Soluciones lineales, basadas en pequeñas elevaciones o depresiones en la pared, y soluciones numéricas no lineales a esta ecuación se presentan para una variedad de formas de fondos. Se encuentran algunas deficiencias de esta teoría lineal y de la teoría del agua poco profunda.

Experimental verification of the Dressler curved-flow equations. N. S. Sivakumaran. V. Yevjevich. Journal De Recherches Hydrauliques, Vol. 25, NO. 3. 1987

Resumen

Se presentan las ecuaciones de Dressler con resistencia al flujo y ancho de canal variable para el flujo de superficie libre inestable sobre fondos curvos, y se obtiene una ecuación de perfil de Bresse generalizada para un flujo curvo constante. Las mediciones experimentales en flujo constante sobre un vertedor altamente curvado demuestran que las ecuaciones de Dressler predicen la superficie libre, la presión del fondo y la distribución tangencial de la velocidad del flujo con precisión, pero los cálculos con las ecuaciones clásicas de Saint-Venant casi no tienen significado en este caso. Puesto que ambas teorías requieren variaciones graduales en la geometría del fondo, las aplicaciones a intervalos con cambios rápidos no son válidas. Para los pequeños intervalos de la geometría del vertedor donde la curvatura y su derivada varían rápidamente, la solución de Dressler muestra variaciones pequeñas, pero rápidas, mientras que las mediciones indican una variación más gradual en intervalos más amplios. El presente artículo es una comprobación experimental de las ecuaciones hechas por Dressler y servirá de base para comparar resultados con los presentados en la presente tesis.

Perfil del flujo sobre un vertedor tipo cimacio y su comprobación. Gilberto Sotelo-Ávila. Ingeniería hidráulica en México, vol. XXI, núm. 1, pp. 29-42, enero-marzo de 2006

Resumen

En este artículo el autor presenta una aplicación práctica utilizando las ecuaciones obtenidas de sus publicaciones anteriores, calculando el perfil hidráulico así como la sección crítica para un flujo poco profundo en estado permanente sobre un vertedor tipo cimacio, el autor calcula el perfil de flujo y las características de este en la sección crítica mediante hojas de cálculo y cambios de variable para diferentes gastos. Los resultados obtenidos servirán como comparación a los resultados obtenidos en la presente tesis.



Ski Jump Hydraulics. Valentin Heller; Willi H. Hager, F.ASCE; and Hans-Erwin Minor. Journal of Hydraulic Engineering · May 2005

Resumen

Los saltos de esquí son un elemento importante de cada vertedor porque éstas son las únicas estructuras capaces de lograr una disipación de energía satisfactoria para velocidades de despegue de más de 20 m / s. Esta investigación pretende añadir a varios problemas hidráulicos con saltos de esquí que aún no se han resuelto sistemáticamente hasta el momento. En base a una campaña experimental, se abordaron los siguientes problemas: 1 máximo de presión y distribución de presión a lo largo de un deflector de forma circular; 2 características de despegue para una cierta deflexión y una curvatura relativa del deflector que incluye las trayectorias del chorro de los perfiles inferiores y superiores; 3 características de impacto en un canal de descarga prismático con detalles de formación de onda de choque y altura de la profundidad de recirculación; 4 disipación de energía a través del salto de esquí, desde el canal aguas arriba hasta aguas abajo del impacto de chorro; y 5 condiciones de contracción por el deflector. Estos resultados mostraron el efecto significativo en la aproximación número de Froude, de la curvatura relativa del deflector y del ángulo de deflexión. Los resultados permiten una aplicación inmediata al diseño de saltos de esquí en ingeniería hidráulica. Este artículo nos demuestra del cuidado que hay que tomar en la configuración del deflector pues pueden presentarse saltos hidráulicos dentro del mismo y el modelo presentado en esta tesis no contempla este fenómeno.

10.3 Artículos de congreso.

Modified shallow water equations for mild-slope seabeds. Denys Dutykh. Didier Clamond. 29th Intl Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Osaka, Japan, Mar. 30 – Apr. 2, 2014.

Las célebres ecuaciones clásicas no lineales de aguas poco profundas (Saint-Venant) se derivaron en el siglo XIX (Y. Xing y C.-W 2005). Estas ecuaciones son todavía ampliamente utilizadas en la práctica y la literatura cuenta miles de publicaciones dedicadas a las aplicaciones, validaciones o soluciones numéricas de estas ecuaciones. También se han hecho algunos intentos importantes para mejorar este modelo desde el punto de vista físico. La principal atención se prestó a varias extensiones dispersivas de las ecuaciones de aguas poco profundas, dando lugar a las denominadas ecuaciones de tipo Boussinesq, (F. Serre. 1953, J. V. Wehausen y E. V. Laitone. 1960). Sin embargo, hay menos estudios que intentan incluir el efecto de curvatura inferior en las ecuaciones clásicas de Saint-Venant, (D. Dutykh y N. E. Kolgan. 1975).

El presente estudio es un intento adicional de mejorar las ecuaciones clásicas de Saint-Venant incluyendo una mejor representación de la forma del fondo. Como procedimiento de derivación general, se eligió un enfoque variacional basado en un relajado principio lagrangiano (D. Dutykh and D. Clamond. 2011).



Se presenta la derivación y discusión de algunas propiedades de las ecuaciones mejoradas de Saint-Venant. Luego se detalla la estructura hiperbólica y se da un ejemplo numérico. Finalmente, se subraya algunas conclusiones principales de este estudio.

Channel flow over curved boundaries and a new hydraulic theory. John D. Fenton. 10th Congress, Asia and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Research, Langkawi Island, Malaysia, pp. 26-29 August 1996

Resumen

Dressler (1978) derivó las ecuaciones de onda larga de St Venant para el flujo irrotacional bidimensional sobre los límites curvados usando coordenadas curvilíneas ortogonales basadas en el fondo del canal. Estas ecuaciones son considerablemente más complicadas que las del sistema cartesiano, sin embargo contienen contribuciones a la presión y a las ecuaciones fundamentales con la curvatura del fondo, lo que no ocurre en la formulación cartesiana para el mismo nivel de aproximación. De manera similar, Chapman y Dressler (1984) obtuvieron las ecuaciones de aguas poco profundas para el flujo no permanente de agua subterránea con una superficie libre sobre un límite impermeable curvado. En ambos casos, se asumió que el flujo era irrotacional, lo cual es bien sabido que se justifica en el caso del flujo de infiltración y para el movimiento de onda en flujos lentos, pero no se justifica en el caso de flujos hidráulicos rápidos como vertedores.

En ambas formulaciones, las expresiones obtenidas son complicadas y se han registrado pocos intentos de solución, analíticos o numéricos. Una excepción a esto es el trabajo de Sivakumaran, Hosking, Tingsanchali y Yevjevich (SH & T, 1981, ST & H, 1983 y S & Y, 1987), que se concentraron en el flujo constante de fluidos sobre vertedores y fondos curvos. Los autores sacaron las conclusiones de que las ecuaciones de Dressler dieron excelente resultado con el experimento. Para los casos de flujo constante estudiados, concluyeron que sus ecuaciones eran simples de aplicar y describieron algunos fenómenos importantes del flujo. Aunque las ecuaciones describen bien algunos fenómenos, como la presión aguas abajo del vertedor, el nivel de aproximación sigue siendo aplicable solo para precisión hidráulica con necesidad de realizar una corrección por presión centrífuga.

Este trabajo muestra que el escalamiento de variables introducido por Dressler tiene una inconsistencia, de tal manera que las ecuaciones curvilíneas que gobiernan el movimiento fluido sobre los fondos curvos son asintóticamente del mismo nivel de aproximación que las ecuaciones cartesianas, y en la mayoría de las aplicaciones habría poco caso de hacer complicaciones extras con las coordenadas curvilíneas. Posiblemente más útil, este artículo, habiendo notado algunas deficiencias en la aproximación hidráulica tanto en coordenadas curvilíneas como cartesianas, desarrolla una teoría hidráulica general en coordenadas cartesianas que incorpora una distribución de presión no hidrostática a primera aproximación incorporando efectos centrífugos. Esto puede aplicarse al flujo de fluidos sobre vertederos o topografía irregular, y parece ser capaz de describir



la transición del flujo subcrítico al supercrítico, así como la existencia de ondas. Como no sufre de algunos de los inconvenientes de la teoría convencional, puede tener una serie de usos en la práctica hidráulica.

Curvature effects on hydraulic instability. Cesar Mendoza, Victor Miguel Ponce. Proceedings, D. B. Simons Symposium on Erosion and Sedimentation, Ft. Collins, Colo., July 27-29, 2.13-2.27. 1983

Resumen

Se presenta una investigación sobre la inestabilidad hidrodinámica resultante de la combinación de la acción del tipo de resistencia de Chézy y la curvatura del suelo del canal utilizando las ecuaciones generalizadas no lineales de flujo superficial desarrolladas por Dressler. El análisis de estabilidad lineal se aplica para derivar los criterios. Los criterios desarrollados para la inestabilidad del flujo expanden los hallazgos de Dressler y Pohle, Craya y Vedernikov al incluir el término de curvatura.

Con la información disponible sobre las diversas manifestaciones de inestabilidad en un medio continuo, se pueden formular tres categorías principales. Estas son, en primer lugar, las oscilaciones de flujos paralelos, o casi paralelos (quasi-paralelos) tales como flujos de canales y capas límite. En segundo lugar, existe la clase de flujos con líneas de corriente curvadas, tales como vórtices entre cilindros giratorios o capas límite a lo largo de paredes curvas. En la tercera categoría se encuentran los casos en que el flujo medio es verdaderamente cero, como las células de Bénard y las inestabilidades convectivas.

Brock observó que cuando el agua fluye por un canal abierto suficientemente largo, se observa que la profundidad del flujo es uniforme, como lo sería si el mismo canal tuviera una pendiente muy pequeña. El flujo se caracteriza por una serie de orificios hidráulicos que se extienden a través del ancho del canal y se propagan aguas abajo. A través de estos orificios o choques la profundidad del flujo varía abruptamente. Entre los agujeros sucesivos la profundidad del flujo varía gradualmente, las olas de este tipo se denominan ondas en rollo y los flujos con tales ondas son llamados slug flow por algunos investigadores. "Muchos análisis se han hecho con respecto a este fenómeno, pero invariablemente, El objetivo de este trabajo es analizar la inestabilidad hidrodinámica de la superficie libre resultante de la acción combinada de resistencia y curvatura del suelo del canal utilizando las ecuaciones de flujo superficial no lineal generalizadas desarrolladas recientemente por Dressler.

Depth-averaged flow modeling in curvilinear coordinates. Frédéric Stilmant. Raphael Egan. Pierre Archambeau. Benjamin Dewals. Sébastien Ericum. Michel Piroton. IAHR World Congress. 2013

Resumen



Se presenta un conjunto de ecuaciones promediadas en profundidad en coordenadas curvilíneas. Esta extensión de las ecuaciones estándares de aguas poco profundas a flujos curvos y a flujos de chorro conduce a un modelo que es muy versátil. Su aplicabilidad y precisión se evalúa mediante el cálculo de un coeficiente de descarga y los perfiles hidráulicos para un vertedor con cresta afilada. Los resultados confirman la relevancia de la aproximación, aunque no esté considerada en las ecuaciones presentadas aquí, una discusión muestra que las pérdidas de carga podrían ser incluidas en el modelo para extender su campo de aplicación a muchas aplicaciones de ingeniería civil y ambiental.

10.4 Libros y ensayos.

Non-Hydrostatic Free Surface Flows. Castro-Orgaz, Oscar, HAGER, Willi H. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. 2017

Resumen

Se trata de la publicación más reciente respecto del flujo con curvatura, es un excelente compendio con las más relevantes técnicas para el estudio de este fenómeno, dentro de él se pueden consultar los siguientes temas relacionados con la curvatura: Flujos de superficie libre hidrostáticos y no hidrostáticos, Ecuaciones de flujo de superficie libre no hidrostáticas verticalmente integradas, Tensiones no hidrostáticas en dirección z y perfil de velocidad vertical, Aproximación del flujo superficial y ecuaciones de profundidad media, Modelo RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes) para Flujo de Ríos, Ondas de agua unidimensionales sobre la topografía horizontal. Flujos sobre las camas curvadas, Teoría del flujo con potencial, Tratamiento aproximado de la geometría neta de flujo, Coordenadas Curvilínea: Teoría de Dressler, Condiciones críticas de flujo en líneas de corriente curvadas, Flujo sobre los vertedores con cresta redonda, Flujo crítico sobre los perfiles de vertedor

Apuntes de Hidráulica II. Gilberto Sotelo Ávila México, Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México, D.F. 1997

Resumen

Esta fue la primera entrega que el autor inicia a publicar sus investigaciones respecto del flujo con curvatura del cual se transcribe el siguiente fragmento:

“Cuando el flujo en el canal no sea con líneas de corriente paralelas será necesario hacer correcciones a la ecuación de la energía con el fin de tomar en cuenta la componente normal de la aceleración debida a la curvatura de las líneas de corriente y que tiene efecto sobre la distribución de presiones en cada sección al incluir la fuerza centrífuga que aparece.



En el caso de conductas a presión es común considerar que la energía del flujo es constante para cualquier punto dentro del campo. Ello equivale a aceptar que el flujo es irrotacional y que la distribución de velocidades en dirección normal a una línea de corriente sigue la ley: $v = c/r$, donde c es una constante de proporcionalidad y r el radio de curvatura de la línea de corriente

En el caso de conducciones a superficie libre donde las líneas de corriente pueden tener curvatura apreciable, es necesario corregir la carga de presión considerado por medio de la ec 4.34 (Vol 1).

Supóngase, por ejemplo, un flujo bidimensional donde la curvatura de las líneas de corriente produce componentes de la aceleración normales a la dirección del flujo. La distribución de presiones sobre la sección normal se desvía de la hidrostática considerada. El flujo curvilíneo puede ser cóncavo o convexo. En ambos casos la distribución de presiones no lineal se representa por una línea curva en lugar de la distribución recta que ocurriría si el flujo fuera paralelo. En flujo cóncavo, las fuerzas centrífugas son descendentes aumentando la acción de la gravedad de tal modo que la presión resultante es mayor que la hidrostática resultante de un flujo paralelo.”

Hidráulica de Canales. Gilberto Sotelo Ávila. UNAM, Facultad de Ingeniería, 2002, 836 p. 2002

Resumen

En el presente libro el autor amplía el tema de la curvatura en canales del cual se extrae un fragmento del capítulo siguiente:

“1.5.2 Líneas de corriente de gran curvatura

El flujo sobre un canal de fondo curvo es diferente ya que la curvatura de las líneas de corriente es de consideración y produce un componente importante de la aceleración normal a la dirección del flujo, es decir, la fuerza centrífuga modifica la distribución de la presión obtenida para el flujo rectilíneo.

El fondo puede ser cóncavo o convexo. La fuerza centrífuga actúa hacia el exterior de la curva en ambos casos, pero en el cóncavo se manifiesta por una presión mayor y en el convexo por una presión menor. La distribución hidrostática de la carga de presión $y \cos \vartheta$ cambia en cualquier punto debido a la desviación $\Delta p/g\rho$, que se suma o resta según que el flujo sea cóncavo o convexo, respectivamente. De este modo, la energía H en dicho punto se calcula como sigue

$$H = z_D + y' \cos \theta \pm \frac{\Delta p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} = z + y \cos \theta \pm \frac{\Delta p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g}$$

donde se ha sustituido $z_D + y' \cos \theta = z + y \cos \theta$ por razones geométricas. Sin embargo, en el punto A sobre la superficie libre $\Delta p/g\rho = 0$, $v = v_A$, y por tanto



$$\frac{v_A^2}{2g} = H - (z + y \cos \theta)$$

Es decir, la carga de velocidad de las partículas en la superficie libre es la distancia vertical que separa a la línea de energía de dicha superficie”

Hidráulica de canales abiertos. Ven Te Chow. Ed. McGRAW-HILL. 2004

Resumen

En este libro se expone la curvatura en canales abiertos donde se resalta la siguiente transcripción:

“Distribución de presión en una sección de canal.

La presión en cualquier punto de la sección transversal del flujo en un canal con pendiente baja puede medirse por medio de la altura de la columna de agua en un tubo piezométrico instalado en el punto. Al no considerar las pequeñas perturbaciones debidas a la turbulencia, etc., es claro que el agua en esta columna debe subir desde el punto de medición hasta la línea de gradiente hidráulico o superficie del agua. Por consiguiente, la presión en cualquier punto de la sección es directamente proporcional a la profundidad del flujo por debajo de la superficie libre e igual a la presión hidrostática correspondiente a esta profundidad. En otras palabras, la distribución de presiones a lo largo de la sección transversal del canal es igual a la distribución hidrostática de presiones; es decir, la distribución es lineal y puede representarse mediante una línea recta. Esto se conoce como ley hidrostática de distribución de presiones.

En efecto, la aplicación de la ley hidrostática a la distribución de presiones en la sección transversal de un canal es válida sólo si los filamentos de flujo no tienen componentes de aceleración en el plano de la sección transversal. Este tipo de flujo se conoce teóricamente como flujo paralelo, es decir, aquel cuyas líneas de corriente no tienen curvatura sustancial ni divergencia. En consecuencia, no existen componentes de aceleración apreciables normales a la dirección del flujo, las cuales perturbarían la distribución hidrostática de presiones en la sección transversal de un flujo paralelo.

En problemas reales el flujo uniforme es prácticamente un flujo paralelo. El flujo gradualmente variado también puede considerarse como flujo paralelo, debido a que el cambio en la profundidad de flujo es tan suave que las líneas de corriente no tienen curvaturas apreciables ni divergencia; es decir, la curvatura y las divergencias son tan pequeñas que el efecto de las componentes de aceleración en el plano de la sección transversal es insignificante. Por consiguiente, para propósitos prácticos, la ley hidrostática de distribución de presiones es aplicable tanto al flujo gradualmente variado como al flujo uniforme.

Si la curvatura de las líneas de corriente es sustancial, el flujo es conocido teóricamente como flujo curvilíneo. El efecto de la curvatura es el de producir unas componentes de aceleración apreciables



o fuerzas centrífugas perpendiculares a la dirección del flujo. Por consiguiente, la distribución de presiones en la sección transversal se diferencia de la hidrostática si el flujo curvilíneo ocurre en un plano vertical. Este flujo curvilíneo puede ser convexo o cóncavo.”

Dinámica los fluidos con aplicaciones en la ingeniería. Editorial Trillas James W. Daily Donald R. F. Harleman. 1981.

Resumen

Se trata de un libro que se utilizó como consulta de los sistemas coordenados acelerados y rotatorios. Las relaciones precedentes escritas para la aceleración pertenecen a un sistema de coordenadas fijo. Un sistema fijo es aquel cuyas coordenadas permanecen constantes con respecto a un marco de referencia inercial. Hay muchos problemas que implican un sistema de referencia móvil, y los más comunes corresponden a sistemas de coordenadas fijos; esto se debe a que en la mayor parte de los casos es obviamente más conveniente.

También se consultó respecto a las líneas de corriente. Una línea de corriente es una curva imaginaria que conecta una serie de puntos en el espacio en un instante dado, de tal forma que todas las partículas que están sobre la curva en ese instante tienen velocidades cuyos vectores son tangentes a la misma. De aquí, las líneas de corriente indican la dirección del movimiento de las partículas que se encuentran a lo largo de ellas, en el instante dado.

Mecánica de los fluidos Victor L. Streeter. LIBROS MCGRAW-HILL. 1972

Resumen.

Este libro se utilizó para estudiar los conceptos y ecuaciones fundamentales del flujo de fluidos ampliado con la inclusión del volumen de control para la deducción de ecuaciones de continuidad, energía y cantidad de movimiento. Que son las ecuaciones gobernantes del fenómeno.

Mecánica de fluidos en ingeniería. de las Heras Jiménez, Salvador. 2012

Resumen.

En este libro se explica a detalle las coordenadas naturales y su relación con el triedro de Frenet en la geometría diferencial. Esta publicación es esencial pues con las fórmulas de Frenet es cómo fue posible la obtención de las coordenadas naturales en la presente tesis.

Introducción a la meteorología. Sverre Pettersen. Universidad Autónoma de Baja California. 2001

Resumen.



En este texto explica de una forma muy asimilable que son las coordenadas naturales y su relación física con el radio de curvatura, velocidad, aceleración y vector normal que sirvieron de antecedentes para entender este sistema de coordenadas utilizado en esta tesis.

Lectura No. 6 Flujo no permanente en cauces y canales. Ariosto Aguilar Chávez. 2016

Resumen

En esta lectura se explica clara y detalladamente la manera de solucionar las ecuaciones unidimensionales de Saint-Venant en forma discreta mediante un esquema de Caja o de Preissmann para régimen supercrítico

Hidráulica de canales Principios básicos. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Nahun Hamed García Villanueva. 2016.

Esta publicación resultó medular para la elaboración de la presente tesis pues en ella se hicieron la mayoría de las demostraciones matemáticas en forma magistral desde la óptica integral y diferencial de las ecuaciones de conservación de una propiedad. Cabe mencionar que se hicieron ampliaciones en las hipótesis y adaptaciones para dejar más claras y asimilables dichas comprobaciones.

10.5 Publicaciones en sitios web.

Curvature and Normal Vectors of a Curve. UC Davis ChemWiki. National Science Foundation. University of California. <https://math.libretexts.org>

Resumen

El presente trabajo explica en forma muy simple la definición de curvatura y vector normal a una curva, elementos geométricos que se utilizarán como herramientas matemáticas para la asimilación de esta tesis, cabe recordar que estos elementos se encuentran implícitos en las coordenadas naturales y es de gran importancia su entendimiento. A continuación se describe en forma breve los aspectos más importantes contenidos.

Para una curva definida paramétricamente se tiene la definición de longitud de arco. Dado que las funciones de valor vectorial son “curvas disfrazadas” definidas paramétricamente, recae en la misma definición. Se tiene el beneficio añadido de la notación con funciones de valor vectorial en que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las derivadas es sólo la magnitud del vector de velocidad.



Parametrización por longitud de arco. Recordando que, como las ecuaciones paramétricas, la función de valor vectorial describe no sólo el camino de la partícula, sino también cómo se mueve la partícula. Entre todas las representaciones de una curva hay una "más simple". Si la partícula viaja a la velocidad constante de una unidad por segundo, entonces se dice que la curva está parametrizada por la longitud del arco. Se ha visto este concepto anteriormente en la definición de radián. En un círculo unitario, un radián es una unidad de longitud de arco alrededor del círculo.

Cuando se dice "más simple", no quiere decir que las ecuaciones sean simples de encontrar, sino que la dinámica de la partícula es simple. Para ayuda en la parametrización por longitud de arco, se define la función de longitud de arco.

Conceptos: Curvatura y vector normal Considere un coche que conduce a lo largo de una carretera curva. Cuanto más ajustada sea la curva, más difícil será la conducción. En matemáticas se tiene un número, la curvatura, que describe esta "opresión". Si la curvatura es cero entonces la curva se parece a una línea cerca de este punto. Mientras que, si la curvatura es un número grande, entonces la curva tiene una curva aguda.

Mecanica de fluidos. Coordenadas de Lagrange S. Shmarev. www.mat.ucm.es/

Resumen

En este texto se ilustra cómo funciona la matriz jacobiana, explique que es la transformación continua, el movimiento de una partícula fluida desde el punto de vista lagrangiano, ecuaciones de trayectoria instrumentos que se utilizarán para la obtención de las coordenadas naturales.

Parametrizaciones (de curvas y superficies) María del Carmen Calvo. Facultad De Ciencias Fisicomatematicas E Ingenieria — UCA — Matematica III — 2006. www.dm.uba.ar/

Resumen

Este artículo es una reseña de cómo hacer parametrizaciones de curvas, esencial para el proceso de cálculo que se realizará en esta tesis académica debido a que las coordenadas naturales se trabajarán en tres dimensiones.

Grado de ingeniería aeroespacial. Curso 2011–12. Matemáticas II. Dpto. De matemática aplicada II Lección 3. Curvas. 4. Curvas parametrizadas: ejemplos. Universidad de Sevilla. www.matematicaaplicada2.es/

Resumen



Aquí se ven algunos ejemplos de cómo hacer parametrizaciones de curvas en tres dimensiones, muy útil para la parametrización de las trayectorias de las partículas empleadas para la presente tesis.

Geometría de curvas y superficies Francisco Urbano. 31 de mayo de 2010. www.ugr.es/

Resumen

En este documento se ofrecen las fórmulas y nociones para la determinación de: curvatura y torsión de curvas en el espacio, triedro de Frenet y teorema fundamental de curvas en el espacio. Necesarios a partir de una trayectoria parametrizada para determinar las componentes de las coordenadas naturales que se utilizarán en la concepción de esta tesis.

Apuntes de Mecánica. Ricardo Muñoz M. Apuntes para curso FI2001 - 2012/1 Afiliación: Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. 2002. www.u-cursos.cl

Resumen

En este trabajo se estudian diversos conceptos físicos y matemáticos que fueron útiles para la elaboración de esta tesis, como: Sistemas de coordenadas y cinemática, cinemática de la partícula, velocidad angular, leyes de Newton y fuerzas, vectores y matrices, derivadas parciales y el operador gradiente.

Curvatura y torsión de una curva de R^3 . Universidad de Extremadura. matematicas.unex.es/

Resumen

En esta sección se recuerdan algunas nociones básicas del espacio euclídeo tridimensional, y algunas propiedades sencillas de las "funciones vectoriales de variable real " que se utilizarán con frecuencia en esta tesis en el tema de las coordenadas naturales.

Capítulo 2 Ecuaciones de conservación. Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM. www.iim.unam.mx/zenit/fluidos1/apuntes/capitulo_2.pdf

Resumen

Esta información fue publicada con el fin de proporcionar un mejor entendimiento en los aspectos teóricos de cinemática, derivada material, esfuerzo en un punto, conservación de masa y su razón de cambio, conservación de momentum lineal y su derivación, mismos que se emplearán mas adelante en esta tesis.



Métodos Interpolación con MatLab. Análisis Numérico Universidad Nacional de Misiones
www.aulavirtual-exactas.dyndns.org/.

Resumen

En este documento se procede a explicar los diferentes tipos de interpolaciones que puede realizar el programa Matlab puesto que se tendrá que recurrir a usa estas técnicas durante la programación del código que resuelva las ecuaciones presentes en esta tesis.

Componentes intrínsecas de la aceleración: Componentes tangencial y normal. Alfonso Calera. Departamento de Física Aplicada. ETSIA. Albacete. UCLM. <https://previa.uclm.es/>

Resumen

En este ensayo se hace un análisis del movimiento utilizando un sistema de referencia que constituye la propia trayectoria. En este sistema de referencia la posición viene establecida por la distancia, s , a un origen C , medida sobre la propia curva. Mediante conceptos matemáticos se definen: velocidad, Aceleración tangencial, Aceleración normal o centrípeta, El concepto de Radio de Curvatura. Elementos presentes en esta tesis.

Identidades vectoriales. Productos vectoriales y escalares.
materias.df.uba.ar/f3Aa2012c2/files/2012/07/Coordenadas.pdf

Resumen.

Este es un documento que contiene un formulario y explicación gráfica de: Producto escalar, Identidades vectoriales, Transformación de Coordenadas, Fórmulas de análisis vectorial: longitud, superficie y volumen, Gradiente, Divergencia y Rotacional. Herramientas que se usaron en la elaboración de esta tesis.

Gráficas de Curvas y Superficies usando MATLAB Mariano González - Roy Sánchez.
<https://www.scribd.com/document/60155617>

Resumen.

Este documento trata de un tutorial para obtener los diferentes tipos de graficación para visualizar los resultados dentro del programa Matlab.

Problemas de curvas parametrizadas <https://es.scribd.com/document/330281158/curvas-soluciones-pdf>

Resumen.



Este documento es un solucionario de ejercicios donde se involucran elementos geométricos como el radio de curvatura, la tangente o el vector normal a una curva dada. Esencial para la elaboración de las coordenadas naturales de esta tesis.

Una introducción a la curvatura por Eduardo García Río, Universidad de Santiago de Compostela.
www.mat.ucm.es/

Resumen

Este ensayo resultó muy práctico para el entendimiento de la curvatura, elemento central de esta tesis, fue utilizado como marco de referencia para la formulación de diversas hipótesis para la obtención de la curvatura en el espacio R^3 .

Dinámica de una partícula. Puig Adam P. Cálculo Integral Aplicado a la Física y Técnica. Biblioteca Matemática, 1972, pág. 286287 www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/_dinamica/trabajo/

Resumen

El ensayo anterior sirvió para entender desde el punto de vista físico que es el radio de curvatura y su cálculo mediante herramientas matemáticas.

Plectoide guirnalda matemática <http://apolonio.es/guirnalda/plectoide/>

Resumen

En este archivo se estudió la proyección de la intersección de una plectoide con un cono, con el mismo eje, sobre un plano perpendicular al eje por el vértice del cono, este ejercicio sirvió de base para calcular las coordenadas naturales en tres dimensiones.

Claxton Daniel. (2006) Frenet Recuperado de:
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/11169-frenet>

Resumen

Se trata de un código en Matlab que devuelve las componentes del triedro de Frenet, muy útil para el estudio de las coordenadas naturales. Dicho código se modificará para incorporar el radio de curvatura y la longitud de arco.



10.6 Tesis académicas.

Propiedades de propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a Superficie libre. Ariosto Aguilar Chávez. 2002

Resumen.

En este trabajo se realizó un análisis de consistencia numérica a la caja de Preissmann mediante una expansión en serie de Taylor, mismo que sirvió de base para realizar una expansión de segundo orden al esquema propuesto en esta tesis.

Simulación numérica de flujo intermitente para diseño de riego parcelario por gravedad. Nahun Hamed García Villanueva. 1994

Resumen

En esta obra se desarrolla de una manera excepcional el comportamiento de las coordenadas naturales, que es uno de los elementos principales que se necesitan para el progreso de la presente tesis. Este trabajo resultó fundamental pues en él se expone el desarrollo matemático de este sistema coordinado y simplifica de una manera exponencial los resultados haciendo más eficiente el código de programación.

Estudio hidráulico de estructuras de excedencia cónica. Javier Martínez Reyes. 2015

Resumen.

En este trabajo se realizó la deducción de un perfil de flujo en función de la curvatura para un canal rectangular, este modelo sirvió para desarrollar un modelo que contemple una sección trapecial en que se explicará detalladamente más adelante.



11 Referencias bibliográficas

Aguilar C. A. 2016 Lectura No. 6 Flujo no permanente en cauces y canales.

Alegret B. E. y Martínez G. Y. (2010). Estudio integral del aliviadero de abanico o mexicano., Tecnología y Ciencias del Agua, antes Ingeniería hidráulica en México, vol. I, núm. 2, abril-junio de, pp. 37-57.

Aparicio F. J. (1988). Notas de hidráulica computacional. Reporte interno. División de estudios de posgrado de la facultad de Ingeniería de la UNAM.

Aparicio F.J. y Berezowsky M. (1989). Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la hidráulica. Ingeniería Hidráulica en México, 4(2), pp. 40-45

Burden R. L. y Faires J. D. (2002) Análisis numérico. International Thomson Editores

Calera A. Componentes intrínsecas de la aceleración: Componentes tangencial y normal. Departamento de Física Aplicada. ETSIA. Albacete. Recuperado de https://previa.uclm.es/profesorado/ajbarbero/S_Cinematica/Componentes%20intr%EDnsecas%20de%20la%20aceleraci%F3n.pdf

Calvo M. C. Parametrizaciones (de curvas y superficies) FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA — UCA — MATEMATICA III — 2006. Recuperado de www.dm.uba.ar/

Castro-Orgaz O. & Hager. W. H. (2015) · Dressler's theory for curved topography flows: iterative derivation, transcritical flow solutions and higher-order wave-type equations. Environ Fluid Mech Springer Science+Business Media Dordrecht

Castro-Orgaz O. & Hager W. H. (2014). One-dimensional modelling of curvilinear free surface flow: generalized Matthew theory. Journal of Hydraulic Research, 52:1, 14-23.

Castro-Orgaz O. and Hager W. H. (2017). Non-Hydrostatic Free Surface Flows. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics.

Claxton D. (2006) Frenet Recuperado de: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/11169-frenet>

Chow V. T. (2002). Hidráulica de canales abiertos. Ed. McGRAW-HILL.

Daily J. W. y Harleman D. R. F. (1981). Dinámica los fluidos con aplicaciones en la ingeniería. Editorial Trillas.

De las Heras J. S. (2012). Mecánica de fluidos en ingeniería.

Dewals, B. J., Erpicum, S., Archambeau, P., Detrembleur, S., & Piroton, M. (2006). Depth-integrated flow modelling taking into account bottom curvature. Journal of Hydraulic Research, 44(6), 785–795.

Dewals, B., Erpicum, S., & Piroton, M. (2008). A stable numerical scheme for shallow flow modelling taking into account bottom curvature. In Proceedings of the 4th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering.

Dey S., Bose S. K. and Castro-Orgaz O. (January 2013). Hydrodynamics of Undular Free Surface Flows.. Article in GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences.



- Dressler R. F. (1978). New nonlinear shallow-flow equations with curvature.. National Aeronautics & Space Administration Washington, DC. 20546 U.S.A. Journal of Hydraulic Research no. 16.
- Dutykh D. and Clamond D. (2014). Modified shallow water equations for mild-slope seabeds. 29th Intl Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Osaka, Japan, Mar. 30 – Apr. 2, 2014
- Dutykh D. and Clamond Didier. (2016). Modified shallow water equations for significantly varying seabeds. Applied Mathematical Modelling 40 Elsevier Inc 9767–9787.
- Escalante S. C. A. y Sotelo Á. G. (julio-septiembre 2001). Efecto resistivo en las ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo Ingeniería Hidráulica en México vol. XVI Num. 3 pp. 57-65.
- Fenton J. D. August 1996. Channel flow over curved boundaries and a new hydraulic theory. 10th Congress, Asia and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Research, Langkawi Island, Malaysia, pp. 26-29
- García Ángel Franco. (2009). Curso Interactivo de Física en Internet. Recuperado de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/>
- García R. E. Una introducción a la curvatura, Universidad de Santiago de Compostela. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/Docencia/cys/Garcia%20Rio.pdf>
- García V. N. H. 1994. Simulación numérica de flujo intermitente para diseño de riego parcelario por gravedad. Facultad de Ingeniería. UNAM
- García V. N. H. 2016. Hidráulica de canales Principios básicos. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Giancoli, Douglas G. (2004). Physics: principles with applications. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Education
- Girbau, J. (1993). "Geometria diferencial i relativitat", Ed. Universitat Autònoma de Barcelona, ISBN 84-7929-776-X.
- González M. y Sánchez R. Gráficas de Curvas y Superficies usando MATLAB. Pontificia Universidad Católica del Perú Recuperado de <https://www.scribd.com/document/60155617/Curvas-y-Superf>
- Heller V. and Hager W. H., ASCE F. and Minor Hans-Erwin. (May 2005). Ski Jump Hydraulics. Journal of Hydraulic Engineering.
- Identidades vectoriales. Productos vectoriales y escalares. Recuperado de materias.df.uba.ar/f3Aa2012c2/files/2012/07/Coordenadas.pdf
- Iridov, I. E. (1981) Leyes fundamentales de la mecánica. Moscú: Editorial Mir, Moscú.
- King A. C. and Bloor. M. I. G. (1990). Free streamline flow over curved topography. Quarterly Of Applied Mathematics Volume Lxviii, Number 2.
- Martínez R. J. 2015. Estudio hidráulico de estructuras de excedencia cónica. UNAM
- Mendoza C., Ponce V. M. Proceedings, Simons D. B. July 1983. Curvature effects on hydraulic instability. Symposium on Erosion and Sedimentation, Ft. Collins, Colo., 27-29, 2.13-2.27.



Muñoz M. R. (2002). Apuntes de Mecánica. Apuntes para curso FI2001 - 2012/1 Afiliación: Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Recuperado de <http://dgf.uchile.cl/~rmunoz/docs/apuntesFI2001rmm201002.pdf>

Paniconi, C., Aldama, A. A., & Wood, E. F. (1991). Numerical Evaluation of Iterative and Noniterative Methods for the Solution of the Nonlinear Richards Equation. *Water Resources Research*, 27(6), 1147-1163.

Plectoide guirnalda matemática Recuperado de <http://apolonio.es/guirnalda/plectoide/>

Problemas de curvas parametrizadas. (2016). Recuperado de <https://es.scribd.com/document/330281158/curvas-soluciones-pdf>

Puig A. P. Dinámica de una partícula. (1972). Cálculo Integral Aplicado a la Física y Técnica. Biblioteca Matemática, pág. 286287 recuperado de http://www.sc.ehu.es/sbweb/ocw-fisica/intro/guia_docente/dinamica.xhtml

Resnick, Robert & Halliday, David (2004). *Física 4ª*. CECSA, México

Reyes C. P. (2002). Introducción a la meteorología. Universidad Autónoma de Baja California

Romero A. 2011. Fenómenos de transporte. Puntos de vista para fluidos (lagrangiano y euleriano) Recuperado de <http://blogdealbertolromero.blogspot.mx/2011/11/puntos-de-vista-para-fluidos.html>

Shmarev S. Mecanica de Fluidos. Coordenadas de Lagrange. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/imi/documents/20062007Shmarev.pdf>

Sivakumaran. N. S. and Yevjevich. V. (1987). Experimental verification of the Dressler curved-flow equations. *Journal De Recherches Hydrauliques*, VOL. 25, NO. 3.

Sotelo Á. G. y Valdez-Izaguirre I.I. 2004. Régimen crítico en canales rectangulares de fondo curvo y sus aplicaciones. *Ingeniería, Investigación y Tecnología* vol. 3 pp. 215-228, (artículo arbitrado)

Sotelo Á. G. 2002. Hidráulica de Canales. UNAM, Facultad de Ingeniería, 836 p. 2002

Sotelo Á. G. Escalante Sandoval Carlos A. Octubre-diciembre 2001. Ecuaciones del flujo impermanente en canales trapeciales de fondo curvo. *Ingeniería Hidráulica en México* vol. XVI Num. 4 pp. 45-51.

Sotelo Á. G. Enero-marzo 2004. Flujo crítico en canales trapeciales de fondo curvo. *Ingeniería Hidráulica en México* vol. XIX Num. 1 pp. 27-40,

Sotelo Á. G. Julio-septiembre 2004. Flujo a superficie libre sobre curvas verticales cóncavas. *Ingeniería Hidráulica en México* vol. XIX Num. 3 pp. 25-36,

Sotelo Á. G. (1997) Apuntes de Hidráulica II. México, Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México, D.F.

Sotelo Á. G. y Escalante S. C. A. (abril-junio 2001). Ecuaciones generales del flujo impermanente en canales de fondo curvo. *Ingeniería Hidráulica en México* vol. XVI Num. 2 pp. 27-42.

Sotelo Á. G. (abril-junio 2004). Régimen crítico en canales circulares de fondo curvo Gilberto Sotelo Ávila. *Ingeniería Hidráulica en México* vol. XIX Num. 2 pp. 31-36.



Sotelo Á. G. (enero-marzo de 2006). Perfil del flujo sobre un vertedor tipo cimacio y su comprobación. Ingeniería hidráulica en México, vol. XXI, núm. 1, pp. 29-42.

Spiegel, M. & Abellanas, L. (1988). "Fórmulas y tablas de matemática aplicada", Ed. McGraw-Hill, ISBN 84-7615-197-7.

Stilmant F., Egan R., Archambeau P., Dewals B., Ercicum S. and Pirotton M. (2013). Depth-averaged flow modeling in curvilinear coordinates. IAHR World Congress.

Streeter V. L. (1972). Mecánica de los fluidos. LIBROS McGRAW-HILL. 1972

Szymkiewicz, R. (2010). Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics (Vol. 83). Springer Science & Business Media.

Taylor C. J. and Kriegman D. J. (1994). "Minimization on the Lie Group $SO(3)$ and Related Manifolds" (PDF). Technical Report No. 9405. Yale University.

UC Davis ChemWiki. (2017) Curvature and Normal Vectors of a Curve. National Science Foundation. University of California. Recuperado de https://math.libretexts.org/Core/Calculus/Vector_Calculus/2%3A_Vector-Valued_Functions_and_Motion_in_Space/2.3%3A_Curvature_and_Normal_Vectors_of_a_Curve

UC Davis ChemWiki. Parametric Surfaces. Recuperado de <https://math.libretexts.org/@api/deki/pages/590/pdf/2.7%253A%2bParametric%2bSurfaces.pdf?style=sheet=default>

Universidad de Sevilla. Grado De Ingeniería Aeroespacial. Curso 2011–12. Matemáticas II. Dpto. De Matemática Aplicada II Lección 3. Curvas. 4. Curvas parametrizadas: ejemplos. Recuperado de http://www.matematicaaplicada2.es/data/pdf/1322747218_1726115287.pdf

Universidad Nacional Autónoma de México. Capítulo 2 Ecuaciones de conservación. Instituto De Investigaciones En Materiales UNAM. Recuperado de www.iim.unam.mx/zenit/fluidos1/apuntes/capitulo_2.pdf

Universidad Nacional de Misiones Métodos Interpolación con MatLab. Análisis Numérico recuperado de http://www.aulavirtual-exactas.dyndns.org/ANUM/document/3_Interpolaci%F3n/Clase_interpolaci%F3n.pdf

University of Extremadura. Capítulo II Curvatura y torsión de una curva de R^3 . Recuperado de http://matematicas.unex.es/~brequejo/GEOMETRIA_DIFERENCIAL_I/Capitulo%20II.pdf

Urbano F. (31 de mayo de 2010). Geometría De Curvas Y Superficies. Recuperado de <http://www.ugr.es/~furbano/papers/Apuntes09GCS.pdf>

Weisstein Eric. "Leibniz Integral Rule." From [MathWorld](http://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html)--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html>