Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

EL AXIOMA DE DETERMINACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

DANIA HERNÁNDEZ FALCÓN FLORES

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2017

RESUMEN

Ramas de las matemáticas, como la topología y el análisis, usualmente se desarrollan suponiendo como cierto el Axioma de Elección (este axioma se enunciará más adelante en la tesis y de ahora en adelante lo denotaremos como AE). Es bien sabido que AE trae consigo consecuencias un tanto fortuitas, como ejemplos de esto tenemos la paradoja de Banach - Tarski o que existen conjuntos de la recta real que no poseen la Propiedad del Conjunto Perfecto. Si quisiéramos evitar dichas consecuencias, lo inmediato sería pensar en una teoría que se sustente únicamente en los axiomas de Zermelo Fraenkel, sin embargo muchos resultados quedarían fuera de nuestro alcance por lo que la idea de introducir un axioma adicional no parece tan absurda. En 1962, J. Mycielski y H. Steinhaus introdujeron el Axioma de Determinación (durante este escrito la abreviatura AD será usada para referirnos a dicho axioma) el cual es el objeto de estudio de esta tesis.

El trabajo tiene como objetivo acercar al lector al estudio del Axioma de Determinación usando conceptos y técnicas provenientes de la teoría de conjuntos y de la topología, por lo que se recomienda al mismo tener noción de los conceptos básicos de dichas áreas. Si usted desea reforzar sus conocimientos acerca de lo mencionado en este párrafo, le sugerimos consultar [1] y [2].

La tesis está dividida en tres capítulos, el primero de ellos está dedicado a presentar las nociones necesarias de la teoría de conjuntos y de topología para la amena lectura del resto del trabajo. En él se tendrán resultados sobre conjuntos equipotentes y árboles, se definirá notación y se probará la existencia de un homeomorfismo entre el conjunto de todas las sucesiones de números naturales y el conjunto de todos los números irracionales, teorema fundamental para el desarrollo del escrito.

Posteriormente, en el segundo capítulo, AD será introducido en este trabajo. Se abordarán algunas consecuencias que se tienen de suponer como cierto este axioma como el hecho de que éste y AE no son compatibles, es decir, que si se supone cierto AD, entonces AE falla. Otros resultados abarcados por la tesis son que, bajo AD, todo subconjunto de

irracionales posee la Propiedad del Conjunto Perfecto, además de la Propiedad de Baire.

Finalmente, en el tercer capítulo, se supondrá como cierto AE en lugar de AD y se estudiarán los conjuntos que satisfagan la propiedad de *"estar determinado"*.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES.

Este capítulo tiene como fin presentar algunos resultados que nos serán de utilidad en el desarrollo posterior del escrito.

Siempre que A y B sean conjuntos, $\mathcal{P}(A)$ denotará al conjunto potencia de A. Además $A \subset B$ significará $A \subseteq B$ pero $A \neq B$.

Se entenderá por *Axioma de Elección* al enunciado siguiente: "Para todo conjunto A no vacío, existe una función $e : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ de tal modo que $e(B) \in B$ para cada $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ ". Dicho enunciado se denotará como *AE*.

Se denotará a los axiomas de Zermelo - Fraenkel como *ZF*. Todos los resultados de este primer capítulo ocurrirán en ZF, es decir, que no supondremos *AE*, a menos que explícitamente se haga mención del uso de este axioma, en cuyo caso pondremos entre paréntesis las siglas *AE*.

Se denotará por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y por ω a la colección de todos los números naturales (incluyendo al cero). En el caso en que $\mathbb{R}$ tenga un buen orden, denotaremos como $\mathfrak{c}$ al primer ordinal equipotente a $\mathbb{R}$ (veáse la Definición 1.1), es decir, a su cardinalidad.

Todo número natural será considerado como un ordinal, en particular, $n = \{k \in \omega : k < n\}$ para todo $n \in \omega$. Además, si X es un conjunto bien ordenado, entonces existe un primer ordinal equipotente a X, esto último es un teorema y su demostración puede ser consultada en [2, Teorema 9.13].

Si X y Y son conjuntos y f es una función de X en Y, entonces la *imagen de* f, $\mathrm{img}(f)$, es el conjunto $\{f(x) : x \in X\}$. Si A es un subconjunto de X, diremos que *la imagen directa de* A *bajo* f es el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ y lo denotaremos como $f[A]$.

De manera análoga, si $B \subseteq Y$, entonces diremos que *la imagen inversa de* B *bajo* f es el conjunto $\{x \in X : f(x) \in B\}$ y lo denotaremos como $f^{-1}[B]$. Además, si $y \in Y$, entonces escribiremos $f^{-1}\{y\}$ en lugar de $f^{-1}[\{y\}]$.

Si $C \subseteq X$, la *restricción de* f *a* C, $f \restriction C$, es el conjunto $\{(x, y) \in f : x \in C\}$.

Conviene mencionar que si A es un conjunto no vacío, $n \in \omega$ y f es una función de n en A, entonces se tiene que $f \subseteq n \times A$ y $n = |f|$; en otros términos, $\mathrm{dom}(f) = |f|$. En este trabajo, será común usar la expresión $\langle f(0), f(1), \ldots, f(|f| - 1)\rangle$ para denotar a f, es decir, $f = \langle f(0), f(1), \ldots, f(|f| - 1)\rangle$.

1.1 Conjuntos equipotentes.

Comenzaremos la sección introduciendo un poco de notación.

Definición 1.1. Sean A y B un par de conjuntos, entonces el símbolo

(1) $A \preceq B$ será una abreviatura de la frase *"existe una función inyectiva de* A *en* B*"*.

(2) $A \prec B$ abreviará la oración *"*$A \preceq B$*, pero no existe ninguna biyección entre* A *y* B*"*.

(3) $A \approx B$ significará que existe una función biyectiva entre A y B; cuando esto último suceda, diremos que *A y B son equipotentes.*

En [2] esta notación es distinta, el lector encontrará $|A| \leqslant |B|$, $|A| < |B|$ y $|A| = |B|$ en lugar de $A \preceq B$, $A \prec B$ y $A \approx B$, respectivamente. En esta tesis introducimos dicho cambio en la notación para evitar posibles confusiones debido a que, en ZF, pueden existir conjuntos cuyo número cardinal no exista, es decir, pueden existir conjuntos que no sean equipotentes a algún número natural o a algún aleph.

Escribiremos $|A| = \aleph_0$ siempre que exista una biyección entre ω y A.

Teorema 1.2 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Si* A *y* B *son conjuntos tales que* $A \preceq B$ *y* $B \preceq A$*, entonces* $A \approx B$.

Este es un Teorema de ZF y su demostración puede ser consultada en [2, Teorema 7.25].

Definición 1.3. Sean A y B conjuntos. Denotamos por B^A a la colección de todas las funciones de A en B. Esto es, $f \in B^A$ si y sólo si f es una función de A en B.

En particular, $f \in 2^\omega$ si y sólo si f es una función de ω en 2. Además, si n es un número natural y A es un conjunto, entonces A^n es el conjunto de todas las funciones de n en A.

Definición 1.4. Sean A un conjunto y κ un cardinal. Denotamos por $[A]^\kappa$ al conjunto $\{S \subseteq A : S \approx \kappa\}$.

Proposición 1.5. *Para cada* $n \in \omega \setminus \{0\}$, $|[\omega]^n| = \omega$.

Demostración. Sea $n \in \omega \setminus \{0\}$ arbitrario. Según [2, Corolario 7.20], se tiene que ω^n es numerable. Para cada $S \in [\omega]^n$ definimos recursivamente $f_S : n \to \omega$ como $f_S(i) = \min(S \setminus \{f_S(k) : k < i\})$ para toda $i < n$. Probemos que para cada $S \in [\omega]^n$, f_S es inyectiva. En efecto, sean $i, j \in n$ distintos y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Es inmediato que $f_S(i) \in \{f_S(k) : k < j\}$ pero $f_S(j) \notin \{f_S(k) : k < j\}$; luego $f_S(i) \neq f_S(j)$.

Argumentaremos ahora que la función $\phi : [\omega]^n \to \omega^n$ dada por $\phi(S) = f_S$ es inyectiva. Sean $S, T \in [\omega]^n$ tales que $f_S = f_T$. Por definición de f_S, $\operatorname{img}(f_S) \subseteq S$ y por otro lado se tiene que $|\operatorname{dom}(f_S)| = n = |S|$. Como f_S es inyectiva, se concluye que $\operatorname{img}(f_S) = S$. Análogamente, $\operatorname{img}(f_T) = T$ y por hipótesis, $\operatorname{img}(f_S) = \operatorname{img}(f_T)$. Entonces $S = T$.

Por lo anterior, tenemos que $[\omega]^n \preceq \omega$.

Para obtener la desigualdad restante, comencemos por demostrar que $\aleph_0 = |\omega \setminus (n-1)|$. En efecto, la función $f : \omega \to \omega \setminus (n-1)$ definida como $f(m) = m + n - 1$, para toda $m \in \omega$, es biyectiva.

Para aplicar el Teorema 1.2 basta con exhibir una función inyectiva g de $\omega \setminus (n-1)$ en $[\omega]^n$. Definamos $g : \omega \setminus (n-1) \to [\omega]^n$ como $g(m) = (n-1) \cup \{m\}$. Esta función efectivamente está bien definida y es inyectiva. Luego, $\omega \preceq [\omega]^n$. $\square$

Definición 1.6. Dados cualquier conjunto A y cualquier ordinal α, se tiene que $A^{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^\beta$ y $A^{\leqslant\alpha} = A^{<\alpha+1}$.

En particular, si A es un conjunto cualquiera, entonces $s \in A^{<\omega}$ si y sólo si existe un número natural n de tal forma que $s : n \to A$. Observemos que $\emptyset$ es una función tal que $\emptyset \subseteq 0 \times A$ y, por ende, $\emptyset \in A^{<\omega}$. Además, como $0 \times A = \emptyset$, $\emptyset$ es la única función cuyo dominio es 0.

Proposición 1.7. *El conjunto* $\omega^{<\omega}$ *es equipotente a* ω.

Demostración. Para esta prueba P representará al conjunto de números primos. Sea $p : \omega \to P$ la biyección (en ZF) garantizada por [2, Teorema 7.13].

Definimos $f : \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to \omega$ mediante $f(x) = \prod_{k<|x|} p(k)^{x(k)}$, para cada $x \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$; es decir, como el producto $p(0)^{x(0)} \cdot p(1)^{x(1)} \cdot \ldots \cdot p(|x|-1)^{x(|x|-1)}$. Probemos que f es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ distintas. Si $|x| \neq |y|$, es inmediato que $f(x) \neq f(y)$ (debido a la unicidad de la descomposición en potencias de primos). En el caso contrario, definimos $A := \{k < |x| : x(k) \neq y(k)\}$. Por hipótesis, $A \neq \emptyset$, así que este conjunto tiene elemento mínimo. Sea $l = \min(A)$. Luego, $p(l)^{x(l)} \neq p(l)^{y(l)}$ y, por la unicidad de la descomposición en primos, se sigue que $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto, $\omega^{<\omega} \preceq \omega$.

Ahora, sea $g : \omega \to \omega^{<\omega}$ la función dada por $g(n) = \{(0, n)\}$, para cada $n \in \omega$. Es inmediato que g está bien definida y que es inyectiva, por lo que se tiene que $\omega \preceq \omega^{<\omega}$. $\square$

Proposición 1.8. *Si A es un conjunto numerable, entonces $A^{<\omega} \approx \omega$.*

Demostración. Sea $f : \omega \to A$ una función biyectiva y, para cada $n \in \omega$, sea $f_n : \omega^n \to A^n$ la función dada por $f_n(x) = f \circ x$ (note que estamos viendo a ω^n como la colección de todas las funciones de n en ω). Entonces, para cualesquiera $m < n < \omega$ se sigue que $\omega^m \cap \omega^n = \emptyset = A^m \cap A^n$ y, más aún, que f_m es biyectiva; en efecto, de la inyectividad de f se sigue la inyectividad de f_m y, si para toda $z \in A^n$ definimos $x := f^{-1}(z)$, entonces se tiene que $x \in \omega^n$ y que $f_m(x) = z$. De este modo, $f := \bigcup_{n\in\omega} f_n$ es una función biyectiva de $\omega^{<\omega}$ en $A^{<\omega}$. En conclusión, $A^{<\omega} \approx \omega^{<\omega} \approx \omega$. $\square$

Proposición 1.9. *Sea A un conjunto. Si $h : A \to \omega$ es una función inyectiva y para cada $a \in A$ se tiene que X_a es un conjunto y que $g_a : X_a \to \omega$ también es una función inyectiva, entonces el conjunto $\bigcup\{X_a : a \in A\}$ es a lo más numerable.*

Demostración. Empecemos por notar que para cada $n \in h[A]$ se tiene que $h^{-1}(n) \in A$ y así existe la función $g_{h^{-1}(n)}$. Sea $x \in \bigcup\{X_a : a \in A\}$ y hagamos:

$$m_x := \min\left\{n \in h[A] : x \in X_{h^{-1}(n)}\right\}.$$

Para concluir la prueba, definamos $g : \bigcup\{X_a : a \in A\} \to \omega\times\omega$ como $g(x) = \big(m_x, g_{h^{-1}(m_x)}(x)\big)$. Note que g es inyectiva pues si $x, y \in \bigcup\{X_a : a \in A\}$ son distintos y tales que $m_x = m_y$, entonces la inyectividad de $g_{h^{-1}(m_x)}$ garantiza que $g_{h^{-1}(m_x)}(x) \neq g_{h^{-1}(m_x)}(y)$. Y así, [2, Teorema 7.19] nos otorga que $\bigcup\{X_a : a \in A\} \preceq \omega \times \omega \approx \omega$. □

Cambiemos ahora nuestra discusión a conjuntos que no son numerables.

Teorema 1.10. *Los conjuntos* $\mathbb{R}$, 2^ω *y* ω^ω *son todos equipotentes entre sí.*

Demostración. La equipotencia de $\mathbb{R}$ y 2^ω está probada en [2, Teorema 7.36], así que nos concentraremos en probar que ω^ω y 2^ω también lo son.

Dado que $2 \subset \omega$, se sigue que $2^\omega \subset \omega^\omega$ (recuerde que $2^\omega \subset \omega^\omega$ significa que $2^\omega \subseteq \omega^\omega$ y $2^\omega \neq \omega^\omega$) por lo que considerar la función inclusión es suficiente para afirmar que $2^\omega \preceq \omega^\omega$.

Respecto a la desigualdad $\omega^\omega \preceq 2^\omega$, definamos $f : \omega^\omega \to 2^\omega$ como sigue: dados $x \in \omega^\omega$ y $n \in \omega$, sea

$$f(x)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } m \in \omega \text{ tal que } n = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} x(i) + m \\ & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se afirma que f es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in \omega^\omega$ distintos. Sea $A = \{i \in \omega : x(i) \neq y(i)\}$. Note que $A \neq \emptyset$ y, por ende, tiene elemento mínimo. Sea $k := \min A$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x(k) < y(k)$. Una observación importante es que, por construcción, $x \restriction k = y \restriction k$.

Definamos $l := \sum_{i=0}^{k} x(i) + k$. De este modo, por definición de f, se tiene que $f(x)(l) = 1$. Para demostrar que $f(x) \neq f(y)$, verificaremos que $f(y)(l) = 0$; equivalentemente, vamos a demostrar que para cada $m \in \omega$ se tiene que $l \neq \sum_{i=0}^{m} y(i) + m$. Tenemos dos casos:

Cuando $m < k$, deducimos que $x(i) = y(i)$ para cada $i \leqslant m$ y por ende:

$$\sum_{i=0}^{m} y(i) + m = \sum_{i=0}^{m} x(i) + m < \sum_{i=0}^{k} y(i) + k = l.$$

Ahora supongamos que $m \geqslant k$. De esto se sigue que:

$$\sum_{i=0}^{m} y(i) + m \geqslant \sum_{i=0}^{m} y(i) + k \geqslant \sum_{i=0}^{k} y(i) + k > \sum_{i=0}^{k} x(i) + k = l.$$

En cualquier caso, se concluye que $\sum_{i=0}^{m} y(i) + m \neq l$ y, por lo tanto, f es inyectiva $\square$

Los siguientes dos resultados nos serán de utilidad más adelante cuando discutamos el Teorema de Gale-Stewart y la Propiedad del Conjunto Perfecto.

Proposición 1.11. *Sean A un conjunto y α un ordinal. Si $f : \alpha \to A$ es una función sobreyectiva, entonces $A \preceq \alpha$.*

Demostración. Observe que la sobreyectividad de f garantiza que $f^{-1}\{x\} \neq \emptyset$ para cualquier $x \in A$. De este modo, definimos $g : A \to \alpha$ como $g(x) = \min f^{-1}\{x\}$ para cada $x \in A$. Probaremos que g es inyectiva. En efecto, si $x, y \in A$ son distintos, se sigue que $\left(f^{-1}\{x\}\right) \cap \left(f^{-1}\{y\}\right) = \emptyset$. Luego, $\min f^{-1}\{x\} \neq \min f^{-1}\{y\}$, es decir, $g(x) \neq g(y)$. $\square$

1.2 Concatenaciones.

Suponga que A es un conjunto y que $s, t \in A^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Estamos interesados en definir una función cuya gráfica sea el resultado de tomar la gráfica de s y añadirle "al final" la gráfica de t. En otras palabras, definimos la *concatenación de s con t*, $s \vee t$, como la función cuyo dominio es el número natural $|s| + |t|$ y que está dada por

$$(s \vee t)(i) = \begin{cases} s(i) & \text{si } i < |s| \\ t(i - |s|) & \text{si } |s| \leqslant i < |s| + |t|. \end{cases}$$

En particular, si $s \in A^{<\omega}$ y $a \in A$, entonces

$$s^\frown a = \begin{cases} \{(0, a)\} & \text{si } s = \emptyset \\ s \vee \{(0, a)\} & \text{si } s \neq \emptyset. \end{cases}$$

Es decir, cuando $s \neq \emptyset$, se tiene que $s^\frown a = \langle s(0), \ldots, s(|s| - 1), a\rangle$.

Una observación importante es que al concatenar un par de funciones, elementos de $A^{<\omega}$, usamos el símbolo $\vee$, mientras que cuando concatenamos un elemento del conjunto A a una función de $A^{<\omega}$ usaremos el símbolo $^\frown$.

Note que $s \vee t \in A^{<\omega}$, para cualesquiera $s, t \in A^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Esta observación nos permite iterar la concatenación de funciones. Para cualesquiera $n \in \omega$ y $\{s_i : i \leqslant n\} \subseteq A^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ definimos

$$\bigvee_{i \leqslant n} s_i = \begin{cases} s_0 & \text{si } n = 0 \\ \left(\bigvee_{i \leqslant m} s_i\right) \vee s_{m+1} & \text{si } n = m+1. \end{cases}$$

Dicho de otro modo, la gráfica de $\bigvee_{i \leqslant n} s_i$ se obtiene de "pegar" las gráficas de todas las s_i en el orden dado por los subíndices. Observe que el dominio de $\bigvee_{i \leqslant n} s_i$ es $\sum_{i=0}^{n} |s_i|$.

Ahora, para los fines de la Sección 2.2, nos será conveniente definir la concatenación de una sucesión infinita. Sea $\{s_i : i \in \omega\} \subseteq A^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Empecemos por notar que para cada $n \in \omega$ existe un único número natural $l(n)$ de tal modo que

$$\sum_{i < l(n)} |s_i| \leqslant n < \sum_{i \leqslant l(n)} |s_i|$$

$\left(\text{se piensa que } \sum_{i<0} |s_i| = 0\right)$. Luego, $\bigvee_{i \in \omega} s_i$ es la función de ω en A dada por

$$\left(\bigvee_{i \in \omega} s_i\right)(n) = s_{l(n)}\left(n - \sum_{i < l(n)} |s_i|\right),$$

para cualquier $n \in \omega$.

1.3 La topología de ω^ω.

Cualquier noción cuya definición no aparezca aquí deberá ser entendida tal y como en [1].

A lo largo de toda la tesis, se considerará a $\mathbb{R}$ equipado con la topología euclideana (o topología usual). Además, $\overline{A}$ representará la cerradura del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ en dicha topología.

Si dotamos a ω con la topología discreta, entonces ω^ω puede ser considerado como un producto topológico. Hagamos un resumen de las propiedades de la topología producto.

Definición 1.12. Si κ es un cardinal, $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia de espacios topológicos y X es es producto topológico de la familia antes mencionada, es decir, $X = \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$, entonces $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ será la *α-ésima proyección de X en X_α* dada por $\pi_\alpha(x) = x(\alpha)$.

Note que, para la definición anterior, no estamos haciendo uso de AE por lo que, en principio, el producto topológico X podría ser vacío. Sin embargo, $\emptyset$ es también un espacio topológico.

Conservando la notación de la definición previa, la base canónica para la topología producto en X es la colección $\mathcal{B}$ definida de la siguiente manera: $B \in \mathcal{B}$ si y sólo si existen $F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$, donde U_α es un subconjunto abierto de X_α para cada $\alpha \in F$, de modo que $B = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha]$.

Una observación inmediata es que si B es como se describe arriba, entonces para cualquier $x \in X$ se tiene que $x \in B$ y si y sólo si $x(\alpha) \in U_\alpha$, para todo $\alpha \in F$.

En el caso en el que $X = \omega^\omega$, y considerando a ω como un espacio discreto, lo dicho en el párrafo anterior se reduce a que B es un básico canónico de ω^ω si y sólo si existen $F \in [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{U_n : n \in F\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ de modo que $B = \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}[U_n]$.

Proposición 1.13. *Si F es un subconjunto finito no vacío de ω, $\{U_n : n \in F\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ y $x \in B := \bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}[U_n]$, entonces existe $m \in \omega$ de modo que $x \in \bigcap_{n\in m} \pi_n^{-1}\{x(n)\} \subseteq B$.*

Demostración. Propongamos $m := \max F + 1$ y denotemos por B' a $\bigcap_{n\in m} \pi_n^{-1}\{x(n)\}$. De este modo, es inmediato que B' es abierto en ω^ω y que $x \in B'$.

Veamos ahora que $B' \subseteq B$. Si $z \in B'$, entonces para cada $n < m$ se tiene que $z(n) = x(n)$, es decir, para cada $n < m$ sucede que $z(n) \in \{x(n)\}$. Además, nuestra elección de m nos garantiza que $F \subseteq m$ y, por lo tanto, $z \in B$. $\square$

De la prueba anterior podemos desprender una observación que nos será de utilidad: $z \in \bigcap_{n\in m} \pi_n^{-1}\{x(n)\}$ si y sólo si para cada $n < m$ se tiene que $z(n) = x(n)$; lo cual equivale a que $x \restriction m = z \restriction m$ o, en otras palabras, $x \restriction m \subseteq z$.

Definición 1.14. Si $s \in \omega^{<\omega}$, entonces definimos $[s] := \{x \in \omega^\omega : s \subseteq x\}$.

De esta definición y de la última observación, podemos afirmar que $\bigcap_{n \in m} \pi_n^{-1}\{x(n)\} = [x \restriction m]$. Lo que nos lleva a la siguiente proposición.

Proposición 1.15. *El conjunto* $\{[s] : s \in \omega^{<\omega}\}$ *forma una base para* ω^ω.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.13 y de lo escrito en el párrafo anterior. $\square$

El resto de esta sección está dedicado a demostrar que $\mathbb{P}$, el subespacio de $\mathbb{R}$ formado por todos los números irracionales, es homeomorfo a ω^ω.

Para el lema siguiente enumeraremos a $\mathbb{Q}$, es decir, fijaremos $\{q_n : n \in \omega\}$, una numeración de $\mathbb{Q}$ sin repeticiones y tal que $q_0 = 0$. Note que dicha numeración existe debido a que $\mathbb{Q} \approx \omega$.

Lema 1.16. *Si* $\mathbb{Z}$ *representa al conjunto de todos los números enteros, entonces existe una familia* $\{I_s : s \in \mathbb{Z}^{<\omega}\}$ *de subconjuntos de números reales de manera que las siguientes propiedades se satisfacen para cualesquiera* $s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ *y* $m \in \mathbb{Z}$*:*

(1) $I_\emptyset = \mathbb{R}$.

(2) Si $s \neq \emptyset$*, entonces* I_s *es un intervalo abierto en* $\mathbb{R}$ *con extremos racionales.*

(3) $\overline{I_{s^\frown m}} \subseteq I_s$.

(4) $\sup I_{s^\frown m} = \inf I_{s^\frown (m+1)}$.

(5) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{s^\frown k} = I_s \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\inf I_{s^\frown k}, \sup I_{s^\frown k}\}$.

(6) Si $s \neq \emptyset$*, entonces la longitud de* I_s *es a lo más* $\dfrac{1}{|s|}$.

(7) Para cada $n \in \omega$ *existe* $t \in \mathbb{Z}^{\leqslant n+1}$ *de forma que* q_n *es un extremo de* I_t.

Demostración. Construiremos, recursivamente, a la familia $\{I_s : s \in \mathbb{Z}^{<\omega}\}$.

Para el paso base de la recursión, definamos $I_\emptyset := \mathbb{R}$ y $I_{\emptyset^\frown m} := (m, m+1)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Note que, para cada $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\emptyset^\frown m \in \mathbb{Z}^1$. De esta manera, se sigue que si $s = \emptyset$, entonces la familia $\{I_r : r \in \mathbb{Z}^1\}$ satisface las condiciones (1) - (6). Más aún, si $n = 0$, entonces $q_n = 0$ es extremo de $I_{\emptyset^\frown 0}$; es decir, (7) se satisface.

Ahora supongamos que para algún $n \in \omega$, $\{I_r : r \in \mathbb{Z}^{\leqslant n}\}$ es una familia que cumple las condiciones (1) - (7) y construyamos $\{I_t : t \in \mathbb{Z}^{n+1}\}$.

La igualdad $\mathbb{Z}^{n+1} = \{r^\frown m : r \in \mathbb{Z}^n \wedge m \in \mathbb{Z}\}$ implica que el propósito de la recursión se reduzca a definir $\{I_{r^\frown m} : m \in \mathbb{Z}\}$ de modo que cumpla con (2) - (7).

Así las cosas, supongamos que $r \in \mathbb{Z}^n$ y que $I_r = (a, b)$, donde a y b son ambos números racionales. Para que nuestra construcción satisfaga (7) es necesario separarla en dos casos. Comencemos por suponer que $q_n \notin I_r$.

Definamos, para cada $k \in \omega$,

$$x_k := \frac{(2^{k+1}-1)b + a}{2^{k+1}} \qquad \text{y} \qquad x_{-k} := \frac{(2^{k+1}-1)a + b}{2^{k+1}}.$$

Note que $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{x_k : k \in \omega\} \cup \{x_{-k} : k \in \omega\} \subseteq \mathbb{Q}$. Geométricamente, se tiene que para cada $k \in \omega$, x_0, x_{k+1} y $x_{-(k+1)}$ son, respectivamente, los puntos medios de los intervalos (a, b), (x_k, b) y (a, x_{-k}).

Por construcción, la familia $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $a < x_k < x_{k+1} < b$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{-n} = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Mostremos que la siguiente condición también es satisfecha.

(iii) $x_{k+1} - x_k \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

En efecto, por construcción se tiene que para cada $k \in \mathbb{Z}$, $x_{k+1} - x_k \leqslant \frac{b-a}{2}$. Y como $|r| = n$, la longitud del intervalo I_r es a lo más $\frac{1}{n}$, es decir, se tiene que $b - a \leqslant \frac{1}{n}$; o en otras palabras, $\frac{b-a}{2} \leqslant \frac{1}{2n}$. Una observación importante es que, debido a que $I_r \neq \mathbb{R}$, se sigue que $1 \leqslant n$ y entonces se satisface la desigualdad $n + 1 \leqslant 2n$ que equivale a $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+1}$. De las desigualdades anteriores se concluye que (iii) se satisface.

Para concluir este caso, definamos $I_{r^\frown m} := (x_m, x_{m+1})$. Se afirma que la familia $\{I_{r^\frown m} : m \in \mathbb{Z}\}$ satisface (2) - (6). En efecto, la construcción de la familia $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ nos garantiza, inmediatamente, (2), (4) y (5). La propiedad (3) se sigue del hecho de que $\overline{I_{r^\frown m}} = \overline{(x_m, x_{m+1})} = [x_m, x_{m+1}]$ y de (i); además, (iii) implica (6).

Supongamos ahora que $q_n \in I_r$. La construcción es análoga a la del primer caso, exceptuando que ahora definiremos $x_0 := q_n$ y, para cada $k \in \omega \setminus \{\emptyset\}$,

$$x_k := \frac{q_n + (2^k - 1)b}{2^k} \qquad \text{y} \qquad x_{-k} := \frac{q_n + (2^k - 1)a}{2^k};$$

es decir, para cada $k \in \omega$, se tiene que x_{k+1} y $x_{-(k+1)}$ son los puntos medios de los intervalos (x_k, b) y (a, x_{-k}), respectivamente.

Argumentos similares a los descritos arriba nos garantizan que la colección $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$ satisface (i), (ii) y (iii). De este modo, si $I_{r^\frown m} := (x_m, x_{m+1})$, entonces $\{I_{r^\frown m} : m \in \mathbb{Z}\}$ cumplirá con las condiciones (2) - (6).

Sólo nos resta demostrar que la familia $\{I_t : t \in \mathbb{Z}^{n+1}\}$ definida anteriormente satisface (7).

Hagamos $E := \{\inf I_u : u \in \mathbb{Z}^{\leqslant n}\} \cup \{\sup I_u : u \in \mathbb{Z}^{\leqslant n}\} \subseteq \mathbb{Q}$. Luego, la propiedad (5) implica que

$$\bigcup \{I_t : t \in \mathbb{Z}^n\} = \mathbb{R} \setminus E.$$

Ahora, como $q_n \in \mathbb{Q}$, se tienen dos posibilidades. Supongamos primero que $q_n \in E$, de este modo existe $t \in \mathbb{Z}^{\leqslant n} \subseteq \mathbb{Z}^{\leqslant n+1}$ tal que $q_n \in \{\inf I_t, \sup I_t\}$, es decir, la propiedad (7) se satisface.

En el caso en el que $q_n \in \mathbb{R} \setminus E$, se deduce que existe $s \in \mathbb{Z}^n$ de tal forma que $q_n \in I_s$ o, en otras palabras, se tiene el segundo caso de nuestra construcción recursiva. Por lo tanto $q_n = \inf I_{s^\frown 0}$ y, dado que $s^\frown 0 \in \mathbb{Z}^{\leqslant n+1}$, (7) se satisface completando así la recursión. $\square$

Teorema 1.17. *$\mathbb{P}$ es homeomorfo a ω^ω.*

Demostración. Si consideramos a $\mathbb{Z}$ como un espacio discreto, entonces ω y $\mathbb{Z}$ son homeomorfos por lo que bastará con demostrar que $\mathbb{P}$ es homeomorfo a $\mathbb{Z}^\omega$.

Sea $\{I_s : s \in \mathbb{Z}^{<\omega}\}$ la familia cuya existencia garantiza el Lema 1.16 y sean $x \in \mathbb{Z}^\omega$ y $n \in \omega$. Entonces, por la condición (3) del lema, se tiene que $\overline{I_{x\restriction(n+1)}} \subseteq I_{x\restriction n}$, es decir, $\overline{I_{x\restriction(n+1)}} \subseteq \overline{I_{x\restriction n}}$. Lo anterior nos garantiza que $\langle \sup \overline{I_{x\restriction m}} : m \in \omega \rangle$ es una sucesión estrictamente decreciente de números reales y, de este modo, $\inf\{\sup \overline{I_{x\restriction m}} : m \in \omega\}$ es un elemento de $\bigcap_{m\in\omega} \overline{I_{x\restriction m}}$. De hecho, la condición (6) implica que éste es el único número real en dicha intersección.

Se afirma que $\bigcap_{m\in\omega} \overline{I_{x\restriction m}} = \bigcap_{m\in\omega} I_{x\restriction m}$. En efecto, $\bigcap_{m\in\omega} \overline{I_{x\restriction m}} = \bigcap_{m\in\omega\setminus 1} \overline{I_{x\restriction m}}$ y $\bigcap_{m\in\omega\setminus 1} \overline{I_{x\restriction m}} \subseteq \bigcap_{m\in\omega} I_{x\restriction m}$ (por (3)). La contención restante es inmediata.

Ahora definamos $h : \mathbb{Z}^\omega \to \mathbb{R}$ como $\{h(x)\} = \bigcap_{m\in\omega} I_{x\restriction m}$ para cada $x \in \mathbb{Z}^\omega$. Probaremos que h es el homeomorfismo que buscamos.

Afirmación 1: $\operatorname{img}(h) \subseteq \mathbb{P}$.

En efecto, sean $x \in \mathbb{Z}^\omega$ y $a \in \mathbb{Q}$ cualesquiera. La numeración sin repeticiones de $\mathbb{Q}$ nos otorga la existencia de $k \in \omega$ tal que $a = q_k$ y así, (7) garantiza que existe $s \in \mathbb{Z}^{\leqslant k+1}$ para la cual a es un extremo de I_s.

Además, de la propiedad (5) se sigue que:

$$\bigcup\{I_t : t \in \mathbb{Z}^{|s|}\} = \mathbb{R} \setminus \Big(\{\inf I_u : u \in \mathbb{Z}^{\leqslant|s|} \setminus \{\emptyset\}\} \cup \{\sup I_u : u \in \mathbb{Z}^{\leqslant|s|} \setminus \{\emptyset\}\}\Big).$$

Luego, el que $a \in \{\inf I_s, \sup I_s\}$ implica que $a \notin \bigcup\{I_t : t \in \mathbb{Z}^{|s|}\}$ y, en particular, $a \notin I_{x\restriction|s|}$. De este modo, $h(x) \neq a$.

Afirmación 2: h es inyectiva.

Supongamos que $x, y \in \mathbb{Z}^\omega$ son distintos. Luego existe $l \in \omega$ de modo que $l := \min\{i \in \omega : x(i) \neq y(i)\}$. Una observación es que, por definición de l, sucede que $x \restriction l = y \restriction l$ pero $x(l) \neq y(l)$, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x(l) < y(l)$.

Note que lo dicho en el párrafo anterior, junto con las igualdades

$$x \restriction (l+1) = (x \restriction l)^\frown x(l) \qquad \text{y} \qquad y \restriction (l+1) = (y \restriction l)^\frown y(l) = (x \restriction l)^\frown y(l)$$

y la condición (4), implica que $\sup I_{x\restriction(l+1)} \leqslant \inf I_{y\restriction(l+1)}$ (geométricamente, tenemos que, dentro de $I_{x\restriction l}$, el intervalo $I_{x\restriction(l+1)}$ está a la izquierda del intervalo $I_{y\restriction(l+1)}$). Luego $I_{x\restriction(l+1)}$ y $I_{y\restriction(l+1)}$ son ajenos. Por otro lado, $h(x) \in \bigcap_{n\in\omega} I_{x\restriction n} \subseteq I_{x\restriction(l+1)}$. Análogamente, $h(y) \in I_{y\restriction(l+1)}$ y por lo tanto $h(x) \neq h(y)$.

Afirmación 3: h es sobreyectiva.

Tomemos $p \in \mathbb{P}$ y construyamos recursivamente $x \in \mathbb{Z}^\omega$ de modo que $h(x) = p$. La propiedad (5) del Lema 1.16, con $s = \emptyset$, nos dice que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_{\langle k\rangle} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\inf I_{\langle k\rangle}, \sup I_{\langle k\rangle}\}$$

y de (2) se sigue que $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\inf I_{\langle k\rangle}, \sup I_{\langle k\rangle}\} \subseteq \mathbb{Q}$. Luego, $p \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_{\langle k\rangle}$. Además, la condición (4) garantiza que $I_{\langle i\rangle} \cap I_{\langle j\rangle} = \emptyset$ siempre que $i \neq j$ y por lo tanto existe un único $k_0 \in \mathbb{Z}$ de manera que $p \in I_{\langle k_0\rangle}$.

Ahora supongamos definidos k_i para cada $i \leqslant n$ de modo que si $s = \{(i, k_i) : i \leqslant n\} = \langle k_0, \ldots, k_n\rangle$, entonces $p \in I_s$. De manera análoga a la discutida en el párrafo anterior: (5), (2) y (4) garantizan que existe un único k_{n+1} tal que $p \in I_{s^\frown k_{n+1}}$, completando la recursión.

Definamos $x \in \mathbb{Z}^\omega$ como $x(n) = k_n$ para cada $n \in \omega$. De este modo, para cada $n \in \omega$ se tiene que $p \in I_{x\restriction n}$ y por lo tanto $h(x) = p$.

Afirmación 4: $\{I_s \cap \mathbb{P} : s \in \mathbb{Z}^{<\omega}\}$ es base para la topología de $\mathbb{P}$.

En efecto, sean $p \in \mathbb{P}$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \omega$ de modo que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Definamos $x := h^{-1}(p)$ para obtener $p \in I_{x\restriction n}$. Además, por (2), $I_{x\restriction n}$ es de la forma (a, b) con a y b números racionales. De esta manera, (6) implica que $b - a < \frac{1}{n}$, por lo que $b - a < \varepsilon$.

Sea $r \in I_{x\restriction n}$. Luego $a < r < b$ o, en otras palabras, $-b < -r < -a$. Análogamente, sucede que $a < p < b$ y de este par de desigualdades se sigue que $a - b < p - r < b - a$, lo que es equivalente a $|p - r| < b - a$, y entonces $r \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Así, $r \in I_{x\restriction n} \cap \mathbb{P} \subseteq (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, concluyendo la prueba de la afimación 4.

Note que, por la Proposición 1.15, para concluir con nuestra demostración basta con probar que la igualdad $h[[s]] = I_s \cap \mathbb{P}$ es cierta para cada $s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$.

Afirmación 5: Para cada $s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$, sucede que $h[[s]] = I_s \cap \mathbb{P}$.

Tomemos $s \in \mathbb{Z}^{<\omega}$ y hagamos $n := |s|$. Si $p \in h[[s]]$, entonces existe $x \in [s]$ de modo que $h(x) = p$. Una observación inmediata es que, como $x \in [s]$ y $n = |s|$, se tiene que $x \restriction n = s$. Luego $h(x) \in I_{x\restriction n} = I_s$ y la Afirmación 1 implica que $h(x) \in I_s \cap \mathbb{P}$.

Por otro lado, sea $p \in I_s \cap \mathbb{P}$ y definamos $y := h^{-1}(p)$. De este modo, se tiene que para cada $m \in \omega$ sucede que $p \in I_{y\restriction m}$. Se afirma que $y \restriction n = s$. En efecto, si suponemos que $y \restriction n \neq s$, entonces existe $l < n$ de modo que $l = \min\{i < n : y(i) \neq s(i)\}$. Note que, por definición de l, sucede que $y \restriction l = s \restriction l$ pero que $y(l) \neq s(l)$. Supongamos, en primer lugar, que $y(l) < s(l)$. La condición (4) garantiza que $\sup I_{y\restriction(l+1)} \leqslant \inf I_{s\restriction(l+1)}$, es decir, que $I_{y\restriction(l+1)} \cap I_{s\restriction(l+1)} = \emptyset$. Además se tiene que $I_s \subseteq I_{s\restriction(l+1)}$ por lo que se concluye que $I_{y\restriction(l+1)} \cap I_s = \emptyset$. Pero esto contradice la definición de y. De modo similar, el caso $s(l) < y(l)$ nos lleva a una contradicción. Luego, $y \restriction n = s$, o equivalentemente, $y \in [s]$ y por lo tanto $p = h(y) \in h[[s]]$.

De las afirmaciones 1-5, se concluye que h es el homeomorfismo buscado entre $\mathbb{Z}^\omega$ y $\mathbb{P}$.

□

El siguiente corolario se desprende automáticamente de los Teoremas 1.10 y 1.17.

Corolario 1.18. *$\mathbb{R}$ y $\mathbb{P}$ son equipotentes.*

1.4 Árboles en $\omega^{<\omega}$.

Esta sección tiene como objetivo presentar al lector algunas definiciones relacionadas con árboles que nos serán útiles cuando discutamos la Propiedad del Conjunto Perfecto en la Sección 1.6. Cabe mencionar que en esta tesis sólo se hablará de árboles en $\omega^{<\omega}$.

Definición 1.19. Diremos que $T \subseteq \omega^{<\omega}$ es un *árbol* si y sólo si para cada $s \in T$ se tiene que $\{s \restriction i : i < |s|\} \subseteq T$.

Intuitivamente, T es un árbol si y sólo si es cerrado *hacia abajo.*

A los elementos de un árbol se les llamará *nodos.*

Diremos que dos nodos s y t de $\omega^{<\omega}$ son *incompatibles* si y sólo si existe $i < |s| \cap |t|$ de modo que $s(i) \neq t(i)$; y este hecho será abreviado mediante el símbolo $s \perp t$.

Definición 1.20. Si T es un árbol, entonces una *rama de* T es cualquier $x \in \omega^\omega$ tal que $\{x \restriction n : n \in \omega\} \subseteq T$. El conjunto de todas las ramas de un árbol T es conocido como el *cuerpo de* T y se denota por $[T]$.

Definición 1.21. Si T es un árbol y $t \in T$, diremos que t *se bifurca en* T si y sólo si existen n y m, números naturales distintos, tales que $t^\frown n \in T$ y $t^\frown m \in T$.

Intuitivamente, un nodo se bifurca en un árbol si existen dos extensiones inmediatas de él en el árbol. Denotaremos como $\mathcal{B}(T)$ al conjunto de todos los nodos que se bifurcan en el árbol T, esto es,

$$\mathcal{B}(T) := \{t \in T : \exists n, m \in \omega \, (n \neq m \ \wedge \ t^\frown n \in T \ \wedge \ t^\frown m \in T)\}.$$

Definición 1.22. Un árbol T es un *árbol perfecto* si y sólo si $\emptyset \in T$ y para cada nodo $s \in T$, existen $t_0, t_1 \in T$ de modo que $s \subseteq t_0$, $s \subseteq t_1$ y $t_0 \perp t_1$.

Ejemplo 1.23. *Sea $T := 2^{<\omega}$. Es inmediato que $\emptyset \in T$; ahora, sea $s \in T$, entonces existe $n \in \omega$ de modo que $s : n \to 2$. Definamos $t_0 := s^\frown 0$ y $t_1 := s^\frown 1$ (recuerde la Sección 1.2), es decir, t_0 y t_1 lucen de la siguiente manera*

$$t_0 = (s(0), s(1), \ldots, s(|s| - 1), 0) \qquad y \qquad t_1 = (s(0), s(1), \ldots, s(|s| - 1), 1) \, .$$

Es inmediato que $s \subseteq t_0$, $s \subseteq t_1$ y $t_0 \perp t_1$, por lo que concluimos que T es un árbol perfecto.

Denotaremos como $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los árboles perfectos en $\omega^{<\omega}$. Esto es, $T \in \mathcal{T}$ si y sólo si T es un árbol perfecto.

1.5 El orden lexicográfico.

Definición 1.24. Sean α un ordinal y $m \in \omega$. Si, para cualesquiera $x, y \in \alpha^m$ con $x \neq y$, $\rho(x, y)$ denota el primer lugar en el que x difiere de y, es decir, si $\rho(x, y) := \min\{i < m : x(i) \neq y(i)\}$, entonces definimos el *orden lexicográfico para α^m* como sigue:

$$x <_\ell y \qquad \text{si y sólo si} \qquad x\,(\rho(x, y)) < y\,(\rho(x, y)) \, .$$

Naturalmente, $x \leqslant_\ell y$ significará que $x <_\ell y$ o $x = y$. Los símbolos $\not<_\ell$ y $\not\leqslant_\ell$ serán usados para denotar que no es cierto que $<_\ell$ y $\leqslant_\ell$, respectivamente.

Proposición 1.25. *Si α es un ordinal y $m \in \omega$, entonces el orden lexicográfico es un buen orden para α^m.*

Demostración. Note que $<_\ell$ es una relación irreflexiva. En efecto, nuestra definición de $<_\ell$ garantiza que $x \not<_\ell x$ para cualquier $x \in \alpha^m$. Por lo que resta probar que $<_\ell$ es una relación transitiva y que cualquier subconjunto no vacío de α^m tiene elemento mínimo.

Demostremos primero que $<_\ell$ es una relación transitiva. Sean $x, y, z \in \alpha^m$ distintos entre sí y supongamos que $x <_\ell y$ y $y <_\ell z$. Si hacemos $p := \rho(x, y)$ y $q := \rho(y, z)$, entonces tenemos que $x(p) < y(p)$ y que $y(q) < z(q)$.

Observe que si $p = q$, entonces $p = \rho(x, z) = q$ y además, $x(p) < y(p) = y(q) < z(q) = z(p)$. Por lo que se concluye que $x <_\ell z$. Veamos qué sucede cuando p y q son distintos.

Caso 1: $p < q$.

En este caso afirmamos que $\rho(x, z) = p$. En efecto, para cualquier $i < p$, se tiene que $i < q$ y, por ende, que $x(i) = y(i) = z(i)$, así concluímos que $p \leqslant \rho(x, z)$. Además, como $p < q$, sucede que $x(p) < y(p) = z(p)$, es decir, $x(p) < z(p)$. Por lo tanto $\rho(x, z) = p$ y $x(\rho(x, z)) < z(\rho(x, z))$ o, en otras palabras, $x <_\ell z$.

Caso 2: $q < p$.

Se afirma que $\rho(x, z) = q$. Note que para cualquier $i < q$, se tiene que $i < p$ y luego sucede que $x(i) = y(i) = z(i)$. Además, de la desigualdad $q < p$ se sigue que $x(q) = y(q) < z(q)$, concluyendo la prueba de nuestra afimación. Por lo tanto, $x(\rho(x, z)) = x(q) < z(q) = z(\rho(x, z))$. Es decir, $x <_\ell z$.

Probemos ahora que todo subconjunto no vacío de α^m posee elemento mínimo.

Sea A un subconjunto no vacío de α^m. Construiremos, por recursión finita, el elemento mínimo de A. Comencemos por definir el siguiente conjunto:

$$B_0 := \{x(0) : x \in A\} \subseteq \alpha.$$

Observe que, dado que $A \neq \emptyset$, se tiene que $B_0 \neq \emptyset$. Luego, B_0 posee elemento mínimo de acuerdo al orden usual de α. Sean $\beta_0 := \min B_0$ y $A_0 := A$.

Supongamos que, para alguna $k < m$, las familias $\{B_i : i \leqslant k\} \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \setminus \{\emptyset\}$, $\{\beta_i : i \leqslant k\} \subseteq \alpha$ y $\{A_i : i \leqslant k\} \subseteq \mathcal{P}(\alpha^m)$ ya han sido construidas y definamos:

$$B_{k+1} := \{x(k+1) : x \in A_k\},$$

$$\beta_{k+1} := \min B_{k+1} \quad \text{y}$$

$$A_{k+1} := \{x \in A_k : x(k+1) = \beta_{k+1}\}.$$

Esto completa la recursión. Finalmente, definamos $y \in \alpha^m$ como $y(k) := \beta_k$, para cada $k < m$. Afirmamos que $y = \min A$. En primer lugar, observe que $y \in A$ pues por la construcción, sucede que, para cada $k < m$, $A_k \subseteq A$. Luego, resta probar que si $x \in A \setminus \{y\}$, entonces $y <_\ell x$. En efecto, hagamos $s := \rho(y, x)$. Luego $y(s) \neq x(s)$ y además, por definición de y sucede que $y(s) = \beta_s \leqslant x(s)$, es decir $y(s) < x(s)$ y, por lo tanto, $x <_\ell y$. $\square$

El siguiente lema será de utilidad a lo largo de esta tesis.

Lema 1.26. *Si α es un ordinal, entonces la familia $\mathcal{P}(\alpha^{<\omega}) \setminus \{\emptyset\}$ tiene una función de elección.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{P}(\alpha^{<\omega}) \setminus \{\emptyset\}$ arbitrario. Luego $\{|t| : t \in A\}$ es un subconjunto no vacío de ω. Denotemos por m al elemento mínimo de dicho conjunto. Observemos que, por construcción, $A \cap \alpha^m \neq \emptyset$ y por la Proposición 1.25, $(\alpha^m, \leqslant_\ell)$ es un conjunto bien ordenado. Definimos $e(A) := \min(A \cap \alpha^m)$. Por lo tanto, $e : \mathcal{P}(\alpha^{<\omega}) \setminus \{\emptyset\} \to \alpha^{<\omega}$ es la función deseada. $\square$

1.6 La Propiedad del Conjunto Perfecto en ZFC.

En esta sección se probarán algunos resultados que se siguen del Axioma de Elección y que, como se verá en capítulos siguientes, dejarán de ser ciertos bajo la suposición del Axioma de Determinación.

Comencemos por definir qué es un conjunto perfecto en un espacio topológico.

Definición 1.27. Sea X un espacio topológico.

(1) A los subconjuntos cerrados no vacíos que carecen de puntos aislados en X se les llamará *conjuntos perfectos de X*.

(2) Diremos que $A \subseteq X$ *tiene la propiedad del conjunto perfecto en* X si y sólo si $A \preceq \omega$ (recuerde la Definición 1.1) o A contiene un subconjunto perfecto de X.

Con el fin de simplificar la notación, escribiremos que "A tiene la *PCP* en X" en lugar de "A tiene la *Propiedad del Conjunto Perfecto* en X".

Estamos interesados en los subcojuntos perfectos del producto ω^ω, para ello recuerde que $\mathcal{T}$ denota a la colección de todos los árboles perfectos.

Proposición 1.28. *Si* $T \in \mathcal{T}$, *entonces* $[T] \approx \mathbb{R}$.

Demostración. Comencemos por notar que $[T] \subseteq \omega^\omega$. Luego el Teorema 1.10 nos permite afirmar que $[T] \preceq \mathbb{R}$.

Para demostrar la desigualdad $\mathbb{R} \preceq [T]$, el plan es definir una función inyectiva $\overline{\varphi}$ de 2^ω en $[T]$ y, posteriormente, ocupar el Teorema 1.10. Para ello comencemos por definir para cada $u \in T$ el conjunto $B_u := \{t \in \mathcal{B}(T) : u \subseteq t\}$. Afirmamos que para cada $u \in T$ sucede que $B_u \neq \emptyset$. En efecto, como T es un árbol perfecto, se tiene que existen $s_0, s_1 \in T$ tales que $u \subset s_0, u \subset s_1$ y $s_0 \perp s_1$. Que s_0 y s_1 sean incompatibles implica que existe $l = \min\{i < \min\{|s_0|, |s_1|\} : s_0(i) \neq s_1(i)\}$. De este modo $t := s_0 \restriction l = s_1 \restriction l$ y entonces $t^\frown s_0(l) = s_0 \restriction (l+1)$ y $t^\frown s_1(l) = s_1 \restriction (l+1)$ son ambos nodos de T y así, $t \in \mathcal{B}(T)$. Por otra parte, como $u \subset s_0$ y $u \subset s_1$, se sigue que para cada $i < |u|$ sucede que $u(i) = s_0(i) = s_1(i)$ y por ende $|u| \leqslant l$, es decir, $u \subseteq t$.

Prosigamos nuestra prueba construyendo recursivamente una función φ de $2^{<\omega}$ en $\mathcal{B}(T)$ de manera que las siguientes condiciones se satisfagan:

(1) Si $s, t \in 2^{<\omega}$ son tales que $s \subset t$, entonces $\varphi(s) \subset \varphi(t)$.

(2) Para cada $s \in 2^{<\omega}$ se cumple que $\varphi(s^\frown 0) \perp \varphi(s^\frown 1)$.

Note que como $\emptyset \in T$, se tiene que $B_\emptyset \in \mathcal{P}(2^{<\omega}) \setminus \{\emptyset\}$. Definamos $\varphi(\emptyset) = e(B_\emptyset)$, donde e es la función de elección que nos garantiza el Lema 1.26 (haciendo $\alpha = 2$).

Ahora supongamos que para alguna $\ell < \omega$ hemos definido $\{\varphi(t) : t \in 2^{\leqslant \ell}\}$. Para concluir nuestra recursión fijemos $s \in 2^\ell$ y expliquemos cómo construir $\varphi(s^\frown 0)$ y $\varphi(s^\frown 1)$. Dado que $\varphi(s) \in \mathcal{B}(T)$, podemos hacer

$$n_0 := \min\{i \in \omega : \varphi(s)^\frown i \in T\} \qquad \text{y} \qquad n_1 := \min\{i \in \omega \setminus (n_0 + 1) : \varphi(s)^\frown i \in T\}.$$

En vista de que, para cada $k \in 2$, $\varphi(s)^\frown n_k \in T$, tenemos que $B_{\varphi(s)^\frown n_k} \neq \emptyset$. De manera similar a la descrita en el párrafo anterior, definamos para cada $k \in 2$

$$\varphi(s^\frown k) := e(B_{\varphi(s)^\frown n_k}).$$

Demostremos que (1) es satisfecha. En efecto, por definición se tiene que si $k \in 2$, entonces $\varphi(s^\frown k) \in B_{\varphi(s)^\frown n_k}$, es decir, $\varphi(s)^\frown n_k \subseteq \varphi(s^\frown k)$ y además $\varphi(s) \subset \varphi(s)^\frown n_k$, por lo tanto $\varphi(s) \subset \varphi(s^\frown k)$.

Probemos ahora que (2) es cierta. Por una parte se tiene que si $k \in 2$, entonces $\varphi(s)^\frown n_k \subseteq \varphi(s^\frown k)$ y nuestra elección de n_0 y n_1 garantiza que $\varphi(s)^\frown n_0 \perp \varphi(s)^\frown n_1$. Luego $\varphi(s^\frown 0) \perp \varphi(s^\frown 1)$, completando nuestra recursión.

Estamos listos para definir a $\overline{\varphi}$. Para cada $x \in 2^\omega$, sea

$$\overline{\varphi}(x) := \bigcup_{n \in \omega} \varphi(x \restriction n).$$

Verifiquemos que, en efecto, $\overline{\varphi}$ es una función inyectiva de 2^ω en $[T]$.

Afirmación 1: $\overline{\varphi}(x) \in \omega^\omega$.

Tomemos n y m, un par de números naturales, tales que $n < m$. Es inmediato que $x \restriction n \subset x \restriction m$ y, por (1), $\varphi(x \restriction n) \subset \varphi(x \restriction m)$; en particular, $|\varphi(x \restriction n)| < |\varphi(x \restriction m)|$. Se sigue que $\overline{\varphi}(x) \subseteq \omega \times \omega$ es una función con $\operatorname{dom}(\overline{\varphi}(x)) = \omega$, concluyendo la prueba de esta afirmación.

Afirmación 2: Para cada $n \in \omega$ sucede que $\overline{\varphi}(x) \restriction n \in T$.

En efecto, note que la Afirmación 1 implica que, dado $n \in \omega$, existe $m \in \omega$ de manera que $n < |\varphi(x \restriction m)|$ o, en otras palabras, que $n \in \operatorname{dom}(\varphi(x \restriction m))$. Ahora, como $\varphi(x \restriction m) \in T$ y $\varphi(x \restriction m) \subseteq \overline{\varphi}(x)$, se sigue que $\overline{\varphi}(x) \restriction n = (\varphi(x \restriction m)) \restriction n \in T$.

Afirmación 3: $\overline{\varphi}$ es inyectiva.

Sean $x, y \in 2^\omega$ distintos y sea $m := \min\{i \in \omega : x(i) \neq y(i)\}$. Luego $s := x \restriction m = y \restriction m$ y por lo tanto, $s^\frown x(m) = x \restriction (m+1) \neq y \restriction (m+1) = s^\frown y(m)$. De (2) se sigue que $\varphi(s^\frown x(m)) \perp \varphi(s^\frown y(m))$ y por definición tenemos que $\varphi(s^\frown x(m)) \subseteq \overline{\varphi}(x)$ y que $\varphi(s^\frown y(m)) \subseteq \overline{\varphi}(y)$. De este modo concluimos que existe $k < \omega$ con $\overline{\varphi}(x)(k) \neq \overline{\varphi}(y)(k)$.

$\square$

Lema 1.29. *Si $T \in \mathcal{T}$ y $t_0 \in T$, entonces existe $x \in [T]$ de modo que $t_0 \subseteq x$.*

Demostración. Construyamos a x de manera recursiva. Supongamos que $n \in \omega$ y que $\{t_i : i \leqslant n\} \subseteq T$ es una familia de nodos en T de modo que $t_i \subseteq t_{i+1}$ para cada $i < n$.

Definamos $A := \{u \in T : t_n \subseteq u\}$ y observemos que, como T es un árbol perfecto, se tiene que $A \in \mathcal{P}(\omega^{<\omega}) \setminus \{\emptyset\}$. De este modo podemos definir $t_{n+1} := e(A)$ donde e es la función de elección que nos otorga el Lema 1.26 (haciendo $\alpha = \omega$).

Concluyamos la demostración haciendo $x := \bigcup_{n\in\omega} t_n \in [T]$. $\square$

Proposición 1.30. *Si P es un subconjunto del producto ω^ω, entonces P es perfecto en ω^ω si y sólo si existe $T \in \mathcal{T}$ de tal modo que $P = [T]$.*

Demostración. Comencemos por suponer que T es un árbol perfecto. Por la Proposición 1.28, se tiene que $[T] \neq \emptyset$. Se afirma que $[T]$ es cerrado en ω^ω. En efecto, si $x \in \omega^\omega \setminus [T]$, entonces existe $n \in \omega$ de manera que $x \restriction n \notin T$ y además, es claro que $x \in [x \restriction n]$ (recuerde la Definición 1.14). Observe que si $y \in [x \restriction n]$, entonces $y \restriction n = x \restriction n \notin T$, es decir, $y \notin [T]$ y por lo tanto, $x \in [x \restriction n] \subseteq \omega^\omega \setminus [T]$.

Demostremos ahora que $[T]$ no tiene puntos aislados. Sea $t \in \omega^{<\omega}$. Por la Proposición 1.15, $[t]$ es un abierto básico de ω^ω. De este modo, si $x \in [t] \cap T$, se sigue que $t = x \restriction |t| \in T$ y, por hipótesis, existen nodos incompatibles $u, v \in T$ de modo que $t \subset u$ y $t \subset v$, es decir, u y v *extienden* a t y además $u \not\subseteq x$ o $v \not\subseteq x$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u \not\subseteq x$. Por otra parte, del hecho de que $u \in T$ y del Lema 1.29, se sigue que existe $y \in [T]$ de manera que $u \subseteq y$. Observe que esto implica que $y \neq x$ y como $t \subset u \subseteq y$, se tiene que $y \in [t]$. Por lo tanto existe $y \in ([t] \cap [T]) \setminus \{x\}$, es decir, x no es un punto aislado de $[T]$.

Hasta el momento, hemos desmostrado que el cuerpo de un árbol perfecto siempre es un subconjunto perfecto de ω^ω.

Demostremos ahora la implicación restante. Supongamos que $P \subseteq \omega^\omega$ es perfecto y definamos

$$T := \{x \restriction n : x \in P \wedge n \in \omega\}.$$

Es inmediato que $T \subseteq \omega^{<\omega}$. Demostremos que $T \in \mathcal{T}$.

Afirmación 1: T es un árbol.

En efecto, sean $t \in T$ y $n < |t|$ cualesquiera. Como $t \in T$, existen $x \in P$ y $m \in \omega$ de forma que $t = x \restriction m$; en particular, $|t| = m$. Luego, $t \restriction n = x \restriction n$ y por lo tanto $t \restriction n \in T$.

Afirmación 2: $T \in \mathcal{T}$.

Sea $t \in T$. Luego t es de la forma $x \restriction n$ para algún $x \in P$ y algún $n \in \omega$. Construyamos dos extensiones incompatibles de t en T.

Consideremos $[t]$. Por la Proposición 1.15, $[t]$ es un abierto básico de ω^ω y además, $x \in [t]$. Como P es perfecto, se sigue que existe $y \in (P \cap [t]) \setminus \{x\}$ y así, definimos $m := \min\{i \in \omega : x(i) \neq y(i)\}$. Una observación importante es que $n \leqslant m$ pues como $y \in [t]$, se tiene que $x \restriction n = y \restriction n$ pero $x(m) \neq y(m)$.

Definimos $s_0 := x \restriction (m+1)$ y $s_1 := y \restriction (m+1)$. De este modo, tenemos dos nodos de T, s_0 y s_1, tales que $t \subseteq s_0$, $t \subseteq s_1$ y $s_0 \perp s_1$, concluyendo la prueba de la afirmación.

Afirmación 3: P es el cuerpo de T.

Note que la contención $P \subseteq [T]$ se sigue de la definición de T, por lo que nos resta probar que $[T] \subseteq P$. Sea $x \in [T]$ arbitrario. Entonces, para cada $n \in \omega$ sucede que $x \restriction n \in T$, es decir, para cada $n \in \omega$, el conjunto $B_n := \{y \in P : x \restriction n = y \restriction n\}$ es no vacío. Hagamos $x_n := e(B_n)$, donde e es la función que nos otorga el Lema 1.26. De este modo, $x_n \in P$ y $x \restriction n = x_n \restriction n$.

Se afirma que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. En efecto, sea $t \in \omega^{<\omega}$ de manera que $x \in [t]$. Si hacemos $l = |t|$, entonces tenemos que $t = x \restriction l$, es decir, $x_l \restriction l = t$. Así, si $n \in \omega \setminus l$, se sigue que $x_n \restriction l = t$, es decir, $x_n \in [t]$ para cada $n \in \omega \setminus l$.

Finalmente, como P es perfecto, en particular P es cerrado por lo que $x \in P$. Esto prueba la Afirmación 3. $\square$

Este último resultado, junto con la Proposición 1.28, nos otorga el siguiente corolario.

Corolario 1.31. *Si P es un subconjunto perfecto de $\mathbb{P}$, entonces P es equipotente a $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.32. *Si $S, T \in \mathcal{T}$ son distintos, entonces $[S] \neq [T]$.*

Demostración. Como $S \neq T$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe $t \in T \setminus S$. Luego, el Lema 1.29 implica que existe $x \in [T]$ de manera que $t \subseteq x$. Es inmediato que $x \restriction |t| = t \notin S$ y por lo tanto $x \notin [S]$. $\square$

Proposición 1.33. *La colección de todos los subconjuntos perfectos de irracionales es equipotente a* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Observe que las Proposiciones 1.30 y 1.32 implican que dado P, un subconjunto perfecto de ω^ω, existe un único T, árbol perfecto, tal que $P = [T]$, por lo que basta con probar que $\mathcal{T} \approx \mathbb{R}$ para concluir esta demostración.

Por un lado, la Proposición 1.7 implica que $\mathcal{P}(\omega^{<\omega}) \approx \mathcal{P}(\omega) \approx \mathbb{R}$. Luego, la contención $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\omega^{<\omega})$ nos garantiza que $\mathcal{T} \preceq \mathbb{R}$.

Por otro lado, sean $a, b \in \mathbb{P}$ de modo que $a < b$. Entonces $\mathbb{P} \cap [a, b]$ es un subconjunto perfecto de $\mathbb{P}$. Si consideremos a h, el homeomorfismo que se construyó en el Teorema 1.17, se tiene que $h^{-1}\big[\mathbb{P} \cap [a, b]\big]$ es un subconjunto perfecto de ω^ω y así, existe un único $T_{ab} \in \mathcal{T}$ de modo que $h^{-1}\big[\mathbb{P} \cap [a, b]\big] = [T_{ab}]$.

Sea $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} : x < y\}$. Definamos $G : \mathbb{P} \to \Delta$ mediante $G(p) := (p, p + 1)$, para cada $p \in \mathbb{P}$. Claramente G es inyectiva. Luego, por el Corolario 1.18, concluimos que $\mathbb{R} \preceq \Delta$.

Ahora, para cada $(a, b) \in \Delta$, definamos $F((a, b)) := T_{ab}$ y probemos que $F : \Delta \to \mathcal{T}$ es inyectiva. En efecto, si $(a, b), (c, d) \in \Delta$ son tales que $T_{ab} = T_{cd}$, entonces $[T_{ab}] = [T_{cd}]$, es decir, $h^{-1}\big[\mathbb{P} \cap [a, b]\big] = h^{-1}\big[\mathbb{P} \cap [c, d]\big]$ o, equivalentemente, $\mathbb{P} \cap [a, b] = \mathbb{P} \cap [c, d]$. Luego, se tiene que $a = \min(\mathbb{P} \cap [a, b]) = \min(\mathbb{P} \cap [c, d]) = c$ y, análogamente, $b = \max(\mathbb{P} \cap [a, b]) = \max(\mathbb{P} \cap [c, d]) = d$; en resumen, $(a, b) = (c, d)$.

En conclusión, $\mathbb{R} \preceq \Delta \preceq \mathcal{T}$. $\square$

Teorema 1.34. *Si* $\mathbb{R}$ *admite un buen orden, entonces* $\mathbb{P}$ *posee un subconjunto que no satisface la PCP.*

Demostración. La Proposición 1.33 nos permite enlistar a todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{P}$ sin repeticiones en tipo de orden $\mathfrak{c}$. Sea $\{P_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ dicha lista.

Construiremos, por recursión transfinita, un par de sucesiones de longitud $\mathfrak{c}$. Sea $\alpha \in \mathfrak{c}$ y para cada $\beta \in \alpha$ supongamos definidos a_β y b_β de modo que cumplan las siguientes condiciones:

1. $a_\beta \in \mathbb{P} \setminus \big(\{a_\gamma : \gamma \in \beta\} \cup \{b_\gamma : \gamma \in \beta\}\big)$.

2. $b_\beta \in P_\beta \setminus \{a_\gamma : \gamma \leqslant \beta\}$.

Como $\alpha \in \mathfrak{c}$, deducimos que la cardinalidad de $\{a_\gamma : \gamma \in \beta\} \cup \{b_\gamma : \gamma \in \beta\}$ es menor a $\mathfrak{c}$, por lo que la igualdad $|\mathbb{P}| = \mathfrak{c}$ y el Corolario 1.31 garantizan que $\mathbb{P} \setminus \big(\{a_\gamma : \gamma \in \alpha\} \cup \{b_\gamma : \gamma \in \alpha\}\big)$ y $P_\alpha \setminus \{a_\gamma : \gamma \leqslant \alpha\}$ son un par de subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos. Así las cosas, definamos (note que los mínimos de abajo se calculan con respecto al buen orden que $\mathbb{R}$ posee por hipótesis)

$$a_\alpha := \min\big(\mathbb{P} \setminus \big(\{a_\gamma : \gamma \in \alpha\} \cup \{b_\gamma : \gamma \in \alpha\}\big)\big) \quad \text{y}$$

$$b_\alpha := \min\left(P_\alpha \setminus \{a_\gamma : \gamma \leqslant \alpha\}\right),$$

lo cual completa la recursión.

Se afirma que $A := \{a_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ es el conjunto buscado. Es claro que A es un subconjunto de $\mathbb{P}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Luego, nos resta demostrar que ningún subconjunto perfecto de $\mathbb{P}$ está contenido en A, es decir, probaremos que para cada $\alpha \in \mathfrak{c}$ se tiene que $P_\alpha \nsubseteq A$. En efecto, sea $\alpha \in \mathfrak{c}$ arbitraria. Por definición, $b_\alpha \in P_\alpha \setminus \{a_\gamma : \gamma \leqslant \alpha\}$. Supongamos, buscando una contradicción, que $b_\alpha \in A$. Entonces existe $\beta \in \mathfrak{c}$ de modo que $b_\alpha = a_\beta$, de lo que se sigue que $\alpha < \beta$, pero $a_\beta \notin \{a_\gamma : \gamma \in \beta\} \cup \{b_\gamma : \gamma \in \beta\}$, es decir, en particular se tiene que $a_\beta \neq b_\alpha$ obteniendo así la contradicción deseada. $\square$

CAPÍTULO 2: AXIOMA DE DETERMINACIÓN.

El objetivo del presente capítulo es presentarle al lector el axioma de la teoría de conjuntos llamado *Axioma de Determinación* (AD), el cual fue introducido a principios de los años 60 por J. Mycielski y H. Steinhaus.

Para poder hablar de AD es necesario definir un juego infinito. Dada $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\omega}$, se considerará el correspondiente juego $\Game_{\mathcal{A}}$ el cual tiene dos jugadores, digamos I y II, que tiran un número natural en cada turno que les corresponda, es decir, primero I tira algún $n_0 \in \omega$, posteriormente II responde con un número natural m_0, luego I escoge un $n_1 \in \omega$ como su respuesta y así sucesivamente (ver diagrama de abajo). $\Game_{\mathcal{A}}$ concluye luego de ω turnos y I gana el juego si la sucesión resultante $\langle n_0, m_0, n_1, m_1, \ldots \rangle$ es un elemento de $\mathcal{A}$; en caso contrario II gana.

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & n_0 & & n_1 & & \cdots \\ \hline \mathrm{II} & & m_0 & & m_1 & \cdots \end{array}$$

Definamos algunos términos que nos serán de utilidad en nuestro análisis del juego $\Game_{\mathcal{A}}$

Definición 2.1. Una *partida* en el juego $\Game_{\mathcal{A}}$ es cualquier elemento de ω^{ω}.

Notemos que si f es una partida del juego $\Game_{\mathcal{A}}$, entonces ésta puede ser vista como sigue:

$$\begin{array}{c|ccccc} \mathrm{I} & f(0) & & f(2) & & \cdots \\ \hline \mathrm{II} & & f(1) & & f(3) & \cdots \end{array}$$

Dada $\mathcal{A} \subseteq \omega^{\omega}$, el *árbol de jugadas legales de* $\Game_{\mathcal{A}}$ es $\omega^{<\omega}$. Entonces t es una jugada legal si y sólo si existe un número natural n de modo que $t : n \to \omega$. Para los fines de este trabajo, t será interpretada como el inicio de una partida. Es conveniente hacer algunas observaciones:

1. Si $|t|$ es par, entonces II es el último que ha tirado hasta t.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\mathrm{I} & t(0) & & t(2) & & \cdots & \\ \hline
\mathrm{II} & & t(1) & & t(3) & \cdots & t(|t|-1)
\end{array}$$

2. Si $|t|$ es impar, entonces I es el último que ha tirado hasta t.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\mathrm{I} & t(0) & & t(2) & & \cdots & t(|t|-1) \\ \hline
\mathrm{II} & & t(1) & & t(3) & \cdots &
\end{array}$$

Esto nos será de utilidad para definir qué es una estrategia. Para esto precisaremos de algunos conjuntos auxiliares.

Definición 2.2. $S_p := \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n}$ y $S_i := \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1}$. Es decir, S_p y S_i denotarán al conjunto de todas las funciones de $k \in \omega$ en ω, donde k es par e impar, respectivamente.

Definición 2.3. Una *estrategia para I* es una función $\sigma : S_p \to \omega$.

Intuitivamente, una estrategia para I "le dice a I qué tirar en cada turno". Por ejemplo, si $k \in \omega$ y el inicio de la partida es como sigue:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\mathrm{I} & n_0 & & n_1 & & \cdots & n_k & \\ \hline
\mathrm{II} & & m_0 & & m_1 & \cdots & & m_k
\end{array}$$

entonces σ le dirá a I que responda con $\sigma(\langle n_0, m_0, \ldots, n_k, m_k\rangle)$.

Definición 2.4. Dadas $f \in \omega^\omega$ y una estrategia σ para I, diremos que f *sigue a* σ si y sólo si para cada $n \in \omega$, $f(2n) = \sigma(f \restriction (2n))$ (ver diagrama de abajo).

$$\begin{array}{c|cccccc}
\mathrm{I} & \sigma(\emptyset) & & \sigma(\langle\sigma(\emptyset), f(1)\rangle) & & \sigma(\langle\sigma(\emptyset), f(1), \sigma(\langle\sigma(\emptyset), f(1)\rangle), f(3)\rangle) & \cdots \\ \hline
\mathrm{II} & & f(1) & & f(3) & & \cdots
\end{array}$$

Intuitivamente, las partidas que siguen a σ son aquellas en las que el jugador I siempre tira lo que σ le aconseja.

Definición 2.5. Una *estrategia para II* es una función $\tau : S_i \to \omega$.

Similarmente, una estrategia para II "le dice a II qué tirar en cada turno". Por ejemplo, si $k \in \omega$, y el inicio de la partida es como sigue:

I	n_0		n_1		$\cdots$		n_k
II		m_0		m_1	$\ldots$	m_{k-1}	

entonces τ le dirá a II que responda con $\tau(\langle n_0, m_0, \ldots, m_{k-1}, n_k \rangle)$.

Definición 2.6. Dadas $f \in \omega^\omega$ y τ, una estrategia para II, diremos que f *sigue a* τ si y sólo si para cada $n \in \omega$, $f(2n+1) = \tau(f \restriction (2n+1))$ (ver diagrama de abajo).

I	$f(0)$		$f(2)$		$f(4)$	$\cdots$
II		$\tau(\langle f(0) \rangle)$		$\tau(\langle f(0), \tau(\langle f(0) \rangle), f(2) \rangle)$		$\cdots$

Intuitivamente, las partidas que siguen a τ son aquellas en las que el jugador II siempre tira lo que τ le aconseja.

Es conveniente recordar que, a lo largo de esta tesis, trabajaremos en ZF, a menos que se diga explícitamente lo contrario.

Lema 2.7. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \omega^\omega$. Entonces, tanto el conjunto de estrategias para I como para II en $\Game_{\mathcal{A}}$ son equipotentes a ω^ω.*

Demostración. Notemos que los conjuntos de estrategias para I y para II son ω^{S_p} y ω^{S_i}, respectivamente. Ahora, por [2, Lema 7.33], tenemos que, para cualquier conjunto B, si $B \approx \omega$, entonces $\omega^B \approx \omega^\omega$. De este modo, es suficiente probar que $S_p \approx \omega$ y $S_i \approx \omega$ para concluir el lema.

Comencemos por demostrar que $S_p \approx \omega$. Sea $f : \omega \to \omega^2$ la función que a cada $n \in \omega$ le asocia la función constante n, es decir, $f(n) = 2 \times \{n\}$. Es inmediato que f es inyectiva, por lo que se tiene que $\omega \preceq \omega^2$. Además, $\omega^2 \subseteq S_p \subseteq \omega^{<\omega}$. Luego, la Proposición 1.7 nos garantiza que $\omega^2 \preceq S_p \preceq \omega$. Por lo tanto, $S_p \approx \omega$.

Ahora probemos que $S_i \approx \omega$. Sea $g : \omega \to \omega^1$ dada por $g(n) = \{(0, n)\}$ para cada $n \in \omega$. Entonces g es inyectiva y por ende, $\omega \preceq \omega^1$. Notemos que $\omega^1 \subseteq S_i \subseteq \omega^{<\omega}$ y por un argumento análogo al del párrafo anterior, concluimos que $S_i \approx \omega$. $\square$

Es natural pensar que habrá estrategias que sean de mayor utilidad que otras, es decir, habrá estrategias que hagan que I o II gane. De esto se desprenden las definiciones siguientes.

Definición 2.8. Sea σ una estrategia para I. Diremos que σ es una *estrategia ganadora para I en el juego $\Game_{\mathcal{A}}$* si y sólo si cada que $f \in \omega^\omega$ sigue a σ, se tiene que $f \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2.9. *Consideremos $\mathcal{A} = \omega^\omega$ y sea $\sigma : S_p \to \omega$ definida como $\sigma(t) = 0$ para cada $t \in S_p$. Como toda $f \in \omega^\omega$ es un elemento de $\mathcal{A}$, se tiene que σ es una estrategia ganadora para I en el juego $\Game_{\mathcal{A}}$.*

Definición 2.10. Sea τ una estrategia para II. Diremos que τ es una *estrategia ganadora para II en el juego $\Game_{\mathcal{A}}$* si y sólo si cada que $f \in \omega^\omega$ sigue a τ, se tiene que $f \in \omega^\omega \setminus \mathcal{A}$.

Ejemplo 2.11. *Sea $x \in \omega^\omega$ cualquiera. Consideremos $\mathcal{A} = \{x\}$ y sea $\tau : S_i \to \omega$ dada por $\tau(t) = x(1) + 1$ para toda $t \in S_i$. Entonces, si $f \in \omega^\omega$ sigue a τ, se tiene que:*

$$f(1) = \tau(f \restriction 1) = x(1) + 1 \neq x(1)$$

Luego, $f \neq x$ y por lo tanto, $f \notin \mathcal{A}$. De lo anterior se concluye que τ es una estrategia ganadora para II.

Por el resto de este capítulo, si $\mathcal{A}$ es claro en el contexto, omitiremos decir "en el juego $\Game_{\mathcal{A}}$". Por ejemplo, diremos que σ *es una estrategia para I* en lugar de "σ es una estrategia para I en el juego $\Game_{\mathcal{A}}$". Además, sólo diremos que σ *es ganadora para I* o que τ *es ganadora para II* quedando implícito que σ o τ sean estrategias.

Definición 2.12. Se dirá que $\mathcal{A} \subseteq \omega^\omega$ *está determinado* si y sólo si existe una estrategia ganadora para I o existe una estrategia ganadora para II.

Dicho esto, estamos listos para enunciar el Axioma de Determinación.

Definición 2.13. Entenderemos por *Axioma de Determinación* al enunciado: "Todo subconjunto de ω^ω está determinado". A dicho axioma lo abreviaremos como AD.

Dedicaremos el resto del capítulo a presentar algunos teoremas de ZF + AD.

2.1 Elección y Determinación.

Esta sección tiene como resultado central la incompatibilidad de AD con AE. Para llegar a este resultado será necesario probar algunos lemas previos.

Una consecuencia de AE es que $\mathbb{R}$ admite un buen orden. De este modo, lo que se probará en esta sección es que AD es incompatible con la existencia de un buen orden para

$\mathbb{R}$. Supondremos que $\mathbb{R}$ posee un buen orden y construiremos un subconjunto de ω^ω que no está determinado. Como se mencionó en la Sección 1.6, siempre que supongamos que $\mathbb{R}$ posee un buen orden, denotaremos por $\mathfrak{c}$ al primer ordinal equipotente a $\mathbb{R}$. Entonces del Lema 2.7 y del Teorema 1.10 se sigue que $\mathfrak{c} \approx \mathbb{R} \approx 2^\omega \approx \omega^{S_p}$ y, análogamente, que $\mathfrak{c} \approx \mathbb{R} \approx 2^\omega \approx \omega^{S_i}$. Es decir, existen dos funciones biyectivas, $\varphi : \mathfrak{c} \to \omega^{S_p}$ y $\psi : \mathfrak{c} \to \omega^{S_i}$. En aras de simplificar notación, hagamos, por el resto de esta sección, $\sigma_\alpha := \varphi(\alpha)$ y $\tau_\alpha := \psi(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in \mathfrak{c}$. Note que $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ es el conjunto de todas las estrategias para I y que $\{\tau_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ es la colección de todas las estrategias para II.

Ahora, para cada $\alpha \in \mathfrak{c}$, definamos los siguientes conjuntos:

$$F_\alpha := \{f \in \omega^\omega : f \text{ sigue a } \sigma_\alpha\} \qquad \text{y} \qquad G_\alpha := \{g \in \omega^\omega : g \text{ sigue a } \tau_\alpha\}.$$

Y de este modo definimos:

$$F := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{c}} F_\alpha \qquad \text{y} \qquad G := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{c}} G_\alpha.$$

Este par de conjuntos será usado libremente en el resto de la sección y, particularmente, en la prueba del Teorema 2.16.

Lema 2.14. *Para cada $\alpha \in \mathfrak{c}$, F_α y G_α son equipotentes a $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathfrak{c}$ arbitrario. Comencemos por demostrar que $F_\alpha \approx \mathfrak{c}$.

Como $F_\alpha \subseteq \omega^\omega$, el Teorema 1.10 implica que $F_\alpha \preceq \mathfrak{c}$. Respecto a la desigualdad restante, definiremos una función inyectiva de ω^ω en F_α. Sea $g \in \omega^\omega$ cualquiera y sea $\overline{g} \in \omega^\omega$ definida recursivamente como sigue

$$\overline{g}(n) = \begin{cases} \sigma_\alpha(\overline{g} \restriction n) & \text{si } n \text{ es par} \\ g(k) & \text{si existe } k \in \omega \text{ de modo que } n = 2k+1. \end{cases}$$

De este modo, $\overline{g}$ sigue a σ_α (véase diagrama de abajo).

I	$\overline{g}(0) = \sigma_\alpha(\emptyset)$		$\overline{g}(2) = \sigma_\alpha(\langle \overline{g}(0), \overline{g}(1) \rangle)$		$\cdots$
II		$\overline{g}(1) = g(0)$		$\overline{g}(3) = g(1)$	$\cdots$

Afirmamos que la función inyectiva buscada es $g \mapsto \overline{g}$. Veamos que, en efecto, es inyectiva. Sean $g, h \in \omega^\omega$ y supongamos que $\overline{g} = \overline{h}$. Sea $n \in \omega$ arbitraria. Por hipótesis, $\overline{g}(2n+1) = \overline{h}(2n+1)$, es decir, $g(n) = h(n)$ y por consiguiente, $g = h$. De este modo, $\mathfrak{c} \preceq F_\alpha$.

Análogamente, es claro que $G_\alpha \preceq \mathfrak{c}$ y, por otro lado, si para cada $g \in \omega^\omega$ definimos $\widehat{g} \in \omega^\omega$ mediante

$$\widehat{g}(n) = \begin{cases} g(k) & \text{si existe } k \in \omega \text{ de modo que } n = 2k \\ \tau_\alpha(\widehat{g} \restriction n) & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

entonces $\widehat{g}$ sigue a τ_α (véase diagrama de abajo).

I	$\widehat{g}(0) = g(0)$		$\widehat{g}(2) = g(1)$		$\cdots$
II		$\widehat{g}(1) = \tau_\alpha(\langle \widehat{g}(0) \rangle)$		$\widehat{g}(3) = \tau_\alpha(\langle \widehat{g}(0), \widehat{g}(1), \widehat{g}(2) \rangle)$	$\cdots$

Luego, con un argumento análogo, obtenemos la inyectividad de $g \mapsto \widehat{g}$. Por lo tanto, $\mathfrak{c} \preceq G_\alpha$. $\square$

Lema 2.15. *Si $\alpha \in \mathfrak{c}$ y $A \in [\mathbb{R}]^{|\alpha|}$, entonces $\mathbb{R} \setminus A \approx \mathfrak{c}$.*

Demostración. De [2, Proposición 7.37] se sigue que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathfrak{c}$. Luego, existe una biyección $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ahora, por hipótesis, $A \subseteq \mathbb{R}$, así que $\phi[A]$ es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\phi[A] \approx \alpha$.

Definimos $P := \{x \in \mathbb{R} : \exists y\, ((x, y) \in \phi[A])\}$ y sea $f : \phi[A] \to P$ dada por $f((x, y)) = x$ para cada $(x, y) \in \phi[A]$. Claramente, f es sobreyectiva, así que la Proposición 1.11 nos da $P \preceq \phi[A] \approx \alpha$. Además, $\alpha \in \mathfrak{c}$ implica que $\alpha \subseteq \mathfrak{c}$ y como $\mathfrak{c}$ es el primer ordinal equipotente a $\mathbb{R}$, no puede serlo a α, es decir, $\alpha \prec \mathfrak{c}$. Por lo que, $P \preceq \alpha \prec \mathfrak{c} \approx \mathbb{R}$.

Del párrafo anterior se deduce que existe $x_0 \in \mathbb{R} \setminus P$. Sea $X = \{x_0\} \times \mathbb{R}$. Dos observaciones inmediatas son:

(1) $X \cap \phi[A] = \emptyset$, es decir, $X \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \phi[A]$.

(2) $X \approx \mathfrak{c}$.

Consideremos $\phi^{-1}[X] \subseteq \mathbb{R}$. Por (1), se tiene que $\phi^{-1}[X] \cap \phi^{-1}[\phi[A]] = \emptyset$, es decir, que $\phi^{-1}[X] \cap A = \emptyset$. Luego, $\phi^{-1}[X] \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ y, además, $\phi^{-1}[X] \approx X \approx \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $\mathbb{R} \setminus A \approx \mathfrak{c}$. □

Teorema 2.16 (Gale-Stewart). *Si $\mathbb{R}$ tiene un buen orden, entonces existe un conjunto que no está determinado (es decir, AD falla).*

Demostración. Nuestro plan es construir, por recursión transfinita, dos colecciones, $\{x_i : i \in \mathfrak{c}\}$ y $\{y_i : i \in \mathfrak{c}\}$ contenidas en ω^ω.

Dada $\alpha \in \mathfrak{c}$, supongamos definidos $X_\alpha := \{x_\beta : \beta \in \alpha\}$ y $Y_\alpha := \{y_\beta : \beta \in \alpha\}$ de modo que cumplan:

(1) $X_\alpha \cap Y_\alpha = \emptyset$.

(2) Para cada $\beta \in \alpha$, y_β sigue a σ_β.

(3) Para cada $\beta \in \alpha$, x_β sigue a τ_β.

(4) Si $\gamma < \delta < \alpha$, entonces $x_\gamma \neq x_\delta$ y $y_\gamma \neq y_\delta$.

Construyamos x_α y y_α.

Como $X_\alpha \approx \alpha \approx Y_\alpha$ (condición (4)) y $G_\alpha \approx \mathfrak{c}$, aplicando el Lema 2.15 dos veces, tenemos que $(G_\alpha \setminus X_\alpha) \setminus Y_\alpha \approx \mathfrak{c}$, es decir, $G_\alpha \setminus (X_\alpha \cup Y_\alpha) \approx \mathfrak{c}$. Análogamente, $F_\alpha \setminus (X_\alpha \cup Y_\alpha) \approx \mathfrak{c}$.

Dado que estamos suponiendo que $\mathbb{R}$ está bien ordenado, todo conjunto equipotente a $\mathbb{R}$ también lo está. Con esta idea en mente, hagamos $x_\alpha := \min(G_\alpha \setminus (X_\alpha \cup Y_\alpha))$ y $y_\alpha := \min(F_\alpha \setminus (X_\alpha \cup Y_\alpha))$. De este modo, se tiene que $x_\alpha \in G_\alpha \setminus (X_\alpha \cup Y_\alpha)$ y que $y_\alpha \in F_\alpha \setminus (X_\alpha \cup Y_\alpha)$. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) x_α sigue a τ_α y y_α sigue a σ_α (pues $x_\alpha \in G_\alpha$ y $y_\alpha \in F_\alpha$).

(ii) Para cada $\beta \in \alpha$, sucede que $x_\alpha \neq x_\beta$ y $y_\alpha \neq x_\beta$ (pues $x_\alpha, y_\alpha \notin X_\alpha$).

(iii) Para cada $\beta \in \alpha$, se tiene que $x_\alpha \neq y_\beta$ y $y_\alpha \neq y_\beta$ (pues $x_\alpha, y_\alpha \notin Y_\alpha$).

De este modo, la recursión está completa, así que definimos $X := \{x_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ y $Y := \{y_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$. Notemos que $X, Y \subseteq \omega^\omega$ y son ajenos por construcción.

Afirmamos que X no está determinado. Si σ es una estrategia para I en $\Game_X$, entonces existe $\alpha \in \mathfrak{c}$ de tal modo que $\sigma = \sigma_\alpha$. Ahora, por construcción, y_α sigue a σ_α pero no es elemento de X, luego σ_α no es estrategia ganadora para I. De igual manera, si $\alpha \in \mathfrak{c}$, tenemos que x_α es un elemento de X que sigue a τ_α y entonces τ_α no es estrategia ganadora para II. $\square$

De este modo, tenemos que AE implica que AD falla, sin embargo, también se tiene que AD implica una versión más débil de AE, a decir, el Axioma de Elección para subfamilias numerables de $\omega^\omega \setminus \{\emptyset\}$. El trabajo restante en esta sección se enfoca en este último resultado.

Definición 2.17. Entenderemos por *Axioma de elección para conjuntos numerables* al siguiente enunciado: "Para cada familia $\{A_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos no vacíos de ω^ω existe una función $e : \omega \to \omega^\omega$ de modo que $e(n) \in A_n$ para cada $n \in \omega$". Denotaremos a dicho enunciado como AEN.

En otras palabras, AEN afirma la existencia de una función de elección para cada familia numerable de subconjuntos no vacíos de ω^ω.

Sea $\mathcal{F} := \{A_n : n \in \omega\}$ como en la hipótesis de la Definición 2.17 y consideremos la función $s : \omega \to \omega$ dada por $s(n) = 2n + 1$ para cada $n \in \omega$. En lo que resta de la sección, $\mathcal{F}$ y s estarán fijas.

Definamos el juego $\Game_1$. En él participarán dos jugadores, a los que llamaremos H y V, que tirarán un número natural en cada turno que les corresponda, es decir, al inicio H tirará algún $h_0 \in \omega$, posteriormente V responderá con un número natural v_0, como respuesta H escogerá $h_1 \in \omega$ y así sucesivamente. Del mismo modo en que lo hemos manejado, $\Game_1$ concluirá luego de ω turnos dando como resultado una partida $f \in \omega^\omega$. V ganará $\Game_1$ si $f \circ s = \langle v_0, v_1, \dots \rangle$ es un elemento del correspondiente $A_{h_0} \in \mathcal{F}$ (ver diagrama de abajo); en caso contrario H ganará.

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{H} & f(0) = h_0 & & f(2) = h_1 & & \cdots \\ \hline \text{V} & & f(1) = v_0 & & f(3) = v_1 & \cdots \end{array}$$

En otras palabras, V gana el juego $\Game_1$ si $f \circ s \in A_{f(0)}$; de lo contrario, H gana.

De manera análoga que con el juego $\Game_{\mathcal{A}}$, el árbol de jugadas legales de $\Game_1$ será $\omega^{<\omega}$ y se tendrán tanto estrategias como estrategias ganadoras para ambos jugadores. Una estrategia para H será cualquier función de S_p en ω y una estrategia para V será cualquier función de S_i en ω.

La siguiente proposición se desprende naturalmente de la definición de $\Game_1$.

Proposición 2.18. *H no tiene estrategia ganadora en $\Game_1$.*

Demostración. Sea $\sigma : S_p \to \omega$ una estrategia cualquiera para H en el juego $\Game_1$. Fijemos $x \in A_{\sigma(\emptyset)}$ y definamos $f : \omega \to \omega$ recursivamente como sigue:

$$f(2n) = \sigma(f \restriction (2n)) \qquad \text{y} \qquad f(2n+1) = x(n)$$

para cada $n \in \omega$. De este modo, es claro que f sigue a σ y, además, $f \circ s = x \in A_{f(0)}$ (véase diagrama de abajo)

$$\begin{array}{c|ccccc}
\text{H} & f(0) = \sigma(\emptyset) & & f(2) = \sigma(\langle f(0), f(1) \rangle) & & \cdots \\
\hline
\text{V} & & f(1) = x(0) & & f(3) = x(1) & \cdots
\end{array}$$

Por lo tanto, σ no es estrategia ganadora para H en $\Game_1$. $\square$

La siguiente proposición nos muestra la relación que existe entre $\Game_1$ y el juego que definimos al principio del capítulo. Para ello definamos un subconjunto X de ω^ω como sigue: $X := \{f \in \omega^\omega : f \circ s \notin A_{f(0)}\}$. X estará fijo en el resto de la sección.

Proposición 2.19. *Si I tiene estrategia ganadora en $\Game_X$, entonces H tiene estrategia ganadora en $\Game_1$.*

Demostración. Sea $\sigma : S_p \to \omega$ una estrategia ganadora para I en $\Game_X$. Se afirma que σ es una estrategia ganadora para H en $\Game_1$. En efecto, si $f \in \omega^\omega$ es una partida en $\Game_1$ que sigue a σ, entonces de nuestra hipótesis se deduce que $f \in X$. Es inmediato que $f \circ s \notin A_{f(0)}$ y, por consiguiente, σ es una estrategia ganadora para H en $\Game_1$. $\square$

De las Proposiciones 2.18 y 2.19 se deduce que I no tiene estrategia ganadora en $\Game_X$. Luego, AD nos garantiza que II sí tiene estrategia ganadora en $\Game_X$.

Proposición 2.20. *V tiene estrategia ganadora en $\Game_1$.*

Demostración. Sea $\tau : S_i \to \omega$ una estrategia ganadora para II en $\Game_X$. Probaremos que τ es estrategia ganadora para V en $\Game_1$. Tomemos una partida $f \in \omega^\omega$ que siga a τ. Como τ es ganadora para II en $\Game_X$, $f \notin X$ y, por ende, $f \circ s \in A_{f(0)}$. Es decir, τ es estrategia ganadora para V en $\Game_1$. $\square$

Teorema 2.21. *Si AD es cierto, entonces AEN es cierto.*

Demostración. Sea $\tau : S_i \to \omega$ una estrategia ganadora para V en $\Game_1$.

Sea $n \in \omega$ arbitraria. Definamos una función $f_n : \omega \to \omega$ como sigue:

$$f_n(2m) = n \qquad \text{y} \qquad f_n(2m+1) = \tau(f_n \restriction (2m+1))$$

para cada $m \in \omega$. Es inmediato que f_n sigue a τ. Como τ es ganadora para V en $\Game_1$, se sigue que $f_n \circ s \in A_n$. De este modo, la función $e : \omega \to \omega^\omega$ dada por $e(n) = f_n \circ s$ para cualquier $n \in \omega$ satisface que $e(n) \in A_n$, para toda $n \in \omega$. $\square$

El camino que hemos seguido para probar que AEN es un teorema del sistema axiomático ZF + AD será recorrido varias veces en este trabajo. De manera precisa, cuando intentemos probar que cierto enunciado en cierto en ZF + AD propondremos un conjunto X y un juego que resultará *equivalente* a $\Game_X$.

2.2 La Propiedad del Conjunto Perfecto en ZF+AD

El objetivo de esta sección es probar el Teorema de Morton Davis, a saber, que en ZF+AD todos los subconjuntos de los irracionales tienen la PCP (tal y como fue definida en la Sección 1.6). Para esto, dado $A \subseteq \omega^\omega$, definiremos el juego $\Game_3(A)$.

Comencemos por establecer notación: por el resto del trabajo, $\mathbb{S} := \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Ahora, $\Game_3(A)$ será jugado por un par de jugadores a quienes denotaremos como H y V. Las tiradas de H serán elementos de $\mathbb{S}$ y las tiradas de V serán elementos de ω, es decir, primero H elige algún $s_0 \in \mathbb{S}$, luego V responde con algún número natural n_0, posteriormente H tira un $s_1 \in \mathbb{S}$ y así sucesivamente como se muestra en el siguiente diagrama.

H	s_0		s_1		$\dots$
V		n_0		n_1	$\dots$

Así, H ganará la partida descrita arriba si y sólo si el siguiente par de condiciones se satisface.

(1) Para cada $i \in \omega \setminus \{0\}$ se tiene que $s_i(0) \neq n_{i-1}$.

(2) $\bigvee_{i\in\omega} s_i \in A$ (recuerde el material de la Sección 1.2).

Con el fin de tener siempre un único ganador, diremos que H no gana si y solamente si V gana.

Como lo hemos venido haciendo, definiremos qué es una partida y cómo son las estrategias para los jugadores de $\Game_3(A)$.

Definición 2.22. La frase *x es una partida en el juego $\Game_3(A)$* significará que x es una función de ω en $\omega \cup \mathbb{S}$ de modo que para cada $n \in \omega$ se tiene que

$$x(2n) \in \mathbb{S} \qquad \text{y} \qquad x(2n+1) \in \omega.$$

Esto es, si x es una partida en el juego $\Game_3(A)$, entonces x se ve de la siguiente manera:

H	$x(0)$		$x(2)$		$\dots$
V		$x(1)$		$x(3)$	$\dots$

Denotaremos por P al conjunto de todas las partidas en el juego $\Game_3(A)$, es decir, $x \in P$ si y sólo si x es una partida en el juego $\Game_3(A)$. En lo que resta de esta sección P estará fijo.

Ahora definamos el siguiente conjunto:

$$S := \{x \restriction n : x \in P \quad \wedge \quad n \in \omega\}.$$

En otras palabras, S es el conjunto de todos los inicios de partida posibles en el juego $\Game_3(A)$. A los elementos de S les llamaremos *partidas iniciales*.

Definición 2.23. Si $s \in S$, entonces denotaremos como $s^\sim$ a la concatenación de todos los valores de s en los pares, es decir, $s^\sim := \bigvee_{i<|s|/2} s(2i)$ (por ejemplo, $\emptyset \in S$ y $\emptyset^\sim = \emptyset$).

Además, si $x \in P$, definimos $x^{\sim} := \bigvee_{n\in\omega} x(2n)$.

Note que si $A \subseteq \omega^{\omega}$, entonces, con la notación de arriba, la partida $x \in P$ es ganada por H si y sólo si $x^{\sim} \in A$ y $x(2k)(0) \neq x(2k-1)$, para todo $k \in \omega \setminus 1$.

Con la intención de definir qué es una estrategia dividiremos a S en dos colecciones ajenas. En primer lugar, denotaremos por S_0 a todas las partidas iniciales $s \in S$ para las que $|s|$ es un número par y, en segundo término, $S_1 := S \setminus S_0$.

Observe que si $s \in S_0$, entonces la última tirada de s fue hecha por el jugador V, mientras que si $t \in S_1$, la última jugada en t fue realizada por el jugador H.

Estamos ahora listos para definir las estrategias de nuestro juego.

Diremos que σ es una *estrategia para H* si y sólo si $\sigma : S_0 \to \mathbb{S}$ y que τ es una *estrategia para V* si y sólo si $\tau : S_1 \to \omega$.

Naturalmente, que una partida x siga a una estrategia $\sigma : S_0 \to \mathbb{S}$ (respectivamente, $\tau : S_1 \to \omega$) significará que para cada $n \in \omega$ se tiene que $x(2n) = \sigma(x \upharpoonright 2n)$ (respectivamente, $x(2n+1) = \tau(x \upharpoonright (2n+1))$. Finalmente, nuestra noción de estrategia ganadora en $\Game_3(A)$ es análoga a la dada al principio del capítulo (ver definiciones posteriores al Lema 2.7).

Definición 2.24. Si σ es una estrategia para H en el juego $\Game_3(A)$, diremos que $t \in S_1$ es una *partida inicial correcta con respecto a* σ si y sólo si t sigue a σ (véase diagrama de abajo).

H	$t(0) = \sigma(t \upharpoonright 0)$		$t(2) = \sigma(t \upharpoonright 2)$	$\cdots$		$t(\lvert t\rvert - 1) = \sigma(t \upharpoonright (\lvert t\rvert - 1))$
V		$t(1)$		$\cdots$	$t(\lvert t\rvert - 2)$	

Denotaremos al conjunto de todas las partidas iniciales correctas con respecto a σ como $PIC(\sigma)$.

La siguiente definición es análoga a la anterior.

Definición 2.25. Si τ es una estrategia para V en el juego $\Game_3(A)$, diremos que $t \in S_0$ es una *partida inicial correcta con respecto a* τ si y sólo si t sigue a τ.

De igual manera, denotaremos al conjunto de todas las partidas iniciales correctas con respecto a τ como $PIC(\tau)$. Note que $\emptyset \in PIC(\tau)$. Por otro lado, si $t \in PIC(\tau) \setminus \{\emptyset\}$, entonces t luce como indica el siguiente diagrama.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\text{H} & t(0) & & t(2) & & \cdots & t(|t|-2) & \\
\hline
\text{V} & & t(1) & & t(3) & \cdots & & t(|t|-1)
\end{array}
$$

Equivalentemente:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\text{H} & t(0) & & t(2) & & \cdots & t(|t|-2) & \\
\hline
\text{V} & & \tau(t \restriction 1) & & \tau(t \restriction 3) & \cdots & & \tau(t \restriction (|t|-1))
\end{array}
$$

A continuación veremos cuál es la conexión entre el juego $\Game_3(A)$ y nuestro juego original. El plan es definir, para cada $A \subseteq \omega^\omega$, un conjunto $A^* \subseteq \omega^\omega$ y probar ciertas relaciones entre la existencia de estrategias ganadoras para el jugador II en $\Game_{A^*}$ y la existencia de estrategias ganadoras para V en $\Game_3(A)$.

De acuerdo a la Proposición 1.7, podemos fijar por el resto de la sección una función biyectiva $\varphi : \omega \to \mathbb{S}$. Ahora denotemos por A^* al conjunto dado por la fórmula: $f \in A^*$ si y sólo si $f \in \omega^\omega$ y satisface:

(1*) para cualquier $n \in \omega \setminus 1$, $\varphi\left(f(2n)\right)(0) \neq f(2n-1)$ y

(2*) $\bigvee_{n\in\omega} \varphi\left(f(2n)\right) \in A$.

Argumentemos que cada partida en el juego $\Game_{A^*}$ induce una partida en el juego $\Game_3(A)$ y viceversa.

Si f es una partida del juego $\Game_{A^*}$, entonces f luce de la siguiente manera

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\text{I} & f(0) & & f(2) & & \ldots \\
\hline
\text{II} & & f(1) & & f(3) & \ldots
\end{array}
$$

y, en consecuencia, induce la siguiente partida en $\Game_3(A)$:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\text{H} & \varphi\left(f(0)\right) & & \varphi\left(f(2)\right) & & \ldots \\
\hline
\text{V} & & f(1) & & f(3) & \ldots
\end{array}
$$

Formalmente, para cada $f \in \omega^\omega$, *la partida en* $\Game_3(A)$ *inducida por* f es la función $x : \omega \to \omega \cup \mathbb{S}$ dada por

$$x(2n) = \varphi(f(2n)) \qquad \text{y} \qquad x(2n+1) = f(2n+1),$$

para cualquier $n \in \omega$.

En la otra dirección, cuando $x : \omega \to \omega \cup \mathbb{S}$ es una partida en $\Game_3(A)$, podemos visualizar a x como en la tabla de abajo.

H	$x(0)$		$x(2)$		$\ldots$
V		$x(1)$		$x(3)$	$\ldots$

Luego, la partida en $\Game_{A^*}$ inducida por x será aquella que se exhibe en el diagrama de abajo.

I	$\varphi^{-1}(x(0))$		$\varphi^{-1}(x(2))$		$\ldots$
II		$x(1)$		$x(3)$	$\ldots$

En símbolos, para cada partida x del juego $\Game_3(A)$, *la partida inducida por x en $\Game_{A^*}$* es la función $f \in \omega^\omega$ dada por

$$f(2n) = \varphi^{-1}(x(2n)) \qquad \text{y} \qquad f(2n+1) = x(2n+1),$$

para cualquier $n \in \omega$.

Con la intención de simplificar nuestra notación para los dos lemas siguientes, convengamos en que, para cada $s \in S$, la función $\overline{s} : |s| \to \omega$ estará dada por

$$\overline{s}(n) = \begin{cases} \varphi^{-1}(s(n)), & \text{si } n \text{ es par} \\ s(n), & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

para cualquier $n < |s|$.

Por ejemplo, si $s \in S_1$, entonces s y $\overline{s}$ pueden ser pensadas como partidas iniciales de los juegos $\Game_{A^*}$ y $\Game_3(A)$, respectivamente, tal y como lo sugieren los diagramas de abajo.

H	$s(0)$		$\cdots$	$s(\lvert s\rvert-1)$
V		$s(1)$	$\cdots$	

I	$\overline{s}(0) = \varphi^{-1}(s(0))$		$\cdots$	$\overline{s}(\lvert s\rvert-1) = \varphi^{-1}(s(\lvert s\rvert-1))$
II		$\overline{s}(1) = s(1)$	$\cdots$	

Observe que si $s \in S_1$, entonces $\overline{s} \in S_i$ y que si $s \in S_0$, entonces $\overline{s} \in S_p$.

Lema 2.26. *Si el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $\Game_{A^*}$, entonces el jugador V posee una estrategia ganadora en el juego $\Game_3(A)$.*

Demostración. Fijemos $\tau : S_i \to \omega$, una estrategia ganadora para II en el juego $\Game_{A^*}$, y definamos $\tau' : S_1 \to \omega$ mediante $\tau'(s) := \tau(\overline{s})$. De este modo, es inmediato que τ' es estrategia para V en el juego $\Game_3(A)$.

Probemos que τ' es ganadora. Para esto, sea x una partida en $\Game_3(A)$ que siga a τ' y denotemos por f a la partida inducida por x en el juego $\Game_{A^*}$. Se afirma que f sigue a τ. En efecto, fije $k \in \omega$ y observe que $\overline{x \restriction (2k+1)} = f \restriction (2k+1)$; además, como x sigue a τ', sucede que

$$f(2k+1) = x(2k+1) = \tau'\left(x \restriction (2k+1)\right) = \tau\left(\overline{x \restriction (2k+1)}\right) = \tau\left(f \restriction (2k+1)\right),$$

con lo cual queda probada nuestra afirmación.

Ahora, como τ es estrategia ganadora para II en $\Game_{A^*}$, se tiene que $f \notin A^*$, es decir, o bien (1^*) es falsa o (2^*) falla. Esta última disyunción equivale, según la definición de f a que, una de dos, o existe $n \in \omega \setminus 1$ con $x(2n)(0) = f(2n-1)$ ó $x^\sim \notin A$. En cualquier caso, el jugador V gana la partida x. □

El siguiente lema nos muestra que también existe una conexión entre la existencia de estrategias ganadoras para el jugador I en $\Game_{A^*}$ y la existencia de estrategias ganadoras para H en $\Game_3(A)$.

Lema 2.27. *Si el jugador I posee estrategia ganadora en $\Game_{A^*}$, entonces el jugador H tiene estrategia ganadora en $\Game_3(A)$.*

Demostración. Sea $\sigma : S_p \to \omega$ una estrategia ganadora para I en $\Game_{A^*}$. La función $\sigma' : S_0 \to \omega$ dada por $\sigma'(s) := \varphi\left(\sigma\left(\overline{s}\right)\right)$ es, claramente, una estrategia para H en $\Game_3(A)$. Demostremos que σ' es estrategia ganadora.

Sea x una partida en $\Game_3(A)$ que siga a σ' y sea f la partida inducida por x en $\Game_{A^*}$. Verifiquemos que f sigue a σ. Tal y como lo hicimos en la prueba del Lema 2.26, para cada

$k \in \omega$ se tiene que $\overline{x \upharpoonright (2k)} = f \upharpoonright (2k)$ y como x sigue a σ', tenemos:

$$x(2k) = \sigma'\left(x \upharpoonright (2k)\right) = \varphi\left(\sigma\left(\overline{x \upharpoonright (2k)}\right)\right) = \varphi\left(\sigma\left(f \upharpoonright (2k)\right)\right)$$

y por lo tanto,

$$f(2k) = \varphi^{-1}\left(x(2k)\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\sigma\left(f \upharpoonright (2k)\right)\right)\right) = \sigma\left(f \upharpoonright (2k)\right).$$

Así, f sigue a σ.

El que σ sea ganadora implica que $f \in A^*$, esto es, tanto (1*) como (2*) son ciertas; equivalentemente, se tiene que $x(2n)(0) \neq f(2n-1)$, para cualquier $n \in \omega$, y $x^\sim \in A$. En consecuencia, H gana la partida x en el juego $\Game_3(A)$, tal y como se quería. $\square$

A continuación presentamos un concepto que nos será útil para probar el resultado central de esta sección (la notación que aparece en la Definición 2.23 será empleada).

Definición 2.28. Sea $A \subseteq \omega^\omega$. Si $\tau : S_1 \to \omega$ es una estrategia para V en $\Game_3(A)$, $t \in PIC(\tau)$ y $x \in \omega^\omega$, diremos que t *es τ-compatible con* x si y sólo si existe $s \in \mathbb{S}$ de modo que se satisfacen las condiciones:

(i) $(|t|-1, s(0)) \notin t$.

(ii) $t^\sim \vee s \subset x$.

Observe que si $t \neq \emptyset$, entonces la condición (i) de arriba equivale a que $t\left(|t|-1\right) \neq s(0)$.

Intuitivamente, t será τ-compatible con x siempre que $t^\sim \subseteq x$ y el jugador H pueda tirar al menos una vez más "sin salirse" de x.

El símbolo $s^\frown a$ se usará tal y como fue definido en la Sección 1.2 de esta tesis.

Lema 2.29. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$ y sea τ una estrategia para V en $\Game_3(A)$. Si $t \in PIC(\tau)$ y $x \in \omega^\omega$, entonces t es τ-compatible con x si y sólo si $t^\sim \subseteq x$ y $\left(|t|-1, x\left(|t^\sim|\right)\right) \notin t$.*

Demostración. Suponga que t es τ-compatible con x y que s es como en la Definición 2.28. De la condición (ii) se sigue que $t^\sim \subseteq x$ y que $x\left(|t|\right) = s(0)$; de este modo, (i) garantiza que $\left(|t|-1, x\left(|t^\sim|\right)\right) \notin t$.

Para la implicación restante hagamos $s := \{(0, x(|t^{\sim}|))\} \in \mathbb{S}$. Así, es inmediato que $(|t|-1, s(0)) \notin t$ y, además, $t^{\sim} \vee s = (t^{\sim})^{\frown} x(|t^{\sim}|) \subseteq x$, es decir, t es τ-compatible con x.

$\square$

Definición 2.30. Sea $A \subseteq \omega^{\omega}$. Si τ es una estrategia para V en $\Game_3(A)$, $t \in PIC(\tau)$ y $x \in \omega^{\omega}$, entonces t *τ-rechaza a x* si y sólo si t es τ-compatible con x en un sentido maximal, es decir, si

(1) t es τ-compatible con x y

(2) para cada $s \in \mathbb{S}$ se tiene que la condición $(|t|-1, s(0)) \notin t$ implica que $(t^{\frown}s)^{\frown} \tau(t^{\frown}s)$ no es τ-compatible con x.

Sean $A \subseteq \omega^{\omega}$, τ una estrategia para V en $\Game_3(A)$ y $t \in PIC(\tau)$. Denotemos por H_t^{τ} a la colección dada por la fórmula

$$x \in H_t^{\tau} \text{ si y sólo si } x \in \omega^{\omega} \text{ y } x \text{ es } \tau\text{-rechazado por } t.$$

Lema 2.31. *Sea $A \subseteq \omega^{\omega}$. Si τ es una estrategia ganadora para V en $\Game_3(A)$, entonces $A \subseteq \bigcup\{H_t^{\tau} : t \in PIC(\tau)\}$.*

Demostración. Hagamos la prueba por contrapositiva. Supongamos que $x \in \omega^{\omega}$ es tal que para cada $t \in PIC(\tau)$ sucede que x no es τ-rechazado por t y demostremos que $x \notin A$.

Empecemos por construir recursivamente dos familias, $\{t_n : n \in \omega\}$ y $\{s_n : n \in \omega\}$, de tal modo que los enunciados siguientes sean ciertos para cualquier $n \in \omega$.

(1) $t_n \in PIC(\tau)$ y $s_n \in \mathbb{S}$.

(2) $t_n \subset t_{n+1}$.

(3) t_n es τ-compatible con x.

(4) $(t_n{}^{\frown}s_n)^{\frown} \tau(t_n{}^{\frown}s_n)$ es τ-compatible con x.

Sea e la función de elección garantizada por el Lema 1.26. Hagamos $t_0 := \emptyset$ para obtener $t_0 \in PIC(\tau)$. Luego, t_0 no τ-rechaza a x y se verifica rápidamente que satisface

(3). De esta forma, el conjunto

$$B_0 := \{u \in \mathbb{S} : [(|t_0| - 1, s(0)) \notin t_0] \wedge [(t_0{}^\frown u)^\frown \tau\,(t_0{}^\frown u) \text{ es } \tau\text{-compatible con } x]\}$$

no es vacío. Para concluir con la base de la recursión será suficiente hacer $s_0 := e(B_0)$.

Demos por hecho que para algún $n \in \omega$ hemos obtenido $\{s_i : i \leqslant n\}$ y $\{t_i : i \leqslant n\}$ adecuadamente. Definamos $t_{n+1} := (t_n{}^\frown s_n)^\frown \tau\,(t_n{}^\frown s_n)$ y notemos que la condición (2) es satisfecha por t_{n+1}. Ahora, la hipótesis inductiva $t_n \in PIC(\tau)$ implica que $t_{n+1} \in PIC(\tau)$ y, por ende, t_{n+1} satisface (3). Además, x no es τ-rechazado por t_{n+1}, esto es, el conjunto $B_{n+1} \subseteq \mathbb{S}$ definido por la fórmula $u \in B_{n+1}$ si y sólo si

$$t_{n+1}\,(|t_{n+1}| - 1) \neq u(0) \text{ y } (t_{n+1}{}^\frown u)^\frown \tau\,(t_{n+1}{}^\frown u) \text{ es } \tau\text{-compatible con } x$$

no es vacío. Evidentemente, $s_{n+1} := e(B_{n+1})$ satisface (4) y $s_{n+1} \in \mathbb{S}$. Así, la recursión está completa.

Como corolario de (2) se tiene que $y := \bigcup_{n\in\omega} t_n$ es una función de ω en $\omega \cup \mathbb{S}$. Más aún, (1) implica que y es una partida en $\eth_3(A)$ que sigue a τ. En consecuencia, $y^\sim \notin A$. Ahora, según (3), $t_n{}^\sim \subseteq x$, para todo $n \in \omega$, y de esta forma, $y^\sim = \bigcup_{n\in\omega} t_n{}^\sim \subseteq x$. Dado que $y^\sim \in \omega^\omega$, concluimos que $x = y^\sim \notin A$. □

Lema 2.32. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$. Si τ es una estrategia ganadora para V en el juego $\eth_3(A)$ y $t \in PIC(\tau)$, entonces la función $g_t^\tau : H_t^\tau \to \omega^{<\omega}$ dada por*

$$g_t^\tau(x) = x \restriction (|t^\sim| + 1)\,,$$

para cada $x \in F_t^\tau$, es inyectiva.

Demostración. Fijemos $t \in PIC(\tau)$ y hagamos $m = |t^\sim|$. Dado $x \in H_t^\tau$, definimos, para cualquier $n \in \omega$,

$$s_n^x := \{(i, x(m+i)) : i \leqslant n\},$$

es decir, $s_n^x = \langle x(m), x(m+1), \ldots, x(m+n)\rangle$.

Afirmación: Si $x \in H_t^\tau$ y $n \in \omega$, entonces $x(m+n+1) = \tau\,(t^\frown s_n^x)$.

Antes de comprobar nuestra aseveración, observemos algunas consecuencias de ésta. En primer lugar, si $x, y \in H_t^\tau$ satisfacen $x(m) = y(m)$, entonces $s_0^x = s_0^y$ y, por la Afirmación,

$$x(m+1) = \tau\left(t^\frown s_0^x\right) = \tau\left(t^\frown s_0^y\right) = y(m+1).$$

Luego, $s_1^x = s_1^y$ y de aquí se deduce, empleando nuevamente la Afirmación, que

$$x(m+2) = \tau\left(t^\frown s_1^x\right) = \tau\left(t^\frown s_1^y\right) = y(m+2).$$

De este modo concluimos que $x(m+n) = y(m+n)$ para cualquier $n \in \omega$.

Por lo anterior, si $x, y \in H_t^\tau$ satisfacen $g_t^\tau(x) = g_t^\tau(y)$, entonces $x = y$. En resumen, sólo debemos probar la Afirmación para concluir que g_t^τ es inyectiva.

Sea $n \in \omega$. Por definición, $s_n^x(0) = x(m)$ y como t es τ-compatible con x, el Lema 2.29 nos da $(|t|-1, x(m)) \notin t$. Así, $(|t|-1, s_n^x(0)) \notin t$ y dado que $x \in H_t^\tau$, deducimos que $u := (t^\frown s_n^x)^\frown \tau\left(t^\frown s_n^x\right)$ no es τ-compatible con x, es decir, (Lema 2.29) $u^\sim \nsubseteq x$ ó $(|u|-1, x\left(|u^\sim|\right)) \in u$. Dado que $u^\sim = t^\sim \vee s_n^x = t^\sim \vee \langle x(m), x(m+1), \ldots, x(m+n)\rangle$, obtenemos la contención $u^\sim \subseteq x$ (recuerde que $x \in H_t^\tau$ implica que $t^\sim \subseteq x$). En consecuencia debe tenerse que $(|u|-1, x\left(|u^\sim|\right)) \in u$ y de esta forma,

$$u\left(|u|-1\right) = x\left(|u^\sim|\right) = x(|t^\sim| + |s_n^x|) = x(m+n+1);$$

equivalentemente, $\tau\left(t^\frown s_n^x\right) = x(m+n+1)$. $\square$

Por la Proposición 1.7, $\mathbb{S} \approx \omega$ y de acuerdo a [2, Teorema 7.17], $\omega \cup \mathbb{S} \approx \omega$. Entonces, según la Proposición 1.8, $(\omega \cup \mathbb{S})^{<\omega} \approx \omega$.

Proposición 2.33. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$. Si V posee una estrategia ganadora en $\partial_3(A)$, entonces $A \preceq \omega$.*

Demostración. Sea τ una estrategia ganadora para V en $\partial_3(A)$. En vista de la contención $PIC(\tau) \subseteq (\omega \cup \mathbb{S})^{<\omega}$, deducimos que existe una función inyectiva $h : PIC(\tau) \to \omega$. Fijemos también $f : \omega^{<\omega} \to \omega$, una función biyectiva.

Para cada $t \in PIC(\tau)$ sucede que $g_t^\tau : H_t^\tau \to \omega^{<\omega}$, la función dada en la proposición previa, es inyectiva y, por ende, $f_t := f \circ g_t^\tau$ resulta ser una función inyectiva de H_t^τ en ω.

De lo anterior y de la Proposición 1.9 se deduce que $\bigcup\{H_t^\tau : t \in PIC(\tau)\} \preceq \omega$. Finalmente, el Lema 2.31 nos da $A \preceq \omega$. $\square$

Los siguientes resultados de la sección están enfocados a las consecuencias de que H posea una estrategia ganadora en el juego $\Game_3(A)$. De manera más específica: mostraremos que si $A \subseteq \omega^\omega$ satisface que H tiene una estrategia ganadora en $\Game_3(A)$, entonces el conjunto A contiene el cuerpo de un árbol perfecto.

Para los Lemas 2.34 y 2.35, el Corolario 2.36 y la Proposición 2.38 vamos a suponer que $A \subseteq \omega^\omega$ y que σ es una estrategia ganadora para H en $\Game_3(A)$.

Definamos recursivamente $\{u_s : s \in 2^{<\omega}\}$ y $\{v_s : s \in 2^{<\omega}\}$, un par de subconjuntos de $\omega^{<\omega}$, como sigue. En primer término sean

($\star_1$) $v_\emptyset := \emptyset$ y $u_\emptyset := \sigma(\emptyset)$.

Ahora supongamos que para algún $n \in \omega$ hemos obtenido $\{u_t : t \in 2^{\leqslant n}\} \subseteq \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $\{v_t : t \in 2^{\leqslant n}\}$ de tal modo que $|v_t| = |t|$, para cualquier $t \in 2^{\leqslant n}$. Fijemos $s : n \to 2$ y hagamos

$$Q_s := \langle u_{s\restriction 0}, v_s(0), \ldots, u_{s\restriction i}, v_s(i), \ldots, u_{s\restriction(|s|-1)}, v_s(|s|-1), u_s \rangle$$

(en particular, $Q_\emptyset = \langle u_\emptyset \rangle$) para obtener $Q_s \in S_1$. En otras palabras, Q_s es el inicio de partida que se ilustra en el tablero siguiente.

H	$u_{s\restriction 0}$		$\ldots$	$u_{s\restriction(\|s\|-1)}$		u_s
V		$v_s(0)$	$\ldots$		$v_s(\|s\|-1)$	

Así, tiene sentido definir

($\star_2$) $v_{s^\frown 0} := v_s{}^\frown 0$ y $u_{s^\frown 0} := \sigma\left(Q_s{}^\frown 0\right) = \sigma\left(Q_s{}^\frown(v_{s^\frown 0}(|s|))\right)$.

Para finalizar, sean

($\star_3$) $v_{s^\frown 1} := v_s{}^\frown\left(u_{s^\frown 0}(0)\right)$ y $u_{s^\frown 1} := \sigma\left(Q_s{}^\frown\left(u_{s^\frown 0}(0)\right)\right) = \sigma\left(Q_s{}^\frown(v_{s^\frown 1}(|s|))\right)$.

En otros términos, $u_{s^\frown 0}$ y $u_{s^\frown 1}$ son las respuestas dadas por la estrategia de H a las partidas que aparecen en los tableros de abajo.

H	$u_{s\restriction 0}$		$\ldots$	$u_{s\restriction(\|s\|-1)}$		u_s	
V		$v_{s\restriction 1}(0)$	$\ldots$		$v_s(\|s\|-1)$		0

H	$u_{s\restriction 0}$		$\ldots$	$u_{s\restriction(\|s\|-1)}$		u_s	
V		$v_{s\restriction 1}(0)$	$\ldots$		$v_s(\|s\|-1)$		$u_{s^\frown 0}(0)$

Lo hecho anteriormente garantiza que tanto u_s como v_s quedan bien definidas para toda $s \in 2^{<\omega}$, esto es, las familias $\{u_s : s \in 2^{<\omega}\}$ y $\{v_s : s \in 2^{<\omega}\}$ son construidas mediante este proceso recursivo. Conviene comentar que éstas permanecerán fijas para nuestros siguientes cuatro resultados, el primero de los cuales establece algunas propiedades que serán empleadas varias veces en el resto de la sección.

Lema 2.34. *Para todo $s \in 2^{<\omega}$ se tiene lo siguiente.*

($\star_4$) $|v_s| = |s|$.

($\star_5$) *Si $k \in 2$, entonces $v_s \subset v_{s^\frown k}$.*

($\star_6$) $u_s \neq \emptyset$ *y* $u_{s^\frown 0}(0) \neq u_{s^\frown 1}(0)$.

($\star_7$) $(|s|-1, u_s(0)) \notin v_s$.

Demostración. Comencemos por notar que ($\star_5$) se deduce rápidamente de las condiciones ($\star_2$) y ($\star_3$). Con respecto a ($\star_4$), usaremos inducción sobre $|s|$. En primer término, ($\star_1$) nos da el caso base. Supongamos ahora que para algún $n \in \omega$ y para toda $s : n \to 2$ se verifica ($\star_4$), y sea $t : n+1 \to 2$ una función arbitraria. Pongamos $s := t \restriction n$ y $k := t(n)$, y apliquemos ($\star_2$) y ($\star_3$) para deducir lo siguiente:

$$|v_t| = |v_{s^\frown k}| = |v_s| + 1 = n + 1 = |t|.$$

En aras de probar ($\star_6$) y ($\star_7$) verificaremos, por inducción sobre $|s|$, que $Q_s \in PIC(\sigma)$ (ver página 35) para toda $s \in 2^{<\omega}$. La base es corolario de la igualdad $Q_\emptyset = \langle u_\emptyset \rangle$ y de ($\star_1$). Entonces, sea $n \in \omega$ de tal suerte que $Q_s \in PIC(\sigma)$ siempre que $s : n \to 2$ y fijemos $t : n+1 \to 2$. Debemos comprobar que para cualquier $\ell \leqslant n+1$, $Q_t(2\ell) = \sigma\left(Q_t \restriction (2\ell)\right)$.

Iniciemos esta comprobación definiendo $s := t \restriction n$ y $k := t(n)$. Así, si $i < n$, se sigue que $s \restriction i = t \restriction i$ y además, según ($\star_1$) y ($\star_5$), $v_t(i) = v_s(i)$. Luego,

$$\begin{aligned} Q_t &= \langle u_{t\restriction 0}, v_t(0), \ldots, u_{t\restriction i}, v_t(i), \ldots, u_{t\restriction n}, v_t(n), u_t \rangle \\ &= \langle u_{s\restriction 0}, v_s(0), \ldots, u_{s\restriction i}, v_s(i), \ldots, u_s, v_{s^\frown k}(n), u_{s^\frown k} \rangle = Q_s \vee \langle v_{s^\frown k}(n), u_{s^\frown k} \rangle. \end{aligned}$$

Lo anterior, junto con la hipótesis inductiva, nos garantiza que para cada $\ell \leqslant n$,

$$Q_t(2\ell) = Q_s(2\ell) = \sigma\left(Q_s \restriction (2\ell)\right) = \sigma\left(Q_t \restriction (2\ell)\right).$$

Por otro lado, $Q_t \restriction (2n+2) = Q_s{}^\frown\left(v_{s^\frown k}(n)\right)$, $Q_t(2n+2) = u_{s^\frown k}$ y, por las condiciones ($\star_2$) y ($\star_3$), $u_{s^\frown k} = \sigma\left(Q_s{}^\frown\left(v_{s^\frown k}\right)\right)$. Con lo cual se completa la inducción.

Tomemos $s \in 2^{<\omega}$, un elemento arbitrario, para mostrar que ($\star_7$) es cierta. Cuando $|s| = 0$, $v_s = \emptyset$ y, por ende, ($\star_7$) es cierta trivialmente. Si $|s| \geqslant 1$, la $|s|$-ésima tirada del jugador H en la partida Q_s es $Q_s(2|s|-1) = v_s(|s|-1)$ y la respuesta que σ le dicta a H para esto es $Q_s(2|s|) = u_s$; luego, el que σ sea ganadora garantiza que $u_s(0) \neq v_s(|s|-1)$, esto es, $(|s|-1, u_s(0))) \notin v_s$.

Sólo nos resta demostrar ($\star_6$): nuevamente, sea $s \in 2^{<\omega}$ cualquiera. De acuerdo a ($\star_1$), ($\star_2$) y ($\star_3$), $u_s \in \operatorname{img}(\sigma)$ y, en consecuencia, $u_s \neq \emptyset$. Ahora, como corolario de ($\star_7$): $v_{s^\frown 1}(|s|) \neq u_{s^\frown 1}(0)$ y según ($\star_3$), $v_{s^\frown 1}(|s|) = u_{s^\frown 0}(0)$. En resumen, $u_{s^\frown 1}(0) \neq u_{s^\frown 0}(0)$. $\square$

Antes de continuar, es conveniente establecer un poco más de notación: si $s \in 2^{<\omega}$, entonces definimos

$$s^+ := \bigvee_{k \leqslant |s|} u_{s\restriction k}.$$

Observe que $s^+ \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

Lema 2.35. *Para cualesquiera $s, t \in 2^{<\omega}$ se tiene que $s \subseteq t$ si y sólo si $s^+ \subseteq t^+$.*

Demostración. Comencemos por suponer que $s \subseteq t$. La conclusión es trivialmente cierta cuando $s = t$. Luego, tomemos como hipótesis que $s \subset t$. De este modo, para toda $k \leqslant |s|$

se tiene que $t \restriction k = s \restriction k$ y entonces

$$t^+ = s^+ \vee \left(\bigvee_{k=|s|+1}^{|t|} u_{s\restriction k} \right).$$

Así, $s^+ \subset t^+$.

Demostremos ahora que si $s, t \in 2^{<\omega}$ son tales que $s^+ \subseteq t^+$, entonces se cumple que $s \subseteq t$.

Probaremos, con un argumento inductivo, que para cualquier $k \leqslant |s|$ se tienen las siguientes condiciones

(i) $k \leqslant |t|$.

(ii) $s \restriction k = t \restriction k$.

Observe que la base inductiva es inmediata pues $0 \leqslant |t|$ y $s \restriction 0 = \emptyset = t \restriction 0$. Supongamos ahora que $\ell < |s|$ es tal que las condiciones (i) y (ii) son satisfechas para todo $k \leqslant \ell$. Verifiquemos que $\ell + 1 \leqslant |t|$ y que $s \restriction (\ell+1) = t \restriction (\ell+1)$.

Las desigualdades $\ell < \ell + 1 \leqslant |s|$ implican que

$$s^+ = \bigvee_{i \leqslant |s|} u_{s\restriction i} = \left(\bigvee_{i \leqslant \ell} u_{s\restriction i} \right) \vee \left(\bigvee_{i=\ell+1}^{|s|} u_{s\restriction i} \right) = \left(\bigvee_{i \leqslant \ell} u_{t\restriction i} \right) \vee \left(\bigvee_{i=\ell+1}^{|s|} u_{s\restriction i} \right).$$

De esta forma, si tuviesemos $|t| \leqslant \ell$, la igualdad de arriba nos daría la contradicción $t^+ \subset s^+ \subseteq t^+$ (recuerde que $u_{s\restriction(\ell+1)} \neq \emptyset$, de acuerdo a $(\star_6)$). En consecuencia, $\ell + 1 \leqslant |t|$.

De lo anterior deducimos que

$$t^+ = \left(\bigvee_{i \leqslant \ell} u_{t\restriction i} \right) \vee \left(\bigvee_{i=\ell+1}^{|t|} u_{t\restriction i} \right)$$

y, en particular, $u_{s\restriction(\ell+1)}(0) = u_{t\restriction(\ell+1)}(0)$.

Observe que la hipótesis inductiva implica que $s \restriction \ell = t \restriction \ell$, así que para probar la igualdad $s \restriction (\ell+1) = t \restriction (\ell+1)$ sólo debemos mostrar que $s(\ell) = t(\ell)$.

Caso 1: $s(\ell) = 0$.

Supongamos, buscando una contradicción, que $t(\ell) \neq 0$, esto es, $t(\ell) = 1$. Como $t \restriction (\ell+1) = (t \restriction \ell)^\frown 1$, se deduce de $(\star_3)$ que

$$v_{t\restriction(\ell+1)} = v_{t\restriction\ell}{}^\frown \left(u_{(t\restriction\ell)^\frown 0}(0)\right) = v_{t\restriction\ell}{}^\frown \left(u_{(s\restriction\ell)^\frown 0}(0)\right) = v_{t\restriction\ell}{}^\frown \left(u_{s\restriction(\ell+1)}(0)\right);$$

de este modo, $v_{t\restriction(\ell+1)}(\ell) = u_{s\restriction(\ell+1)}(0)$, una contradicción directa a la condición $(\star_7)$ del Lema 2.34.

Caso 2: $s(\ell) = 1$.

De manera análoga a lo hecho en el caso anterior: supongamos que $t(\ell) = 0$ y deduzcamos una contradicción. Usemos $(\star_3)$ y la igualdad $s \restriction (\ell+1) = (s \restriction \ell)^\frown 1$ para obtener:

$$v_{s\restriction(\ell+1)} = v_{s\restriction\ell}{}^\frown \left(u_{(s\restriction\ell)^\frown 0}(0)\right) = v_{s\restriction\ell}{}^\frown \left(u_{(t\restriction\ell)^\frown 0}(0)\right) = v_{s\restriction\ell}{}^\frown \left(u_{t\restriction(\ell+1)}(0)\right).$$

En consecuencia, $v_{s\restriction(\ell+1)}(\ell) = u_{t\restriction(\ell+1)}(0)$, lo cual es imposible según $(\star_7)$. □

Corolario 2.36. *Para cualesquiera $s, t \in 2^{<\omega}$: $s \subset t$ si y sólo si $s^+ \subset t^+$.*

Demostración. La implicación directa está argumentada en el primer párrafo de la prueba del lema 2.35. Con respecto a la recíproca: si $s^+ \subset t^+$, entonces, por el lema previo, $s \subseteq t$ y como la igualdad $s = t$ implica que $s^+ = t^+$, se sigue que $s \neq t$, es decir, $s \subset t$. □

Para nuestros siguientes tres resultados usaremos el siguiente subconjunto de $\omega^{<\omega}$:

$$T := \{t \in \omega^{<\omega} : \exists s \in 2^{<\omega} \ \left(t \subseteq s^+\right)\}.$$

Note que para cualquier $t \in \omega^{<\omega}$ se sigue que $t \in T$ si y sólo si existen $s \in 2^{<\omega}$ y $m \in \omega$ de modo que $t = s^+ \restriction m$; esto es,

$$T = \{s^+ \restriction m : s \in 2^{<\omega} \wedge m \in \omega\}.$$

Proposición 2.37. *T es un árbol perfecto.*

Demostración. Comencemos por demostrar que T es un árbol: si $t \in T$, entonces existe $s \in 2^{<\omega}$ de manera que $t \subseteq s^+$ y, de este modo, $t \restriction n \subseteq s^+$ para cada $n \in \omega$; luego, $t \restriction n \in T$.

Ahora, para probar que T es perfecto, tomemos $t \in T$ y fijemos $s \in 2^{<\omega}$ con $t \subseteq s^+$. Para cada $i \in 2$ tenemos que $(s^\frown i)^+ \in T$ y $t \subseteq s^+ \subset (s^\frown i)^+$. Además, de acuerdo a la condición $(\star_6)$ del Lema 2.34,

$$(s^\frown 0)^+ \left(|s^+|\right) = u_{s^\frown 0}(0) \neq u_{s^\frown 1}(0) = (s^\frown 1)^+ \left(|s^+|\right).$$

En resumen, $(s^\frown 0)^+$ y $(s^\frown 1)^+$ son un par de extensiones incompatibles de s en T. $\square$

Proposición 2.38. *Para cada $y \in [T]$ existe $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$ de tal manera que, para todo $n \in \omega$, las condiciones siguientes son satisfechas.*

(1) $|s_n| = n$.

(2) $s_n^+ \subset s_{n+1}^+ \subseteq y$.

En particular,

(α) *para cualesquiera $m, n \in \omega$: si $n \leqslant m$, entonces $s_n = s_m \restriction n$ y*

(β) $y = \bigcup_{n \in \omega} s_n^+$.

Demostración. Empecemos por comprobar que (α) y (β) son consecuencia de (1) y (2). Con respecto a (β), la condición (2) implica que $\bigcup_{n\in\omega} s_n^+$ es una función con dominio ω que está contenida en y y, en consecuencia, son iguales. Por otro lado, si $m, n \in \omega$ satisfacen $n \leqslant m$, entonces (2) y el Corolario 2.36 producen $s_n \subset s_m$, de donde $s_n = s_m \restriction |s_n| = s_m \restriction n$, según (1).

Hagamos la construcción de la familia por recursión. Definamos $s_0 := \emptyset$. De este modo, es inmediato que (1) y (2) son satisfechas, concluyendo la base de la recursión.

Ahora supongamos que para algún $n \in \omega$ tenemos construido $\{s_k : k \leqslant n\}$ adecuadamente.

Note que la pertenencia $y \restriction (|s_n^+| + 1) \in T$ implica que existe $r \in 2^{<\omega}$ de manera que

$r^+ \upharpoonright (|s_n^+| + 1) = y \upharpoonright (|s_n^+| + 1)$. De lo anterior y de la hipótesis inductiva se sigue que

$$s_n^+ = y \upharpoonright |s_n^+| \subset y \upharpoonright \left(|s_n^+| + 1\right) = r^+ \upharpoonright \left(|s_n^+| + 1\right) \subseteq r^+,$$

es decir, se tiene que $s_n^+ \subset r^+$. Luego, el Corolario 2.36 implica que $s_n \subset r$. De este modo, $|s_n| = n < |r|$.

Lo hecho en el párrafo anterior nos garantiza que tiene sentido definir

$$s_{n+1} := r \upharpoonright (n+1) = s_n{}^\frown(r(n)).$$

Claramente, $s_n \subset s_{n+1}$ y $|s_{n+1}| = |s_n| + 1 = n + 1$. Así, sólo nos resta demostrar que $s_{n+1}^+ \subseteq y$.

El Corolario 2.36 junto con lo dicho en el párrafo previo nos da $s_n^+ \subset s_{n+1}^+$ y, en particular, $|s_n^+| < |s_{n+1}^+|$. Por otro lado, el que $y \upharpoonright |s_{n+1}^+| \in T$ nos permite deducir la existencia de $t \in 2^{<\omega}$ con $t^+ \upharpoonright |s_{n+1}^+| = y \upharpoonright |s_{n+1}^+|$. En consecuencia,

$$s_n^+ = y \upharpoonright |s_n^+| \subset y \upharpoonright |s_{n+1}^+| = t^+ \upharpoonright |s_n^+| \subseteq t^+$$

y por el Corolario 2.36, $s_n \subset t$ (en especial, $n < |t|$). Si probamos que $t(n) = r(n)$, entonces obtendríamos $s_{n+1} = s_n{}^\frown(r(n)) \subseteq t$ y se concluiría que $s_{n+1}^+ = t^+ \upharpoonright |s_{n+1}^+| \subseteq y$.

Comencemos por observar que $t \upharpoonright (n+1) = s_n{}^\frown (t(n))$. Luego, $(s_n{}^\frown (t(n)))^+ \subseteq t^+$ y, de hecho,

$$y\left(|s_n^+|\right) = t^+\left(|s_n^+|\right) = (s_n{}^\frown (t(n)))^+ \left(|s_n^+|\right) = u_{s_n{}^\frown(t(n))}(0);$$

además, nuestra selección de r nos da

$$y\left(|s_n^+|\right) = r^+\left(|s_n^+|\right) = (s_n{}^\frown (r(n)))^+ \left(|s_n^+|\right) = u_{s_n{}^\frown(r(n))}(0).$$

Entonces, $u_{s_n{}^\frown(r(n))}(0) = u_{s_n{}^\frown(t(n))}(0)$ y por la propiedad $(\star_6)$ debe tenerse $r(n) = t(n)$, tal y como se quería. $\square$

Estamos listos para probar uno de los resultados centrales de la sección.

Proposición 2.39. *Si $A \subseteq \omega^\omega$ es tal que H tiene una estrategia ganadora en el juego $\Game_3(A)$, entonces A contiene el cuerpo de un árbol perfecto.*

Demostración. Adoptemos la notación empleada en los resultados previos, esto es, σ es será una estrategia ganadora para H en $\Game_3(A)$ y T será el correspondiente árbol definido en el párrafo previo a la Proposición 2.37. Entonces, $T \in \mathcal{T}$ por lo que resta probar que $[T] \subseteq A$. Sea $y \in [T]$ arbitraria. El plan es definir una partida x en el juego $\Game_3(A)$ que siga a σ y que satisfaga $x^\sim = y$. Para ello supondremos que $\{s_n : n \in \omega\}$ es la familia cuya existencia garantiza la Proposición 2.38.

Definamos $x : \omega \to \omega \cup \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ como sigue: para cada $n \in \omega$,

$$x(2n) := u_{s_n} \qquad \text{y} \qquad x(2n+1) := v_{s_{n+1}}(n)$$

(véase el siguiente diagrama).

H	u_{s_0}		u_{s_1}		u_{s_2}	$\dots$		u_{s_n}	$\dots$
V		$v_{s_1}(0)$		$v_{s_2}(1)$		$\dots$	$v_{s_n}(n-1)$		$\dots$

Afirmación 1: x sigue a σ.

Empecemos por notar que, de acuerdo a $(\star_1)$, $x(0) = u_{s_0} = u_\emptyset = \sigma(\emptyset) = \sigma(x \restriction 0)$.

Suponga que $n \in \omega$ y emplee la propiedad (α) del Lema 2.38 para deducir que la igualdad $s_n \restriction k = s_k$ es cierta para cualquier $k \leqslant n$. En particular, si $k < n$, entonces $s_{k+1} \subseteq s_n$ y por la condición $(\star_5)$ del Lema 2.34, $v_{s_{k+1}} \subseteq v_{s_n}$. Otra consecuencia de (α) es que $s_{n+1} = s_n{}^\frown (s_{n+1}(n))$.

Nuestra definición de x, las observaciones del párrafo anterior y las condiciones $(\star_2)$ y $(\star_3)$ producen:

$$\begin{aligned} x \restriction (2n+2) &= \langle u_{s_0}, v_{s_1}(0), u_{s_1}, v_{s_2}(1), \dots, u_{s_n}, v_{s_{n+1}}(n) \rangle \\ &= \langle u_{s_n \restriction 0}, v_{s_n}(0), u_{s_n \restriction 1}, v_{s_n}(1), \dots, u_{s_n}, v_{s_{n+1}}(n) \rangle \\ &= Q_{s_n}{}^\frown \big(v_{s_{n+1}}(n) \big) = Q_{s_n}{}^\frown \big(v_{s_n{}^\frown (s_{n+1}(n))}(n) \big) \end{aligned}$$

Finalmente, las condiciones ($\star_2$) y ($\star_3$) nos garantizan que

$$x\,(2n+2) = u_{s_{n+1}} = u_{s_n{}^\frown(s_{n+1}(n))} = \sigma\left(Q_{s_n}{}^\frown\left(v_{s_n{}^\frown(s_{n+1}(n))}\right)\right) = \sigma(x \restriction (2n+2)).$$

Afirmación 2: $x^\sim = y$.

Tomemos $m \in \omega$ y notemos que la condiciones (1) y (α) del Lema 2.38 producen

$$s_m^+ = \bigvee_{k\leqslant m} u_{s_m\restriction k} = \bigvee_{k\leqslant m} u_{s_k} \subseteq \bigvee_{n\in\omega} u_{s_n} = x^\sim.$$

Luego, $y = \bigcup_{n\in\omega} s_n^+ \subseteq x^\sim$. Ahora, en vista de que $x^\sim, y \in \omega^\omega$, esto concluye nuestra prueba de la afirmación.

Como corolario de estas dos afirmaciones, $y \in A$ y así, $[T] \subseteq A$. $\square$

El resultado siguiente es obra del matemático Morton Davis.

Teorema 2.40. *En ZF+AD, ω^ω (o, equivalentemente, $\mathbb{P}$) satisface la PCP.*

Demostración. Sea A un subconjunto no numerable de ω^ω. Luego, la Proposición 2.33 implica que V no tiene estrategia ganadora en el juego $\eth_3(A)$ y de este modo, el Lema 2.26 garantiza que el jugador II no tiene estrategia ganadora en el juego $\eth_{A^*}$. Entonces, bajo AD, es cierto que I tiene estrategia ganadora en el juego $\eth_{A^*}$ y, del Lema 2.27, se sigue que el jugador H posee estrategia ganadora en el juego $\eth_3(A)$. Así, la Proposición 2.39 nos otorga la existencia de $T \in \mathfrak{T}$ de manera que $[T] \subseteq A$. El resto es invocar la Proposición 1.30. $\square$

De este último teorema se desprende un resultado interesante que será el último de esta sección. Con la intención de darle contexto a éste, recordemos que Georg Cantor conjeturó que sólo hay dos tipos de subconjuntos de $\mathbb{R}$: los numerables y los equipotentes a $\mathbb{R}$; equivalentemente, para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $X \preceq \omega$ ó $X \approx \mathbb{R}$. A este enunciado se le conoce como *La Hipótesis del Continuo* y es costumbre denotarlo por las siglas CH.

Como consecuencia de los trabajos de Kurt Gödel y de Paul Cohen, se sabe que CH es independiente de la teoría usual de conjuntos, ZFC. En contraste, CH es un teorema de ZF+AD, tal y como demostraremos a continuación.

Teorema 2.41. *Si AD es cierto, entonces CH también lo es.*

Demostración. Sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no numerable. Claramente, $B \preceq \mathbb{R}$, así que sólo debemos mostrar que $\mathbb{R} \preceq B$. Para esto hagamos $C := B \cap \mathbb{P}$. Note que si C fuese numerable, se tendría, por [2, Teorema 7.17], que $C \cup (B \cap \mathbb{Q}) = B$ sería numerable.

Ahora consideremos h, el homeomorfismo garantizado por el Teorema 1.17. Entonces $h[C] \preceq B$, así que será suficiente verificar que $\mathbb{R} \preceq h[C]$. Como $h[C]$ es un subconjunto no numerable de ω^ω, el Teorema 2.40 implica que $h[C]$ contiene un conjunto perfecto. Luego, del Corolario 1.31 se sigue que $\mathbb{R} \preceq h[C]$. $\square$

2.3 La Propiedad de Baire en los irracionales.

La sección tiene como objetivo demostrar que en ZF+AD cualquier subconjunto de los irracionales tiene la Propiedad de Baire (ver Definición 2.42(3)). Para ello, comencemos por introducir algunos conceptos.

Definición 2.42. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X.

(1) Diremos que A es *denso en ninguna parte en* X si y sólo si el interior de su cerradura es vacío, es decir, $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

(2) Siempre que podamos escribir a A como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, diremos que A *es magro en* X. Esto es, A es magro en X si y sólo si existe $\{A_n : n \in \omega\}$, una sucesión de subconjuntos densos en ninguna parte de X, de tal modo que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

(3) Se dirá que A tiene la *Propiedad de Baire* si y sólo si existe $G \subseteq X$ de manera que G es abierto en X y la diferencia simétrica $A \triangle G := (A \setminus G) \cup (G \setminus A)$ es un subconjunto magro de X.

Con el fin de simplificar la notación, emplearemos en enunciado A *es dnp en* X en lugar de A *es denso en ninguna parte en* X. Además, en los casos en que X sea claro por el contexto, sólo diremos que A *es dnp.*

Antes de definir un juego para llegar al objetivo de esta sección probaremos algunos resultados que nos serán de utilidad posteriormente.

Lema 2.43. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para X. Entonces $A \subseteq X$ es dnp si y sólo si para cualquier $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ existe $B_0 \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ de manera que $B_0 \subseteq B \setminus A$.*

Demostración. Comencemos la prueba suponiendo que A es dnp en X, es decir, supongamos que $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$. Así, por hipótesis y por propiedades del interior y cerradura, se tiene que $X = X \setminus \operatorname{int} \overline{A} = \overline{X \setminus \overline{A}} = \overline{\operatorname{int}(X \setminus A)}$. En otras palabras, $\operatorname{int}(X \setminus A)$ es un subconjunto denso de X.

Sea $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$. Como $\operatorname{int}(X \setminus A)$ es denso en X, sucede que $B \cap \operatorname{int}(X \setminus A)$ es un subconjunto abierto no vacío de X. Entonces existe $B_0 \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ con $B_0 \subseteq B \cap \operatorname{int}(X \setminus A)$ y dado que $B \cap \operatorname{int}(X \setminus A) \subseteq B \cap (X \setminus A) = B \setminus A$, deducimos que $B_0 \subseteq B \setminus A$.

Ahora probaremos, por contrapositiva, la implicación restante. Supongamos que $\operatorname{int} \overline{A} \neq \emptyset$ y demostremos que existe $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ de modo que para cualquier abierto básico no vacío B_0 se tiene que si $B_0 \subseteq B$, entonces $B_0 \cap A \neq \emptyset$.

Note que, como $\operatorname{int} \overline{A}$ es, por hipótesis, un subconjunto abierto no vacío de X, sucede que existe $B \in \mathcal{B}$ de manera que $B \neq \emptyset$ y $B \subseteq \operatorname{int} \overline{A}$. Tomemos $B_0 \in \mathcal{B}$ no vacío tal que $B_0 \subseteq B$. Luego, $B_0 \subseteq \operatorname{int} \overline{A} \subseteq \overline{A}$, es decir, $B_0 \cap A \neq \emptyset$. □

Tenemos ya una equivalencia de la definición de ser denso en ninguna parte en cualquier espacio topológico X. Probaremos ahora una equivalencia de la definición de ser magro en los irracionales. Para ello definamos el siguiente conjunto.

$$\mathcal{N} := \{E \subseteq \omega^\omega : E = \overline{E} \wedge \operatorname{int} E = \emptyset\}.$$

Note que, si $E \subseteq \omega^\omega$ es dnp, entonces $\overline{E} \in \mathcal{N}$. Por el resto de la sección, $\mathcal{N}$ estará fijo.

Lema 2.44. *Sea $M \subseteq \omega^\omega$. Entonces M es un subconjunto magro de ω^ω si y sólo si existe $e \in \mathcal{N}^\omega$ de tal modo que $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} e(n)$.*

Demostración. Supongamos primero que M es magro en ω^ω, es decir, que $M = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, donde A_n es dnp para cada $n \in \omega$. De este modo, $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n}$ y $\{\overline{A_n} : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{N}$. Así, sólo debemos definir $e : \omega \to \mathcal{N}$ mediante $e(n) := \overline{A_n}$ para obtener $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} e(n)$.

Supongamos ahora que existe $e \in \mathcal{N}^\omega$ de manera que $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} e(n)$ y hagamos $A_n := M \cap e(n)$. De esta manera, es inmediato que $M = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, por lo que resta probar que para cada $n \in \omega$, A_n es dnp.

Por definición, $A_n \subseteq e(n)$ y en consecuencia, $\operatorname{int} \overline{A_n} \subseteq \operatorname{int} \overline{e(n)}$. Dado que $e(n) \in \mathcal{N}$, concluimos que $\operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$. □

Emplearemos la notación dada en la Definición 1.14 a partir de este momento.

Lema 2.45. *Si $t \in \omega^{<\omega}$, entonces $[t]$ no es un subconjunto magro de ω^ω.*

Demostración. Supongamos que $\{F_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{N}$ y mostremos que $[t] \not\subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$.

Construiremos recursivamente una sucesión $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq \omega^{<\omega}$ de tal modo que $[s_0] \subseteq [t] \setminus F_0$ y $[s_{n+1}] \subseteq [s_n] \setminus F_{n+1}$ para cualquier $n \in \omega$. Con esta idea en mente, sea e la función de elección dada por el Lema 1.26.

Como F_0 es dnp, la Proposición 1.15 y el Lema 2.43 implican que $\{u \in \omega^{<\omega} : [u] \subseteq [t] \setminus F_0\} \neq \emptyset$. Definamos $s_0 := e\left(\{u \in \omega^{<\omega} : [u] \subseteq [t] \setminus F_0\}\right)$. Supongamos ahora que, para alguna $n \in \omega$, la familia $\{s_i : i \leqslant n\} \subseteq \omega^{<\omega}$ ya ha sido definida y hagamos $s_{n+1} := e\left(\{u \in \omega^{<\omega} : [u] \subseteq [s_n] \setminus F_{n+1}\}\right)$ para completar la recursión.

Sea $n \in \omega$. Afirmamos que $s_n \subseteq s_{n+1}$. En primer lugar, si sucediese que $|s_{n+1}| < |s_n|$, se tendría que la función

$$s_{n+1} \cup \{(|s_{n+1}|, 1 + s_n(|s_{n+1}|))\} \cup \{(i, 0) : i \in \omega \setminus (|s_{n+1}| + 1)\}$$

sería un elemento de $[s_{n+1}] \setminus [s_n]$. Luego, $|s_n| \leqslant |s_{n+1}|$. De este modo, la condición $s_n \not\subseteq s_{n+1}$ implicaría la existencia de $\ell < |s_n|$ con $s_n(\ell) \neq s_{n+1}(\ell)$ y, en particular,

$$s_{n+1} \cup \{(i, 0) : i \in \omega \setminus |s_n|\} \in [s_{n+1}] \setminus [s_n].$$

Por lo hecho en el párrafo previo, $s := \bigcup_{n\in\omega} s_n$ es un elemento de $\omega^{\leqslant\omega}$. En consecuencia, $x := s \cup \{(i, 0) : i \in \omega \setminus |s|\} \in \omega^\omega$ satisface que

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} [s_n] \subseteq [t] \cap \bigcap_{n\in\omega} (\omega^\omega \setminus F_n) = [t] \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n.$$

□

Lema 2.46. *Si τ representa a la familia de todos los subconjuntos abiertos de ω^ω, entonces $\tau \preceq \omega^\omega$.*

Demostración. La Proposición 1.7 implica que $\omega^{<\omega}$ se puede enumerar de la siguiente manera $\omega^{<\omega} = \{s_n : n \in \omega\}$. Dicho esto, definamos $f : \tau \to \mathcal{P}(\omega)$ mediante

$$f(U) := \{n \in \omega : [s_n] \subseteq U\},$$

para cada $U \in \tau$.

Afirmamos que f es inyectiva. En efecto, si U y V son subconjuntos abiertos de ω^ω distintos, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $x \in U \setminus V$, lo que implica que existe $n \in \omega$ de manera que $x \in [s_n] \subseteq U$ y por ende, $[s_n] \nsubseteq V$. Es decir, $n \in f(U) \setminus f(V)$ y así $f(U) \neq f(V)$. De este modo, el Teorema 1.2 nos garantiza que $\tau\,(\omega^\omega) \preceq \mathcal{P}(\omega) \approx \omega^\omega$. □

Proposición 2.47. $\mathcal{N}^\omega \preceq \omega^\omega$.

Demostración. Para comenzar la prueba definamos el conjunto $\mathcal{N}^* := \{\omega^\omega \setminus N : N \in \mathcal{N}\}$. Observe que la función de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{N}^*$ dada por $N \mapsto \omega^\omega \setminus N$ es biyectiva y, por ende, $\mathcal{N}^* \approx \mathcal{N}$. Además, como todos los elementos de $\mathcal{N}$ son cerrados en ω^ω se tiene que $\mathcal{N}^*$ es una familia de subconjuntos abiertos de ω^ω. Así, podemos emplear el Lema 2.46 para deducir que

$$\mathcal{N} \approx \mathcal{N}^* \subseteq \tau \preceq \omega^\omega.$$

Luego, $\mathcal{N}^\omega \preceq (\omega^\omega)^\omega$. Finalmente, [2, Teorema 7.34] garantiza que $(\omega^\omega)^\omega \approx \omega^{(\omega\times\omega)} \approx \omega^\omega$. □

Proposición 2.48. *En ZF+AD, si $\mathcal{M}$ es una familia a lo más numerable de subconjuntos magros de ω^ω, entonces $\bigcup \mathcal{M}$ también es magro.*

Demostración. Empecemos por notar que cuando $\mathcal{M} = \emptyset$, se sigue que $\bigcup \mathcal{M} = \emptyset$ y éste es un subconjunto magro de ω^ω. Así, supongamos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$ y fijemos $E \in \mathcal{M}$.

Sea $\ell : \mathcal{M} \to \omega$ una función inyectiva y denotemos por $\ell^{-1} : \mathrm{img}(\ell) \to \mathcal{M}$ a su inversa. Dado $n \in \omega$, hagamos

$$M_n := \begin{cases} \ell^{-1}(n), & \text{si } n \in \mathrm{img}(\ell) \\ E, & \text{si } n \notin \mathrm{img}(\ell) \end{cases}$$

y notemos que $\mathcal{M} = \{M_n : n \in \omega\}$. Luego, sólo debemos mostrar que $\bigcup_{n\in\omega} M_n$ es un subconjunto magro de ω^ω. Para esto emplearemos el Lema 2.44.

Para cada $n \in \omega$ definimos el conjunto

$$\mathcal{E}_n := \left\{ e \in \mathcal{N}^\omega : M_n \subseteq \bigcup_{k\in\omega} e(k) \right\}.$$

Según el Lema 2.44, $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$.

Por otra parte, la Proposición 2.47 implica que existe una función inyectiva $\varphi : \mathcal{N}^\omega \to \omega^\omega$ y así, $\{\varphi[\mathcal{E}_n] : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de ω^ω. Entonces, del Teorema 2.21 se sigue que existe una función $g : \omega \to \displaystyle\bigcup_{n\in\omega} \varphi[\mathcal{E}_n]$ de manera que para cada $n \in \omega$, $g(n) \in \varphi[\mathcal{E}_n]$. Dicho esto, definamos para cada $n \in \omega$, $e_n := \varphi^{-1}(g(n)) \in \mathcal{E}_n$; en consecuencia, $M_n \subseteq \displaystyle\bigcup_{k\in\omega} e_n(k)$.

Por lo hecho en el párrafo anterior, la colección $\mathcal{A} := \{e_n(k) : k, n \in \omega\}$ es un subconjunto de $\mathcal{N}$ que satisface $\displaystyle\bigcup_{n\in\omega} M_n \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Luego, sólo nos resta probar que existe $e \in \mathcal{N}^\omega$ con $\mathcal{A} = \{e(n) : n \in \omega\}$.

La función $h_0 : \omega \times \omega \to \mathcal{A}$ dada por $h_0(n, m) = e_n(m)$, para cada $(n, m) \in \omega \times \omega$, es suprayectiva. Así, si $h_1 : \omega \to \omega \times \omega$ es cualquier función suprayectiva, se sigue que $e := h_0 \circ h_1$ es una función sobreyectiva de ω en $\mathcal{A}$ y esto finaliza la prueba. $\square$

Estamos listos ahora para definir el juego que nos servirá para cumplir el propósito de esta sección. Este juego fue introducido en 1930 por Stefan Banach y Stanisław Mazur.

En primer lugar, la colección de todas las sucesiones finitas no vacías de números naturales será empleada ampliamente y por este motivo nos conviene asignarle un símbolo: $\mathbb{S} := \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Ahora, dado un conjunto $X \subseteq \omega^\omega$, *el juego de Banach-Mazur en* X, $\eth_{BM}(X)$, requiere de dos jugadores a los que llamaremos H y V. Las reglas de éste son como sigue: al comenzar, H tira un elemento s_0 de $\mathbb{S}$; posteriormente, V tirará $t_0 \in \mathbb{S}$ de manera que $s_0 \subset t_0$; después, H elegirá $s_1 \in \mathbb{S}$ de tal modo que $t_0 \subset s_1$ y así sucesivamente hasta que cada uno de ellos complete ω tiradas (véase el siguiente diagrama). Observe que en esta situación se tiene que $\bigcup_{n\in\omega} s_n = \bigcup_{n\in\omega} t_n$ es una función de ω en ω. Luego, se dirá que el jugador H gana $\Game_{BM}(X)$ cuando esta función es un elemento de X. En caso contrario, V gana.

H	s_0		s_1		s_2	$\dots$
V		t_0		t_1		$\dots$

Algunos conceptos conectados con el juego del párrafo anterior se presentan a continuación. Si $\alpha \in \omega + 1$ y $f : \alpha \to \mathbb{S}$, diremos que f es $\subset$-creciente si para cualesquiera $m < n < \alpha$ se tiene que $f(m) \subset f(n)$. De esta manera, *una partida en* $\Game_{BM}(X)$ es cualquier función $\subset$-creciente de ω en $\mathbb{S}$.

Note que si f es una partida en $\Game_{BM}(X)$, entonces f puede verse tal y como se ilustra en el diagrama de abajo.

H	$f(0)$		$f(2)$		$\dots$
V		$f(1)$		$f(3)$	$\dots$

De esta manera, H *gana la partida* f si $\bigcup_{n\in\omega} f(n) \in X$, mientras que V *gana la partida* f cuando $\bigcup_{n\in\omega} f(n) \notin X$.

Al igual que en los juegos descritos anteriormente en esta tesis, los jugadores de $\Game_{BM}(X)$ poseerán estrategias. La definición de éstas precisa de algunas nociones preliminares.

Definición 2.49. Fijemos dos funciones, $\rho : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$ y $t \in \mathbb{S}^{\leqslant\omega}$.

(1) Diremos que t *H-sigue a* ρ si para todo número par $m < |t|$ y cualquier número impar $n < |t|$ se tiene que

$$t(m) = \rho(t \restriction m) \qquad \text{y} \qquad t(n-1) \subset t(n)$$

(note que estas dos condiciones no implican que t sea $\subset$-creciente, esto es, no hay garantía de que se tenga $t(\ell - 1) \subset t(\ell)$ para cada número par $0 < \ell < |t|$).

(2) Usaremos la frase t *V-sigue a* ρ si para cada número par $0 < m < |t|$ y todo número impar $n < |t|$ se satisface que

$$t(m-1) \subset t(m) \qquad \text{y} \qquad t(n) = \rho(t \restriction n).$$

Así, la función $\rho : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$ será llamada *estrategia para* H si toda función de ω en $\mathbb{S}$ que H-siga a ρ resulta ser una partida en el juego de Banach-Mazur. Similarmente, se dirá que ρ es una *estrategia para* V si todo elemento de $\mathbb{S}^\omega$ que V-siga a ρ es $\subset$-creciente.

Naturalmente, una estrategia ρ para H será *ganadora para* H si toda partida que H-siga a ρ es ganada por H. La noción de *estrategia ganadora para* V es análoga.

Encaminémonos a probar los resultados centrales de la sección. Nuestro primer paso será emplear la Proposición 1.7 para fijar una biyección $\psi : \omega \to \mathbb{S}$. Ahora, para cualesquiera $x \in \omega^\omega$ y $t \in \mathbb{S}^{\leqslant\omega}$ hagamos

$$x_\psi := \psi \circ x \qquad \text{y} \qquad t_{\psi^{-1}} := \psi^{-1} \circ t.$$

Note que $x_\psi \in \mathbb{S}^\omega$ y que $t_{\psi^{-1}} \in \omega^{\leqslant\omega}$ (de hecho, $|t_{\psi^{-1}}| = |t|$ y si $0 < |t| < \omega$, entonces $t_{\psi^{-1}} \in \mathbb{S}$).

Definición 2.50. Dado $X \subseteq \omega^\omega$, el conjunto $X^* \subseteq \omega^\omega$ está dado por la fórmula siguiente: $x \in X^*$ si y sólo, una de dos,

(1) para algún número impar $n \in \omega$, $x_\psi \restriction n$ es $\subset$-creciente y $x_\psi(n-1) \not\subset x_\psi(n)$ ó

(2) x_ψ es $\subset$-creciente y $\displaystyle\bigcup_{n\in\omega} x_\psi(n) \in X$.

Los lemas presentados a continuación exhiben algunas relaciones que se dan entre las estrategias ganadoras para los juegos $\Game_{X^*}$ y $\Game_{BM}(X)$.

Lema 2.51. *Sea* $X \subseteq \omega^\omega$*. La existencia de una estrategia ganadora para I en* $\Game_{X^*}$ *implica que H posee una estrategia ganadora en* $\Game_{BM}(X)$*.*

Demostración. Supongamos que σ es una estrategia ganadora para I en $\Game_{X^*}$, fijemos $u \in \mathbb{S}$

y definamos $\rho : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$ mediante la regla

$$\rho(t) := \begin{cases} \psi\left(\sigma\left(t_{\psi^{-1}}\right)\right), & \text{si } |t| \text{ es par} \\ u, & \text{si } |t| \text{ es impar.} \end{cases}$$

Con la intención de verificar que ρ es una estrategia ganadora para H en $\partial_{BM}(X)$, sea $f \in \mathbb{S}^{\omega}$ una función que H-sigue a ρ. Hagamos $x := f_{\psi^{-1}} \in \omega^{\omega}$ y notemos que la igualdad $x \upharpoonright n = (f \upharpoonright n)_{\psi^{-1}}$ es cierta para cualquier $n \in \omega$. Ahora, si $n \in \omega$ es par, entonces

$$x(n) = \psi^{-1}(f(n)) = \psi^{-1}(\rho(f \upharpoonright n)) = \psi^{-1}(\psi(\sigma((f \upharpoonright n)_{\psi^{-1}}))) = \sigma(x \upharpoonright n),$$

esto es, hemos probado que x es una partida en ∂_{X^*} que sigue a σ. En consecuencia, $x \in X^*$, es decir, $f = x_{\psi}$ satisface alguna de las dos condiciones anotadas en la Definición 2.50. El que f H-siga a ρ implica que (1) no es satisfecha por f, así que (2) debe ser cierta: f es una función $\subset$-creciente (en particular, ρ es una estrategia para H) y $\bigcup_{n \in \omega} f(n) \in X$ (equivalentemente, H gana la partida f del juego $\partial_{BM}(X)$). Esto completa nuestro argumento. $\square$

Lema 2.52. *Sea $X \subseteq \omega^{\omega}$. Si el jugador II posee estrategia ganadora en el juego ∂_{X^*}, entonces el jugador V posee estrategia ganadora en el juego $\partial_{BM}(X)$.*

Demostración. La demostración es análoga a la prueba del Lema 2.51 por lo que omitiremos algunos detalles.

Supongamos que II tiene estrategia ganadora en ∂_{X^*} y llamémosle τ a dicha estrategia. Fijemos $u \in \mathbb{S}$ y definamos $\rho : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$ como sigue

$$\rho(t) := \begin{cases} \psi\left(\tau\left(t_{\psi^{-1}}\right)\right), & \text{si } |t| \text{ es impar} \\ u, & \text{si } |t| \text{ es par.} \end{cases}$$

Verifiquemos que, en efecto, ρ es una estrategia ganadora para V en el juego $\partial_{BM}(X)$. Sea $f \in \mathbb{S}^{\omega}$ una función que V-sigue a ρ. Definimos $x := f_{\psi^{-1}} \in \omega^{\omega}$. De este modo se tiene que para toda $n \in \omega$, $x \upharpoonright n = (f \upharpoonright n)_{\psi^{-1}}$. Un argumento similar al empleado en la prueba del Lema 2.51 muestra que x es una partida en el juego $\Game_{X^*}$ que sigue a τ. Luego, $x \notin X^*$, es decir, las condiciones (1) y (2) no son satisfechas.

Que (1) no sea satisfecha, junto con el hecho de que f V-sigue a ρ, implica que f es $\subset$-creciente; en especial, ρ es una estrategia para V. Por otro lado, como (2) no se satisface, deducimos que $\bigcup_{n\in\omega} x_\psi(n) = \bigcup_{n\in\omega} f(n) \notin X$, es decir, el jugador V gana la partida f del juego $\Game_{BM}(X)$. $\square$

Observe que una consecuencia de los Lemas 2.51 y 2.52 es que si AD es cierto, entonces alguno de los jugadores, H ó V, posee estrategia ganadora en $\Game_{BM}(X)$.

Los siguientes resultados otorgan una relación entre la existencia de estrategias ganadoras para H ó V en el juego $\Game_{BM}(X)$ y el conjunto "a ganar", es decir, X. Para ello, dada una función $\rho : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$, definimos el conjunto $PIC(\rho)$ como sigue:

> $t \in PIC(\rho)$ si y sólo si existe $n \in \omega$ de tal forma que $t : 2n \to \mathbb{S}$ es una función $\subset$-creciente que sigue a ρ.

Definición 2.53. Sea $X \subseteq \omega^\omega$. Si $\rho : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$ es una estrategia para V en $\Game_{BM}(X)$, $t \in PIC(\rho)$ y $x \in \omega^\omega$, entonces diremos que t *es ρ-compatible con* x si y sólo si $t = \emptyset$ ó $t \neq \emptyset$ y $t(|t| - 1) \subseteq x$.

Intuitivamente, que t sea ρ-compatible con x significa que la partida generada hasta ese momento del juego, no se ha "salido" de x.

Definición 2.54. Con la misma notación e hipótesis que en la definición previa: diremos que t *ρ-rechaza a* x si y sólo si se cumple el siguiente par de condiciones:

(1) t es ρ-compatible con x.

(2) Para cualquier $s \in \mathbb{S}$ se tiene que $\rho\,(t^\frown s) \nsubseteq x$ (recuerde que el símbolo $^\frown$ fue definido al principio de la Sección 1.2).

Intuitivamente, t ρ-rechazará a x cuando t sea ρ-compatible con x, pero sin importar cuál sea la próxima tirada de H, la estrategia ρ hará, en la siguiente tirada de V, que la partida generada hasta ese momento "se salga" de x.

Con el fin de simplificar notación, si ρ es una estrategia para V y $t \in PIC(\rho)$, denotaremos como F_t^ρ al conjunto de todas las partidas tales que son ρ-rechazadas por t, es decir,

$$F_t^\rho := \{x \in \omega^\omega : t \ \ \rho\text{-rechaza a } x\}.$$

Lema 2.55. *Sea $X \subseteq \omega^\omega$. Si ρ una estrategia ganadora para V en el juego $\partial_{BM}(X)$, entonces para cada $x \in X$, existe $t \in PIC(\rho)$ de manera que $x \in F_t^\rho$.*

Demostración. Procederemos con un argumento por contrapositiva: supongamos que existe $x \in X$ de manera que para cualquier $t \in PIC(\rho)$, x no es ρ-rechazado por t y demostremos que hay una partida en el juego $\partial_{BM}(X)$ que sigue a ρ y que hace que el jugador V pierda.

Denotemos por e a la función de elección dada por el Lema 1.26. Recursivamente construiremos dos sucesiones, $\{t_n : n \in \omega\} \subseteq PIC(\rho)$ y $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{S}$, de tal manera que para cada $n \in \omega$,

(i) $t_0 = \emptyset$,

(ii) $t_n{}^\frown s_n$ es $\subset$-creciente,

(iii) $\rho(t_n{}^\frown s_n) \subseteq x$ y

(iv) $t_{n+1} = (t_n{}^\frown s_n)^\frown \rho\,(t_n{}^\frown s_n)$.

Como $t_0 := \emptyset \in PIC(\rho)$, se sigue que x no es ρ-rechazado por t_0. En vista de que t_0 es ρ-compatible con x, obtenemos que existe $s \in \mathbb{S}$ de manera que $\rho\,(t_0{}^\frown s) \subseteq x$. Así, bastará con hacer $s_0 := e\,(\{u \in \mathbb{S} : \rho\,(t_0{}^\frown u) \subseteq x\})$ para finalizar la base de la recursión.

Ahora sea $n \in \omega$ de tal suerte que $\{t_i : i \leqslant n\}$ y $\{s_i : i \leqslant n\}$ ya han sido construidas adecuadamente. Definamos t_{n+1} como en (iv) y notemos que la hipótesis $t_n \in PIC(\rho)$ y el inciso (ii) implican que $t_{n+1} \in PIC(\rho)$. Luego, x no es ρ-rechazado por t_{n+1} y por el inciso (iii) concluimos que debe existir $s \in \mathbb{S}$ con $\rho(t_{n+1}{}^\frown s) \subseteq x$. En consecuencia, es suficiente con poner $s_{n+1} := e\,(\{u \in \mathbb{S} : \rho\,(t_{n+1}{}^\frown u) \subseteq x\})$ para concluir la recursión.

Pongamos $f := \bigcup_{n\in\omega} t_n$ y observemos que $f : \omega \to \mathbb{S}$ es una función $\subset$-creciente. Más aún, si $n \in \omega$, entonces (véase el diagrama de abajo) $f(2n) = s_n$, $f \restriction (2n+1) = t_n{}^\frown s_n$ y $f(2n+1) = \rho(t_n{}^\frown s_n) = \rho(f \restriction (2n+1))$. De esta manera, f es una partida en $\partial_{BM}(X)$ que sigue a ρ.

H	s_0		s_1		s_2	$\dots$
V		$\rho\,(t_0{}^\frown s_0)$		$\rho\,(t_1{}^\frown s_1)$		$\dots$

Por otro lado, la condición (iii) nos garantiza que

$$\bigcup_{n\in\omega} f(2n) = \bigcup_{n\in\omega} f(2n+1) = \bigcup_{n\in\omega} \rho(t_n{}^\frown s_n) \subseteq x$$

y, en consecuencia, $\bigcup_{n\in\omega} f(2n) = x \in X$. De este modo, V pierde la partida f, tal y como se quería. $\square$

Observe que la conclusión del resultado previo puede reescribirse como

$$X \subseteq \bigcup\{F_t^\rho : t \in PIC(\rho)\}.$$

Lema 2.56. *Sea $X \subseteq \omega^\omega$. Si ρ es una estrategia ganadora para V en el juego $\Game_{BM}(X)$, entonces para cada $t \in PIC(\rho)$, F_t^ρ es un subconjunto dnp de ω^ω.*

Demostración. Sean $t \in PIC(\rho)$ y $s \in \omega^{<\omega}$ arbitrarios. El plan es usar el Lema 2.43, por lo que demostraremos que existe $u \in \omega^{<\omega}$ de manera que $[u] \subseteq [s] \setminus F_t^\rho$. Para ello, hagamos $t_0 := \bigcup \mathrm{img}(t)$. Note que si $t \neq \emptyset$, entonces $t_0 = t\,(|t|-1)$, mientras que en el caso $t = \emptyset$, $t_0 = \emptyset$.

Nuestra prueba se divide en dos partes.

Caso 1: $t_0 \subseteq s$.

Definamos $u := \rho\,(t^\frown(s^\frown 0)) \in \mathbb{S}$ (véase el siguiente diagrama).

H	$t(0)$		$\dots$		$s^\frown 0$	
V		$t(1)$	$\dots$	t_0		$u = \rho\,(t^\frown(s^\frown 0))$

De esta manera se tiene que $s \subseteq u$ y, por ende, $[u] \subseteq [s]$. Además, si $x \in \omega^\omega$ es tal que $x \in [u]$, entonces $\rho\,(t^\frown(s^\frown 0)) \subseteq x$ y por lo tanto x no es ρ-rechazada por t, es decir, $x \notin F_t^\rho$.

Caso 2: $t_0 \nsubseteq s$.

En esta situación, afirmamos que existe $u \in \mathbb{S}$ de tal modo que para cada $x \in [u]$, $t_0 \nsubseteq x$. Note que esto implica que $t_0 \neq \emptyset$ y, por ende, $t_0 = t(|t|-1)$. Luego, t no es ρ-compatible con x y, naturalmente, $x \notin F_t^\rho$.

La verificación de nuestra afirmación se divide en dos subcasos.

Caso 2.1: $|t_0| \leqslant |s|$.

Proponemos $u := s$. Claramente, $[u] \subseteq [s]$. Ahora, si $x \in [u]$, se sigue que $s \subseteq x$ y de este modo, $x \upharpoonright |t_0| = s \upharpoonright |t_0| \neq t_0$, es decir, $t_0 \nsubseteq x$.

Caso 2.2: $|s| < |t_0|$.

Hagamos $u := s^\frown (t_0(|s|) + 1)$. Es inmediato que $[u] \subseteq [s]$ pues $s \subseteq u$. Por otro lado, si $x \in [u]$, se sigue que $x(|s|) = u(|s|) = t_0(|s|) + 1 \neq t_0(|s|)$ y así, $t_0 \nsubseteq x$. □

Como una consecuencia del último par de lemas tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.57. *Si $X \subseteq \omega^\omega$ es tal que el jugador V posee una estrategia ganadora en el juego $\partial_{BM}(X)$, entonces X es un subconjunto magro de ω^ω.*

Demostración. Supongamos que V tiene una estrategia ganadora en $\partial_{BM}(X)$. Sea ρ dicha estrategia. Emplearemos el Lema 2.44 para probar que X es magro, esto es, encontraremos una función $e \in \mathcal{N}^\omega$ con $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} e(n)$.

Empleemos las Proposiciones 1.7 y 1.8 para fijar una función biyectiva $\ell : \omega \to \mathbb{S}^{<\omega}$. Notemos que, de acuerdo al Lema 2.56, $\overline{F_t^\rho} \in \mathcal{N}$ para cualquier $t \in PIC(\rho)$. Luego, la función $e : \omega \to \mathcal{P}(\omega^\omega)$ dada por (recuerde que $\emptyset \in PIC(\rho)$)

$$e(n) := \begin{cases} \overline{F_{\ell(n)}^\rho}, & \text{si } n \in \ell^{-1}[PIC(\rho)] \\ \overline{F_\emptyset^\rho}, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

satisface que $\operatorname{img}(e) \subseteq \mathcal{N}$. Además, como consecuencia del Lema 2.55 obtenemos la contención $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} e(n)$. □

Proposición 2.58. *Si el jugador H posee una estrategia ganadora en el juego $\partial_{BM}(X)$, entonces existe $s \in \omega^{<\omega}$ de manera que $[s] \setminus X$ es un subconjunto magro de ω^ω.*

Demostración. Supongamos que H tiene estrategia ganadora en $\partial_{BM}(X)$. Llamémosle ρ a dicha estrategia y hagamos $s := \rho(\emptyset)$.

El plan es utilizar un juego alterno en el que el conjunto “a ganar” sea $[s] \setminus X$, es decir, jugar en $\partial_{BM}([s] \setminus X)$ y construir una estrategia ganadora para V en él para que así, la Proposición 2.57 implique lo que queremos demostrar.

Definamos los siguientes conjuntos

$$\mathbb{S}_i := \{t \in \mathbb{S}^{2n+1} : n \in \omega\},$$

$$\mathbb{S}_i^0 := \{t \in \mathbb{S}_i : s \not\subseteq t(0)\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{S}_i^1 := \mathbb{S}_i \setminus \mathbb{S}_i^0.$$

Definamos una función $\rho' : \mathbb{S}^{<\omega} \to \mathbb{S}$ de manera que ρ' sea una estrategia ganadora para V en el juego $\partial_{BM}([s] \setminus X)$.

Caso 1: $u \in \mathbb{S}_i^0$.

Definimos

$$\rho'(u) := u(|u| - 1)^\frown 0.$$

Veamos que, en este caso, ρ' es estrategia ganadora para V en el juego $\partial_{BM}([s] \setminus X)$. En efecto, sea $x \in \mathbb{S}^\omega$ tal que x V-sigue a ρ' y que $\langle x(0) \rangle \in \mathbb{S}_i^0$. Se sigue que x es una función $\subset$-creciente y así ρ' es una estrategia para V en $\partial_{BM}([s] \setminus X)$. Además, como $\langle x(0) \rangle \in \mathbb{S}_i^0$, se tiene que $s \not\subseteq x(0) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} x(n) = x$, es decir, $x \notin [s]$ y por lo tanto, $x \notin [s] \setminus X$. De este modo ρ' es ganadora para V en el juego $\partial_{BM}([s] \setminus X)$.

Caso 2: $u \in \mathbb{S}_i^1$.

Para este caso, definamos a ρ' de manera recursiva como sigue.

Para el caso base, consideremos a todos los elementos u de $\mathbb{S}_i^1$ tales que $|u| = 1$. Luego, se tiene que $s \subseteq u(0)$ y que $\langle s, u(0)^\frown 0 \rangle$ es $\subset$-creciente y sigue a ρ. De esta manera definimos

$$\rho'(u) := \rho\left(\langle s, u(0)^\frown 0 \rangle\right).$$

Ahora supongamos que, para algún número natural n y para toda $u \in \mathbb{S}_i^1$ tal que u es $\subset$-creciente y $|u| \in \{2k + 1 : k \leqslant n\}$, $\rho'(u)$ ha sido ya definida y procedamos a definir $\rho'(u)$ para $u \in \mathbb{S}_i^1$ con u $\subset$-creciente y $|u| = 2n + 3$. Para ello, hagamos

$$v := \langle u(i+1) : i \leqslant 2n+1 \rangle,$$

luego, $v \in \mathbb{S}^{<\omega}$ es $\subset$-creciente y $|v| = 2n+2$. De esta manera, u y v son el inicio de un par de partidas en el juego $\Game_{BM}(X)$ y $\Game_{BM}([s] \setminus X)$, respectivamente (véase el siguiente par de diagramas)

u (en el juego $\Game_{BM}([s] \setminus X)$) se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c|cccccc}
\mathrm{H} & u(0) & & u(2) & \dots & & u(2n+2) \\ \hline
\mathrm{V} & & u(1) & & \dots & u(2n+1) &
\end{array}$$

y la representación gráfica de v en el juego $\Game_{BM}(X)$ se muestra abajo

$$\begin{array}{c|ccccc}
\mathrm{H} & u(1) & & \dots & u(2n+1) & \\ \hline
\mathrm{V} & & u(2) & \dots & & u(2n+2)
\end{array}$$

Dicho esto, para completar la recursión, definamos

$$\rho'(u) := \rho(v).$$

Demostremos que ρ' es estrategia ganadora para V en $\Game_{BM}([s] \setminus X)$. En efecto, sea $x \in \mathbb{S}^{\omega}$ tal que x V-sigue a ρ' y $\langle x(0) \rangle \in \mathbb{S}^1_i$. Luego, la definición de ρ' implica que x H-sigue a ρ y por lo tanto es $\subset$-creciente (ver el diagrama siguiente).

$$\begin{array}{c|ccccc}
\mathrm{H} & x(0) & & x(2) & & \dots \\ \hline
\mathrm{V} & & x(1) = \rho'(x \restriction 1) & & x(3) = \rho'(x \restriction 3) & \dots
\end{array}$$

De este modo, se genera una partida y en el juego $\Game_{BM}(X)$ que luce de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\mathrm{H} & y(0) = s & & y(2) = x(1) & & \dots \\ \hline
\mathrm{V} & & y(1) = x(0)^\frown 0 & & y(3) = x(2) & \dots
\end{array}$$

Observe que $\bigcup\limits_{n \in \omega} x(n) = \bigcup\limits_{n \in \omega} y(n)$. Además, se cumple que

$$y(0) = s = \rho(\emptyset) = \rho(y \restriction 0),$$

$$y(2) = x(1) = \rho'(x \restriction 1) = \rho(\langle \rho(\emptyset), x(0)^\frown 0 \rangle) = \rho(y \restriction 2),$$

$$y(4) = x(3) = \rho' (x \upharpoonright 3) = \rho\left(\langle \rho(\emptyset), x(0)^\frown 0, \rho\left(\langle \rho(\emptyset), x(0)^\frown 0\rangle\right), y(3)\rangle\right) = \rho\left(y \upharpoonright 4\right)$$

y así sucesivamente, es decir, se tendrá que para cada $n \in \omega$, $y(2n) = \rho\left(y \upharpoonright (2n)\right)$ además de ser y $\subset$-creciente, es decir, se tendrá que y es una partida en el juego $\Game_{BM}(X)$ que H-sigue a ρ.

Recuerde que ρ fue tomada como estrategia ganadora para H en $\Game_{BM}(X)$, luego $\bigcup_{n\in\omega} y(n) = \bigcup_{n\in\omega} x(n) \in X$ y por lo tanto $\bigcup_{n\in\omega} x(n) \notin [s] \setminus X$ y como x V-sigue a ρ' en el juego $\Game_{BM}\left([s] \setminus X\right)$, se concluye que ρ' es ganadora para V en $\Game_{BM}\left([s] \setminus X\right)$.

Finalmente, la Proposición 2.57 implica que $[s] \setminus X$ es un subconjunto magro en ω^ω $\square$

Lema 2.59. *Bajo AD, para cualquier $X \subseteq \omega^\omega$ se tiene que o X es un subconjunto magro de ω^ω o existe $t \in \omega^{<\omega}$ de modo que $[t] \setminus X$ es un subconjunto magro de ω^ω.*

Demostración. Ya se había observado que si AD es cierto, entonces una de dos: o el jugador H o el jugador V tiene estrategia ganadora en $\Game_{BM}(X)$, esto para cualquier subconjunto X de ω^ω. En particular para $[t] \setminus X \subseteq \omega^\omega$, con $t \in \omega^{<\omega}$.

Luego, de las Proposiciones 2.57 y 2.58 se obtiene lo que queremos demostrar. $\square$

Ahora estamos listos para demostrar el resultado central de esta sección, es decir, para demostrar que todo subconjunto de los irracionales tiene la Propiedad de Baire.

Teorema 2.60. *Si AD es cierto, entonces para cualquier $Y \subseteq \omega^\omega$ sucede que Y posee la Propiedad de Baire.*

Demostración. Sea $Y \subseteq \omega^\omega$. Luego, el Lema 2.59 implica que alguna de las siguientes condiciones se satisface:

(1) Y es magro en ω^ω.

(2) existe $t \in \omega^{<\omega}$ de modo que $[t] \setminus Y$ es magro en ω^ω.

Observe que si (1) es cierta, entonces Y tiene la Propiedad de Baire, pues $\emptyset$ es un subconjunto abierto de ω^ω y además $Y \triangle \emptyset = Y$ es magro.

De este modo, supongamos que (2) es cierta y definamos

$$U := \bigcup \{[s] : [s] \setminus Y \text{ es magro}\}.$$

Note que U es un subconjunto abierto no vacío de ω^ω.

Afirmación: $Y \triangle U$ es magro en ω^ω.

En efecto, por la Proposición 1.7, se tiene que $U \setminus Y = \bigcup\{[s] \setminus Y : [s] \setminus Y \text{ es magro}\}$ es una unión a lo más numerable de subconjuntos magros de ω^ω. De este modo, el Lema 2.48 implica que $U \setminus Y$ es magro.

Por otra parte, supongamos, buscando una contradicción, que $Y \setminus U$ no es un subconjunto magro de ω^ω. Aplicando el Lema 2.59 (con $X = Y \setminus U$), se tiene que existe $u \in \omega^{<\omega}$ de modo que $[u] \setminus X$ es magro, pero

$$[u] \setminus X = [u] \setminus (Y \setminus U) = [u] \cap ((\omega^\omega \setminus Y) \cap U) = ([u] \setminus Y) \cup ([u] \cap U).$$

Luego, $[u] \cap U$ es un subconjunto magro y como $[u] \subseteq U$, se concluye que $[u]$ es magro en ω^ω contradiciendo al Lema 2.45.

Entonces se tiene que tanto $U \setminus Y$ como $Y \setminus U$ son subconjuntos magros de ω^ω y, por ende $Y \triangle U$ es magro. Es decir, Y tiene la Propiedad de Baire. $\square$

2.4 Consistencia de AD y comentarios finales del capítulo

Después de haber analizado algunas consecuencias de AD, una pregunta natural es, ¿si ZF es consistente, entonces ZF+AD es consistente? Resulta que la mejor respuesta que tenemos a esta cuestión es un teorema probado por el matemático W. H. Woodin, a saber, la existencia de un modelo para ZF+AD equivale a que haya un modelo para el sistema axiomático que resulta de añadir la hipótesis *existe una infinidad de cardinales de Woodin* a ZFC. No incluiremos aquí la definición de *cardinal de Woodin* (vea [3, Definition 20.31, p. 384]), sólo comentaremos que el resultado de Woodin (cuya demostración puede ser consultada en las páginas 633-643 de [3]) dice, en lenguaje coloquial, que la consistencia de ZF+AD requiere cardinales grandes.

En el presente capítulo presentamos algunas consecuencias importantes de AD, pero hay muchas más que no hemos incluido en la tesis. Por ejemplo, en ZF+AD todo subconjunto de la recta real es Lebesgue-medible (vea las páginas 629 y 630 de [3]). Al lector interesado en conocer más teoremas de ZF+AD le recomendamos que consulte [4, §7.2].

CAPÍTULO 3: EL TEOREMA DE GALE-STEWART

En el Teorema 2.16 aprendimos que si los números reales pueden ser bien ordenados, entonces existe un conjunto que no está determinado y, en consecuencia, se concluye que el Axioma de Elección es incompatible con el Axioma de Determinación. Por otro lado, en los Ejemplos 2.9 y 2.11 se argumentó que ω^ω y los conjuntos de un solo punto están determinados, independientemente de si se asume AD o no. Entonces, una pregunta natural es ¿qué colecciones interesantes de subconjuntos de ω^ω están determinados en ZFC? En 1953 Gale y Stewart probaron que todo subconjunto abierto o cerrado de ω^ω está determinado. A este resultado es al que llamaremos *el Teorema de Gale-Stewart* y el presente capítulo tiene como objetivo dar la prueba de dicho resultado.

Comencemos por definir el juego $\Game\,(A;s)$, siempre que $A \subseteq \omega^\omega$ y $s \in S_p$ (véase la Definición 2.2). En $\Game\,(A;s)$ participará un par de jugadores a los que denotaremos como H y V. Las tiradas de ambos jugadores serán números naturales, esto es, al inicio H tira algún $n_0 \in \omega$, después V eligirá un $m_0 \in \omega$, luego H responderá un $n_1 \in \omega$ y así sucesivamente como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{c|cccccc}
\text{H} & n_0 & & n_1 & & \cdots \\
\hline
\text{V} & & m_0 & & m_1 & \cdots
\end{array}$$

De este modo, H ganará el juego $\Game\,(A;s)$ si sucede que $s \vee \langle n_0, m_0, n_1, m_1, \dots \rangle \in A$ (recuerde las definiciones de la Sección 1.2). En caso contrario, V será el ganador.

Las nociones de estrategia y estrategia ganadora en el juego $\Game\,(A;s)$ serán análogas a las que se describen en el juego original al inicio del Capítulo 2.

Definición 3.1. Sean $A \subseteq \omega^\omega$ y $s \in S_p$. Si σ es una estrategia para I en el juego $\Game_A$, entonces definimos el conjunto de todas las *partidas iniciales correctas con respecto a σ en el juego* $\Game\,(A;s)$ como sigue:

$$PIC^*(\sigma) := \{t^\frown m : t \in PIC(\sigma) \wedge m \in \omega\},$$

(recuerde que $t \in PIC(\sigma)$ si y sólo si $t \in S_i$ y t sigue a σ).

Intuitivamente, $s \in PIC^*(\sigma)$ cuando s sea un elemento de $S_p \setminus \{\emptyset\}$ que siga a σ. De hecho, si $t \in PIC(\sigma)$ y $m \in \omega$, entonces $s := t^\frown m$ lucirá como indica el siguiente diagrama.

I	$s(0) = t(0) = \sigma(\emptyset)$	$\cdots$	$s(\lvert s\rvert - 2) = t(\lvert t\rvert - 1) = \sigma\left(t \restriction (\lvert t\rvert - 1)\right)$	
II		$\ldots$		$s(\lvert s\rvert - 1) = m$

Dicho lo anterior, estamos listos para definir nuevos tipos de estrategias.

Definición 3.2. Sea $A \subseteq \omega^\omega$.

1. Si σ una estrategia para I en el juego $\Game_A$, diremos que σ es una *estrategia defensiva para I en el juego* $\Game_A$ si y sólo si para toda $s \in PIC^*(\sigma)$ sucede que el jugador V no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game(A; s)$.

2. Similarmente, si τ es una estrategia para II en el juego $\Game_A$, entonces τ será una *estrategia defensiva para II en el juego* $\Game_A$ si y sólo si para cualquier $t \in PIC(\tau)$ sucede que el jugador H no posee estrategia ganadora en el juego $\Game(A; t)$ (recuerde que $t \in PIC(\tau)$ si y sólo si $t \in S_p$ y t sigue a τ).

Los siguientes resultados nos muestran cómo se relacionan los conceptos de estrategia ganadora y estrategia defensiva.

Lema 3.3. *Sean $A \subseteq \omega^\omega$. Si el jugador I tiene estrategia ganadora en el juego $\Game_A$, entonces el jugador II no posee estrategia defensiva en el juego $\Game_A$.*

Demostración. Supongamos que I posee una estrategia ganadora en el juego $\Game_A$ y llamémosle σ a dicha estrategia.

Sea τ una estrategia para el jugador II en el juego $\Game_A$ y propongamos $s := \emptyset$. Afirmamos que σ es una estrategia ganadora para el jugador H en el juego $\Game(A; s)$. En efecto, sea $x \in \omega^\omega$ tal que x sigue a σ. Como σ es estrategia ganadora y $s \vee x = x$, se tiene que $s \vee x \in A$. De este modo, la partida x en el juego $\Game(A; s)$ es ganada por H. En resumen, τ no es estrategia defensiva para el jugador II. $\square$

Lema 3.4. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$. Si el jugador II no posee estrategia ganadora en $\Game_A$, entonces el jugador I tiene una estrategia defensiva en $\Game_A$.*

Demostración. Necesitaremos algo de notación antes de empezar nuestro argumento: para cada $n \in \omega$ sea $L_n := \bigcup_{k \leqslant n} \omega^{2k}$; además, si $\rho : L_n \to \omega$, entonces

$$M(\rho) := \{t \in \omega^{2n} : \forall i < n \ (t(2i) = \rho(t \restriction (2i)))\}.$$

Construiremos por recursión una sucesión $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ de tal modo que lo siguiente es cierto para cualquier $n \in \omega$.

1. $\sigma_n : L_n \to \omega$,
2. $\sigma_n \subseteq \sigma_{n+1}$ y
3. si $s \in M(\sigma_n)$, entonces V no posee estrategia ganadora en $\Game(A; s)$.

Suponga que la sucesión ha sido hallada y observe que, entonces, $\sigma := \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$ es una estrategia para el jugador I en $\Game_A$; más aún, la igualdad $PIC^*(\sigma) = \bigcup_{n\in\omega} M(\sigma_n)$ y la condición (3) implican que σ es una estrategia defensiva para I en $\Game_A$. De este modo, todo se reduce a la recursión mencionada en el párrafo previo.

En vista de que $L_0 = \{\emptyset\}$, proponemos $\sigma_0(\emptyset) := 0$ para que (1) sea satisfecha. Además, $M(\sigma_0) = \{\emptyset\}$ y, por ende, la hipótesis del lema nos garantiza que V no tiene estrategia ganadora en $\Game(A; s)$ para cualquier $s \in M(\sigma_0)$, es decir, (3) es cierta. Esto completa la base.

Ahora demos por hecho que, para alguna $n \in \omega$, ya hemos obtenido $\{\sigma_i : i \leqslant n\}$ de manera adecuada. Comencemos por probar lo siguiente.

Afirmación. Si $s \in M(\sigma_n)$, entonces existe $\ell_s \in \omega$ de tal modo que para toda $m \in \omega$ sucede que el jugador V no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game\,(A; s \vee \langle \ell_s, m\rangle)$.

Sea $s \in M(\sigma_n)$. Supongamos, en busca de una contradicción, que para todo $\ell \in \omega$ existe $m_\ell \in \omega$ tal que V tiene estrategia ganadora en el juego $\Game\,(A; s \vee \langle \ell, m_\ell\rangle)$, digamos τ_ℓ.

Ahora, por la condición (3): V no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game(A; s)$. De este modo, el plan es emplear las estrategias τ_ℓ para obtener $\tau : S_i \to \omega$, una estrategia ganadora para II en $\Game(A;s)$. Haremos esto como sigue.

Para cualquier $t \in \omega^1$ definimos $\tau(t) = m_{t(0)}$. Por otro lado, si $t \in S_i \setminus \omega^1$, existe un único $u \in S_i$ de tal modo que $t = (t \restriction 2) \vee u$ y de esta forma $\tau(t) := \tau_{t(0)}(u)$.

Suponga que $x \in \omega^\omega$ es una partida en $\Game(A;s)$ que sigue a τ. Entonces, existe $y \in \omega^\omega$ de tal modo que $x = \langle x(0), m_{x(0)}\rangle \vee y$. Luego, un argumento inductivo y nuestra definición de τ nos garantizan que la igualdad $y(k) = \tau_{x(0)}(y \restriction k)$ se verifica para cualquier $k \in \omega$; esto es, y puede ser vista como una partida en $\Game(A, s \vee \langle x(0), m_{x(0)}\rangle)$ que sigue a la estrategia ganadora $\tau_{x(0)}$. De este modo, $s \vee x = \big(s \vee \langle x(0), m_{x(0)}\rangle\big) \vee y \in A$. En otros términos, τ es una estrategia ganadora para II en $\Game(A;s)$, tal y como queríamos. Luego, nuestra afirmación está probada.

Para completar nuestra recursión definiremos $\rho : \omega^{2n} \to \omega$ de tal modo que $\sigma_{n+1} := \sigma_n \cup \rho$ satisfaga la condición (3). Con esta idea en mente, sea $s \in \omega^{2n}$. Si $s \notin M(\sigma_n)$, hacemos $\rho(s) := 0$. Ahora, cuando $s \in M(\sigma_n)$, fijemos ℓ_s como en la Afirmación y pongamos $\rho(s) := \ell_s$.

Comprobemos que (3) es cierta: sea $t \in M(\sigma_{n+1})$. Al hacer $s := t \restriction (2n)$ y $m := t(2n+1)$ obtenemos que $s \in M(\sigma_n)$ y $t = s \vee \langle \ell_s, m\rangle$, así que el jugador V no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game(A;t)$. $\square$

De manera análoga a los preliminares del lema anterior, es conveniente considerar a los conjuntos S_i y $PIC(\tau)$ como un par de árboles, esto es:

$$S_i = \bigcup_{n\in\omega} S_i(n) \qquad \text{y} \qquad PIC(\tau) = \bigcup_{n\in\omega} PIC(\tau)_n,$$

donde $S_i(n) := \{s \in S_i : |s| = 2n+1\}$ y $PIC(\tau)_n := \{s \in PIC(\tau) : |s| = 2n\}$ representan al n-ésimo nivel del árbol S_i y $PIC(\tau)$, respectivamente.

Además, diremos que

$$S_i(< n) := \bigcup_{k<n} S_i(k).$$

Observe que si $t \in PIC(\tau)_0$, entonces se tiene que $t = \emptyset$.

Lema 3.5. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$. Si el jugador I no posee estrategia ganadora en el juego $\Game_A$, entonces el jugador II tiene estrategia defensiva en el juego $\Game_A$.*

Demostración. Iniciemos con notación: para cada $n \in \omega$ sea $K_n := \bigcup_{k<n} \omega^{2k+1}$ y, además, para cualquier $\rho : K_n \to \omega$ definimos

$$N(\rho) := \{s \in \omega^{2n} : \forall i < n \ (t(2i+1) = \rho(t \upharpoonright (2i+1)))\}.$$

Mostraremos, por recursión, que existe $\{\tau_n : n \in \omega\}$ de tal suerte que para cada $n \in \omega$ se satisface lo siguiente.

1. $\tau_n : K_n \to \omega$,
2. $\tau_n \subseteq \tau_{n+1}$ y
3. si $t \in N(\tau_n)$, entonces H no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game(A; t)$.

Antes de realizar la construcción de la sucesión notemos que las condiciones (1) y (2) implican que $\tau := \bigcup_{n<\omega} \tau_n$ es una estrategia para II en $\Game_A$. Por otro lado, la igualdad $PIC(\tau) = \bigcup_{n\in\omega} N(\tau_n)$ y la condición (3) implican que, de hecho, τ es defensiva. Sólo necesitamos realizar la recursión para finalizar la prueba.

Como $K_0 = \emptyset$, el hacer $\tau_0 := \emptyset$ garantiza que (1) es cierta. Luego, $N(\tau_0) = \{\emptyset\}$ y por la hipótesis del lema, (3) es satisfecha.

Supongamos que $n \in \omega$ es tal que $\{\tau_i : i \leqslant n\}$ ha sido definida adecuadamente. Para hallar τ_{n+1} emplearemos el siguiente hecho.

Afirmación. Para cualesquiera $t \in N(\tau_n)$ y $\ell \in \omega$ existe $m \in \omega$ de tal modo que el jugador H no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game\,(A; t \vee \langle \ell, m\rangle)$.

Haremos la prueba por contradicción: sean $t \in N(\tau_n)$ y $\ell \in \omega$ tales que para cualquier $m \in \omega$ existe σ_m, una estrategia ganadora para H en el juego $\Game(A; t \vee \langle \ell, m\rangle)$.

Emplearemos lo dicho en el párrafo previo para hallar $\sigma : S_p \to \omega$, una estrategia ganadora para I en $\Game(A; t)$, y de este modo contradecir la condición (3) de la hipótesis inductiva.

Hagamos $\sigma(\emptyset) := \ell$. Por otro lado, si $s \in S_p \setminus \{\emptyset\}$, entonces existe $u \in S_p$ de tal modo que $s = (s \upharpoonright 2) \vee u$ y así, $\sigma(s) := \tau_{s(1)}(u)$. De esta forma, si $x \in \omega^\omega$ sigue a σ, tenemos que existe $y \in \omega^\omega$ de tal suerte que $x = \langle \ell, x(1)\rangle \vee y$. Más aún, un argumento inductivo muestra que $y(k) = \sigma_{x(1)}(y \upharpoonright k)$ para cualquier $k \in \omega$, es decir, y puede pensarse como una partida en $\Game(A; t \vee \langle \ell, x(1) \rangle)$ que sigue a la estrategia ganadora $\sigma_{x(1)}$. En consecuencia, $t \vee x = (t \vee \langle \ell, x(1) \rangle) \vee y \in A$. Esto prueba que σ es ganadora, tal y como se necesitaba.

Continuemos con la recursión: definiremos una función $\rho : \omega^{2n+1} \to \omega$ de tal modo que $\tau_{n+1} := \tau_n \cup \rho$ satisfaga nuestra condición (3). Para esto, sea $s \in \omega^{2n+1}$ y sea $t := s \upharpoonright (2n)$. Si $t \notin N(\tau_n)$, entonces $\rho(s) := 0$. Ahora, cuando $t \in N(\tau_n)$, aplicamos la Afirmación a t y $\ell := s(2n)$ para obtener un número natural, digamos $\rho(s)$, de tal modo que el jugador H no posea estrategia ganadora en $\Game(A; s^\frown(\rho(s)))$ (note que $t \vee \langle \ell, \rho(s) \rangle = s^\frown(\rho(s))$).

Concluyamos la prueba observando que si $t \in N(\tau_{n+1})$, se sigue que $t \upharpoonright (2n) \in N(\tau_n)$. Luego, H no posee estrategia ganadora en $\Game(A; (t \upharpoonright (2n+1))^\frown(\tau_{n+1}(t \upharpoonright (2n+1))))$, esto es, en el juego $\Game(A; t)$. Así, nuestra definición de τ_{n+1} satisface (3). $\square$

Ahora estamos listos para demostrar el resultado central de este capítulo, a decir, el teorema que Gale y Stewart probaron en el año de 1953. En la tesis, dividiremos dicho teorema en dos partes.

Conviene mencionar que emplearemos libremente los resultados y notación de la sección 1.3 por el resto del capítulo.

Teorema 3.6 (Gale-Stewart)**.** *Si $A \subseteq \omega^\omega$ es abierto, entonces el juego $\Game_A$ está determinado.*

Demostración. Supongamos que el jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game_A$ y demostremos que el jugador II sí posee una estrategia ganadora en dicho juego.

Como I no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game_A$, por el Lema 3.5, se tiene que II posee estrategia defensiva en el juego $\Game_A$. Llamemos τ a dicha estrategia.

Se afirma que τ es una estrategia ganadora para el jugador II en el juego $\Game_A$. En efecto, sea $x \in \omega^\omega$ de modo que x sigue a τ. Basta con demostrar que x no es un elemento de A.

Supongamos que sí, es decir, que $x \in A$. Como A es abierto en ω^ω, se tiene que existe un número natural m de manera que $[x \upharpoonright m] \subseteq A$. Si hacemos $s := x \upharpoonright (2m)$, entonces sucede que $s \in PIC(\tau)$ y además, $[s] \subseteq [x \upharpoonright m] \subseteq A$.

Consideremos el juego $\Game(A; s)$ y definamos $\sigma : S_p \to \omega$ mediante $\sigma(t) := 0$ para cualquier $t \in S_p$. Sea $z \in \omega^\omega$ de tal modo que z sigue a σ. Luego, $s \vee z \in [s] \subseteq A$ y por lo tanto el jugador H gana la partida z en el juego $\Game(A; s)$. De este modo, σ es una estrategia ganadora para H en $\Game(A; s)$ o, en otras palabras, τ no es una estrategia defensiva para II en $\Game_A$. Esta es la contradicción buscada y, por lo tanto, $x \notin A$. $\square$

Teorema 3.7 (Gale-Stewart)**.** *Si $A \subseteq \omega^\omega$ es cerrado, entonces el juego $\Game_A$ está determinado.*

Demostración. La idea es similar a la demostración del Teorema 3.6. Supongamos que el jugador II no tiene estrategia ganadora en el juego $\Game_A$ y empleemos el Lema 3.4 para fijar σ, una estrategia defensiva para el jugador I en el juego $\Game_A$. Afirmamos que σ es una estrategia ganadora para I en el juego $\Game_A$.

Sea $x \in \omega^\omega$ de manera que x sigue a σ. Afirmamos que x pertenece a A. En efecto, si suponemos lo contrario, se tiene que $x \in \omega^\omega \setminus A$, el cual es por hipótesis un subconjunto abierto de los irracionales; luego existe $m \in \omega$ de manera que $[x \restriction m] \subseteq \omega^\omega \setminus A$. Así, si tomamos $s := x \restriction (2m)$, sucede que $s \in PIC(\sigma)$ y $[s] \subseteq [x \restriction m] \subseteq \omega^\omega \setminus A$.

Ahora denotemos por $\tau : S_i \to \omega$ a la función constante cero y tomemos $y \in \omega^\omega$ de manera que y sigue a τ. Como $s \vee y \in [s] \subseteq \omega^\omega \setminus A$, se sigue que la partida y del juego $\Game(A; s)$ es ganada por V. Luego, τ es una estrategia ganadora para V en $\Game(A; s)$; en otras palabras, σ no es una estrategia defensiva para el el jugador I en $\Game_A$. Esta contradicción implica que $x \in A$, tal y como se quería. $\square$

Finalizamos la tesis con algunos comentarios relativos a la Teoría Descriptiva de Conjuntos. En primer lugar, denotemos por $\mathbf{\Sigma}^0_1$ a la colección de todos los subconjuntos abiertos de ω^ω y por $\mathbf{\Pi}^0_1$ a la familia de todos los cerrados en ω^ω. Ahora supongamos que para algún $\alpha < \omega_1$ hemos definido las sucesiones $\{\mathbf{\Sigma}^0_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{\mathbf{\Pi}^0_\beta : \beta < \alpha\}$. Entonces, sea $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ la familia de todos los conjuntos $E \subseteq \omega^\omega$ para los que existe $\{E_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$ de tal modo que $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Además, hagamos $\mathbf{\Pi}^0_\alpha := \{\omega^\omega \setminus E : E \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\}$.

La construcción recursiva del párrafo previo nos da dos sucesiones de longitud ω_1, a saber, $\{\mathbf{\Sigma}^0_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\{\mathbf{\Pi}^0_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, de tal modo que

$$\bigcup\{\mathbf{\Sigma}^0_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \bigcup\{\mathbf{\Pi}^0_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Resulta que esta unión es una σ-álgebra y sus elementos son llamados *subconjuntos borelianos de* ω^ω. De este modo, el Teorema de Gale-Stewart dice que los elementos de $\mathbf{\Sigma}^0_1 \cup \mathbf{\Pi}^0_1$ están determinados. Luego, resulta natural el preguntarse qué tan alto se puede llegar en la jerarquía de conjuntos recién descrita sin perder determinación, esto es, ¿existe $\alpha < \omega_1$ de tal modo que algún $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ no esté determinado? Esta pregunta fue respondida por D. A. Martin en 1975 negativamente, es decir, él probó que todos los subconjuntos borelianos de ω^ω están determinados. Una prueba simplificada de su torema se halla en [6].

BIBILIOGRAFÍA

[1] R. Engelking, *General topology*, segunda ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlín, 1989.

[2] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos (una introducción)*, Aportaciones Matemáticas No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[3] T. Jech, *Set Theory. The Third Millenniun Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, 3rd rev. ed. Corr. 4th printing, 2003, XIV, 772 p.

[4] T. Jech, *The Axiom of Choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol. 75, Amsterdam, 1973.

[5] Y. Khomskii, *Infinite Games. Summer course at the University of Sofia, Bulgaria*, 2010. Texto disponible en

https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/infinitegames2010/index.html

[6] D. A. Martin, *A purely inductive proof of Borel determinancy*, en Recursion Theory (A. Nerode y R. A. Shore, editores), Ithaca, New York, 1982, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1985, pp. 303–308.