UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Retículas Artinianas y Noetherianas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JESUS ADRIAN CELIS GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. BERTHA MARÍA TOMÉ ARREOLA

2017

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.

1. Datos del alumno
Celis
González
Jesus Adrian
4661082455
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
413080923

2. Datos del tutor.
Dra.
Bertha María
Tomé
Arreola

3. Datos de sinodal 1
Dr.
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

4. Datos de sinodal 2
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

5. Datos de sinodal 3
Dr.
José
Ríos
Montes

6. Datos de sinodal 4
M. en C.
Clotilde
García
Villa

7. Datos de Tesis
Retículas Artinianas y Noetherianas
42p
2017

Dedicado a
mi madre, mi fan número 1

Agradecimientos

Quiero agradecer, primeramente, a Dios. De manera muy especial a mi madre Carmen González por apoyarme en todos mis proyectos, hacer mis metas sus metas y estar siempre allí dándome el apoyo y la fuerza para alcanzar mis sueños, por darme la oportunidad de estudiar (fuera del pueblo) la carrera de matemáticas. A mis hermanos Enrique y Stephany por ser un gran pilar en mi vida, y su solidaridad incondicional en todo. A mi sobrino (kike bebé) por el simple hecho de existir.

De manera muy especial, agradezco a la Dra. Bertha María Tomé Arreola por todo su apoyo, sin ella simplemente este trabajo no sería posible, por su paciencia y comprensión en todo momento, por la oportunidad de ser su ayudante en las materias que más me gustan (Álgebras).

A todos los profesores, en especial, a los que me dieron las clases de álgebra (simplemente me enamoré de esta disciplina). A los profesores que se volvieron amigos, a todas las amistades que hice durante estos años (omitiré nombres por si olvido a alguien), los compañeros con los que alguna vez discutí nuestros teoremas obvios y triviales.

Simplemente quiero agradecer a todos los que estuvieron para mi, sin ustedes ésto no hubiera sido posible.

Introducción

En la primera mitad del siglo diecinueve, el intento de George Boole de formalizar la lógica proposicional condujo al concepto de álgebras Booleanas. Al final del siglo diecinueve, mientras investigaba la axiomática de las álgebras Booleanas, Charles A. Pierce y Ernst Schröder encontraron útil introducir el concepto de retícula. Independientemente la investigación de Richard Dedekin sobre ideales de números algebraicos lo llevó al mismo descubrimiento. De hecho, Dedekind también introdujo el concepto de modularidad, una forma débil del concepto de distributividad. Aun cuando algunos de los primeros resultados de estos matemáticos y de Edward V. Huntington son muy elegantes y están muy lejos de ser triviales, estos no atrajeron la atención de la comunidad matemática.
El desarrollo de la teoría de retículas comenzó con el trabajo de Garret Birkhoff en la mitad de los treinta. En una brillante serie de artículos demostró la importancia de esta teoría y probó que ésta provee un marco de trabajo unificador para muchas disciplinas matemáticas. Birkhoff junto con Valère Glivenko, Karl Menger, John von Neumann, Oystein Ore y otros, desarrollaron suficientemente la teoría de retículas como para convencer a la comunidad matemática de su importancia. En la actualidad la teoría de retículas tiene aplicaciones en Lógica, Teoría de conjuntos, Análisis funcional, Geometría y Álgebra (Teoría de anillos y módulos).
La Teoría de retículas está basada en una única relación ($\leq$). Dicha relación es un orden parcial, es decir, satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo x, $x \leq x$ (Reflexividad).

2. Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ (Antisimetría).

3. Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (Transitividad).

Cuando adicionalmente satisface que:

4. Para todo x y z, se tiene que $x \leq z$ o $z \leq x$.

diremos que se trata de un orden lineal o cadena. Dados dos ordenes parciales, una función entre ellos es un morfismo de órdenes si y sólo preserva el orden de ida y vuelta. También recordemos que el supremo de un conjunto S (en un orden parcial), si existe, se denota por $\bigvee S$ y es la cota superior mínima, de forma similar se define el ínfimo (se denota por $\bigwedge S$. A lo largo de este trabajo utilizaremos estos conceptos. Esta tesis está basada en el artículo Notherian and Artinian Lattices, y se divide en cuatro capítulos. El primer capítulo contiene las nociones básicas de retículas y un panorama general acerca de la retículas compactamente generadas; en el segundo estudiamos el concepto de radical y zoclo de una retícula; en el tercero trabajamos con el concepto de conjuntos independientes, así como el concepto de dimensión. Estos tres capítulos contienen la teoría necesaria para entender y dar solución a los resultados expuestos en el artículo, los cuales se tratan en el capítulo cuatro.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1.1 *Decimos que un COPO* $(L, \leq)$ *es una retícula si cumple que para todo* $a, b \in L$

a) existe $c \in L$ *tal que* $c \leq a$, $c \leq b$ *y para todo* $d \in L$, *si* $d \leq a$, $d \leq b$ *entonces* $d \leq c$,

b) existe $c^* \in L$ *tal que* $a \leq c^*$, $b \leq c^*$ *y para todo* $d \in L$, *si* $a \leq d$, $b \leq d$ *entonces* $c^* \leq d$.

Los elementos descritos en los incisos a) y b) son únicos, los denotaremos por $a \wedge b$ *y* $a \vee b$ *respectivamente.*

Proposición 1.1.2 *Dada una retícula* $(L, \leq)$ *tenemos que para todo* $a, b, c \in L$ *se cumplen:*

a) $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$.

b) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$.

c) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

d) $a \wedge (b \vee a) = (a \wedge b) \vee a = a$.

e) $a \leq b$ *si y sólo si* $a = a \wedge b$ *si y sólo si* $b = a \vee b$.

Demostración.
a), b) y c) se siguen directamente de la Definición 1.1.1.

d) *Tenemos que* $a \wedge (b \vee a) \leq a$*, además* $a \leq b \vee a$ *y* $a \leq a$*, de donde se sigue que* $a \leq a \wedge (b \vee a)$*. Por lo tanto,* $a = a \wedge (b \vee a)$*.*
La prueba de la otra igualdad es análoga.

e) *Veamos que si* $a \leq b$ *entonces* $a \wedge b = a$*. Como* $a \leq b$ *y* $a \leq a$ *entonces* $a \leq a \wedge b$ *y claramente* $a \wedge b \leq a$*, de donde se concluye la igualdad deseada.*
Ahora supongamos que $a \wedge b = a$ *y probemos que* $a \vee b = b$*. Por d) tenemos que* $b \vee (a \wedge b) = b$*, pero* $a \wedge b = a$ *por hipótesis, luego por b)* $a \vee b = b$*.*
Finalmente, supongamos que $a \vee b = b$*. Entonces como* $a \leq (a \vee b)$*, se tiene que* $a \leq b$*.* ■

Notación. De aquí en adelante denotaremos $(L, \leq, \wedge, \vee)$ por L.

Lema 1.1.3 *Dada una retícula* L *tenemos que para todo* $a, b, c, d \in L$ *se cumplen:*

a) *Si* $a \leq b$ *entonces* $a \vee c \leq b \vee c$ *y* $a \wedge c \leq b \wedge c$*.*

b) *Si* $a \leq b$ *y* $c \leq d$ *entonces* $a \wedge c \leq b \wedge d$ *y* $a \vee c \leq b \vee d$*.*

c) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$*.*

d) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$*.*

Demostración. *Todas se siguen de la Definición 1.1.1 y la Proposición 1.1.2.* ■

Definición 1.1.4 *Sea* L *una retícula. Decimos que* L *tiene un elemento menor si existe* $z \in L$ *tal que* $z \leq a$ *para todo* $a \in L$*. De manera similar, decimos que* L *tiene un elemento mayor si existe* $u \in L$ *tal que* $a \leq u$ *para todo* $a \in L$*.*

Observación 1.1.5 *Si* L *tiene elemento menor y elemento mayor éstos son únicos y los denotaremos por* 0 *y* 1 *respectivamente.*

Lema 1.1.6 *Si* L *es una retícula finita entonces* L *tiene elemento mayor y elemento menor.*
Demostración.
Como L *es finita entonces* $L = \{x_1, ..., x_n\}$*. Consideremos la siguiente sucesión en* L*:*

$$q_1 = x_1, q_2 = q_1 \vee x_2, ..., q_n = q_{n-1} \vee x_n \tag{1.1}$$

Veamos que para todo $a \in L$*,* $a \leq q_n$*. Claramente* $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq ... \leq q_n$ *por (1). Sea* $a \in L$*, entonces* $a = x_k$ *para algún* $k \in \{1, ..., n\}$*. Por (1.1) tenemos que* $x_k \leq q_k$ *y* $q_k \leq q_n$*, por lo tanto tenemos que* $a \leq q_n$*.*

Para probar que L tiene un elemento menor, consideremos la siguiente sucesión en L:

$$p_1 = x_1, p_2 = p_1 \wedge x_2, ..., p_n = p_{n-1} \wedge x_n \tag{1.2}$$

De la construcción tenemos que $p_j \leq p_i$ si $i \leq j$ con $i, j \in \{1, ..., n\}$. Ahora dado $a \in L$, entonces $a = x_k$ para algún $k \in \{1, ..., n\}$, de donde $a = x_k \geq x_k \wedge p_{k-1} = p_k \geq p_n$. Entonces para todo $a \in L$ tenemos que $p_n \leq a$. ∎

Definición 1.1.7 *Decimos que L es una retícula completa si todo $S \subseteq L$ tiene un elemento ínfimo (denotado por $\bigwedge S$) y un elemento supremo (denotado por $\bigvee S$) en L, en el sentido de orden parcial.*

Proposición 1.1.8 *Sea L una retícula completa. Dados $S, T \subseteq L$ con $S, T \neq \emptyset$ se cumplen:*

i) *Para todo $s \in S$, $s \leq \bigvee S$ y $\bigwedge S \leq s$.*

ii) *Dado $x \in L$, entonces $x \leq \bigwedge S$ si y solamente si $x \leq s$ para todo $s \in S$.*

iii) *Dado $x \in L$, entonces $\bigvee S \leq x$ si y solamente si $s \leq x$ para todo $s \in S$.*

iv) *$\bigvee S \leq \bigwedge T$ si y sólo si $s \leq t$ para todo $s \in S$ y $t \in T$.*

v) *Si $S \subseteq T$, entonces $\bigvee S \leq \bigvee T$ y $\bigwedge T \leq \bigwedge S$.*

Demostración.
Todas son directas a partir de la definición de ínfimo y supremo. ∎

Lema 1.1.9 *Sean L una retícula completa y $\emptyset \neq S, T \subseteq L$. Entonces:*

a) $\bigvee(S \cup T) = (\bigvee S) \vee (\bigvee T)$.

b) $\bigwedge(S \cap T) = (\bigwedge S) \wedge (\bigwedge T)$.

Demostración.

a) *Sea $b \in S \cup T$. Si $b \in S$ entonces, por i) de la proposición 1.1.8, $b \leq \bigvee S$ y por la transitividad del orden, $b \leq \bigvee S \vee \bigvee T$. De manera similar, si $b \in T$ tenemos que $b \leq \bigvee S \vee \bigvee T$. Por iii) de la proposición 1.1.8 $\bigvee(S \cup T) \leq \bigvee S \vee \bigvee T$.*
Por otro lado, como $S, T \subseteq S \cup T$, por v) de la proposición 1.1.8, $\bigvee S, \bigvee T \leq \bigvee(S \cup T)$, de donde se sigue que $\bigvee S \vee \bigvee T \leq \bigvee(S \cup T)$. Por lo tanto se da la igualdad.

b) *La prueba es similar a la de a).* ∎

Lema 1.1.10 *Sea L una retícula y $F \subseteq L$ finito. Entonces $\bigvee F$ y $\bigwedge F$ existen.*
Demostración.
Como F es finito entonces $F = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Consideremos la siguiente sucesión:

$$q_1 = a_1, q_2 = q_1 \vee a_2, ..., q_n = q_{n-1} \vee a_n$$

Por construcción $a_i \leq q_n$ para $i \in \{1, .., n\}$. Ahora, dado $c \in L$ tal que $a_i \leq c$ para toda i, tenemos que $q_1 \leq c$, así $q_2 = q_1 \vee a_2 \leq c$, e inductivamente $q_n \leq c$. Por lo tanto $\bigvee F = q_n$. De manera similar se construye $\bigwedge F$. ■

Corolario 1.1.11 *Toda retícula finita es completa.* ■

Definición 1.1.12 *Sean L una retícula y $B \subseteq L$. B se llama subretícula si para cada $b, b' \in B$ tenemos que $b \wedge b', b \vee b' \in B$.*

Definición 1.1.13 *Sean L una retícula y $a, b \in L$ con $a \leq b$. Definimos el intervalo $[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$.*

Observación 1.1.14 *Sean L una retícula y $a, b \in L$ con $a \leq b$, entonces $[a, b]$ es una subretícula.*
Demostración.
Sean $x, y \in [a, b]$. Como $a \leq x, y$ entonces $a \leq x \wedge y$. Por otro lado, como $x, y \leq b$ entonces $x \vee y \leq b$. ■

Definición 1.1.15 *Sean L y M retículas. Decimos que $f : L \to M$ es un morfismo de retículas si $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ para todo $a, b \in L$. Un morfismo de retículas biyectivo se llama un isomorfismo de retículas.*

Lema 1.1.16 *Cada morfismo de retículas es un morfismo de órdenes.*
Demostración.
Sean L,M retículas y $f : L \to M$ un morfismo de retículas. Consideremos $a, b \in L$ con $a \leq b$. Entonces, por la Proposición 1.1.2, $a = a \wedge b$, de aquí $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \leq f(b)$. Por lo tanto $f(a) \leq f(b)$, es decir, $f : L \to M$ es morfismo de órdenes. ■

Lema 1.1.17 *Toda función inversa de un isomorfismo de retículas es también un isomorfismo.*
Demostración.
Sean L, M retículas y $f : L \longrightarrow M$ un isomorfismo de retículas. Consideremos $f^{-1} : M \longrightarrow L$ la función inversa a f. Para todo $u, v \in M$ tenemos que $f^{-1}(u \wedge v) = f^{-1}(ff^{-1}(u) \wedge ff^{-1}(v)) = f^{-1}(f(f^{-1}(u) \wedge f^{-1}(v)) = f^{-1}(u) \wedge f^{-1}(v)$. La prueba de que $f^{-1}(u \vee v) = f^{-1}(u) \vee f^{-1}(v)$ es similar a la anterior. ■

Teorema 1.1.18 *Sean L y M retículas. Entonces $f : L \to M$ es un isomorfismo de retículas si y sólo si es un isomorfismo de órdenes.*
Demostración.
$\Rightarrow$) Se sigue del Lema 1.1.16.
$\Leftarrow$) Veamos que para todo $a, b \in L$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Como f es morfismo de órdenes tenemos que $f(a \wedge b) \leq f(a), f(b)$. Ahora, consideremos $c' \in M$ tal que $c' \leq f(a)$ y $c' \leq f(b)$. Como $f : L \to M$ es una función biyectiva existe un único $c \in L$ tal que $f^{-1}(c') = c$. Ya que $f^{-1} : L \to M$ también es un isomorfismo de órdenes), tenemos que

$$f^{-1}(c') \leq f^{-1}(f(a)) \text{ y } f^{-1}(c') \leq f^{-1}(f(b)).$$

De aquí podemos concluir que

$$c = f^{-1}(c') \leq f^{-1}(f(a)) = a \text{ y } c = f^{-1}(c') \leq f^{-1}(f(b)) = b,$$

por lo que $c \leq a \wedge b$. Usando el hecho de que f es morfismo de órdenes tenemos que $c' = f(c) \leq f(a \wedge b)$. Entonces $f(a \wedge b) \leq f(a), f(b)$ y para todo $c' \in M$ con $c' \leq f(a), f(b)$ tenemos que $c' \leq f(a \wedge b)$, por lo que $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$.
La prueba de que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ es dual. ∎

Definición 1.1.19 *Sea L una retícula. Decimos que L es modular si para todo $a, b, c \in L$ con $b \leq a$ tenemos que $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.*

Teorema 1.1.20 *Sean L una retícula modular y $a, b \in L$. Entonces los intervalos $[a \wedge b, a]$ y $[b, a \vee b]$ son isomorfos como retículas.*
Demostración.
Por el Teorema 1.1.18, basta probar que existe un isomorfismo de órdenes entre los intervalos. Para cada $x \in [a \wedge b, a]$, definamos $\psi(x) = x \vee b$. Como $x \leq a$, tenemos que $b \leq x \vee b \leq a \vee b$, por lo que ψ está bien definida.
Para cada $y \in [b, a \vee b]$ consideremos $a \wedge y \in L$. Ya que $b \leq y$, entonces $a \wedge b \leq a \wedge y \leq a$, por lo que $a \wedge y \in [a \wedge b, a]$. Como $y \leq a \vee b$, entonces $y = y \wedge (a \vee b)$, además como L es modular y $b \leq y$ tenemos que $y = y \wedge (a \vee b) = b \vee (a \wedge y)$. Por lo tanto, dado $y \in [b, a \vee b]$ tenemos que $\psi(a \wedge y) = (a \wedge y) \vee b = y$, de manera que ψ es sobreyectiva.
Consideremos $x_1, x_2 \in [a \wedge b, a]$. Como $a \wedge b \leq x_1, x_2$ tenemos que $x_1 \vee (a \wedge b) = x_1$ y $x_2 \vee (a \wedge b) = x_2$. Supongamos que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, entonces $x_1 \vee b = x_2 \vee b$. De aquí $a \wedge (x_1 \vee b) = a \wedge (x_2 \vee b)$ y como L es modular y $x_1, x_2 \leq a$, tenemos que $x_1 = x_1 \vee (a \wedge b) = x_2 \vee (a \wedge b) = x_2$. Por lo tanto ψ es inyectiva.
Finalmente, veamos que ψ es un morfismo de órdenes. Consideremos $x_1, x_2 \in [a \wedge$

$b,a]$ con $x_1 \leq x_2$, entonces $\psi(x_1) = x_1 \vee b \leq x_2 \vee b = \psi(x_2)$. Por otro lado, supongamos que $\psi(x_1) \leq \psi(x_2)$. Por lo que hicimos antes, $x_1 = a \wedge \psi(x_1) \leq a \wedge \psi(x_2) = x_2$. De manera que ψ es un isomorfismo de órdenes. ∎

Definición 1.1.21 *Sea L una retícula con 0 y 1.*

a) Dado $a \in L$ decimos que un elemento $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

b) Decimos que L es complementada si para todo $a \in L$ existe al menos un elemento $a^* \in L$ tal que a^* es complemento de a.

Definición 1.1.22 *Sea L una retícula con 0 y 1.*

a) Sean $[a,b] \subseteq L$ y $x \in [a,b]$. Si existe $y \in L$ tal que $x \wedge y = a$ y $x \vee y = b$, entonces y es un complemento de x relativo al intervalo $[a,b]$.

b) L es relativamente complementada si para cada $x \in L$ y cada intervalo $[a,b]$ que lo contenga, x tiene al menos un complemento relativo.

Proposición 1.1.23 *Sea L una retícula modular con 0 y 1. Entonces L es complementada si y sólo si L es relativamente complementada.*

Demostración.

Para la suficiencia supongamos que L es complementada. Sean $[a,b] \subseteq L$ y $x \in [a,b]$. Como L es complementada existe $x^* \in L$ tal que $x \wedge x^* = 0$ y $x \vee x^* = 1$. Consideremos el elemento $(a \vee x^*) \wedge b$. Usando la modularidad de L tenemos que

$$x \wedge ((a \vee x^*) \wedge b)) = (x \wedge b) \wedge (a \vee x^*) = x \wedge (a \vee x^*) = a \vee (x^* \wedge x) = a \vee 0 = a.$$

Por otro lado,

$$x \vee ((a \vee x^*) \wedge b)) = (x \vee (a \vee x^*)) \wedge b = ((x \vee a) \vee x^*) \wedge b = (x \vee x^*) \wedge b = 1 \wedge b = b.$$

Por lo tanto un complemento relativo a x en $[a,b]$ es $(a \vee x^*) \wedge b$, de manera que L es relativamente complementada.

La necesidad es directa usando el hecho de que $L = [0,1]$. ∎

1.2. Retículas compactamente generadas

Definición 1.2.1 *Sea L una retícula. Decimos que $\{c_i : i \in I\} \subseteq L$ es un conjunto directo (inverso) si para toda $i,j \in I$, existe $k \in I$ con $c_i \vee c_j \leq c_k$ ($c_k \leq c_i \wedge c_j$).*

Observación 1.2.2 *Sea L una retícula y $S \subseteq L$ una cadena, entonces S es un conjunto directo e inverso.*

Definición 1.2.3 *Sea L una retícula. L es continua superiormente si para todo subconjunto directo $\{c_i : i \in I\}$ y $a \in L$, tenemos que $a \wedge (\bigvee_{i\in I} c_i) = \bigvee_{i\in I}(a \wedge c_i)$. Por otro lado, L es continua inferiormente si para todo conjunto inverso $\{c_i : i \in I\}$ y $a \in L$, tenemos que $a \vee (\bigwedge_{i\in I} c_i) = \bigwedge_{i\in I}(a \vee c_i)$.*

Definición 1.2.4 *Dada una retícula L, decimos que $f \in L$ es finitamente generado (o compacto) si siempre que $f \leq \bigvee S$, para algún conjunto directo $S \subseteq L$, entonces existe $x \in S$ de manera que $f \leq x$.*

Lema 1.2.5 *Sea L una retícula completa y $D \subseteq L$ no vacío. Si D es un conjunto directo y $F \subseteq D$ es finito entonces existe $d_0 \in D$ de manera que $\bigvee F \leq d_0$.*
Demostración. *(Por inducción sobre el cardinal de F)*
Si $F = \{a\}$, claramente $\bigvee F = a$ y $a \in D$.
Supongamos la afirmación válida para n. Sea $F \subseteq D$ de manera que $F = \{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$. Podemos ver a $F = \{a_1, ..., a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$. Usando el Lema 1.1.9 tenemos que $\bigvee F = (\bigvee_{i=1}^n a_i) \vee a_{n+1}$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\{a_1, ..., a_n\}$ tenemos que existe $d_1 \in D$ tal que $\bigvee_{i=1}^n a_i \leq d_1$. Como D es un conjunto directo, dados $d_1, a_{n+1} \in D$, entonces existe $d_0 \in D$ tal que $d_1 \vee a_{n+1} \leq d_0$. Así, por la transitividad del orden, $\bigvee F \leq d_0$. ■

Proposición 1.2.6 *Sea L una retícula completa y $f \in L$. Entonces f es finitamente generado si y sólo si para todo $U \subseteq L$ no vacío con $f \leq \bigvee U$ existe $F \subseteq U$ finito tal que $f \leq \bigvee F$.*
Demostración.
$\Rightarrow$) Sea $f \in L$ finitamente generado y $X \subseteq L$ no vacío con $f \leq \bigvee X$. Consideremos $\mathcal{F} = \{\bigvee F : F \subseteq X$ y F finito$\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es un conjunto directo en L. Sean $s, t \in \mathcal{F}$ entonces $s = \bigvee F_1$ y $t = \bigvee F_2$ con $F_1, F_2 \subseteq X$ finitos. Consideremos $F_1 \cup F_2$ que es un subconjunto finito de X. Por el Lema 1.1.9 tenemos que $\bigvee(F_1 \cup F_2) = (\bigvee F_1) \vee (\bigvee F_2)$. Por lo tanto $\bigvee(F_1 \cup F_2) \in \mathcal{F}$ y $s \vee t \leq \bigvee(F_1 \cup F_2)$. Ahora, para cada $F \subseteq X$ finito tenemos que $\bigvee F \leq \bigvee X$, de manera que $\bigvee \mathcal{F} \leq \bigvee X$. Por otro lado, para cada $x \in X$ tenemos que $x \leq \bigvee\{x\}$ y $\bigvee\{x\} \in \mathcal{F}$. Entonces por la transitividad del orden $x \leq \bigvee \mathcal{F}$ para toda $x \in X$. Concluimos, por la Proposición 1.1.8, que $\bigvee X \leq \bigvee \mathcal{F}$.
Finalmente, como $f \leq \bigvee X = \bigvee \mathcal{F}$ y f es finitamente generado existe $t' \in \mathcal{F}$ tal que $f \leq t'$. Entonces $f \leq \bigvee F$ con $F \subseteq X$ finito.

$\Leftarrow$) *Sea D un conjunto directo en L. Si $f \leq \bigvee D$ entonces existe $F \subseteq D$ finito tal que $f \leq \bigvee F$. Ahora, por el Lema 1.2.5, existe $d_0 \in D$ con $\bigvee F \leq d_0$ y por la transitividad del orden $f \leq d_0$.* ∎

Proposición 1.2.7 *Sean L una retícula completa y $S \subseteq L$ finito. Si todos los elementos de S son compactos entonces $\bigvee S$ es compacto.*

Demostración.

Basta probarlo para $S = \{a, b\}$ con a, b compactos (la generalización se sigue por inducción). Sabemos por el Lema 1.1.9 que $\bigvee S = a \vee b$.

Sea $D \subseteq L$ un conjunto directo tal que $a \vee b \leq \bigvee D$. Por la transitividad del orden $a, b \leq \bigvee D$. Como a y b son compactos existen $d_0, d_1 \in D$ tales que $a \leq d_0$ y $b \leq d_1$. Ahora, como D es un conjunto directo, existe $d \in D$ tal que $d_0 \vee d_1 \leq d$. De esta manera $\bigvee S = a \vee b \leq d_0 \vee d_1 \leq d$. ∎

Definición 1.2.8 *Sea L una retícula completa. Decimos que L es compacta (o finitamente generada) si $1 \in L$ es compacto (finitamente generado).*

Proposición 1.2.9 *Sean L una retícula compacta y $1 \neq a \in L$. Entonces la subretícula $[a, 1]$ tiene al menos un elemento máximo distinto de 1.*

Demostración.

Consideremos $S = [a, 1] - \{1\} \neq \varnothing$. Veamos que S tiene un elemento máximo. Sea $C \subseteq S$ una cadena, veamos que $\bigvee C \in S$. Para todo $c \in C$ tenemos que $a \leq c < 1$, por lo tanto $a \leq \bigvee C \leq 1$. Afirmamos que $\bigvee C \neq 1$. En caso contrario, como C es un conjunto directo (al ser cadena) y L es compacta, existe $c_0 \in C$ tal que $1 \leq c_0$. Luego $c_0 = 1$, pero esto contradice el hecho de que $c_0 \in S$. Por lo tanto $\bigvee C \in S$ y por el Lema de Zorn existe al menos un elemento máximo distinto de 1 en $[a, 1]$. ∎

Definición 1.2.10 *Sea L una retícula completa. Decimos que L es compactamente generada (o algebraica) si para todo $c \in L$ existe $S \subseteq L$ tal que todo $s \in S$, s es compacto y $c = \bigvee S$.*

Observación 1.2.11 *Sean L una retícula compactamente generada y $a, b \in L$. Entonces $a \leq b$ si y sólo si para cada $c \in L$ compacto tal que $c \leq a$ se tiene que $c \leq b$.*

Teorema 1.2.12 *Toda retícula compactamente generada es continua superiormente.*

Demostración.

Sean L una retícula compactamente generada, $a \in L$ y $D \subseteq L$ un conjunto directo.

Veamos que $a \wedge (\bigvee_{d\in D} d) = \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$.
Consideremos $a \wedge d$ *con* $d \in D$. *Claramente* $d \leq \bigvee_{d\in D} d$. *Usando el Lema 1.1.3 a) tenemos que* $a \wedge d \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$. *De esto se concluye que* $\bigvee_{d\in D}(a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$.
Para probar la otra desigualdad usemos la observación 1.2.11. Sea $c \in L$ *compacto tal que* $c \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d)$. *Por definición tenemos que* $c \leq a$ *y* $c \leq \bigvee_{d\in D} d$. *Como* D *es un conjunto directo y* c *es compacto en* L *existe* $d_0 \in D$ *con* $c \leq d_0$. *Se sigue que* $c \leq a \wedge d_0 \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$. *Por la observación 1.2.11,* $a \wedge (\bigvee_{d\in D} d) \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$. ∎

Lema 1.2.13 *Sean* L *una retícula compactamente generada y* $a, b \in L$ *tales que* $a \leq b$. *Entonces* $k \in [a, b]$ *es compacto en la subretícula* $[a, b]$ *si y sólo si existe* $c \in L$ *compacto tal que* $k = a \vee c$ *y* $a \vee c \leq b$.
Demostración.
$\Rightarrow$) *Sea* $k \in [a, b]$ *compacto, como* L *es una retícula compactamente generada, existe una familia de elementos compactos* $\{c_i\}_{i\in I}$ *tales que* $k = \bigvee_{i\in I} c_i$.
Claramente, $k = a \vee k = a \vee (\bigvee_{i\in I} c_i) = \bigvee_{i\in I}(a \vee c_i)$, *con* $a \vee c_i \in [a, b]$ *pues* $c_i \leq k \leq b$. *Al ser* k *compacto en* $[a, b]$ *existe* $J \subseteq I$ *finito tal que* $k = \bigvee_{i\in J}(a \vee c_i) = a \vee (\bigvee_{i\in J} c_i) = a \vee c \leq b$, *donde* $c = \bigvee_{i\in J} c_i$ *es compacto en* L *por la proposición 1.2.7.*
$\Leftarrow$) *Sean* $c \in L$ *compacto y* $X \subseteq [a, b]$ *con* $a \vee c \leq \bigvee X$, *entonces* $c \leq \bigvee X$. *Como* c *es compacto existe* $F \subseteq X$ *finito con* $c \leq \bigvee F$, *además* $F \subseteq [a, b]$. *Por lo tanto* $a \vee c \leq \bigvee F$ *y entonces* $a \vee c$ *es compacto en* $[a, b]$. ∎

Lema 1.2.14 *Sean* L *una retícula completa y continua superiormente y* $a \in L$. *Los elementos compactos en la subretícula* $[0, a]$ *son exactamente los elementos compactos de* L *que pertenecen a* $[0, a]$.
Demostración.
$\Rightarrow$) *Si* $c \in [0, a]$ *es compacto en* L *entonces es claramente compacto en* $[0, a]$.
$\Leftarrow$) *Sean* $c \in [0, a]$ *compacto en* $[0, a]$ *y* D *un conjunto directo en* L *con* $c \leq \bigvee_{d\in D} d$.
Como $c \in [0, a]$ *tenemos que* $c = a \wedge c \leq a \wedge (\bigvee_{d\in D} d) = \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$, *por ser* L *continua superiormente. Ahora,* $c \leq \bigvee_{d\in D}(a \wedge d)$, *donde* $\{a \wedge d : d \in D\}$ *es un conjunto directo en* $[0, a]$, *de manera que existe* $d_0 \in D$ *tal que* $c \leq a \wedge d_0 \leq d_0$. *Por lo tanto* c *es compacto en* L. ∎

Proposición 1.2.15 *Sean* L *una retícula compactamente generada y* $a \in L$. *Entonces* $[0, a]$ *es también compactamente generada.*
Demostración. *Se sigue del Teorema 1.2.12 y el Lema 1.2.14.* ∎

Proposición 1.2.16 *Sean* L *una retícula completa y* $a \in L$.

i) Si c es compacto en L, entonces $c \vee a$ es compacto en $[a, 1]$.

ii) Si L es una retícula compacta, entonces $[a, 1]$ es también una retícula compacta.

iii) Si L es una retícula compactamente generada, entonces la subretícula $[a, 1]$ es compactamente generada.

Demostración.

i) Sean $c, a \in L$ y c compacto en L. Supongamos que $c \vee a \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ con $\{a_i : i \in I\} \subseteq [a, 1]$. Por transitividad $c \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ luego existe $F \subseteq I$ finito de manera que $c \leq \bigvee_{i \in F} a_i$ y

$$c \vee a \leq (\bigvee_{i \in F} a_i) \vee a = \bigvee_{i \in F}(a_i \vee a) = \bigvee_{i \in F} a_i.$$

ii) Se sigue de i) tomando $c = 1$ pues L es compacta.

iii) Si L es compactamente generada y $x \in [a, 1]$, entonces $x = \bigvee_{i \in I} c_i$, donde c_i es compacto en L para toda $i \in I$. Entonces $x = a \vee x = a \vee (\bigvee_{i \in I} c_i) = \bigvee_{i \in I}(a \vee c_i)$. Por i) cada $a \vee c_i$ es un elemento compacto en $[a, 1]$. $\blacksquare$

Capítulo 2

El zoclo y el radical de una retícula

Definición 2.0.1 *Sea L una retícula con 0 y 1.*

a) Sean $b, c \in L$, decimos que c es un seudocomplemento de b en L si $b \wedge c = 0$ y c es máximo con esta propiedad.

b) Una retícula L es seudocomplementada si todo elemento en L tiene al menos un seudocomplemento relativo en cada intervalo que lo contenga.

Lema 2.0.2 *Sea L una retícula modular con $0, 1$. Entonces cada complemento es un seudocomplemento.*

Demostración.

Sea $a \in L$ con complemento b, entonces $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. Ahora, sea $b' \in L$ tal que $b \leq b'$ y $a \wedge b' = 0$. Usando el hecho de que L es modular tenemos que

$$b' = b' \wedge 1 = b' \wedge (a \vee b) = (b' \wedge a) \vee b = 0 \vee b = b.$$

Por lo tanto b es un seudocomplemento. ∎

Definición 2.0.3 *Sea L una retícula. Decimos que L es una retícula inductiva si todos los intervalos $[a, b]$ en L satisfacen la siguiente condición: para toda cadena $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq [a, b]$ y para todo $c \in [a, b]$ tal que $c \wedge b_i = 0$ para toda $i \in I$, se tiene que $c \wedge (\bigvee_{i \in I} b_i) = 0$.*

Observación 2.0.4 *De la definición 2.0.3 se desprenden las siguientes afirmaciones:*

i) Todo intervalo de una retícula inductiva es inductivo.

ii) Toda retícula continua superiormente es inductiva.

iii) Toda retícula compactamente generada es inductiva.

Lema 2.0.5 *Toda retícula inductiva es seudocomplementada.*
Demostración.
Sea L una retícula inductiva. Mostraremos que si $a \wedge b = 0$ para $a, b \in L$ entonces existe un seudocomplemento $c \in L$ tal que $b \leq c$. (En este caso L es llamada una retícula con suficientes seudocomplementos.)
Sea $C = \{x \in L : a \wedge x = 0, b \leq x\}$, $C \neq \varnothing$ pues $b \in C$. Sea $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq C$ una cadena. Consideremos $\bigvee_{i \in I} b_i$. Claramente es cota superior de $\{b_i\}_{i \in I}$ y tenemos que $a \wedge b_i = 0$ para toda $i \in I$. Como L es una retícula inductiva $a \wedge (\bigvee_{i \in I} b_i) = 0$, de manera que $\bigvee_{i \in I} b_i \in C$. Aplicando el Lema de Zorn existe $c \in C$ máximo con las propiedades $a \wedge c = 0$ y $b \leq c$.
Aplicando el argumento anterior con $b = 0$, tenemos que existe $c \in C$ máximo tal que $a \wedge c = 0$. $\blacksquare$

Corolario 2.0.6 *Toda retícula continua superiormente es seudocomplementada.* $\blacksquare$

Definición 2.0.7 *Sean L una retícula con 0 y 1, y $a, b, c \in L$.*

a) Si $a \lneq b$ y $a \leq c \lneq b$ implica $c = a$, diremos que a está cubierto por b.

b) Si el 0 está cubierto por a, diremos que a es un átomo.

c) Si a está cubierto por el 1 de L, diremos que a es un coátomo.

Lema 2.0.8 *Sea L una retícula modular y complementada. Un elemento $a \in L$ es átomo si y sólo si cada complemento de a es un coátomo en L.*
Demostración.
Sea $a \in L$ un átomo y a^* un complemento de a, entonces $a \wedge a^* = 0$ y $a \vee a^* = 1$. Ahora utilizando el Teorema 1.1.20 tenemos el siguiente isomorfismo de retículas

$$[0, a] = [a \wedge a^*, a] \cong [a^*, a \vee a^*] = [a^*, 1].$$

Entonces $[0, a]$ tiene el mismo número de elementos que $[a^*, 1]$. Como a es átomo $2 = |[0, a]| = |[a^*, 1]|$. Por lo tanto, si $a^* \leq b$ entonces $b \in [a^*, 1]$ de aquí $b = a^*$ o $b = 1$.
El recíproco es análogo. $\blacksquare$

Definición 2.0.9 *Sea L una retícula con 0 y 1. Un elemento $e \in L$ es un elemento esencial si $e \wedge x \neq 0$ para toda $x \in L$ distinta de cero. El conjunto de todos los elementos esenciales en L se denota por $E(L)$.*

Proposición 2.0.10 *Sean L una retícula modular, completa y $a, b \in L$. Entonces b es un seudocomplemento de a en L si y sólo si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b$ es esencial en $[b, 1]$.*
Demostración.
La prueba se sigue de la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

a) b es un seudocomplemento de a en L.

b) $a \wedge b = 0$ y para todo $c \in L$ tal que $b < c$ se tiene que $a \wedge c \neq 0$.

c) $a \wedge b = 0$ y para todo $c \in [b, 1]$, $c \neq b$ se tiene que $a \wedge c \nleq b$.

d) $a \wedge b = 0$ y para todo $c \in [b, 1]$, $c \neq b$ se tiene que $b < b \vee (a \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

e) $a \wedge b = 0$ y $a \vee b$ es esencial en $[b, 1]$.

La prueba de todas estas equivalencias es directa a partir de la Definición 2.0.1 y la Definición 2.0.9. ∎

Corolario 2.0.11 *Si L es una retícula modular con 0 y b es un pseudo-complemento de a en L entonces $a \vee b$ es esencial en L.*
Demostración.
Si $0 \neq x \leq b$, entonces claramente $(a \vee b) \wedge x = x \neq 0$. Si $x \nleq b$ entonces $b < b \vee x$ por lo que $b \vee x \in [b, 1]$. Usando la equivalencia d) de la proposición 2.0.10 y la modularidad de L, tenemos que $b < b \vee (a \wedge (b \vee x)) = (b \vee a) \wedge (b \vee x) = ((b \vee a) \wedge x) \vee b)$. Por lo tanto $(b \vee a) \wedge x \neq 0$. ∎

Lema 2.0.12 *En una retícula modular, compactamente generada y complementada cada elemento es el supremo de un conjunto de átomos.*
Demostración.
Sea L una retícula modular, compactamente generada y complementada. Primero veamos que para todo $c \in L$ compacto, distinto de cero y que no sea átomo, hay un coátomo en el intervalo $[0, c]$.
Consideremos el conjunto $X = \{x \in L : x < c\}$, $X \neq \emptyset$ pues $0 \in X$. Consideremos una cadena $C \subseteq X$. Afirmamos que $\bigvee C \in X$. En caso contrario, $\bigvee C = c$ y como c es compacto y C es un conjunto directo (por ser una cadena) existe $x' \in C$ tal que $c = x'$, esto contradice el hecho de que $x' \in X$. Por el Lema de Zorn, se obtiene que la retícula $[0, c]$ tiene un coátomo.
Ahora, por el Lema 2.0.8, hay al menos un átomo menor a c. Como L es compactamente generada se sigue que cada $a \neq 0$ contiene al menos un átomo. Esto es, existe un átomo s que es menor o igual a a.

Sean $0 \neq a \in L$ y $S = \{s \in L : s \leq a$ y s es átomo$\}$. Sea $u = \bigvee S$, entonces $u \leq a$. Supongamos que $u < a$. Como L es modular y complementada, por la Proposición 1.1.23, L es relativamente complementada. Luego podemos tomar un complemento relativo v de u en el intervalo $[0, a]$. Por el párrafo anterior, existe un átomo $b \leq v$ en el intervalo $[0, a]$. De esta manera $b \leq u \wedge v$, lo que contradice el hecho de que v es complemento relativo de u en $[0, a]$. Por lo tanto $a = u$. ∎

Definición 2.0.13 *Sea L una retícula con 0. El supremo de todos los átomos en L se llama el zoclo de L, y se denota por $Zoc(L)$.*

Lema 2.0.14 *Sea L una retícula con 0. Entonces el zoclo de L es menor o igual que el ínfimo de todos los elementos esenciales en L.*

Demostración.

Sean $0 \neq s \in L$ un átomo y $0 \neq e \in L$ un elemento esencial. Como s es átomo tenemos que $e \wedge s \in \{0, s\}$. Ahora, como e es esencial en L, $e \wedge s \neq 0$, por lo que $e \wedge s = s$. Entonces $s \leq e$, de aquí $Zoc(L) \leq e$ para todo e esencial en L. Por lo tanto $Zoc(L) \leq \bigwedge\{e \in L : e$ es esencial$\}$. ∎

Teorema 2.0.15 *Sea L una retícula modular y compactamente generada. Entonces el zoclo de L es igual al ínfimo de todos los elementos esenciales.*

Demostración.

Sea $s = \bigwedge\{e \in L : e$ es esencial$\}$, por el Lema 2.0.14 tenemos que $Zoc(L) \leq s$. Para obtener la otra desigualdad veamos que el intervalo $[0, s]$ es una subretícula complementada.

Sea $a \in [0, s]$. Por el Corolario 2.0.6 sabemos que L es pseudo-complementada. Sea c el pseudo-complemento de a en L. Entonces, por el Corolario 2.0.11, $a \vee c$ es esencial en L, por lo que $s \leq a \vee c$. Tenemos ahora que $c \wedge s$ es un complemento para a en $[0, s]$ pues $a \wedge (c \wedge s) = (a \wedge c) \wedge s = 0$ y $a \vee (c \wedge s) = (a \vee c) \wedge s = s$ ya que L es modular y $a \leq s$.

Finalmente, como $[0, s]$ es una retícula complementada, por el Lema 2.0.12, cada elemento en $[0, s]$ es el supremo de un conjunto de átomos, así $s \leq Zoc(L)$. Por lo tanto $s = Zoc(L)$. ∎

Definición 2.0.16 *Sea L una retícula con 0 y 1. Decimos que $a \in L$ es superfluo si $a \vee b \neq 1$ para todo $b \neq 1$. El conjunto de todos los elementos superfluos en L se denota por $S(L)$.*

Lema 2.0.17 *Sea L una retícula con 0 y 1. El conjunto $S(L)$ cumple lo siguiente:*

a) *Si* $a \in S(L)$ *y* $b \leq a$ *entonces* $b \in S(L)$

b) *Si* $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq S(L)$ *entonces* $\bigvee_{i=1}^n a_i \in S(L)$

Demostración.

a) *Sean* $a \in S(L)$, $b \leq a$ *y* $1 \neq c \in L$. *Entonces tenemos que* $b \vee c \leq a \vee c < 1$. *Por tanto* $b \vee c < 1$, *es decir,* b *es superfluo en* L.

b) *Lo haremos para dos elementos, la prueba se sigue por inducción. Sean* $a_1, a_2 \in S(L)$ *y* $1 \neq c \in L$, *entonces* $(a_1 \vee a_2) \vee c = a_1 \vee (a_2 \vee c)$. *Como* a_2 *es superfluo* $a_2 \vee c \neq 1$ *y como* a_1 *es superfluo y* $a_2 \vee c \neq 1$, *tenemos que* $a_1 \vee (a_2 \vee c) \neq 1$. ∎

Lema 2.0.18 *Sea* L *una retícula modular con* 0 *y* 1. *Si* $b < c$ *y* b *es superfluo en* $[0, c]$ *entonces para toda* $a \in L$, $a \vee b$ *es superfluo en* $[a, a \vee c]$.

Demostración.

Sea $x \in [a, a \vee c]$ *y supongamos que* $(a \vee b) \vee x = a \vee c$. *De la igualdad anterior tenemos que* $(b \vee (a \vee x)) \wedge c = ((a \vee b) \vee x) \wedge c = (a \vee c) \wedge c = c$. *Por la modularidad,* $b \vee ((a \vee x) \wedge c) = c$. *Como* b *es superfluo en* $[0, c]$ *entonces* $(a \vee x) \wedge c = c$, *por tanto* $c \leq a \vee x = x$, *de donde concluimos que* $a \vee c = x$. ∎

Lema 2.0.19 *Sean* L *una retícula completa y* $a < b$ *elementos de* L. *Entonces* b *es superfluo en* L *si y sólo si* a *es superfluo en* L *y* b *es superfluo en* $[a, 1]$

Demostración.

$\Rightarrow)$ *Supongamos primero que* $a \vee c = 1$, *como* $a < b$ *tenemos que* $1 = a \vee c \leq b \vee c$. *De aquí* $b \vee c = 1$ *y como* b *es superfluo,* $c = 1$. *Claramente, si* b *es superfluo en* L *entonces es superfluo en* $[a, 1]$.

$\Leftarrow)$ *Si* $b \vee c = 1$, *entonces* $b \vee (a \vee c) = 1$. *De aquí* $a \vee c = 1$ *pues* b *es superfluo en* $[a, 1]$. *Entonces* $c = 1$ *pues* a *es superfluo en* L. ∎

Definición 2.0.20 *Sea* L *una retícula completa. El ínfimo de todos los elementos máximos* $(\neq 1)$ *en* L *se llama radical de* L, *y se denota por* $Rad(L)$.

Lema 2.0.21 *Sea* L *una retícula con* 0 *y* 1. *Si* $a \in S(L)$ *entonces* $a \leq Rad(L)$.

Demostración.

Sean $m \in L - \{1\}$ *máximo y* $a \in S(L)$. *Como* a *es superfluo* $a \vee m \neq 1$ *y* $m \leq a \vee m$. *Por ser* m *máximo* $a \vee m = m$, *por lo tanto* $a \leq m$. *De aquí concluimos que* $a \leq Rad(L)$. ∎

Lema 2.0.22 *Sean L una retícula completa y $a \in L$ compacto. Si $a \leq Rad(L)$ entonces $a \in S(L)$.*

Demostración.

Supongamos que a no es superfluo en L. Entonces existe $b \neq 1$ tal que $a \vee b = 1$. Consideremos el conjunto $D = \{x \in L : a \nleq x, x \neq 1, a \vee x = 1\}$. Como $a \nleq b$, $b \in D$ por lo que $D \neq \varnothing$.

Sea $C \subseteq D$ una cadena. Entonces $a \nleq \bigvee C$, pues en caso contrario, como a es compacto y C es un conjunto directo existe $c_0 \in C$ tal que $a \leq c_0$, lo cual es una contradicción. Además, $\bigvee C \neq 1$ y $a \vee \bigvee C = 1$ por lo que $\bigvee C \in D$. Por el l Lema de Zorn existe un elemento máximo $b \in D$.

Entonces b es máximo en L también, pues si $c \in L$ es tal que $b < c$, por ser b máximo en D tenemos que $a \leq c$. Entonces $1 = a \vee b \leq c$, por lo tanto $c = 1$. De aquí, $a \leq Rad(L) \leq b$, esto contradice el hecho de que $a \nleq b$. ■

Teorema 2.0.23 *Sea L una retícula compactamente generada. Entonces $Rad(L)$ es el supremo de todos los elementos superfluos en L.*

Demostracción.

Si u es el supremo de todos los elementos superfluos en L entonces $u \leq Rad(L)$ por el Lema 2.0.21.

Si $u < Rad(L)$, como L es compactamente generada existe un elemento compacto a tal que $a \leq Rad(L)$ y $a \nleq u$. Por el Lema 2.0.22 a es superfluo en L y esto es una contradicción pues $a \nleq u$. Por lo tanto $u = Rad(L)$. ■

Capítulo 3

Conjuntos independientes

En todo este capítulo L es una retícula modular con 0 y 1.

Definición 3.0.1 *Un subconjunto finito $S \subseteq L$ es independiente si $a \wedge (\bigvee(S - \{a\})) = 0$ para cada $a \in S$. Un subconjunto arbitrario de $L - \{0\}$ es independiente si todos sus subconjuntos finitos son independientes.*

Proposición 3.0.2 *Sea L una retícula y $\{a_i\}_{i\in I}$ un subconjunto independiente finito. Si $I = F \cup K$, donde $F \cap K = \varnothing$, entonces*

$$(\bigvee_{f\in F} a_f) \wedge (\bigvee_{k\in K} a_k) = 0$$

Demostración.
Supongamos que $I = \{1, ..., n\}$, $F = \{1, ..., p\}$ y $K = \{p+1, ..., n\}$. La demostración es por inducción sobre p.
Si $p = 1$ entonces por definición de conjunto independiente se cumple. Supongamos la afirmación válida para $p - 1$.
Sea $b = (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p+1}^{n} a_k)$. Tenemos que $a_p \leq \bigvee_{i=1}^{p} a_i$, por lo que usando la modularidad obtenemos

$$a_p \vee b = a_p \vee ((\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{k=p+1}^{n} a_k)) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i \wedge (a_p \vee \bigvee_{k=p+1}^{n} a_k) = \bigvee_{i=1}^{p} a_i \wedge \bigvee_{k=p}^{n} a_k.$$

Por lo tanto,

$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge (a_p \vee b) = (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i \wedge \bigvee_{k=p}^{n} a_k) = \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i \wedge \bigvee_{k=p}^{n} a_k.$$

Usando la hipótesis de inducción concluimos que

$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \wedge (a_p \vee b) = 0.$$

Por otro lado,

$$(\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b = (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee (\bigvee_{i=1}^{p} a_i \wedge \bigvee_{k=p+1}^{n} a_k) =$$

$$(\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee (\bigvee_{k=p+1}^{n} a_k)) = (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) \wedge (\bigvee_{t\neq p} a_t) \leq \bigvee_{t\neq p} a_t.$$

Concluimos que

$$a_p \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \leq a_p \wedge (\bigvee_{t\neq p} a_t) = 0.$$

Ahora, usando la modularidad tenemos que

$$(a^p \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = (a_p \vee b) \wedge (a_p \vee \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) =$$

$$a_p \vee ((a_p \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i)) = a_p \vee 0 = a_p,$$

y también

$$((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \wedge (a_p \vee (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i)) =$$

$$\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i \vee (a_p \wedge ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b)) = \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i \vee 0 = \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i.$$

Para concluir tenemos que

$$b \leq (a_p \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = a_p$$

y

$$b \leq ((\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) \vee b) \wedge (\bigvee_{i=1}^{p} a_i) = \bigvee_{i=1}^{p-1} a_i.$$

Con esto tenemos que $b \leq a_p \wedge (\bigvee_{i=1}^{p-1} a_i) = 0$, *por la independencia. Así,* $b = 0$. ■

Proposición 3.0.3 *Sean* L *una retícula y* $A \subseteq L - \{0\}$ *independiente. Si* $a \in L - \{0\}$ *cumple que para cualquier conjunto finito* $X \subseteq A$, $a \wedge (\bigvee_{x\in X} x) = 0$ *entonces el conjunto* $A \cup \{a\}$ *es independiente.*

Demostración.

Sea $B \subseteq A \cup \{a\}$ *finito. Si* $B \subseteq A$ *no hay nada que probar pues* A *es independiente. Supongamos que* $B = A' \cup \{a\}$ *con* $A' \subseteq A$ *finito. Terminamos si vemos que para* *cualquier* $a^* \in A'$, $a^* \wedge (a \vee \bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) = 0$. *Esto se sigue de la modularidad de* L *y las siguientes igualdades:*

$$(\bigvee_{b \in A'} b) \wedge ((\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee a) = (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee (a \wedge (\bigvee_{b \in A'} b)) =$$

$$(\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee 0 = \bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x.$$

De lo anterior se sigue que

$$a^* \wedge (a \vee (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x)) = (a^* \wedge (\bigvee_{b \in A'} b)) \wedge (a \vee (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x)) =$$

$$a^* \wedge ((\bigvee_{b \in A'} b) \wedge (a \vee (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x))) = a^* \wedge ((\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee (a \wedge (\bigvee_{b \in A'} b))) =$$

$$a^* \wedge ((\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) \vee 0) = a^* \wedge (\bigvee_{x \in A' - \{a^*\}} x) = 0,$$

pues $A' \subseteq A$ *y* A *es independiente.* ■

Observación 3.0.4 *Por la Proposición 3.0.3 y el Lema de Zorn, tenemos que cualquier conjunto independiente de* $L - \{0\}$ *está contenido en un conjunto independiente máximo, pues dado* $A \subseteq L$ *independiente entonces* $\mathcal{F} = \{C \subseteq L - \{0\} : A \subseteq C$ *y* C *es independiente*$\}$ *es un conjunto no vacío y* $(\mathcal{F}, \subseteq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Definición 3.0.5 *Sean* L *una retícula y* $a, b \in L$. *Si* $a \leq b$ *y* a *es esencial en la retícula* $[0, b]$ *entonces decimos que* b *es una extensión esencial de* a *en* L *y lo denotamos por* $a \leq_e b$.

Proposición 3.0.6 *Sea* L *una retícula. Sean* $a_i \leq_e b_i$ *para cualquier* $i = 1, ..., n$. *Si* $\{b_1, ..., b_n\}$ *es independiente entonces* $\bigvee_{i=1}^n a_i \leq_e \bigvee_{i=1}^n b_i$.

Demostración.

Basta probarlo para $n = 2$ *ya que el resultado se obtiene por inducción. Como* $a_1 \vee a_2 \leq a_1 \vee b_2 \leq b_1 \vee b_2$, *entonces nuestro problema se reduce a probar que* $b \vee c$ *es una extensión esencial de* $a \vee c$, *donde* b *es una extensión esencial de* a *y* $b \wedge c = 0$. *Como* $a \wedge c \leq b \wedge c = 0$, *tenemos que* $a \wedge c = 0$.

Sea $0 < x \leq b \vee c$ *y demostremos que* $x \wedge (a \vee c) \neq 0$. *Supongamos primero que* $x \wedge c \neq 0$. *Entonces* $0 < x \wedge c \leq x \wedge (a \vee c)$, *por lo tanto* $x \wedge (a \vee c) \neq 0$.

Si $x \wedge c = 0$ *entonces* $c < x \vee c$, *pues en caso contrario tenemos que* $x \leq c$ *y por ello* $0 = x \wedge c = x$. *Ahora, como* L *es modular, por el Teorema 1.1.20, tenemos un* *isomorfismo de retículas entre $[c, b \vee c]$ y $[b \wedge c, b] = [0, b]$, dado por $f(y) = y \wedge b$. Entonces $f(x \vee c) = (x \vee c) \wedge b \neq 0$. Como b es una extensión esencial de a, tenemos que $((x \vee c) \wedge b) \wedge a \neq 0$, pero $((x \vee c) \wedge b) \wedge a = (x \vee c) \wedge (b \wedge a) = (x \vee c) \wedge a \neq 0$. Si $s = (x \vee c) \wedge a$ entonces $s \leq (x \vee c) \wedge (a \vee c) = c \vee ((a \vee c) \wedge x)$. Si ocurre que $(a \vee c) \wedge x = 0$ entonces $s \leq c$ y como $s \leq a$ se tiene que $s \leq a \wedge c = 0$, de donde tenemos que $s = 0$, lo que es una contradicción. De esta manera, $(a \vee c) \wedge x \neq 0$ y por lo tanto $b \vee c$ es una extensión esencial de $a \vee c$.* ∎

Proposición 3.0.7 *Sean L una retícula y $a, b, c \in L$ con $a \leq b \leq c$. Si c es una extensión esencial de b y b es una extensión esencial de a entonces c es una extensión esencial de a.*

Demostración.

Sea $x \in [0, c]$ distinto de 0. Tenemos que $x \wedge b \neq 0$ pues $b \leq_e c$. Ahora, como $x \wedge b \in [0, b]$ es distinto de 0 y $a \leq_e b$ se tiene que $(x \wedge b) \wedge a \neq 0$, pero $x \wedge a = x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge b) \wedge a \neq 0$. Luego $a \leq_e c$. ∎

Definición 3.0.8 *Sea L una retícula. Un elemento $a \in L - \{0\}$ es uniforme, si para cualesquiera $x, y \in [0, a]$ tales que $0 < x$ y $0 < y$ se tiene que $0 < x \wedge y$.*

Teorema 3.0.9 *Sean $\{a_1, ..., a_m\}$ y $\{b_1, ..., b_n\}$ subconjuntos independientes de $L - \{0\}$. Si $a_1, ..., a_m$ son uniformes y $\bigvee_{i=1}^{m} a_i$ es esencial en L entonces $n \leq m$.*

Demostración.

Supongamos que $m < n$. Veamos que

$$\{a_1, ..., a_j, b_{j+1}, ..., b_n\}$$

es independiente para cada $j = 0, ..., m$ usando inducción.

Si $j = 0$ no hay nada que probar pues por hipótesis $\{b_1, ..., b_n\}$ es independiente. Supongamos el resultado válido para $0 < j$ y consideremos $c = a_1 \vee ... \vee a_j \vee b_{j+2} \vee ... \vee b_n$. Si para cualquier $s = 1, ..., m$, $a_s \wedge c \neq 0$ entonces $a_s \wedge c$ es esencial en la retícula $[0, a_s]$, pues si $0 \neq x \in [0, a_s]$, por ser a_s uniforme se tiene que $(a_s \wedge c) \wedge x \neq 0$. Entonces por la Proposición 3.0.6, se tiene que $a_1 \vee ... \vee a_m$ es una extensión esencial de $(a_1 \wedge c) \vee ... \vee (a_m \wedge c)$. Por la Proposición 3.0.7, $(a_1 \wedge c) \vee ... \vee (a_m \wedge c)$ es esencial en L y como $(a_1 \wedge c) \vee ... \vee (a_m \wedge c) \leq c$ tenemos que c es esencial en L. Esto contradice el hecho de que $c \wedge b_{j+1} = 0$, lo cual es nuestra hipótesis inductiva. Así, existe $s \in \{1, ..., m\}$ tal que $a_s \wedge c = 0$. Obviamente $s \neq 0, ..., j$ pues para ellos $a_s \wedge c = a_s$. Sea $s = j + 1$, el conjunto $\{a_1, ..., a_j, b_{j+2}, ..., b_n\} \cup \{a_{j+1}\}$ es independiente por la proposición 3.0.3, con lo que concluimos que $\{a_1, ..., a_m, b_{m+1}, ..., b_n\}$ es independiente, pero esto contradice que $\bigvee_{i=1}^{m} a_i$ sea esencial en L. ∎

Corolario 3.0.10 *Consideremos los conjuntos independientes* $\{a_1, ..., a_m\}$ *y* $\{b_1, ..., b_n\}$ *cuyos elementos* a_i, b_j *son uniformes en* L. *Si* $\bigvee_{i=1}^{m} a_i$ *y* $\bigvee_{j=1}^{n} b_j$ *son esenciales en* L *entonces* $m = n$.

Definición 3.0.11 *Decimos que una retícula* L *tiene dimensión uniforme (o dimensión de Goldie) si existe una familia* $\{a_1, ..., a_n\}$ *independiente cuyos elementos son uniformes y* $\bigvee_{i=1}^{n} a_i$ *es esencial en* L, *a dicha familia la llamaremos conjunto de Goldie.*
En este caso, denotamos la dimensión uniforme de la retícula L *como* $u - dim(L) = n$, *notemos que por el Corolario 3.0.10 está bien definida.*

Teorema 3.0.12 *Sea* L *una retícula. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) No existen subconjuntos infinitos independientes;

b) $u - dim(L) < \infty$;

c) La cardinalidad de los subconjuntos independientes de L *está acotada por un entero no negativo* m.

Demostración
a) $\Rightarrow$ *b) Afirmamos que para cualquier* $b \in L$ *distinto de cero, existe* $c \in L$ *distinto de cero y uniforme tal que* $c \leq b$. *En efecto, en caso contrario existe* $0 \neq b \in L$ *tal que para cualquier* $0 \neq c \in L$, *si* $c \leq b$ *entonces* c *no es uniforme. Denotemos por* $c \leq_{\neg e} b$ *el caso en que* b *no es una extensión esencial de* c. *Así, existen* $c_1 \leq_{\neg e} b$, $c_1 \neq 0$ *y* $a_1 \leq b$ *tales que* $c_1 \wedge a_1 = 0$. *Como* a_1 *no es uniforme existe* $c_2 \leq_{\neg e} a_1$, $c_2 \neq 0$ *tal que* $c_1 \wedge c_2 = c_1 \wedge a_1 = 0$. *Por lo tanto* $\{c_1, c_2\}$ *es independiente. De manera inductiva construimos un conjunto independiente infinito* $\{c_1, ..., c_n, ...\}$, *lo cual es una contradicción.*
Ahora, para $b = 1$ *consideremos* $c_1 \leq 1$ *uniforme, si* $c_1 \leq_e 1$ *entonces* $u - dim(L) = 1$. *Si* $c_1 \leq_{\neg e} 1$ *entonces tomamos* $a_1 \leq 1, a_1 \neq 0$, *tal que* $a_1 \wedge c_1 = 0$. *Luego aplicamos la propiedad a* a_1, *con lo que existe* $c_2 \leq a_1$ *uniforme con* $c_1 \wedge c_2 = 0$. *Si* $c_1 \vee c_2 \leq_e 1$ *entonces* $u - dim(L) = 2$. *En caso contrario, procediendo por inducción construimos un conjunto independiente* $\{c_1, ..., c_n\}$ *y tiene que existir* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\bigvee_{i=1}^{n} c_i \leq_e 1$, *pues no hay subconjuntos independientes infinitos.*
b) $\Rightarrow$ *c) Por b) y la proposición 3.0.9 los conjuntos independientes están acotados por* m, *con* $u - dim(L) = m$.
c) $\Rightarrow$ *a) Supongamos que existe* $S \subseteq L$ *infinito e independiente. Ahora sea* $n \in \mathbb{N}$, *como* S *es infinito tomemos* $\{x_1, ..., x_{n+1}\} \subseteq S$ *con* $x_i \neq x_j$ *si* $i \neq j$. *Este conjunto*

es claramente independiente y $|\{x_1, ..., x_{n+1}\}| = n + 1 > n$. *Lo anterior vale para cualquier* $n \in \mathbb{N}$, *por lo que la cardinalidad de los subconjuntos finitos independientes de* L *no está acotada.* $\blacksquare$

Capítulo 4

Retículas Noetherianas y Artinianas

En este capítulo todas las retículas serán completas y modulares.

4.1. Conceptos básicos

Definición 4.1.1 *Una retícula L es noetheriana (respectivamente artiniana) si satisface la condición de cadena ascendente (descendente) sobre sus elementos.*

Lema 4.1.2 *Sea L una retícula. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) L es noetheriana (artiniana).

b) Todo $A \subseteq L$ y $A \neq \varnothing$, tiene un subconjunto finito F tal que $\bigvee A = \bigvee F$ (respectivamente, $\bigwedge A = \bigwedge F$).

Demostración.
a) $\Rightarrow$ b) Consideremos $U = \{\bigvee F : F \subseteq A, F$ finito$\}$. Veamos que al ser L noetheriana U tiene un elemento máximo.
Supongamos lo contrario. Como $A \neq \varnothing$ existe $F_1 \subseteq A$ finito tal que $\bigvee F_1$ no es máximo en U. Luego existe $F_2 \subseteq A$ finito tal que $\bigvee F_1 \lneq \bigvee F_2$. Repitiendo nuestro argumento podemos construir inductivamente la sucesión

$$\bigvee F_1 \lneq \bigvee F_2 \lneq ... \lneq \bigvee F_n \lneq ...$$

donde cada F_i es finito. Pero dicha sucesión no se estaciona, por lo que L no sería noetheriana. Por lo tanto existe $F_0 \subseteq A$ tal que $\bigvee F_0$ es máximo en U. Como $F_0 \subseteq A$

tenemos que $\bigvee F_0 \leq \bigvee A$.
Sea $a \in A$, *tenemos que* $(\bigvee F_0) \vee a = \bigvee(F_0 \cup \{a\}) = \bigvee F_0$ *por la maximalidad de* $\bigvee F_0$. *Por lo tanto,* $\bigvee F_0 = \bigvee A$.
b) $\Rightarrow$ *a) Consideremos una sucesión no decreciente* $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n...$ *de elementos en* L. *Por hipótesis existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n = \bigvee_{n=1}^{N} a_n = a_N$$

De aquí concluimos que $a_N = a_n$ *para todo* $n \geq N$. *Por lo tanto,* L *es noetheriana. La prueba para* L *artiniana es dual.* ■

Lema 4.1.3 *Sean* L *una retícula y* $a, b, c \in L$. *Si* $a \wedge b = 0$ *y* $(a \vee b) \wedge c = 0$ *entonces* $a \wedge (b \vee c) = 0$.
Demostración.
Notemos que $a \wedge (b \vee c) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c)$. *Ahora, usando el hecho de que* L *es modular y que* $(a \vee b) \wedge c = 0$, *tenemos que* $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = ((a \vee b) \wedge c) \vee b) = 0 \vee b = b$.
Entonces $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge a) \wedge (b \vee c) = a \wedge (a \wedge (b \vee c)) \leq (a \wedge b) = 0$. ■

Lema 4.1.4 *Si* L *es una retícula artiniana (noetheriana) entonces* L *tiene átomos (coátomos).*
Demostración.
Sea L *una retícula artiniana y consideremos el conjunto* $S = \{x \in L : 0 < x\}$. *Claramente* $S \neq \varnothing$. *Supongamos que* S *no tiene elementos mínimos. Entonces dado* $0 < a_1$ *como no es mínimo existe* $a_2 \in L$ *tal que* $0 < a_2 < a_1$. *De forma recursiva podemos construir la sucesión*

$$0 < .... < a_n < ... < a_2 < a_1$$

la cual no se estaciona, hecho que contradice que L *sea una retícula artiniana. Entonces existen elementos mínimos en* S *y esos elementos mínimos son claramente átomos.*
La prueba para retículas noetherianas es dual. ■

Proposición 4.1.5 *Sean* L *una retícula y* $a \in L$. *Entonces* L *es artiniana (noetheriana) si y sólo si* $[0, a]$ *y* $[a, 1]$ *son artinianas (respectivamente, noetherianas).*
Demostración.
$\Rightarrow$) *Si* L *es artiniana (noetheriana) entonces claramente cada subretícula de* L *es artiniana (noetheriana).*
$\Leftarrow$) *Sea* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *una sucesión no creciente de elementos en* L.

Consideremos la sucesión $\{a_i \wedge a\}_{i\in\mathbb{N}}$. *Tenemos que* $0 \leq a_i \wedge a \leq a$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$. *Por lo tanto,* $\{a_i \wedge a\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq [0,a]$. *Como* $[0,a]$ *es una retícula artiniana y la sucesión es no creciente, tenemos que existe* $l_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_{l_1} \wedge a = a_n \wedge a$ *para todo* $n \geq l_1$. *Por otro lado, consideremos la sucesión* $\{a_i \vee a\}_{i\in\mathbb{N}}$. *Tenemos que* $a \leq a_i \vee a \leq 1$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$. *Concluimos que* $\{a_i \vee a\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq [a,1]$. *Como* $[a,1]$ *es una retícula artiniana y la sucesión es no creciente, tenemos que existe* $l_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_{l_2} \vee a = a_n \vee a$ *para todo* $n \geq l_2$.
Sea $N = max\{l_1, l_2\}$. *Sabemos que las sucesiones* $\{a_i \wedge a\}_{i\in\mathbb{N}}$ *y* $\{a_i \vee a\}_{i\in\mathbb{N}}$ *se estacionan para* $n \geq N$. *Sean* $b = a_N \wedge a = a_{N+1} \wedge a = ...$ *y* $c = a_N \vee a = a_{N+1} \vee a = ...$
Entonces $b \leq a_{N+1} \leq a_N \leq c$ *y usando la modularidad de* L *tenemos que* $a_{N+1} = a_{N+1} \wedge c = a_{N+1} \wedge (a_N \vee a) = a_N \vee (a \wedge a_{N+1}) = a_N \vee (a \wedge a_N) = a_N$. *Similarmente probamos que* $a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = ...$
El caso para L *noetheriana es dual.* ■

4.2. Retículas Noetherianas

Proposición 4.2.1 *Sea* L *una retícula. Todo elemento* $a \in L$ *es compacto si y sólo si la retícula es noetheriana.*
Demostración.
$\Rightarrow$) *Supongamos que todo elemento en* L *es compacto y sea* $a_1 \leq a_2 \leq ...$ *una sucesión no decreciente en* L. *Sea* $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *y tomemos* $c = \bigvee A = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$. *Como* $c \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *y* c *es compacto existe* $F \subseteq A$ *finito tal que* $c \leq \bigvee F$. *Como* F *es finito y subconjunto de una cadena existe* $a_N \in F$ *tal que* $\bigvee F = a_N$. *Entonces* $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} a_n = c \leq a_N$, *de donde* $a_N = a_n$ *para toda* $n \geq N$.
$\Leftarrow$) *Sea* $c \in L$ *y* $\varnothing \neq U \subseteq L$ *tal que* $c \leq \bigvee U$. *Por el Lema 4.1.2 existe* $F_0 \subseteq U$ *finito tal que* $\bigvee F_0 = \bigvee U$. *Entonces* $c \leq \bigvee F_0$, *por lo tanto* c *es compacto.* ■

Definición 4.2.2 *Una retícula* L *es E-complementada si para cada* $a \in L$, *existe* $b \in L$ *tal que* $a \wedge b = 0$ *y* $a \vee b \in E(L)$.

Lema 4.2.3 *Sea* L *una retícula. Consideremos los siguientes enunciados:*

a) L *es noetheriana.*

b) L *tiene dimensión uniforme finita.*

c) L *es E-complementada.*

Entonces a) $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)*

Demostración.
a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que L es noetheriana pero que L no tiene dimensión uniforme finita. Por el Teorema 3.0.12 existe un subconjunto no vacío independiente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L$. Consideremos la cadena ascendente en L

$$x_1 \leq x_1 \vee x_2 \leq (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \leq ...$$

Como L es noetheriana existe $n \in \mathbb{N}$ donde la sucesión se estaciona. En particular, $x_1 \vee ... \vee x_n = (x_1 \vee ... \vee x_n) \vee x_{n+1}$ y como $x_{n+1} \leq x_{n+1}$, concluimos que $x_{n+1} \leq (x_1 \vee ... \vee x_n) \wedge x_{n+1} = 0$ por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto independiente. Se sigue que $x_{n+1} = 0$, lo cual contradice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea un conjunto independiente. Por lo tanto, L tiene dimensión uniforme finita.

b) $\Rightarrow$ c) Consideremos $a \in L$. Si $a \in E(L)$ ya terminamos pues $0 \in L$ y $a \wedge 0 = 0$, $a \vee 0 = a \in E(L)$.
Si $a \notin E(L)$ existe $0 \neq b_1 \in L$ tal que $a \wedge b_1 = 0$. Ahora si $a \vee b_1 \in E(L)$ ya terminamos, en otro caso existe $b_2 \neq 0$ tal que $(a \vee b_1) \wedge b_2 = 0$. Como $a \wedge b_1 = 0$ y $(a \vee b_1) \wedge b_2 = 0$, por Lema 4.1.13, tenemos que $a \wedge (b_1 \vee b_2) = 0$ y $b_1 \wedge (a \vee b_2) = 0$. Por lo tanto el conjunto $\{a, b_1, b_2\}$ es independiente.
Repitiendo este argumento podemos construir el conjunto $\{a, b_1, b_2, ...\}$, el cual es independiente por la Proposición 3.0.3. Por b) existe $k \in N$ tal que $a \wedge (b_1 \vee ... \vee b_k) = 0$ y $a \vee (b_1 \vee ... \vee b_k) \in E(L)$. $\blacksquare$

Proposición 4.2.4 *Sea L una retícula tal que para todo $x \in E(L)$ tenemos que x es compacto. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) L es noetheriana.

b) L tiene dimensión uniforme finita.

c) L es E-complementada.

Demostración.
Por el Lema 4.2.3 resta probar c) $\Rightarrow$ a).
Sea $a \in L$, de c) tenemos que a tiene E-complemento, es decir, existe $b \in L$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b \in E(L)$. Por hipótesis $a \vee b$ es compacto.
Consideremos $\varnothing \neq S \subseteq L$ tal que $a = \bigvee S$, entonces $a \vee b = (\bigvee S) \vee b = \bigvee(S \cup \{b\})$. Como $a \vee b$ es compacto, existe $F \subseteq S$ finito tal que $a \vee b = (\bigvee F) \vee b$. Observemos que $\bigvee F \leq a$ pues $F \subseteq S$ y $\bigvee S = a$. Usando la modularidad en la última igualdad tenemos que

$a = a \vee 0 = a \vee (a \wedge b) = (a \vee b) \wedge a = ((\bigvee F) \vee b) \wedge a = (\bigvee F) \vee (a \wedge b) = (\bigvee F) \vee 0 = \bigvee F.$

Por lo tanto todo elemento en L es compacto. Por la Proposición 4.2.1, L es una retícula noetheriana. ∎

Corolario 4.2.5 *Sea L una retícula. Entonces L es noetheriana si y sólo si L es E-complementada y todo elemento esencial de L es compacto.* ∎

Lema 4.2.6 *Sea L una retícula continua superiormente. Entonces L es E-complementada.*

Demostración.

Sea $a \in L$. Consideremos $S = \{b \in L : a \wedge b = 0\}$, $S \neq \varnothing$ pues $0 \in S$. Sean $\{c_i : i \in I\} \subseteq S$ una cadena en S y $c = \bigvee_{i \in I} c_i$. Ahora, como L es continua superiormente tenemos que $a \wedge c = a \wedge (\bigvee_{i \in I} c_i) = \bigvee_{i \in I}(a \wedge c_i) = 0$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento máximo $u \in S$. Afirmamos que $a \vee u$ es esencial en L. Supongamos que $(a \vee u) \wedge x = 0$ para algún $x \in L$. Como $a \wedge u = 0$, por el lema 4.1.3, tenemos que $a \wedge (u \vee x) = 0$. De lo anterior $u \vee x \in S$, pero $u \leq x \vee u$ y u es máximo en S, por lo tanto $x \vee u = u$, de donde $x \leq u$. Finalmente, $x = (a \vee u) \wedge x = 0$, por lo que $a \vee u \in E(L)$, de manera que L es E-complementada. ∎

Corolario 4.2.7 *Sea L una retícula continua superiormente. Entonces L es noetheriana si y sólo si todo elemento esencial en L es compacto.* ∎

Lema 4.2.8 *Sean L una retícula y k un entero positivo. Entonces*

i) Si $t \in S(L)$, entonces $s \in S(L)$ para todo $s \leq t$;

ii) Si $s_1, ..., s_k \in S(L)$, entonces $s_1 \vee s_2 \vee ... \vee s_k \in S(L)$

Demostración.

i) Sean $t \in S(L)$ y $s \leq t$. Consideremos $u \in L - \{1\}$, como $s \leq t$ tenemos que $s \vee u \leq t \vee u \neq 1$ pues t es superfluo. Por lo tanto para todo $u < 1$ $s \vee u < 1$, es decir, $u \in S(L)$.

ii) Lo haremos para $k = 2$, el resto se sigue por inducción. Sean $s_1, s_2 \in S(L)$ y $u \in L - \{1\}$, entonces $(s_1 \vee s_2) \vee u = s_1 \vee (s_2 \vee u)$. Como s_2 es superfluo $s_2 \vee u \neq 1$ y como s_1 es superfluo y $s_2 \vee u \neq 1$, tenemos que $s_1 \vee (s_2 \vee u) \neq 1$. ∎

Proposición 4.2.9 *Sea L una retícula compactamente generada. Entonces la subretícula $[0, Rad(L)]$ es noetheriana si y sólo si L satisface la condición de cadena* *ascendente sobre sus elementos superfluos.*

Demostración.

$\Rightarrow$) *Como* L *es compactamente generada, por el Teorema 2.0.23,* $Rad(L) = \bigvee S(L)$. *Por definición de supremo tenemos que* $s \leq Rad(L)$ *para todo* $s \in S(L)$. *Sea* $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una cadena ascendente de elementos superfluos en* L, *entonces esta es una cadena ascendente en* $[0, Rad(L)]$ *que es noetheriano, por lo tanto la cadena se estaciona.*
$\Leftarrow$) *Como* L *satisface la condición de cadena ascendente sobre los elementos superfluos, existe un elemento superfluo máximo* $x \in L$.
Como $x \in S(L)$ *y* L *es compactamente generada tenemos que* $x \leq Rad(L)$. *Supongamos que* $x \neq Rad(L)$. *Entonces existe* $s \in S(L)$ *tal que* $s \notin [0, x]$. *Por el Lema 4.2.8 ii),* $x \vee s \in S(L)$ *y como* $x \leq x \vee s$, *por la maximalidad tenemos que* $x \vee s = x$. *Entonces* $s \in [0, x]$ *y esto es una contradicción, de manera que* $x = Rad(L)$. *Entonces dado* $y \in [0, Rad(L)]$, *tenemos que* $y \leq Rad(L)$ *y por el Lema 4.2.8 i),* $y \in S(L)$. *Por lo tanto* $[0, Rad(L)] \subseteq S(L)$.
Finalmente, como todos los elementos en $[0, Rad(L)]$ *son superfluos y* L *satisface la CCA sobre sus elementos superfluos, podemos concluir que* $[0, Rad(L)]$ *es noetheriano.* ■

Proposición 4.2.10 *Sea* L *una retícula compactamente generada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $[0, Rad(L)]$ *tiene dimensión uniforme finita.*

ii) Existe un entero positivo k *tal que para todo* $s \in S(L)$ *tenemos que* $u - dim[0, s] \leq k$.

iii) L *no contiene un subconjunto independiente infinito de elementos superfluos distintos de cero.*

Demostración.

i) $\Rightarrow$ *ii) Sea* $s \in S(L)$. *Como* L *es compactamente generada, por el teorema 2.0.23, tenemos que* $Rad(L) = \bigvee S(L)$, *por lo que* $s \leq Rad(L)$. *Se sigue que* $u - dim[0, s] \leq u - dim[0, Rad(L)]$. *Sea* $k = u - dim[0, Rad(L)]$, *entonces* $[0, s]$ *tiene dimensión uniforme acotada por* k.
i) $\Rightarrow$ *ii) Sea* $\{s_1, s_2, ...\} \subseteq S(L)$ *un subconjunto independiente infinito de elementos no cero en* L. *Sea* k *un entero positivo. Por el Lema 4.2.8 ii), tenemos que* $s_1 \vee ... \vee s_{k+1} \in S(L)$ *y además* $u - dim[0, s_1 \vee ... \vee s_{k+1}] > k$ *pues al menos tiene un subconjunto independiente de* $k + 1$ *elementos. Esto contradice el hecho de que* $u - dim[0, s]$ *es acotada para todo* $s \in S(L)$.

iii) $\Rightarrow$ *i) Supongamos que* $[0, Rad(L)]$ *no tiene dimensión uniforme finita. Por el teorema 3.0.12, existe un conjunto infinito e independiente con elementos no cero* $\{x_1, x_2, ...\} \subseteq [0, Rad(L)]$.
Como L *es compactamente generada,* $[0, Rad(L)]$ *también es compactamente generado. Entonces dado* $x_i \leq Rad(L)$ *existen* k_{i_j} *compactos en* $[0, Rad(L)]$ *tales que* $\bigvee_{j \in I} k_{i_j} = x_i$. *Tomemos* $k_i \leq x_i$ *con* $k_i \in \{k_{i_j} : j \in I\}$.
Por el Lema 2.0.22, como $k_i \leq Rad(L)$ *y* k_i *es compacto entonces* $k_i \in S(L)$. *Afirmamos que* $\{k_1, k_2, ...\}$, *donde* $k_i \leq x_i$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *es un subconjunto independiente de elementos superfluos.*
Sea $\{k_{m_1}, ..., k_{m_n}\} \subseteq \{k_1, ...\}$ *un subconjunto finito. Por construcción* $k_{m_i} \leq x_{m_i}$ *para* $i \in i, ..., n$, *por lo que dado* $1 \leq j \leq n$ *tenemos que* $\bigvee_{i \neq j} k_{m_i} \leq \bigvee_{i \neq j} x_{m_i}$. *Luego*

$$k_{m_j} \wedge \bigvee_{i \neq j} k_{m_i} \leq x_{m_j} \wedge \bigvee_{i \neq j} x_{m_i} = 0$$

pues $\{x_{m_1}, ..., x_{m_n}\}$ *es un subconjunto independiente. Por lo tanto* $\{k_1, ...\}$ *es un subconjunto independiente infinito de elementos superfluos.* ■

4.3. Retículas Artinianas

Definición 4.3.1 *Una retícula completa* L *es una retícula semiatómica si el* 1 *es el supremo de un conjunto de átomos en* L.

Definición 4.3.2 *Una retícula* L *es finitamente cogenerada (o cocompacta), si para todo* $X \subseteq L$ *tal que* $\bigwedge X = 0$ *existe* $F \subseteq X$ *finito tal que* $\bigwedge F = 0$.

Lema 4.3.3 *Sea* L *una retícula. Entonces* L *es artiniana si y sólo si para todo* $1 \neq a \in L$ *la subretícula* $[a, 1]$ *es cocompacta.*
Demostración.
$\Rightarrow$) *Cada subretícula de una retícula es artiniana es artiniana, por lo tanto cocompacta.*
$\Leftarrow$) *Consideremos* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una cadena de elementos en* L *descendente. Sea* $a = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n$, *entonces* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es un subconjunto de* $[a, 1]$. *La subretícula* $[a, 1]$ *es cocompacta, por lo que existe* $F \subseteq \mathbb{N}$ *finito tal que* $a = \bigwedge_{n \in F} a_n$. *Como* $\bigwedge_{n \in F} a_n = a_m$ *con* $m \in F$, *por ser una cadena finita, tenemos que* $a_m = a$ *y con esto* $a_{m+l} = a_m$ *para toda* $l \in \mathbb{N}$, *por lo que* L *es artiniana.* ■

El siguiente resultado, cuya prueba omitiremos, se encuentra en [3]. El lector puede consultar ahí la prueba. Sea L una retícula semiatómica y compactamente generada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) L es compacta.

ii) L es finitamente cogenerada.

iii) 1 es el supremo de un conjunto finito e independiente de átomos. ■

Corolario 4.3.4 *Sea L retícula semiatómica y compactamente generada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) L es compacta.

ii) L es finitamente cogenerada.

iii) 1 es el supremo de un conjunto finito e independiente de átomos.

iv) L es artiniana.

Demostración.
iv) $\Rightarrow$ *ii) Es clara.*
iii) $\Rightarrow$ *iv) Supongamos que* $1 = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$ *donde* $\{a_1, ..., a_n\}$ *es un conjunto independiente de átomos. Procedamos por inducción sobre n.*
Para $n = 1$ *no hay nada que probar. Hagamos la prueba para* $n = 2$. *Supongamos que* $1 = a_1 \vee a_2$ *con* a_1, a_2 *átomos. Tenemos que* $[a_1 \wedge a_2, a_1] = [0, a_1]$ *que es una retícula artiniana pues* a_1 *es átomo. Por la modularidad,* $[0, a_2] = [a_1 \wedge a_2, a_2] \cong [a_1, a_1 \vee a_2] = [a_1, 1]$. *Por lo tanto, la retícula* $[a_1, 1]$ *es artiniana. Por la proposición 4.1.5, L es una retícula artiniana.*
Supongamos el resultado válido para n y probémoslo para $n + 1$. *Supongamos que* $1 = \bigvee_{i=1}^{n+1} a_i$ *con* $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ *un conjunto de átomos independientes.*
Consideremos la retícula $[0, \bigvee_{i=1}^{n} a_i]$, *tenemos que* $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ *es un conjunto independiente de átomos en* $[0, \bigvee_{i=1}^{n} a_i]$. *Por hipótesis de inducción,* $[0, \bigvee_{i=1}^{n} a_i]$ *es una retícula artiniana.*
Por otro lado, tenemos que $[0, a_{n+1}] = [(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge a_{n+1}, a_{n+1}]$ *pues* $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ *es un conjunto independiente. Por la modularidad,* $[(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge a_{n+1}, a_{n+1}] \cong [\bigvee_{i=1}^{n} a_i, (\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \vee a_{n+1}] = [\bigvee_{i=1}^{n} a_i, 1]$, *de manera que* $[0, a_{n+1}] \cong [\bigvee_{i=1}^{n} a_i, 1]$. *Concluimos que* $[\bigvee_{i=1}^{n} a_i, 1]$ *es una retícula artiniana.*
Finalmente, como $[0, \bigvee_{i=1}^{n} a_i]$ *y* $[\bigvee_{i=1}^{n} a_i, 1]$ *son retículas artinianas, por la Proposición 4.1.5, L es artiniana.*

Lema 4.3.5 *Sea L una retícula compactamente generada que satisface la condición de cadena descendente (CCD) sobre sus elementos superfluos. Si f es compacto en* $[0, Rad(L)]$, *entonces* $[0, f]$ *es artiniana.*

Demostración.
Sea f un elemento compacto en $[0, Rad(L)]$. Como L es compactamente generada, $Rad(L) = \bigvee S(L)$. Concluimos que $f \leq \bigvee S(L)$. Como f es compacto en $[0, Rad(L)]$, existen $s_1, ..., s_n \in S(L)$ tales que $f \leq \bigvee_{i=1}^{n} s_i$. Usando la parte ii) del Lema 4.2.8 tenemos que $\bigvee_{i=1}^{n} s_i \in S(L)$. Ahora, por la parte i) del mismo Lema, f es superfluo. Finalmente, como todo elemento en $[0, f]$ es superfluo tenemos que $[0, f]$ es artiniana pues por hipótesis cumple la CCD. ■

Lema 4.3.6 *Sea L una retícula compactamente generada que satisface la CCD sobre sus elementos superfluos. Entonces, para todo $k < Rad(L)$, el zoclo de $[k, Rad(L)]$ es un elemento esencial de $[k, Rad(L)]$.*
Demostración.
Sea $k < Rad(L)$ y supongamos que $Zoc([k, Rad(L)]) = t$. Sea $h \in [k, Rad(L)]$ tal que $t \wedge h = k$. Veamos que $h = k$.
Supongamos que $k < h$. Como $[0, Rad(L)]$ es compactamente generada, existe un elemento compacto no cero $x \in [0, Rad(L)]$ tal que $x \leq h$ pero $x \notin [0, k]$. Por el Lema 4.3.4, $[0, x]$ es una retícula artiniana. Ahora, por el Teorema 1.1.20, $[x \wedge k, x] \cong [k, x \vee k]$, por lo tanto $[k, x \vee k]$ es una retícula artiniana no cero. Por el Lema 4.1.5, $[k, k \vee x]$ tiene un átomo p. Notemos que $k < p \leq x \vee k \leq h$ por construcción. Como p es átomo en $[k, Rad(L)]$, tenemos que $p \leq t$. Por lo tanto $k < p \leq t \wedge h$, lo cual contradice que $t \wedge h = k$. Entonces $k = h$ y t es esencial en $[k, Rad(L)]$. ■

Lema 4.3.7 *Sean L una retícula compactamente generada y $a \in L$. Si a es compacto en $[0, a]$ entonces a es compacto en L.*
Demostración.
Como L es compactamente generada, $a = \bigvee U$, donde U es un conjunto de elementos compactos en L. Como a es compacto en $[0, a]$, $a = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$ con $a_i \in U$ para $1 \leq i \leq n$. Por la Proposición 1.2.7, a es compacto en L. ■

Lema 4.3.8 *Sea L una retícula compactamente generada que satisface la CCD sobre sus elementos superfluos. Supongamos que el conjunto*

$$\Omega = \{a_i : 0 \leq a_i \leq Rad(L) \text{ y } [a_i, Rad(L)] \text{ no es finitamente cogenerado}\}$$

es no vacío. Entonces:

i) *Ω tiene un elemento mínimo p, que es un elemento superfluo en L.*

ii) *Si $Zoc([p, Rad(L)]) = s$, entonces s no es compacto en $[p, Rad(L)]$ y s es superfluo en L.*

Demostración.

i) *Sea Γ una cadena en Ω. Consideremos $c = \bigwedge_{c_i \in \Gamma} c_i$, si $c \notin \Omega$ entonces $[c, Rad(L)]$ es finitamente cogenerado. Luego, ya que $c_i \in [c, Rad(L)]$ para todo $c_i \in \Gamma$, tenemos que existe $F \subseteq \Gamma$ finito tal que $c = \bigwedge_{c_i \in F} c_i$. Como Γ es una cadena existe $c_j \in F$ tal que $c_j = \bigwedge_{c_i \in F} c_i$. Por lo tanto $c = c_j$, y esto contradice el hecho de que $[c_j, Rad(L)]$ es finitamente cogenerado pues $[c_j, Rad(L)] = [c, Rad(L)]$. Por el dual al Lema de Zorn, Ω tiene un elemento mínimo p.*

Sea $Zoc([p, Rad(L)]) = s$. Por el Lema 4.3.6, tenemos que s es esencial en $[p, Rad(L)]$. Por lo tanto s no es un elemento compacto de $[p, Rad(L)]$. En caso contrario, por ser s esencial y compacto, por [3,Teorema 11.2], tenemos que $[p, Rad(L)]$ es finitamente cogenerado lo que contradice que $p \in \Omega$.

Sea $q \in L$ tal que $p \vee q = 1$. Entonces como $p \leq s$, por la modularidad, tenemos que $s = s \wedge 1 = s \wedge (p \vee q) = p \vee (s \wedge q)$. De lo anterior y el Lema 1.1.20 se sigue que

$$[p, s] = [p, p \vee (s \wedge q)] \cong [p \wedge q, s \wedge q] \tag{4.1}$$

Supongamos que $p \wedge q \neq p$, entonces $p \wedge q < p$ y por la definición de Ω $[p \wedge q, Rad(L)]$ es una retícula finitamente cogenerada.

Sea $\alpha = Zoc([q \wedge p, Rad(L)])$. Como $[p \wedge q, Rad(L)]$ es finitamente cogenerada, tenemos que α es compacto y esencial en $[q \wedge p, Rad(L)]$ por [3,Teorema 11.2]. Observemos que $[p \wedge q, \alpha]$ es compactamente generada, semiatómica y compacta. Por el Corolario 4.3.4, $[p \wedge q, \alpha]$ es una retícula artiniana. Como $[p, Rad(L)]$ es una subretícula de $[p \wedge q, Rad(L)]$ entonces α es esencial en $[p, Rad(L)]$. Luego, tenemos que, por Teorema 2.0.15, $s \leq \alpha$.

Usando la modularidad tenemos que $s \wedge q \leq p \vee (s \wedge q) = s \wedge (p \vee q) = s \wedge 1 = s \leq \alpha \leq Rad(L)$, por lo que $[p \wedge q, s \wedge q]$ también es una retícula artiniana. Usando el isomorfismo (3) tenemos que $[p, s]$ también es una retícula artiniana. Entonces por el Corolario 4.3.4, s es un elemento compacto en $[p, s]$. Como $[p, Rad(L)]$ es compactamente generada, por el Lema 4.3.7, s también es compacto en $[0, Rad(L)]$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $p \wedge q = p$ y entonces $p \leq q$, de aquí $q = q \vee p = 1$. Concluimos que $p \in S(L)$.

ii) *Que s no es compacto en $[p, Rad(L)]$ lo probamos en 1). Sea $v \in L$ tal que $s \vee v = 1$. Además como $[p, s]$ es una retícula semiatómica y compactamente generada, por [3,Corolario 6.3], tenemos que $[p \vee (s \wedge v), s]$ también es una retícula semiatómica. Por el Teorema 1.1.20 y la modularidad tenemos que*

$$[p \vee v, 1] = [p \vee v, s \vee v] = [p \vee v, s \vee (p \vee v)] \cong [s \wedge (p \vee v), s] = [p \vee (s \wedge v), s].$$

Se sigue que $[p \vee v, 1]$ *es semiatómica. Supongamos que* $1 \neq p \vee v$. *Por [3,Lema 6.12], existe un elemento máximo* $w \in [p \vee v, 1]$. *Claramente* w *es máximo en* L *y* $v \leq w$. *Por lo tanto* $1 = s \vee v \leq s \vee w$. *Pero* $s \leq Rad(L) \leq w$ *pues* $Rad(L) = \bigwedge\{t : t$ *es máximo en* $L\}$. *Concluimos que* $w = 1$, *lo cual es una contradicción. Entonces* $1 = p \vee v$ *y como* p *es superfluo tenemos que* $v = 1$, *por lo que* $s \in S(L)$. ■

Teorema 4.3.9 *Sea* L *una retícula compactamente generada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) $[0, Rad(L)]$ *es una retícula artiniana.*

ii) Para todo elemento superfluo a *de* L *la subretícula* $[0, a]$ *es artiniana.*

iii) L *satisface la* CCD *sobre sus elementos superfluos.*

Demostración.
i) $\Rightarrow$ *ii) Se sigue de que* $Rad(L) = \bigvee S(L)$, *y por lo tanto para cada* $a \in S(L)$, *tenemos que* $[0, a] \subseteq [0, Rad(L)]$ *y de aquí* $[0, a]$ *es artiniana.*
ii) $\Rightarrow$ *iii) Consideremos* $a_1 \geq a_2 \geq ....$ *una cadena descendente de elementos superfluos en* L. *Ahora* $a_i \in [0, a_1]$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$ *y como* $[0, a_1]$ *es artiniana, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_k = a_{k+i}$ *para toda* i, *es decir, la cadena* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *se estaciona.*
iii) $\Rightarrow$ *i) Supongamos que* $[0, Rad(L)]$ *no es artiniano. Por Lema 4.3.3, existe* $g \in L$ *con* $g \leq Rad(L)$ *tal que* $[g, Rad(L)]$ *no es finitamente cogenerado. Esto implica que*

$$\Omega = \{a_i : 0 \leq a_i \leq Rad(L) \text{ y } [a_i, Rad(L)] \text{ no es finitamente cogenerado}\}$$

es no vacío. Luego, por el Lema 4.3.7, existe un elemento mínimo $p \in \Omega$ *tal que* $Zoc([p, Rad(L)]) = s \in S(L)$ *y* s *no es compacto en* $[p, Rad(L)]$. *Como* $s \in S(L)$, *por iii), la subretícula* $[0, s]$ *es artiniana. Entonces, por el Corolario 4.3.4,* $[0, s]$ *es compacta y por el Lema 4.3.7,* s *es compacto en* $[p, Rad(L)]$. *Esto es una contradicción, de manera que* $[0, Rad(L)]$ *es una retícula artiniana.* ■

Corolario 4.3.10 *Sea* L *una retícula compactamente generada. Si* $[s, 1]$ *es finitamente cogenerado para todo* $s \in S(L)$, *entonces* $[0, Rad(L)]$ *es una retícula artiniana.*
Demostración.
Consideremos la cadena descendente

$$x_1 \geq x_2 \geq ....$$

de elementos superfluos en L. *Sea* $x = \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} x_i$, *entonces* x *es superfluo en* L *por el Lema 4.2.8 i)*. *Por hipótesis* $[x, 1]$ *es finitamente cogenerado, luego existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_n$. *Entonces* L *cumple la CCD sobre sus elementos superfluos, y por el Teorema 4.3.8,* $[0, Rad(L)]$ *es una retícula artiniana.* ■

Bibliografía

[1] Grätzer, G., *General Lattice Theory*, Boston: Birkhäuser, 1998.

[2] Davey, Brian A. and Priestley, Hilary A., *Introduction to Lattices and Order*, Cambrige: Cambridge University Press, 1990.

[3] Calugareanu, Grigore, *Lattice Concepts of Module Theory*, The Neterlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[4] Donnellan, T., *Laticce Theory*, Oxford: Pergamon Press, 1968.

[5] Keskin Tütüncü Derya, Toksoy, Sultan Eylem and Tribak, Rachid, *Notherian and Artinian Lattices*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2012, Ankara, Turkey: Hindawi Publishing Corporation, 2012.

[6] Stenström, Bo, *Radicals and socles of lattices*, Archiv der Mathematik, vol. 20, pág. 258-261, 1969.