



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

“Estructuras geométricas ortogonales de dimensión tres”

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:  
Mayra Méndez Carrera

TUTOR PRINCIPAL  
Adolfo Guillot Santiago  
Instituto de Matemáticas, UNAM

COMITÉ TUTOR

Alberto Verjovsky Sola  
Instituto de Matemáticas, UNAM

José Antonio Seade Kuri  
Instituto de Matemáticas, UNAM

CD.MX., Mayo del 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Estructuras geométricas ortogonales de dimensión tres

5 de noviembre de 2017

*a Dina y Jacob*

Adolfo Guillot, gracias por toda la paciencia que me tuviste durante todos estos años, por siempre tener tiempo para mí, por tu confianza, por enseñarme a confiar en mí misma como matemática, por enseñarme matemáticas y a hacer matemáticas; por ser siempre honesto y recto en todo y por apoyarme siempre. Gracias por revisar a fondo esta tesis una y otra vez.

Alberto Verjovsky, gracias por inyectarme de energía matemática cada vez que te veo, por tus increíbles seminarios y estar siempre disponible para platicar de matemáticas. Eres y serás siempre una estrella que ilumina el Instituto.

Adolfo Guillot, Carlos Cabrera y Aubin Arroyo, gracias por organizar el seminario de sistemas dinámicos durante la mayor parte de mi doctorado; aprendí mucho con él.

Ferrán Valdez, gracias por leer a fondo esta tesis, señalarme errores y hacer interesantes correcciones que me ayudaron a expresar mejor las ideas.

Jacob Mostovoy, gracias por el apoyo incondicional, y en todos los aspectos, que me has dado en estos últimos años. Con tus palabras y con tus besos todo se transforma.

Dina, gracias por llenarme de amor y alegría todos mis días.

Mamá, gracias por todo el apoyo que me has dado, por todas las horas en que me cuidaste a Dina para poder trabajar en esta tesis y por revisar errores de dedo de algunas partes de esta tesis. Tía Raquel, gracias por revisar la redacción de algunas partes de la tesis y gracias por tu buena vibra.

Laura Guzmán, gracias por revisar la redacción y la ortografía de toda esta tesis.

Jacob, Juan Manuel y Aurelio, gracias por ser mis mejores amigos durante mi doctorado. León, Quitzeh y Deborah, gracias por seguir siendo mis mejores amigos de toda mi vida. Waldemar, Aura, Miriam, Fernando, Pepe, Jacinta, Jesús Manuel, Lourdes, Carlos e Iván, gracias por haber sido mis amigos durante alguna parte de mi doctorado.

Ma. Inés, gracias por toda la ayuda que me has dado para realizar de la manera más eficiente todos los trámites de mi doctorado.

CONACYT, gracias por darme una beca durante cuatro años para realizar mis estudios de doctorado y esta tesis. Peter Makienko, gracias por darme, a través del proyecto CONACYT-CB2010/153850, una beca durante un semestre para continuar escribiendo esta tesis. Adolfo Guillot, gracias por darme, a través del proyecto PAPIIT-IN108214 de la Universidad Nacional Autónoma de México, una beca durante un año para continuar escribiendo esta tesis y seguir aprendiendo matemáticas.

Aubin Arroyo, gracias por apoyarme, a través del proyecto 167594-F (Foliaciones y Sistemas Dinámicos), con boletos de avión para poder viajar a la universidad de Brown a un congreso. Agradezco también a los responsables del proyecto Conacyt 58354 (Aspectos locales y globales de acciones de grupos en variedades) por apoyarme para comprar boletos

de avión para asistir a un congreso en el ICTP en Italia. Posgrado en ciencias matemáticas, a través del programa a los estudios de posgrado (PAEP) de la Universidad Nacional Autónoma de México, gracias por apoyarme con boletos de avión para asistir a un congreso en India. Pepe Seade, gracias por apoyarme, a través de algunos proyectos CONACYT, con boletos de avión para asistir a un congreso en el ICTP en Italia y con viáticos para asistir a un congreso en la universidad de Brown.

## Resumen

Una estructura geométrica *uniformizable ortogonal* es una estructura geométrica localmente modelada en una cuádrica, dada por la acción de un grupo kleiniano. Uno de los primeros ejemplos de una variedad compacta de dimensión compleja tres con una estructura geométrica uniformizable ortogonal fue construido por A. Guillot. En esta tesis encontramos otras estructuras geométricas uniformizables ortogonales en la misma variedad que son perturbaciones de ésta. Encontramos también un caso análogo para estructuras geométricas proyectivas.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Acciones propiamente discontinuas</b>	<b>15</b>
2.1. Variedades cociente . . . . .	15
2.2. Técnicas . . . . .	21
<b>3. Grupos kleinianos clásicos</b>	<b>27</b>
3.1. Resultados básicos . . . . .	27
3.2. Ejemplos . . . . .	30
<b>4. Estructuras geométricas</b>	<b>35</b>
<b>5. Geometría de <math>SL(2, \mathbb{C})</math></b>	<b>37</b>
5.1. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$ fibra sobre $\mathbb{H}^3$ con fibra $SU(2)$ . . . . .	37
5.2. Una métrica riemanniana en $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	38
<b>6. Teoría geométrica de <math>SL(2, \mathbb{C})</math></b>	<b>41</b>
6.1. Definiciones básicas de la teoría geométrica de grupos . . . . .	41
6.2. El fibrado trivial $\eta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una cuasiisometría . . . . .	42
6.3. Lema de Švarc-Milnor . . . . .	44
6.4. La identidad de $\Gamma$ en $SL(2, \mathbb{C})$ es un encaje cuasiisométrico . . . . .	46
<b>7. La cuádrica de <math>\mathbb{CP}^4</math></b>	<b>49</b>
7.1. Automorfismos de la cuádrica . . . . .	52
7.2. La geometría de la cuádrica . . . . .	55
<b>8. Representaciones uniformemente admisibles</b>	<b>59</b>
8.1. El espacio $\text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$ es uniformemente admisible en $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ . . . . .	60
8.2. Representaciones uniformemente admisibles . . . . .	60
<b>9. Clásico implica ortogonal</b>	<b>63</b>
9.1. Grupos kleinianos de Guillot . . . . .	63
9.2. Cocientes de Guillot . . . . .	65
9.3. Schottky clásico es Schottky ortogonal . . . . .	66

<b>10. Grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres</b>	<b>69</b>
10.1. Introducción . . . . .	69
10.2. Convergencia de las sucesiones de funciones de $GL(n, \mathbb{C})$ . . . . .	71
10.3. Sucesiones divergentes . . . . .	74
10.3.1. Introducción . . . . .	74
10.3.2. Fórmula para sucesiones Whitney equivalentes . . . . .	77
10.3.3. Sucesiones de distorsión balanceada . . . . .	79
10.3.4. Sucesiones de distorsión acotada . . . . .	81
10.3.5. Sucesiones de distorsión mixta . . . . .	84
10.4. Conjunto límite de Frances . . . . .	85
10.4.1. Conjunto límite de Kulkarni . . . . .	87
10.5. Grupos kleinianos sin sucesiones de distorsión acotada . . . . .	88
10.6. Ejemplos de grupos kleinianos ortogonales . . . . .	88
<b>11. Estructuras geométricas ortogonales</b>	<b>93</b>
<b>12. Estructuras geométricas proyectivas</b>	<b>97</b>
<b>Appendices</b>	<b>101</b>
<b>A. Formas bilineales, formas cuadráticas y cuádricas</b>	<b>103</b>
<b>B. Lema de fibración de Ehresmann</b>	<b>107</b>
<b>C. Topologías en espacios de funciones</b>	<b>109</b>
<b>D. Compactificación por puntas de variedades</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Desde el punto de vista geométrico, el estudio de grupos kleinianos es interesante, entre otras razones, porque nos ayuda a encontrar variedades cociente de la misma dimensión a la del espacio original.

Dado un grupo actuando en un espacio topológico,  $G \times X \rightarrow X$ , el espacio de órbitas  $G \backslash X$  hereda siempre la topología cociente de manera que la aplicación cociente  $X \rightarrow G \backslash X$  es continua. Una situación más interesante surge si nos preguntamos si otras estructuras también se heredan, por ejemplo  $X$ , puede ser una variedad topológica, diferenciable, compleja o estar localmente modelada en alguna geometría. Es bien sabido que si  $G$  es un grupo discreto que actúa en un abierto invariante  $U$  de  $X$  preservando la estructura (es decir, por homeomorfismos, difeomorfismos, biholomorfismos o preservando localmente la geometría) y de manera libre y propiamente discontinua, entonces el espacio de órbitas  $G \backslash U$  hereda la estructura local de  $X$  (es decir, es una variedad topológica, diferenciable, compleja o localmente modelada en la geometría) de manera que la aplicación cociente  $U \rightarrow G \backslash U$  es un cubriente y preserva localmente la estructura.

Geoméricamente, uno de los principales problemas en la teoría de grupos kleinianos consiste en encontrar un abierto invariante, tan grande como sea posible, en el que un grupo actúa de manera propiamente discontinua.

Los ejemplos más estudiados hasta ahora de grupos kleinianos, que en esta tesis llamamos *clásicos*, son los subgrupos discretos de transformaciones de Möbius actuando en la esfera de Riemann y en el espacio hiperbólico. Esta teoría nos regala una receta para calcular el abierto invariante más grande donde un grupo discreto actúe de manera propiamente discontinua, el complemento del *conjunto límite clásico*, que se define como la cerradura de la unión de los puntos límite de todas las órbitas. Este abierto se llama *dominio de discontinuidad* del grupo y lo denotamos como  $\Omega$ .

Las transformaciones de Möbius son las transformaciones conformes de la esfera de Riemann que preservan la orientación, los biholomorfismos del espacio proyectivo complejo de dimensión uno y las transformaciones proyectivas que preservan la cuádrica no degenerada del espacio proyectivo complejo de dimensión dos (ver el Apéndice A y el Teorema A.0.16).

Entonces existen, al menos, tres generalizaciones naturales a dimensiones más altas de los grupos kleinianos clásicos:

- Un *grupo kleiniano conforme* es un subgrupo discreto del grupo  $\text{Conf}^+(\mathbb{S}^n)$  de automorfismos conformes de la esfera  $\mathbb{S}^n$  que preservan la orientación, que actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante no vacío de  $\mathbb{S}^n$ .
- Un *grupo kleiniano complejo* es un subgrupo del grupo  $\text{PSL}(n+1, \mathbb{C})$  de transformaciones proyectivas del plano proyectivo complejo  $\mathbb{CP}^n$ , que actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante no vacío de  $\mathbb{CP}^n$ .
- Un *grupo kleiniano ortogonal* es un subgrupo discreto del grupo  $\text{PO}(n+2, \mathbb{C})$  de transformaciones proyectivas que preservan la cuádrica no degenerada  $Q_n$  de  $\mathbb{CP}^{n+1}$  (ver el Apéndice A y el Teorema A.0.16) y que actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante no vacío de esta cuádrica.

Decimos que un grupo kleiniano  $\Gamma$  de cualquiera de los tipos anteriores es de *Schottky* si existe un conjunto finito  $\{s_1, \dots, s_g\}$  de generadores de  $\Gamma$  y una colección  $\{C_1, D_1, \dots, C_g, D_g\}$  de abiertos de  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{CP}^n$  o  $Q_n$ , respectivamente, con cerraduras ajenas, tales que para todo  $i = 1, \dots, g$ ,  $s_i(C_i^c) = \overline{D_i}$ .

La estructura geométrica (ver a Goldman en [8]) determinada por el cociente de un grupo kleiniano conforme, complejo u ortogonal, es llamada estructura geométrica *uniformizable* conforme, compleja u ortogonal, respectivamente.

El estudio geométrico de los grupos kleinianos complejos y de los grupos kleinianos ortogonales es complicado porque no existe una buena definición de dominio de discontinuidad para estos casos. Intentos de definirlo como el complemento del conjunto límite clásico o el abierto más grande en el que la acción es discontinua, producen ejemplos sencillos en los que falla la maximalidad; o bien, en los que la acción no es propiamente discontinua. También es difícil construir ejemplos de grupo discretos.

Los grupos kleinianos conformes son los más entendidos hasta ahora. Un resumen completo se puede encontrar en [15].

Algunos de los primeros ejemplos de grupos kleinianos complejos fueron dados por Kato en [17], Lárusson en [21], Nori en [26] y J. Seade y A. Verjovsky en [31]. Desde entonces, muchos han estudiado la geometría y dinámica de los grupos kleinianos complejos. En esta tesis encontramos ejemplos de grupos kleinianos complejos de dimensión tres.

Los grupos kleinianos ortogonales han sido los menos estudiados hasta ahora. Uno de los primeros ejemplos de grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres fue dado por A. Guillot en [12, p. 224]. Llamamos la *variedad de Guillot* y la *estructura geométrica de Guillot* a la variedad cociente y a la estructura geométrica correspondientes de los ejemplos de Guillot.

En esta tesis encontramos otros ejemplos de grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres y un resultado análogo para grupos kleinianos complejos. Mientras se preparaba esta tesis, de manera independiente y utilizando otras técnicas, F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel y A. Wienhard encontraron ejemplos similares a algunos de los ejemplos que encontramos en esta tesis de grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres (ver Teorema 4.1 y

Observación 4.3 de [11, p. 68]).

Mostramos también que los ejemplos encontrados en esta tesis de grupos kleinianos ortogonales inducen estructuras geométricas ortogonales que son perturbaciones de la estructura geométrica de A. Guillot. Encontramos también un resultado análogo para estructuras geométricas proyectivas.

A continuación, enunciaremos los resultados principales de esta tesis.

**Teorema 1.0.1** *Sea  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano clásico, convexo-cocompacto, sin torsión y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$ . Consideremos la única extensión de la acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  dada por  $((g, h), x) \mapsto gxh^{-1}$  a la cuádrica no degenerada y de dimensión tres del espacio proyectivo complejo, definida por la ecuación  $z_1z_5 - z_2z_4 - z_3^2 = 0$ . Entonces, existe un abierto  $U_\Gamma$  de esta cuádrica tal que para todo homomorfismo de grupos  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  suficientemente cercano al homomorfismo constante,  $U_\Gamma$  es un abierto maximal en el que  $\Gamma_u := \left\{ (\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma \right\}$  actúa de manera propiamente discontinua. Además, para todos los homomorfismos de grupos  $u$ , todos los cocientes  $\Gamma_u \backslash U_\Gamma$  son compactos y difeomorfos entre sí.*

Los ejemplos construidos por Guillot corresponden al cociente  $\Gamma_I \backslash U_\Gamma$ , donde  $I$  es el homomorfismo identidad.

El grupo  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un recubrimiento doble de un subgrupo en  $\mathrm{PO}(5, \mathbb{C})$  isomorfo a  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ . El grupo  $\Gamma_u$  se inyecta en este último, por lo que se puede considerar como subgrupo de  $\mathrm{PO}(5, \mathbb{C})$ . La acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en la cuádrica no degenerada  $Q_3$  de  $\mathbb{CP}^4$  (ver el Apéndice A y el Teorema A.0.16) es, en realidad, una acción de  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ .

Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico, se puede ver que, mediante la inclusión de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  a  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  como el primer factor y la proyección subsecuente a  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ , el grupo  $\Gamma$  se puede considerar como un subgrupo de  $\mathrm{PO}(5, \mathbb{C})$ .

En esta tesis, demostraremos que si  $\Gamma$  es un grupo de Schottky clásico, actúa como grupo de Schottky ortogonal en  $Q_3$ .

**Teorema 1.0.2** *Sea  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano clásico, convexo-cocompacto, sin torsión y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$ . Consideremos el espacio  $\mathbb{CP}^3$  como la proyectivización de las matrices complejas de  $2 \times 2$  y la acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en él dada por  $((g, h), [x]) \mapsto gxh^{-1}$ . Entonces, existe un abierto  $V_\Gamma \subset \mathbb{CP}^3$  tal que para todo morfismo de grupos  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  suficientemente cercano del morfismo constante,  $V_\Gamma$  es un abierto maximal en el que  $\Gamma_u := \left\{ (\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma \right\}$  actúa de manera propiamente discontinua. Además, para todos estos morfismos  $u$ , los cocientes  $\Gamma_u \backslash V_\Gamma$  son difeomorfos entre sí.*

La variedad  $\Gamma_u \backslash V_\Gamma$  con su correspondiente estructura compleja ortogonal, fue también encontrada por A. Guillot.

El grupo  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un recubrimiento cuatro a uno de un subgrupo en  $\mathrm{PO}(4, \mathbb{C})$  isomorfo a  $\mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$ . El grupo  $\Gamma_u$  se inyecta en este último, por lo que se puede considerar como subgrupo de  $\mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$ . La acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{CP}^3$ , en realidad, es una

acción de  $\text{PSO}(4, \mathbb{C})$ .

La topología en el espacio de morfismos de  $\Gamma$  en  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  considerada en los Teoremas 1.0.1 y 1.0.2 es la topología compacto-abierta. Claramente, si el homomorfismo  $u$  es cercano al homomorfismo constante, el homomorfismo  $\gamma \mapsto (\gamma, u(\gamma))$  es cercano al homomorfismo  $\gamma \mapsto (\gamma, I)$ . Entonces el grupo  $\Gamma_u$  del Teorema 1.0.1 determina una única estructura geométrica ortogonal uniformizable, en la variedad de Guillot, cercana a la de Guillot.

Si  $u$  y  $v$  son cercanos al homomorfismo constante, las estructuras geométricas determinadas por  $\Gamma_u$  y  $\Gamma_v$  son la misma si y sólo si  $u$  y  $v$  son conjugados. El mismo fenómeno sucede en el contexto del Teorema 1.0.2.

Para demostrar el Teorema 1.0.1 consideraremos la acción de  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_3$ , un grupo  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , un homomorfismo  $u : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  y el grupo  $\Gamma_u$ , como en la hipótesis de este Teorema. Luego seguiremos los siguientes pasos:

**Paso I:** Mostraremos primero que la cuádrlica de dimensión dos  $\mathbb{Q}_2$  (ver el Apéndice A y el Teorema A.0.16) está contenida en  $\mathbb{Q}_3$ , que

$$\Theta := \mathbb{Q}_3 - \mathbb{Q}_2$$

es biholomorfo a  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $\mathbb{Q}_2$  es biholomorfo a  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ .

**Paso II:** Generalizaremos el Lema 2.1 de E. Ghys en [7, p. 119] para mostrar que  $\Gamma_u$  actúa de manera *uniformemente* propiamente discontinua en  $\Theta$  (con esto queremos decir que, para todo compacto, las longitudes de los  $\Gamma_u$ -trasladados de este compacto que lo intersecan están acotadas y la cota no depende de  $u$ ), para todo  $u$  suficientemente cercano al morfismo constante.

**Paso III:** Luego consideraremos la acción

$$\begin{aligned} (\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})) \times (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) &\rightarrow (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) \\ ((g, h), (z, w)) &\mapsto (g(z), h(w)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Recordaremos que existe un biholomorfismo  $(\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ -equivariante de  $\mathbb{Q}_2$  sobre  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Por lo tanto, la preimagen de  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  bajo este biholomorfismo es un abierto invariante de  $\mathbb{Q}_2$  en el que  $\Gamma_u$  actúa uniformemente propiamente discontinua.

**Paso IV:** Luego generalizaremos y desarrollaremos algunas ideas de Ch. Frances en [6] para estudiar la dinámica de compactos de  $\mathbb{Q}_3$  bajo sucesiones divergentes de  $\Gamma_u$ . En particular, mostraremos que  $\Gamma_u$  actúa de manera uniformemente propiamente discontinua en  $U_\Gamma := \Theta \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ , si  $u$  es un homomorfismo suficientemente cercano al homomorfismo constante. Denotemos por  $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  al espacio de homomorfismos de  $\Gamma$  en  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Como  $\Gamma$  actúa en  $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C})) \times U_\Gamma$  (en cada fibra vertical sobre  $u$  actúa como lo hace

$\Gamma_u$  en  $U_\Gamma$ ). Con esto hemos mostrado entonces, que existe una vecindad abierta  $\mathcal{V}$  del morfismo constante tal que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\mathcal{V} \times U_\Gamma$ .

**Paso V:** Si  $\mathcal{V}$  no tiene singularidades, entonces  $\Gamma \setminus (\mathcal{V} \times U_\Gamma) \rightarrow \mathcal{V}$  es un fibrado localmente trivial y se sigue el Teorema 1.0.1. Si  $\mathcal{V}$  tiene singularidades, consideraremos una resolución  $r : X \rightarrow \mathcal{V}$  de una vecindad  $\mathcal{V}$  del morfismo constante para construir una fibración localmente trivial sobre  $X$  cuyas fibras son los cocientes  $\Gamma_u \setminus U_\Gamma$  y el Teorema 1.0.1 estará mostrado en el caso general.

Para mostrar el Teorema 1.0.2 mostraremos que existe un biholomorfismo  $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ -equivariante, continuo y propio y una función abierta de  $\mathbb{Q}_3$  sobre  $\mathbb{CP}^3$ . Finalmente, empujaremos el conjunto  $U_\Gamma$  del Teorema 1.0.1 para obtener el conjunto  $V_\Gamma$  del Teorema 1.0.2.

Finalmente, construiremos también una función  $\delta : \mathbb{Q}_3 \rightarrow \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$  continua, abierta y  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariante y mostraremos que es posible jalar cualquier grupo de Schottky clásico de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  a un grupo de Schottky ortogonal de dimensión tres.



# Capítulo 2

## Acciones propiamente discontinuas

Es bien sabido que si un grupo discreto actúa de manera libre y propiamente discontinua en una variedad, entonces, el espacio de órbitas es una variedad con la misma estructura que la original, de manera que la aplicación cociente preserva la estructura.

En este Capítulo veremos las definiciones y los resultados básicos relacionados con las acciones propiamente discontinuas, que utilizaremos más adelante en esta tesis.

### 2.1. Variedades cociente

Salvo que se especifique lo contrario, en esta Sección  $G$  será un subgrupo discreto de un grupo de Lie  $\mathcal{G}$ . También, a lo largo de esta Sección  $M$  será siempre una variedad diferenciable y  $G \times M \rightarrow M$  una acción por difeomorfismos.

Decimos que  $G$  actúa en  $M$  de manera *propiamente discontinua* si para todo compacto  $K \subset M$  se tiene que  $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  es finito.

Decimos que una sucesión  $(g_n)$  de  $G$  es *casi constante* si es constante salvo, quizá, por un número finito de índices. Al igual que Ch. Frances en [6, p. 889], decimos que una sucesión  $(g_n)$  de  $G$  *diverge* si se escapa de cualquier compacto, es decir, para todo compacto  $K \subset \mathcal{G}$ , se tiene que  $g_n \in K$  sólo para un número finito de  $n \in \mathbb{N}$ . Decimos que la sucesión  $(y_n)$  de un espacio topológico es *finita* si toma sólo un número finito de valores y que es *infinita* si toma un número infinito de valores.

Notemos que una sucesión divergente no puede tener subsucesiones casi constantes ya que el conjunto formado por la constante asociada es un compacto  $K$  que cumpliría que  $g_n \in K$  para un número infinito de  $n \in \mathbb{N}$ . Además, no es difícil verificar que las sucesiones divergentes son infinitas.

**Definición 2.1.1** Decimos que  $x \in M$  está dinámicamente relacionado con  $y \in M$  si existe una sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$  y una sucesión convergente  $(x_n)$  de  $M$ , tales que  $x = \lim x_n$  y  $y = \lim g_n x_n$ .

**Observación:** Queremos aclarar que un elemento  $x \in M$  puede no estar relacionado consigo mismo. De hecho, esta relación no es necesariamente reflexiva ni transitiva, pero sí es simétrica. Para ver esto último, supongamos que  $x$  está dinámicamente relacionado con  $y$ , entonces  $x = \lim g_n y_n$  donde  $(g_n)$  es divergente y  $(y_n)$  es convergente. Sea  $y := \lim y_n$  y  $z_n := g_n y_n$ , entonces  $y = \lim g_n^{-1} z_n$ , donde  $x = \lim z_n$  y  $(g_n^{-1})$  es divergente, por lo que  $y$  está dinámicamente relacionado con  $x$ . Lo anterior nos permite decir sin ambigüedad que dos puntos están dinámicamente relacionados.

**Definición 2.1.2** Decimos que  $y \in M$  es un punto de acumulación de la  $G$ -órbita del compacto  $K \subset M$  si toda vecindad de  $y$  interseca infinitos  $G$ -traslados del compacto  $K$ .

El objetivo de esta Sección es mostrar el siguiente Teorema.

**Teorema 2.1.3** Si  $G$  es un grupo discreto que actúa por difeomorfismos en la variedad diferenciable  $M$ , se tienen las siguientes equivalencias:

1.  $G$  actúa en  $M$  de manera propiamente discontinua.
2. Se tienen las siguientes dos condiciones:
  - a) Para todo  $x \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para todos excepto para un número finito de elementos  $g \in G$ .
  - b) Para todo  $x, y \in M$  que no estén en la misma  $G$ -órbita, existen vecindades  $U$  de  $x$  y  $V$  de  $y$  tales que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g \in G$ .
3. Para toda sucesión convergente  $(x_n)$  de  $M$  y para toda sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$ , la sucesión  $(g_n x_n)$  es divergente.
4. No hay puntos dinámicamente relacionados en  $M$ , i.e. para toda sucesión convergente  $(x_n)$  de  $M$  y para toda sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$ , se tiene que  $(g_n x_n)$  no es convergente.
5. No hay puntos de acumulación de  $G$ -órbitas de compactos de  $M$ .

Empezaremos mostrando algunos resultados que nos ayudarán.

**Proposición 2.1.4** Si  $G$  es un grupo discreto de un grupo de Lie  $\mathcal{G}$ . Una sucesión de  $G$  es divergente si y sólo si no tiene subsucesiones convergentes en  $\mathcal{G}$ .

**Demostración:** Tenemos que una sucesión  $(g_n)$  de  $G$  tiene subsucesiones convergentes en  $\mathcal{G}$  si y sólo si existe una sucesión creciente  $(n_i)_i$  de naturales tales que  $(g_{n_i})_i$  converge en  $\mathcal{G}$ . Esto sucede si y sólo si existe un compacto  $K$  de  $\mathcal{G}$  y una sucesión creciente  $(n_i)_i$  de naturales tales que para toda  $i \in \mathbb{N}$ ,  $g_{n_i} \in K$ . Lo anterior sucede si y sólo si  $(g_n)$  no es divergente.  $\square$

**Proposición 2.1.5** Si  $G$  es un grupo discreto de un grupo de Lie  $\mathcal{G}$ , se tiene que  $G$  es cerrado; de hecho no tiene puntos de acumulación en  $\mathcal{G}$  y toda sucesión de elementos distintos de  $G$  es divergente.

**Demostración:** Como  $G$  es discreto, no contiene ningún punto de acumulación en  $G$ . Veremos ahora que tampoco tiene ninguno de estos puntos en  $\mathcal{G}$ . Consideremos en  $\mathcal{G}$  una métrica riemanniana invariante bajo la multiplicación a la izquierda, denotemos por  $e$  a la identidad del grupo y por  $d$  a la métrica de  $\mathcal{G}$  inducida por la métrica riemanniana, sea

$$\epsilon := \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in G, \gamma \neq e} \{d(\gamma, e)\}.$$

Como  $\Gamma$  es discreto, entonces  $\epsilon > 0$ . Entonces, si  $B_\epsilon(e)$  denota a la bola de radio  $\epsilon$  y centro en  $e$ ,  $B_\epsilon(e) \cap G = \{e\}$  y para todo  $\gamma \in G$ , la bola  $B_\epsilon(\gamma)$  de radio  $\epsilon$  y centro en  $\gamma$  es igual a  $\gamma B_\epsilon(e)$  y  $B_\epsilon(\gamma) \cap \Gamma = \{\gamma\}$ . Se tiene que, para todo  $\gamma, \tilde{\gamma} \in G$ ,  $d(\gamma, \tilde{\gamma}) \geq 2\epsilon$ , por lo que ninguna sucesión infinita de  $G$  es de Cauchy. Por tanto, ninguna sucesión de elementos distintos de  $G$  converge en  $\mathcal{G}$ , i.e. toda sucesión de elementos distintos de  $G$  es divergente.  $\square$

Recordemos que una función entre dos espacios topológicos es *propia* si la preimagen de cualquier compacto es compacta.

**Proposición 2.1.6** *Una función continua  $f : M \rightarrow N$  entre dos espacios métricos es propia si y sólo si para toda sucesión  $(x_n)$  divergente, se tiene que  $(f(x_n))$  es divergente.*

**Demostración**  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $f : M \rightarrow N$  es propia. Supongamos que existe una sucesión  $(x_n)$  divergente tal que  $(f(x_n))$  no es divergente, entonces existe un compacto  $K \subset N$  tal que para un número infinito de índices  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_n) \in K$ , entonces para un número infinito de índices  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $x_n$  está contenido en el compacto  $f^{-1}(K)$ ; contradiciendo la hipótesis de que  $(x_n)$  diverge.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que para toda sucesión divergente  $(x_n)$  se tiene que  $(f(x_n))$  es divergente. Sea  $K \subset N$  un compacto cualquiera. Probaremos que toda sucesión infinita en  $f^{-1}(K)$  contiene una subsucesión convergente en  $f^{-1}(K)$ . Sea  $(x_n)$  una sucesión infinita en  $f^{-1}(K)$ , entonces existe una subsucesión convergente, es decir, existe  $y \in K$  y una sucesión infinita de enteros  $(n_i)_i$  tales que  $f(x_{n_i}) \rightarrow y \in K$ , por lo que  $(f(x_n))$  no es una sucesión divergente de  $N$ . Por lo tanto, por las hipótesis,  $(x_n)$  no es divergente en  $M$ , es decir, contiene una subsucesión  $(x_{m_j})_j$  convergente en  $M$ . Afirmamos que tal límite está en  $K$ . Para verlo, supongamos  $x_{m_j} \rightarrow x$ , entonces por continuidad  $f(x_{m_j}) \rightarrow f(x)$ . Aunque no podemos afirmar que  $y = f(x)$  ya que, en principio, la sucesión  $(x_{n_i})$  es diferente a la sucesión  $(x_{m_j})_j$ , sí podemos afirmar que  $f(x) \in K$ , ya que  $K$  es un compacto de un Hausdorff y, por tanto, cerrado y  $f(x)$  es el límite de puntos en  $K$ , por lo que  $x \in f^{-1}(K)$ . Por lo tanto,  $f^{-1}(K)$  es compacto.  $\square$

Sea  $(g_n)$  una sucesión divergente de  $G$ ,  $x \in X$ , definimos el conjunto

$$D_{(g_n)}(x) := \bigcup_{\substack{(x_n), (k_n): x_n \rightarrow x, \\ (g_{k_n} x_n) \text{ converge}}} \{y = \lim_n g_{k_n} x_n\},$$

donde la unión es tomada sobre todas las sucesiones  $(x_n)$  que convergen a  $x$  y todas las sucesiones crecientes de naturales  $(k_n)$  tales que  $(g_{k_n} x_n)$  es convergente. Si  $E \subset X$ , definimos

$$D_{(g_n)}(E) := \bigcup_{x \in E} D_{(g_n)}(x), \quad D_G(E) := \bigcup_{(g_n) \subset G} D_{(g_n)}(E),$$

donde, en este último, la unión es tomada sobre todas las sucesiones divergentes  $(g_n)$  de  $G$ . El conjunto  $D_G(E)$  es llamado el *conjunto dinámico* de  $E$  y es el conjunto de todos los puntos de  $E$  que están dinámicamente relacionados con algún punto de  $E$ , posiblemente él mismo (ver la Definición 2.1.1). Si  $M$  es compacto, entonces  $D_G(M) = M$ .

**Proposición 2.1.7** *Para todo abierto invariante  $U \subset M$  se tiene que  $D_G(U)$  es el conjunto de todos los puntos de acumulación de órbitas de compactos contenidos en  $U$ .*

**Demostración:** Supongamos que  $y \in D_G(U)$ , entonces existe una sucesión convergente  $(x_n)$  de  $U$  y una sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$  tal que  $y = \lim g_n x_n$ . Sea  $x := \lim x_n$  y  $K := \bigcup_n \{x_n\} \cup \{x\}$ , entonces  $y$  es un punto de acumulación de la  $G$ -órbita del compacto  $K$ .

Supongamos que  $y$  es un punto de acumulación de la órbita de un compacto  $K \subset U$ . Recordemos que una base local numerable de  $y \in U$  es una colección numerable  $\{B_n\}$  de abiertos de  $U$ , tales que para todo abierto  $V$  de  $U$  que contenga a  $y$ , existe un elemento  $B_m$  de la colección  $\{B_n\}$  tal que  $y \in B_m \subset V$ . Sea  $\{B_n\}$  una base local numerable de  $y \in U$ , supongamos  $B_{n+1} \subset B_n$ , entonces, existe  $g_1 \in G$ , tal que  $B_1 \cap g_1 K \neq \emptyset$  y, para toda  $n \geq 2$ , existe  $g_n \in G$ , tal que  $B_n \cap g_n K \neq \emptyset$  y, para todo  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $g_n \neq g_j$ . Sea  $x_n \in K$  tal que  $g_n x_n \in B_n \cap g_n K$ , entonces  $y = \lim g_n x_n$  donde  $(g_n)$  es sucesión de elementos distintos. Por la Proposición 2.1.5,  $(g_n)$  es divergente y como  $(x_n)$  está contenida en  $K$  podemos suponer que  $(x_n)$  es convergente, por lo tanto,  $y \in D_G(U)$ .  $\square$

### Demostración del Teorema 2.1.3:

1)  $\Rightarrow$  2) Supongamos que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M$ . Sea  $x \in M$ , entonces como  $M$  es localmente compacto, existe un compacto  $K \subset M$  y un abierto  $U \subset M$  tal que  $x \in U \subset K$ . Entonces, como  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M$ , el abierto  $U$  interseca a lo más a un número finito de sus  $G$ -trasladados; por lo que se satisface la condición (b) del inciso (2).

Sean  $x, y \in M$  dos puntos en diferentes órbitas. Como  $M$  es localmente compacto y Hausdorff, existen abiertos ajenos  $U_1$  y  $U_2$  que contienen a  $x$  y a  $y$ , respectivamente y un compacto  $K \subset M$ , tal que,  $U_1 \cup U_2 \subset K$ . Como  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M$ , se tiene que sólo un número finito de los  $G$ -trasladados de  $U_1$  intersecan a  $U_2$ . Sean  $g_1, \dots, g_k \in G$  los únicos elementos no triviales de  $G$  tales que para todo  $j = 1, \dots, k$ ,  $U_2 \cap g_j U_1 \neq \emptyset$ . Como  $M$  es Hausdorff  $x$  y  $y$  no están en la misma órbita, para cada  $j = 1, \dots, k$ , existen abiertos ajenos  $U_{1,j}$  y  $U_{2,j}$  de  $M$ , tales que,  $g_j x \in U_{1,j}$  y  $y \in U_{2,j}$ . Entonces

$$\mathcal{U}_1 := U_1 \bigcap_{j=1}^k g_j^{-1} U_{1,j}, \quad \mathcal{U}_2 := U_2 \bigcap_{j=1}^k U_{2,j},$$

son abiertos de  $K$  que contienen a  $x$  y a  $y$ , respectivamente, tales que  $\mathcal{U}_2$  no interseca a ningún  $G$ -trasladado de  $\mathcal{U}_1$ .

2)  $\Rightarrow$  1) Supongamos que se satisfacen las condiciones (a) y (b) del inciso (2). Supongamos también que existe un compacto  $K \subset M$  que es intersecado por una infinidad de sus  $G$ -trasladados. Por lo tanto, existe una sucesión  $(g_n)$  de elementos distintos de  $G$  tales que  $g_n x_n \in K \cap g_n K$ . Como  $K$  es compacto podemos suponer que estas sucesiones convergen. Sean  $x := \lim x_n$  y  $y := \lim g_n x_n$ . Tenemos dos casos:

- Si  $x$  y  $y$  están en la misma  $G$ -órbita, entonces existe  $g \in G$  tal que  $x_n \rightarrow x$  y  $g^{-1}g_n x_n \rightarrow x$ . Entonces, toda vecindad infinita de  $x$  interseca a infinitos de sus  $G$ -trasladados, contradiciendo la condición (a) del inciso (2).
- Si  $x$  y  $y$  no están en la misma  $G$ -órbita, supongamos que  $U$  y  $V$  son vecindades de  $x$  y  $y$ , respectivamente. Entonces,  $V$  interseca a infinitos trasladados de  $U$ , contradiciendo la condición (b) del inciso (2).

1)  $\Rightarrow$  3) Supongamos que existe una sucesión convergente  $(x_n)$  de  $M$  y una sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$ , tal que  $(g_n x_n)$  es convergente. Sean  $x := \lim_n x_n$ ,  $y := \lim_n g_n x_n$  y  $U$  y  $V$  vecindades abiertas de  $x$  y  $y$ , respectivamente, tales que sus cerraduras  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  son compactas y sea  $K := \bar{U} \cup \bar{V}$ . Se tiene, entonces, que existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $n \geq N_1$ ,  $x_n \in K$ , y para toda  $n \geq N_2$ ,  $g_n x_n \in K$ , por lo que para toda  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$  tenemos que  $g_n x_n \in g_n K \cap K$ . Finalmente, como toda sucesión divergente es infinita, tenemos que, para un número infinito de elementos  $g \in G$ ,  $gK \cap K \neq \emptyset$ , por lo que la acción no es propiamente discontinua .

3)  $\Leftarrow$  1) Supongamos que existe un compacto  $K \subset M$  y una sucesión de elementos distintos  $(g_n)$  de  $G$ , tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K \cap g_n K \neq \emptyset$ , entonces, existen sucesiones (no necesariamente infinitas)  $(x_n)$  y  $(y_n)$  de  $K$  y una sucesión  $(g_n)$  de  $G$ , tal que  $y_n = g_n x_n$ . Por la Proposición 2.1.5, tenemos que  $(g_n)$  es divergente. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , por lo que  $g_n x_n \rightarrow y$ .

3)  $\Rightarrow$  4) Ya que toda sucesión divergente no es convergente.

3)  $\Leftarrow$  4) Si existe una sucesión  $(x_n)$  de  $M$  y una sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$  tal que  $(g_n x_n)$  no es divergente, entonces, por la Proposición 2.1.4, existe una subsucesión  $(g_{n_i} x_{n_i})$  de  $(g_n x_n)$  que es convergente. Por lo tanto, la sucesión convergente  $(x_{n_i})$  de  $M$  y la sucesión divergente  $(g_{n_i})$  de  $G$  satisfacen que  $(g_{n_i} x_{n_i})$  es convergente.

4)  $\iff$  5) Se sigue directamente de la Proposición 2.1.7.  $\square$

Aunque la Proposición anterior nos da una caracterización sencilla de las acciones propiamente discontinuas para grupos discretos, no nos da una receta para calcular un abierto en el que la acción de un grupo discreto sea propiamente discontinua, como la que tenemos para en el caso clásico de grupos kleinianos, en el que sólo hay que calcular el complemento del conjunto límite (límites de órbitas, ver a B. Maskit [24, p.21]).

La siguiente Sección está dedicada a describir tres técnicas para encontrar abiertos donde la acción es propiamente discontinua. Ahora veremos algunos resultados técnicos que utilizaremos en el Capítulo 8.

**Proposición 2.1.8** *Si  $G$  es un grupo discreto, sin torsión y que actúa en  $M$  de manera propiamente discontinua, entonces actúa de manera libre.*

**Demostración:** Supongamos que  $G$  no actúa de manera libre, es decir, que existe  $x \in M$  y un elemento  $g$ , distinto de la identidad, en el estabilizador  $St(x)$  de  $x$ , tal que  $g(x) = x$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g^n(x) = x$ , i.e.  $g^n \in St(x)$  y, como  $\Gamma$  no tiene torsión, entonces la sucesión  $(g^n)$  es una sucesión de elementos distintos. Por lo que se contradice la hipótesis de que la acción es propiamente discontinua en  $M$  ya que el compacto  $\{x\}$  interseca a infinitos de sus trasladados.  $\square$

Consideremos una métrica  $d$  compatible con la topología de  $M$ , si  $C, F \subset M$  son cerrados, definimos

$$d(C, F) := \inf\{d(c, f) : c \in C, f \in F\}.$$

Es claro que  $d(C, F) \geq 0$ ; sin embargo, la función  $d$  no define una métrica en el espacio de subconjuntos cerrados de  $M$ ; no es difícil encontrar ejemplos en los que  $d(C, F) = 0$  y  $C \neq F$  y ejemplos en los que no se satisface la desigualdad triangular.

Recordemos que un espacio métrico es llamado *propio* si todas sus bolas cerradas son compactas.

**Proposición 2.1.9** *Si  $M$  es un espacio métrico propio y  $\Gamma$  un grupo discreto que actúa en  $M$  de manera propiamente discontinua y por isometrías, si definimos  $\hat{d}([x], [y]) := d(\Gamma x, \Gamma y)$ , entonces  $\hat{d}$  define una métrica en  $\Gamma \backslash M$  compatible con la topología de  $\Gamma \backslash M$ . Si  $\Gamma$  actúa de manera libre entonces la proyección  $M \rightarrow \Gamma \backslash M$  es una isometría local.*

**Demostración:** De la definición tenemos que, para todo  $x, y \in M$ ,  $\hat{d}([x], [y]) = \hat{d}([y], [x])$ , Afirmamos primero que para todo  $x, y \in M$ , tenemos que

$$d(x, \Gamma y) = \min_{\gamma \in \Gamma} \{d(x, \gamma y)\}.$$

Esto debido a que si no fuese cierto, se tendría un punto de acumulación de la órbita de un compacto, pero esto último no puede suceder por la Proposición 2.1.3. Como  $\Gamma$  actúa por isometrías, para todo  $\gamma \in \Gamma$ , se tiene que  $d(x, \Gamma y) = d(\Gamma x, \Gamma y)$ . Por lo que

$$\hat{d}(\Gamma x, \Gamma y) = \min_{\gamma \in \Gamma} \{d(x, \gamma y)\}.$$

Como  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $X$ , si  $[x], [y] \in \Gamma \backslash X$ ,  $[x] \neq [y]$ , tenemos que ninguna órbita de  $y$  se acumula en ningún trasladado de  $x$ , por lo que  $\hat{d}([x], [y]) > 0$ . Si  $[x], [y] \in \Gamma \backslash M$ , entonces  $\hat{d}([x], [y]) \geq 0$ .

Falta sólo mostrar la desigualdad triangular; supongamos  $[x], [y], [z] \in \Gamma \backslash M$  y  $\hat{d}([x], [y]) = d(x, \gamma_k y)$ ,  $\hat{d}([x], [z]) = d(x, \gamma_l z)$ , para algunos  $\gamma_k, \gamma_l \in \Gamma$ , entonces, existen dos posibilidades:

1. Se tiene que  $\hat{d}([z], [y]) = d(\gamma_l z, \gamma_k y)$ . En este caso la desigualdad triangular de  $d$ , aplicada a  $x, \gamma_k y$  y a  $\gamma_l z$  implica directamente la desigualdad triangular de  $\hat{d}$ .
2. No es cierto (1), en cuyo caso existe  $\gamma_h \in \Gamma$  tal que  $d([z], [y]) = d(\gamma_l z, \gamma_h y) < d(\gamma_l z, \gamma_k y)$ . En este caso, se tiene que

$$\hat{d}([x], [y]) \leq d(x, \gamma_h y) \leq d(x, \gamma_l z) + d(\gamma_l z, \gamma_h y) = \hat{d}([x], [z]) + \hat{d}([z], [y]).$$

Se tiene de las definiciones que la topología inducida por  $\widehat{d}$  es la misma que la topología cociente de  $\Gamma \backslash M$  y que, si la acción es libre, entonces la proyección es una isometría local.  $\square$

**Proposición 2.1.10** *Si  $M$  es una variedad diferenciable con métrica  $d$  compatible con la topología y  $\Gamma$  es un grupo que actúa de manera propiamente discontinua, cocompacta (i.e.  $\Gamma \backslash M$  es compacto) y por isometrías en  $M$ , entonces existe un compacto  $K \subset M$  tal que  $\Gamma K = M$*

**Demostración:** Sea  $\widehat{d}$  la métrica en  $\Gamma \backslash M$  considerada en la Proposición 2.1.9. Como la función  $\widehat{d} : \Gamma \backslash M \times \Gamma \backslash M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$  es continua y de dominio compacto, entonces es acotada, por lo que existe  $N > 0$  tal que  $d(\Gamma x, \Gamma y) \leq N$  para todo  $[x], [y] \in \Gamma \backslash M$ . Sea  $K$  la  $d$ -bola con centro en cualquier elemento fijo  $x \in M$  y radio  $N$ , entonces para todo  $y \in M$ , se tiene que existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma y \in K$ , por lo que  $y \in \gamma^{-1}K$ .  $\square$

Finalizaremos esta Sección generalizando la definición de una acción propiamente discontinua que dimos para grupos discretos actuando en variedades. Dado un grupo de Lie  $G$ , no necesariamente discreto, actuando en  $M$ , decimos que  $G$  actúa en  $M$  de manera *propiamente discontinua* si la función  $G \times M \rightarrow M \times M$  dada por  $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$  es propia. Se tiene que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M$  si y sólo si para cualquier compacto  $K$  de  $M$ , se tiene que  $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  es compacto. Además, se tiene que  $G$  actúa en  $G$  de manera propiamente discontinua mediante la multiplicación. Si  $H$  es un subgrupo de Lie de  $G$ , entonces  $H$  actúa en  $G$  de manera propiamente discontinua mediante la multiplicación de  $H$  en  $G$ .

Se tienen los siguientes resultados, las pruebas se pueden consultar por ejemplo en [22, pp. 544, 552].

**Teorema 2.1.11** *Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $G$  actúa en  $M$  de manera diferenciable, libre y propiamente discontinua, entonces el espacio de órbitas  $G \backslash M$  es una variedad topológica de dimensión igual a  $\dim M - \dim G$ , y tiene una única estructura diferenciable con la propiedad de que el mapeo cociente  $M \rightarrow G \backslash M$  es una submersión.*

**Teorema 2.1.12** *Sea  $M$  un  $G$ -espacio homogéneo y  $p$  cualquier punto de  $M$ . Entonces el estabilizador  $St(p)$  de  $p$  es un subgrupo de Lie cerrado de  $G$  y  $F : G_p \backslash G \rightarrow M$ , definida por  $F(G_p g) := p \cdot g$ , es un difeomorfismo  $G$ -equivariante con respecto a la acción natural de  $G$  en  $G_p \backslash G$ .*

## 2.2. Técnicas para encontrar un abierto en el que la acción de un grupo discreto es propiamente discontinua

A lo largo de esta Sección  $M$  será una variedad diferenciable y  $G \times M \rightarrow M$  una acción continua de un grupo discreto.

En “general”, la acción  $G \times M \rightarrow M$  no es propiamente discontinua, pero sí es posible encontrar un abierto en el que la acción lo sea.

En esta Sección veremos algunas técnicas generales y particulares para encontrar abiertos invariantes en los que la acción de un grupo discreto es propiamente discontinua. Veremos que si un grupo discreto actúa de manera equicontinua en  $M$  (por ejemplo, si la acción es por isometrías), el complemento del conjunto

$$\Lambda^{cl} := \overline{\left\{ y = \lim g_n x : x \in M, (g_n) \text{ sucesión infinita de } G, (g_n x) \text{ convergente} \right\}}, \quad (2.1)$$

que llamaremos *conjunto límite clásico* ya que generaliza el caso clásico de grupos discretos de transformaciones de Möbius actuando en la esfera de Riemann, es el abierto más grande en el que la acción es propiamente discontinua.

Nos gustaría aclarar que, en esta Definición de conjunto límite clásico, podemos, sin alterarla, pedir que la sucesión  $(g_n)$  sea divergente en lugar de infinita. Así mismo, en la Definición 2.1.1 de puntos dinámicamente relacionados podemos, sin alterarla, pedir que la sucesión  $(g_n)$  sea infinita en lugar de divergente.

Del Teorema 2.1.3 se podría pensar que la solución a este problema es simplemente quitar todos los puntos de acumulación de órbitas de los compactos de  $M$ . Sin embargo, es fácil convencerse de que son demasiados puntos los que se estarían quitando, en particular, si el espacio es compacto, nos quedamos sin puntos. Kulkarni debió notar esto al definir en [20, p. 255] el *conjunto límite de Kulkarni* que, como veremos, es igual a la unión de  $\Lambda^{cl}$  y la cerradura de los puntos de acumulación de órbitas de compactos que no intersecan a  $\Lambda^{cl}$ .

En esta Sección veremos que es posible jalar (empujar) bajo transformaciones continuas (propias) y equivariantes, abiertos invariantes donde la acción es propiamente discontinua, para encontrar abiertos con la misma propiedad. Este resultado se puede encontrar en [32, p. 156].

También veremos que, si encontramos un dominio fundamental con cerradura compacta, entonces podemos concluir que la acción es propiamente discontinua y cocompacta.

Al igual que Kulkarni, definimos  $L^0(M)$  como la cerradura en  $M$  del conjunto de puntos con isotropía infinita;  $L^1(M)$ , como la cerradura en  $M$  del conjunto de todos los puntos de acumulación de órbitas de puntos en  $M - L^0(M)$  y,  $L^2(M)$ , como la cerradura en  $M$  del conjunto de puntos de acumulación de órbitas de compactos contenidos en  $M - (L^0(M) \cup L^1(M))$ .

Llamamos al conjunto

$$\Lambda^K(M) := L^0(M) \cup L^1(M) \cup L^2(M)$$

el *conjunto límite de Kulkarni*. Kulkarni muestra en [20, p. 255] que si  $\Omega_K := M - \Lambda^K$  no es vacío, entonces  $G$  actúa siempre de manera propiamente discontinua  $\Omega$ .

Por lo anterior y, pese a que no podemos asegurar que su complemento sea maximal, el conjunto límite de Kulkarni es muy usado por gente que trabaja en grupos kleinianos complejos de dimensiones altas (ver por ejemplo [2]).

La relación entre el conjunto límite clásico y el de Kulkarni está dada por la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.1** *Se tiene que  $\Lambda^{cl} = L^0(M) \cup L^1(M)$ .*

**Demostración:** Si  $x \in L^0(M) \cup L^1(M)$ , tenemos dos casos:

- Si  $x \in L^0(M)$  es un punto de isotropía infinita, entonces existe una sucesión infinita  $(g_n)$  de  $G$  tal que  $g_n(x) = x$ ; entonces  $x = \lim g_n x$ , por lo que  $x \in \Lambda^{cl}$ . Como  $\Lambda^{cl}$  es cerrado en  $M$ , entonces  $L^0(M) \subset \Lambda^{cl}$ .
- Si  $x \in L^1(M)$  es un punto de acumulación de  $(\gamma z)_{\gamma \in G}$  para  $z \notin L^0(M)$ , entonces existen una sucesión infinita  $(g_n)$  de  $G$  y  $z \notin L^0(M)$  tal que  $(g_n z)$  es infinita y  $x = \lim g_n z$ ; por lo tanto,  $x \in \Lambda^{cl}$ . Como  $\Lambda^{cl}$  es cerrado en  $M$ , entonces  $L^1(M) \subset \Lambda^{cl}$ .

Por lo tanto,  $L^0(M) \cup L^1(M) \subset \Lambda^{cl}$ .

Si  $x \in \Lambda^{cl}$ , entonces existe  $z \in X$  y una sucesión infinita  $(g_n)$  de  $G$  tal que  $(g_n z)$  es convergente y  $x = \lim g_n z$ . Tenemos dos casos:

- Si  $(g_n z)$  es una sucesión finita, entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  se tiene que  $g_n z = x$ . Como  $(g_n)$  es infinita, entonces  $(g_n g_N^{-1})$  es infinita; por lo tanto, para toda  $n \geq N$ ,  $g_n g_N^{-1} x = x$ . Entonces  $x \in L^0(M)$ .
- Si  $(g_n z)$  es una sucesión infinita, tenemos dos casos:
  - a) Si  $z \in M \setminus L^0(M)$ , entonces, por definición, se tiene  $x \in L^1(M)$ .
  - b) Si  $z \in L^0(M)$ , entonces, como  $L^0(M)$  es cerrado, se tiene que  $x \in L^0(M)$ .

Por lo tanto,  $\Lambda^{cl} \subset L^0(M) \cup L^1(M)$ . □

El conjunto de todos los  $x \in M$  para los cuales existe una vecindad que sólo interseca a un número finito de sus trasladados es, por definición, un abierto invariante; lo llamamos *dominio de discontinuidad* de  $G$  en  $M$  y lo denotamos por  $\Omega^d$ . Como  $M$  es localmente compacto, tenemos que, si  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante  $U \subset M$ , entonces, actúa de manera discontinua en  $U$ . De las definiciones se sigue que

$$\Omega^d \subset M - \Lambda^{cl}. \quad (2.2)$$

Si  $G \times N \rightarrow N$  es una acción continua de un grupo discreto en un espacio métrico, decimos que  $G$  actúa en  $N$  de manera *equicontinua* si, para toda  $x \in N$ , para toda  $\epsilon > 0$ ,

existe  $\delta > 0$ , tal que, para toda  $g \in G$  y para toda  $y \in N$  con  $d(x, y) < \delta$ , se tiene que  $d(g(x), g(y)) < \epsilon$ .

Si  $G$  actúa por isometrías en  $N$ , como para toda  $x, y \in N$  y para toda  $g \in G$ ,

$$d(x, y) = d(g(x), g(y));$$

entonces,  $G$  actúa de manera equicontinua en  $N$ .

**Proposición 2.2.2** *Si  $G$  actúa de manera equicontinua en  $M - \Lambda^{cl}$ , entonces  $M - \Lambda^{cl}$  es el abierto invariante más grande en el que la acción es propiamente discontinua.*

**Demostración:** Mostraremos primero que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M - \Lambda^{cl}$ . Supongamos que no es cierto, que  $G$  no actúa de manera propiamente discontinua en  $M - \Lambda^{cl}$ , entonces por la Proposición 2.1.3 existen  $x, y \in M - \Lambda^{cl}$ , una sucesión  $(x_n)$  que converge a  $x$  y una sucesión divergente  $(g_n)$ , tal que  $(g_n x_n)$  converge a  $y$ , i.e.  $x = \lim_n x_n$ ,  $y = \lim_n g_n x_n$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Por lo anterior existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N_1$ ,

$$d(g_n x_n, y) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por equicontinuidad de  $G$  y como  $x_n \rightarrow x$ , tenemos que existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N_2$ ,

$$d(g_n x, g_n x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces si  $N := \max\{N_1, N_2\}$ , tenemos que para todo  $n \geq N$ ,

$$d(g_n x, y) \leq d(g_n x, g_n x_n) + d(g_n x_n, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto es

$$y = \lim g_n x.$$

Por lo que concluimos que  $y \in \Lambda^{cl}$ , lo cual es una contradicción.

Hemos mostrado que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M - \Lambda^{cl}$ , por lo tanto actúa de manera discontinua y  $M - \Lambda^{cl}$  está contenido en  $\Omega^d$ . Además, por (2.2) tenemos que  $M - \Lambda^{cl} = \Omega^d$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{U}$  es otro abierto invariante en el que la acción es propiamente discontinua, entonces  $G$  actúa de manera discontinua en  $\mathcal{U}$ . Por tanto  $\mathcal{U}$  está contenido en  $\Omega^d$ . Entonces  $\mathcal{U} \subset (M - \Lambda^{cl})$ .  $\square$

Nos gustaría aclarar que si el grupo no actúa de manera equicontinua, en general, no podemos garantizar ni la existencia del abierto más grande donde la acción sea propiamente discontinua (es decir, que contiene a cualquier abierto invariante donde la acción es propiamente discontinua), ni el que la acción sea propiamente discontinua en el complemento del conjunto límite clásico. Un ejemplo sencillo de este hecho es la acción en  $\mathbb{R}^2$  del grupo generado por la transformación  $(x, y) \mapsto (2x, \frac{1}{2}y)$ .

Si  $G$  actúa en  $M$  y en  $N$ , decimos que una función  $f : M \rightarrow N$  es  $G$ -equivariante si para todo  $g \in G$  y para todo  $x \in M$ , se tiene que  $f(gx) = gf(x)$ .

**Proposición 2.2.3** *Supongamos que el grupo discreto  $G$  actúa de manera continua en  $M$  y en  $N$  y  $f : M \rightarrow N$  es  $G$ -equivariante, se tiene entonces que:*

- 1) *Si  $f$  es continua y  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $N$ , entonces  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M$ .*
- (2) *Si  $f$  es sobreyectiva y propia y  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $M$ , entonces  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $N$ .*

**Demostración:** (1) Supongamos que  $f$  es continua y  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $N$ . Si existiera un compacto  $K \subset M$  y un número infinito de  $g \in G$  tal que  $K \cap gK \neq \emptyset$ , como

$$f(K \cap gK) \subset f(K) \cap f(gK) = f(K) \cap gf(K),$$

entonces, un número infinito de  $G$ -trasladados del compacto  $f(K)$  lo intersecarían, contradiciendo la hipótesis.

(2) Notemos primero que  $f^{-1}(gK) = gf^{-1}(K)$ . Esto ya que si  $y \in gf^{-1}(K)$ , entonces existen  $x \in f^{-1}(K)$  y  $k \in K$  tal que  $y = gx$  y  $f(x) = k$ . Por lo que

$$g^{-1}y = x, \quad g^{-1}f(y) = f(g^{-1}y) = f(x) = k,$$

entonces  $y \in f^{-1}(gK)$ . Si  $y \in f^{-1}(gK)$ , entonces  $f(y) \in gK$ , por lo que existe  $k \in K$  tal que  $f(y) = gk$ . Por lo que

$$f(g^{-1}y) = g^{-1}f(y) = g^{-1}gk = k \in K,$$

y por lo tanto,  $g^{-1}y \in f^{-1}(K)$ .

Si existiera un compacto  $K \subset N$  tal que para un número infinito de  $g \in G$ , se tiene que  $K \cap gK \neq \emptyset$ , como

$$f^{-1}(K \cap gK) = f^{-1}(K) \cap f^{-1}(gK) = f^{-1}(K) \cap gf^{-1}(K),$$

entonces un número infinito de  $G$ -trasladados del compacto  $f^{-1}(K)$  lo intersecarían, contradiciendo la hipótesis.  $\square$

**Proposición 2.2.4** *Si  $G$  actúa en un abierto invariante  $U \subset M$  de manera propiamente discontinua y cocompacta y  $M - U$  tiene interior vacío, entonces  $U$  es un abierto maximal en el que la acción es propiamente discontinua.*

**Demostración:** Supongamos que existe otro abierto invariante  $V \subset M$  tal que  $U \subset V$  y  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $V$ , entonces,  $G \setminus U$  es un compacto contenido en el Hausdorff  $G \setminus V$ , por tanto, es un cerrado y su complemento es abierto. Por tanto,  $V - U$  es abierto, pero esto es una contradicción ya que, como  $M - U$  tiene interior vacío y  $(V - U) \subset (M - U)$ , entonces,  $V - U$  tiene interior vacío.  $\square$

**Definición 2.2.5** *Decimos que un abierto  $\mathcal{D} \subset M$  es un dominio fundamental para la acción de  $G$  en  $M$  si se satisface lo siguiente:*

- i)  $\mathcal{D}$  contiene, a lo más, un representante de cada órbita.  
 ii) La variedad  $M$  se descompone como

$$M = \bigcup_{g \in G} g\overline{\mathcal{D}}.$$

- iii) Para todo  $g \in G$  distinto de la identidad,  $\overline{\mathcal{D}} \cap g\overline{\mathcal{D}} = \emptyset$ .

**Proposición 2.2.6** *Supongamos que  $G$  es un grupo discreto. Si  $\mathcal{D}$  es un dominio fundamental cuya cerradura es compacta e interseca sólo a un número finito de sus  $G$ -trasladados, entonces  $G$  actúa de manera propiamente discontinua y cocompacta en  $M$ .*

**Demostración:** Sea  $S$  cualquier subconjunto finito de  $G$  y  $F := \bigcup_{g \in S} g\overline{\mathcal{D}}$ . Probaremos primero que  $F$  interseca sólo a un número finito de sus  $G$ -trasladados.

Si  $g \in G$ , entonces  $F \cap gF \neq \emptyset$  si y sólo si existen  $s, \tilde{s} \in S$ , tales que  $g\tilde{s}\overline{\mathcal{D}} \cap s\overline{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ . Como para toda  $s, \tilde{s} \in S$ , la cantidad de  $G$ -trasladados de  $\overline{\mathcal{D}}$  que intersecan a  $\overline{\mathcal{D}}$  es finita e igual a la cantidad de  $G$ -trasladados de  $s\overline{\mathcal{D}}$  que intersecan a  $s\overline{\mathcal{D}}$ , e igual a la cantidad de  $G$ -trasladados de  $\tilde{s}\overline{\mathcal{D}}$  que intersecan a  $s\overline{\mathcal{D}}$ ; entonces, sólo un número finito de  $G$ -trasladados de  $F$  intersecan a  $F$ .

Como cualquier compacto  $K \subset M$  está contenido en  $\bigcup_{g \in S} g\overline{\mathcal{D}}$  para algún conjunto finito  $S \subset G$ , la acción es propiamente discontinua en  $M$ . Como cualquier cociente de un compacto es compacto, entonces la acción de  $G$  en  $M$  es cocompacta.

# Capítulo 3

## Grupos kleinianos clásicos

En este Capítulo damos un breve repaso de algunos resultados básicos de grupos kleinianos clásicos que utilizaremos más adelante en esta tesis. Si se desean estudiar los detalles, se pueden consultar [30] y [28].

### 3.1. Resultados básicos

Sea  $\mathbb{H}^3$  el espacio formado por todos los puntos de  $\mathbb{R}^3$  que tienen tercera coordenada mayor que cero; es claro que  $\mathbb{H}^3$  es un abierto en  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $\mathbb{H}^2$  el espacio de todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  que tienen segunda coordenada mayor que cero y  $\mathbb{H}_-^2$  el espacio de todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  que tienen segunda coordenada menor que cero.

Sea  $\mathbb{S}^2$  la esfera de Riemann, la cual se identifica vía la proyección estereográfica con  $\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Sea  $\mathbb{B}^3$  la bola unitaria abierta de  $\mathbb{R}^3$ . Es fácil ver que  $\mathbb{H}^3$  es la imagen de  $\mathbb{B}^3$  bajo dos proyecciones estereográficas. Sea  $\text{Mob}(\mathbb{S}^2)$  el grupo de transformaciones de Möbius de  $\mathbb{S}^2$ .

Las transformaciones de Möbius distintas de la identidad se clasifican de la siguiente manera:

1. Una transformación es *loxodrómica* si es conjugada a una de la forma  $z \mapsto \lambda^2 z$ , donde  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda^2| \neq 1$ . Si  $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ , decimos que es hiperbólica.
2. Una transformación es *elíptica* si es conjugada a una de la forma  $z \mapsto \lambda^2 z$ , donde  $|\lambda^2| = 1$ ,  $\lambda \neq 1$ .
3. Una transformación es *parabólica* si es conjugada a  $z \mapsto z + 1$ .

Como toda transformación de Möbius es una composición de un número par de inversiones en círculos y toda inversión en un círculo determina de manera única una inversión en una esfera ortogonal a  $\overline{\mathbb{R}^2}$ , se tiene que, toda transformación de Möbius se extiende de manera única a una transformación de  $\mathbb{B}^3$ . Esta extensión es llamada la *extensión de Poincaré*. Se tiene que el espacio  $\mathbb{H}^3$  admite una métrica riemanniana, llamada *métrica hiperbólica* de manera que todas las isometrías de éste son generadas de tal manera, es decir,  $\text{Mob}(\mathbb{S}^2) = \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ .

Es fácil ver que el grupo de transformaciones

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{C} \right\}$$

actúa transitivamente en  $\mathbb{H}^3$  con isotropía trivial y que el grupo especial unitario

$$\mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

actúa transitivamente en la esfera de Riemann.

El homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathrm{Mob}(\mathbb{S}^2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto A, \end{aligned}$$

donde

$$A(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

es sobreyectivo y tiene kernel igual a  $\{I, -I\}$ , donde  $I$  es la matriz identidad. Por lo tanto, induce un isomorfismo entre

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) := \{I, -I\} \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

y el grupo  $\mathrm{Mob}(\mathbb{S}^2)$ .

Sea

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \{I, -I\} \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Se tiene que  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  actúa en  $\mathbb{H}^2$  y en  $\mathbb{H}_-^2$  y, como para toda  $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\overline{g(z)} = g(\bar{z})$ , entonces, cada una de las acciones anteriores es el reflejo de la otra con respecto al eje real.

Un *grupo kleiniano clásico* de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  es un subgrupo discreto del grupo de transformaciones de Möbius que actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante no vacío de la esfera de Riemann.

Decimos que  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  actúa *de manera discontinua* en un punto  $x$  de la esfera de Riemann si existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  de manera que  $g(U) \cap U = \emptyset$  para todo, excepto un número finito de elementos  $g \in \Gamma$ . Recordemos que, en el Capítulo 1, definimos el dominio de discontinuidad de  $\Gamma$  como el abierto más grande de la esfera de Riemann en el que  $\Gamma$  actúa de manera discontinua. Denotamos a este último como  $\Omega$ .

Un punto  $x$  es un *punto límite* de  $\Gamma$  si existe un punto  $z \in \Omega$  y una sucesión  $(g_n)$  de elementos distintos de  $\Gamma$  tal que  $g_n(z) \rightarrow x$ . Recordemos, también, que, en el Capítulo 1, definimos el conjunto límite (clásico) de  $\Gamma$  como el conjunto de todos los puntos límite de  $\Gamma$ . Denotaremos a éste último por  $\Lambda$ .

Se sabe que un subgrupo  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  ( $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ) es discreto si y sólo si actúa de manera propiamente discontinua en  $\mathbb{H}^3$  ( $\mathbb{H}^2$ ). Es fácil ver que todo grupo kleiniano clásico

de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  es discreto. Además, si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano y sin torsión, entonces  $\Omega$  es el abierto más grande de la esfera de Riemann en el que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua. Se tiene que  $\Gamma$  actúa, también, de manera propiamente discontinua en  $\Omega \cup \mathbb{H}^3$ . Por lo tanto  $\Gamma \backslash \Omega$  es una superficie de Riemann,  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  es una variedad de dimensión real tres con una estructura geométrica hiperbólica y  $\Gamma \backslash (\mathbb{H}^3 \cup \Omega)$  es una variedad real de dimensión tres con frontera  $M$ .

Decimos que un grupo kleiniano clásico  $\Gamma$  es *fuchsiano* si es conjugado, en  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , a algún subgrupo de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

El siguiente Teorema, que relaciona la geometría y la dinámica de los grupos kleinianos clásicos, nos dice que todo grupo kleiniano parte a la esfera de Riemann en dos conjuntos: el conjunto límite y el dominio de discontinuidad.

**Teorema 3.1.1** *Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , con dominio de discontinuidad  $\Omega$  y conjunto límite  $\Lambda$ , entonces la esfera de Riemann es igual a la unión disjunta de  $\Lambda$  y  $\Omega$ .*

Se tiene que la dinámica de un grupo kleiniano está concentrada en el conjunto límite y la geometría en el dominio de discontinuidad; en particular, para cada grupo kleiniano clásico y sin torsión existe una receta para construir una superficie de Riemann (el espacio de órbitas del dominio de discontinuidad)

Consideremos la proyección  $\mathcal{P} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Un *levantamiento* de un elemento  $g$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  a  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un elemento  $A$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  tal que  $\mathcal{P}(A) = g$ . Un *levantamiento* de un subgrupo  $\tilde{\Gamma}$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  a  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un monomorfismo  $j : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  tal que  $\mathcal{P} \circ j$  es la identidad. Un *grupo kleiniano clásico* de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un levantamiento de un grupo kleiniano clásico de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  a  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Consideremos un grupo kleiniano clásico y sin torsión  $\tilde{\Gamma}$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  y tomemos un levantamiento  $\Gamma$  de éste a  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  (I. Kra en [19] demuestra que esto siempre es posible). Se sigue que  $\Gamma$  actúa en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ :

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ (\gamma, z) &\rightarrow \mathcal{P}(\gamma)(z). \end{aligned}$$

Además, si  $\Omega$  es el dominio de discontinuidad de  $\tilde{\Gamma}$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , entonces  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Omega \cup \mathbb{H}^3$  y todas las propiedades de  $\tilde{\Gamma}$  siguen siendo válidas para  $\Gamma$ .

Mostraremos ahora que, para todo grupo kleiniano  $\Gamma$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ,  $-I \notin \Gamma$ . Por definición,  $\mathcal{P}(-I) = Id$ , donde  $I$  es la matriz identidad e  $Id$  es la transformación identidad. Supongamos que existe un elemento  $a \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  tal que  $j(a) = -I$ , como  $\mathcal{P} \circ j$  es la identidad y  $\mathcal{P}(-I) = Id$ , entonces  $a = I$ , pero esto es una contradicción porque, como  $j$  es un monomorfismo, se tiene que  $j(I) = I$ . Entonces  $-I \notin \Gamma$ . Utilizando argumentos similares, se muestra que si  $A \in \Gamma$ , entonces  $-A \notin \Gamma$ .

Si  $C$  es un subconjunto cerrado (distinto de un punto) de la esfera de Riemann, sea  $\mathrm{Hull}(C)$  su *casco convexo* o *envolvente convexa*, es decir el subconjunto cerrado y convexo

más pequeño  $H$  de  $\mathbb{H}^3$  tal que

$$cl_{\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}^2}(H) \cap \mathbb{S}^2 = C.$$

Supongamos que  $\Lambda$  es el conjunto límite del grupo kleiniano clásico  $\Gamma$ , el cociente  $\Gamma \backslash \text{Hull}(\Lambda)$  es llamado el *núcleo convexo* de  $\Gamma$ .

**Definición 3.1.2** *Decimos que un grupo kleiniano clásico  $\Gamma$  que no tiene elementos parabólicos es convexo-cocompacto si la variedad  $\Gamma \backslash (\Omega \cup \mathbb{H}^3)$  es compacta.*

El siguiente Teorema se puede consultar en [15, p. 490].

**Teorema 3.1.3** *Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  que no contiene elementos parabólicos, entonces  $\Gamma$  es convexo-cocompacto si y sólo si  $\Gamma \backslash \text{Hull}(C)$  es compacto.*

El siguiente Teorema, llamado el *Teorema de Ahlfors* (cuya demostración constituye la totalidad del artículo ver [1]) nos será de vital importancia para mostrar los resultados principales de esta tesis.

**Teorema 3.1.4** ?? *El conjunto límite de un grupo kleiniano clásico geoméricamente finito es la esfera de Riemann o tiene medida cero.*

Entonces, si el conjunto límite de un grupo kleiniano no es toda la esfera de Riemann, tiene interior vacío. No es difícil ver que las transformaciones de Möbius preservan los conjuntos de medida cero.

## 3.2. Ejemplos

Ahora veremos algunos ejemplos de grupos kleinianos clásicos convexos-cocompactos y sin torsión. Estos ejemplos son interesantes para nosotros porque satisfacen las condiciones para que la variedad de Guillot (construida por Guillot en [12, p.3], ver Capítulo 9) sea compacta.

**Ejemplo 3.2.1** *El grupo generado por una transformación hiperbólica.*

Consideremos la transformación  $g(z) := \lambda^2 z, \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1$  y sea  $\Gamma$  el grupo generado por  $g$ , i.e.  $\Gamma := \langle g \rangle$ . Consideremos la única geodésica hiperbólica  $E$  en  $\mathbb{H}^2$  que une los puntos  $0$  e  $\infty$  (i.e. la recta vertical que pasa por el origen). Para cada punto  $x \in E$ , existe una única geodésica  $C_x$  ortogonal a  $E$  que pasa por el punto  $x$  (la semicircunferencia hiperbólica de radio  $x$ ); la familia  $\mathcal{C} := \{C_x\}_{x \in E}$  es ajena y

$$\bigcup_{x \in E} C_x = \mathbb{H}^2.$$

Como, además, las transformaciones de Möbius mandan círculos en círculos (en particular geodésicas hiperbólicas en geodésicas hiperbólicas), son conformes y  $g$  fija al cero y al infinito, entonces  $E$  es invariante bajo  $g$  y  $g$  manda geodésicas de la familia  $\mathcal{C}$  en geodésicas de la misma familia. La geodésica  $E$  es llamada el *eje de la transformación hiperbólica* ya que, para cada  $z \in \mathbb{H}^2$ , existe un único  $x \in E$  y un único  $w \in C_{g(x)}$  consistente con el

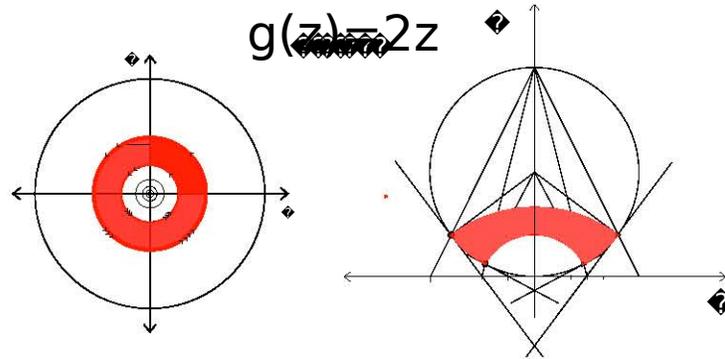


Figura 3.1: Dinámica del grupo generado por la transformación hiperbólica  $g(z) = 2z$  en  $\mathbb{B}^3$

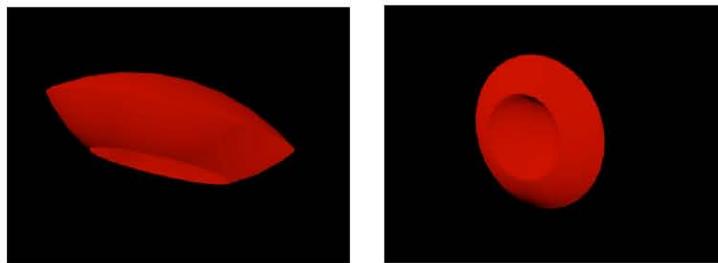


Figura 3.2: Un dominio fundamental del grupo generado por una transformación hiperbólica en  $\mathbb{B}^3$  es un platillo volador.

hecho de que las transformaciones de Möbius preservan la orientación, tal que  $z \in C_x$  y  $d(z, x) = d(w, g(x))$  (donde  $d$  es la distancia hiperbólica), por lo que  $w = g(z)$ .

La extensión de Poincaré de  $\Gamma$  está dada por  $f(x) = \lambda^2 x, x \in \mathbb{R}^3$ . En particular, manda toda esfera ortogonal a  $\mathbb{R}^2$  centrada en el cero en otra esfera ortogonal a  $\mathbb{R}^2$  de mayor radio; es decir, la aleja de un polo acercándola al otro polo.

Con esto es claro que  $\Gamma$  tiene como dominio de discontinuidad a  $\Omega = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , como un dominio fundamental en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , un anillo y, como un dominio fundamental en  $\mathbb{B}^3$ , un “platillo volador”(ver las figuras 3.1 y 3.2). Se tiene que, topológicamente,  $\Gamma \backslash \Omega$  es el toro,  $\Gamma \backslash \mathbb{B}^3$  es el toro sólido abierto y  $\Gamma \backslash (\Omega \cup \mathbb{B}^3)$  es el toro sólido cerrado.

**Ejemplo 3.2.2** *Un grupo fuchsiano de género  $g \geq 2$ .*

Se pueden estudiar los detalles de la construcción del grupo fuchsiano que describiremos a continuación en [18, p. 95].

Existe un grupo fuchsiano que tiene como un dominio fundamental en  $\mathbb{H}^2$  un octágono regular, con lados formados por geodésicas hiperbólicas, tal que la suma de sus ángulos

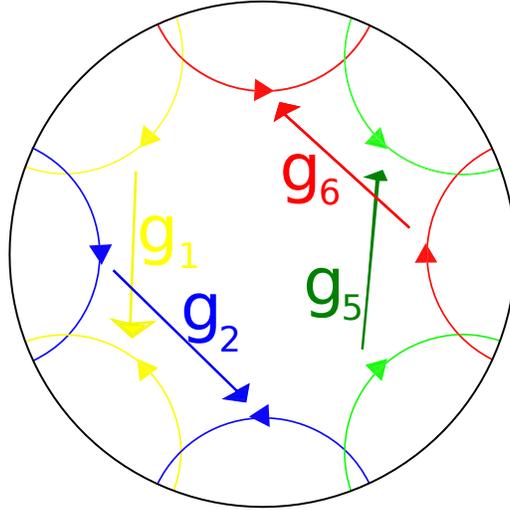


Figura 3.3: Construcción de un grupo fuchsiano de género 2

interiores es  $2\pi$ . Enumeremos los lados en sentido contrario a las manecillas del reloj. El grupo tiene como generadores cuatro funciones hiperbólicas  $g_1, g_2, g_5, g_6$ , tal que  $g_1$  manda el lado 1 en el lado 3;  $g_2$ , el lado 2 en el 4;  $g_5$ , el lado 5 en el 7 y  $g_6$ , el lado 6 en el 8 (ver dibujo 3.3).

El dominio de discontinuidad del grupo  $\Gamma := \langle g_1, g_2, g_5, g_6 \rangle$  actuando en  $\mathbb{C}P^1$  es igual a  $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ; un dominio fundamental es la unión de dos octágonos (uno en  $\mathbb{H}^2$  y otro su reflejado en  $\mathbb{H}^2$ ) y  $\Gamma \backslash \Omega$  es difeomorfo a la unión de dos toros. Por esto, decimos que el grupo fuchsiano  $\Gamma$  es de *género 2*. La construcción de este grupo fuchsiano se puede generalizar para obtener, de esta manera, superficies cerradas de cualquier género  $g \geq 2$ , en las que, los grupos fuchsianos correspondientes, se dice que son de *género g*.

Consideremos las semibolas cerradas  $C_1, \dots, C_8$  ortogonales a  $\mathbb{S}^2$  y contenidas en  $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$  determinadas por los lados del octágono; se tiene que una “manzana mordida”

$$D := (\mathbb{B}^3 \cup \Omega) - \cup_{i=1}^8 C_i$$

es un dominio fundamental de la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$  (ver figura 3.4). Podemos imaginar a  $D$  bajo la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$  trasladándose por todo  $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ , viajando por los ejes de traslación determinados por los generadores de  $\Gamma$ . Se sabe que  $\Gamma \backslash \mathbb{B}^3$  es homeomorfo a  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  (donde  $\mathbb{T}^2$  es el toro), y que  $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega) \approx \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  (ver [23, p.74]).

**Ejemplo 3.2.3** *Un grupo de Schottky de género  $g \geq 1$*

Se puede consultar la existencia de los grupos de Schottky en [3, pag. 45]; aquí sólo los describiremos. Consideremos una colección  $\mathcal{D} := \{D_1, D'_1, \dots, D_g, D'_g\}$  de  $g \geq 1$  pares

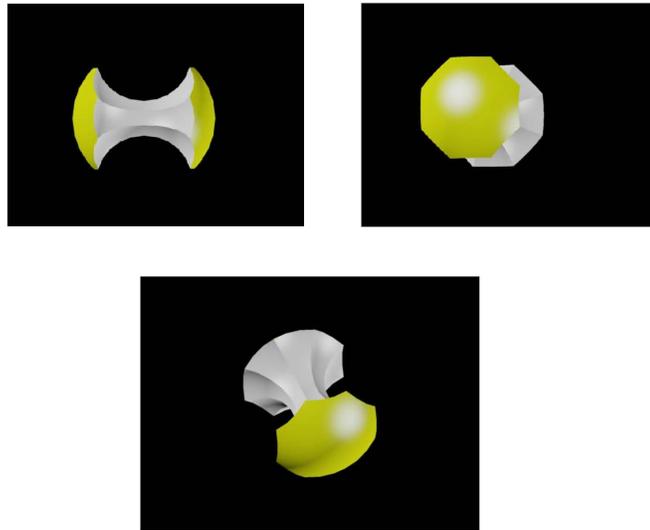


Figura 3.4: Un dominio fundamental del grupo fuchsiano en  $\Omega \cup \mathbb{B}^3$  es una manzana mordida.

de discos con cerraduras ajenas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  y supongamos que, para cada índice  $i$ , existe una transformación de Möbius  $A_i$  tal que

$$A_i(\text{Ext}(D_i)) = \overline{D'_i}$$

El grupo  $\Gamma := \langle A_1, \dots, A_g \rangle$  es llamado un *grupo de Schottky* de género  $g$ . El Lema del Ping Pong (ver [4, p. 25]) nos dice que todo grupo de Schottky es un grupo libre.

Se tiene que  $\Gamma$  actúa en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  con dominio de discontinuidad  $\Omega = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 - K$ , donde  $K$  es un conjunto de Cantor; un dominio fundamental de  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  es

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \bigcup_{i=1}^g (\overline{D_i} \cup \overline{D'_i})$$

y  $\Gamma \backslash \Omega$  es topológicamente la superficie compacta orientable de género  $g$ .

Si  $\widehat{\mathcal{D}} := \{\widehat{D}_1, \widehat{D}'_1, \dots, \widehat{D}_p, \widehat{D}'_p\}$  es la colección de todas las semibolas abiertas en  $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$ , ortogonales a  $\mathbb{S}^2$  y determinadas por los discos de  $\mathcal{D}$ , entonces, un dominio fundamental de  $\Gamma$  en  $\mathbb{B}^3 \cup \Omega$  es igual a

$$(\mathbb{B}^3 \cup \Omega) - \bigcup_{i=1}^g (\widehat{D_i} \cup \widehat{D'_i})$$

(ver la figura 3.5). Por lo que, topológicamente,  $\Gamma \backslash \mathbb{B}^3$  es el  $g$ -toro sólido abierto y  $\Gamma \backslash (\mathbb{B}^3 \cup \Omega)$  es el  $g$ -tóro sólido cerrado. Es tal vez por esto que el grupo de Schottky  $\Gamma$  se dice que es de género  $g$ .

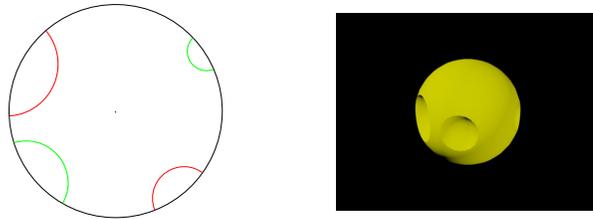


Figura 3.5: Un dominio fundamental del grupo de Schottky en  $\Omega \cup \mathbb{B}^3$ .

# Capítulo 4

## Estructuras geométricas en variedades

En este Capítulo recordamos las estructuras geométricas en variedades; el lector que desee profundizar en este tema puede consultar [9]. En este Capítulo,  $G$  denotará a un grupo de Lie actuando de manera transitiva y analítica en una variedad analítica real  $X$  y  $M$  a una variedad diferenciable de la misma dimensión que la de  $X$ .

Un  $(X, G)$ -atlas en  $M$  es una pareja  $(\mathcal{U}, \Phi)$ , donde  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $M$  y  $\Phi = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X\}_{U_\alpha \in \mathcal{U}}$  es una colección de cartas coordenadas tales que, para cada pareja  $(U_\alpha, U_\beta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$  y para cada componente conexa  $C$  de  $U_\alpha \cap U_\beta$ , existe  $g_{C, \alpha, \beta} \in G$ , tal que  $g_{C, \alpha, \beta} \circ \phi_\alpha = \phi_\beta$ . Una  $(X, G)$ -estructura en  $M$  es un  $(X, G)$ -atlas maximal y una  $(X, G)$ -variedad es una variedad junto con una  $(X, G)$ -estructura en ella. Es claro que una  $(X, G)$ -variedad tiene una estructura de variedad analítica real heredada por  $X$ .

Supongamos que  $M$  y  $N$  son dos  $(X, G)$ -variedades y que  $f : M \rightarrow N$  es un mapeo; decimos que  $f$  es un  $(G, X)$ -mapeo si, para cada par de cartas  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  y  $\psi_\beta : V_\beta \rightarrow X$  (de  $M$  y  $N$ , respectivamente) y para cada componente conexa  $C$  de  $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ , existe  $g = g(C, \alpha, \beta) \in G$  tal que la restricción de  $f$  a  $C$  es igual a  $\psi_\beta^{-1} \circ g \circ \phi_\alpha$ . En particular, sólo nos interesan  $(G, X)$ -mapeos que son difeomorfismos locales. Es fácil ver que si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo local, donde  $M$  y  $N$  son variedades diferenciables; entonces, para toda  $(X, G)$ -estructura en  $N$ , existe una única  $(X, G)$ -estructura en  $M$  para la cual  $f$  es un  $(X, G)$ -mapeo. En particular, cualquier espacio cubriente de una  $(X, G)$ -variedad tiene una  $(X, G)$ -estructura canónica. En la dirección opuesta, si  $\Gamma \subset G$  es un subgrupo discreto que actúa de manera libre y propiamente discontinua en  $X$ , entonces  $\Gamma \backslash X$  hereda de manera natural una  $(X, G)$ -estructura en la que el cociente  $X \rightarrow \Gamma \backslash X$  es un  $(G, X)$ -mapeo; decimos que esta estructura geométrica es *completa*. Lo anterior se puede generalizar de la siguiente forma

**Definición 4.0.1** Si  $\Gamma$  es un grupo discreto de  $G$  que actúa de manera libre y propiamente discontinua en un abierto  $\Gamma$ -invariante  $U$  de  $X$ . Una  $(G, X)$ -estructura geométrica es uniformizable si puede ser construida mediante el cociente  $\Gamma \backslash U$ . En este caso, el cociente  $U \rightarrow \Gamma \backslash U$  es un  $(G, X)$ -mapeo.

Sea  $\tilde{M}$  el cubriente universal de  $M$ , decimos que una función  $f : \tilde{M} \rightarrow X$  suave y no singular es un *mapeo desarrollador* y un homomorfismo  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$  es una holonomía si

para todo  $\gamma \in \pi_1(M)$ ,

$$f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f.$$

La pareja  $(f, \rho)$  es llamada una *pareja desarrolladora*.

W. Goldman muestra en [9, pp. 8-10] que toda  $(X, G)$ -estructura en  $M$  induce una pareja desarrolladora, la cual es una útil globalización de la  $(X, G)$ -estructura definida por coordenadas locales. Goldman muestra también que el par desarrollador  $(f, \rho)$  está determinado de manera única por  $M$ , salvo por la acción diagonal de  $G$  obtenida por la composición de  $f$  y la conjugación de  $\rho$ . Además, una pareja desarrolladora de  $M$  determina de manera única una  $(X, G)$ -estructura en  $M$ .

Sea  $\pi_1 := \pi_1(M, m_0)$ ,  $m_0 \in M$ , definimos

$$\mathcal{D}'_{(X,G)}(M) := \{(f, \rho) : \rho \in \text{Hom}(\pi_1, G), \\ f : \widetilde{M} \rightarrow X \text{ es una función suave no singular y } \rho - \text{equivariante}\}.$$

Consideremos la topología compacto-abierta en el espacio  $\text{Hom}(\pi_1, G)$ . Como  $\pi_1$  es finitamente generado, esta topología es igual a la topología dada por la convergencia puntual de homomorfismos; consideremos, también, la topología  $C^\infty$  en el espacio de mapeos desarrolladores, entonces  $\mathcal{D}'_{(X,G)}(M)$  es un espacio topológico y

$$\begin{aligned} \text{hol}' : \mathcal{D}'_{(X,G)}(M) &\rightarrow \text{Hom}(\pi_1, G) \\ (f, \rho) &\mapsto \rho, \end{aligned}$$

es continua.

Se puede consultar en [9, pp. 11-13] que la componente  $\text{Diff}_0(M, m_0)$  de la identidad del grupo de difeomorfismos de  $M$ , que fijan  $m_0$  actúa de manera libre y propiamente discontinua en  $\mathcal{D}'_{(X,G)}(M)$  y  $\text{hol}'$  es invariante bajo esta acción; además que, el grupo  $G$  actúa en  $\mathcal{D}'_{(X,G)}(M)$  mediante la composición del mapeo desarrollador y la conjugación de la holonomía. Sea  $\mathcal{D}_{(X,G)}(M)$  el espacio cociente de  $\mathcal{D}'_{(X,G)}(M)$  por  $\text{Diff}_0(M, m_0)$ . Al igual que W. Goldman en [9, p. 11],

**Definición 4.0.2** *Decimos que el cociente*

$$\mathcal{I}_{(X,G)}(M) := G \backslash \left( \mathcal{D}_{(X,G)}(M) \right). \quad (4.1)$$

*es el espacio de deformación de las  $(X, G)$ -estructuras en  $M$ .*

# Capítulo 5

## Geometría de $SL(2, \mathbb{C})$

En este Capítulo construiremos un fibrado trivial  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ , con fibra  $SU(2)$ , que es  $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante. También construiremos una métrica riemanniana en  $SL(2, \mathbb{C})$  invariante bajo multiplicación a la izquierda. Estos resultados los utilizaremos en el Capítulo 9 para construir una función continua, abierta y  $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante de  $Q_3$  sobre  $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}^2$  y, en el Capítulo 6, para mostrar que, para todo grupo kleiniano clásico  $\Gamma$  convexo-cocompacto y sin torsión, la función identidad  $\Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C}), \gamma \mapsto \gamma$  es un encaje cuasiisométrico, con respecto a la métrica de palabras de  $\Gamma$ .

### 5.1. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$ fibra sobre $\mathbb{H}^3$ con fibra $SU(2)$

Recordemos que en el Capítulo 3 definimos al grupo

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{C} \right\} \subset SL(2, \mathbb{C}). \quad (5.1)$$

Como  $\mathcal{A}$  actúa de manera transitiva en  $\mathbb{H}^3$  con isotropía trivial; por el Teorema 2.1.12 tenemos que existe un difeomorfismo  $\mathcal{A}$ -equivariante entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathbb{H}^3$ .

Por los Teoremas 2.1.11 y 2.1.12, sabemos que  $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$  es una variedad diferenciable de dimensión tres tal que

$$\begin{aligned} \rho : SL(2, \mathbb{C})/SU(2) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ [g] &\mapsto g(i) \end{aligned} \quad (5.2)$$

es un difeomorfismo  $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante y

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow SL(2, \mathbb{C})/SU(2) \\ g &\mapsto [g] \end{aligned} \quad (5.3)$$

es una submersión propia. Su composición  $\eta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  es una submersión propia  $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante y, por el Lema de Fibración de Ehresmann (ver el Apéndice B), es un fibrado localmente trivial. De hecho, es un fibrado trivial,  $SL(2, \mathbb{C}) \approx \mathbb{H}^3 \times SU(2)$ ; como  $\mathbb{H}^3$  es

difeomorfo a  $\mathcal{A}$ , un isomorfismo es, por ejemplo, el inducido por la siguiente descomposición de  $SL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_1| & \frac{b_1 a_1}{|a_1|} \\ 0 & |a_1|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{|a_1| \bar{\alpha}}{\bar{a}_1} & \frac{-\beta |a_1|}{\bar{a}_1} \\ \frac{|a_1| \beta}{a_1} & \frac{|a_1| \alpha}{a_1} \end{pmatrix}$$

donde si  $c \neq 0$ , entonces  $\beta = (|\frac{d}{c}|^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = d\beta c^{-1}$ ,  $a_1 = a\alpha - b\beta$ ,  $b_1 = a\beta + b\bar{\alpha}$  y si  $d \neq 0$ ; entonces  $\alpha = (|\frac{c}{d}|^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\beta = \bar{c}\bar{\alpha}\bar{d}^{-1}$ ,  $a_1 = a\alpha - b\bar{\beta}$ ,  $b_1 = a\beta + b\bar{\alpha}$ ,

Entonces  $\eta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  está dado por

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\rightarrow (b_1 a_1, |a_1|^2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $a_1$  y  $b_1$  son como antes.

Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano clásico de  $SL(2, \mathbb{C})$ , entonces  $\eta$  induce un fibrado localmente trivial

$$\begin{aligned} \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^3 \\ [x] &\mapsto [\eta(x)]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

## 5.2. Una métrica riemanniana en $SL(2, \mathbb{C})$

En esta Sección construiremos una métrica riemanniana en  $SL(2, \mathbb{C})$ . Recordemos que, en un grupo de Lie, todas las métricas invariantes bajo multiplicación a la izquierda son cuasiisométricas ([4, p. 86]).

Como  $\mathbb{H}^3$  es difeomorfo a  $\mathcal{A}$ , podemos considerar a  $\mathcal{A} \approx \mathcal{A} \times \{I\} \subset \mathcal{A} \times SU(2)$  con la métrica hiperbólica; denotémosla por  $g^1$ .

Extenderemos ahora esta métrica a todo  $SL(2, \mathbb{C})$  de manera que sea invariante por la multiplicación a la izquierda.

Como variedades

$$SL(2, \mathbb{C}) \approx \mathcal{A} \times SU(2),$$

entonces

$$T_I SL(2, \mathbb{C}) = T_I \mathcal{A} \oplus T_I SU(2).$$

Sea

$$g_I^1 : T_I \mathcal{A} \times T_I \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

el producto interno en  $T_I \mathcal{A}$  determinado por la métrica riemanniana  $g^1$  de  $\mathcal{A}$  en la identidad  $I$ . Sea

$$g_I^2 : T_I SU(2) \times T_I SU(2) \rightarrow \mathbb{R}$$

un producto interno cualquiera. Definamos

$$g_I : T_I SL(2, \mathbb{C}) \times T_I SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$$

mediante

$$g_I(v + u, l + p) := g_I^1(v, l) + g_I^2(u, p), \quad v, l \in T_I\mathcal{A}, \quad u, p \in T_I SU(2). \quad (5.6)$$

Claramente

$$g_I(v, l) = g_I^1(v, l) \text{ para todo } v, l \in T_I\mathcal{A}. \quad (5.7)$$

A continuación, veremos que  $g_I$  es una forma bilineal definida positiva y simétrica en  $T_I SL(2, \mathbb{C})$ , por lo que  $g_I$  determina una única métrica riemanniana invariante a la izquierda en  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Si  $v, l, \tilde{v} \in T_I\mathcal{A}$ ,  $u, p, \tilde{u} \in T_I SU(2)$ ,  $x = v + u$ ,  $y = l + p$ ,  $w = \tilde{v} + \tilde{u}$ ,

$$\begin{aligned} g_I(x + w, y) &= g_I((v + \tilde{v}) + (u + \tilde{u}), l + p) = g_I^1(v + \tilde{v}, l) + g_I^2(u + \tilde{u}, p) = \\ &= g_I^1(v, l) + g_I^1(\tilde{v}, l) + g_I^2(u, p) + g_I^2(\tilde{u}, p) = g_I(x, y) + g_I(w, y), \\ g_I(x, y) &= g_I(v + u, l + p) = g_I^1(v, l) + g_I^2(u, p) = g_I^1(l, v) + g_I^2(p, u) = \\ &= g_I(l + p, v + u) = g_I(y, x), \\ g_I(x, x) &= g_I(v + u, v + u) = g_I^1(v, v) + g_I^2(u, u) > 0. \end{aligned}$$

Se tiene también que

$$\begin{aligned} g_I(ax, y) &= g_I(av + au, l + p) = g_I^1(av, l) + g_I^2(au, p) \\ &= ag_I^1(v, l) + ag_I^2(u, p) = ag_I(v + u, l + p) = ag_I(x, y). \end{aligned}$$

Observemos, por la definición (5.6), que estamos declarando al espacio  $T_I\mathcal{A}$  ortogonal al espacio  $T_I SU(2)$ .

Definimos, de la manera usual en la teoría de grupos de Lie, en  $SL(2, \mathbb{C})$  la métrica riemanniana  $g$  invariante bajo multiplicación a la izquierda, mediante

$$g_s(u, v) := g_I(D_s L_{s^{-1}}(u), D_s L_{s^{-1}}(v)),$$

donde  $u, v \in T_s SL_2(\mathbb{C})$ ,  $L_{s^{-1}} : G \rightarrow G$  es la multiplicación a la izquierda por  $s^{-1}$  y  $D_s$  denota la diferencial de una función en el punto  $s$ .



# Capítulo 6

## Teoría geométrica de $SL(2, \mathbb{C})$

En este Capítulo mostraremos que, para todo grupo kleiniano clásico  $\Gamma$  sin torsión y convexo-cocompacto, la función identidad  $\Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C}), \gamma \mapsto \gamma$  es un encaje cuasiisométrico, con respecto a cualquier métrica invariante bajo multiplicación a la izquierda en  $SL(2, \mathbb{C})$  y a cualquier métrica de palabras de  $\Gamma$ .

Este resultado lo utilizaremos para probar el Lemma 8.2.1, el cual es fundamental en la prueba del Teorema 1.0.1.

### 6.1. Definiciones básicas de la teoría geométrica de grupos

Decimos que una función  $f : X \rightarrow Y$ , no necesariamente continua, entre dos espacios métricos es un *encaje cuasiisométrico* si existen constantes  $A > 0, B > 0$ , tales que para todo  $x, y \in X$ ,

$$A^{-1}d_X(x, y) - B \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq Ad_X(x, y) + B.$$

Decimos que  $f : X \rightarrow Y$  tiene *imagen cuasidensa* si existe una constante  $D > 0$  tal que para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que

$$d_Y(f(x), y) \leq D.$$

Decimos que una función  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios métricos es una *cuasiisometría* si es un encaje cuasiisométrico con imagen cuasidensa. Dos espacios métricos son *cuasiisométricos* si existe una cuasiisometría entre ellos. Ser cuasiisométrico induce una relación de equivalencia en el conjunto de espacios métricos.

Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S \subset G$  un conjunto generador de  $G$  (cerrado bajo inversos) que no contenga a la identidad. La *gráfica de Cayley*  $C$  de  $G$  con respecto al conjunto generador  $S$  es la gráfica  $Cay(G, S)$  construida de la siguiente manera:

1. Consideramos un vértice por cada elemento  $g \in G$ .
2. Consideramos una arista entre  $g \in G$  y  $gs$ , para todo  $g \in G, s \in S$ .

La *métrica de palabras* en  $G$  con respecto a un conjunto generador  $S$  (cerrado bajo inversos) se define como

$$\begin{aligned} d_s(g, h) &:= \min\{n \in \mathbb{N} : \exists s_1, \dots, s_n \in S, g^{-1} \cdot h = s_1 \cdots s_n\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} : \exists \text{ un camino de longitud } n \text{ conectando } g \text{ y } h \text{ en } C\} \end{aligned}$$

y la longitud de  $g \in G$  se define como  $l(g) := d_s(g, e)$ , donde  $e$  es la identidad de  $G$ .

Nos gustaría aclarar que si  $S'$  es otro conjunto finito de generadores del grupo  $G$  y  $d'$  es la métrica de palabras de  $G$  con respecto a  $S'$ , entonces  $(G, d)$  y  $(G, d')$  son cuasiisométricos.

## 6.2. El fibrado trivial $\eta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una cuasiisometría

Consideremos a  $SL(2, \mathbb{C})$  con la métrica riemanniana construida en la Sección 5.2 y a  $\mathbb{H}^3$  con la métrica hiperbólica.

**Proposición 6.2.1** *El fibrado trivial  $\eta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  es una cuasiisometría.*

**Demostración:** En el Capítulo 5, definimos al grupo afín  $\mathcal{A}$  y vimos que existe un difeomorfismo  $\mathcal{A}$ -equivariante entre  $\mathbb{H}^3$  y  $\mathcal{A}$ . Sean  $h$  y  $d$  las distancias en  $\mathcal{A}$  y en  $SL(2, \mathbb{C})$ , respectivamente, inducidas por las métricas riemannianas  $g^1$  y  $g$ , respectivamente, consideradas en la Sección 5.2.

Deseamos comparar

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left( g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

con

$$L(\eta(\gamma)) = \int \left( g_{\eta \circ \gamma(t)}^1((\eta \circ \gamma)'(t), (\eta \circ \gamma)'(t)) \right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

para toda curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  en  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Para esto realizaremos la comparación de sus respectivos integrandos. En particular, mostraremos primero que existen constantes  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ , tales que, para todo  $x \in SL(2, \mathbb{C})$  y para todo  $w \in T_x SL(2, \mathbb{C})$ , se tiene que:

$$R_1 g_x(w, w) \leq g_{\eta(x)}^1(D_x \eta(w), D_x \eta(w)) \leq R_2 g_x(w, w). \quad (6.1)$$

Primero mostraremos la fórmula anterior para el caso en el que  $x$  es un elemento de  $SL(2, \mathbb{C})$  y  $w$  está en el tangente unitario  $TU_x(SL(2, \mathbb{C}))$  de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

De la continuidad de la métrica riemanniana y de la diferencial y de la compacidad de  $aSU(2)$ , para todo  $a \in \mathcal{A} \subset SL(2, \mathbb{C})$ , se tiene que: para todo  $a \in \mathcal{A}$ , existen constantes  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  tales que, para todo  $x \in aSU(2)$  y para todo  $u \in TU_x(SL(2, \mathbb{C}))$ , se satisfacen las desigualdades (6.1). Mostraremos ahora que  $R_1$  y  $R_2$  no dependen de  $a \in \mathcal{A}$ .

Para toda  $a \in \mathcal{A}$ , sean

$$\begin{aligned} L_a^1 &: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \\ L_a &: \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

las multiplicaciones a la izquierda por  $a$  en  $\mathcal{A}$  y en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , respectivamente. Si  $v \in \mathrm{TU}_{ax}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ , entonces como  $D_x L_a$  es un isomorfismo, existe  $u \in \mathrm{TU}_x(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ , tal que  $v = D_x L_a u$ . Entonces, como  $D_{\eta(x)} L_a^1$  preserva el producto interior, por la regla de la cadena y como  $\eta \circ L_a = L_a^1 \circ \eta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} g_{\eta(x)}^1(D_x \eta(u), D_x \eta(u)) &= g_{a\eta(x)}^1(D_{\eta(x)} L_a^1 D_x \eta(u), D_{\eta(x)} L_a^1 D_x \eta(u)) \\ &= g_{a\eta(x)}^1(D_{ax} \eta D_x L_a(u), D_{ax} \eta D_x L_a(u)) = g_{a\eta(x)}^1(D_{ax} \eta(v), D_{ax} \eta(v)). \end{aligned}$$

Por lo anterior y como  $g_x(u, u) = g_{ax}(v, v) = 1$ , se tiene que las constantes  $R_1$  y  $R_2$  no dependen de  $x \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Con esto hemos mostrado la fórmula (6.1) para el caso en el que  $x \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $u$  está en el tangente unitario  $\mathrm{TU}_x(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Mostraremos ahora la fórmula (6.1) para el caso en el que  $x \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $u$  es un elemento no nulo del tangente  $\mathrm{T}_x(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Supongamos que  $x \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $w \in \mathrm{T}_x \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , entonces

$$w = \|w\| u,$$

para algún vector unitario  $u \in \mathrm{TU}_x \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , donde la norma anterior es con respecto al producto interior  $g_x$ . Sabemos que la fórmula (6.1) es válida para  $u$ ; multiplicándola por  $\|w\|^2$ , por linealidad de la derivada y por bilinealidad del producto interior, obtenemos la fórmula (6.1) para  $w$ .

Finalmente si  $x \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $w$  es un vector nulo del tangente  $\mathrm{T}_x \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , por bilinealidad del producto interior y linealidad de la derivada, se tiene que  $g_x(w, w) = g_{\eta(x)}^1(D_x \eta(w), D_x \eta(w)) = 0$ , por lo tanto la fórmula (6.1) también es válida.

Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  cualquier curva en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  que una los puntos  $a$  y  $b$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Por la fórmula (6.1) tenemos que

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \left( g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \frac{1}{R_1} \int_0^1 \left( g_{\eta \circ \gamma(t)}^1 \left( D_{\gamma(t)} \eta(\gamma'(t)), D_{\gamma(t)} \eta(\gamma'(t)) \right) \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{R_1} \int_0^1 \left( g_{\eta \circ \gamma(t)}^1 \left( (\eta \circ \gamma)'(t), (\eta \circ \gamma)'(t) \right) \right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{R_1} L(\eta(\gamma)), \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
L(\eta(\gamma)) &= \int_0^1 \left( g_{\eta \circ \gamma(t)}^1 \left( (\eta \circ \gamma)'(t), (\eta \circ \gamma)'(t) \right) \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \left( g_{\eta \circ \gamma(t)}^1 \left( D_{\gamma(t)} \eta(\gamma'(t)), D_{\gamma(t)} \eta(\gamma'(t)) \right) \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq R_2 \int_0^1 \left( g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right)^{\frac{1}{2}} dt = R_2 L(\gamma).
\end{aligned}$$

Como  $SL(2, \mathbb{C})$  es difeomorfo a  $\mathbb{H}^3 \times SU(2)$ , toda curva en  $\mathbb{H}^3$  se puede levantar a una curva en  $SL(2, \mathbb{C})$ ; es decir, toda curva en  $\mathbb{H}^3$  es de la forma  $\eta(\gamma(t))$ , para alguna curva  $\gamma$  en  $SL(2, \mathbb{C})$ . Como las desigualdades anteriores valen para toda curva  $\gamma$  en  $SL(2, \mathbb{C})$  que una los puntos  $a$  y  $b$  en  $SL(2, \mathbb{C})$ , tenemos que si

$$m := \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{R_1}}, \sqrt{R_2} \right\},$$

entonces

$$\frac{1}{m} h(\eta(a), \eta(b)) \leq \frac{1}{\sqrt{R_2}} h(\eta(a), \eta(b)) \leq d(a, b) \leq \frac{1}{\sqrt{R_2}} h(\eta(a), \eta(b)) \leq m h(\eta(a), \eta(b))$$

### 6.3. Lema de Švarc-Milnor

En esta Sección, veremos uno de los Lemas más importantes de la teoría geométrica de grupos, el Lema de Švarc-Milnor (ver [4, p. 87]), y un Corolario que utilizaremos en el Capítulo 8. Sea  $X$  un espacio métrico y  $L > 0$ , una *geodésica* de longitud  $L$  en  $X$  es un encaje isométrico  $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ , donde consideramos el intervalo  $[0, L]$  como subespacio métrico de  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $X$  es un *espacio geodésico* si para todo  $x, x' \in X$  existe una geodésica en  $X$  que empieza en  $x$  y termina en  $x'$ . Recordemos que un espacio métrico es *propio* si sus bolas cerradas son compactas.

**Teorema 6.3.1 (Švarc-Milnor)** *Supongamos que  $X$  es un espacio métrico geodésico y propio,  $\Gamma$  un grupo discreto que actúa en  $X$  de manera cocompacta (es decir,  $\Gamma \backslash X$  es compacto), de manera propiamente discontinua y por isometrías, entonces:*

1.  $\Gamma$  es finitamente generado.
2. Si consideramos a  $\Gamma$  como espacio métrico con la métrica de palabras, para toda  $x_0 \in X$ , el mapeo  $f : \Gamma \rightarrow X$ ,  $f(\gamma) := \gamma \cdot x_0$  es una cuasiisometría.

**Demostración:** Sea  $x_0 \in X$ , por la Proposición 2.1.10, tenemos que existe  $R > 0$  tal que la bola cerrada de radio  $R$  y centro  $x_0$ ,  $\overline{B} := \overline{B_R(x_0)}$  cubre a  $X$ , i.e.  $\Gamma \overline{B} = X$ . Por tanto,  $f$  tiene imagen cuasidensa. Sea

$$S := \left\{ \gamma \in \Gamma : \gamma \neq I, \overline{B} \cap \gamma \overline{B} \neq \emptyset \right\} < \infty$$

y

$$r := \inf_{\gamma \notin S, \gamma \neq I} \left\{ d(\bar{B}, \gamma \bar{B}) \right\} = \inf_{\gamma \notin S, \gamma \neq I} \left\{ \max_{x, y \in \bar{B}} d(x, \gamma y) \right\}.$$

Como  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $X$ , entonces  $r > 0$ . Sea  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \notin S, \gamma \neq I$ ; como existe una única  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$R + (k - 1)r \leq d(x_0, \gamma x_0) < R + kr, \quad (6.2)$$

entonces, existe una curva  $c$  de longitud finita que une  $x_0$  y  $\gamma x_0$  tal que su longitud  $L(c)$  satisface

$$R + (k - 1)r \leq L(c) < R + kr.$$

Sea  $x_1$  un punto en la curva  $c$  tal que  $d(x_0, x_1) = R$  y, para toda  $i \geq 2$  sea  $x_i$  un punto en la curva  $c$  tal que  $d(x_i, x_{i-1}) = r$ . Afirmamos que este proceso debe terminar, ya que, si no lo hace, entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tendría que

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, x_{i+1}) = rn \leq L(c).$$

Lo cual, evidentemente, no puede ocurrir ya que la curva es de longitud finita. Por lo que existe  $n \in \mathbb{N}$  con la propiedad de que es el natural más grande tal que existe una sucesión finita  $S := \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  de puntos distintos en la curva, tal que  $d(x_0, x_1) = R$ ,  $d(x_1, x_2) = r, \dots, d(x_{n-1}, x_n) = r$ .

Por lo que, por definición de longitud de una curva,

$$R + nr \leq L(c)$$

y  $n$  es el natural más grande con tal propiedad. Por (6.2) tenemos que  $n = k - 1$ . Modifiquemos un poco la sucesión, agreguemos un punto  $x_k$  y definamos  $x_{k+1} := \gamma x_0$ , escojámosla tal que  $d(x_0, x_1) < R$ ,  $d(x_1, x_2) < r, \dots, d(x_{k-1}, x_k) < r, d(x_k, \gamma x_0) < r$ .

Como  $\Gamma \bar{B} = X$ , sea  $\{\gamma_j\}_{j=0}^k$  una sucesión de  $\Gamma$  tal que  $\gamma_0 := 1, \dots, \gamma_k = \gamma$  y  $x_{i+1} \in \gamma_i \bar{B}$ , para toda  $i = 0, \dots, k$ . Definamos también  $s_i := \gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k + 1$  se tiene que

$$s_1 \cdots s_k = \gamma_1 \gamma_1^{-1} \cdots \gamma_{k-1} \gamma_{k-1}^{-1} \gamma = \gamma. \quad (6.3)$$

Como  $\gamma_{i-1}^{-1} x_i \in \bar{B}$  y  $s_i \gamma_i^{-1} x_{i+1} \in s_i \bar{B}$ , entonces, por lo anterior, y como  $\Gamma$  actúa por isometrías,

$$d(\bar{B}, s_i \bar{B}) \leq d(\gamma_{i-1}^{-1} x_i, s_i \gamma_i^{-1} x_{i+1}) = d(\gamma_{i-1}^{-1} x_i, \gamma_{i-1}^{-1} x_{i+1}) = d(x_i, x_{i+1}) < r.$$

Por lo anterior, y por la definición de  $r$ , se tiene que  $S$  genera a  $\Gamma$ . Por las ecuaciones (6.2) y (6.3), tenemos que

$$l(\gamma) \leq \frac{1}{r} d(x_0, \gamma x_0) + 1. \quad (6.4)$$

Además, si  $\gamma \in S$  ó  $\gamma = 1$ , la desigualdad anterior es una igualdad. Si definimos

$$\lambda := \max_{s \in S} \left\{ d(x_0, s x_0) \right\},$$

como  $S$  genera a  $\Gamma$ , por la desigualdad triangular y, como  $\Gamma$  actúa por isometrías, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_0, \gamma x_0) &= d(x_0, s_1 \cdots s_k x_0) \\ &\leq d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 s_2 x_0) + \dots + d(s_1 \cdots s_{k-1} x_0, s_1 \cdots s_k x_0) \\ &= d(x_0, s_1 x_0) + d(x_0, s_2 x_0) + \dots + d(x_0, s_k x_0) \leq \lambda l(\gamma). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Afirmamos que  $\lambda \neq 0$ , ya que si  $\lambda = 0$ , la desigualdad anterior implicaría que, para todo  $\gamma \in \Gamma$ , se tendría que  $d(x_0, \gamma x_0) = 0$ , lo cual contradice el hecho de que  $\Gamma$  actúe de manera propiamente discontinua en  $X$ .

Juntando las desigualdades (6.4) y (6.5) tenemos que para todo  $\gamma \in \Gamma$

$$\frac{1}{\lambda} d(x_0, \gamma x_0) \leq l(\gamma) \leq \frac{1}{r} d(x_0, \gamma x_0) + 1. \quad \square$$

Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano convexo-cocompacto, entonces la envolvente convexa del conjunto límite  $\Lambda$  satisface las condiciones del Teorema de Švarc-Milnor; por lo que tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 6.3.2** *Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano clásico convexo-cocompacto, entonces existe un cerrado invariante  $F$  de  $\mathbb{B}^3$ , tal que*

1. *El grupo  $\Gamma$  es finitamente generado.*
2. *Si consideramos a  $\Gamma$  como espacio métrico con la métrica de palabras, para toda  $x_0 \in F$ , el mapeo  $\Gamma \rightarrow F, \gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$  es una cuasiisometría.*

## 6.4. La identidad de $\Gamma$ en $SL(2, \mathbb{C})$ es un encaje cuasiisométrico

Consideremos la métrica riemanniana de  $SL(2, \mathbb{C})$  construida en la Sección 5.2.

**Proposición 6.4.1** *Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico convexo-cocompacto, entonces, la identidad  $\Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C}), \gamma \mapsto \gamma$  es un encaje cuasiisométrico con respecto a la métrica de palabras en  $\Gamma$ .*

**Demostración:** Consideremos la métrica riemanniana de  $\mathcal{A}$  construida en la Sección 5.2. Por la Proposición 6.2.1 y por el Corolario 6.3.2, existen constantes  $R_2 > 0, K > 0, \lambda > 0$  y  $r > 0$  tales que

$$\frac{1}{\sqrt{R_2}} h(\eta(\gamma), I) \leq d(\gamma, I) \leq h(\eta(\gamma), I) + 2K,$$

y

$$\frac{1}{\lambda}h(x_0, \gamma x_0) \leq l(\gamma) \leq \frac{1}{r}h(x_0, \gamma x_0) + 1,$$

donde  $x_0 \in C(\Gamma) \cap \mathbb{H}^3$ . Como

$$\begin{aligned} SU(2) \setminus SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ \eta(\gamma) = [\gamma] &\mapsto \gamma x_0, \end{aligned}$$

es, por definición, una isometría y  $h(\eta(\gamma), I) = h(\gamma x_0, x_0)$ , se tiene que

$$\frac{r}{\sqrt{R_2}}l(\gamma) - \frac{r}{R_2} \leq d(\gamma, I) \leq \lambda l(\gamma) + 2K.$$

Entonces, existen constantes  $B := \max\{\lambda, \frac{r}{\sqrt{R_2}}, 1\} > 1$  y  $C := \max\{\frac{r}{\sqrt{R_2}}, 2K\} \geq 0$  tales que, para toda  $\gamma \in \Gamma$

$$B^{-1}l(\gamma) - C \leq d(\gamma, Id) \leq Bl(\gamma) + C. \quad \square \tag{6.6}$$



# Capítulo 7

## La cuádrica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$

En el Apéndice A recordamos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de formas bilineales y formas cuadráticas en  $\mathbb{C}^n$  y de cuádricas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ . En particular, el Teorema A.0.16 nos dice que todas las formas cuadráticas no degeneradas de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  son equivalentes.

La forma cuadrática no degenerada

$$q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) := z_1 z_5 - z_2 z_4 - z_3^2 \quad (7.1)$$

de  $\mathbb{C}^5$  define una forma cuadrática no degenerada

$$q^*(z_1, z_2, z_4, z_5) := q(z_1, z_2, 0, z_4, z_5)$$

de  $\mathbb{C}^4$ .

Consideremos la cuádrica no degenerada

$$Q_3 := \{[z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^4 : q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = 0\},$$

de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$  y la cuádrica no degenerada

$$C_4 := \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5 - \{0\} : q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = 0\} \quad (7.2)$$

de  $\mathbb{C}^5$ .

Sea H el hiperplano de  $\mathbb{C}^5$  definido por  $z_3 = 0$ ,

$$\pi : \mathbb{C}^5 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^4, \quad \pi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) := [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]$$

y

$$Q_2 := Q_3 \cap \pi(H).$$

**Proposición 7.0.1** *Se tiene lo siguiente:*

1. La cuádrica  $Q_3$  es una subvariedad diferenciable encajada cerrada en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$  de dimensión compleja 3, por lo tanto, compacta. La cuádrica  $Q_2$  es una subvariedad compacta encajada en  $Q_3$  de dimensión compleja 2.

## 2. La función

$$f : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{CP}^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a : b : 1 : c : d]$$

es un encaje. Denotamos por  $\Theta$  a la imagen de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  bajo  $f$ .

## 3. Se tiene que

$$\mathbb{Q}_3 = \overline{\Theta}, \quad \mathbb{Q}_3 = \Theta \cup \mathbb{Q}_2, \quad \Theta \cap \mathbb{Q}_2 = \emptyset.$$

## 4. La función

$$\mathcal{B} : \mathbb{Q}_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$$

$$[a : b : 0 : c : d] \rightarrow \left( \left[ \mathrm{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right], \left[ \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \right) \quad (7.3)$$

está bien definida y es un biholomorfismo.

**Demostración:** Empezaremos mostrando el inciso (1). Supongamos que

$$\bar{z} = [\bar{z}_1 : \bar{z}_2 : \bar{z}_3 : \bar{z}_4 : \bar{z}_5] \in \mathbb{Q}_3.$$

Como no todos los  $\bar{z}_i$  pueden ser cero, supongamos que  $\bar{z}_5 \neq 0$ . Consideremos la carta usual  $(U, \psi)$  de  $\mathbb{CP}^4$  que contiene a  $\bar{z}$ ; esto es

$$U := \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : 1] \in \mathbb{CP}^4,$$

$$\psi : U \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad \psi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : 1]) := (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Consideremos la función

$$f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad f(z_1, z_2, z_3, z_4) := (z_1 - z_2 z_4 - z_3^2, z_2, z_3, z_4).$$

Como para todo  $Z \in \mathbb{C}^4$   $\det(D_Z f) = 1$ , entonces  $f$  un biholomorfismo local, mas aún, su inversa es

$$f^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4) := (y_1 + y_2 y_4 + y_3^2, y_2, y_3, y_4),$$

por lo que  $f$  es un biholomorfismo.

Entonces,

$$\rho : U \rightarrow \mathbb{C}^4, \quad \rho := f \circ \psi$$

es un biholomorfismo; además

$$\rho(U \cap \mathbb{Q}_3) = \rho(U) \cap \{y_1 = 0\},$$

por lo que  $\mathbb{Q}_3$  es una subvariedad encajada de  $\mathbb{CP}^4$  de dimensión compleja 3. También

$$\rho(U \cap \mathbb{Q}^2) = \{y_1 = 0\} \cap \{y_2 = 0\} \cap \rho(U),$$

por lo que  $Q_2$  es una subvariedad encajada de  $Q_3$  de dimensión compleja 2 .

Sea

$$p : \mathbb{C}^5 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) := z_1 z_5 - z_2 z_4 - z_3^2.$$

Se tiene que  $Q_3$  es un espacio cerrado de  $\mathbb{CP}^4$  ya que es un cociente del conjunto cerrado  $p^{-1}(0)$ . Además,  $Q_2$  es cerrado en  $Q_3$  ya que  $\pi(H)$  es cerrado en  $\mathbb{CP}^4$ .

Mostraremos ahora el inciso (2). Notemos que  $f$  está bien definida, ya que como

$$ad - bc = 1,$$

entonces  $[a : b : 1 : c : d] \in Q_3$ . La función  $f$  en unas coordenadas en las que  $x \neq 0$  se expresa como:

$$(a, b, c) \rightarrow \left( a, b, c, \frac{1+bc}{a} \right) \rightarrow \left[ x : y : 1 : z : \frac{1+bc}{a} \right] \rightarrow (x, y, z).$$

Entonces  $f$  es una inmersión inyectiva y, por tanto, un encaje.

Mostraremos ahora el inciso (3). Como  $\{[a : b : 1 : c : d] \in \mathbb{CP}^4\}$  es abierto en  $\mathbb{CP}^4$  y  $\Theta = \{[a : b : 1 : c : d] \in \mathbb{CP}^4\} \cap Q_3$ , entonces  $\Theta$  es abierto en  $Q_3$ . Como todo abierto de  $\mathbb{C}^5$  que contenga un punto cuya tercera coordenada sea cero contiene puntos cuyas terceras coordenadas son distintas de cero, entonces  $\Theta$  es denso en  $Q_3$ .

Por definición  $\Theta$  y  $Q_2$  son ajenos. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} Q_3 &= \{[0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0\} \cup \{[1 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1\} \\ &= Q_2 \cup \Theta. \end{aligned}$$

Finalmente, mostraremos el inciso (4). Si  $[a : b : 0 : c : d] \in Q_2$ , sea

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Como  $M$  es una matriz no nula cuyo determinante es cero, entonces la dimensión de su kernel (y de su imagen) es uno. Entonces (7.3) está bien definida.

Notemos que (7.3) se puede representar también como

$$[a : b : 0 : c : d] \mapsto \begin{cases} ([a : c], [-b : a]) & a \neq 0, \\ ([b : d], [-b : a]) & b \neq 0, \\ ([a : c], [-d : c]) & c \neq 0, \\ ([b : d], [d : -c]) & d \neq 0. \end{cases}$$

Tenemos que éste es un biholomorfismo local ya que, si suponemos que  $[bc : b : 0 : c : 1] \in Q_2$ ,  $\mathcal{B}$  se representa en coordenadas como

$$(b, c) \mapsto (b, -c).$$

Se tiene que (7.3) es sobreyectiva ya que, si suponemos que tenemos

$$([1 : x], [y : 1]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1,$$

entonces

$$[1 : -y : 0 : x : -xy] \in \mathbb{Q}_2$$

y su imagen bajo  $\mathcal{B}$  es  $([1 : x], [y : 1])$  (los otros casos son similares).

Finalmente, (7.3) es inyectiva ya que, si suponemos que

$$[1 : b : 0 : c : bc], [\tilde{a} : \tilde{a}\tilde{d} : 0 : 1 : \tilde{d}]$$

y

$$([1 : c], [-b : 1]) = ([\tilde{a} : 1], [-\tilde{d} : 1]),$$

entonces  $\tilde{a} = \frac{1}{c}$  y  $\tilde{d} = b$ , por lo que

$$[1 : b : 0 : c : bc] = [\tilde{a} : \tilde{a}\tilde{d} : 0 : 1 : \tilde{d}]$$

(los otros casos son similares). Por tanto, (7.3) es un biholomorfismo.  $\square$

## 7.1. El grupo de automorfismos de la cuádrica y algunos subgrupos

Los grupos  $O(4, \mathbb{C})$  y  $O(5, \mathbb{C})$  son los grupos de matrices que preservan  $q^*$  y  $q$ , respectivamente. El grupo  $SO(4, \mathbb{C})$  es el subgrupo de  $O(4, \mathbb{C})$  que contiene a las matrices de determinante uno.

Decimos que dos matrices en  $O(n, \mathbb{C})$  ( $n = 4, 5$ ) distintas de cero están relacionadas si una es un múltiplo escalar de la otra y denotamos por  $PO(n, \mathbb{C})$  al conjunto de clases de equivalencia. Se tiene que  $PO(5, \mathbb{C})$  es el grupo de transformaciones proyectivas que preservan  $\mathbb{Q}_3$ , por esto, decimos que  $PO(5, \mathbb{C})$  es el *grupo de automorfismos de la cuádrica*  $\mathbb{Q}_3$ .

El encaje de  $O(4, \mathbb{C})$  en  $O(5, \mathbb{C})$ , que corresponde a añadir a una matriz de  $O(4, \mathbb{C})$  un renglón (y una columna) en medio de los otros renglones (y columnas), añadir 1 a la entrada central y ceros a las demás entradas añadidas, es un monomorfismo holomorfo. Puesto que la composición de este encaje y la proyección de  $O(5, \mathbb{C})$  sobre  $PO(5, \mathbb{C})$  define un monomorfismo holomorfo  $\phi$  de  $O(4, \mathbb{C})$  en  $PO(5, \mathbb{C})$ , denotamos, también, por  $O(4, \mathbb{C})$ , a la imagen de este monomorfismo y, por  $SO(4, \mathbb{C})$ , a la imagen de  $SO(4, \mathbb{C})$ . Por definición, tenemos que el grupo  $O(4, \mathbb{C})$  preserva  $\mathbb{Q}_2$ .

**Proposición 7.1.1** *Se tiene lo siguiente:*

1. *La acción:*

$$\begin{aligned} (SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})) \times SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \\ ((g, h), x) &\mapsto gxh^{-1} \end{aligned} \tag{7.4}$$

define una acción holomorfa de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\Theta$  que se extiende de forma única a una acción en  $\mathbb{Q}_3$ .

2. La extensión del inciso anterior define un homomorfismo holomorfo  $\psi$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  sobre  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$  con kernel  $\{(I, I), (-I, -I)\}$  y, por tanto, una acción fiel del grupo  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_3$ . Existen coordenadas de  $\mathbb{Q}_3$  en las que esta acción se representa como

$$(x, y) \mapsto (g(x), h(y)). \quad (7.5)$$

3. El biholomorfismo (7.3) es  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ -equivariante con respecto a la acción definida en el inciso (1) y a la acción (1.1) definida en el cociente  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(4, \mathbb{C}) \times (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) &\rightarrow (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) \\ \left( [(g, h)], (z, w) \right) &\mapsto (g(z), h(w)). \end{aligned} \quad (7.6)$$

4. Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico sin torsión, para todo morfismo de grupos  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , la restricción del homomorfismo  $\psi$ , definido en el inciso (2), a  $\Gamma_u$ , es inyectiva; por lo tanto,  $\Gamma_u$  es un subgrupo de  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ . Además  $\Gamma_u$  es libre de torsión.

**Demostración:** Empezaremos mostrando el inciso (1). Como, por definición,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $\Theta$  son biholomorfos, entonces, la acción (7.4) de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  define una acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\Theta$ . Además, es fácil definir una acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_3$  siguiendo (7.4) y fijando la tercera coordenada:

$$(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \times \mathbb{Q}_3 \rightarrow \mathbb{Q}_3$$

$$\begin{aligned} &\left( \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \right), [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \right) \\ &\mapsto [a\hat{d}z_1 + b\hat{d}z_4 - a\hat{c}z_2 - b\hat{c}z_5 : -a\hat{b}z_1 - b\hat{b}z_4 + a\hat{a}z_2 + b\hat{a}z_5 : z_3 \\ &\quad : c\hat{d}z_1 + d\hat{d}z_4 - c\hat{c}z_2 - d\hat{c}z_5 : -c\hat{b}z_1 - d\hat{b}z_4 + c\hat{a}z_2 + d\hat{a}z_5]. \end{aligned}$$

Esta acción no es fiel ya que  $(-I, -I)$  actúa como la identidad  $(I, I)$ .

Mostraremos ahora el inciso (2). La acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_3$  del inciso (1) define un homomorfismo holomorfo.

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathrm{PO}(5, \mathbb{C}) \\ \left( \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix} \right) \right) &\mapsto \begin{pmatrix} a\hat{d} & -a\hat{c} & 0 & b\hat{d} & -b\hat{c} \\ -a\hat{b} & a\hat{a} & 0 & -b\hat{b} & b\hat{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c\hat{d} & -c\hat{c} & 0 & d\hat{d} & -d\hat{c} \\ -c\hat{b} & c\hat{a} & 0 & d\hat{b} & d\hat{a} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Como cualquier elemento de la imagen de  $\psi$  tiene determinante 1 y todas sus entradas de la tercera columna o fila son cero, salvo la entrada (3, 3), entonces, la imagen de  $\psi$  está contenida en  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Como  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$  es conexo, entonces, la imagen de  $\psi$  es un subgrupo conexo de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Como  $\psi(\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  y  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  son de la misma dimensión (ver [8, p. 82]), entonces, tienen que ser iguales. Por lo tanto, la imagen de  $\psi$  es  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ .

Además, si igualamos el lado derecho de (7.7) con la identidad, notamos fácilmente que los únicos elementos de  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$  que van a la identidad son  $(I, I)$  y  $(-I, -I)$ , donde  $I$  es la matriz identidad de dos por dos. De manera equivalente, notamos que el grupo

$$\{(I, I), (-I, -I)\}$$

es el estabilizador de todos los puntos de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ; las parejas de la forma  $(A, A)$  con  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  estabilizan a  $I$  y, si  $ABA^{-1} = B$ , entonces  $A$  está en el centro de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Entonces el kernel de  $\psi$  es  $\{(I, I), (-I, -I)\}$ .

Como  $\text{PO}(5, \mathbb{C})$  actúa en  $\mathbb{Q}_3$  de manera fiel y  $\text{SO}(4, \mathbb{C}) \subset \text{PO}(5, \mathbb{C})$ , entonces  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  actúa de manera fiel en  $\mathbb{Q}_3$ .

Por lo que  $\psi$  induce un isomorfismo biholomorfo de  $(\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})) / \{(I, I), (-I, -I)\}$  sobre  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ .

Con respecto a las cartas

$$(z, s) \mapsto [zs : z : 0 : s : 1]$$

y

$$(z, s) \mapsto [z : -zs : 0 : 1 : -s],$$

la acción de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_2$  se representa como (7.5).

Probaremos ahora el inciso (3). Identificamos a  $\mathbb{Q}_2$  con las matrices de determinante cero. Sean

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_4 & z_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_2, (g, h) \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

y  $\mathcal{B}$  el biholomorfismo definido en (7.3), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\left(\left[(g, h)[M]\right]\right) &= \mathcal{B}\left([gMh^{-1}]\right) = \left(\left[\text{Im}(gMh^{-1})\right], \left[\text{Ker}(gMh^{-1})\right]\right) \\ &= \left(g\left(\left[\text{Im}(Mh^{-1})\right]\right), \left[\text{Ker}(Mh^{-1})\right]\right) = \left(g\left(\left[\text{Im}(M)\right]\right), h\left(\left[\text{Ker}(M)\right]\right)\right) \\ &= \left[(g, h)\mathcal{B}([M])\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el biholomorfismo (7.3) es  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariante.

Finalmente, probaremos el inciso (4). En el Capítulo 3, mostramos que todo grupo kleiniano clásico  $\Gamma$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  no contiene a  $-I$ , donde  $I$  es la identidad; por lo tanto,  $(-I, -I) \notin \Gamma_u$  y  $\psi$  restringido a  $\Gamma_u$  es inyectivo, por lo que  $\Gamma_u \subset \text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Además, como  $\Gamma$  no tiene torsión, entonces  $\Gamma_u$  tampoco tiene torsión.  $\square$

En el Teorema 10.6.1 mostraremos que los grupos  $\Gamma_u$  del inciso (4) del Teorema anterior son grupos kleinianos ortogonales, si  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un homomorfismo suficientemente cercano al homomorfismo constante.

## 7.2. La geometría de la cuádrica

Sea  $B$  la forma bilineal asociada a la cuádrica  $q$ . Un subespacio vectorial  $W$  de  $\mathbb{C}^5$  es llamado *isotrópico* si está contenido en la cuádrica  $C_4$ , es decir, si para todo  $w \in W$ ,  $q(w) = 0$ , los vectores de  $W$  son llamados *isotrópicos*.

Existen  $\mathbb{C}$ -planos isotrópicos en  $\mathbb{C}^5$ , por ejemplo  $\langle e_1, e_2 \rangle$ , donde  $e_1 := (1, 0, 0, 0, 0)$  y  $e_2 := (0, 1, 0, 0, 0)$  son los vectores usuales de la base canónica.

Sin embargo, no existen subespacios isotrópicos de  $\mathbb{C}^5$  de dimensión compleja 3 ya que la identidad de polarización nos dice que, para todo  $u, v \in \mathbb{C}^5$ , se tiene que

$$2B(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v) = 0,$$

por lo que  $W \subset W^\perp$ . Entonces por el Lema 22 de [27] (viene enunciado para espacios vectoriales reales pero, en la demostración de este Lema, no se utiliza este hecho, por lo que es la misma demostración para el caso complejo), tenemos que

$$2 \dim W \leq \dim W + \dim W^\perp = \dim \mathbb{C}^5 = 5.$$

Por lo tanto,  $\dim W \leq \frac{5}{2}$ , esto es,  $\dim W \leq 2$ .

**Definición 7.2.1** *Llamamos geodésica de luz a la proyectivización de un  $\mathbb{C}$ -plano isotrópico de  $\mathbb{C}^5$ .*

Es claro que toda geodésica de luz es biholomorfa a  $\mathbb{CP}^1$  y que  $\mathrm{PO}(5, \mathbb{C})$  manda geodésicas de luz en geodésicas de luz.

Si  $p \in \mathbb{Q}_3$ , definimos el *cono de luz* de  $p$  en  $\mathbb{Q}_3$ , denotado por  $C(p)$ , como la unión de todas las geodésicas de luz que pasan por  $p$ .

Recordemos que, anteriormente, hemos denotado por  $\pi$  a la proyección de  $\mathbb{C}^5 - \{0\}$  en  $\mathbb{CP}^4$ . Sea  $p \in \mathbb{Q}_3$  y  $\pi(\tilde{p}) = p$ . Mostraremos ahora que

$$C(p) = \pi(\tilde{p}^\perp \cap C_4).$$

Si  $P$  es un plano isotrópico que pasa por  $\tilde{p}$ , entonces, para todo  $u \in P$ , se tiene que

$$q(u) = q(\tilde{p}) = q(u + \tilde{p}) = 0;$$

entonces, por la identidad de polarización,  $B(u, \tilde{p}) = 0$ . Por lo tanto,  $u$  es un vector isotrópico ortogonal a  $\tilde{p}$ , esto es,  $u \in C_4 \cap \tilde{p}^\perp$ . Si  $u \in C_4 \cap \tilde{p}^\perp$ , entonces  $q(u) = 0$  y  $B(u, \tilde{p}) = 0$ .

Nuevamente, por la identidad de polarización, para todo  $a, b \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 2abB(u, \tilde{p}) = 2B(au, b\tilde{p}) = q(au + b\tilde{p}) - q(au) - q(b\tilde{p}) \\ &= q(au + b\tilde{p}) - a^2q(u) - b^2q(\tilde{p}) = q(au + b\tilde{p}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el plano generado por  $u$  y  $\tilde{p}$  es isotrópico, es decir,  $u$  está contenido en un plano isotrópico que pasa por  $\tilde{p}$ , obteniendo lo deseado.

Si  $p \in Q_3$ , consideremos la siguiente relación de equivalencia en  $C(p) - \{0\}$ : decimos que  $x, y \in C(p) - \{0\}$  están relacionados si pertenecen a la misma geodésica de luz que contiene a  $p$ . Denotemos por  $\tilde{C}(p)$  al espacio de clases de equivalencia. Entonces  $\tilde{C}(p)$  es el espacio de todas las geodésicas de luz que contienen a  $p$ .

Recordemos que en la Proposición 7.0.1 mostramos que  $Q_2$  es biholomorfo a  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ .

**Proposición 7.2.2** *Si  $p \in Q_3$ , entonces el espacio de todas las geodésicas de luz de  $Q_3$  que contienen a  $p$  es una variedad compleja biholomorfa a  $\mathbb{CP}^1$ . Las geodésicas de luz de  $Q_3$  que están contenidas en  $Q_2$  son de la forma  $\{z\} \times \mathbb{CP}^1$  y  $\mathbb{CP}^1 \times \{w\}$ , donde  $z, w \in \mathbb{CP}^1$ .*

**Demostración:** Recordemos que la forma cuadrática no degenerada de  $\mathbb{CP}^2$

$$Q_1 := \{[0 : z_2 : z_3 : z_4 : 0] \in \mathbb{CP}^2 : z_2 z_4 + z_3^2 = 0\}$$

es biholomorfa a  $\mathbb{CP}^1$ .

Tenemos que

$$C(\pi(e_1)) = \pi(e_1^\perp \cap C^4) = \{[z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : 0] \in \mathbb{CP}^4 : z_2 z_4 + z_3^2 = 0\}.$$

Las preimágenes de la función

$$p : C(\pi(e_1)) - \{\pi(e_1)\} = \bigcup_{[z_2 : z_3 : z_4] \in Q_1} \pi(\mathbb{C} \times \{z_2\} \times \{z_3\} \times \{z_4\} \times \{0\}) \rightarrow Q_1$$

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : 0] \mapsto [0 : z_2 : z_3 : z_4 : 0]$$

son las geodésicas de luz que contienen a  $\pi(e_1)$ , menos el punto  $\pi(e_1)$ .

Entonces, el espacio de geodésicas de luz que contienen a  $\pi(e_1)$  es una variedad compleja biholomorfa a  $\mathbb{CP}^1$ .

De forma similar, para toda  $g \in \text{PO}(5, \mathbb{C})$ , la función

$$p_g : C(\pi(g(e_1))) - \{\pi(g(e_1))\} = \bigcup_{[z_2 : z_3 : z_4] \in Q_1} g\left(\pi(\mathbb{C} \times \{z_2\} \times \{z_3\} \times \{z_4\} \times \{0\})\right) \rightarrow g(Q_1)$$

$$g([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : 0]) \mapsto g([0 : z_2 : z_3 : z_4 : 0]),$$

hace al espacio de geodésicas de luz que contienen a  $\pi(g(e_1))$  una variedad compleja biholomorfa a  $\mathbb{CP}^1$ . Además,  $g$  induce un biholomorfismo  $\bar{g}$  de  $\tilde{C}(\pi(e_1))$  sobre  $\tilde{C}(\pi(g(e_1)))$ .

Recordemos que definimos  $H$  como el hiperplano  $z_3 = 0$ . Las geodésicas de luz contenidas en  $Q_2$  son

$$C(\pi(e_1)) \cap \pi(H) = \{[z_1 : z_2 : 0 : z_4 : 0] \in \mathbb{CP}^3 : z_2 z_4 = 0\}.$$

Definamos la función

$$q : \left( C(\pi(e_1)) \cap \pi(H) \right) - \{ \pi(e_1) \} \rightarrow \{ [0 : 1], [1 : 0] \}$$

$$[z_1 : z_2 : z_4 : 0] \mapsto [z_2 : z_4].$$

Entonces,  $q^{-1}([0 : 1]) \cup \{ \pi(e_1) \} = \pi(\langle e_1, e_4 \rangle)$  y  $q^{-1}([1 : 0]) \cup \{ \pi(e_1) \} = \pi(\langle e_1, e_2 \rangle)$  son las geodésicas de luz que contienen a  $\pi(e_1)$ . Bajo el biholomorfismo (7.3), estas geodésicas de luz son  $\{ [1 : 0] \} \times \mathbb{CP}^1$  y  $\mathbb{CP}^1 \times \{ [0 : 1] \}$ .

Existen dos foliaciones naturales de  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ , las foliaciones horizontal y vertical, cuyas hojas son de la forma  $\mathbb{CP}^1 \times \{z\}$ ,  $z \in \mathbb{CP}^1$  y  $\{w\} \times \mathbb{CP}^1$ ,  $w \in \mathbb{CP}^1$ , respectivamente. Por la definición de la acción (7.6),  $SO(4, \mathbb{C})$ , preserva estas foliaciones y actúa de manera transitiva en  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ , entonces, las hojas de estas foliaciones son todas las geodésicas de luz contenidas en  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Decimos que estas geodésicas de luz son *horizontales* y *verticales*, respectivamente. Dos geodésicas de luz horizontales (o verticales) son llamadas *paralelas*.



# Capítulo 8

## Representaciones uniformemente admisibles

Este Capítulo está dedicado a demostrar algunos resultados técnicos que utilizaremos en los Teoremas 10.6.1 y 1.0.1 para encontrar ejemplos de grupos kleinianos ortogonales y de estructuras geométricas ortogonales, respectivamente, de dimensión tres.

Entre otras cosas, demostraremos el Lema 8.2.1, el cual es una generalización del Lema 2.1 de E. Ghys en [7, p.115]. Existe un resultado más débil que éste, dado por Fanny Kas-sel en [16, p.3]; sin embargo, éste no es suficiente para mostrar el Teorema 10.6.1 de esta tesis.

Sea  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano clásico con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$  y  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un morfismo de grupos. Definimos al grupo

$$\Gamma_u := \left\{ (\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma \right\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (8.1)$$

el cual es isomorfo a  $\Gamma$ .

Por el Capítulo 7, sabemos que  $\Gamma_u$  se encaja de manera sobreyectiva en  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C}) \subset \mathrm{PO}(5, \mathbb{C})$ , por lo que  $\Gamma_u$  actúa en los espacios  $\mathbb{Q}_3$ ,  $\mathbb{Q}_2$ ,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Sea  $X$  cualquiera de estos espacios; decimos que  $u$  es *admisibles en  $X$*  si, a través de este encaje,  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $X$ . Decimos que un abierto  $W \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  es *uniformemente admisible en  $X$*  si

$$\begin{aligned} \Gamma \times (W \times X) &\rightarrow W \times X \\ (\gamma, (u, x)) &\mapsto (u, (\gamma, u(\gamma))x) \end{aligned}$$

es propiamente discontinua. Decimos que  $u$  es *localmente uniformemente admisible en  $X$*  si existe una vecindad  $V$  de  $u$  en  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  con respecto a la topología compacto abierta, que es uniformemente admisible en  $X$ .

Si  $\Gamma$  es un grupo de Schottky de género  $g$  (ver ejemplo 3.2.3), entonces el espacio  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  es una variedad diferenciable biholomorfa a  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^g$  de dimensión  $3g$ . Como la conjugación le resta a este espacio un parámetro de dimensión tres, tenemos que

existe, incluso módulo conjugación, una familia infinita de homomorfismos tan cercanos al homomorfismo constante como queramos.

Si  $\Gamma$  es un grupo fuchsiano (ver ejemplo 3.2.2), entonces, como cualquier matriz conmuta consigo misma, para toda matriz  $A$  y  $C$  en  $SL(2, \mathbb{C})$  se satisface la ecuación  $[A, A][C, C] = I$  que define al grupo fuchsiano (ver [10, p. 567]). Como tenemos dos parámetros libres de dimensión tres y la conjugación le resta un parámetro de dimensión tres, existe, incluso módulo conjugación, una familia infinita de homomorfismos tan cercanos al homomorfismo constante como queramos.

## 8.1. El espacio $\text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$ es uniformemente admisible en $\Omega \times \mathbb{CP}^1$

Recordemos que, en (1.1), definimos la acción:

$$\begin{aligned} (SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})) \times (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) &\rightarrow (\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1). \\ ((g, h), (z, w)) &\mapsto (g(z), h(w)) \end{aligned}$$

**Lema 8.1.1** *El espacio  $\text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$  es uniformemente admisible en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ .*

**Demostración:** La proyección

$$\begin{aligned} p : \left( \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C})) \times (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \right) &\rightarrow \Omega \\ (u, (z, w)) &\mapsto z, \end{aligned}$$

es una función continua y  $\Gamma$ -equivariante con respecto a la acción de  $\Gamma$  en  $\Omega$  por transformaciones de Möbius y a la acción:

$$\begin{aligned} \Gamma \times \left( \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C})) \times (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \right) &\rightarrow \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C})) \times (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \\ (\gamma, (u, (z, w))) &\mapsto (u, (\gamma z, u(\gamma)w)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.2.3, obtenemos que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $p^{-1}(\Omega)$ .  $\square$

## 8.2. El homomorfismo constante es localmente uniformemente admisible en $SL(2, \mathbb{C})$

Recordemos la acción:

$$\begin{aligned} (SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})) \times SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \\ ((g, h), x) &\mapsto gxh^{-1}, \end{aligned}$$

definida en (7.4).

En [7, p.115] E. Ghys mostró que si  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  es un grupo kleiniano cocompacto, entonces el homomorfismo constante es localmente uniformemente admisible en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . Como todo grupo kleiniano clásico cocompacto es un grupo kleiniano convexo-cocompacto, entonces el Lema que demostraremos en esta sección es una generalización del Lema de E. Ghys.

En [16, p.3], F. Kassel mostró que si  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  es un grupo kleiniano convexo-cocompacto, entonces todo morfismo suficientemente cercano al homomorfismo constante es admisible en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ . El siguiente Lema, que transforma este resultado de F. Kassel sobre admisibilidad en un resultado sobre admisibilidad uniforme, nos es necesario ya que lo utilizaremos para demostrar que el morfismo constante es localmente uniformemente admisible en  $\Theta \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  (Teorema 10.6.1).

**Lema 8.2.1** *Si  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un grupo kleiniano sin torsión y convexo-cocompacto, entonces el morfismo constante es localmente uniformemente admisible en  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .*

**Demostración:** Modificaremos la prueba de Ghys [7, p.119], quien muestra el mismo resultado pero para grupos discretos y cocompactos de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Sea  $S$  un conjunto finito de generadores de  $\Gamma$  (cerrado bajo inversos) y, para todo  $\gamma \in \Gamma$ , sea  $l(\gamma)$  la longitud de la curva  $\gamma$  con respecto a la métrica de palabras inducida por  $S$ . Por la Proposición 6.4.1. existen constantes  $B, C > 0$  tales que para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$B^{-1}l(\gamma) - C \leq d(\gamma, Id) \leq Bl(\gamma) + C.$$

Es bien sabido (ver [7]) que existe una constante  $A \geq 1$  tal que la distancia  $d$  satisface que para todo  $x \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ :

$$A^{-1}d(x, I) \leq \ln(1 + \|x - I\|) \leq Ad(x, I).$$

Por lo que, para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$A^{-1}(B^{-1}l(\gamma) - C) \leq \ln(1 + \|\gamma - I\|).$$

Por otro lado, sea  $\eta > 0$  tal que  $0 < \eta < A^{-1}B^{-1}$ . El conjunto

$$V_{e^\eta - 1}(I) := \{\|u(s) - I\| < e^\eta - 1\}$$

es un abierto en  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$  que contiene al morfismo constante. Sea  $u \in V_{e^\eta - 1}(I)$ , entonces, para todo  $s \in S$ ,  $\|u(s)\| < e^\eta$ . Como para todo  $\gamma \in \Gamma$ , existe  $s_1, \dots, s_{l(\gamma)} \in S$  tal que  $\gamma = s_1 \cdots s_{l(\gamma)}$ , tenemos, entonces, que

$$\|u(\gamma)\| = \|u(s_1 \cdots s_{l(\gamma)})\| = \|u(s_1) \cdots u(s_{l(\gamma)})\| \leq \|u(s_1)\| \cdots \|u(s_{l(\gamma)})\| \leq e^{\eta l(\gamma)}.$$

Para todo compacto  $K \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , sea

$$L := \{\gamma \in \Gamma : K \cap \gamma K u(\gamma)^{-1} \neq \emptyset\}.$$

Entonces, para todo  $\gamma \in L$  existen  $x, y \in K$ , tal que  $y = \gamma x u(\gamma)^{-1}$ . Como la función  $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ,  $a \mapsto a^{-1}$  es continua, entonces  $K^{-1} := \{z^{-1} : z \in K\}$  es compacto. Por lo que  $D := \max_{z \in (K \cup K^{-1})} \{\|z\|^2\} < \infty$ . Por lo tanto, para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\|\gamma\| = \|yu(\gamma)x^{-1}\| \leq D\|u(\gamma)\| \leq De^{\eta l(\gamma)}.$$

Por todo lo anterior, tenemos que, para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$A^{-1}(B^{-1}l(\gamma) - C) \leq \ln(2 + De^{\eta l(\gamma)}).$$

Como para toda  $x \geq D$ ,  $2 + x \leq \left(\frac{2+D}{D}\right)x$  y como  $De^{\eta l(\gamma)} \geq D$ , entonces

$$\ln(2 + De^{\eta l(\gamma)}) \leq \ln\left(\frac{2+D}{D}\right) + \ln(D) + \eta l(\gamma).$$

Por lo que

$$(A^{-1}B^{-1} - \eta)l(\gamma) \leq \ln(2 + D) + CA^{-1}.$$

Esto es,

$$l(\gamma) \leq \frac{\ln(2 + D) + CA^{-1}}{A^{-1}B^{-1} - \eta} \quad (8.2)$$

Sea  $C \times K \subset V_{e^{\eta-1}}(I) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un compacto, donde  $C \subset \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C}))$  y  $K \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  son compactos. Como

$$C \times K = \bigcup_{u \in C} (\{u\} \times K),$$

y, como el lado derecho de (8.2) sólo depende del compacto  $K$  y de las métricas en  $\mathcal{A}$  y en  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  y no del morfismo  $u \in C$ , entonces  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $V_{e^{\eta-1}}(I) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Por la Proposición 2.1.8 y, como  $\Gamma$  no tiene torsión y actúa de manera propiamente discontinua, entonces actúa de manera libre en  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

# Capítulo 9

## Clásico implica ortogonal

En este Capítulo recordaremos un resultado de A. Guillot (ver [12, p.225]) que dice que todo grupo kleiniano clásico de  $SL(2, \mathbb{C})$  actúa, a través de un encaje de éste en  $PO(5, \mathbb{C})$ , como grupo kleiniano ortogonal de dimensión tres. En este Capítulo, mostraremos que, si el grupo kleiniano clásico es un grupo de Schottky clásico, entonces, también es un grupo de Schottky ortogonal.

### 9.1. Grupos kleinianos de Guillot

Recordemos que, en el Capítulo 7, definimos la cuádrica no degenerada  $Q_3$  de  $\mathbb{C}P^4$  y el grupo  $PO(5, \mathbb{C})$  de transformaciones proyectivas que la preservan.

Recordemos que, en el Capítulo 1, definimos un grupo kleiniano ortogonal de dimensión tres como un subgrupo discreto de  $PO(5, \mathbb{C})$  que actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante no vacío de la cuádrica  $Q_3$ .

Por el Capítulo 7, sabemos que el grupo  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  es un recubrimiento doble de un subgrupo en  $PO(5, \mathbb{C})$  isomorfo a  $SO(4, \mathbb{C})$ . Consideremos la inclusión de  $SL(2, \mathbb{C})$  a  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  como el primer factor y la proyección subsecuente a  $SO(4, \mathbb{C})$ . Se tiene que si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico de  $SL(2, \mathbb{C})$ , entonces, se inyecta a  $SO(4, \mathbb{C})$  por lo que se puede considerar como subgrupo de  $PO(5, \mathbb{C})$ .

En este Capítulo, recordaremos (ver [12, p. 225]) que si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico de  $SL(2, \mathbb{C})$  y sin torsión, entonces  $\Gamma$  actúa a través de este encaje como grupo kleiniano ortogonal; en este sentido, diremos informalmente que *los grupos kleinianos clásicos son grupos kleinianos ortogonales*. Además, si  $\Gamma$  es convexo-cocompacto, entonces, el espacio cociente correspondiente es compacto.

El fibrado trivial y  $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante  $\eta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  construido en (5.4) determina un fibrado trivial y  $SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante de  $\Theta$  en  $\mathbb{H}^3$ ; llamemos a este último también  $\eta$ .

Consideremos la acción de  $\{I\} \times SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$  en  $Q_3$ , el espacio cociente

$(\{I\} \times \mathrm{SU}(2)) \setminus \mathbb{Q}_3$  y el mapeo cociente

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{Q}_3 &\rightarrow (\{I\} \times \mathrm{SU}(2)) \setminus \mathbb{Q}_3 \\ z &\mapsto [z]. \end{aligned}$$

**Proposición 9.1.1** *La función  $\delta$  es continua, abierta,  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariante y puede ser representada como*

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{Q}_3 &\rightarrow \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1 & (9.1) \\ \delta([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]) &= \begin{cases} \eta \left( \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_4 & z_5 \end{pmatrix} \right), & [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in \Theta, \\ \left[ \mathrm{Im} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_4 & z_5 \end{pmatrix} \right], & [z_1 : z_2 : 0 : z_4 : z_5] \in \mathbb{Q}_2. \end{cases} \end{aligned}$$

**Demostración:** Por la definición de la acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_3$  (inciso 1 de la Proposición 7.1.1),  $\delta$  es  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariante. Por la definición de mapeo cociente,  $\delta$  es continua.

Si  $U \subset \mathbb{Q}_3$  es un abierto, entonces

$$\delta(U) = \bigcup_{g \in (\{I\} \times \mathrm{SU}(2))} gU / \sim,$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia definida por estar en la misma órbita. Entonces, como  $\delta(U)$  es un cociente de un conjunto abierto y saturado, entonces, es abierto; por lo que  $\delta$  es una función abierta.

Por otro lado, por el Capítulo 3, sabemos que  $\mathcal{A}$  actúa libre y transitivamente en  $\mathbb{H}^3$ ; entonces, por el Teorema 2.1.12,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ g &\mapsto g(i), \end{aligned}$$

es un difeomorfismo  $\mathcal{A}$ -equivariante.

Por lo anterior, de la definición de  $\eta : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  y, como  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es difeomorfo a  $\mathcal{A} \times \mathrm{SU}(2)$ , tenemos que  $\rho|_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})} = \eta$ . Por todo esto, por el biholomorfismo  $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ -equivariante definido en (7.3), por la definición (1.1) de la acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$  y, como  $\mathrm{SU}(2)$  actúa en  $\mathbb{CP}^1$  transitivamente, obtenemos (9.1)  $\square$ .

El siguiente Teorema fue probado por A. Guillot en [12, p. 225]

**Teorema 9.1.2** *Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico, sin torsión y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$ , entonces  $U_\Gamma := \Theta \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  es un abierto maximal en el que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua.*

**Demostración:** Por el Capítulo 3, sabemos que  $\mathbb{H}^3 \cup \Omega$  es un abierto de  $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{CP}^1$  en el que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua. Entonces, por las Proposiciones 9.1.1 y 2.2.3, se tiene que  $U_\Gamma := \delta^{-1}(\mathbb{H}^3 \cup \Omega) = \Theta \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  es un abierto en el que  $\Gamma$  actúa

de manera propiamente discontinua. Finalmente, por la Proposición 2.2.4,  $U_\Gamma$  es maximal.  $\square$

Entonces, el espacio de órbitas

$$Z_\Gamma := \Gamma \backslash U_\Gamma,$$

dado por la Proposición anterior, es una variedad compleja que, como mencionamos en el Capítulo 1, llamamos la variedad de Guillot.

Como  $\Theta$  y  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  son  $\Gamma$ -invariantes y  $\Gamma$  actúa en  $\mathbb{Q}_2$  sólo en el primer factor, entonces

$$\Gamma \backslash U_\Gamma \approx \Gamma \backslash \Theta \cup \Gamma \backslash (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \approx \Gamma \backslash \Theta \cup (\Gamma \backslash \Omega \times \mathbb{CP}^1).$$

## 9.2. Cocientes de Guillot

Recordemos que, en (3.1.2), definimos un grupo kleiniano convexo-cocompacto como un grupo kleiniano clásico  $\Gamma$  en el que  $\Gamma \backslash (\mathbb{H}^3 \cup \Omega)$  es compacto, donde  $\Omega$  es el dominio de discontinuidad de  $\Gamma$  en  $\mathbb{CP}^1$ .

Sea  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano clásico, convexo-cocompacto, libre de torsión y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$ . En esta Sección, recordaremos un resultado de A. Guillot en [12, p. 225]. En particular, utilizaremos los resultados del Apéndice 3 para encontrar condiciones equivalentes a que la variedad de Guillot  $Z_\Gamma$  sea compacta.

**Proposición 9.2.1** *Si  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico y sin torsión. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *La variedad  $Z_\Gamma$  es compacta.*
2. *La variedad  $\Gamma \backslash \Omega$  es compacta y el número de puntas de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  es igual al número de componentes conexas de  $\Gamma \backslash \Omega$ .*
3. *El grupo  $\Gamma$  es convexo-cocompacto.*

**Demostración:** Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano clásico sin torsión. Como  $\mathbb{H}^3$  y  $\Theta$  son conexos, se tiene que  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  y  $\Gamma \backslash \Theta$  son conexos. Como  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es denso en  $U_\Gamma$ , entonces,  $\Gamma \backslash \Theta$  es denso en  $Z_\Gamma$  y, por tanto,  $Z_\Gamma$  es conexo.

Si  $Z_\Gamma$  es compacta, como  $\Gamma \backslash (\Omega \times \mathbb{CP}^1) = Z_\Gamma \cap (\Gamma \backslash (\Omega \times \mathbb{CP}^1))$ , entonces,  $\Gamma \backslash \Omega$  es compacta. Entonces, tanto en el punto (1) como en el (2), la subvariedad  $\Gamma \backslash \Omega$  es compacta.

1)  $\iff$  2) Supongamos que la subvariedad  $\Gamma \backslash \Omega$  es compacta, entonces, tiene un número finito de componentes conexas. Por (5.5), existe un fibrado localmente trivial  $\Gamma \backslash \Theta \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ , con fibra compacta y conexa, entonces, por la Proposición D.0.8, los espacios de puntas de  $\Gamma \backslash \Theta$  y de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  son homeomorfos.

Por lo anterior,  $(\Gamma \backslash \Omega) \times \mathbb{CP}^1$  es una subvariedad encajada compacta de  $Z_\Gamma$  y, por la Proposición D.0.7,  $Z_\Gamma$  es compacto si y sólo si el número de puntas de  $\Gamma \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es igual al número de componentes conexas de  $(\Gamma \backslash \Omega) \times \mathbb{CP}^1$ . Por lo que  $Z_\Gamma$  es compacto si y sólo

si el número de puntas de  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$  es igual al número de componentes conexas de  $\Gamma \backslash \Omega$ . Con lo que mostramos la equivalencia entre los incisos (1) y (2).

3  $\Rightarrow$  2) Supongamos que  $\Gamma$  es convexo-cocompacto. Dado que

$$\Gamma \backslash \Omega = \Gamma \backslash (\Omega \cup \mathbb{B}^3) \cap \Gamma \backslash \mathbb{S}^2,$$

entonces,  $\Gamma \backslash \Omega$  es compacto. Por las Proposiciones D.0.4 y D.0.7, el espacio de puntas de  $\Gamma \backslash \mathbb{B}^3$  es finito y su número de elementos es igual al número de componentes conexas de  $\Gamma \backslash \Omega$ .

2  $\Rightarrow$  3) Se sigue directamente de las Proposiciones D.0.4 y D.0.6.  $\square$

Como ejemplos de grupos kleinianos convexos-cocompactos y sin torsión tenemos al grupo generado por una transformación hiperbólica (ejemplo 3.2.1), a los grupos fuchsianos de género  $g$  (ejemplo 3.2.2) y a los grupos de Schottky de género  $g$  (ejemplo 3.2.3), todos ellos estudiados en la Sección 3.2.

### 9.3. Schottky clásico es Schottky ortogonal

Recordemos que, en el Capítulo 1, definimos un grupo de *Schottky ortogonal de género  $g$*  como un subgrupo discreto  $\Gamma$  de  $\text{PO}(5, \mathbb{C})$  tal que existe una colección  $\{C_1, D_1, \dots, C_g, D_g\}$  de conjuntos abiertos de  $\mathbb{Q}_3$ , con cerradura ajena, y un conjunto finito  $\{s_1, \dots, s_g\}$  de generadores de  $\Gamma$ , tales que para todo  $i = 1, \dots, g$ ,

$$s_i(C_i^c) = \overline{D_i}.$$

En la Sección 9.2, vimos que todo grupo kleiniano clásico de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  convexo-cocompacto y sin torsión es un grupo kleiniano ortogonal de dimensión tres; en esta Sección, mostraremos que si, además, el grupo kleiniano clásico es de Schottky, entonces, es un grupo de Schottky ortogonal.

Si  $\Gamma$  es un grupo de Schottky ortogonal como el de la definición, entonces

$$\mathcal{D} := \mathbb{Q}_3 - \bigcup_{i=1}^g (\overline{C_i} \cup \overline{D_i})$$

es un dominio fundamental de cerradura compacta para la acción de  $\Gamma$  en

$$U := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \overline{\mathcal{D}}.$$

Y, por la Proposición 2.2.6,  $\Gamma$  es un grupo kleiniano de ortogonal de dimensión tres; en particular,  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua y cocompacta en  $U$ .

Empezaremos mostrando dos proposiciones técnicas. Recordemos que, en el Capítulo 9, construimos una función  $\delta : \mathbb{Q}_3 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \cup \mathbb{H}^3$ , abierta, continua y  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariante.

**Proposición 9.3.1** *Para todo conjunto  $A \subset \mathbb{Q}_3$  tenemos que  $\delta^{-1}(\overline{A}) \subset \overline{\delta^{-1}(A)}$ :*

**Demostración:** Si  $y \in \delta^{-1}(\overline{A})$  y  $y \notin \overline{\delta^{-1}(A)}$ , entonces  $\delta(y) \in \overline{A}$  y existe un conjunto abierto  $U$  que contiene a  $y$  y que no interseca a  $\delta^{-1}(A)$ . Como  $\delta$  es abierta, tenemos que  $\delta(U)$  es un conjunto abierto que no interseca a  $A$  y que contiene a  $\delta(y)$ . Pero ésta es una contradicción porque  $\delta(y) \in \overline{A}$ .  $\square$

**Proposición 9.3.2** *Se tiene que para toda  $g \in G$  y para todo  $A \subset M$ ,  $g\delta^{-1}(A) = \delta^{-1}(gA)$ .*

**Demostración:** Si  $y \in g\delta^{-1}(A)$ , entonces existe  $x \in \delta^{-1}(A)$  y  $a \in A$  tal que  $y = gx$  y  $\delta(x) = a$ , entonces  $g^{-1}y = x$ ,  $g^{-1}\delta(y) = \delta(g^{-1}y) = \delta(x) = a$ , por lo que  $\delta(y) = ga \in gA$ ,  $y \in \delta^{-1}(gA)$ . Si  $y \in \delta^{-1}(gA)$ , entonces  $\delta(y) \in gA$ , por lo que existe  $a \in A$  tal que  $\delta(y) = ga$ , entonces  $\delta(g^{-1}y) = g^{-1}\delta(y) = g^{-1}ga = a \in A$ , por lo que  $g^{-1}y \in \delta^{-1}(A)$ .  $\square$

**Teorema 9.3.3** *Si  $\Gamma$  es un grupo de Schottky clásico de género  $g$ , entonces  $\Gamma$  es un grupo de Schottky ortogonal de género  $g$ .*

**Observación:** Esta Proposición se puede generalizar y mostrar que es posible jalar grupos de Schottky bajo funciones continuas, abiertas y equivariantes definidas en variedades.

**Demostración:** Consideremos un grupo de Schottky clásico  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  de género  $g$  de  $\mathbb{CP}^1$ , entonces por definición existe un conjunto finito de generadores  $S = \{s_1, \dots, s_g\}$  de  $\Gamma$  y una colección  $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$  de conjuntos abiertos de  $\mathbb{CP}^1$  cuyas cerraduras son ajenas y tales que para todo  $i = 1, \dots, g$ ,

$$s_i(A_i^c) = \overline{B_i}.$$

Por la Proposición 9.3.1, para toda  $i = 1, \dots, g$ ,  $\delta^{-1}(\overline{A_i}) = \overline{\delta^{-1}(A_i)}$ ,  $\delta^{-1}(\overline{B_i}) = \overline{\delta^{-1}(B_i)}$ . Definamos entonces para toda  $i = 1, \dots, g$ ,

$$C_i := \delta^{-1}(A_i), \quad D_i := \delta^{-1}(B_i).$$

Por lo anterior, por las hipótesis y por la Proposición 9.3.2 tenemos que

$$s_i(C_i^c) = s_i\left(\left(\delta^{-1}(A_i)\right)^c\right) = s_i\left(\delta^{-1}(A_i^c)\right) = \delta^{-1}\left(s_i(A_i^c)\right) = \delta^{-1}(\overline{B_i}) = \overline{\delta^{-1}(B_i)} = \overline{D_i}.$$

Entonces por definición,  $\Gamma$  es un grupo de Schottky ortogonal de dimensión tres y de género  $g$ .  $\square$



# Capítulo 10

## Grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres

### 10.1. Introducción

Recordemos que, en el Capítulo 7, definimos la cuádrica no degenerada  $Q_3$  de  $\mathbb{CP}^4$  y al grupo  $PO(5, \mathbb{C})$  de transformaciones proyectivas que la preservan.

Recordemos también que, en el Capítulo 1, definimos un grupo kleiniano ortogonal de dimensión tres como un subgrupo discreto de  $PO(5, \mathbb{C})$  que actúa de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante no vacío de la cuádrica  $Q_3$ .

Los grupos kleinianos ortogonales son generalizaciones de los grupos kleinianos clásicos ya que estos últimos se pueden ver como subgrupos discretos del grupo  $PO(3, \mathbb{C})$  de transformaciones proyectivas que preservan la cuádrica no degenerada de  $\mathbb{CP}^2$  y que actúan de manera propiamente discontinua en algún abierto invariante de ésta.

En este Capítulo, construiremos ejemplos de grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres. Mientras se preparaba esta tesis, de manera independiente y utilizando otras técnicas, F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel y A. Wienhard encontraron ejemplos similares a algunos de los ejemplos que encontramos en esta tesis de grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres (ver Teorema 4.1 y Observación 4.3 de [11, p. 68]).

Los grupos kleinianos ortogonales encontrados por F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel y A. Wienhard generalizan al grupo  $\Gamma_u$ , donde  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico convexo-cocompacto y sin torsión y  $u : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  es un morfismo suficientemente cercano al constante. Mientras que los grupos kleinianos de esta tesis corresponden al grupo  $\Gamma_u$ , donde  $\Gamma$  es un grupo kleiniano clásico geoméricamente finito y sin torsión,  $u : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  es un morfismo suficientemente cercano al constante, tal que  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta$  (por ejemplo, si  $\Gamma$  es convexo-cocompacto).

Unos de los primeros ejemplos de grupos kleinianos ortogonales de dimensión tres fueron construidos por A. Guillot en [12, p. 225] (ver el Capítulo 5). En particular, A. Guillot mostró que todo grupo kleiniano clásico de  $SL(2, \mathbb{C})$  es un grupo kleiniano ortogonal y que, si el grupo kleiniano clásico es convexo-cocompacto, entonces es un grupo kleiniano ortogonal cocompacto.

En el Capítulo 9, definimos los grupos de Schottky ortogonales; vimos que son grupos kleinianos ortogonales y mostramos que los grupos de Schottky clásicos de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  son grupos de Schottky ortogonales de dimensión tres.

Recordemos que, en el Capítulo 7, mostramos que  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C}) \subset \mathrm{PO}(5, \mathbb{C})$  es isomorfo a

$$\{(I, I), (-I, -I)\} \setminus (\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})).$$

En particular, éste actúa en  $\mathbb{Q}_3$ , extendiendo la acción (7.4) de la siguiente manera:

$$\{(I, I), (-I, -I)\} \setminus (\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \times \mathbb{Q}_3 \rightarrow \mathbb{Q}_3$$

$$\left( \left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{array} \right), [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \right) \\ \mapsto [a\hat{d}z_1 + b\hat{d}z_4 - a\hat{c}z_2 - b\hat{c}z_5 : -a\hat{b}z_1 - b\hat{b}z_4 + a\hat{a}z_2 + b\hat{a}z_5 : z_3 \\ : c\hat{d}z_1 + d\hat{d}z_4 - c\hat{c}z_2 - d\hat{c}z_5 : -c\hat{b}z_1 - d\hat{b}z_4 + c\hat{a}z_2 + d\hat{a}z_5],$$

donde

$$\left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{array} \right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

En el mismo Capítulo, definimos una acción de este grupo en  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$  y mostramos que existe un biholomorfismo  $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ -equivariante entre  $\mathbb{Q}_2$  y  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ .

Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano clásico de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  convexo-cocompacto y sin torsión y  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un morfismo de grupos suficientemente cercano al morfismo constante. Recordemos la definición

$$\Gamma_u := \{(\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

dada en (8.1) y que, en (7.1.1), mostramos que  $\Gamma_u \subset \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$ . En este Capítulo, veremos que  $\Gamma_u$  es un grupo kleiniano ortogonal de dimensión tres; en particular, actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  (independiente del morfismo  $u$ ), donde  $\Theta$  fue definido en el inciso (2) de la Proposición 7.0.1 como  $\mathbb{Q}_3 - \mathbb{Q}_2$ .

Para mostrar este resultado, utilizaremos los resultados del Capítulo 6 sobre representaciones uniformemente admisibles, adaptaremos algunas definiciones de Ch. Frances en [6] y generalizaremos algunos de sus resultados. En particular, estudiaremos los puntos de acumulación de órbitas de los compactos de  $\mathbb{Q}_3$  de todo subgrupo  $G \subset \mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$  discreto. Surgirá de manera natural un cerrado invariante formado por la cerradura de algunos puntos de acumulación de órbitas de compactos. El complemento de este cerrado es un abierto invariante que no contiene puntos de acumulación de órbitas de compactos y, por tanto, en el que el grupo  $G$  actúa de manera propiamente discontinua.

## 10.2. Convergencia de las sucesiones de funciones de $GL(n, \mathbb{C})$

En esta Sección, estudiaremos diferentes tipos de convergencia de sucesiones de  $GL(m, \mathbb{C})$ , donde  $m \in \mathbb{N}$  y algunas relaciones entre éstas. Este estudio nos es importante ya que, como mencionamos en la Sección 10.1, mostraremos una fórmula que relaciona los puntos de acumulación de órbitas de compactos de sucesiones Whitney equivalentes y la definición de las sucesiones Whitney equivalentes refiere a la convergencia de sucesiones.

Para toda  $m \in \mathbb{N}$ , denotemos, por  $GL(m, \mathbb{C})$  al grupo de matrices invertibles de  $m \times m$ . Por simplicidad, probaremos los resultados de esta sección para  $n = 5$ ; sin embargo, las pruebas son iguales para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Recordemos que  $\pi : \mathbb{C}^m - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  es la proyección al proyectivo.

El grupo de matrices de  $m \times m$  con coeficientes complejos es homeomorfo a  $\mathbb{C}^{m^2}$  y contiene a  $GL(m, \mathbb{C})$  como abierto. Considerémoslo con la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^{m^2}$ .

Recordemos que definimos en (7.2) la cuádrlica  $C_4$  de  $\mathbb{C}^5$  y que  $\pi(C_4) = Q_3$ .

**Proposición 10.2.1** *Sea  $g$  un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $GL(m, \mathbb{C})$ ; considerémoslos como automorfismos de  $\mathbb{C}^m$ . Son equivalentes:*

1. *La sucesión  $(g_n)$  converge a  $g$  con respecto a la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^{m^2}$ .*
2. *La sucesión  $(g_n)$  converge a  $g$  uniformemente en compactos.*
3. *La sucesión  $(g_n)$  converge a  $g$  con respecto a la topología compacto abierta.*
4. *La sucesión  $(g_n)$  converge a  $g$  puntualmente.*

*Si  $g$  es un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $O(4, \mathbb{C})$  y los consideramos como automorfismos de la cuádrlica  $C_4$ , entonces estas equivalencias también son válidas.*

**Demostración:** 1)  $\Rightarrow$  2) Supongamos que  $g$  es un punto y  $(g_n)$  es una sucesión de  $GL(5, \mathbb{C})$  y que  $g_n \rightarrow g$  con respecto a la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^{25}$ . Para toda  $i = 1, \dots, 5$  se tiene que

$$A_i := |a_{i1}^n z_1 + \dots + a_{i5}^n z_5 - (a_{i1} z_1 + \dots + a_{i5} z_5)| \leq |a_{i1}^n - a_{i1}| |z_1| + \dots + |a_{i5}^n - a_{i5}| |z_5|. \quad (10.1)$$

Sea  $K$  un compacto de  $\mathbb{C}^5$  y  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $M > 0$  y  $N > 0$ , tal que, para toda  $z = (z_1, \dots, z_5) \in K$ ,  $|z_i| < M$  y para todo  $n \geq N$ , para todo  $i, j = 1, \dots, 5$ ,  $|a_{ij}^n - a_{ij}| < \frac{\epsilon}{5^2 M}$ .

Por lo anterior, y por (10.1), para toda  $n \geq N$  y para toda  $z \in K$ ,

$$|g_n z - g z| = \sqrt{A_1^2 + \dots + A_5^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{5} + \dots + \frac{\epsilon^2}{5}} = \epsilon.$$

Entonces,  $g_n \rightarrow g$  uniformemente en compactos como sucesión de funciones de  $\mathbb{C}^5$  en  $\mathbb{C}^5$ . Si  $g$  es un punto y  $(g_n)$  es una sucesión de  $O(4, \mathbb{C})$ , utilizando los mismos argumentos, se deduce la misma conclusión si se reemplaza  $\mathbb{C}^5$  por la cuádrlica  $C_4$ .

2)  $\iff$  3) Es bien sabido y se sigue directamente de las definiciones que, para espacios métricos localmente compactos, la convergencia uniforme en compactos de sucesiones es equivalente a la convergencia local uniforme (ver [30, p. 96]).

2)  $\Rightarrow$  4) Es bien sabido y se sigue directamente de las definiciones que, para espacios métricos, la convergencia local uniforme de sucesiones implica la convergencia puntual.

4)  $\Rightarrow$  1) Supongamos que  $g$  es un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $\text{GL}(5, \mathbb{C})$  y que  $g_n \rightarrow g$  puntualmente como función de  $\mathbb{C}^5$ , entonces si  $z = (1, 0, 0, 0, 0)$ , se tiene que  $g_n z \rightarrow g z$ ; esto es  $(a_{11}^n, \dots, a_{51}^n) \rightarrow (a_{11}, \dots, a_{51})$ . Tomando

$$z = (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1),$$

se concluye que  $g_n \rightarrow g$  con respecto a la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^5$ .

Supongamos que  $g$  es un punto,  $(g_n)$  es una sucesión de  $\text{O}(4, \mathbb{C})$  y que  $g_n \rightarrow g$  puntualmente como función de la cuádriga  $C_4$ . Utilizando los mismos argumentos que acabamos de ver, podemos concluir que, para todo  $i, j = 1, \dots, 5, j \neq 3, a_{ij}^n \rightarrow a_{ij}$ .

Por lo que

$$\begin{pmatrix} -a_{12}^n - a_{14}^n \\ -a_{22}^n - a_{24}^n \\ -a_{32}^n - a_{34}^n \\ -a_{42}^n - a_{44}^n \\ -a_{52}^n - a_{54}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -a_{12} - a_{14} \\ -a_{22} - a_{24} \\ -a_{32} - a_{34} \\ -a_{42} - a_{44} \\ -a_{52} - a_{54} \end{pmatrix}.$$

Si  $z = (0, 1, 1, 1, 0) \in C_4$ , como  $g_n z \rightarrow g z$ , se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_{12}^n + a_{13}^n + a_{14}^n \\ a_{22}^n + a_{23}^n + a_{24}^n \\ a_{32}^n + a_{33}^n + a_{34}^n \\ a_{42}^n + a_{43}^n + a_{44}^n \\ a_{52}^n + a_{53}^n + a_{54}^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_{22} + a_{23} + a_{24} \\ a_{32} + a_{33} + a_{34} \\ a_{42} + a_{43} + a_{44} \\ a_{52} + a_{53} + a_{54} \end{pmatrix}.$$

Entonces, sumando ambas sucesiones obtenemos que  $(a_{13}^n, \dots, a_{53}^n) \rightarrow (a_{13}, \dots, a_{53})$  y, por tanto,  $g_n \rightarrow g$  con respecto a la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^{25}$ .  $\square$

Sea  $d$  es una métrica de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  y  $g$  un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ . Recordemos que decimos que  $(g_n)$  converge localmente uniformemente a  $g$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  si para todo  $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ , existe una vecindad  $U_z$  de  $z$  tal que  $(g_n)$  converge a  $g$  uniformemente en  $U_z$ , es decir, si para todo  $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  existe una vecindad  $U_z$  de  $z$  y  $N \in \mathbb{N}$ , tal que, para todo  $n \geq N$  y, para todo  $x \in U_z$ ,  $d(g_n(x), g(x)) < \epsilon$ .

**Proposición 10.2.2** *Sea  $g$  un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ . Si  $g_n \rightarrow g$  con respecto a la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^{m^2}$  y, si consideramos a  $g$  y a  $g_n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , como automorfismos de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ , entonces:*

1. La sucesión  $(g_n)$  converge a  $g$  localmente uniformemente en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ .

2. La sucesión  $(g_n)$  converge a  $g$  con respecto a la topología compacto abierta.

Si  $g$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n \in O(4, \mathbb{C})$ , el enunciado anterior es cierto también si los consideramos como automorfismos de la cuádrica  $Q_3$ .

**Demostración:** Empezaremos mostrando el inciso (1). Sea  $g$  un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $GL(5, \mathbb{C})$  y  $g_n \rightarrow g$  con respecto a la topología de subespacio de  $\mathbb{C}^{25}$ . Sea

$$g_n(x) := (g_1^n(x), \dots, g_5^n(x)), \quad g(x) := (g_1(x), \dots, g_5(x)),$$

entonces, por la Proposición 10.2.1,  $g_n \rightarrow g$  localmente uniformemente en  $\mathbb{C}^5$ .

Para todo  $z \in \mathbb{C}^5 \setminus \{0\}$ ,  $\pi(z) \in \mathbb{CP}^4$ , como  $\pi(g(z)) \in \mathbb{CP}^4$ ,  $g(z) \neq 0$ . Supongamos que  $g_1(z) \neq 0$ , Sea  $d_1$  la distancia en  $A_1$  inducida por la carta afín usual

$$\begin{aligned} \phi : A_1 &\rightarrow \mathbb{C}^4 \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] &\mapsto \left( \frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \frac{z_4}{z_1}, \frac{z_5}{z_1} \right). \end{aligned}$$

Es suficiente mostrar que, para todo  $z \in \mathbb{CP}^{m-1}$ , existe una vecindad  $U_z$  de  $z$  en  $(A_1, d_1)$  y  $N \in \mathbb{N}$ , tal que, para todo  $n \geq N$  y para todo  $x \in U_z$ ,  $d_1(g_n(x), g(x)) < \epsilon$ .

Como  $g_1(z) \neq 0$ , entonces, existen  $R_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , tal que

$$g(z) \in A := \{|z_1| > R_1\} \times \{|z_2| < R_2\} \times \dots \times \{|z_5| < R_5\}.$$

Por continuidad de  $g$  y como  $g_n \rightarrow g$  localmente uniformemente en  $\mathbb{C}^5$ , tenemos que existe un abierto  $U_1 \subset \mathbb{C}^5$  que contiene a  $z$  y  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N_1$  y para toda  $x \in U_1$ ,  $g(x), g_n(x) \in A$ . Entonces, para toda  $x \in U_1$ ,  $R_1 \leq |g_1(x)|$ ,  $R_1 \leq |g_1^n(x)|$  y para toda  $i = 2, \dots, 5$ ,  $|g_i(x)| < Q := \max\{R_2, R_3, R_4, R_5\}$ .

Sea

$$\epsilon := \min \left\{ \frac{R_1 \delta}{4}, \frac{\delta R_1^2}{4Q} \right\}.$$

Como  $g_n \rightarrow g$  localmente uniformemente, existe un abierto  $U_2 \subset \mathbb{C}^5$  que contiene a  $z$  y  $N_2 \in \mathbb{N}$ , tal que, para toda  $n \geq N_2$ , para toda  $x \in U_2$  y para toda  $i = 1, \dots, 5$ ,

$$|g_i^n(x) - g_i(x)| \leq \sqrt{|g_1^n(x) - g_1(x)|^2 + \dots + |g_5^n(x) - g_5(x)|^2} = |g_n(x) - g(x)| < \epsilon. \quad (10.2)$$

Entonces, si  $x \in U_1 \cap U_2$  y  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ , para todo  $i = 2, \dots, 5$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g_i^n(x)}{g_1^n(x)} - \frac{g_i(x)}{g_1(x)} \right| &\leq \frac{|g_i^n(x) - g_i(x)|}{|g_1^n(x)|} + \frac{|g_1^n(x) - g_1(x)| |g_i(x)|}{|g_1^n(x) g_1(x)|} \\ &\leq \frac{|g_i^n(x) - g_i(x)|}{R_1} + \frac{Q |g_1^n(x) - g_1(x)|}{R_1^2} < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Como

$$d_1([g_1^n(x) : \dots : g_5^n(x)], [g_1(x) : \dots : g_5(x)]) = \sqrt{\sum_{i=2}^5 \left| \frac{g_i^n(x)}{g_1^n(x)} - \frac{g_i(x)}{g_1(x)} \right|^2} < \delta,$$

entonces,  $g_n \rightarrow g$  localmente uniformemente en  $\pi(U_1)$ . Como esto vale para cualquier  $z \in \mathbb{C}^5 - \{0\}$ , concluimos que  $g_n \rightarrow g$  localmente uniformemente en  $\mathbb{CP}^4$ .

Utilizando los mismos argumentos, si suponemos que  $g$  es un punto y  $(g_n)$  una sucesión de  $O(4, \mathbb{C})$  y que  $g_n \rightarrow g$  en la topología de  $O(4, \mathbb{C})$  de subespacio de  $\mathbb{C}^{25}$ , concluimos que  $g_n \rightarrow g$  localmente uniforme en la cuádrica  $C_4$ .

Finalmente, mostraremos el inciso (2). Por el inciso anterior y por la Proposición C.0.1 del Apéndice, que afirma que para sucesiones de homeomorfismos en espacios métricos la topología compacto abierta y la convergencia local uniforme coinciden, obtenemos directamente este inciso.  $\square$

## 10.3. Sucesiones divergentes

### 10.3.1. Introducción

Decimos que una sucesión  $(g_n)$  de  $GL(m, \mathbb{C})$  es *divergente* si, eventualmente, se escapa de cualquier compacto, es decir, para todo compacto  $K \subset GL(m, \mathbb{C})$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,  $g_n \notin K$ .

Decimos que dos sucesiones divergentes  $(g_n)$  y  $(\hat{g}_n)$  de  $GL(m, \mathbb{C})$  son *Whitney equivalentes* si existe un compacto  $K$  de  $GL(m, \mathbb{C})$  y dos sucesiones  $(u_n)$  y  $(\hat{u}_n)$  de  $K$ , convergentes en la topología usual de matrices, tales que, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\hat{g}_n = u_n g_n \hat{u}_n$ .

Recordemos que, en el Capítulo 2, definimos un punto de acumulación de la órbita de un compacto como un punto tal que toda vecindad que lo contiene interseca infinitos traslados del compacto y mostramos que una acción es propiamente discontinua si y sólo si no contiene ninguno de estos puntos.

Empezaremos esta Sección mostrando la siguiente Proposición:

**Proposición 10.3.1 (Una descomposición  $KAK$  de  $SO(4, \mathbb{C})$ )** *Sea  $A^+$  el grupo de matrices de la forma*

$$\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Entonces, existe un compacto  $K \subset SO(4, \mathbb{C})$  tal que

$$SO(4, \mathbb{C}) = KA^+K. \quad (10.4)$$

En las Proposiciones 3, 4 y 5 de [6], Ch. Frances afirma de forma implícita, en que las dinámicas de los puntos de acumulación de órbitas de compactos de sucesiones Whitney equivalentes son iguales; sin embargo, no aclara ni justifica esta afirmación. En esta Sección

mostraremos la siguiente fórmula que, no sólo aclara la afirmación de Frances, sino además proporciona una herramienta que está mostrando ser muy poderosa en el estudio de grupos kleinianos en dimensiones altas.

**Proposición 10.3.2** *Sea  $m \in \mathbb{N}$ , supongamos que  $u, \tilde{u} \in \text{GL}(m+1, \mathbb{C})$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n, u_n, \tilde{u}_n$  también pertenecen a  $\text{GL}(m+1, \mathbb{C})$ ,  $u_n \rightarrow u$ ,  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ ,  $(g_n)$  es una sucesión divergente de  $\text{GL}(m+1, \mathbb{C})$  y  $U$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ , entonces*

$$D_{(\tilde{u}_n g_n u_n)}(U) = \tilde{u} \left( D_{(g_n)}(u(U)) \right).$$

Esta fórmula es interesante ya que, con ella y con la descomposición KAK de  $\text{SL}(m, \mathbb{C})$ , de la Proposición 10.3.1, calcularemos en esta Sección todos los puntos de acumulación de órbitas de compactos de  $\mathbb{Q}_3$  de sucesiones divergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Esto nos permitirá encontrar, en la Sección 10.4, para cada grupo discreto de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ , un abierto invariante de  $\mathbb{Q}_3$  en el que la acción es propiamente discontinua.

En esta Sección, definiremos y clasificaremos un tipo especial de sucesiones divergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  y daremos una clasificación. Veremos también, que esta clasificación es interesante ya que determina la dinámica de las órbitas de los compactos de la cuádrica  $\mathbb{Q}_3$ .

Todo lo anterior nos permitirá calcular los puntos de acumulación de las órbitas de compactos de sucesiones divergentes a partir de los puntos de acumulación de órbitas de compactos de sucesiones diagonales.

**Demostración de la Proposición 10.3.1:** Sea  $B^+ \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  el grupo de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix},$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por el Corolario 1.1.2 de [14, p. 16],

$$\text{SL}(2, \mathbb{C}) = \text{SU}(2) B^+ \text{SU}(2).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) = \left( \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \right) \left( B^+ \times B^+ \right) \left( \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \right).$$

Finalmente, recordando el epimorfismo  $\psi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}(2, \mathbb{C})$  construido en el inciso (2) de la Proposición 7.1.1, tenemos que

$$K := \psi \left( \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \right),$$

satisface (10.4).  $\square$

A continuación, definiremos una subclase de sucesiones divergentes que es suficiente considerar para calcular el conjunto de puntos de acumulación de órbitas de compactos de

grupos discretos de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Daremos una clasificación de este tipo de sucesiones que más adelante (ver Proposiciones 10.3.3, 10.3.4 y 10.3.5) mostrará ser de vital importancia porque determinará las distintas dinámicas de las órbitas de los compactos.

Consideremos las compactificaciones  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  y  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{R}$ . En este sentido, la segunda de éstas (la compactificación por un punto), se obtiene a partir de la primera, identificando a  $+\infty$  con  $-\infty$ , denotamos como  $\infty$  el resultado de esta identificación.

Sea  $(g_n)$  una sucesión de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ , sea  $g_n = u_n \tilde{a}_n \tilde{u}_n$ , con  $u_n, \tilde{u}_n \in K, \tilde{a}_n \in A^+$  la descomposición  $KAK$  construida en la Proposición 10.3.1.

Entonces, existe  $i \in \text{O}(4, \mathbb{C})$  tal que

$$a_n := i^{-1} \tilde{a}_n i = \begin{pmatrix} e^{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

donde si  $(\lambda_n)$  o  $(\mu_n)$  convergen a  $\infty$ , entonces convergen a  $+\infty$ . Además  $i$  es la matriz identidad, o bien es un elemento de  $\text{O}(4, \mathbb{C}) - \text{SO}(4, \mathbb{C})$  que, restringido a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, se representa como

$$(x, y) \mapsto (g(y), f(x)), \quad (10.6)$$

donde  $f, g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . En particular, en este último caso, intercambia la dirección de las geodésicas de luz contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ .

Daremos un ejemplo para ilustrar a la función  $i$  del párrafo anterior. Supongamos que

$$\tilde{a}_n = \begin{pmatrix} e^{\tilde{\lambda}_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\mu}_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\mu}_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\lambda}_n} \end{pmatrix},$$

donde  $\tilde{\lambda}_n \rightarrow \infty$  y  $\tilde{\mu}_n \rightarrow -\infty$ ; entonces,  $-\tilde{\mu}_n \rightarrow \infty$ . Como

$$\begin{pmatrix} e^{\tilde{\lambda}_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\mu}_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\mu}_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\lambda}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tilde{\lambda}_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\mu}_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\tilde{\mu}_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\tilde{\lambda}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces, en este ejemplo, la transformación  $i$  es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representa a la función

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_3 &\rightarrow \mathbb{Q}_3 \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] &\rightarrow [z_1 : z_4 : z_3 : z_2 : z_5]. \end{aligned}$$

Esta función, restringida a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, se ve como

$$(z_2, z_4) \rightarrow (z_4, z_2).$$

Decimos que  $(g_n)$  *tiende de manera simple al infinito* si  $(g_n)$  es divergente y

1. Las sucesiones  $(u_n)$  y  $(\tilde{u}_n)$  convergen, y
2. Las sucesiones  $(\lambda_n)$ ,  $(\mu_n)$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  convergen en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

De las definiciones, es fácil convencerse de que, para calcular el conjunto de puntos de acumulación de órbitas de compactos, es suficiente restringirse a las sucesiones que divergen de manera simple; por lo tanto, sólo éstas nos interesarán.

Sea  $(g_n)$  una sucesión de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  que tiende de manera simple al infinito. Siguiendo a Ch. Frances en [6], decimos que es de *distorsión balanceada* si  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  convergen a  $+\infty$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  converge a un punto de  $\mathbb{R}$ . Decimos que es de *distorsión acotada* si una de las sucesiones  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  converge a  $+\infty$  y la otra, a un punto de  $\mathbb{R}$ . Decimos que es de *distorsión mixta* si  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  convergen a  $+\infty$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  converge a  $\infty$ .

Claramente, toda sucesión de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  que diverja de manera simple al infinito es de alguno de los tres tipos que acabamos de definir.

### 10.3.2. Fórmula para sucesiones Whitney equivalentes

**Demostración de la Proposición 10.3.2:** Por la Proposición 10.2.2, como  $u_n \rightarrow u$  y  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  convergen en la topología usual de matrices, entonces, convergen localmente uniformemente en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^4$ .

Probaremos primero que

$$D_{(g_n u_n)}(u^{-1}(U)) = D_{(g_n)}(U). \quad (10.7)$$

Supongamos que  $z \in D_{(g_n u_n)}(u^{-1}(U))$ , entonces, podemos suponer que existe una sucesión convergente  $(y_n)$  de  $u^{-1}(U)$  tal que  $(g_n u_n(y_n))$  es convergente y  $z = \lim g_n u_n(y_n)$ . Sea

$$y := \lim y_n \in u^{-1}(U).$$

Para probar que  $z \in D_{(g_n)}(U)$ , es suficiente mostrar que  $u_n(y_n) \rightarrow u(y)$ .  
 Sea  $\epsilon > 0$ , como  $u_n \rightarrow u$  localmente uniformemente,  $y_n \rightarrow y$  y  $u$  es continua, existe  $M \in \mathbb{N}$ , tal que, para toda  $n \geq M$ , se tiene que

$$d(u_n(y_n), u(y)) \leq d(u_n(y_n), u(y_n)) + d(u(y_n), u(y)) < \epsilon.$$

Entonces,  $u_n(y_n) \rightarrow u(y)$ .

Supongamos ahora que  $w \in D_{(g_n)}(U)$ , entonces, podemos suponer que existe una sucesión convergente  $(z_n)$  de  $U$  tal que  $(g_n z_n)$  es convergente y  $w = \lim g_n z_n$ . Sea  $z := \lim z_n \in U$ ; queremos probar que  $w \in D_{(g_n u_n)}(u^{-1}(U))$ , para ello, mostraremos que

$$u_n^{-1}(z_n) \rightarrow u^{-1}(z).$$

Sea  $\epsilon > 0$ , como  $u_n^{-1} \rightarrow u^{-1}$  localmente uniformemente,  $z_n \rightarrow z$  y  $u^{-1}$  es continua, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N$ ,

$$d(u_n^{-1}(z_n), u^{-1}(z)) \leq d(u_n^{-1}(z_n), u^{-1}(z_n)) + d(u^{-1}(z_n), u^{-1}(z)) < \epsilon.$$

Entonces  $u_n^{-1}(z_n) \rightarrow u^{-1}(z)$ . Esto prueba (10.7).

Mostraremos ahora

$$D_{(\tilde{u}_n g_n)}(U) = \tilde{u}(D_{(g_n)}(U)). \quad (10.8)$$

Consideremos  $z \in D_{(\tilde{u}_n g_n)}(U)$ , entonces, podemos suponer que existe una sucesión convergente  $(x_n)$  de  $U$  tal que  $(\tilde{u}_n g_n(x_n))$  es convergente y  $z = \lim \tilde{u}_n g_n(x_n)$ . Para probar que  $z \in \tilde{u}(D_{(g_n)}(U))$ , es suficiente mostrar que existe  $y \in D_{(g_n)}(U)$  tal que  $z = \tilde{u}(y)$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $z_n := \tilde{u}_n g_n(x_n)$ . Como  $\tilde{u}_n^{-1} \rightarrow \tilde{u}^{-1}$  localmente uniformemente en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ ,  $\tilde{u}^{-1}$  es continua y  $z_n \rightarrow z$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $n \geq N$ ,

$$d(\tilde{u}_n^{-1}(z_n), \tilde{u}^{-1}(z)) \leq d(\tilde{u}_n^{-1}(z_n), \tilde{u}^{-1}(z_n)) + d(\tilde{u}^{-1}(z_n), \tilde{u}^{-1}(z)) < \epsilon.$$

Por lo que si  $y := \tilde{u}^{-1}(z)$ , entonces  $g_n(x_n) \rightarrow y$ .

Supongamos ahora que  $z \in \tilde{u}(D_{(g_n)}(U))$ , entonces, podemos suponer que existe una sucesión convergente  $(x_n)$  de  $U$ , tal que  $(g_n(x_n))$  es convergente y si  $y := \lim g_n(x_n)$ , entonces  $z = \tilde{u}(y)$ ; si no, tomemos una subsucesión. Para probar que  $z \in D_{(\tilde{u}_n g_n)}(U)$ , es suficiente mostrar que

$$z = \lim \tilde{u}_n g_n(x_n).$$

Sea  $\epsilon > 0$ , como  $\tilde{u}$  es continua,  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  localmente uniformemente y  $g_n(x_n) \rightarrow y$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $n \geq N$

$$d(z, \tilde{u}_n g_n(x_n)) \leq d(z, \tilde{u}(g_n x_n)) + d(\tilde{u}(g_n x_n), \tilde{u}_n(g_n x_n)) < \epsilon.$$

Entonces  $\tilde{u}_n g_n(x_n) \rightarrow z$ . Esto muestra (10.8).

Finalmente, (10.7) y (10.8) muestran la Proposición.  $\square$

### 10.3.3. Sucesiones de distorsión balanceada

Recordemos que, en la Introducción de esta Sección, definimos una sucesión de distorsión balanceada de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  como una sucesión divergente  $(g_n)$  de la forma  $g_n = u_n i^{-1} a_n i \tilde{u}_n$ , donde  $u_n, \tilde{u}_n$  son sucesiones convergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ ,  $i$  es la matriz identidad, o bien, es un elemento de  $\text{O}(4, \mathbb{C}) - \text{SO}(4, \mathbb{C})$  que, restringido a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, se representa como (10.6) y  $(a_n)$  es una sucesión de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  de la forma (10.5), donde las sucesiones  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  convergen a  $+\infty$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  es una sucesión que converge a un punto de  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 10.3.3 (Sucesiones de distorsión balanceada)** *Si  $(g_n)$  es una sucesión de distorsión balanceada de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ , entonces existen dos geodésicas de luz  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  paralelas contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ , tales que*

1. *Para toda  $y \in \mathbb{Q}_3 - \Delta^-$ , existe un punto  $p \in \Delta^+$  tal que  $D_{(g_n)}(y) = \{p\}$ . Para toda  $p \in \Delta^+$ , existe un punto  $y \in \mathbb{Q}_3 - \Delta^-$  tal que  $D_{(g_n)}(y) = \{p\}$ .*
2. *Para toda  $q \in \Delta^+$ , existe una geodésica de luz  $l_q \subset \mathbb{Q}_2$  que es transversal a  $\Delta^-$ , tal que*

$$l_q - \Delta^- \subset D_{(g_n)}(q).$$

*Si  $p \neq q$ , entonces,  $l_q \cap l_p = \emptyset$ . La colección  $\{l_q\}_{q \in \Delta^+}$  es una foliación de  $\mathbb{Q}_2 - \Delta^-$ .*

3. *Si la sucesión  $(g_n)$  es de la forma (10.5), entonces, la función que asigna a cada  $q \in \Delta^+$  su  $l_q$  correspondiente, construida en el inciso (2), es una transformación de Möbius.*

**Demostración:** Consideremos primero sucesiones de la forma (10.5), es decir, sea

$$a_n := \begin{pmatrix} e^{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n} \end{pmatrix},$$

donde  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  son sucesiones de  $\bar{\mathbb{R}}$  que convergen a  $+\infty$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  converge a algún punto de  $\mathbb{R}$ . Sean  $\nabla^+$  y  $\nabla^-$  las geodésicas de luz  $\pi(\langle e_1, e_2 \rangle)$  y  $\pi(\langle e_4, e_5 \rangle)$ , respectivamente.

Sea  $\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \mu_n)$ . La submersión

$$\bar{s} : C^4 - \langle e_4, e_5 \rangle \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \bar{s}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := (x_1, e^{-\delta} x_2),$$

está bien definida en el cociente  $s : \mathbb{Q}_3 - \nabla^- \rightarrow \nabla^+$ ,  $s([x]) := [\bar{s}(x)]$ , donde  $C_4$  fue definido en (7.2).

Consideremos  $y = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \notin \nabla^-$ ; entonces,  $z_1 \neq 0$  o  $z_2 \neq 0$ . Supongamos que  $z_1 \neq 0$  (los otros casos son similares), entonces, podemos suponer que  $z_1 = 1$ . Sea  $(y_n)$  cualquier sucesión en  $\mathbb{Q}_3$  que converja a  $y$ , entonces, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$y_n = [1 : y_n^{(2)} : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} : y_n^{(5)}],$$

donde para todo  $j = 2, \dots, 5$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(j)} = z_j$ . Entonces,

$$\begin{aligned} a_n y_n &= [e^{\lambda_n} : e^{\mu_n} y_n^{(2)} : y_n^{(3)} : e^{-\mu_n} y_n^{(4)} : e^{-\lambda_n} y_n^{(5)}] \\ &= [1 : e^{\mu_n - \lambda_n} y_n^{(2)} : e^{-\lambda_n} y_n^{(3)} : e^{-\mu_n - \lambda_n} y_n^{(4)} : e^{-2\lambda_n} y_n^{(5)}] \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n y_n = [1 : e^{-\delta} z_2 : 0 : 0 : 0].$$

Por lo que, si  $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \notin \nabla^-$ , entonces

$$D_{(a_n)}([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]) = [z_1 : e^{-\delta} z_2 : 0 : 0 : 0] = s([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]). \quad (10.9)$$

Además, cualquier punto  $p \in \nabla^+$  es igual a  $[z_1 : e^{-\delta} z_2 : 0 : 0 : 0]$  para algún  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Esto muestra el inciso (1) de la Proposición para sucesiones de la forma (10.5).

Recordemos el biholomorfismo  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ -equivariante (7.3). Sea

$$z_2 \in \mathbb{C}, \quad p = [1 : z_2 : 0 : 0 : 0] = ([1 : 0], [z_2 : 1]) \in \nabla^+.$$

Si

$$l_p := \left\{ [1 : z_2 e^\delta : 0 : y_4 : z_2 y_4 e^\delta] : y_4 \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ ([1 : y_4], [-z_2 e^\delta : 1]) : y_4 \in \mathbb{C} \right\},$$

entonces, por (10.9), tenemos que  $l_p \subset D_{(g_n)}(p)$ . Esto prueba el inciso (2) para todas las sucesiones de la forma (10.5).

Además, por lo anterior, es claro que existen parametrizaciones de  $\nabla^+$  y del espacio de geodésicas de luz horizontales, tales que la función que asigna a cada  $q \in \Delta^+$  su  $l_q$  correspondiente es de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}^1 &\rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ z &\rightarrow -z e^\delta. \end{aligned}$$

Esto prueba el inciso (3) para todas las sucesiones de la forma (10.5).

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $g_n = \tilde{u}_n i a_n i^{-1} \bar{u}_n$  la descomposición  $KAK$  de  $g_n$ , construida en la Proposición 10.3.1, donde  $(a_n)$  es de la forma (10.5), con  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  sucesiones que convergen a  $+\infty$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  una sucesión que converge a un punto en  $\mathbb{R}$ ,  $(\tilde{u}_n)$  y  $(\bar{u}_n)$  son sucesiones convergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  e  $i$  es la matriz identidad, o bien, es un elemento de  $\text{O}(4, \mathbb{C}) - \text{SO}(4, \mathbb{C})$  de la forma (10.6). Sean  $\tilde{u} := \lim \tilde{u}_n$ ,  $\bar{u} := \lim \bar{u}_n$ ,  $\Delta^+ := \tilde{u}(i(\nabla^+))$  y  $\Delta^- := i(\bar{u}^{-1}(\nabla^-))$ . Como  $\mathbb{Q}_2$  es invariante bajo  $\text{O}(4, \mathbb{C})$ , entonces  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son geodésicas de luz contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ . Por las propiedades de  $i$  (ver (10.6)) tenemos que  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son ambas geodésicas de luz horizontales o ambas verticales. De la descomposición  $KAK$  de  $g_n$  y, por (10.6), tenemos que  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son ambas geodésicas de luz horizontales o ambas verticales. Por la Proposición 10.3.2 y la ecuación (10.9), tenemos que si  $y \notin \Delta^-$ , entonces

$$D_{(g_n)}(y) = \tilde{u} s \bar{u}(p).$$

Esto muestra el inciso (1) de la Proposición para todas las sucesiones.

Sea  $p \in \Delta^+$ , entonces  $q := i(\tilde{u}(p)) \in \nabla^+$ . Por el inciso (2) de esta Proposición para sucesiones de la forma (10.5), existe una geodésica de luz  $l_q \subset \mathbb{Q}_3$ , que es transversal a  $\nabla^-$ , tal que  $l_q - \nabla^- \subset D_{(a_n)}(q)$ . Además, la colección de todas las geodésicas de luz  $l_q$  construidas de esta forma es una foliación de  $\mathbb{Q}_3 - \nabla^-$ . Por la Proposición 10.3.2 y como  $O(4, \mathbb{C})$  manda geodésicas de luz en geodésicas de luz,  $l_p := u(i(l_q))$  es una geodésica de luz transversal a  $\Delta^-$ , tal que  $l_p - \Delta^- \subset D_{(g_n)}(p)$  y la colección de todas las geodésicas de luz  $l_q$  construidas de esta forma es una foliación de  $\mathbb{Q}_3 - \Delta^-$ . Esto muestra el inciso (2) de la Proposición para todas las sucesiones.  $\square$

### 10.3.4. Sucesiones de distorsión acotada

Recordemos que, en la Introducción de esta Sección, definimos una sucesión de distorsión acotada de  $SO(4, \mathbb{C})$  como una sucesión divergente  $(g_n)$  de la forma  $g_n = u_n i^{-1} a_n i \tilde{u}_n$ , donde  $u_n, \tilde{u}_n$  son sucesiones convergentes de  $SO(4, \mathbb{C})$ ,  $i$  es la matriz identidad, o bien, es un elemento de  $O(4, \mathbb{C}) - SO(4, \mathbb{C})$  que, restringido a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, se representa como (10.6) y  $(a_n)$  es una sucesión de  $SO(4, \mathbb{C})$  de la forma (10.5), donde una de las sucesiones  $(\lambda_n)$  y  $(\mu_n)$  converge a  $+\infty$  y la otra a un punto de  $\mathbb{R}$ . Ahora veremos la dinámica de este tipo de sucesiones que divergen de manera simple al infinito. Como veremos más adelante, en este Capítulo, el grupo  $\Gamma_u$ , para  $u$  suficientemente cercano al homomorfismo identidad (estudiado en el Capítulo 8), no contiene sucesiones de este tipo.

Recordemos también que, en el Capítulo 7, definimos a  $\Theta$  como la imagen de  $SL(2, \mathbb{C})$  bajo un biholomorfismo  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ -equivariante.

Recordemos que en la Sección 7.2 definimos al cono de luz  $C(p)$  que pasa por  $p$  como la unión de todas las geodésicas de luz que pasan por  $p$ . También definimos al espacio  $\tilde{C}(p)$  como el espacio de todas las geodésicas de luz que contienen a  $p$  y mostramos que es una variedad compleja biholomorfa a la esfera de Riemann.

**Proposición 10.3.4** *Sea  $(g_n)$  una sucesión de distorsión acotada de  $SO(4, \mathbb{C})$ . Entonces existen dos puntos  $p_+, p_-$  en  $\mathbb{Q}_2$  y un biholomorfismo  $\bar{g}_\infty$  del espacio  $\tilde{C}(p_-)$  sobre el espacio  $\tilde{C}(p_+)$ , tal que*

1. *Si  $q \notin C(p_-)$ , entonces  $D_{(g_n)}(q) = \{p^+\}$ .*
2. *Si  $q \in C(p_-) - \{p_-\}$ , entonces  $D_{(g_n)}(q)$  está en la imagen, bajo  $\bar{g}_\infty$ , de la geodésica de luz que contiene a  $p_-$  y a  $q$ .*
3. *Existen puntos en  $\Theta$  dinámicamente relacionados.*

**Demostración:** Consideremos primero sucesiones de la forma (10.5), es decir, conside-

remos

$$a_n = \begin{pmatrix} e^{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n} \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  y  $\mu_n \rightarrow \mu_\infty \in \mathbb{R}$ . Sea  $q_- := [0 : 0 : 0 : 0 : 1]$  y  $q_+ := [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ . La función

$$h_\infty := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{\mu_\infty} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_\infty} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertenece a  $SO(5, \mathbb{C})$  y, por la Proposición 7.2.2, induce un biholomorfismo

$$\bar{h}_\infty := \begin{pmatrix} e^{\mu_\infty} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu_\infty} \end{pmatrix}$$

de  $\tilde{C}(q_-)$  sobre  $\tilde{C}(q_+)$  que manda las geodésicas de luz

$$\overline{\pi(\{0\} \times \{z_2\} \times \{z_3\} \times \{z_4\} \times \mathbb{C})},$$

que contienen a  $q_-$  y a  $[0 : z_2 : z_3 : z_4 : 0]$  sobre las geodésicas de luz

$$\overline{\pi(\mathbb{C} \times \{z_2 e^{\mu_\infty}\} \times \{z_3\} \times \{z_4 e^{-\mu_\infty}\} \times \{0\})},$$

que contienen a  $q_+$  y a  $[0 : z_2 e^{\mu_\infty} : z_3 : z_4 e^{-\mu_\infty} : 0]$ .

Sea  $q = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \notin C(q_-)$ , entonces  $z_1 \neq 0$ , por lo que podemos suponer que  $z_1 = 1$ . Sea  $(y_n)$  cualquier sucesión de  $\mathbb{Q}_3$  que converja a  $q$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,

$$y_n = [1 : y_n^{(2)} : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} : y_n^{(5)}].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a_n y_n &= [e^{\lambda_n} : y_n^{(2)} e^{\mu_n} : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} e^{-\mu_n} : y_n^{(5)} e^{-\lambda_n}] \\ &= [1 : y_n^{(2)} e^{\mu_n - \lambda_n} : y_n^{(3)} e^{-\lambda_n} : y_n^{(4)} e^{-\mu_n - \lambda_n} : y_n^{(5)} e^{-2\lambda_n}]. \end{aligned}$$

Por lo que si,  $q \notin C(q_-)$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n y_n = [1 : 0 : 0 : 0 : 0].$$

Por lo tanto,

$$D_{(a_n)}(q) = \{[1 : 0 : 0 : 0 : 0]\}. \quad (10.10)$$

Esto muestra el inciso (1) de la Proposición para sucesiones de la forma (10.5).

Sea  $q = [0 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in C(q_-) - \{q_-\}$ , entonces  $z_2 \neq 0$  o  $z_4 \neq 0$ . Supongamos que  $z_2 \neq 0$  (los otros casos son similares), entonces, podemos suponer que  $q = [0 : 1 : z_3 : z_4 : z_5]$ .

Consideremos cualquier sucesión  $(y_n)$  en  $\mathbb{Q}_3$  que converja a  $q$ , entonces, para  $n$  suficientemente grande  $y_n = [y_n^{(1)} : 1 : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} : y_n^{(5)}]$  y

$$y_n^{(1)} \rightarrow 0, \quad y_n^{(3)} \rightarrow z_3, \quad y_n^{(4)} \rightarrow z_4, \quad y_n^{(5)} \rightarrow z_5.$$

Tenemos que

$$a_n y_n = [e^{\lambda_n} y_n^{(1)} : e^{\mu_n} : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} e^{-\mu_n} : y_n^{(5)} e^{-\lambda_n}].$$

Supongamos que  $(a_n y_n)$  es convergente, entonces  $e^{\lambda_n} y_n^{(1)} \rightarrow b$ , para algún  $b \in \mathbb{C}$ , o  $e^{\lambda_n} y_n^{(1)} \rightarrow \infty$ .

Si  $e^{\lambda_n} y_n^{(1)} \rightarrow b$ , entonces,

$$a_n y_n \rightarrow [b : e^{\mu_\infty} : z_3 : e^{-\mu_\infty} z_4 : 0].$$

Si  $e^{\lambda_n} y_n^{(1)} \rightarrow \infty$ , entonces,

$$a_n y_n \rightarrow [1 : 0 : 0 : 0 : 0].$$

Por lo tanto,

$$D_{(a_n)}(q) \subset \pi(\mathbb{C} \times \{z_2 e^{\mu_\infty}\} \times \{z_3\} \times \{z_4 e^{-\mu_\infty}\} \times \{0\}).$$

Consideremos cualquier  $b \in \mathbb{C}$  y la sucesión  $(y_n)$  de  $\mathbb{Q}_3$  definida por

$$y_n := [b e^{-\lambda_n} : 1 : z_3 : y_n^{(4)} : z_5],$$

donde  $y_n^{(4)} := b e^{-\lambda_n} z_5 - z_3^2$ .

Entonces,

$$a_n y_n \rightarrow [b : e^{\mu_\infty} z_2 : z_3 : e^{-\mu_\infty} z_4 : 0].$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$D_{(a_n)}(q) = \pi(\mathbb{C} \times \{z_2 e^{\mu_\infty}\} \times \{z_3\} \times \{z_4 e^{-\mu_\infty}\} \times \{0\}).$$

Esto prueba el inciso (2) de la Proposición para sucesiones de la forma (10.5). Además, si  $q \in \Theta$ , esto es  $z_3 \neq 0$ , entonces  $D_{(a_n)}(q)$  interseca a  $\Theta$ , por lo tanto, tenemos el inciso (3) para sucesiones también de la forma (10.5).

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $g_n = \tilde{u}_n i a_n i^{-1} \bar{u}_n$  la descomposición  $KAK$  de  $g_n$ , construida en la Proposición 10.3.1, donde  $a_n$  es de la forma (10.5) con  $(\lambda_n)$ , una sucesión que converge a  $+\infty$  y  $(\mu_n)$  una sucesión que converge en  $\mathbb{R}$ ,  $(\tilde{u}_n)$  y  $(\bar{u}_n)$  son sucesiones convergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  e  $i$  es la matriz identidad, o bien, es un elemento de  $\text{O}(4, \mathbb{C}) - \text{SO}(4, \mathbb{C})$  de la forma (10.6). Definamos  $p_- := \bar{u}^{-1}(q_-)$ ,  $p_+ := \tilde{u}(q_+)$ ,  $\bar{u} := \lim \bar{u}_n$ ,  $\tilde{u} := \lim \tilde{u}_n$  y  $g_\infty := \tilde{u} i h_\infty i^{-1} \bar{u}$ , el cual es un elemento de  $\text{O}(4, \mathbb{C})$  e induce un biholomorfismo  $\bar{g}_\infty$  de  $\tilde{C}(p_-)$  sobre  $\tilde{C}(p_+)$ .

Entonces, por la Proposición 10.3.2, y como  $\text{O}(4, \mathbb{C})$  manda geodésicas de luz en geodésicas de luz y conos de luz en conos de luz, obtenemos el inciso (2) en el caso general. Además, como  $\tilde{u}i, i^{-1}\bar{u} \in \text{O}(4, \mathbb{C})$ ,  $C(p_+)$  y  $C(p_-)$  no están contenidas en  $\mathbb{Q}_2$  y  $\Theta$  es invariante bajo  $\text{O}(4, \mathbb{C})$ , por el inciso (3), para sucesiones de la forma (10.5), obtenemos el inciso (3) para todas las sucesiones.  $\square$

### 10.3.5. Sucesiones de distorsión mixta

Recordemos que, en la Introducción de esta Sección, definimos una sucesión dedistorsión balanceada de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  como una sucesión divergente  $(g_n)$  de la forma  $g_n = u_n i^{-1} a_n i \tilde{u}_n$ , donde  $u_n, \tilde{u}_n$  son sucesiones convergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ ,  $i$  es la matriz identidad, o bien, es un elemento de  $\text{O}(4, \mathbb{C}) - \text{SO}(4, \mathbb{C})$  que, restringido a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, se representa como (10.6) y  $(a_n)$  es una sucesión de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$  de la forma (10.5), donde las sucesiones  $(\lambda_n), (\mu_n)$  convergen a  $+\infty$  y la sucesión  $(\lambda_n - \mu_n)$  converge a  $\infty$ .

**Proposición 10.3.5** *Supongamos que  $(g_n)$  es una sucesión de distorsión mixta de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Entonces, existen dos puntos  $p_+$  y  $p_-$  en  $\mathbb{Q}_2$  y dos geodésicas de luz paralelas  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  en  $\mathbb{Q}_2$  que contienen a  $p_+$  y  $p_-$ , respectivamente, tales que*

1. Si  $q \notin C(p_-)$ , entonces  $D_{(g_n)}(q) = \{p_+\}$ .
2. Si  $q \in C(p_-) - \Delta^-$ , entonces  $D_{(g_n)}(q) = \Delta^+$ .
3. Si  $q \in \Delta^- - \{p_-\}$ , entonces  $D_{(g_n)}(q) = C(p_+)$ .

**Demostración:** La demostración del inciso (1) de la Proposición es la misma que la del inciso (1) de la Proposición 10.3.4.

Para mostrar el inciso (2) de la Proposición, consideraremos primero sucesiones de la forma (10.5), es decir, consideremos

$$a_n := \begin{pmatrix} e^{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n} \end{pmatrix},$$

donde  $(\mu_n), (\lambda_n)$  convergen a  $+\infty$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  converge a  $\infty$ . Supongamos que  $(\lambda_n - \mu_n)$  converge a  $+\infty$ ; el otro caso es similar.

Sea  $q_- := [0 : 0 : 0 : 0 : 1]$ ,  $q_+ := [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$  y  $\nabla^+$  y  $\nabla^-$  las geodésicas de luz  $\pi(\langle e_1, e_2 \rangle)$  y  $\pi(\langle e_4, e_5 \rangle)$ , respectivamente, contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ .

Sea  $q \in C(q_-) - \nabla^-$ , supongamos que  $q = [0 : 1 : z_3 : z_4 : z_5] \in \mathbb{Q}_3$ . Consideremos cualquier sucesión  $(y_n)$  en  $\mathbb{Q}_3$  que converja a  $q$ , entonces, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande  $y_n = [y_n^{(1)} : 1 : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} : y_n^{(5)}]$ , donde

$$y_n^{(1)} \rightarrow 0, \quad y_n^{(3)} \rightarrow z_3, \quad y_n^{(4)} \rightarrow z_4, \quad y_n^{(5)} \rightarrow z_5.$$

Entonces, si  $q \in C(q_-) - \nabla^-$ ,

$$a_n y_n = [e^{\lambda_n} y_n^{(1)} : e^{\mu_n} : y_n^{(3)} : y_n^{(4)} e^{-\mu_n} : y_n^{(5)} e^{-\lambda_n}] = [e^{\lambda_n - \mu_n} y_n^{(1)} : 1 : y_n^{(3)} e^{-\mu_n} : y_n^{(4)} e^{-2\mu_n} : y_n^{(5)} e^{-\lambda_n - \mu_n}].$$

Si  $(a_n y_n)$  converge, entonces  $(e^{\lambda_n - \mu_n} y_n^{(1)})$  converge en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Si  $e^{\lambda_n - \mu_n} y_n^{(1)} \rightarrow \infty$ , entonces  $a_n y_n \rightarrow [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ .

Si  $e^{\lambda_n - \mu_n} y_n^{(1)} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , entonces  $a_n y_n \rightarrow [a : 1 : 0 : 0 : 0]$ .

Entonces, si  $q \in C(q_-) - \nabla^-$ ,

$$D_{(a_n)}(q) \subset \nabla^+.$$

Consideremos cualquier  $a \in \mathbb{R}$  y la sucesión

$$y_n = [ae^{-\lambda_n + \mu_n} : 1 : z_3 : y_n^{(4)} : z_5], \quad y_n^{(4)} := ae^{-\lambda_n + \mu_n} z_5 - z_3^2,$$

de  $\mathbb{Q}_3$ . Entonces, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande

$$a_n y_n = [ae^{\mu_n} : e^{\mu_n} : z_3 : y_n^{(4)} e^{-\mu_n} : e^{-\lambda_n} z_5] = [a : 1 : e^{-\mu_n} z_3 : e^{-2\mu_n} y_n^{(4)} : e^{-\mu_n - \lambda_n} z_5].$$

Entonces,  $a_n y_n \rightarrow [a : 1 : 0 : 0 : 0]$ . Por lo que,

$$D_{(a_n)}(q) = \nabla^+.$$

Esto muestra el inciso (2) de la Proposición para sucesiones de la forma (10.5).

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $g_n = \tilde{u}_n i a_n i^{-1} \bar{u}_n$  la descomposición  $KAK$  de  $g_n$  obtenida en la Proposición 10.3.1, donde  $a_n$  es de la forma (10.5) con  $(\lambda_n)$ ,  $(\mu_n)$  y  $(\lambda_n - \mu_n)$  sucesiones que convergen a  $+\infty$ ,  $(\tilde{u}_n)$  y  $(\bar{u}_n)$  son sucesiones convergentes de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ . Definamos  $p_+ := \tilde{u}(q_+)$ ,  $p_- := \bar{u}^{-1}(q_-)$  y las geodésicas de luz  $\Delta^+ := \tilde{u}(i(\nabla^+))$  y  $\Delta^- := i(\bar{u}^{-1}(\nabla^-))$ . Como  $\mathbb{Q}_2$  es invariante bajo  $O(4, \mathbb{C})$ , entonces  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son geodésicas de luz contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ . Por las propiedades de  $i$  (ver (10.6)) tenemos que  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son ambas geodésicas de luz horizontales o ambas verticales. Por la Proposición 10.3.2, y como  $O(4, \mathbb{C})$  manda geodésicas de luz en geodésicas de luz y conos de luz en conos de luz, obtenemos el inciso (2) de la Proposición en el caso general.

La demostración del inciso (3) es similar a la del inciso (2).  $\square$

## 10.4. Conjunto límite de Frances

En la Sección anterior, vimos que hay tres tipos de sucesiones que tienden de manera simple al infinito: de distorsión balanceada, acotada y mixta. Mostramos que toda sucesión de distorsión balanceada o mixta tiene asociadas dos geodésicas de luz, una atractora y otra repulsora, de manera que los puntos de acumulación de órbitas de compactos, correspondientes a esta sucesión y a la sucesión inversa, que no intersecan estas geodésicas, se acumulan en puntos de estas geodésicas. Vimos, también, que, a cada sucesión de distorsión acotada, podemos asociarle dos conos de luz, uno atractor y otro, repulsor, de manera que los puntos de acumulación de órbitas de compactos, correspondientes a esta sucesión y a la sucesión inversa, que no intersecan estos conos, se acumulan en puntos de estos conos.

En esta Sección, utilizaremos estos resultados para definir un conjunto límite en  $\mathbb{Q}_3$  de un grupo discreto de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ , de manera que su complemento es un abierto invariante en el que la acción es propiamente discontinua. Veremos un ejemplo en el que el conjunto límite de Kulkarni contiene de manera propia al conjunto límite de Frances.

Sea  $G \subset \text{SO}(4, \mathbb{C})$  un grupo discreto, definimos

$$\Lambda_A := \overline{\bigcup_{(g_n)} (\Delta^+(g_n) \cup \Delta^-(g_n))},$$

donde la unión es tomada sobre todas las sucesiones  $(g_n)$  de distorsión balanceada y mixta de  $G$  y  $\Delta^+(g_n)$ ,  $\Delta^-(g_n)$  son las geodésicas de luz límite correspondientes a la sucesión  $(g_n)$ .

Definimos también

$$\Lambda_B := \overline{\bigcup_{(g_n)} (C^+(g_n) \cup C^-(g_n))},$$

donde la unión es tomada sobre todas las sucesiones  $(g_n)$  de distorsión acotada de  $G$  y  $C^+(g_n)$ ,  $C^-(g_n)$  son los conos de luz límite correspondientes a la sucesión  $(g_n)$ .

Llamamos al conjunto

$$\Lambda^F := \Lambda_A \cup \Lambda_B \tag{10.11}$$

el conjunto límite de Frances de  $G$  en  $\mathbb{Q}_3$ .

**Proposición 10.4.1** *Se tiene que  $\Omega^F := \mathbb{Q}_3 - \Lambda^F$  es un abierto invariante en el que la acción es propiamente discontinua.*

**Demostración:** Empezaremos mostrando que  $\Lambda^F$  es invariante. Sea  $y \in \Lambda^F$ ; supongamos que  $y \in \Lambda_A$  (el otro caso es similar), entonces existe una sucesión divergente  $(g_n)$  de  $G$ , dos geodésicas de luz límite  $\Delta^+(g_n)$  y  $\Delta^-(g_n)$  y una sucesión convergente  $(x_n)$  de  $\mathbb{Q}_3 - (\Delta^+(g_n) \cup \Delta^-(g_n))$  tal que  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n x_n$ . Entonces, se tiene que  $gy = g \lim_{n \rightarrow \infty} g_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gg_n x_n$  está en  $\Delta^+(gg_n) = g(\Delta^+(g_n))$ , donde  $\Delta^-(gg_n) = \Delta^-(g_n)$ , por lo tanto,  $y \in \Lambda_A \subset \Lambda^F$ . Entonces  $\Lambda^F$  es invariante y, por tanto, su complemento  $\Omega^F$  también lo es.

Además  $\Lambda^F$  es, por definición, un cerrado y, por construcción, tenemos que  $\Omega^F$  no contiene puntos de acumulación de órbitas de compactos; por lo que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Omega^F$ .  $\square$

Es claro que, si  $\Omega^F \neq \emptyset$ , entonces  $G$  es un grupo kleiniano ortogonal de dimensión tres.

**Ejemplo 10.4.1** *Existe un grupo formado por una sucesión de distorsión mixta para el cual  $\Lambda^F$  es un subconjunto propio del conjunto límite de Kulkarni.*

Consideremos al grupo

$$G := \left\{ \left( \begin{array}{ccccc} e^{3n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3n} \end{array} \right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

que está formado por una sucesión de distorsión mixta, donde  $\lambda_n = 3n$ ,  $\mu_n = 2n$ ,  $\lambda_n - \mu_n = n$ .

Se tiene que sus únicos puntos fijos en  $\mathbb{Q}_3$  son

$$[1 : 0 : 0 : 0 : 0], [0 : 1 : 0 : 0 : 0], [0 : 0 : 0 : 1 : 0], [0 : 0 : 0 : 0 : 1],$$

y sus únicos puntos de acumulación de órbitas son

$$[1 : 0 : 0 : 0 : 0] \text{ y } [0 : 0 : 0 : 0 : 1].$$

Además, por la Proposición 10.3.5,

$$D_{g_n}(\langle e_1, e_2 \rangle \setminus \{[1 : 0 : 0 : 0 : 0]\}) = C([0 : 0 : 0 : 0 : 1]) = \check{\pi}(\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle)$$

y

$$D_{g_n}(\langle e_4, e_5 \rangle \setminus \{[0 : 0 : 0 : 0 : 1]\}) = C([1 : 0 : 0 : 0 : 0]) = \check{\pi}(\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle).$$

Por lo tanto, el conjunto límite de Frances está contenido propiamente en el conjunto límite de Kulkarni

$$\Lambda^K = C([0 : 0 : 0 : 0 : 1]) \cup C([1 : 0 : 0 : 0 : 0]). \quad \square$$

### 10.4.1. Conjunto límite de Kulkarni

Nos gustaría comentar que, no podemos utilizar la fórmula (10.3.2) y la descomposición KAK de  $SL(2, \mathbb{C})$ , de la Proposición 10.3.1, para calcular el conjunto límite de Kulkarni, ya que las perturbaciones de sucesiones divergentes pueden cambiar puntos de  $L^0$  por puntos de  $L^1$ , como se ilustra a continuación en el siguiente ejemplo:

Sea  $(\lambda_n)$  una sucesión que converge a  $\infty$  y  $(\mu_n)$  una sucesión que converge en  $\mathbb{R}$ . Recordemos que, en la Sección 2.2, definimos el conjunto límite de Kulkarni (ver [20]). Para toda  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$g_n := \begin{pmatrix} e^{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n} \end{pmatrix},$$

y

$$h_n := \begin{pmatrix} e^{\lambda_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Entonces, las sucesiones  $(g_n)$  y  $(h_n)$  son Whitney equivalentes y de distorsión acotada. Además, si  $G$  y  $H$  son los grupos formados por la sucesiones  $(g_n)$  y  $(h_n)$ , respectivamente, entonces, todos los puntos de la cuádrica  $Q_3$  de la forma  $[0 : z_2 : z_3 : z_4 : 0]$  son puntos de acumulación de órbitas de compactos correspondientes a ambos grupos. Sin embargo, son puntos de  $L^0$  para el grupo  $G$  y de  $L^1$  para el grupo  $H$ .

## 10.5. Grupos kleinianos sin sucesiones de distorsión acotada

En la Sección 10.3 vimos que hay tres diferentes dinámicas de sucesiones que tienden de manera simple al infinito: de distorsión balanceada, acotada y mixta. Estos resultados los utilizamos en la Sección 10.4 para definir, dado un grupo discreto  $G$  de  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ , un conjunto límite y un abierto de  $\mathbb{Q}_3$  en el que la acción es propiamente discontinua. En esta Sección, caracterizaremos a los grupos discretos que no contienen sucesiones de distorsión acotada. Estos grupos nos interesan ya que los ejemplos de grupos kleinianos ortogonales, que construiremos en la siguiente Sección, son de este tipo.

Decimos que un grupo kleiniano  $G \subset \text{SO}(4, \mathbb{C})$  de  $\mathbb{Q}_3$  es del primer tipo si  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta$ .

**Proposición 10.5.1** *Un grupo kleiniano  $G \subset \text{SO}(4, \mathbb{C})$  es del primer tipo si y sólo si no contiene sucesiones de distorsión acotada.*

**Demostración:**  $\Leftarrow$ ) Si  $G \subset \text{SO}(4, \mathbb{C})$  es un grupo kleiniano de  $\mathbb{Q}_3$  sin sucesiones de distorsión acotada. Entonces, toda sucesión  $(g_n)$  de  $G$  que tienda de manera simple al infinito es de distorsión balanceada o mixta, entonces  $\Lambda_B = \emptyset$  y, por las Proposiciones 10.3.3 y 10.3.5, tiene asociadas dos geodésicas límite  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ . Por lo tanto,  $\Lambda_A = \Lambda^F$  está contenido en  $\mathbb{Q}_2$ .

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $G$  es un grupo kleiniano del primer tipo y que existe en él una sucesión  $(g_n)$  de distorsión acotada, entonces, por la Proposición 10.3.4, sabemos que existen puntos dinámicamente relacionados en  $\Theta$ , pero esto es una contradicción ya que sabemos que  $G$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta$ . Por lo tanto,  $G$  no contiene sucesiones de distorsión acotada.  $\square$

## 10.6. Ejemplos de grupos kleinianos ortogonales

En esta Sección veremos ejemplos de grupos kleinianos ortogonales.

**Teorema 10.6.1** *Sea  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano clásico, libre de torsión, finitamente generado y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$  y  $u : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un homomorfismo de grupos tal que  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta$ . Entonces,  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $U_\Gamma := \Theta \cup (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ . Más aún, si  $\Gamma \setminus \Omega$  es compacto, entonces  $U_\Gamma$  es maximal.*

**Observación:** Si  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  es un grupo kleiniano clásico, convexo-cocompacto y sin torsión, entonces, por definición,  $\Gamma \setminus \Omega$  es compacto y, por la Proposición 7.4, si  $u : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  es un homomorfismo de grupos suficientemente cercano al morfismo constante, entonces  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta$ . Ejemplos similares a éstos, desarrollados a la par de esta tesis y utilizando otras técnicas, se encuentran en el Teorema

4.1 de [11] de F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel y A. Wienhard (ver también la Observación 4.3 del mismo artículo). Los casos de este Teorema en los que  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  no es convexo-cocompacto, no tienen equivalente en el trabajo de estos autores.

**Demostración:** Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano, finitamente generado y sin torsión con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$  y  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  un homomorfismo de grupos. Recordemos que, en (8.1), definimos  $\Gamma_u = \left\{ (\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma \right\}$ . Supongamos que  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Theta$ . Por la Proposición 10.5.1, todas las sucesiones de  $\Gamma_u$  que tienden de manera simple al infinito son de distorsión balanceada o mixta y  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\mathbb{Q}_3 - \Lambda_F$ , donde  $\Lambda_F \subset \mathbb{Q}_2$ .

Probaremos que  $U_\Gamma \subset \mathbb{Q}_3 - \Lambda_F$ , o equivalentemente que

$$(\Omega \times \mathbb{CP}^1) \subset (\mathbb{Q}_2 - \Lambda^F). \quad (10.12)$$

Primero, probaremos que las geodésicas límite de  $\Lambda_F$  son verticales, como en el caso de A. A. Guillot en [12, pp. 224, 225] en el que  $u$  es el homomorfismo constante. Por las Proposiciones (10.3.3) y (10.3.5), sabemos que éstas son verticales. Supongamos que  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son las geodésicas límite correspondientes a la sucesión divergente  $(g_n, u(g_n))$  y que  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son horizontales. Tenemos dos casos:

1. Supongamos que  $(g_n, u(g_n))$  es de distorsión mixta,  $C(p_+)$  y  $C(p_-)$  son los conos de luz atractores y repulsores. Entonces, por la Proposición 10.3.5, cualquier punto  $x$  de  $(\Omega \times \mathbb{CP}^1) \cap \Delta^-$ , distinto de  $p_-$ , está dinámicamente relacionado con cualquier punto en  $C^+ \cap (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ . En particular, como  $\Delta^+ \subset C^+$ , entonces  $x$  está dinámicamente relacionado con cualquier punto en  $\Delta^+ \cap (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ .
2. Supongamos que  $(g_n, u(g_n))$  es de distorsión balanceada. Entonces, por la Proposición 10.3.3, para todo punto  $q$  en  $\Delta^+ \cap (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  existe una geodésica de luz  $l_q \subset \mathbb{Q}_2$  vertical tal que  $q$  está dinámicamente relacionado con todo punto en  $l_q - \Delta^-$ . Probaremos que existe  $q \in \Delta^+ \cap (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ , tal que  $l_q \subset \Omega \times \mathbb{CP}^1$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $(g_n, u(g_n)) = \tilde{u}_n i a_n i^{-1} \bar{u}_n$  su descomposición KAK construida en la Proposición 10.3.1, donde  $a_n$  es de la forma (10.5) con  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  y  $\mu_n \rightarrow +\infty$ ,  $(\tilde{u}_n)$  y  $(\bar{u}_n)$  son sucesiones convergentes de  $\mathrm{SO}(4, \mathbb{C})$  e  $i$  es un elemento de  $\mathrm{O}(4, \mathbb{C})$  que, restringido a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, se puede representar como (10.6). A continuación, trasladaremos lo que queremos probar al mismo problema pero, para la sucesión  $(a_n)$ . Si  $q \in \Delta^+$ , recordemos la construcción de  $l_q$  (ver la Proposición 10.3.3). Sea  $\tilde{u} := \lim \tilde{u}_n$  y  $\bar{u} := \lim \bar{u}_n$ . Entonces, existen  $y_0, \bar{y}_0 \in \mathbb{CP}^1$  tales que

$$\Delta^+ = \{(x, y_0) : x \in \mathbb{CP}^1\}$$

y

$$\Delta^- = \{(x, \bar{y}_0) : x \in \mathbb{CP}^1\}.$$

De las propiedades de la función  $i$  antes mencionadas y, como  $\tilde{u}^{-1}$  y  $\bar{u}$  se pueden representar, restringidos a  $\mathbb{Q}_2$  y en coordenadas, como (7.5), tenemos que la función  $i^{-1}\tilde{u}^{-1}$  es en coordenadas de la siguiente forma:

$$(x, y) \mapsto (v_1(y), v_2(x)),$$

donde  $v_1, v_2 \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  y la función  $i^{-1}\bar{u}$  es en coordenadas de la siguiente forma:

$$(x, y) \mapsto (w_1(y), w_2(x)),$$

donde  $w_1, w_2 \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Por lo tanto, de la fórmula dada por la Proposición 10.3.2, es suficiente mostrar que existe un punto  $q$  en  $\nabla^+ \cap (\mathbb{CP}^1 \times v_2(\Omega))$  tal que, la  $l_q$  que le corresponde a la sucesión  $(a_n)$ , está contenida en  $\mathbb{CP}^1 \times w_2(\Omega)$ . Por lo tanto, por el inciso (3) de la Proposición 10.3.3, esto es equivalente a mostrar que existe algún punto en

$$g v_2(\Omega) \cap g w_2(\Omega),$$

donde  $g$  es alguna transformación de Möbius. Pero esto es cierto ya que, por el Teorema de Ahlfors (ver el Teorema ??),  $\Lambda$  tiene medida de Lebesgue cero y, como las transformaciones de Möbius preservan los conjuntos de medida de Lebesgue cero, entonces

$$g v_2(\Lambda) \cup g w_2(\Lambda)$$

tiene medida de Lebesgue cero.

En cualquier caso, existen puntos en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  que están dinámicamente relacionados y que corresponden a la sucesión  $(g_n, u(g_n))$ .

Por otro lado, sabemos que  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  (ya que así actúa en el primer factor), entonces, por la Proposición 2.1.3, no existen puntos dinámicamente relacionados en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ , pero esto se contradice con el párrafo anterior.

Por lo tanto, todas las geodésicas límite de  $\Gamma_u$  son verticales.

Supongamos ahora que (10.12) no es cierto, entonces existe un punto

$$(x, y) \in (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \cap \Lambda^F.$$

Como  $\Omega$  es abierto en  $\mathbb{CP}^1$ , existe una geodésica de luz atractora  $\Delta^+$  que corresponde a una sucesión  $(g_n, u(g_n))$  de distorsión balanceada o mixta de  $\Gamma_u$  tal que  $\Delta^+ \cap (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \neq \emptyset$ .

Como las geodésicas de luz límite de  $\Gamma_u$  son verticales, entonces  $\Delta^+ \subset (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ .

Mostraremos ahora que existen puntos en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  que están dinámicamente relacionados, y esto será una contradicción porque sabemos que la acción es propiamente discontinua en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ . Existen dos casos:

1. Si  $(g_n, u(g_n))$  es una sucesión de distorsión mixta, entonces, por la Proposición 10.3.5, existe una geodésica de luz repulsora  $\Delta^-$  y dos conos de luz límite  $C^-, C^+$  correspondientes a la sucesión  $(g_n, u(g_n))$ , tales que  $\Delta^- \subset C^-$  y  $\Delta^+ \subset C^+$  y si  $y \in C^- - \Delta^-$ , entonces

$$D_{(g_n, u(g_n))}(y) = \Delta^+.$$

Por la Proposición 7.2.2, sabemos que  $(C^- \cap Q_2) - \Delta^-$  es una geodésica de luz de la forma  $\mathbb{CP}^1 \times \{z\}$  (menos un punto), para algún  $z \in \mathbb{CP}^1$ . Esta geodésica de luz (menos un punto) interseca a  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ , y cualquier punto de esta intersección está dinámicamente relacionado con cualquier punto de  $\Delta^+ \subset (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ .

2. Si  $(g_n, u(g_n))$  es una sucesión de distorsión balanceada, entonces, cualquier punto de  $(\Omega \times \mathbb{CP}^1) - \Delta^-$  está dinámicamente relacionado con algún punto de  $\Delta^+ \subset (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$ .

Esto prueba (10.12).

Ahora, supongamos que  $\Gamma \setminus \Omega$  es compacto. Mostraremos que  $U_\Gamma \subset Q_3 - \Lambda_F$  o de manera equivalente, que (10.12) no es sólo una contención, sino una igualdad.

Recordemos el biholomorfismo (7.3),  $SO(4, \mathbb{C})$ -equivariante, entre  $Q_2$  y  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Como la acción de  $\Gamma_u$  en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  es propiamente discontinua en el primer factor de  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$ , entonces  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\Omega \times \mathbb{CP}^1$  y

$$\Gamma_u \setminus (\Omega \times \mathbb{CP}^1) \rightarrow \Gamma \setminus \Omega, \quad [(x, y)] \mapsto [x]$$

es una fibración localmente trivial con fibra compacta, por lo tanto es una función propia.

Como  $\Gamma \setminus \Omega$  es compacto, entonces  $\Gamma_u \setminus (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  es compacto.

Supongamos que existe un conjunto abierto e invariante  $U$  que contiene a  $U_\Gamma$  y donde  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua. Entonces,  $\Gamma_u \setminus (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  es un subespacio compacto del espacio Hausdorff  $\Gamma_u \setminus (U \cap Q_2)$ ; por lo que,  $\Gamma_u \setminus (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  es cerrado, pero su complemento  $\Gamma_u \setminus (U \cap Q_2) - \Gamma_u \setminus (\Omega \times \mathbb{CP}^1)$  tiene interior vacío (ver el Teorema ??), lo cual es una contradicción.

Entonces  $U_\Gamma$  es un abierto maximal en el que  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua, en particular  $U_\Gamma = Q_3 - \Lambda_F$ .  $\square$

Queremos aclarar que, el caso real del Teorema anterior también es válido (la demostración es la misma), por lo que también proporcionamos ejemplos de grupos kleinianos lorentzianos:

En particular, denotemos por  $\mathbb{R}^{2,n}$  al espacio  $\mathbb{R}^{n+2}$  dotado de la forma cuadrática  $q^{2,n} = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{n+2}^2$ . El cono isotrópico de  $q^{2,n}$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^{2,n}$  en el que  $q^{2,n}$  se hace cero. Llamamos  $C^{2,n}$  a este cono, sin el origen. Si  $\pi$  es la proyección de  $\mathbb{R}^{2,n}$  a  $\mathbb{RP}^{n+1}$ , el conjunto  $\pi(C^{2,n})$  es una hipersuperficie  $\Sigma$  de  $\mathbb{RP}^{n+1}$ . Esta hipersuperficie está dotada de una

estructura conforme lorentziana tal que el grupo de transformaciones conformes es  $\text{PO}(2, n)$ . El universo de Einstein es la hipersuperficie  $\Sigma$  junto con esta estructura canónica conforme y es denotado por  $\text{Ein}_n$ .

Supongamos que  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$  es un grupo kleiniano clásico, libre de torsión, finitamente generado y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{S}^1$  y  $u : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$  un homomorfismo de grupos, se tiene que

$$\Gamma_u := \left\{ (\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma \right\} \subset \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

es un subgrupo de  $\text{PO}(2, 2)$ . Si  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\text{AdS}_3 := \text{Ein}_3 - \text{Ein}_2$ , entonces  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $W_\Gamma := \text{AdS}_3 \cup (\Omega \times \mathbb{S}^1)$ . Más aún, si  $\Gamma \setminus \Omega$  es compacto, entonces  $W_\Gamma$  es maximal.

Como el conjunto límite de  $\Gamma$  en  $\mathbb{S}^1$  tiene medida cero (ver [33]), la prueba de esta afirmación es esencialmente la misma prueba del Teorema anterior.

# Capítulo 11

## Estructuras geométricas ortogonales

Recordemos que, en el Capítulo 4, definimos las estructuras geométricas uniformizables en variedades; en este Capítulo, estudiaremos estructuras geométricas ortogonales uniformizables modeladas localmente en la cuádrlica no degenerada de  $\mathbb{CP}^4$ , es decir, modeladas localmente en  $(\mathbb{Q}_3, \text{PO}(5, \mathbb{C}))$ .

En el Capítulo 9, mostramos que si,  $\Gamma$  es un grupo de Schottky clásico, existe un encaje  $J : \Gamma \rightarrow \text{PO}(5, \mathbb{C})$  de este en  $\text{PO}(5, \mathbb{C})$  mediante el cual se representa como grupo de Schottky ortogonal. No es difícil construir un abierto  $\mathcal{V}$  de  $J$  en el espacio de homomorfismos  $\text{Hom}(\Gamma, \text{PO}(5, \mathbb{C}))$  de  $\Gamma$  en  $\text{PO}(5, \mathbb{C})$  tal que, para toda  $v \in \mathcal{V}$ , el grupo  $v(\Gamma) \subset \text{PO}(5, \mathbb{C})$  es un grupo de Schottky ortogonal. Más aún, se puede ver que todos estos grupos de Schottky son difeomorfos y, por tanto, determinan estructuras geométricas ortogonales en la variedad de Guillot.

Sea  $\Gamma$  un grupo kleiniano (clásico) sin torsión, convexo-cocompacto y  $u : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un homomorfismo de grupos suficientemente cercano al homomorfismo constante. Recordemos que, en (8.1), definimos al grupo  $\Gamma_u = \left\{ (\gamma, u(\gamma)) : \gamma \in \Gamma \right\}$  y, que en la Proposición 7.1.1, vimos que  $\Gamma_u$  es un subgrupo de  $\text{SO}(4, \mathbb{C}) \subset \text{PO}(5, \mathbb{C})$  libre de torsión. Además, por la Proposición 10.6.1, el cociente  $M(u, \Gamma)$  de la acción de  $\Gamma_u$  en  $U_\Gamma \subset \mathbb{Q}_3$  es una variedad compleja de dimensión 3, donde  $U_\Gamma$  fue definido en esta Proposición. En este Capítulo, mostraremos que este cociente es, de hecho, compacto y difeomorfo a la variedad de Guillot, la cual fue definida en el Capítulo 9. Por lo que estos cocientes nos proporcionan una familia de estructuras geométricas uniformizables ortogonales en la variedad de Guillot que son perturbaciones de la estructura geométrica de Guillot (ver también el Capítulo 10). Este resultado, además de ser interesante por sí mismo, lo utilizaremos en el siguiente Capítulo para construir estructuras complejas proyectivas en ciertas variedades complejas compactas de dimensión tres.

**Demostración del Teorema 1.0.1:** Sea  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano (clásico), convexo-cocompacto y sin torsión. Por la Proposición 10.6.1, sabemos que existe una vecindad abierta  $\mathcal{V}$  del morfismo constante, tal que si  $u \in \mathcal{V}$ , entonces el cociente  $M(u, \Gamma)$  de la acción

de  $\Gamma_u$  en  $U_\Gamma$  es una variedad compleja. Empezaremos mostrando que la acción

$$\begin{aligned} \Gamma \times (\mathcal{V} \times U_\Gamma) &\rightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{U}_\Gamma \\ (\gamma, (u, x)) &\rightarrow \left( u, (\gamma, u(\gamma))x \right) \end{aligned} \quad (11.1)$$

es propiamente discontinua. Luego, consideraremos una resolución  $r : X \rightarrow \mathcal{V}$  de singularidades de  $\mathcal{V}$  y definiremos una acción de  $\Gamma$  en  $X \times U_\Gamma$  tal que la acción en  $\{x\} \times U_\Gamma$  coincide con la acción en  $\{r(x)\} \times U_\Gamma$ . Finalmente, veremos que  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $X \times U_\Gamma$  y que el cociente de la proyección de  $X \times U_\Gamma$  sobre su primera coordenada es un fibrado localmente trivial cuyas fibras son las variedades  $M(u, \Gamma)$ .

Consideremos un conjunto finito de generadores  $S$  de  $\Gamma$ , cualquier norma  $\|\cdot\|$  en  $\Theta = \mathbb{Q}_3 - \mathbb{Q}_2$  y, para toda  $\delta > 0$ , la vecindad

$$V_\delta(I) := \left\{ g \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{C})) : \forall s \in S, \|g(s) - I\| \leq \delta \right\},$$

del morfismo constante, con respecto a la topología compacto-abierta, donde  $I$  es la matriz identidad.

Mostraremos que existe  $\epsilon > 0$ , tal que, para toda sucesión convergente  $(u_n, z_n)$  en  $V_\epsilon(I) \times U_\Gamma$  y para toda sucesión divergente  $(g_n)$  de  $\Gamma$ , tal que  $(g_n, u_n(g_n))$  diverge de manera simple al infinito, entonces  $((g_n, u_n(g_n))z_n)$  no converge en  $U_\Gamma$ . Esto implicará que si  $\mathcal{V} := V_\epsilon(I)$ , entonces (11.1) es propiamente discontinua.

Notemos que, por la Proposición 10.6.1, lo anterior es cierto para sucesiones constantes  $(u_n)$ .

Recordemos que, por definición de  $\Theta$ , existe un biholomorfismo  $\text{SO}(4, \mathbb{C})$ -equivariante entre  $\Theta$  y  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Por la Proposición 7.4, existe  $\epsilon > 0$  tal que, para toda sucesión convergente  $(u_n, z_n)$  en  $V_\epsilon(I) \times \Theta$  y para toda sucesión divergente  $(g_n)$ , la sucesión  $((g_n, u_n(g_n))z_n)$  no converge en  $\Theta$ .

Supongamos que  $(u_n)$  es una sucesión de  $V_\epsilon(I)$ ,  $(g_n)$  es una sucesión divergente de  $\Gamma$  y que  $(g_n, u_n(g_n))$  diverge de manera simple al infinito en  $\text{PO}(4, \mathbb{C})$ . Entonces, por el párrafo anterior, no existen puntos en  $\Theta$  dinámicamente relacionados consigo mismos que corresponden a la sucesión  $(g_n, u_n(g_n))$ . Como las sucesiones de distorsión acotada tienen puntos dinámicamente relacionados en  $\Theta$  (ver la Proposición 10.3.4) entonces,  $(g_n, u_n(g_n))$  es de distorsión balanceada o mixta y, por las Proposiciones 10.3.3 y 10.3.5, tiene asociadas dos geodésicas de luz límite contenidas en  $\mathbb{Q}_2$ , una atractora  $\Delta^+$  y la otra, repulsora  $\Delta^-$ . Afirmamos que  $\Delta^+$  y  $\Delta^-$  son verticales y están contenidas en  $\Lambda \times \mathbb{CP}^1$ ; la prueba es esencialmente la misma que (ver la Proposición 10.6.1) la prueba de que las geodésicas de luz límite de  $\Gamma_u$  son verticales y están contenidas en  $\Lambda \times \mathbb{CP}^1$  (sólo es necesario reemplazar a la sucesión  $(g_n, u(g_n))$  por la sucesión  $(g_n, u_n(g_n))$  y utilizar el resultado de uniformidad del Lema 8.1.1). Entonces, para

toda sucesión  $(z_n)$  convergente en  $U_\Gamma$ , la sucesión  $\left(\left(g_n, u_n(g_n)\right)z_n\right)$  no converge en  $U_\Gamma$ .

La proyección de  $\mathcal{V} \times U_\Gamma$  sobre su primer factor define una función continua

$$\begin{aligned} t : \Gamma \backslash (\mathcal{V} \times U_\Gamma) &\rightarrow \mathcal{V} \\ [(u, y)] &\mapsto u. \end{aligned}$$

Si la variedad algebraica  $\mathcal{V}$  no tiene singularidades cerca del morfismo constante (por ejemplo, si  $\Gamma$  es un grupo de Schottky clásico), entonces por el Lema de Fibración de Ehresmann,  $t$  es una fibración localmente trivial y, por lo tanto, todas las  $M(u, \Gamma)$  son difeomorfas entre sí, para  $u$  suficientemente cercano al homomorfismo constante. Sin embargo,  $\mathcal{V}$  puede tener singularidades arbitrariamente cercanas al homomorfismo constante (ver, por ejemplo, a los grupos fuchsianos en [10, p.567]).

Si  $\mathcal{V}$  tiene singularidades, consideremos una resolución de singularidades (ver [13]) de  $\mathcal{V}$ , es decir, consideremos una función holomorfa y propia  $r : X \rightarrow \mathcal{V}$ , donde  $X$  es una variedad compleja.

Consideremos la variedad compleja  $X \times U_\Gamma$  y definamos la acción

$$\begin{aligned} \Gamma \times (X \times U_\Gamma) &\rightarrow X \times U_\Gamma \\ \left(\gamma, (x, y)\right) &\mapsto \left(x, (\gamma, r(x)(\gamma))(y)\right), \end{aligned} \tag{11.2}$$

y la función

$$\begin{aligned} r \times I : X \times U_\Gamma &\rightarrow \mathcal{V} \times U_\Gamma \\ (x, y) &\mapsto (r(x), y), \end{aligned}$$

que es  $\Gamma$ -equivariante:

$$(r \times I)(\gamma, (x, y)) = \left(r(x), (\gamma, r(x)(\gamma))(y)\right) = \left(\gamma, (r(x), y)\right) = (\gamma, (r \times I)(x, y)).$$

Como  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\mathcal{V} \times U_\Gamma$ , entonces actúa de manera propiamente discontinua en  $X \times U_\Gamma$ . Como la proyección de  $X \times U_\Gamma$  sobre su primer factor es  $\Gamma$ -invariante, entonces define una submersión

$$\begin{aligned} s : \Gamma \backslash (X \times U_\Gamma) &\rightarrow X \\ [(x, u)] &\mapsto x. \end{aligned}$$

Consideremos cualquier  $y \in r^{-1}(I)$ , entonces como  $s^{-1}(y)$  es, por definición, la variedad de Guillot  $t^{-1}(I)$ , es compacto. Por lo tanto, por el Lema de Fibración de Ehreshmann, es un fibrado trivial en una vecindad del origen  $\mathcal{U}$  de  $y$ . Como cualquier fibra  $s^{-1}(u)$  de  $s$  sobre  $u \in \mathcal{U}$  es, por definición, igual a la fibra  $t^{-1}(r(u))$  de  $t$  sobre  $r(u)$  y como  $r$  es abierta, entonces  $r(\mathcal{U})$  es una vecindad abierta de  $I$  tal que para toda  $v \in r(\mathcal{U})$ ,  $t^{-1}(v)$  es compacta y difeomorfa a la variedad de Guillot.  $\square$

Consideremos la geometría  $(Q_3, PO(5, \mathbb{C}))$ , el cubriente intermedio  $U_\Gamma$  de la variedad de Guillot  $\Gamma \backslash U_\Gamma$  y un mapeo desarrollador

$$\begin{aligned} D : U_\Gamma &\rightarrow Q_3 \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

definido en este cubriente intermedio (en lugar de en el cubriente universal). Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema anterior, sea  $u : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  un morfismo de grupos suficientemente cercano del morfismo constante y

$$\begin{aligned} \rho_u : \Gamma &\rightarrow SO(4, \mathbb{C}) \subset PO(5, \mathbb{C}) \\ \gamma &\rightarrow (\gamma, u(\gamma)), \end{aligned}$$

la representación de  $\Gamma$  inducida por  $u$ .

En (4.1), definimos el espacio de deformación de las  $(Q_3, PO(5, \mathbb{C}))$ -estructuras geométricas en la variedad de Guillot, entonces,  $(D, \rho_u)$  determina una única estructura geométrica en la variedad de Guillot. Sea  $\text{Diff}_0(M, m_0)$  la componente de la identidad del grupo de difeomorfismos de  $M$  que fijan a  $m_0$  y  $hol'$  la función

$$\begin{aligned} hol' : \mathcal{D}'_{(X, G)}(M) &\rightarrow \text{Hom}(\pi_1, G) \\ (D, \rho) &\mapsto \rho, \end{aligned}$$

ambas definidas en el Capítulo 4. Si  $v : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  también es un morfismo suficientemente cercano al homomorfismo constante que no es conjugado a  $u$ , entonces

$$hol'(D, \rho_u) = \rho_u \neq \rho_v = hol'(D, \rho_v).$$

Como, en el Capítulo 4, vimos que  $hol'$  es invariante bajo la acción de  $\text{Diff}_0(M, m_0)$ , entonces,  $\text{Diff}_0(M, m_0)$  no identifica a  $(D, \rho_u)$  con  $(D, \rho_v)$ . Además, es claro que  $\rho_u$  es conjugado a  $\rho_v$  si y sólo si  $u$  es conjugado a  $v$ .

Por lo tanto, las estructuras geométricas determinadas por  $(D, \rho_u)$  y  $(D, \rho_v)$  son iguales si y sólo si  $u$  y  $v$  son conjugados.

# Capítulo 12

## Grupos kleinianos complejos y estructuras geométricas proyectivas

Recordemos que, en el Capítulo 4, definimos las estructuras geométricas uniformizables en variedades; en este Capítulo, estudiaremos estructuras geométricas complejas y uniformizables modeladas localmente en  $(\mathbb{CP}^4, \text{PGL}(4, \mathbb{C}))$ . Estas estructuras geométricas las obtendremos considerando los resultados del Teorema 1.0.1.

**Demostración del Teorema 1.0.2:** Sea  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un grupo kleiniano (clásico), convexo-cocompacto, libre de torsión y con dominio de discontinuidad  $\Omega$  en  $\mathbb{CP}^1$ . Como vimos en el inciso (4) de la Proposición 7.1.1,  $\Gamma_u$  es libre de torsión. Mostraremos ahora que  $\Gamma_u$  es un subgrupo de  $\text{PO}(4, \mathbb{C})$  y que existe una función continua, abierta, propia y  $\Gamma_u$ -equivariante de  $\mathbb{Q}_3$  sobre  $\mathbb{CP}^3$ . Por el Teorema 1.0.1, lo anterior implicará que existe una vecindad  $\mathcal{V}$  del morfismo constante, tal que si  $u \in \mathcal{V}$ , entonces  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $V_\Gamma := f(U_\Gamma)$  y el cociente es compacto. Como  $I \times f$  es propia, entonces  $\Gamma$  actúa de manera propiamente discontinua en  $\mathcal{V} \times V_\Gamma$ , donde esta acción es la acción de  $\Gamma_u$  en  $V_\Gamma$  en las fibras  $\{u\} \times V_\Gamma$ . Finalmente, consideraremos una resolución de singularidades  $r : X \rightarrow \mathcal{V}$  y seguiremos el mismo razonamiento del Teorema 1.0.1 para mostrar que para toda  $u \in \mathcal{V}$ , todos los cocientes  $\Gamma_u \backslash V_\Gamma$  son difeomorfos entre ellos.

Consideremos la involución

$$\begin{aligned} j : \mathbb{Q}_3 &\rightarrow \mathbb{Q}_3 \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] &\mapsto [-z_1 : -z_2 : z_3 : -z_4 : -z_5], \end{aligned}$$

y el grupo  $\Sigma := \langle j \rangle = \{j, I\}$  de  $\text{O}(4, \mathbb{C}) \subset \text{PO}(5, \mathbb{C})$  generado por ella. La composición del mapeo cociente  $\Sigma \backslash \mathbb{Q}_3$ , definido por la acción de  $\Sigma$  en  $\mathbb{Q}_3$  y el biholomorfismo

$$\begin{aligned} \Sigma \backslash \mathbb{Q}_3 &\rightarrow \mathbb{CP}^3 \\ \left| [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \right| &\mapsto [z_1 : z_2 : z_4 : z_5], \end{aligned}$$

es una función continua y propia  $f$ , donde  $|z|$  denota la clase de equivalencia de  $z$ . Notemos que  $f$  restringida a  $\Theta$  es el cubriente, 2 a 1, usual de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  sobre  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  y restringido

a  $\mathbb{Q}_2$ , es la identidad.

La acción de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{Q}_3$  induce, en forma única, una acción del mismo grupo en  $\mathbb{CP}^3$  tal que  $f$  es  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -equivariante. Aunque esta acción no es fiel, define un homomorfismo holomorfo  $\tau$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathrm{PSO}(4, \mathbb{C}) \subset \mathrm{PO}(4, \mathbb{C})$ . De forma similar al inciso (2) de la Proposición 7.1.1, como  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es conexo, entonces la imagen de  $\tau$  es un subgrupo conexo de  $\mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$ . Como ambos, grupo y subgrupo, son de la misma dimensión (ver [8, p. 82]), entonces tienen que ser iguales. Por lo tanto,  $\tau$  es sobreyectivo. Además, el kernel de  $\tau$  es  $\{(I, I), (-I, I), (I, -I), (-I, -I)\}$ .

Por lo que  $\tau$  induce un isomorfismo biholomorfo de

$$\left(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\right) / \{(I, I), (-I, I), (I, -I), (-I, -I)\}$$

sobre  $\mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$ .

Como  $\mathrm{PO}(4, \mathbb{C})$  actúa en  $\mathbb{CP}^3$  de manera fiel, entonces  $\mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$  actúa de manera fiel en  $\mathbb{Q}_3$ . De forma similar al inciso (2) y (4) de la Proposición 7.1.1, como  $-I \notin \Gamma$ , donde  $I$  es la matriz identidad, entonces la restricción de  $\tau$  a  $\Gamma_u$  es un monomorfismo. De manera usual, identificaremos el dominio y la imagen, es decir,  $\Gamma_u \subset \mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$ .

Como  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $U_\Gamma$ , por la Proposición 2.2.3, tenemos que  $\Gamma_u$  actúa de manera propiamente discontinua en  $f(U_\Gamma)$ . Por lo que  $\Gamma_u \backslash f(U_\Gamma)$  es una variedad compleja y  $f$  define una función continua en el cociente

$$\begin{aligned} \Gamma_u \backslash U_\Gamma &\rightarrow \Gamma_u \backslash f(U_\Gamma) \\ [w] &\mapsto [f(w)]. \end{aligned}$$

De hecho, el cociente  $\Gamma_u \backslash f(U_\Gamma)$  es un cociente de la variedad  $\Gamma_u \backslash U_\Gamma$ : Para todo morfismo  $u : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , la involución  $j$  conmuta con la acción de  $\Gamma_u$  en  $\mathbb{Q}_3$  y, por tanto, pasa al cociente  $\Gamma_u \backslash U_\Gamma$ , esto es, define una transformación  $\tilde{j}$ ; el grupo  $\tilde{\Sigma}$  generado por  $\tilde{j}$  actúa de manera libre y propiamente discontinua en  $\Gamma_u \backslash U_\Gamma$  y, como las acciones de  $\Sigma$  y  $\Gamma_u$  conmutan, entonces, los cocientes  $\tilde{\Sigma} \backslash (\Gamma_u \backslash U_\Gamma)$  y  $\Gamma_u \backslash ((\Sigma \backslash f(U_\Gamma)))$  son biholomorfos.

Por el Teorema 1.0.1 existe una vecindad  $\mathcal{V}$  del morfismo constante tal que, para toda  $u \in \mathcal{V}$ ,  $\Gamma_u \backslash U_\Gamma$  es compacto. Por lo que  $\Gamma_u \backslash f(U_\Gamma)$  es también compacto. Definamos ahora la siguiente acción

$$\begin{aligned} \Gamma \times (\mathcal{V} \times V_\Gamma) &\rightarrow (\mathcal{V} \times V_\Gamma) \\ (\gamma, (v, x)) &\mapsto \left(v, (\gamma, v(\gamma))\right). \end{aligned}$$

Como  $I \times f$  es propia, entonces la acción anterior es propiamente discontinua. Finalmente, consideremos una resolución de singularidades  $r : X \rightarrow \mathcal{V}$  (ver [13]), donde  $X$  es una variedad compleja y  $r$  es holomorfa; entonces, por el mismo razonamiento que utilizamos en la demostración del Teorema 1.0.1, para toda  $u \in \mathcal{V}$ , todos los cocientes  $\Gamma_u \backslash V_\Gamma$  son difeomorfos entre ellos.  $\square$

Consideremos la geometría  $(\mathbb{CP}^3, \text{PGL}(4, \mathbb{C}))$ , el cubriente intermedio  $f(U_\Gamma)$  de la variedad  $\mathcal{M} := \Gamma \backslash f(U_\Gamma)$  y un mapeo desarrollador

$$\begin{aligned} D : f(U_\Gamma) &\rightarrow \mathbb{Q}_3 \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

definido en este cubriente intermedio (en lugar de en el cubriente universal). Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Teorema anterior, sea  $u : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  un morfismo de grupos suficientemente cercano del morfismo constante y

$$\begin{aligned} \rho_u : \Gamma &\rightarrow \text{PSO}(4, \mathbb{C}) \subset \text{PGL}(4, \mathbb{C}) \\ \gamma &\rightarrow (\gamma, u(\gamma)), \end{aligned}$$

la representación de  $\Gamma$  inducida por  $u$ .

En (4.1), definimos el espacio de deformación de las  $(\mathbb{CP}^3, \text{PGL}(4, \mathbb{C}))$ -estructuras geométricas en la variedad  $\mathcal{M}$ , entonces  $(D, \rho_u)$  determina una única estructura geométrica en la variedad  $\mathcal{M}$ . Por los mismos argumentos que se utilizaron después de la demostración del Teorema 1.0.1 (ver página 95), pero aplicado a  $\mathbb{CP}^3$  en lugar de a  $\mathbb{Q}_3$ , concluimos que, si  $v : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  también es un morfismo suficientemente cercano al homomorfismo constante, las estructuras geométricas determinadas por  $(D, \rho_u)$  y  $(D, \rho_v)$  son iguales si y sólo si  $u$  y  $v$  son conjugados.

Además, siguiendo casi el mismo análisis que el del Capítulo 10, pero aplicado a  $\mathbb{CP}^3$  en lugar de a  $\mathbb{Q}_3$ , concluimos que las geodésicas límite de  $\Lambda \times \mathbb{CP}^1$  son atractoras y repulsoras para la acción de  $\Gamma_u$  en  $f(U_\Gamma)$ , donde  $f$  es como en el Teorema anterior.



# Appendices



# Apéndice A

## Formas bilineales, formas cuadráticas y cuádricas

En este Capítulo recordamos parte de la teoría de formas bilineales y cuadráticas en  $\mathbb{C}^n$  y de cuádricas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ . En particular, veremos la identidad de polarización, que relaciona una cuádrica de  $\mathbb{C}^n$  con su forma bilineal simétrica asociada. Veremos también que todas las cuádricas no degeneradas de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  son equivalentes. Los resultados serán mencionados sin demostración, el lector que desee consultarlas puede consultar por ejemplo [25, pp. 353-381].

Consideremos dos bases  $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_m\}$  y  $\mathcal{C} = \{F_1, \dots, F_m\}$  de  $\mathbb{C}^n$ . Si  $X \in V$  tiene la forma  $X = x_1 E_1 + \dots + x_r E_r$ , entonces decimos que el vector  $x = (x_1, \dots, x_r)$  representa a  $X$  con respecto a  $\mathcal{B}$ ; y escribimos

$$x = \mathcal{R}(X; \mathcal{B}).$$

Sea  $\phi(X, Y)$  una función de dos variables  $X$  y  $Y$ , con  $X, Y \in \mathbb{C}^n$  y supongamos que los valores de la función  $\phi(X, Y)$  son elementos de  $\mathbb{C}$ . Si  $\phi(X, Y)$  es lineal en ambas variables, decimos entonces que  $\phi(X, Y)$  es un *operador bilineal en  $\mathbb{C}^n$* .

**Teorema A.0.1** *Si  $\phi(X, Y)$  es un operador bilineal en  $\mathbb{C}^n$ , y si*

$$x = \mathcal{R}(X; \mathcal{B}), \quad y = \mathcal{R}(X; \mathcal{C}),$$

*entonces*

$$\phi(X, Y) = x^T A y,$$

*donde la matriz  $A$  de  $n \times n$  es definida por las relaciones*

$$a_{rs} = \phi(E_r, F_s) \quad (r, s = 1, \dots, n).$$

**Definición A.0.2** *Cualquier polinomio de la forma*

$$\sum_{r,s=1}^n a_{rs} x_r y_s = x^T A y, \tag{A.1}$$

*donde  $A = (a_{rs})$  es una matriz compleja de  $n \times n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ , es llamado una forma bilineal en  $\mathbb{C}^n$ . La matriz  $A$  es llamada la matriz de la forma bilineal.*

Si con la notación del Teorema A.0.1,  $\phi(X, Y) = x^T Ay$ , decimos entonces que la forma bilineal  $x^T Ay$  (o alternativamente, la matriz  $A$ ) *representa* al operador bilineal  $\phi(X, Y)$  con respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$ .

**Teorema A.0.3** *Para cada par de bases fijas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{C}^n$ , existe una correspondencia biunívoca entre operadores bilineales en  $\mathbb{C}^n$ , formas bilineales en  $\mathbb{C}^n$  y matrices complejas de  $n \times n$ .*

**Teorema A.0.4** *Las matrices de coeficientes complejos  $A$  y  $B$  de  $n \times n$  representan al mismo operador bilineal en  $\mathbb{C}^n$  con respecto a algún par de bases si y sólo si existen matrices complejas no singulares  $P$  y  $Q$  de orden  $n$ , tales que*

$$B = P^T A Q$$

Si  $P$  y  $Q$  son matrices complejas no singulares de  $n \times n$ , entonces las sustituciones  $x = Px'$  y  $y = Qy'$ , para las variables de la forma bilineal A.1, son conjuntamente llamadas una *transformación lineal no singular de la forma bilineal*.

El *rango* de la forma bilineal  $x^T Ay$  es el rango de  $A$ . El *rango* de un operador bilineal es el rango de la forma bilineal que lo representa.

**Definición A.0.5** *Sea  $\phi(X, Y)$  es un operador bilineal en  $\mathbb{C}^n$ . Si ambas variables son iguales entre ellas, entonces la función que resulta  $\phi(X, X)$  es llamada un operador cuadrático en  $\mathbb{C}^n$ .*

Del Teorema A.0.1 se sigue inmediatamente que

$$\phi(X, X) = x^T Ax = \sum_{r,s=1}^n a_{rs} x_r x_s = x^T Ax, \quad (\text{A.2})$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  y  $A = (a_{rs})$  es la matriz compleja de  $n \times n$  definida por las ecuaciones  $a_{rs} = \phi(E_r, E_s)$ , ( $r, s = 1, \dots, n$ ).

A diferencia del Teorema A.0.3, no existe una correspondencia biunívoca entre operadores cuadráticos y funciones cuadráticas (aún fijando la base en  $\mathbb{C}^n$ ). Sin embargo, esta dificultad se puede resolver pidiendo que la matriz compleja que representa al operador cuadrático sea simétrica; lo cual siempre es posible.

**Definición A.0.6** *Cualquier polinomio de la forma A.2, donde  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  y  $A = (a_{rs})$  es una matriz compleja simétrica, es llamado una forma cuadrática en  $\mathbb{C}^n$ . La matriz  $A$  es la matriz de esta forma y los números  $a_{rs}$  son sus coeficientes.*

Si  $\phi(X, X)$  es un operador cuadrático en  $\mathbb{C}^n$  y  $\phi(X, X) = x^T Ax$ , donde  $A$  es una matriz compleja simétrica y  $x$  es el vector que representa a  $X$  con respecto a alguna base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^n$ , decimos entonces que la forma cuadrática  $x^T Ax$  (o alternativamente, la matriz  $A$ ) *representa* al operador cuadrático  $\phi(X, X)$  con respecto a  $\mathcal{B}$ .

**Teorema A.0.7** Para cada base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^n$ , existe una correspondencia biunívoca entre operadores cuadráticos en  $\mathbb{C}^n$  y formas cuadráticas en  $\mathbb{C}^n$  y matrices simétricas complejas.

**Teorema A.0.8** Dos matrices complejas simétricas  $A$  y  $B$  de  $n \times n$  representan al mismo operador cuadrático con respecto a algunas bases en  $\mathbb{C}^n$  si y sólo si son congruentes, es decir, si existe una matriz compleja  $P$  no singular de  $n \times n$  tal que  $B = P^T A P$ .

**Definición A.0.9** Decimos que una forma cuadrática es no degenerada o no singular si el determinante de su matriz asociada no se hace cero.

La sustitución  $x' = Px$  para las variables de la forma cuadrática  $x^T A x$ , donde  $P$  es una matriz compleja no singular, es llamada una *transformación lineal no singular de la forma cuadrática*.

**Teorema A.0.10** La sustitución  $x = Px'$ , donde  $P$  es una matriz compleja no singular de  $n \times n$ , cambia a la forma cuadrática en  $\mathbb{C}^n$  asociada a la matriz  $A$  en una forma cuadrática en  $\mathbb{C}^n$  asociada a la matriz  $P^T A P$ . El rango de la forma cuadrática es invariante bajo tal sustitución.

Si  $\phi(X, X)$  es un operador cuadrático en  $\mathbb{C}^n$  y  $\phi(X, Y)$  un operador bilineal que da lugar al operador cuadrático  $\phi(X, X)$  cuando sustituimos  $Y = X$ , entonces, en general  $\phi(X, Y) \neq \phi(Y, X)$ . Sin embargo,

$$\psi(X, Y) := \frac{1}{2} \{ \phi(X, Y) + \phi(Y, X) \}$$

es el único operador bilineal simétrico  $\psi(X, Y)$  que da lugar a  $\phi(X, X)$ . El operador  $\psi(X, Y)$  es llamado el *operador polarizado* de  $\phi(X, X)$  y satisface la igualdad

$$2\psi(X, Y) = \phi(X + Y, X + Y) - \phi(X, X) - \phi(Y, Y),$$

que es llamada la *identidad de polarización*.

No es difícil ver que si el operador cuadrático  $\phi(X, X)$  es representado por la forma cuadrática  $x^T A x$ , entonces su operador polarizado  $\psi(X, Y)$  es representado, con respecto a la misma base, por la forma bilineal  $x^T A y$ . La forma bilineal  $x^T A y$  es llamada la *forma polarizada* de la forma cuadrática  $x^T A x$ . En términos de las formas que representan a los operadores, la identidad de polarización se escribe como

$$2x^T A y = (x + y)^T A (x + y) - x^T A x - y^T A y$$

**Definición A.0.11** Si  $\phi$  y  $\psi$  son dos formas cuadráticas en  $\mathbb{C}^n$  y  $\psi$  es obtenida aplicando una transformación lineal compleja y no singular a  $\phi$ , decimos entonces que  $\phi$  y  $\psi$  son equivalentes.

**Teorema A.0.12** Dos formas cuadráticas en  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango. En particular todas las formas cuadráticas no degeneradas en  $\mathbb{C}^n$  son equivalentes.

**Definición A.0.13** Si  $x^T Ax$ , donde  $A$  es una matriz compleja simétrica, es una forma cuadrática en  $\mathbb{C}^n$ ; el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}^n : x^T Ax = 0\} \quad (\text{A.3})$$

es llamado una cuádrlica de  $\mathbb{C}^n$

**Definición A.0.14** La proyectivización de los puntos distintos de cero de la cuádrlica A.3 en  $\mathbb{C}^n$ , es llamada una cuádrlica de  $\mathbb{CP}^{n-1}$ . Decimos que la ecuación  $x^T Ax = 0$  es la ecuación de la cuádrlica de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  y que la forma cuadrática  $x^T Ax$  es la forma cuadrática asociada a la cuádrlica de  $\mathbb{CP}^{n-1}$ .

**Definición A.0.15** Decimos que dos cuádrlicas de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  son equivalentes si la ecuación de una de ellas puede ser transformada en la ecuación de la otra mediante una transformación lineal  $x' = Px$  compleja no singular de  $n \times n$ . De esta manera la equivalencia de las cuádrlicas de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  es igual a la equivalencia de las formas cuadráticas (de  $\mathbb{C}^n$ ) asociadas.

**Teorema A.0.16** Dos cuádrlicas de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  son equivalentes si y sólo si las formas cuadráticas de  $\mathbb{C}^n$  asociadas tienen el mismo rango. Por lo tanto, todas las cuádrlicas no degeneradas de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  son equivalentes.

De esta manera existen  $n$  clases de equivalencia de cuádrlicas de  $\mathbb{CP}^{n-1}$ , las cuales están representadas por:

- $x_1^2 = 0$
- $x_1^2 + x_2^2 = 0$
- $\vdots$
- $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$

# Apéndice B

## Lema de fibración de Ehresmann

En este Capítulo enunciamos un Lema clásico de topología diferencial. La prueba de este Lema se puede consultar en Teorema 9.5.6 de [5, p. 165]

**Teorema B.0.1 (Lema de fibración de Ehresmann)** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una submersión propia. Entonces  $f$  es un fibrado localmente trivial.*

A continuación enunciaremos una modificación del Lema anterior. La prueba de este Lema es esencialmente la misma que la del Lema de fibración de Ehresmann.

**Teorema B.0.2** *Supongamos que  $f : M \rightarrow N$  es una submersión. Si  $f^{-1}(x)$  es compacto para algún  $x \in N$ , entonces existe una vecindad de  $f^{-1}(x)$  en la que la restricción de  $f$  es un fibrado trivial.*



# Apéndice C

## Topologías en espacios de funciones

En este Capítulo recordaremos la topología compacto-abierta en el espacio de funciones continuas y la topología  $C^\infty$  en el espacio de funciones infinitamente diferenciables.

Sea  $X$  un espacio métrico y  $C(X, X)$  el conjunto de todas las funciones continuas  $f : X \rightarrow X$ . Para todo compacto  $K \subset X$  y para todo abierto  $U \subset X$ , sea  $V(K, U)$  el conjunto de todas las funciones  $f \in C(X, X)$  tales que  $f(K) \subset U$ . La colección de todos los  $V(K, U)$  es una subbase para una topología en  $C(X, X)$ , la cual es llamada *la topología compacto-abierta*.

Es fácil ver que  $f_n \rightarrow f$  en la topología compacto-abierta si y sólo si para todo compacto  $K \subset X$  y para todo abierto  $U$  tal que  $f(K) \subset U$  existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $n \geq N$ ,  $f_n(K) \subset U$ .

**Proposición C.0.1** *Si  $X$  es un espacio métrico,  $f : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo y para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo. Se tiene que  $f_n \rightarrow f$  en la topología compacto-abierta si y sólo si  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos.*

**Demostración:**  $\Rightarrow$ ) Sea  $K \subset X$  un compacto cualquiera y  $\epsilon > 0$ , consideremos la cubierta abierta

$$\left\{ B_{\frac{\epsilon}{4}}(f(x)) \right\}_{x \in K}$$

de  $K$ . Por lo que existe una subcubierta finita

$$\left\{ B_{\frac{\epsilon}{4}}(f(x_1)), \dots, B_{\frac{\epsilon}{4}}(f(x_k)) \right\}$$

de  $K$ . Entonces, se tiene que, para toda  $i = 1, \dots, k$ ,

$$K_i := K \cap f^{-1}\left(\overline{\bigcap B_{\frac{\epsilon}{4}}(f(x_i))}\right)$$

es compacto,  $f(K_i) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(f(x_i))$  y

$$K = \bigcup_{i=1}^k K_i.$$

Como  $f_n \rightarrow f$  en la topología compacto abierta, correspondiente a  $K_i$  y a  $B_{\frac{\epsilon}{2}}(f(x_i))$ , existe  $N_i \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $n \geq N_i$ ,

$$f_n(K_i) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(f(x_i)).$$

Sea  $N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$ . Entonces, para toda  $x \in K$ , se tiene que existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x \in K_i$ , entonces, por lo anterior,  $f(x) \in f(K_i) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(f(x_i))$  y, para toda  $n \geq N$ ,  $f_n(x) \in f_n(K_i) \subset B_{\frac{\epsilon}{2}}(f(x_i))$ , por lo que, para toda  $n \geq N$ ,  $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ .

$\Leftrightarrow$ ) Sea  $K \subset X$  un compacto cualquiera y  $U \subset X$  un abierto cualquiera tal que  $f(K) \subset U$ . Como  $U - X$  es un cerrado y  $f(K)$  es un compacto tal que  $(U - X) \cap f(K) = \emptyset$ , entonces  $d(f(K), X - U) > 0$ . Sea  $\epsilon := d(f(K), X - U)$ , entonces  $\{B_\epsilon(f(x))\}_{x \in K}$  es una cubierta abierta del compacto  $f(K)$ , tal que

$$\bigcup_{x \in K} B_\epsilon(f(x)) \subset U.$$

Como, por hipótesis  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, correspondiente a  $K$  y a  $\epsilon$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $n \geq N$  y para toda  $x \in K$ ,

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon,$$

entonces  $f_n(x) \in B_\epsilon(f(x)) \subset U$ . Por lo que, para toda  $n \geq N$ ,  $f_n(K) \subset U$ ; por lo tanto,  $f_n \rightarrow f$  con respecto a la topología compacto-abierta.

A continuación definamos una topología en el espacio  $C^r(M, N)$  de funciones  $r$ -diferenciables de la variedad diferenciable  $M$  en la variedad diferenciable  $N$ .

Sea  $f \in C^r(M, N)$ ,  $(\phi, U)$  una carta de  $M$ ,  $K \subset U$  un compacto,  $(\psi, V)$  una carta de  $N$ , tal que  $f(K) \subset V$  y  $\epsilon > 0$ . Sea

$$B^r(f; (\phi, U), K, (\psi, V), \epsilon)$$

el conjunto formado por las funciones  $g \in C^r(M, N)$  tales que  $g(K) \subset V$  y, para toda  $x \in \phi(K)$ , y para toda  $k = 0, 1, \dots, r$ ,

$$\|D^k(\psi f \phi^{-1})(x) - D^k(\psi g \phi^{-1})(y)\| < \epsilon,$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana estándar.

La colección de todos los conjuntos de la forma  $B^r(f; (\phi, U), K, (\psi, V), \epsilon)$ , sobre todas las  $f \in C^r(M, N)$ , cartas  $(\phi, U)$  de  $M$ , cartas  $(\psi, V)$  de  $N$ ,  $\epsilon > 0$  y compactos  $K \subset U$ , tal que  $f(K) \subset V$ , es una subbase para una topología en  $C^r(M, N)$ .

Consideremos el espacio  $C^\infty(M, N)$  de funciones infinitamente diferenciables de  $M$  en  $N$ . La unión de todas las topologías inducidas por las inclusiones  $C^\infty(M, N) \rightarrow C^r(M, N)$  es una topología en  $C^\infty(M, N)$ , llamada la *topología*  $C^\infty$ .

# Apéndice D

## Compactificación por puntas de variedades

En este Capítulo, estudiaremos la compactificación por puntas de variedades diferenciables (ver [29] y [12]) ya que, en el Capítulo 9, estudiaremos la construcción de A. Guillot de una compactificación de  $\Gamma \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , donde  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  es un grupo kleiniano clásico convexo-cocompacto y sin torsión.

A lo largo de este Capítulo,  $M$  será una variedad diferenciable y denotaremos por  $A(M)$  al conjunto de todos los abiertos de  $M$  con cerradura compacta. Si  $U \in A(M)$ , una componente conexa de  $M - \bar{U}$  cuya cerradura en  $M$  no es compacta es llamada *componente conexa no acotada* de  $M - \bar{U}$ .

**Proposición D.0.1** *Si  $M$  es una variedad diferenciable, entonces existe una sucesión creciente  $\{U_n\}$  de elementos en  $A(M)$  tales que*

1.  $M = \bigcup_n \bar{U}_n = \bigcup_n U_n$  y  $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ .

2. *Se tiene que  $M$  es compacta si y sólo si esta unión es finita.*

**Demostración:** Sabemos que, para toda variedad diferenciable  $M$  existe una función suave y propia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Por el Lema de Sard, sabemos que Lebesgue-casi todo punto en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  es un valor regular. Sea  $n_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  un valor regular de  $f$ , tal que  $f^{-1}(n_1) \neq \emptyset$ ; como  $f^{-1}([0, n_1])$  y  $f^{-1}((n_1, \infty))$  son abiertos en  $M$ , todos los puntos son interiores, por lo que

$$\mathrm{Fr}\left(f^{-1}([0, n_1])\right) \subset f^{-1}(n_1).$$

Si  $z \in f^{-1}(n_1) - \mathrm{Fr}\left(f^{-1}([0, n_1])\right)$ , entonces existe  $U \subset M$  y  $z \in U$  tal que para todo  $u \in U$ ,  $f(z) \leq n_1$ ; pero esto no puede suceder ya que  $z$  sería un punto crítico, en contradicción a como escogimos a  $n_1$ . Entonces

$$\overline{f^{-1}([0, n_1])} = f^{-1}([0, n_1]).$$

Notemos que  $M$  es compacta si y sólo si  $f$  es acotada. Sea  $(n_l)$  una sucesión estrictamente creciente de valores regulares de  $f$ , tales que  $\lim_{l \rightarrow \infty} n_l = \infty$ , entonces, como  $M$  es conexa, pueden suceder dos cosas: la primera es que exista  $L \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $l \geq L$ ,  $f^{-1}(n_l) = \emptyset$  (si  $M$  es compacto) y la segunda es que, para todo  $l \in \mathbb{N}$ ,  $f^{-1}(n_l) \neq \emptyset$  (si  $M$  no es compacto).

Para todo  $l \in \mathbb{N}$  sea  $U_{n_l} := f^{-1}([0, n_l])$ , entonces, por los mismos argumentos que para  $n_1$ , si  $f^{-1}(n_l) \neq \emptyset$  tenemos que  $\bar{U}_n = f^{-1}([0, n_l])$ . Si  $f^{-1}(n_l) = \emptyset$ , entonces  $f^{-1}([0, n_l]) = M$ . Además

$$M = f^{-1}(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) = f^{-1}\left(\bigcup_l [0, n_l]\right) = \bigcup_l \bar{U}_{n_l} = f^{-1}\left(\bigcup_l [0, n_l]\right) = \bigcup_l U_{n_l},$$

y  $\bar{U}_{n_l} = f^{-1}([0, n_l]) \subset f^{-1}([0, n_{l+1}])$ .

Claramente,  $M$  es compacto si y sólo si la unión anterior es finita.  $\square$

**Lema D.0.2** Si  $V, U \in A(M)$  son tales que  $\bar{V} \subset U$ , entonces, a lo más un número finito de componentes no acotadas de  $M - \bar{V}$  intersecan a  $M - \bar{U}$ . En particular, para toda  $V \in A(M)$ , existe, a lo más, un número finito de componentes conexas no acotadas de  $M - \bar{V}$ .

Decimos que el espacio  $M$  tiene al menos  $k$  puntas si existe  $V \in A(M)$  tal que  $M - \bar{V}$  tiene al menos  $k$  componentes conexas no acotadas. El espacio  $M$  tiene *exactamente*  $k$  puntas si tiene al menos  $k$  puntas pero no tiene al menos  $k + 1$  puntas.

Si  $U, V \in A(X)$ ,  $\bar{V} \subset U$ , entonces cada componente conexa no acotada de  $M - \bar{U}$  está contenida en una componente conexa no acotada de  $M - \bar{V}$ . Más aún, cada componente no acotada de  $M - \bar{V}$  interseca, al menos, una componente conexa no acotada de  $M - \bar{U}$ . Si  $M$  tiene exactamente  $k$  puntas, entonces, existe  $V \in A(M)$  tal que  $M - \bar{V}$  tiene exactamente  $k$  componente conexas no acotadas y si  $\bar{V} \subset U \in A(M)$ , entonces  $U$  tiene la misma propiedad.

Sea  $A$  un conjunto que indexa al conjunto  $A(M)$ . Consideremos el orden parcial en  $A$  definido por  $\alpha < \beta$  si  $V_\alpha, V_\beta \in A(X)$  y  $\bar{V}_\alpha \subset V_\beta$ . Sea  $A_\alpha = \{A_\alpha^i\}_{i=1}^\alpha$  la colección de todas las componentes conexas no acotadas de  $X - \bar{V}_\alpha$ . Si  $\alpha < \beta$ , sea  $\pi_\alpha^\beta : A_\beta \rightarrow A_\alpha$  el mapeo inducido por la inclusión  $(X - \bar{V}_\beta) \subset (X - \bar{V}_\alpha)$ , es decir,  $\pi_\alpha^\beta$  manda cada componente conexa no acotada  $A_\beta^i$  de  $X - \bar{V}_\beta$  en la única componente conexa no acotada de  $X - \bar{V}_\alpha$  que contiene a  $A_\beta^i$ . Por el párrafo anterior es claro que  $\pi_\alpha^\beta$  es sobreyectiva. La colección  $\{A_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$  forma un sistema inverso de conjuntos. Sea  $B$  el límite inverso del sistema, es decir,

$$\begin{aligned} B &:= \varprojlim A_\alpha := \{(A_\alpha^i)_\alpha : \forall \alpha \quad A_\alpha^i \in A_\alpha, \forall \gamma, \beta, \gamma < \beta \quad A_\beta^i \subset A_\gamma^i\} \\ &= \{(A_\alpha^i)_\alpha : \forall \alpha \quad A_\alpha^i \in A_\alpha, \forall \gamma, \beta, \gamma < \beta \quad \pi_\gamma^\beta(A_\beta^i) = A_\gamma^i\} \end{aligned}$$

que es claramente un subconjunto de  $\prod_\alpha A_\alpha$ . Los elementos de  $B$  los llamamos *puntas* de  $M$ . El conjunto  $B$  es llamado el *espacio de puntas* de  $M$ . Para todo  $\alpha \in A$ , consideremos la topología discreta en el conjunto finito  $A_\alpha$  y la topología producto en  $B$ .

Si  $(a_\alpha) \in \overline{B}$ , entonces, para todo  $\alpha \in A$ , para todo  $\gamma, \beta \in A$ ,  $\gamma < \beta < \alpha$ ,  $\pi_\gamma^\beta(a_\beta) = a_\gamma$ , entonces  $(a_\alpha) \in B$ . Por lo que  $B$  es un subespacio cerrado de  $\prod_\alpha A_\alpha$  y por tanto, compacto.

Si  $a \in B$ , para toda  $\alpha \in A$ , sea  $\pi_\alpha : B \rightarrow A_\alpha$  la proyección en la  $\alpha$ -ésima coordenada, entonces, claramente, para todo  $\alpha, \beta \in A$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta = \pi_\alpha$ .

Para todo  $a \in B, \alpha \in A$ , sea  $A_\alpha^{\alpha(a)} := \pi_\alpha(a)$  la componente no acotada de  $A_\alpha$  que es la  $\alpha$ -ésima coordenada de  $a$ , sea  $B^{\alpha(a)}$  el conjunto de puntas de  $b \in B$  tales que  $\pi_\alpha(b) = A_\alpha^{\alpha(a)}$ . La colección  $\mathcal{B}$  que consiste de todos los abiertos de  $M$  y de todos los conjuntos de la forma  $N_a^\alpha := A_\alpha^{\alpha(a)} \cup B^{\alpha(a)}$  es una topología de  $M' := M \cup B$ .

**Teorema D.0.3** *El espacio  $M' = M \cup B$  es Hausdorff, conexo y compacto. La topología de  $B$  como límite inverso es la topología de subespacio de  $M'$ .*

**Demostración:** Si consideramos dos puntos distintos de  $M$ , sabemos que existen vecindades en  $M$  que los separan. Si  $x \in M$  y  $(a_\alpha) \in B$ , sea  $U_\beta$  un elemento del conjunto  $A(M)$  que contiene a  $x$ , entonces  $U_\beta$  y  $N_a^\beta$  son vecindades en  $M'$  de  $x$  y de  $(a_\alpha)$ , respectivamente, que los separan. Si  $a = (a_\alpha)$  y  $b = (b_\alpha)$  son dos puntos distintos de  $B$ , entonces, existe un  $\beta \in A$  tal que  $a_\beta \neq b_\beta$ ; por lo tanto,  $N_a^\beta$  y  $N_b^\beta$  son dos vecindades en  $M'$  de  $a$  y  $b$ , respectivamente, que los separan. Por lo tanto, el espacio  $M'$  es Hausdorff.

Supongamos que existen dos abiertos no vacíos  $U_1$  y  $U_2$  de  $M'$  que lo separan. Como todo abierto de  $M'$  interseca a  $M$ , entonces  $U_1 \cap M$  y  $U_2 \cap M$  serían dos abiertos no vacíos de  $M$  que lo separan. Como  $M$  es conexo, lo anterior no puede ser; por tanto,  $M'$  es conexo.

Sea  $\mathcal{V}$  una cubierta abierta de  $M'$ . Afirmamos que existe  $\alpha \in A$  tal que, para toda  $i = 1, \dots, i_\alpha$ ,  $A_\alpha^i$  está contenido en algún elemento de la cubierta  $\mathcal{V}$ . Esto ya, que de lo contrario, sería posible construir un elemento en  $B$  que no estuviera contenido en la cubierta  $\mathcal{V}$ . Entonces  $M' = \overline{U_\alpha} \cup \bigcup_{i=1}^{i_\alpha} A_\alpha^i$  es una unión finita de compactos y, por tanto, compacto.

Si  $a = (a_\alpha) \in B$  y  $N_a^{\alpha(a)}$  es una vecindad de  $a$  en  $M'$ , entonces  $N_a^{\alpha(a)} \cap B = B^{\alpha(a)}$  son todas las puntas cuya  $\alpha$ -ésima coordenada es  $A_\alpha^{\alpha(a)}$  el cual es un básico de  $B$  con la topología de límite inverso. Más aún la colección  $B^{\alpha(a)}$ , sobre todas las  $a \in B$ , es una base para  $B$  con la topología de límite inverso. Por lo tanto la topología de  $B$  como límite inverso es la topología de  $B$  como subespacio de  $M'$ .  $\square$

**Proposición D.0.4**  *$M$  es compacto si y sólo si no tiene puntas ( $B = \emptyset$ ).*

**Demostración:** Si  $M$  es compacta, entonces, para toda  $U_\alpha \in A(M)$  y para toda  $A_\alpha^i$  componente conexa de  $M - U_\alpha$ , se tiene que  $\overline{A_\alpha^i}$  es un cerrado contenido en un compacto; por lo tanto, es compacto. Entonces,  $M$  no tiene puntas.

Si  $M$  no tiene puntas, entonces existe  $U_\alpha \in A(M)$  tal que toda componente conexa de  $M - U_\alpha$  es no acotada. Entonces  $M$  es una unión finita de compactos y, por tanto, es compacto.  $\square$

Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $K$  es una subvariedad encajada compacta de  $M$ , decimos que  $K$  *no separa localmente a  $M$*  si existe una vecindad tubular  $UK$  de  $K$  tal que  $UK - K$  es conexo.

**Proposición D.0.5** *Si  $K \subset M$  es una subvariedad encajada compacta y conexa que no separa localmente a  $M$ . Entonces, el espacio de puntas de  $M - K$  es homeomorfo a la unión del espacio de puntas de  $M$  más un punto aislado.*

**Demostración:** Sea  $B_M$  el espacio de puntas de  $M$  y  $B_{M-K}$  el espacio de puntas de  $M - K$ . Daremos una función  $F : B_M \rightarrow B_{M-K}$ , mostraremos que es un homeomorfismo sobre su imagen y que  $B_{M-K} - F(B_M)$  es un punto aislado.

Por la Proposición D.0.1, existe una colección  $\{U_n\}$  de  $A(M)$  tal que  $M = \bigcup_n U_n$  y  $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ .

Para cada  $\alpha \in A$ , sea  $n_\alpha$  el natural más grande tal que  $U_{n_\alpha} \subset U_\alpha$ .

Sea  $UK$  una vecindad tubular de radio  $\epsilon$  que no separa a  $K$ . Para toda  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $UK_n$  la vecindad tubular de  $K$  de radio  $\epsilon/n$ . Notemos que, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $UK_n$  tampoco separa localmente a  $K$ .

Para cada  $\alpha \in A$ , se tiene que  $V_\alpha := U_\alpha \cap [M - UK_{n_\alpha}] \in A(M - K)$ .

Como  $\overline{UK}$  es un compacto, existe  $\alpha_k \in A$  tal que  $\overline{UK} \subset U_{\alpha_k}$ . Por lo que, para todo  $\alpha \geq \alpha_k$ ,  $\overline{UK} \subset U_\alpha$ .

Si  $a := (a_\alpha) = (A_\alpha^{\alpha(a)})_\alpha \in B_M$ . Definiremos  $F(a) \in B_{M-K}$ ; para todo  $\alpha \geq \alpha_k$ ,  $A_\alpha^{\alpha(a)} = \pi_\alpha(a)$  es, tanto una componente conexa no acotada de  $M - \bar{U}_\alpha$ , como una componente conexa no acotada de  $(M - K) - \bar{V}_\alpha$ , entonces  $\forall \alpha \geq \alpha_k$  sea  $(F(a))_\alpha := A_\alpha^{\alpha(a)}$ . Para toda  $\alpha < \alpha_k$ , sea  $(F(a))_\alpha$  la única componente conexa no acotada de  $M - \bar{V}_\alpha$  que contiene a  $A_\alpha^{\alpha(a)}$ ; claramente  $F(a) \in B_{M-K}$ .

Se tiene que  $F$  es inyectiva ya que si  $a, \bar{a} \in B$ ,  $a \neq \bar{a}$ , entonces, existe  $\alpha \in A$  tal que  $a_\alpha \neq \bar{a}_\alpha$  y, por construcción de las  $\{A_\alpha\}$ , tenemos que, para toda  $\beta \geq \alpha$ ,  $a_\beta \neq \bar{a}_\beta$ . Por lo tanto,  $F(a) \neq F(\bar{a})$ .

Supongamos  $a \in B$  y  $B^{\alpha(a)} = \{b \in B : \pi_\alpha(b) = \alpha(a)\}$  básico de  $B_M$  que contiene a  $a$ ; si  $\alpha \geq \alpha_k$ , entonces  $F(B^{\alpha(a)}) = B^{\alpha(F(a))}$ ; si  $\alpha < \alpha_k$ , sean  $A_{a_1}^{\alpha_k(a_1)}, \dots, A_{a_k}^{\alpha_k(a_k)}$  todas las componentes conexas de  $M - \bar{U}_{\alpha_k}$  no acotadas contenidas en  $A_a^{\alpha(a)}$ , para algunas  $a_1, \dots, a_k \in B_M$ , entonces  $B^{\alpha(a)} = \bigcup_{i=1}^k B^{\alpha_k(a_i)}$  y  $F(B^{\alpha(a)}) = \bigcup_{i=1}^k B^{\alpha_k(F(a_i))}$ , por lo que  $F$  es abierta; sea  $F(a) \in B^{\alpha(F(a))}$  un básico de  $M_{M-K}$  que contiene a  $F(a)$ , si  $\alpha \geq \alpha_k$ , entonces  $F^{-1}(B^{\alpha(F(a))}) = B^{\alpha(a)}$ , si  $\alpha < \alpha_k$ , sean  $A_{F(a_1)}^{\alpha_k(F(a_1))}, \dots, A_{F(a_k)}^{\alpha_k(F(a_k))}$  todas las componentes conexas no acotadas contenidas en  $A_{F(a)}^{\alpha(F(a))}$ , para algunas  $F(a_1), \dots, F(a_k) \in F(B_M)$ , entonces  $B^{\alpha(F(a))} = \bigcup_{i=1}^k B^{\alpha_k(F(a_i))}$  y  $F^{-1}(B^{\alpha(F(a))}) = \bigcup_{i=1}^k B^{\alpha_k(a_i)}$ , por lo que  $F$  es continua; por tanto, es un homeomorfismo sobre su imagen.

Como para todo  $\alpha \geq \alpha_k$  hay exactamente una componente no acotada de  $M - \bar{V}_\alpha$  distinta de las provenientes de  $M$ , a saber,  $UK_{n_\alpha} - K$ , entonces  $c := \{UK_{n_\alpha} - K\}_\alpha$  es una punta de

$M - K$  y  $(UK_{\alpha_k} - K) \cap B^{\alpha_k(c)}$  es un básico de  $B_{M-K}$  tal que la única punta que contiene es a  $c$ ; por lo tanto,  $c$  es aislada.

Por lo que el espacio de puntas de  $M - K$  es igual al espacio de puntas de  $M$  unión un punto aislado.  $\square$

**Proposición D.0.6** *Si en la Proposición anterior,  $K$  tiene  $k$  componentes conexas, entonces, el espacio de puntas de  $M - K$  es igual al espacio de puntas de  $M$  más  $k$  puntos aislados.*

**Demostración:** Para cada componente conexa compacta de  $K$ , escojamos vecindades tubulares ajenas y utilicemos la misma idea de la Proposición anterior.  $\square$

**Proposición D.0.7** *Si  $K$  es una subvariedad encajada compacta de  $M$ . Entonces,  $M$  es compacta si y sólo si el número de puntas de  $M - K$  es finito e igual al número de componentes conexas de  $K$ .*

**Demostración:**  $\Leftarrow$ ) Supongamos que el número de puntas de  $M - K$  es finito e igual al número de componentes conexas de  $K$ . Por la Proposición D.0.6,  $M$  tiene también un número finito de puntas. Sean  $P_{M-k}$  y  $P_M$  el número de puntas de  $M - K$  y de  $M$ , respectivamente. Sabemos que toda subvariedad encajada compacta  $K$  tiene un número finito de componentes conexas, denotemos por  $C_K$  tal número. Entonces por la Proposición D.0.6,  $P_{M-K} = P_M + C_K$  y, por hipótesis,  $P_{M-k} = C_k$ , entonces  $P_M = 0$ , es decir,  $M$  es compacta.

$\Rightarrow$ ) Si  $M$  es compacta, por la Proposición D.0.6 tenemos que  $M$  no tiene puntas. Entonces, por la Proposición D.0.6, el espacio de puntas de  $M - K$  es igual al número de componentes conexas de  $K$ .  $\square$

**Proposición D.0.8** *Si  $g : M \rightarrow N$  es un fibrado diferenciable con fibra compacta y conexa, entonces los espacios de puntas de  $M$  y de  $N$  son homeomorfos.*

**Demostración :** Sabemos que  $g$  es abierta, propia y la preimagen de conexos es conexo.

Mostraremos que  $g^{-1}(\bar{A}) = \overline{g^{-1}(A)}$ . Si  $x \in g^{-1}(A)$ , sea  $V$  abierto que contiene a  $g(x)$ , entonces, por continuidad,  $g^{-1}(V)$  es un abierto que contiene a  $x$ , por lo que existe  $y \in g^{-1}(V) \cap g^{-1}(A)$  y  $g(y) \in V \cap A$ . Por lo tanto,  $x \in g^{-1}(\bar{A})$ . Si  $x \in g^{-1}(\bar{A})$ , sea  $U$  abierto que contiene a  $x$ , entonces, como  $g$  es abierta,  $g(U)$  es un abierto que contiene a  $g(x)$ , por lo que existe  $a \in A \cap g(U)$ ; esto es, existe  $u \in U$  tal que  $a = g(u)$ , por lo que  $u \in U \cap g^{-1}(A)$ ; esto es,  $x \in \overline{g^{-1}(A)}$ .

Por lo anterior, y como  $g$  es propia y continua, para todo  $n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, k$ ;  $\bar{A}_j^n$  es compacta si y sólo si  $g^{-1}(\bar{A}_j^n) = \overline{g^{-1}(A_j^n)}$  es compacto.

Por lo tanto, si  $U \in A(N)$ , entonces  $g^{-1}(U) \in A(M)$ . Además, para toda  $n \in \mathbb{N}$ , si  $A_1^\alpha, \dots, A_k^\alpha$  son las componentes conexas de  $M - \bar{U}_\alpha$ , entonces, como la preimagen de conexos es conexo,  $g^{-1}(A_1^\alpha), \dots, g^{-1}(A_k^\alpha)$  son conexos, ajenos dos a dos; como conexos van en conexos, si  $g^{-1}(A_i^\alpha) \cup g^{-1}(A_j^\alpha)$  fuese conexo, entonces  $A_i^\alpha \cup A_j^\alpha$  sería conexo. Por lo tanto,  $g^{-1}(A_1^\alpha), \dots, g^{-1}(A_k^\alpha)$  son las componentes conexas de  $M - g^{-1}(\bar{U}_\alpha)$

Por lo anterior,  $A_j^n$  es una componente conexa no acotada de  $N - \bar{U}_\alpha$  si y sólo si  $g^{-1}(A_j^n)$  es una componente conexa no acotada de  $M - \overline{g^{-1}(\bar{U}_\alpha)}$ . Por lo que tenemos de manera natural una biyección entre las puntas si  $B_M, B_N$  son los espacios de puntas de  $M$  y  $N$ , respectivamente,  $a := \{A_a^{\alpha(a)}\}_\alpha \in B_N \leftrightarrow \hat{a} := \{g^{-1}(A_a^{\alpha(a)})\}_\alpha \in B_M$ . Esta biyección entre

$B_M$  y  $B_N$  induce una biyección entre los básicos de los espacios de puntas  $B^{\alpha(a)} \leftrightarrow B^{\alpha(\hat{a})}$ .  
□

# Bibliografía

- [1] Lars V. Ahlfors, *Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **55** (1966), 251–254.
- [2] Angel Cano, Juan Pablo Navarrete, and José Seade, *Complex Kleinian groups*, Progress in Mathematics, vol. 303, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.
- [3] Françoise Dal’Bo, *Geodesic and horocyclic trajectories*, Universitext, Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, 2011, Translated from the 2007 French original.
- [4] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [5] Bjørn Ian Dundas, *Differential Topology*, Cambridge University Press, to appear.
- [6] Charles Frances, *Lorentzian Kleinian groups*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), no. 4, 883–910.
- [7] Étienne Ghys, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de  $SL(2, \mathbf{C})$* , J. Reine Angew. Math. **468** (1995), 113–138.
- [8] Roe Goldman and Nolan R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 255, Springer, Dordrecht, 2009.
- [9] William M. Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987), Contemp. Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 169–198.
- [10] ———, *Topological components of spaces of representations*, Invent. Math. **93** (1988), no. 3, 557–607.
- [11] François Guéritaud, Olivier Guichard, Fanny Kassel, and Anna Wienhard, *Compactification of certain Clifford-Klein forms of reductive homogeneous spaces*, Michigan Math. J. **66** (2017), no. 1, 49–84.
- [12] Adolfo Guillot, *Sur les équations d’Halphen et les actions de  $SL_2(\mathbf{C})$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2007), no. 105, 221–294.

- [13] Heisuke Hironaka, *On resolution of singularities (characteristic zero)*, Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, pp. 507–521.
- [14] Jay Jorgenson and Serge Lang, *The heat kernel and theta inversion on  $SL_2(\mathbf{C})$* , Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2008.
- [15] Michael Kapovich, *Kleinian groups in higher dimensions*, Geometry and dynamics of groups and spaces, Progr. Math., vol. 265, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 487–564.
- [16] Fanny Kassel, *Deformation of proper actions on reductive homogeneous spaces*, Math. Ann. **353** (2012), no. 2, 599–632.
- [17] Masahide Kato, *Compact complex 3-folds with projective structures: the infinite cyclic fundamental group case*, Saitama Math. J. **4** (1986), 35–49.
- [18] Svetlana Katok, *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [19] Irwin Kra, *On lifting Kleinian groups to  $SL(2, \mathbf{C})$* , Differential geometry and complex analysis, Springer, Berlin, 1985, pp. 181–193.
- [20] R. S. Kulkarni, *Groups with domains of discontinuity*, Maths. Ann. **237** (1978), no. 3, 253–272.
- [21] Finnur Lárusson, *Compact quotients of large domains in complex projective space*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 1, 223–246.
- [22] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013.
- [23] A. Marden, *Outer circles*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, An introduction to hyperbolic 3-manifolds.
- [24] Bernard Maskit, *Kleinian groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 287, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [25] L. Mirsky, *An introduction to linear algebra*, Oxford, at the Clarendon Press, 1955.
- [26] Madhav V. Nori, *The Schottky groups in higher dimensions*, The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984), Contemp. Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 195–197.
- [27] Barrett O’Neill, *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, 1983.
- [28] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer, New York, 2006.

- [29] Frank Raymond, *The end point compactification of manifolds*, Pacific J. Math. **10** (1960), 947–963.
- [30] Reinhold Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [31] José Seade and Alberto Verjovsky, *Higher dimensional complex Kleinian groups*, Math. Ann. **322** (2002), no. 2, 279–300.
- [32] William P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy.
- [33] Pekka Tukia, *The Hausdorff dimension of the limit set of a geometrically finite Kleinian group*, Acta Math. **152** (1984), no. 1-2, 127–140.