Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

NÚCLEOS PESADOS EN ÓRDENES PARCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

MOISES OLAF ROSAS TAVERA

TUTORA

HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2017

Agradecimientos

A Dios, por darme siempre más de lo que merezco, por bendecirme de tantas formas y por darme la inteligencia y herramientas necesarias para realizar este sueo, por ponerme en este pedazito del mundo, en el lugar y con la gente adecuada para ser feliz.

A mi familia, porque siempre han creido en mi, siempre han estado conmigo animándome y echando porras para que nunca dejara mi meta, especialmente a mis padres porque siempre han sido un ejemplo para todos mis hermanos y para mi, porque todo tiene una forma correcta de hacerse y nos han alentado para no aprender a cabezazos.

A la UNAM, por poner todo en bandeja de plata para llegar ser un licenciado en matemáticas.

A mi tutora Hortensia Galeana, porque me dio la oportunidad de trabajar con ella aunque practicamente no sabía de mi existencia, me ensenñó a no conformarme con un trabajo rápido y fácil, me inspiró a sacar lo mejor de mi y descubrir que tengo la capacidad de realizar un excelente trabajo.

A cada uno de los miembros del jurado, por ayudarme y poner de su parte para concluir este trabajo.

A mis amigos y compaeros que me han hecho saber que tengo la capacidad de llegar muy lejos.

Por último (y no menos importante), a Areli Bravo Lozano, gracias por todo y aún más.

Índice general

Introducción

En la teoría de gráficas, el concepto de núcleo ha sido ampliamente estudiado por sus aplicaciones en varias ramas de las matemáticas. Varios problemas se han resuelto encontrando un núcleo en una gráfica (o digráfica) que modele una situación. Por ésto, la existencia de núcleos en gráficas y poder determinar cuales son las gráficas que tienen núcleo ha sido una tarea bastante abordada en las investigaciones modernas.

Hasta ahora no hay una caracterización que defina a toda la clase de gráficas con núcleo. Así como veremos en la Sección 1.4, las gráficas acíclicas pertenecen a dicha clase pero no son las únicas, pues los ciclos de orden par poseen núcleo.

Con la intención de conocer más y más subclases que tienen núcleo se han definido nociones parecidas a los núcleos como lo son los seminúcleos, cuasinúcleos, núcleos por trayectorias monocromáticas, entre otros.

Claude Berge y Pierre Duchet [1] conjeturaron que toda orientación clan-acíclica de las gráficas perfectas tiene núcleo. Endre Boros y Vladimir Gurvich probaron esta conjetura en [2], Ron Aharoni y Ron Holzman [3] dieron una prueba más corta a esta conjetura usando la noción de **Núcleos Fraccionados**.

Mientras que, las variantes de núcleos antes descritas se basan en comportamientos que tienen algunos conjuntos de vértices, los núcleos fraccionados se basan en las características que tienen alguas funciones sobre los conjuntos de vértices. Por tanto, analizaremos el comportamiento de los núcleos fraccionados, diferencias y similitudes con la noción usual de núcleo, algunos ejemplos y detallaremos la prueba de Aharoni y Holzman.

Por último, abordaremos otra variante de los núcleos para digráficas con pesos en sus vértices, los **Núcleos pesados**.

Sands, Sauer y Woodrow probaron en [4] que la unión de dos órdenes parciales tiene núcleo. Aharoni, Berger y Gorelik [5] demostraron que la unión de dos órdenes parciales tiene un núcleo pesado entero. De igual manera que con los núcleos fraccionados, analizaremos las características de los núcleos pesados en órdenes parciales y en digráficas de manera paralela.

Con el fin de facilitar el entendimiento de este trabajo, comenzaremos detallando la notación a emplear y algunos resultados clásicos de la teoría de gráficas que utilizaremos a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo nos dedicaremos (mayormente) a hacer una síntesis de las definiciones que se usarán en este trabajo y que son comunmente trabajadas en la teoría de gráficas. También veremos algunos resultados básicos a partir de las definiciones y poniendo especial atención a los núcleos.

1.1. Definiciones básicas

Definición 1.1.1 *Una **gráfica**, $G = \big(V(G), A(G)\big)$, es un pareja ordenada donde $V(G)$ es un conjunto finito, no vacío, cuyos elementos son llamados vértices y $A(G)$ es un conjunto de parejas no ordenadas de distintos elementos de $V(G)$, llamadas aristas $\big(\{u, v\}\big)$.*

Definición 1.1.2 *Una **digráfica,** $D = \big(V(D), F(D)\big)$, es una pareja ordenada donde $V(D)$ es un conjunto finito, no vacío, cuyos elementos son llamados vértices y $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de distintos elementos de $V(G)$, llamadas flechas $\big((u, v)\big)$.*

Denotaremos por $p = |V(D)|$ y diremos que p es el orden de D. De igual manera, $q = |F(D)|$ y q será el tamaño de D.

Si $(u, v) \in F(D)$ diremos que u es adyacente hacia v, o bien, v es adyacente desde u.

La mayor parte de las definiciones de este trabajo serán redactadas para digráficas. Sin embargo, la mayoría de los conceptos tienen una definición muy parecida para gráficas. Básicamente, en las gráficas no hay una dirección.

Definición 1.1.3 *Sean D una digráfica y $v \in V(D)$, definimos:*

- *El* ***exgrado*** *de v $\big(\delta^+(v)\big)$, como el número de vértices adyacentes desde v.*

  $$\delta^+(v) = \Big|\Big\{u \in V(D) : (v,u) \in F(D)\Big\}\Big|$$

  La ex-vecindad o vecindad exterior de v y la ex-vecindad cerrada de v son los conjuntos $\Gamma^+(v) = \Big\{u \in V(D) : (v,u) \in F(D)\Big\}$ y $E^+[v] = \Gamma^+(v) \cup \{v\}$ respectivamente.

- *El* ***ingrado*** *de v $\big(\delta^-(v)\big)$, como el número de vértices adyacentes hacia v.*

  $$\delta^-(v) = \Big|\Big\{u \in V(D) : (u,v) \in F(D)\Big\}\Big|$$

  El conjunto $\Gamma^-(v) = \Big\{u \in V(D) : (u,v) \in F(D)\Big\}$ será la in-vecindad (vecindad interior) de v e $I^-[v] = \Gamma^-(v) \cup \{v\}$ la in-vecindad cerrada de v.

Teorema 1.1.1 *Sea D una digráfica, entonces:*

$$\sum_{v \in V(D)} \delta^+(v) = \sum_{u \in V(D)} \delta^-(u) = |F(D)|$$

Dem. Para contar la cantidad de flechas en D, bastaría sumar la cantidad de flechas que salen de cada vértice o la cantidad de flechas que terminan en él, entonces el conjunto $F(D)$ puede escribirse como:

$$\bigcup_{u \in V(D)} \Big\{(u,v) \in F(D) : v \in V(D)\Big\} = \bigcup_{v \in V(D)} \Big\{(u,v) \in F(D) : u \in V(D)\Big\}$$

De donde:

$$\begin{aligned} |F(D)| &= \Big|\bigcup_{u \in V(D)} \Big\{(u,v) \in F(D) : v \in V(D)\Big\}\Big| \\ &= \Big|\bigcup_{v \in V(D)} \Big\{(u,v) \in F(D) : u \in V(D)\Big\}\Big| \end{aligned}$$

Como todos los uniendos son ajenos dos a dos, la cardinalidad de la unión es la suma de las cardinalidades de los uniendos. Entonces:

$$\begin{aligned} |F(D)| &= \sum_{u \in V(D)} \Big|\big\{(u,v) \in F(D) : v \in V(D)\big\}\Big| \\ &= \sum_{v \in V(D)} \Big|\big\{(u,v) \in F(D) : u \in V(D)\big\}\Big| \end{aligned}$$

Por otro lado, como los elementos de $F(D)$ son parejas odenadas, podemos asociar cada flecha de D con su vértice inicial, es decir, $(u,v) \rightarrow u$ y también podemos asociarla con su vértice final, $(u,v) \rightarrow v$.

Así, la cantidad de flechas con vértice inicial u, es igual a la cantidad de vértices adyacentes desde u.

$$\Big|\big\{(u,v) \in F(D) : v \in V(D)\big\}\Big| = \Big|\big\{v \in V(D) : (u,v) \in F(D)\big\}\Big| = \delta^{+}(u)$$

Análogamente, la cantidad de flechas con vértice final v, es igual a la cantidad de vértices adyacentes hacia v.

$$\Big|\big\{(u,v) \in F(D) : u \in V(D)\big\}\Big| = \Big|\big\{u \in V(D) : (u,v) \in F(D)\big\}\Big| = \delta^{-}(v).$$

Sustituyendo estas igualdades:

$$\begin{aligned} |F(D)| &= \sum_{u \in V(D)} \Big|\big\{v \in V(D) : (u,v) \in F(D)\big\}\Big| = \sum_{u \in V(D)} \delta^{+}(u) \\ &= \sum_{v \in V(D)} \Big|\big\{u \in V(D) : (u,v) \in F(D)\big\}\Big| = \sum_{v \in V(D)} \delta^{-}(v) \end{aligned}$$

Demostrando así el teorema. ∎

1.2. Tipos de digráfica

Definición 1.2.1 *Sean D, D_1 dos digráficas. Diremos que D_1 es **subdigráfica** de D, siempre que $V(D_1) \subseteq V(D)$ y $F(D_1) \subseteq F(D)$.*

*Sea $A \subseteq V(D)$. La **subdigráfica inducida** por A (denotada por $D[A]$), es una subdigráfica que cumple que $V(D[A]) = A$ y para cada $u, v \in A$:*
$(u, v) \in F(D[A])$ si y sólo si $(u, v) \in F(D)$.

*Diremos que D_1 es una **subdigráfica generadora** de D, si $V(D) = V(D_1)$.*

Definición 1.2.2 *Una digráfica D es:*

- ***Simétrica**, si para cualquier $(u, v) \in F(D)$, se cumple que $(v, u) \in F(D)$. En tal caso diremos que (u, v) es una **flecha simétrica**.*

- ***Asimétrica**, si para toda $(u, v) \in F(D)$, $(v, u) \notin F(D)$. Entonces diremos que (u, v) es una **flecha irreversible**.*

- ***Transitiva**, si para cualesquiera tres vértices, u, v, w, de D, tales que $(u, v), (v, w) \in F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$.*

Definición 1.2.3 *Una digráfica D es:*

- ***Completa**, si para todo $u, v \in V(D)$ (distintos), $(u, v), (v, u) \in F(D)$.*

- ***Semicompleta**, si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ $(u \neq v)$, se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$.*

- ***Torneo**, si para cada $u, v \in V(D)$ (vértices distintos), $(u, v) \in F(D)$ ó $(v, u) \in F(D)$, pero no ambas.*

*Sea $K \subseteq V(D)$, decimos que K es un **semicompleto**, si para cualesquiera $u, v \in K$, están conectados por al menos una flecha. Es decir, $D[K]$ es una subdigráfica semicompleta de D.*

*Cuando el conjunto K lo estemos contemplando dentro de una gráfica, diremos que $K \subseteq V(G)$ es un **clan**. Notemos que un clan no necesariamente es un conjunto máximo por contención.*

Definición 1.2.4 *Sea D una digráfica. D es **bipartita**, si existen dos conjuntos $X, Y \subseteq V(D)$, tales que:*

- $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ *y* $X \cup Y = V(D)$.
- *Para toda $(u, v) \in F(D)$, $u \in X$ y $v \in Y$ ó $u \in Y$ y $v \in X$.*

Definición 1.2.5 *Sean D_1 y D_2 dos digráficas. Definimos la **unión** de digráficas, como la digráfica $D = D_1 \cup D_2$, tal que:*

$$V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \quad y \quad F(D) = F(D_1) \cup F(D_2).$$

Definición 1.2.6 *Sean D una digráfica y $v \in V(D)$. Definimos la digráfica $D - v$,como la digráfica que cumple:*

$$V(D - v) = V(D) - \{v\} \quad y$$
$$F(D - v) = F(D) - \big\{(x, y) \in F(D) : v \in \{x, y\}\big\}.$$

De manera similar, a una digráfica podemos quitarle una flecha o un conjunto de flechas. Notemos que eliminar flechas en una gráfica deja intacto al conjunto de vértices.

1.3. Caminos

Definición 1.3.1 *Sea D una digráfica:*

- *Un uv-**camino** dirigido (C) en una digráfica D, es una sucesión finita $C = (u = v_0, v_1, ..., v_{k-1}, v_k = v)$ de vértices de D, que empieza en u y termina en v, tal que, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, $(v_{i-1}, v_i) \in F(D)$. $l(C) = k$ será la longitud del camino C.*

  *Si $u = v_0 = v_k = v$, diremos que C es un **camino cerrado**.*

- *Un uv-**paseo** dirigido (P) en D, es un uv-camino dirigido que no repite flechas.*

- *Una uv-**trayectoria** (T) en D, es un uv-camino dirigido que no repite vértices.*

- *Un **ciclo** dirigido (γ) en D, es un camino cerrado que únicamente repite el primer y último vértice.*

  *Diremos que γ es un **ciclo propio** de D, si toda flecha de γ es irreversible. γ es un **ciclo hamiltoniano**, si $V(\gamma) = V(D)$.*

De ahora en adelante omitiremos la palabra dirigido, ya que sólo utilizaremos caminos, paseos, trayectorias y ciclos dirigidos.

Lema 1.3.1 *Sea D una digráfica de orden $p \geq 2$, tal que, para todo $v \in V(D)$, $\delta^+(v) \geq 1$. Entonces D contiene un ciclo.*

Dem. Sea $T = (v_0, v_1, ..., v_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D (dicha trayectoria siempre existe, pues por hipótesis, al menos hay dos vértices adyacentes). Además, sabemos que $\delta^+(v_k) \geq 1$, por tanto, existe $w \in V(D)$, tal que $(v_k, w) \in F(D)$.

Si para todo $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, $w \neq v_i$, podemos considerar a la trayectoria $T_1 = (v_0, v_1, ..., v_k, w)$, donde $l(T_1) = k + 1 > k = l(T)$ y por tanto T no sería de longitud máxima, generando una contradicción.

Así, para algún $i \in \{0, 1, ...k - 1\}$, $w = v_i$ y $\gamma = (v_i, ..., v_k, w = v_i)$ es un ciclo en D. ∎

Lema 1.3.2 *Todo uv-camino contiene una uv-trayectoria.*

Dem. Para demostrar este lema procederemos por contradicción.

Supongamos que existe una digráfica D con, $C = (u = v_o, v_1, ..., v_n = v)$, un uv-camino que no contiene uv-trayectorias y supongamos que C es de longitud mínima con esa propiedad.

Como C no contiene uv-trayectorias, C mismo no es una trayectoria, entonces C repite al menos un vértice. Sea v_i el primer vértice en aparecer repetido, es decir, existe $j < i$, tal que $v_i = v_j$ y $v_o, v_1, ..., v_j, v_{j+1}, ..., v_{i-1}$ son todos distintos.

Ahora consideremos $C_1 = (u = v_0, v_1, ..., v_j = v_i, v_{i+1}, ..., v_n = v)$, un uv-camino contenido en C, C_1 no contiene uv-trayectorias y $l(C_1) < l(C)$, lo cual genera una contradicción al hecho de que C era de longitud mínima. Dicha contradicción surge de suponer que existía dicho camino.

Por lo tanto el lema es cierto. ■

Lema 1.3.3 *Todo camino cerrado contiene un ciclo.*

Dem. Sea D una digráfica y $C = (v_o, v_1, ..., v_k = v_0)$ un camino cerrado en D, si C es un ciclo, habremos terminado.

Supongamos que C no es un ciclo. Sea v_i el primer vértice repetido en C, es decir, existe $j < i$ tal que $v_j = v_i$ y v_0, v_1,...,v_j, v_{j+1},...,v_{i-1} son todos distintos.

Por lo tanto $\gamma = (v_j, v_{j+1}, ..., v_i = v_j)$ es un ciclo propio contenido en C. ■

1.4. Núcleos

Definición 1.4.1 *Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$ diremos que:*

- *S es **independiente**, si para cualesquiera $u, v \in S$ (distintos), se tiene que u no es adyacente hacia v y v no es adyacente hacia u.*
- *S es **dominante**, si para todo $w \in (V(D) - S)$, existe $v \in S$, tal que $(v, w) \in F(D)$.*

Proposición 1.4.1 *Los conjuntos antes descritos siempre existen:*

- *Para todo $v \in V(D)$, $S = \{v\}$ es independiente.*
- *Si $S = V(D)$, entonces S es dominante.*

Definición 1.4.2 *Sea D una digráfica. $N \subseteq V(D)$ es un **núcleo**, si N es independiente y dominante.*

Teorema 1.4.2 *Sea D una digráfica. Si $N \subseteq V(D)$ es un núcleo de D, entonces N es independiente máximo por contención con dicha propiedad.*

Dem. Sea N un núcleo de D.

Supongamos (por contradicción) que N no es máximo por contención, entonces existe $I \subseteq V(D)$, conjunto independiente, tal que $N \subsetneq I$.

Por lo cual, existe $w \in (I - N)$. Como N es dominante, existe $v \in N$, tal que $(v, w) \in F(D)$, pero $v, w \in I$, conjunto independiente, lo cual, genera una contradicción.

Por lo tanto N es independiente máximo. ■

Corolario 1.4.3 *Sea D una digráfica simétrica. $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si y sólo si N es independiente máximo por contención.*

Dem.

$\Rightarrow$)Si N es núcleo de D, por el Teorema 1.4.2, N es independiente máximo por contención.

$\Leftarrow$)Sea N un conjunto independiente máximo de D y w un elemento arbitrario de $(V(D) - N)$. Como N es independiente máximo, $N \cup \{w\}$ no es independiente, entonces existe $v \in N$, tal que $(v, w) \in F(D)$ o $(w, v) \in F(D)$. Por hipótesis D es simétrica, así, en cualquiera caso se concluye que $(v, w) \in F(D)$.

Por lo tanto N es dominante y concluimos que N es núcleo de D. ■

Teorema 1.4.4 *Si $N \subseteq V(D)$ es núcleo de una digráfica D, entonces N es dominante mínimo por contención con dicha propiedad.*

Dem. Sea N un núcleo de D. Supongamos que N no es dominante mínimo, entonces existe $A \subsetneq N$, tal que A es dominante. Sea $v \in (N - A)$, como A es dominante, existe $u \in A$ tal que $(u, v) \in F(D)$, pero $u, v \in N$ conjunto independiente, lo cual genera una contradicción.

De donde, N es dominante mínimo por contención. ■

Teorema 1.4.5 *Toda digráfica sin ciclos tiene núcleo.*

Dem. Sea D una digráfica de orden p, sin ciclos. Demostraremos el teorema por inducción sobre p.

Si $p = 1$, entonces D consta de un sólo vértice v. Por lo tanto $\{v\}$ es núcleo de D.

(HI) Supongamos que toda digráfica de orden $p = k$, sin ciclos tiene núcleo.

Sea D una digráfica de orden $p = k + 1$, sin ciclos. Por la contrapositiva del Lema 1.3.1, existe $v \in V(D)$ tal que $\delta^+(v) = 0$.

Consideremos $D_1 = D[V(D) - \{v\}]$, entonces el orden de D_1 es k. Por (HI), D_1 tiene núcleo, digamos N_1.

Si existe $w \in N_1$, tal que $(w, v) \in F(D)$, entonces N_1 domina a v y es dominante en D_1. Como N_1 es independiente en D_1 y D_1 es una subdigráfica inducida de D, entonces N_1 también es independiente en D. Por lo tanto N_1 es núcleo en D.

Si no existen flechas de N_1 a v, entonces $N = N_1 \cup \{v\}$ es independiente (pues $\delta^+(v) = 0$).

Sea $u \in \big(V(D) - N\big)$, entonces $u \in \big(V(D_1) - N\big)$, como N_1 es dominante en D_1, existe $w \in N_1 \subseteq N$ y $(w, u) \in F(D_1)$. De donde, $(w, u) \in F(D)$ para algún $w \in N$, lo cual indica que N es dominante en D.

Por lo tanto, N es núcleo de D. ■

Definición 1.4.3 *Sea D una digráfica y $A \subseteq V(D)$. Definimos la* ***función característica de*** *A, denotada por $\varphi_A : V(D) \to \{0,1\}$, dada por:*

$$\varphi_A(v) = \begin{cases} 1 & si \quad v \in A \\ \\ 0 & si \quad v \notin A \end{cases}$$

Teorema 1.4.6 *Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$. N es núcleo de D si y sólo si, para todo $v \in V(D)$, $\varphi_N(v) = 1 - \text{máx}\left\{\varphi_N(u) : u \in \Gamma^-(v)\right\}$.*

Donde φ_N denota la función característica de N.

Dem.

$\Rightarrow$)Supongamos que N es núcleo de D y sea $v \in V(D)$.

Si $v \in N$, entonces $\varphi_N(v) = 1$. Como N es un conjunto independiente, para todo $u \in \Gamma^-(v)$, se tiene que, $u \notin N$, es decir, $\varphi_N(u) = 0$. Por lo tanto:

$$\varphi_N(v) = 1 = 1 - 0 = 1 - \text{máx}\left\{\varphi_N(u) : u \in \Gamma^-(v)\right\}$$

Si $v \notin N$, entonces $\varphi_N(v) = 0$. Como N es un conjunto dominante, existe $w \in \left(N \cap \Gamma^-(v)\right)$, es decir, $(w, v) \in F(D)$ y $\varphi_N(w) = 1$. Por lo tanto:

$$\varphi_N(v) = 0 = 1 - \varphi_N(w) = 1 - \text{máx}\left\{\varphi_N(u) : u \in \Gamma^-(v)\right\}$$

En cualquier caso, se verifica la igualdad.

$\Leftarrow$)Supongamos que $\varphi_N(v) = 1 - \text{máx}\left\{\varphi_N(u) : u \in \Gamma^-(v)\right\}$. Demostraremos primero que N es independiente en D.

Sea $v \in N$, entonces:

$$\varphi_N(v) = 1 = 1 - 0 = 1 - \text{máx}\left\{\varphi_N(u) : u \in \Gamma^-(v)\right\}$$

Lo cual implica que para todo $u \in \Gamma^-(v)$, $\varphi_N(u) = 0$, es decir, $\Gamma^-(v) \cap N = \emptyset$ (N es independiente).

Sea $w \in \left(V(D) - N\right)$, entonces:

$$\varphi_N(w) = 0 = 1 - 1 = 1 - \text{máx}\left\{\varphi_N(u) : u \in \Gamma^-(v)\right\}$$

Es decir, existe $z_0 \in \Gamma^-(w)$, tal que $\varphi_N(z_0) = 1$, en otras palabras, $z_0 \in N$ y $(z_0, w) \in F(D)$ (N es dominante).

En conclusión, N es núcleo de D. ■

Capítulo 2

Núcleos fraccionados

En este capítulo nos enfocaremos en analizar la noción de núcleo fraccionado definida por Aharoni y Holzman [3], veremos algunas propiedades de ésta y algunas diferencias que tiene con la noción usual descrita en el primer capítulo y también veremos la relación que existe entre éstos.

2.1. Fraccionalmente independiente

Definición 2.1.1 *Dada una digráfica D. Se dice que una función $f : V(D) \to [0, \infty)$ es* ***fraccionalmente independiente*** *en D, si para todo semicompleto K de $V(D)$, se tiene que $\sum_{u \in K} f(u) \leq 1$.*

Dicha definición difiere de la noción tradicional de independencia, que hace refierencia a una característica de un conjunto de vértices y no a una función sobre éstos.

La intuición diría que debemos redactar la definición de función fraccionalmente independiente con respecto a los conjuntos independientes de una digráfica y no con respecto a sus semicompletos. Más adelante, para demostrar uno de los resultados principales (Teorema 2.5.9), necesitaremos que la función característica de un conjunto independiente sea fraccionalmente independiente.

Teorema 2.1.1 *Sea D una digráfica e $I \subseteq V(D)$. Si I es un conjunto independiente, entonces la función característica de I, φ_I, es fraccionalmente independiente.*

Dem. Sean D una digráfica e $I \subseteq V(D)$ un conjunto independiente. Sea K un semicompleto de $V(D)$, entonces $|K \cap I| \leq 1$, pues en I no hay flechas. Por tanto

$$\sum_{v \in K} \varphi_I(v) = \sum_{v \in (K \cap I)} \varphi_I(v) + \sum_{v \in (K - I)} \varphi_I(v) \leq \varphi_I(w) + 0 = 1$$

Para algún $w \in (K \cap I)$.

Así, φ_I es fraccionalmente independiente. ■

Proposición 2.1.2 *Sea D una digráfica e $I \subseteq V(D)$ un conjunto independiente. Si $|I| \geq 2$, la función característica de I, φ_I, no es "fraccionalmente independiente" (con la definición a base de conjuntos independientes).*

Dem. Sean D una digráfica e I un conjunto independiente en D y u, v elementos distintos en I, entonces $I_1 = \{u, v\}$ es un conjunto independiente, tal que:

$$\sum_{z \in I_1} \varphi_I(z) = \varphi_I(u) + \varphi_I(v) = 2 > 1.$$

Por lo tanto φ_I no es "fraccionalmente independiente". ■

Ejemplo 2.1.1 *Para la Proposición 2.1.2*

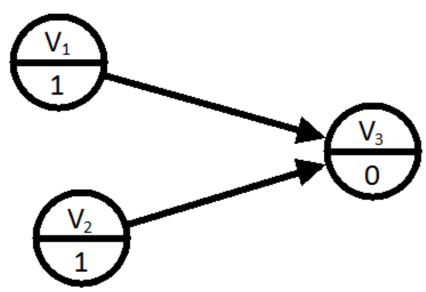


Figura 2.1: φ_I

$I = \{v_1, v_2\}$ es independiente y $\varphi_I(v_1) + \varphi_I(v_2) = 1 + 1 = 2 > 1$, por lo cual φ_I, no es "fraccionalmente independiente" con respecto a la definición modificada y por el Teorema 2.1.1, sí lo es con respecto a la definición con semicompletos.

Por esta razón, continuaremos únicamente con la definición con respecto a conjuntos semicompletos.

Proposición 2.1.3 *Para toda digráfica D, existe una función fraccionalmente independiente.*

Dem. Sea D una digráfica. Consideremos la función $f \equiv 0$ (la función constante cero) y K semicompleto de $V(D)$, entonces:

$$\sum_{u \in K} f(u) = \sum_{v \in V(D)} f(v) = 0 < 1$$

Por tanto, $f \equiv 0$ es fraccionalmente independiente. ■

Proposición 2.1.4 *Para cada digráfica D, existe una infinidad de funciones fraccionalmente independientes.*

Dem. Sea D una digráfica de orden p, tomemos un número real $r \in (0, \frac{1}{p})$ y consideremos la función $f_r : V(D) \to [0, \infty)$, tal que para todo $v \in V(D)$, $f_r(v) = r$. Entonces, para todo K semicompleto de $V(D)$:

$$\sum_{u \in K} f_r(u) \leq \sum_{v \in V(D)} f_r(v) = pr < p\left(\frac{1}{p}\right) = 1$$

Así, para todo $r \in (0, \frac{1}{p})$, f_r es fraccionalmente independiente. ■

Notemos que la imagen de una función fraccionalmente independiente, está condicionada por el número uno. Con el objetivo de entender más esta noción, veremos parte del comportamiento que tienen este tipo de funciones y su imagen.

Proposición 2.1.5 *Si f es una función fraccionalmente independiente, entonces $Im[f] \subset [0,1]$.*

Dem. Sean D una digráfica y $f : V(D) \to [0, \infty)$, una función fraccionalmente independiente y $v \in V(D)$.

Temos que $K = \{v\}$ es un semicompleto de $V(D)$. Por tanto:
$0 \leq \sum_{u \in K} = f(v) \leq 1$. Es decir, $f(v) \in [0,1]$. Lo cual demuestra la proposición.
■

Debido a esta proposición, en toda digráfica existen funciones que no son fraccionalmente independientes, basta que $Im[f] \not\subseteq [0,1]$.

Hasta ahora, todos los ejemplos de funciones fraccionalmente independientes, han resultado funciones constantes. Claramente, si D es una digráfica de orden uno, cualquier función fraccionalmente independiente es constante. Sin embargo, ésta es la única excepción:

Proposición 2.1.6 *Para toda digráfica D, tal que $|V(D)| \geq 2$, existe una infinidad de funciones, inyectivas (no constantes), que son fraccionalmente independientes.*

Dem. Sea D una digráfica de orden $p \geq 2$ y $V(D) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$.

Tomemos $x_1, x_2, ..., x_p \in (0, \frac{1}{p})$, p números distintos y consideremos la función $f : V(D) \to [0, \infty)$, tal que, para cada $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $f(v_i) = x_i$. Entonces f es una función inyectiva por la manera en que elegimos los números.

Sea K un semicompleto de $V(D)$, entonces

$$\sum_{u \in K} f(u) \leq \sum_{i=1}^{p} f(v_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i < p\left(\frac{1}{p}\right) = 1$$

Lo cual, demuestra que f es fraccionalmente independiente. Como cada elección de p números nos da una función distinta, podemos obtener una infinidad de estas funciones. ■

Las funciones fraccionalmente independientes que hemos generado hasta ahora, tiene en común que la suma de los elementos de su imagen está acotada por la constante uno $\left(\sum_{v \in V(D)} f(v) \leq 1\right)$. Esto no es una condición necesaria para esta noción:

Afirmación 1 *Existe una digráfica D y una función, f, fraccionalmente independiente, tal que* $\sum_{v \in V(D)} f(v) > 1$.

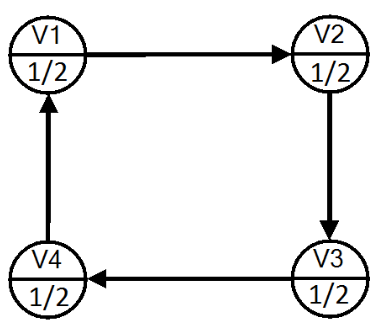


Figura 2.2: D_1

En D_1, $f \equiv \frac{1}{2}$ y sus semicompletos máximos por contención tiene cardinalidad dos, a saber, $M_1 = \{v_1, v_2\}$, $M_2 = \{v_2, v_3\}$, $M_3 = \{v_3, v_4\}$ y $M_4 = \{v_4, v_1\}$. Entonces, para todo K semicompleto de D_1:

$$\sum_{z \in K} f(z) \leq \sum_{z \in M_i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Demostrando que f es fraccionalmente independiente en D_1 y además

$$\sum_{v \in V(D_1)} f(v) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 1.$$

El siguiente ejemplo nos muestra una digráfica con una función no constante e inyectiva sobre sus vértices que de igual manera, la suma total es mayor que la constante uno.

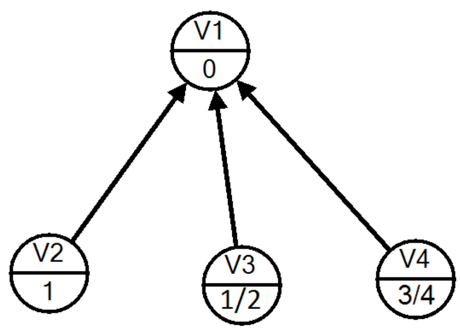


Figura 2.3: D_2

Para cada, K semicompleto de D_2:

$$\sum_{z \in K} f(z) \leq \sum_{z \in M_1} f(z) = 1$$

Por tanto f es fraccionalmente independiente en D_2. Por otro lado

$$\sum_{v \in V(D_2)} f(v) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 1.$$

Proposición 2.1.7 *Una digráfica D es semicompleta si y sólo si para toda función, f, fraccionalmente independiente:* $\sum_{v \in V(D)} f(v) \leq 1.$

Dem. $\Rightarrow$)Sea D una digráfica semicompleta y f una función fraccionalmente independiente en D. Como $V(D)$ es semicompleto, se cumple que $\sum_{v \in V(D)} f(v) \leq 1.$

$\Leftarrow$)Sea D una digráfica, tal que para toda función f, fraccionalmente independiente, $\sum\limits_{w \in V(D)} f(w) \leq 1$.

Si $|V(D)| = 1$, D es semicompleta. Supongamos que el orden de D es mayor a uno. Sean u, v elementos distintos de $V(D)$, consideremos la función:

$$f(w) = \begin{cases} 1 \quad si \quad w \in \{u, v\} \\ \\ 0 \quad si \quad w \in \big(V(D) - \{u, v\}\big) \end{cases}$$

Por hipótesis, f no puede ser fraccionalmente independiente, pues:

$$\sum_{w \in V(D)} f(w) = f(u) + f(v) = 2 > 1.$$

Entonces, existe un conjunto semicompleto, K de $V(D)$, tal que:

$$\sum_{w \in K} f(w) > 1, \text{ por tanto, } u, v \in K.$$

Como K es un semicompleto, $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$, siendo u, v elementos arbitrarios.

Por lo tanto, D es semicompleta. $\blacksquare$

2.2. Fraccionalmente dominante

Definición 2.2.1 *Dada una digráfica D y $f : V(D) \to [0, \infty)$ una función. Diremos que f es **fraccionalmente dominante** en D, si para todo $v \in V(D)$, $\sum\limits_{u \in I^-[v]} f(v) \geq 1$. Donde $I^-[v]$ es la in-vecindad cerrada de v.*

Nuevamente, esta definición difiere de la noción tradicional de dominancia, referente a una propiedad que cumple un conjunto de vértices y no a una propiedad de funciones.

Proposición 2.2.1 *Para toda digráfica D, existe una función fraccionalmente dominante en D.*

Dem. Sea D una digráfica, definimos $f : V(D) \to [0, \infty)$, tal que, para todo $v \in V(D)$, $f(v) = 1$ ($f \equiv 1$). Para cada $v \in V(D)$, $v \in I^-[v]$, entonces:

$$1 = f(v) \leq f(v) + \sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u) = \sum_{u \in I^-[v]} f(u).$$

Por lo tanto, f es fraccionalmente dominante en D. ■

Proposición 2.2.2 *Toda digráfica tiene un número infinito de funciones inyectivas, que son fraccionalmente dominantes.*

Dem. Sea D una digráfica de orden p, $v_1, v_2, ..., v_p$ una enumeración de $V(D)$ y sea $c \in [0, \infty)$.

Consideremos a $f_c : V(D) \to [0, \infty)$ una función, tal que, para todo vértice $v_i \in V(D)$, $f_c(v_i) = c + i$.

Sean $v_i, v_j \in V(D)$ distintos ($i \neq j$), entonces $f_c(v_i) = c+i \neq c+j = f_c(v_j)$, por tanto f_c es inyectiva. Además, para cada $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $v_i \in I^-[v_i]$ y:

$$\sum_{u \in I^-[v_i]} f_c(u) \geq f_c(v_i) = c + i \geq i \geq 1.$$

Con lo cual, se concluye que para cada $c \in [0, \infty)$, f_c es fraccionalmente dominante, obteniendo una cantidad infinita de funciones. ■

De manera similar a la Proposición 2.1.5, la imagen de las funciones fraccionalmente dominantes, también está condicionada por la constante uno. Si $Im[f] \subset [1, \infty)$, automaticamente f es fraccionalmente dominante, ya que, para todo $v \in V(D)$:

$$\sum_{u \in I^-[v]} f(u) = \sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u) + f(v) \geq f(v) \geq 1.$$

Por otro lado, en una digráfica D, tal que $F(D) = \emptyset$, las in-vecindades cerradas constan de un sólo vértice. Por tanto, si f es una función fraccionalmente dominante en D, forzosamente $Im[f] \subset [1, \infty)$. Para aclarar el caso en que $F(D) \neq \emptyset$, ocuparemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.3 *Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$, un conjunto dominante, entonces la función característica de S, φ_S, es fraccionalmente dominante.*

Dem. Sean D una digráfica, $S \subseteq V(D)$ un conjunto dominante (arbitrario) y $v \in V(D)$.

Si $v \in S$, entonces $1 = \varphi_S(v) \leq \sum_{u \in \Gamma^-(v)} \varphi_S(u) + \varphi_S(v) = \sum_{u \in I^-[v]} \varphi_S(u)$.

Si $v \notin S$, existe $w \in S$, tal que $(w, v) \in F(D)$, entonces $w \in I^-[v]$ y

$$1 = \varphi_S(w) \leq \sum_{u \in I^-[v]} \varphi_S(u).$$

De ambos casos, se conlcuye que φ_S es fraccionalmente dominante. ■

Notemos que si $F(D) \neq \emptyset$, entonces existe un conjunto dominante, $S \neq V(D)$ y por la proposición anterior, la función característica de S, φ_S, es fraccionalmente dominante, $\varphi_S \not\equiv 1$ y también $Im[\varphi_S] \subset [0, 1]$. Más aún:

Afirmación 2 *Existe una digráfica D y una función, f, fraccionalmente dominante en D, tal que $Im[f] \subset [0, 1)$ ($f < 1$).*

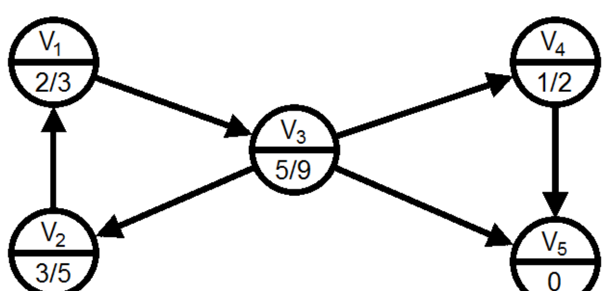


Figura 2.4: D_3

La función f definida en la digráfica D_3 de la ilustración, es fraccionalmente dominante pues:

$$\sum_{u\in I^-[v_1]} f(u) = f(v_1) + f(v_2) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15} > 1$$

$$\sum_{u\in I^-[v_2]} f(u) = f(v_2) + f(v_3) = \frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{52}{45} > 1$$

$$\sum_{u\in I^-[v_3]} f(u) = f(v_3) + f(v_1) = \frac{5}{9} + \frac{2}{3} = \frac{11}{9} > 1$$

$$\sum_{u\in I^-[v_4]} f(u) = f(v_4) + f(v_3) = \frac{1}{2} + \frac{5}{9} = \frac{19}{18} > 1$$

$$\sum_{u\in I^-[v_5]} f(u) = f(v_5) + f(v_3) + f(v_4) = 0 + \frac{5}{9} + \frac{1}{2} = \frac{19}{18} > 1$$

Además, $Im[f] \subset [0, 1)$.

Cabe destacar que no toda función es fraccionalmente dominante. En una digráfica, D, de orden p, toda función, f, tal que $Im[f] \subseteq [0, \frac{1}{p})$, f no es fraccionalmente dominante. Pues para todo $v \in V(D)$:

$$\sum_{u\in I^-[v]} f(u) \leq \sum_{u\in V(D)} f(u) < p\left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

2.3. Fuertemente dominante

Definición 2.3.1 *Sea D una digráfica y $f : V(D) \to [0, \infty)$, una función. Decimos que f es* ***fuertemente dominante****, si para todo $v \in V(D)$, existe un subconjunto semicompleto K de $I^-[v]$, tal que $\sum_{u \in K} f(u) \geq 1$.*

Proposición 2.3.1 *Para toda digráfica D, existe una función fuertemente dominante.*

Dem. Sea D una digráfica y $c \in [1, \infty)$ cualquiera. Consideremos la función $f \equiv c$ (la función constante c).

Sea $v \in V(D)$, entonces $K = \{v\}$ es un semicompleto de $I^-[v]$, tal que

$$\sum_{z \in K} f(z) = f(v) = c \geq 1.$$

Por tanto, f es fuertemente dominante. ∎

Proposición 2.3.2 *Toda digráfica tiene un número infinito de funciones inyectivas fuertemente dominantes.*

Dem. Sea D una digráfica de orden p, tal que $V(D) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$. Sean $x_1, x_2, ..., x_p \in [1, \infty)$, p números arbitrarios y $f : V(D) \to [0, \infty)$ una función, tal que para todo $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $f(v_i) = x_i$.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., p\}$, el conjunto $K_i = \{v_i\}$ es un semicompleto de $I^-[v_i]$, el cual cumple que

$$\sum_{z \in K_i} f(z) = f(v_i) = x_i \geq 1.$$

Por tanto, f es fuertemente dominante. Como hay una infinidad de subconjunto de cardinalidad p de $[1, \infty)$, hemos demostrado la proposición. ∎

Teorema 2.3.3 *Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. Si S es dominante, entonces φ_S es fuertemente dominante.*

Dem. Sean D una digráfica, $S \subseteq V(D)$, un conjunto dominante y $v \in V(D)$ (arbitrario).

Si $v \in S$, entonces $K = \{v\}$ es un semicompleto de $I^-[v]$ y:

$$\sum_{z \in K} \varphi_S(z) = \varphi_S(v) = 1.$$

Si $v \notin S$, como S es dominante, existe $u \in S$, tal que $(u, v) \in F(D)$, es decir, $u \in I^-[v] \cap S$. Entonces $K' = \{u, v\}$ es un semicompleto de $I^-[v]$ tal que

$$\sum_{z \in K'} \varphi_S(z) = \varphi_S(u) + \varphi_S(v) = 1 + 0 = 1.$$

De ambos casos se concluye que φ_S es fuertemente dominante. ■

El comportamiento de las funciones fuertemente dominantes es muy similar al de las funciones fraccionalmente dominantes y este hecho no sólo se debe a que las definiciones son casi idénticas:

Proposición 2.3.4 *Toda función fuertemente dominante es fraccionalmente dominante.*

Dem. Sean D una digráfica, f una función fuertemente dominante en D y sea $v \in V(D)$.

Como f es fuertemente dominante, existe K semicompleto de $I^-[v]$, tal que $\sum_{u \in K} f(u) \geq 1$, pero como $K \subseteq I^-[v]$ y f es no negativa, tenemos que:

$$1 \leq \sum_{u \in K} f(u) \leq \sum_{u \in I^-[v]} f(u).$$

Por tanto, f es fraccionalmente dominante. ■

El comportamiento de ambas nociones es casi idéntica, pero no se trata de la misma definición. Existe una digráfica D y una función $f : V(D) \to [0, \infty)$, fraccionalmente dominante que no es fuertemente dominante:

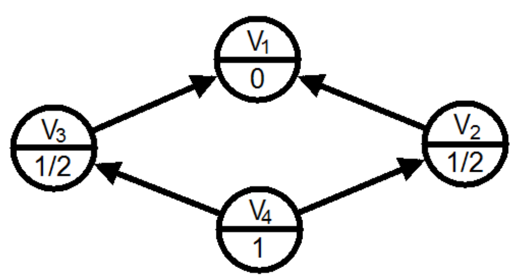


Figura 2.5: D_4

f es fraccionalmente dominante en D_4, ya que:

$$\sum_{u \in I^-[v_1]} f(u) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\sum_{u \in I^-[v_2]} f(u) = f(v_2) + f(v_4) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > 1$$
$$\sum_{u \in I^-[v_3]} f(u) = f(v_3) + f(v_4) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} > 1$$
$$\sum_{u \in I^-[v_4]} f(u) = f(v_4) = 1$$

Pero f no es fuertemente dominante, pues los únicos semicompletos de $I^-[v_1]$ son $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}$ y ninguna suma supera a $\frac{1}{2}$.

Por otro lado, encontramos digráficas en las cuales todas las funciones que son fraccionalmente dominantes, también son fuertemente dominantes.

Proposición 2.3.5 *Sea D una digráfica semicompleta y $f : V(D) \to [0, \infty)$ una función. f es fraccionalmente dominante si y sólo si f es fuertemente dominante.*

Dem. $\Leftarrow$)Sean D una digráfica y f una función fuertemente dominante en D, debido a la Proposición 2.3.4, f es fraccionalmente dominante.

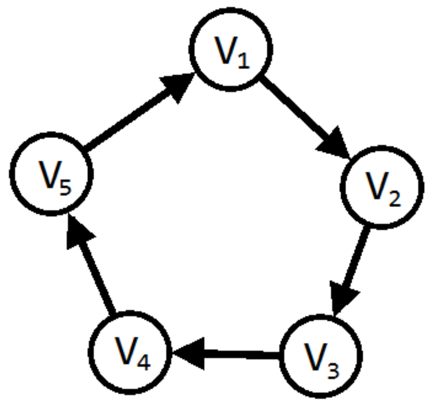
$\Rightarrow$)Ahora supongamos que f es fraccionalmente dominante y sea $v \in V(D)$.

Como D es una digráfica semicompleta, cualquier conjunto de vértices de D es un semicompleto, entonces $K = I^-[v]$ es un semicompleto. Ya que f es fraccionalmente dominante tenemos que:

$$1 \leq \sum_{u \in I^-[v]} f(u) = \sum_{u \in K} f(u).$$

Por tanto, f es fuertemente dominante. ■

Podemos observar que podriamos hacer una generalización de esta proposición, pues la escencia de su demostración radica en que las invecindades cerradas también son conjuntos semicompletos, pero esta característica no es única en las digráficas semicompletas. Como ejemplo tenemos cualquier ciclo propio de longitud estrictamente mayor a tres:

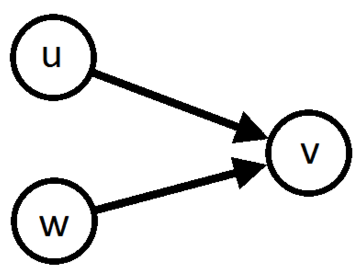


Ejemplo 2.3.1

Figura 2.6: γ_1

En el ciclo γ_1, las invecindades cerradas son también conjuntos semicompletos y por ello, toda función fraccionalmente dominantes también es fuertemente dominante, siendo que γ_1 no es una digráfica semicompleta.

Por tanto, para que en una digráfica exista una función fraccionalmente dominante que no sea fuertemente dominante, es necesario que exista una invecindad cerrada que no sea semicompleta. Esta condición no es suficiente:



Ejemplo 2.3.2

Figura 2.7: D_5

D_5 no es una digráfica semicompleta pues, $(u,w),(w,u) \notin F(D_5)$ y por ésto, $I^-[v] = \{u,v,w\} = V(D)$ no es un conjunto semicompleto. Pero $I^-[u] = \{u\}$ y $\{w\} = I^-[w]$. Si $f : V(D) \to [0,\infty)$ es fraccionalmente dominante en D_5, se debe cumplir que $1 \leq f(u)$ y $1 \leq f(w)$. En consecuencia de ésto, no hay restricción para el valor que toma $f(v)$, pues:

$$\sum_{z\in I^-[v]} f(z) = f(u) + f(v) + f(w) \geq 1 + 0 + 1 = 2 > 1.$$

De donde, f es fraccionalmente dominante. f también es fuertemente dominante pues $\{u\}$ es semicompleto de $I^-[u]$, con $f(u) \geq 1$ y $\{w\}$ es semicompleto de $I^-[w]$, con $f(w) \geq 1$. Además $\{u\}$ es un semicompleto de $I^-[v]$, tal que $f(u) \geq 1$. Así, en D_5, las funciones fraccionalmente dominantes son también fuertemente dominantes.

En conclusión, si D es una digráfica en la que todas las invecindades cerradas son conjuntos semicompletos, todas las funciones fraccionalmente dominantes coinciden con las fuertemente dominantes. Pero estas nociones no sólo coinciden en estas digráficas, tal es el caso de la digráfica D_5.

2.4. Núcleo fraccionado fuerte

Definición 2.4.1 *Sean D una digráfica y $f : V(D) \to [0, \infty)$ una función. Diremos que f es un **núcleo fraccionado** en D, si f es fraccionalmente independiente y fraccionalmente dominante.*

*Si f es fraccionalmente independiente y fuertemente dominante, diremos que f es un **núcleo fraccionado fuerte**.*

Por la Proposición 2.3.4, toda función fuertemente dominante es fraccionalmente dominante, entonces todo núcleo fraccionado fuerte, también es un núcleo fraccionado.

Ejemplo 2.4.1

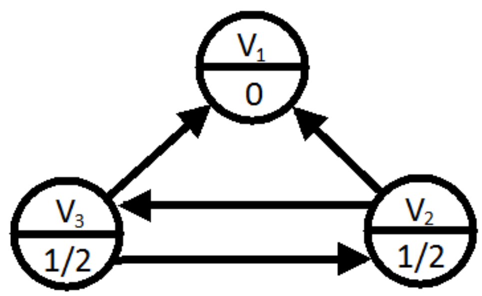


Figura 2.8: D_6

En la función, f, de la digráfica D_6, tenemos que:

$$\sum_{v \in V(D_6)} f(v) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

Entonces para cualquier conjunto, K, semicompleto de $V(D_6)$, se cumple:

$$\sum_{v \in K} f(v) \leq \sum_{v \in V(D_6)} f(v) = 1,$$

Por tanto, f es fraccionalmente independiente. Por otro lado, $K = \{v_2, v_3\}$ es un semicompleto contenido en todas las invecindades cerradas: $I^-[v_1]$, $I^-[v_2]$ e $I^-[v_3]$, cumpliendose que

$$\sum_{u \in K} f(u) = f(v_2) + f(v_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Por tanto, f es fuertemente dominante y por la Proposición 2.3.4, f también es fraccionalmente dominante. Así, f es núcleo fraccionado fuerte y también es núcleo fraccionado.

Afirmación 3 *Existe una digráfica D y una función $f : V(D) \to [0, \infty)$, tal que f es núcleo fraccionado pero f no es núcleo fraccionado fuerte en D.*

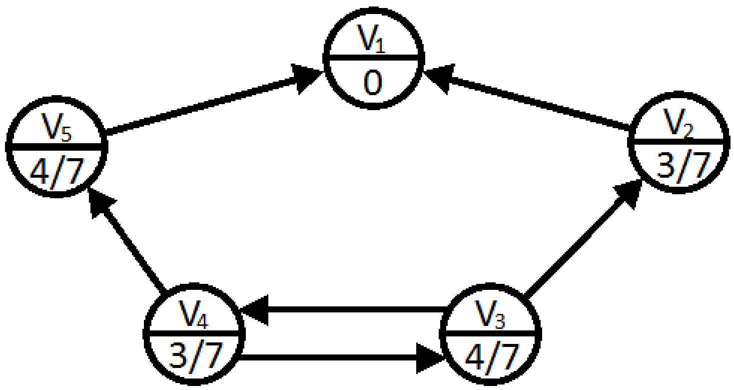


Figura 2.9: D_7

Por un lado, los semicompletos de $V(D_7)$ constan de, a lo más, dos vértices y la suma de las imagenes de éstos, a lo mas es uno, tal es el caso de $K_1 = \{v_4, v_5\}$, $K_2 = \{v_2, v_3\}$ y $K_3 = \{v_3, v_4\}$, pues para cada $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\sum_{u \in K_i} f(u) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$$

Así, f es fraccionalmente independiente. Además, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se cumple que

$$\sum_{u \in I^-[v_i]} f(u) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1.$$

Por tanto, f es fraccionalmente dominante y un núcleo fraccionado en D_7.

Por último, los únicos semicompletos de $I^-[v_1]$ son $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_5\}$, $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_1, v_5\}$, cuya suma de imágenes no supera a $4/7 < 1$, de donde, f no es fuertemente dominante y por consiguiente, f no es núcleo fraccionado fuerte en D_7.

De esta manera, la noción de núcleo fraccionado no es igual a núcleo fraccionado fuerte.

Teorema 2.4.1 *Sean D una digráfica y $N \subseteq V(D)$. Si N es núcleo de D, entonces la función característica de N, φ_N, es un núcleo fraccionado fuerte en D.*

Dem. Sea D una digráfica con un núcleo N.

Como N es un conjunto independiente y debido al Teorema 2.1.1, φ_N es fraccionalmente independiente.

Además, N es un conjunto dominante, por el Teorema 2.3.3, φ_N es fuertemente dominante.

Por lo tanto, φ_N es un núcleo fraccionado fuerte en D. ■

En toda digráfica, siempre existen conjuntos de vértices independientes y también conjuntos dominantes, sin embargo, no toda digráfica tiene un núcleo. Debido al teorema anterior, tener núcleo implica tener núcleo fraccionado fuerte. A continuación, veremos que hay digráficas con núcleo fraccionado fuerte que no tiene núcleo.

Ejemplo 2.4.2 *γ_2 es un ciclo propio y $f \equiv \frac{1}{2}$*

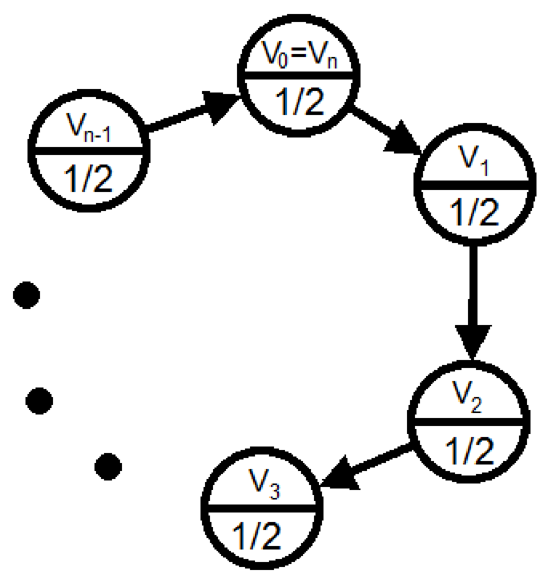


Figura 2.10: γ_2

Para todo $v_i \in V(\gamma_2)$, existe $K_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, conjunto semicompleto de $I^-[v_i]$, tal que

$$\sum_{u \in K} f(u) = f(v_i) + f(v_{i-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Por tanto f es fuertemente dominante.

Como γ_2 es un ciclo propio, sus semicompletos son de cardinalidad uno ó dos. Entonces, si K es un semicompleto de $V(\gamma_2)$, se tiene que:

$$\sum_{u \in K} f(u) = \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \qquad \sum_{u \in K} f(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

En cualquier caso, la suma es menor o igual a uno. Así, f es fraccionalmente independiente. Por lo tanto f es núcleo fraccionado fuerte y núcleo fraccionado.

Sabemos que ningún ciclo propio de longitud impar tiene núcleo. Por tanto, el ejemplo anterior muestra que existen digráficas con núcleos fraccionados que no tienen núcleo.

Como vimos en la Proposición 2.1.3, toda digráfica tiene funciones fraccionalmente independientes. Por la Proposición 2.3.1, toda digráfica tiene funciones fuertemente dominantes y por tanto fraccionalmente dominantes. Pero aún así, existen digráficas sin núcleos fraccionados.

Teorema 2.4.2 *Sea D una digráfica semicompleta. Si D contiene un ciclo hamiltoniano propio, entonces D no tiene núcleos fraccionados.*

Dem. Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que existe una digráfica, D, semicompleta, de orden p, que contiene un ciclo hamiltoniano propio $\gamma = (v_0, v_1, ..., v_{p-1}, v_p = v_0)$ y supongamos que D tiene un núcleo fraccionado f.

Sea $v_i \in V(D)$, un vértice arbitrario. Como f es fraccionalmente dominante:

$$\sum_{u \in I^-[v_i]} f(u) \geq 1$$

y como D es semicompleta, $I^-[v_i]$ es un semicompleto de $V(D)$. Además, f es fraccionalmente independiente, entonces para el semicompleto $I^-[v_i]$ se cumple que:

$$\sum_{u \in I^-[v_i]} f(u) \leq 1. \qquad \text{De donde:} \qquad \sum_{u \in I^-[v_i]} f(u) = 1.$$

Por otra parte, $V(D)$ también es un semicompleto de $V(D)$, como f es fraccionalmente independiente, $\sum_{w \in V(D)} f(w) \leq 1$. Entonces:

$$1 = \sum_{u \in I^-[v_i]} f(u) \leq \sum_{w \in V(D)} f(w) \leq 1$$

Por lo tanto:

$$1 = \sum_{w \in V(D)} f(w) = \sum_{u \in I^-[v_i]} f(u) + \sum_{u \notin I^-[v_i]} f(u) = 1 + \sum_{u \notin I^-[v_i]} f(u).$$

Lo cual implica que para todo $u \notin I^-[v_i]$, $f(u) = 0$. En particular, tenemos que $v_{i+1} \notin I^-[v_i]$, pues γ es un ciclo hamiltoniano propio y $(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$.

De donde, $f(v_{i+1}) = 0$, siendo v_i un vértice arbitrario de D. En otras palabras, $f \equiv 0$ y en consencuencia, f no es fraccionlamente dominante, obteniendo una contradicción.

Concluimos diciendo que D no tiene nucleos fraccionados. ■

El siguiente objetivo será mostrar que éste es el único obstáculo para los núcleos fraccionados. Es decir, que si los conjuntos semicompletos de una digráfica D no poseen ciclos propios, entonces D tiene núcleo fraccionado.

Para demostrar este hecho, utilizaremos el Teorema de Scarf que no está redactado en el lenguaje de la teoría de gráficas y para demostrar dicho teorema, necesitaremos dos lemas más, los cuales, manejan nuevos conceptos matemáticos apartados de la teoría redactada hasta el momento:

2.4.1. Teorema de Scarf

Definición 2.4.2

- Una **matriz**, A, de tamaño $m \times n$, es un arreglo bidimensional, rectangular, de números reales colocados en m renglones y n columnas, donde el lugar del i-ésimo renglón y la j-ésima columna está ocupado por el número a_{ij}. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Definimos la función **delta de Kronecker**, $\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, dada por:
  $$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$
  $\delta(i,j)$ lo escribiremos simplemente como δ_{ij}.

- Denotaremos por **[n]**, al conjunto de los primeros n números naturales. Es decir, $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

- Sea P un conjunto y $<$ una relación sobre P. Diremos que $(P, <)$ es un **orden lineal** en P, si $<$ cumple que:
  Para todo $x \in P$, $x \not< x$ ($<$ es irreflexivo).
  Para cada $x, y \in P$, tales que $x < y$, entonces $y \not< x$ ($<$ es asimétrico).
  Para cada $x, y, z \in P$, tales que $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$ ($<$ es transitivo).
  Y para todo $x, y \in P$, $x < y$ ó $y < x$ ($<$ es total o lineal).

Conjuntos subordinados

Definición 2.4.3 *Sean C una matriz de tamaño $m \times n$ y $J \subseteq [n]$. Decimos que la columna c^k ($k \in [n]$) de C es* ***J-subordinada por el índice i (****$i \in [m]$****)****, si para todo $j \in J$, $c_{ik} \leq c_{ij}$.*

*La columna c^k es J**-subordinada**, si es J-subordinada, para algún $i \in [m]$.*

Diremos que el conjunto J es ***subordinado*** *(para C), si para toda $k \in [n]$, la columna c^k es J-subordinada.*

Ejemplo 2.4.3 *Sea $J_1 = \{1, 3\}$ y C_1 una matriz de tamaño 3×4.*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La columna c^4 es J_1-subordinada por el segundo renglón, pues

$$c_{24} = 1 \leq c_{21} = 1 \quad \text{y} \quad c_{24} = 1 < c_{23} = 3.$$

Entonces c^4 es J-subordinada (índice 2).

Por otro lado, c^2 no es J_1-subordinada, ya que c^2 no es J_1-subordinada por ningún índice:

En el primer renglón: $c_{12} = 1 > c_{11} = 0$,

para el segundo renglón: $c_{22} = 5 > c_{21} = 1$

y en el tercer renglón, $c_{32} = 1 > c_{33} = 0$.

Por tanto, el conjunto J_1 no es subordinado para C_1, pues la columna c^2 no es J_1-subordinada.

Ejemplo 2.4.4 *Sea* $J_2 = \{2,3\}$ *y* C_2 *una matriz de tamaño* 3×3

$$C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La columna c^1 es $\{2,3\}$-subordinada para el índice 2, pues:

$$c_{21} = 1 < c_{22} = 2 \quad \text{y} \quad c_{21} = 1 < c_{23} = 4.$$

La columna c^2 es $\{2,3\}$-subordinada por el índice 1, pues:

$$c_{12} = 0 < c_{13} = 3.$$

La columna c^3 es $\{2,3\}$-subordinada por el índice 3, pues:

$$c_{33} = 1 < c_{32} = 3.$$

Por lo cual, el conjunto $J_2 = \{2,3\}$ es subordinado para C_2.

Proposición 2.4.3 *Si* $J' \subseteq J$ *y* J *es subordinado para una matriz* C*, se tiene que* J' *también es subordinado para* C*.*

Dem. Supongamos que existe una matriz C, de tamaño $m \times n$ para la cual, el conjunto J es subordinado y sea $J' \subseteq J$.

Por hipótesis, para cada $k \in [n]$, la columna c^k de C es J-subordinada, entonces existe $i_k \in [m]$, tal que:

$$\text{para todo } j \in J,\ c_{i_k k} \leq c_{i_k j}.$$

En particular, si $j' \in J' \subseteq J$, $c_{i_k k} \leq c_{i_k j'}$.

Por tanto J' es subordinado para C. ■

Lema 2.4.4 *Sea C una matriz de tamaño $m \times n$ $(m < n)$, tal que para cada $i, j \leq m$, $i \neq j$ y $k > m$, se tiene que $c_{ii} \leq c_{ik} \leq c_{ij}$ y los elementos de cada renglón son distintos. Sea J un conjunto subordinado para C, tal que $|J| = m-1$:*

- *Si $J \not\subseteq [m]$, entonces existen exactamente dos elementos $j^*, j'^* \in \big([n]-J\big)$, tales que $J \cup \{j^*\}$ y $J \cup \{j'^*\}$ son subordinados para C.*
- *Si $J \subset [m]$, entonces existe un único $j^* \in \big([n] - J\big)$, tal que $J \cup \{j^*\}$ es subordinado para C.*

Dem. Sea C una matriz que cumple las hipótesis del lema y J un conjunto subordinado para C de cardinalidad $m - 1$.

Para cada $i \in [m]$, existe $j_i \in J$, tal que $c_{ij_i} = \min\{c_{ik} : k \in J\}$, dicho número es único pues en cada renglón tiene elementos distintos. Consideremos la función $t : [m] \to J$ dada por $t(i) = j_i$. Entonces t está bien definida por la unicidad de j_i. Veamos que t es suprayectiva.

Sea $j \in J$ arbitrario, como la columna c^j es J-subordinada, existe $i_j \in [m]$, tal que para todo $k \in J$, $c_{i_j j} \leq c_{i_j k}$, es decir $c_{i_j,j} = \min\{c_{ik} : k \in J\}$. Entonces $t(i_j) = j$. Por lo tanto t es suprayectiva.

Como $|Dom[t]| = |[m]| = m > m-1 = |J| = |Im[t]|$, t no puede ser inyectiva, entonces existen $i_1, i_2 \in [m]$ $(i_1 \neq i_2)$ y $h \in J$, tales que $t(i_1) = h = t(i_2)$. Por tanto, para todo $k \in J$ $(k \neq h)$, existe un único i_k, tal que $t(i_k) = k$.

Consideremos al conjunto S_{i_1} de elementos $k \in ([n] - J)$, tal que c^k es J-subordinada únicamente con el índice i_1. Análogamente, S_{i_2} es el conjunto de números $k \in ([n] - J)$, donde c^k es J-subordinada sólo con el índice i_2.

Afirmación 4 *$J \cup \{j'\}$ $(j' \in ([n]-J))$ es subordinado para C si y sólo si $j' \in S_a$ $(a \in \{i_1, i_2\})$ y para todo $k \in S_a$, $c_{aj'} \geq c_{ak}$.*

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $a \in \{i_1, i_2\}$, tal que $S_a \neq \emptyset$. Sea $j' \in S_a$, el índice que cumple que $c_{aj'} = \max\{c_{ak} : k \in S_a\}$, dicho elemento es único pues los elementos del renglón número a son todos reales distintos y por definición de S_a, $j' \in ([n] - J)$. Demostraremos que $J \cup \{j'\}$ es subordinado para C. Sea $k \in [n]$:

Si $k \in S_a$, entonces c^k es J-subordinado con el índice a y por hipótesis $c_{ak} \leq c_{aj'}$. Por lo tanto c^k es $(J \cup \{j'\})$-subordinado por el índice a.

Si $k \notin S_a$, entonces c^k es J-subordinado por un índice $i \neq a$, es decir que para todo $j \in J$, $c_{ik} \leq c_{ij}$. Por otro lado, como $c^{j'}$ sólo se subordina con el índice $a \neq i$, existe $j \in J$ tal que $c_{ij'} > c_{ij} \geq c_{ik}$. Así c^k es $(J \cup \{j'\})$-subordinada por el índice $i \neq a$.

En cualquier caso, se tiene que $J \cup \{j'\}$ es subordinado.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $j' \in ([n] - J)$, tal que $J \cup \{j'\}$ es subordinado para C. Entonces, cada columna c^k (con $k \in (J \cup \{j'\})$), se subordina con un renglón distinto. Como la columna c^h es J-subordinada con los índices i_1 e i_2, entonces $c^{j'}$ es $(J \cup \{j'\})$-subordinada con el índice i_1 ó con el índice i_2.

Supongamos, que $c^{j'}$ es $(J \cup \{j'\})$-subordinada únicamente con el índice i_1. Por tanto $j' \in S_{i_1}$ y cumple que $c_{ij'} = \max\{c_{ik} : k \in S_{i_1}\}$ (de lo contrario, existiría $k' \in S_{i_1}$, tal que $c_{i_1 j'} < c_{i_1 k'}$, siendo i_1 el único índice con el cual c^k se podía subordinar, lo cual es una contradicción.)

Por tanto, queda demostrada la afirmación.

Debido a esta afirmación, para que J se pueda extender a un conjunto subordinado de cardinaldad m, debe cumplirse que $S_{i_1} \neq \emptyset$ o $S_{i_2} \neq \emptyset$:

- Consideremos el caso donde $J \not\subset [m]$. Afirmamos que $i_1, i_2 \notin J$:

  En caso contrario, supongamos que $i_1 \in J$. Por hipótesis tenemos que para cada $j \neq i_1$, $i_1, j \leq m < k$, entonces $c_{i_1 i_1} < c_{i_1 k} < c_{i_1 j}$, por lo cual $c_{i_1 i_1}$ es el elemento mínimo del i_1-ésimo renglón, esto implica que $t(i_1) = i_1$, pero sabemos que $t(i_1) = t(i_2) = i_1$, con $i_1 \neq i_2$.

  Sea $j \in (J - [m])$, entonces $i_2 \leq m < j$ $(i_1 \neq i_2)$, por hipótesis $c_{i_2 j} < c_{i_2 i_1}$, en otras palabras $t(i_2) \neq i_1$ contradiciendo lo antes dicho.

  Por lo tanto $i_1, i_2 \notin J$. Más aún, $i_a \in S_{i_a}$ (con $a \in \{1, 2\}$), pues con cualquier índice $i \neq i_a$ y toda $j \in (J - [m])$, $c_{i i_a} > c_{ij}$.

  De donde, $S_{i_1} \neq \emptyset$ y análogamente $S_{i_2} \neq \emptyset$.

  Sean $j^* \in S_{i_1}$ y $j'^* \in S_{i_2}$, los únicos elementos de $[n] - J$, tales que $c_{i_1 j^*} = \max\{c_{i_1 j} : j \in S_{i_1}\}$ y $c_{i_2 j'^*} = \max\{c_{i_2 j} : j \in S_{i_2}\}$. Así, por la Afirmación 4 $J \cup \{j^*\}$ y $J \cup \{j'^*\}$ son subordinados para C.

- Por último, veamos el caso donde $J \subset [m]$.

  Para toda columna $j \in J$, se cumple que $t(j) = j$ (ya que, por hipótesis,

c_{jj} es el elemento mínimo del j-ésimo renglón). Como $i_1, i_2 \in [m]$, al menos uno de ellos pertenece a J (pues $|J| = m - 1$ y $J \subset [m]$).

Digamos que $i_1 \in J$. Si $i_2 \in J$, se tendría que $i_1 = t(i_1) = t(i_2) = i_2$, con $i_1 \neq i_2$, lo cual sería una contradicción, entonces $\{i_2\} = [m] - J$.

Por otro lado, para toda $k \in ([n] - J)$, la columna c^k sólo se subordina con el índice $i_2 \in ([m] - K)$, pues para el i-ésimo renglón $(i \neq i_2)$, $i \in J$ y c_{ii} es el elemento mínimo de dicho renglón, anulando la posibilidad de que c^k se subordine. Por lo tanto $S_{i_2} = [n] - J \neq \emptyset$ y por ello, $S_{i_1} = \emptyset$.

Sea $j^* \in S_{i_2}$ el único índice que cumple que $c_{i_2 j^*} = \max\{c_{i_2 k} : k \in S_{i_2}\}$. Por la Afirmación 4, $J \cup \{j^*\}$ es subordinado para C.

Despues de concluir ambos casos, damos por demostrado el lema. ∎

Base factible

Definición 2.4.4 *Sean B una matriz de tamaño $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ un vector no negativo y $J \subseteq [n]$, tal que $|J| = m$. Decimos que J es* ***base factible*** *para la pareja (B, b), si para el conjunto de columnas $\{b^j : j \in J\}$, existen números no negativos, α_j, con $j \in J$, tales que $\sum_{j \in J} \alpha_j b^j = b$.*

Ejemplo 2.4.5 *Sean $b_1 = (2, 2, \frac{3}{2}) \in \mathbb{R}^3$, $J_3 = \{1, 3, 4\}$ y B_1 una matriz de tamaño 3×4.*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$J_3 = \{1, 3, 4\}$ es base factible para (B_1, b_1) pues existen números no negativos $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = \frac{1}{4}$, tales que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_1^1 + \alpha_3 b_1^3 + \alpha_4 b_1^4 &= \frac{1}{2}(2,1,0) + 1(1,1,1) + \frac{1}{4}(0,2,2) \\ &= \left(1+1, \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(2, 2, \frac{3}{2}\right) = b_1 \end{aligned}$$

Ası, J_3 es base factible para (B_1, b_1).

Ejemplo 2.4.6 *Sean B_2 una matriz de tamaño 2×3, $b_2 = (1, 3)$ y $J_4 = \{1, 2\}$.*

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $J_4 = \{1, 2\}$ no es base factible para la pareja (B_2, b_2), ya que si existieran dos números (no negativos) α_1 y α_2, para los cuales se cumple la definición, tendríamos que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_2^1 + \alpha_2 b_2^2 &= (1, 3) \\ \alpha_1(0, 0) + \alpha_2(1, 0) &= (1, 3) \\ (\alpha_2, 0) &= (1, 3) \end{aligned}$$

Absurdamente $0 = 3$. Por tanto, J_4 no es base factible para (B_2, b_2).

Lema 2.4.5 *Sean B una matriz de tamaño $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $J \subset [n]$ una base factible para (B, b). Si $k \in [n] - J$, entonces existe un único $j \in J$, tal que $\big(J \cup \{k\}\big) - \{j\}$ es base factible para (B, b).*

Este lema es un resultado estándar de programación lineal, que tiene su base en el algoritmo simplex. Por tratarse de un tema muy ajeno, no se verá su demostración en este trabajo.

Ahora utilizaremos el Lema 2.4.4 y Lema 2.4.5 para dar una prueba del Teorema de Scarf.

Scarf

Teorema 2.4.6 ([6]) *Sean $m < n$, B una matriz de tamaño $m \times n$, tal que, para cada $i, j \in [m]$, $b_{ij} = \delta_{ij}$, $b \in \mathbb{R}^m$, un vector no negativo y C una matriz de tamaño $m \times n$, tal que, para todo $i, j \in [m]$ $(i \neq j)$ y $k > m$, $c_{ii} < c_{ik} < c_{ij}$ y en cada renglón de C los elementos son distintos.*

Entonces existe $J \subset [n]$, de cardinalidad m, tal que:

1. *$B\alpha = b$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$, tal que $\alpha_j = 0$ siempre que $j \notin J$.*

2. *Para toda $k \in [n]$, existe $i \in [m]$, tal que para todo $j \in J$, $c_{ik} < c_{ij}$.*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{mm+1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & c_{1m+1} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} & c_{mm+1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Para demostrar este teorema basta mostrar que existe un conjunto $J \subset [n]$, tal que J que es base factible para (B, b) (lo cual, prueba la parte 1) y J es subordinado para C (lo cual desmuestra la parte 2).

Dem. Sean B y C matrices de tamaño $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ que cumplen las hipótesis del Teorema de Scarf.

Consideremos la gráfica bipartita G, con biparticíon $(\mathscr{F}, \mathscr{S})$, donde $\mathscr{F}$ es el conjunto de bases factibles (para (B, b)) que contienen al elemento 1 y $\mathscr{S}$ es el conjunto de todos los conjuntos subordinados (para C), de carinalidad m, que no contienen al elemento 1.

Por tanto, $V(G) = \mathscr{F} \cup \mathscr{S}$ y para todo $F \in \mathscr{F}$ y $S \in \mathscr{S}$, $(F, S) \in A(G)$ si y sólo si $F - S = \{1\}$.

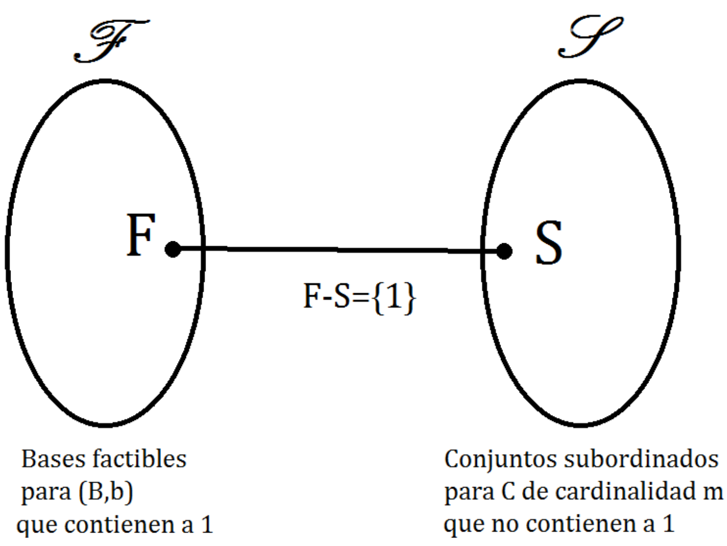


Figura 2.11: G

Analizaremos el grado de los vértices de G:

Consideremos un conjunto $F \in \mathscr{F}$.

- Si F no es subordinado para C, supongamos que $\delta(F) > 0$. Es decir, existe $S \in \mathscr{S}$ tal que $(F, S) \in A(D)$, es decir $F - S = \{1\}$.

  De donde, $F - \{1\} \subseteq S$ y S es subordinado para C. Por la Proposición 2.4.3, $F - \{1\}$ también es subordinado para C y es de cardinalidad $m - 1$. Aplicando el Lema 2.4.4, existen exactamente dos elementos $j^*, j'^* \in \big([n] - (F - \{1\})\big)$ tal que $S_{j^*} = (F - \{1\}) \cup \{j^*\}$ y $S_{j'^*} = (F - \{1\}) \cup \{j'^*\}$ son subordinados (para C).

  Por otro lado, tenemos que $j^* \neq 1$ y $j'^* \neq 1$, pues $(F - \{1\}) \cup \{1\} = F$ y F no es subordinado. Entonces $(F, S_{j^*}), (F, S_{j'^*}) \in A(G)$, esto implica que $S \in \{S_{j^*}, S_{j'^*}\}$ y por tanto $\delta(F) = 2$. Excepto el caso en el que $F - \{1\} \subseteq [m]$, donde el Lema 2.4.4 nos dice que $\delta(F) = 1$.

  Si $F - \{1\} \subseteq [m]$, entones $F \subseteq [m]$, pero F es de cardinalidad m, entonces $F = [m]$ y $\delta([m]) = 1$. Notemos que $[m]$ entra perfectamente en este caso, ya que las primeras m columnas de B forman la base canónica de $\mathbb{R}^m$, por lo cual, si $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$, entonces $\sum_{j=1}^{m} b^j b_j = b$ $\big([m]$ es base factible para $(B, b)\big)$. Además, para cualquier columna $k > m$ y cualquier índice $i \in [m]$, $c_{ii} < c_{ik}$, es decir, c^k no es $[m]$-subordinada $(k > m)$ $\big([m]$ no es subordinado para $C\big)$.

  En resumen, si $F \in \mathscr{F}$ y F no es subordinado, $\delta(F) = 0$ ó $\delta(F) = 2$ y $\delta([m]) = 1$.

- Si F es subordinado para C $(F \neq [m])$, entonces $F' = F - \{1\}$ también es subordinado para C y es de cardinalidad $m - 1$. Por el Lema 2.4.4, existen j^*, j'^* tales que $F' \cup \{j^*\}$ y $F' \cup \{j'^*\}$ son subordinados para C. Como dichos elementos son únicos y F es subordinado, $j^* = 1$ ó $j'^* = 1$, digamos $j^* = 1$ y $j'^* \neq 1$. Por tanto $F' \cup \{j'^*\} \in \mathscr{S}$ y es el único elemento que cumple que $(F, F' \cup \{j'^*\}) \in A(G)$, es decir, $\delta(F) = 1$.

  Por lo tanto, si $F \in \mathscr{F}$ es subordinado para C $(F \neq [m])$, $\delta(F) = 1$.

  Ahora consideremos un conjunto $S \in \mathscr{S}$.

- Si S no es base factible para (B, b) y $\delta(S) > 0$, entonces existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $(F, S) \in A(G)$, es decir, $F - S = \{1\}$. Como ambos conjuntos son de cardinalidad m, existe $s \in S$, tal que $S - F = \{s\}$. Por lo cual, F es base factible para (B, b) y $s \in ([n] - F)$.

  Aplicando el Lema 2.4.5, existe un único elemento $f \in F$ $(f \neq s)$, tal que $F' = (F \cup \{s\}) - \{f\}$ es base factible para (B, b). Además $f \neq 1$ (pues si $f = 1$, entonces $F' = (F \cup \{s\}) - \{1\} = S$ y S no es base factible) y $F' - S = \big((F \cup \{s\}) - \{f\}\big) - S = F - S = \{1\}$, es decir, $(F', S) \in A(G)$ y $F', F \in \mathscr{F}$ son los únicos adyacentes a S.

  Por lo tanto, si $S \in \mathscr{S}$ no es base factible para (B, b), $\delta(S) = 0$ ó $\delta(S) = 2$.

- Si S es base factible para (B, b). Como $1 \notin S$, aplicando el Lema 2.4.5, existe un único $s \in S$, tal que $S' = (S \cup \{1\}) - \{s\}$ es base factible para (B, b), es decir, $S' \in \mathscr{F}$ y $S' - S = \big((S \cup \{1\}) - \{s\}\big) - S = \{1\}$ $\big((S', S) \in A(G)\big)$.

  De donde, para cada $S \in \mathscr{S}$, base factible para (B, b), $\delta(S) = 1$.

En conclusión, si existe un conjunto que es (simultaneamente) subordinado para C y base factible para (B, b), dicho vértice de G tiene grado uno. Además, para todo $v \in V(G)$, se tiene que $\delta(v) \leq 2$.

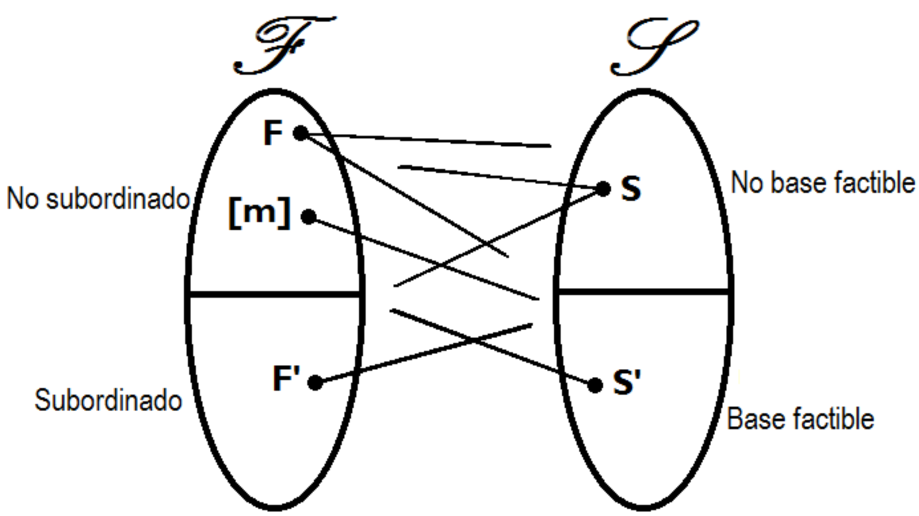


Figura 2.12: Grados en G

Consideremos a $T = ([m] = A_0, A_1, ..., A_r)$, la trayectoria (en G) de longitud máxima que inicia en $[m]$. Como $\delta([m]) = 1$, $A_r \neq [m]$.

Afirmación 5 *$J = A_r$ es subordinado para C y base factible para (B, b).*

Supongamos (por contradicción) que A_r no es subordinado para C ó no es base factible para (B, b), entonces $\delta(A_r) \neq 1$. Como $(A_{r-1}, A_r) \in A(G)$, $\delta(A_r) \neq 0$. Por tanto, $\delta(A_r) = 2$, entonces existe $A \in V(G)$, $A \neq A_{r-1}$, tal que $(A_r, A) \in A(G)$.

Si para todo $i \in \{1, ..., r-2\}$, $A \neq A_i$, entones $T' = ([m] = A_0, A_1, ..., A_r, A)$ es una trayectoria que inicia en $[m]$, tal que $l(T') = r + 1 > r = l(T)$, contradiciendo el hecho de que T es de longitud máxima.

Si existe $i \in \{1, 2, ..., r-2\}$, tal que $A = A_i$, entonces A_{i-1},A_{i+1} y A_r, son adyacentes a A_i, es decir, $\delta(A_i) \geq 3$, lo cual contradice el grado máximo de G.

En cualquier caso llegamos a una contradicción que surge de suponer que la afirmación es falsa. Por lo tanto, $J = A_r$ (base factible para C y subordinado para (B, b)) satisface las partes 1 y 2 del Teorema de Scarf, concluyendo la demostración del mismo. ■

Ejemplo 2.4.7 *Ejemplo del Teorema 2.4.6:*

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_3 = (0, 1)$$

Las matrices B_3, C_3 y el vector b_3 satisfacen las hipótesis del Teorema 2.4.6. Al construir la gráfica bipartita, G_3, obtenemos lo siguiente:

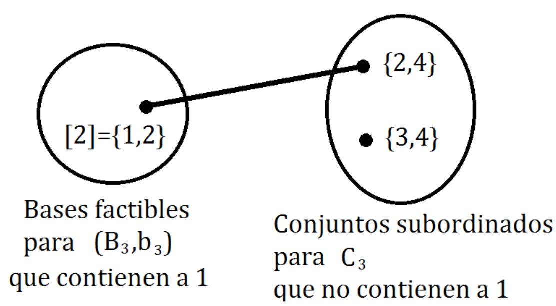


Figura 2.13: G_3

Los conjuntos $\{1,3\}$ y $\{1,4\}$ no son bases factibles para (B_3, b_3), ya que la definición requiere que los escalares, α_1, α_3 y α_4, sean no negativos. Dado que, la primera entrada de b_3 es cero, entonces debe suceder que $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, lo cual no es posible pues, la segunda entrada de b_3 no es cero.

Además, el conjunto $\{2,3\}$ no es subordinado para C_3, puesto que la cuarta columna de C_3 no se subordina con ningún renglón: $c_{14} > c_{13}$ y $c_{24} > c_{22}$.

Por lo tanto, la trayectoria de longitud máxima que comienza en $[2] = \{1,2\}$ es $T = ([2], \{2,4\})$. Por tanto, $\{2,4\}$ es base factible para (B_3, b_3) y es subordinado para C_3.

Una vez demostrado el Teorema 2.4.6, regresamos al objetivo (antes mencionado) de probar que el único obstáculo para los núcleos fraccionados son los semicompletos con ciclos propios.

Digráficas clan-acíclicas.

Definición 2.4.5 *Una digráfica D es llamada **clan-acíclica**, si ningún semicompleto de $V(D)$ contiene ciclos propios.*

Lema 2.4.7 *Toda digráfica, D, semicompleta y clan-acíclica contiene un torneo transitivo (sin ciclos) generador.*

Dem. Supongamos (por contradicción) que existe una digráfica, H, semicompleta y clan-acíclica, tal que cualquier torneo generador de H no es transitivo.

Como estamos suponiendo que existe al menos una digráfica con estas características, podemos considerar una digráfica, D, semicompleta clan-acíclica sin torneos transitivos generadores, con el mínimo número de flechas simétricas.

Sea γ un ciclo arbitrario de D, dicho ciclo existe pues, de no ser así, cualquier torneo generador de D, sería un torneo transitivo. Como D es clan-acíclica, γ tiene al menos una flecha simétrica, digamos (u, v), por lo cual γ se puede expresar como: $\gamma = (u = x_o, v = x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = u)$.

Consideremos la subdigráfica $D' = D - \{(u, v)\}$, D' no contiene torneos transitivos generadores (de existir uno, éste también sería un torneo transitivo generador de D, lo cual no es posible). Por tanto, D' no puede ser clan-acíclica, en caso de serlo, sería una digráfica semicompleta clan-acíclica sin torneos transitivos generadores, con una flecha simétrica menos que D, contradiciendo la minimalidad de D.

Como D' no es clan-acíclica, D' contiene un ciclo propio, λ, que contiene a la flecha (v, u), $\lambda = (v = y_0, u = y_1, y_2, ..., y_{m-1}, y_m = v)$. Consideremos el camino cerrado

$$\mathscr{C} = (v = x_1, x_2, ..., x_n = u = y_1, y_2, ..., y_m = v) = (v, \gamma, u) \cup (u, \lambda, v).$$

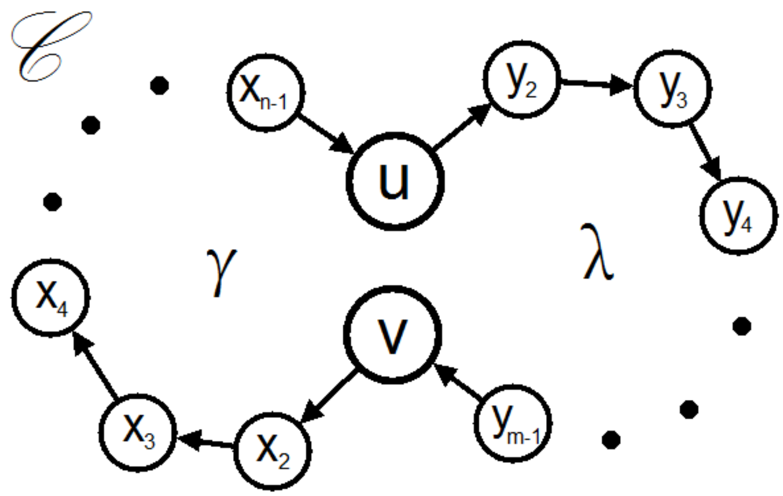


Figura 2.14: Camino cerrado $\mathscr{C}$

Por el Lema 1.3.3, $\mathscr{C}$ contiene un ciclo, κ, dicho ciclo es distinto a γ y a λ pues $(u, v), (v, u) \notin F(\kappa)$. Como κ es un ciclo en D, κ, contiene una flecha simétrica $((x, y) \neq (u, v))$, la cual, también pertenece a las flechas de γ, ya que no puede pertenecer a λ por ser un ciclo propio en D'.

Así, $(u, v), (x, y) \in F(\gamma)$, siendo éstas, flechas simétricas distintas. Como γ fue un ciclo arbitrario de D, hemos probado que todo ciclo en D contiene al menos dos flechas simétricas, ésto se cumple particularmente para λ. Pero λ es un ciclo propio en $D' = D - \{(u, v)\}$, por tanto λ tiene, a lo más, una flecha simétrica en D, generándose una contradicción que surgió de suponer que existía una digráfica semicompleta clan-acíclica sin torneos transitivos generadores.

Por lo tanto, hemos demostrado este lema. ■

Teorema 2.4.8 *Toda digráfica clan-acíclica (donde ningún semicompleto contiene ciclos propios) tiene un núcleo fraccionado fuerte.*

Dem. Sea D una digráfica, clan-acíclica y $K_1, K_2, ..., K_m$ una enumeración de todos los semicompletos máximos por contención de $V(D)$.

Formemos una nueva digráfica:
$D' = \Big(V(D) \cup \{z_i : i \in [m]\}, F(D) \cup \{(u, z_i) : u \in K_i\}\Big)$.

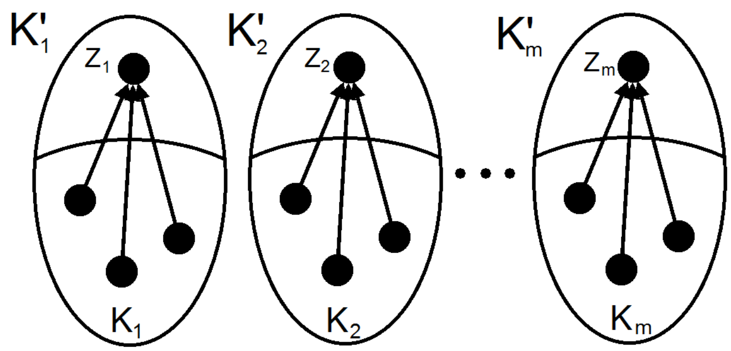


Figura 2.15: D'

Tenemos que $K' = K_i \cup \{z_i\}$ es un semicompleto máximo por contención en D' y $D'[K']$ es clan-acíclica (pues $\delta^+(z_i) = 0$, por tanto no generan nuevos ciclos). Por el Lema 2.4.7, $D'[K']$ contiene un torneo transitivo generador T_i.

En $V(T_i)$ definimos una relación, $<_i$, que cumple que para cada $u, v \in V(T_i)$, $v <_i u$ si y sólo si $(u, v) \in F(T_i)$.

Afirmación 6 *$<_i$ es un orden lineal en $V(T_i)$*

- Para todo $u \in V(T_i)$, $(u, u) \notin F(T_i)$ (pues las flechas son parejas ordenadas de distintos elementos de $V(T_i)$). Así, $u \not<_i u$ (irreflexivo).
- Para cada $u, v \in V(T_i)$, tales que $(u, v) \in F(T_i)$, entonces $(v, u) \notin F(T_i)$ (pues T_i es un torneo). Por tanto, si $v <_i u$, entonces $u \not<_i v$ (asimétrico).
- Para cada $u, v, w \in V(T_i)$, tales que $(u, w), (w, v) \in F(T_i)$, debe suceder que $(u, v) \in F(T_i)$ (pues T_i es un torneo transitivo). Es decir, si $v <_i w$ y $w <_i u$ entonces $v <_i u$ (transitivo).

- Para todo $u, v \in V(T_i)$, $(u, v) \in F(T_i)$ ó $(v, u) \in F(T_i)$ (pues T_i es un torneo). De donde, $u <_i v$ ó $v <_i u$ (total).

Por lo tanto $<_i$ es un orden lineal en $V(T_i)$. Así, los vértices de T_i pueden ser enlistados de acuerdo a su orden, $x_0 = z_i$, x_1,..., x_s, donde $(x_j, x_k) \in F(D')$ si y sólo si $k <_i j$.

Sea $w_1 = z_1$, $w_2 = z_2$,..., $w_m = z_m$, w_{m+1},..., $w_{m+p} = w_n$ una nueva enumeración de los vértices de D'. Ahora, construiremos dos matrices, B y C de tamaño $m \times n$ a partir de los n vértices $(w_1, ..., w_n)$ y los m torneos $(T_1, ..., T_m)$:

Definimos, C, matriz de $m \times n$, de la siguiente manera. Para cada $i \in [m]$ y $j \in [n]$, tal que $w_j \in V(T_i)$, c_{ij} será la posición de w_j en T_i de acuerdo al orden $<_i$. Si $w_j \notin T_i$, $c_{ij} = 2r - j$, para algún $r > n$ (r fijo).

También, definimos B, la matriz $(m \times n)$ de incidencias de los torneos, es decir, $b_{ij} = 1$ si $w_j \in V(T_i)$ y $b_{ij} = 0$ si $w_j \notin V(T_i)$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2r-2 & \cdots & 2r-m & c_{1m+1} & \cdots & c_{1n} \\ 2r-1 & 1 & \cdots & 2r-m & c_{2m+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2r-1 & 2r-2 & \cdots & 1 & c_{mm+1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{mm+1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Sea $b = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$.

Afirmación 7 *Las matrices B, C y b cumplen las hipótesis del Teorema 2.4.6.*

- Tenemos que $n = |V(D')| = |V(D) \cup \{z_i : i \in [m]\}| \geq 1 + m > m$, entonces $m < n$.

- En B, tenemos que $z_j \in V(T_i)$ si y sólo si $i = j$, entonces si $i, j \in [m]$, $b_{ii} = 1$ y $b_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Por lo tanto, si $i, j \in [m]$, entonces $b_{ij} = \delta_{ij}$.

- En C, como $z_i \in V(T_i)$ y z_i tiene la posición cero en T_i, tenemos que $c_{ii} = 0$. Si $i \neq j$, con $i, j \in [m]$, entonces $z_j \notin V(T_i)$, por tanto $c_{ij} = 2r - j$, de donde, $0 = c_{ii} < c_{ij} = 2r - j$. Sea $k > m$:

  Si $w_k \in V(T_i)$, entonces c_{ik} denota la posición de w_k en T_i, dicha posición es menor o igual que el orden de T_i, entonces

$c_{ik} \leq |V(T_i)| \leq |V(D)| < n < r < 2r - j = c_{ij}$ (pues $j < n < r$), siempre que, $i \neq j$, $i, j \in [m]$ y $k > m$.

Si $w_k \notin V(T_i)$, entonces $c_{ik} = 2r - k$. Como $k > m > j$, entonces $-k < -j$, así, $c_{ik} = 2r - k < 2r - j = c_{ij}$, con $i \neq j$, $i, j \in [m]$ y $k > m$.

En cualquier caso tenemos que, para todo $i \neq j$, $i, j \in [m]$ y $k > m$, $c_{ii} < c_{ik} < c_{ij}$.

- Sea $i \in [m]$ y $j, k \in [n]$ ($j \neq k$) arbitrarios.

  Si $w_j, w_k \in V(T_i)$, entonces su posición de acuerdo al orden $<_i$ es distinto. Por tanto $c_{ij} \neq c_{ik}$.

  Si $w_j \in V(T_i)$ y $w_k \notin V(T_i)$, $c_{ij} = p_j < |V(T_i)| \leq n < 2r - k = c_{ik}$.

  Por último, si $w_j, w_k \notin V(T_i)$, $c_{ij} = 2r - j \neq 2r - k = c_{ik}$.

  En todos los casos se tiene que $c_{ij} \neq c_{ik}$. Por tanto en cada renglón de C, los elementos son distintos.

Así, se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4.6. Por lo tanto, existe un conjunto, $J \subseteq [n]$ y $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ tal que J es subordinado para C y J es base factible para (B, b), además $\alpha_k = 0$ si $k \notin J$.

A partir de $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$, consideremos la función $f : V(D) \to [0, \infty)$, tal que para cada $j \in \{m+1, m+2, ..., n\}$, $f(w_j) = \alpha_j$. Para terminar, demostraremos que f es la función buscada.

Afirmación 8 *f es un núcleo fraccionado fuerte en D*

Primero, mostraremos que f es fraccionalmente independiente. Sea K un semicompleto de D. Entonces existe $i \in [m]$, tal que $K \subseteq K_i$. Como J es base factible para (B, b), tenemos que

$$B\alpha = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}\alpha_j, \sum_{j=1}^{n} b_{2j}\alpha_j, ..., \sum_{j=1}^{n} b_{mj}\alpha_j \right) = (1, 1, ..., 1) = b.$$

En particular, para el i-ésimo renglón de B se cumple que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j = 1$.

Si $j \notin J$, entonces $\alpha_j = 0$, además, si $w_j \notin V(T_i)$, $b_{ij} = 0$. Por otro lado si $w_j \in V(T_i) = V(K_i)$, $b_{ij} = 1$ y si $j \in J$, $\alpha_j = f(w_j)$. Sustituyendo estas igualdades tenemos:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j = \sum_{\substack{j\in J \\ w_j\in V(T_i)}} f(w_j) = \sum_{u\in K_i} f(u) \geq \sum_{u\in K} f(u).$$

Por lo tanto, f es fraccionalmente independiente en D. Por último demostraremos que f es fuertemente dominante en D. Sea $w_k \in V(D)$, es decir, $k > m$.

Como J es subordinado para C, existe $i \in [m]$, tal que para toda $j \in J$, $c_{ik} < c_{ij}$. Consideramos el conjunto $T_i^J = \{w_j \in V(T_i) : j \in J\}$.

Si $T_i^J = \emptyset$, entonces para todo $j \in J$, $w_j \notin V(T_i)$ y por tanto $b_{ij} = 0$, además para toda $k \notin J$ $\alpha_k = 0$, . Como J es base factible para (B, b) tenemos que:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j = \sum_{j\in J} b_{ij}\alpha_j + \sum_{j\in([n]-J)} b_{ij}\alpha_j = 0 + 0 = 0$$

Lo cual $(1 = 0)$ es un absurdo. Por lo tanto $T_i^J \neq \emptyset$. Sea $w_j \in T_i^J$.

Como c_{ij} denota la posición de w_j en T_i y $c_{ik} < c_{ij}$, se tiene que $w_k \in V(T_i)$ y $w_k <_i w_j$, es decir, $(w_j, w_k) \in F(D)$. En otras palabras, $T_i^J \subseteq I^-[w_k]$ y T_i^J es un semicompleto de D al ser un subconjunto de un semicompleto. De donde:

$$\sum_{u\in T_i^J} f(u) = \sum_{\substack{w_j\in V(T_i) \\ j\in J}} \alpha_j = \sum_{\substack{w_j\in V(T_i) \\ j\in J}} b_{ij}\alpha_j = \sum_{j\in J} b_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j = 1.$$

Es decir, para todo $w_k \in V(D)$, existe, T_i^J, un semicompleto de $I^-[w_k]$, tal que $\sum_{u\in T_i^J} f(u) = 1$. Por lo tanto, f es fuertemente dominante en D.

Concluimos la prueba, pues f es un núcleo fraccionado fuerte en D. ■

Ejemplo 2.4.8 *Ejemplo del Teorema 2.4.8*

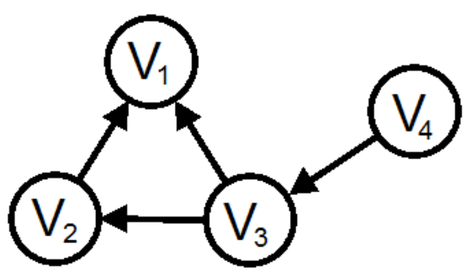


Figura 2.16: D_8

La digráfica D_8 es clan-acíclica y tiene dos semicompletos máximos por contención, $K_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $K_2 = \{v_3, v_4\}$, los cuales ya son torneos transitivos. Formamos la digráfica D'_8, agregando los vértices z_1 y z_2 con las respectivas flechas de los vértices de K_1 a z_1 y las flechas de K_2 a z_2, obteniendo los semicompletos $K'_1 = \{z_1, v_1, v_2, v_3\}$ y $K'_2 = \{z_2, v_3, v_4\}$.

Damos una nueva enumeración de los vértices de D'_8:

$$w_1 = z_1,\ w_2 = z_2,\ w_3 = v_1,\ w_4 = v_2,\ w_5 = v_3 \text{ y } w_6 = v_4.$$

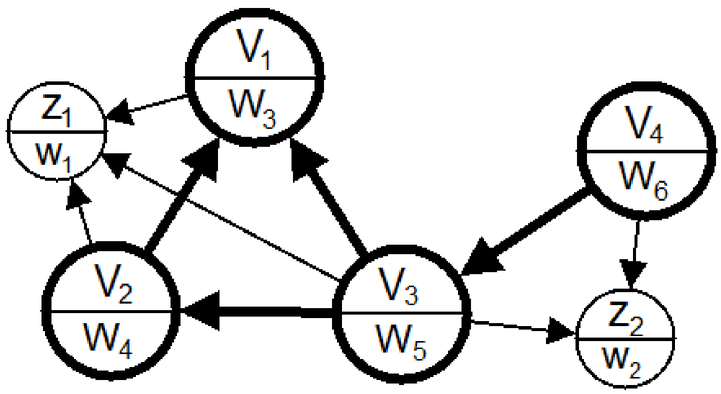


Figura 2.17: D'_8

Construimos las matrices C_4 y B_4 de tamaño 2×6 con $r = 7$:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 13 & 0 & 11 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_4 = (1, 1)$$

Por el Teorema 2.4.6, $J = \{4, 6\}$ es subordinado para C_4 y base factible para (B_4, b_4) con $\alpha_4 = \alpha_6 = 1$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$.

Definimos $f : V(D_8) \to [0, \infty)$, dada por:

$$f(v) = \begin{cases} 1 & si \quad v \in \{4, 6\} \\ \\ 0 & si \quad v \in \{1, 2, 3, 5\} \end{cases}$$

Notemos que $f = \varphi_{\{v_2,v_4\}}$ y $\{v_2, v_4\}$ es núcleo de D_8. Por el Teorema 2.4.1 f es núcleo fraccionado fuerte en D_{10}.

El recíproco del Teorema 2.4.8 no es verdadero, la siguiente digráfica es una muestra de que aún teniendo semicompletos con ciclos propios, es posible tener núcleo fraccionado fuerte.

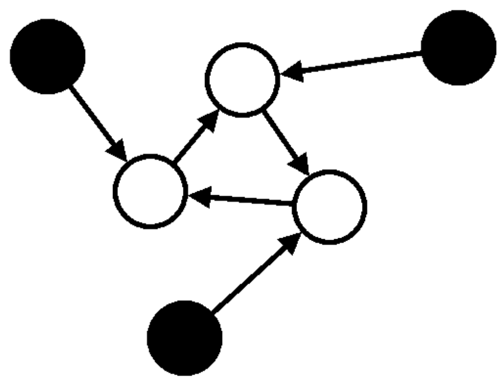


Figura 2.18: D_9

Los vértices blancos forman un ciclo propio de longitud 3 y son un conjunto semicompleto, por lo cual, D_9 no es clan-acíclica. Además, el conjunto de los vértices negros es un núcleo de D_9. Así, la función característica de dicho conjunto, es un núcleo fraccionado fuerte, mostrando que D_9 es un contraejemplo para el recíproco del Teorema 2.4.8.

2.5. Gráficas perfectas

En esta sección expondremos una aplicación de los núcleos fraccionados en una clase muy importante y estudiada de gráficas, las gráficas perfectas.

Es posible hacer una conexión entre gráficas y digráficas, pues para cada gráfica G, podemos considerar una orientación de G, que consiste en sustituir cada arista por una flecha irreversible ó sustituirla por una flecha simétrica, el resultado de esta sustitución es una digráfica, D_G.

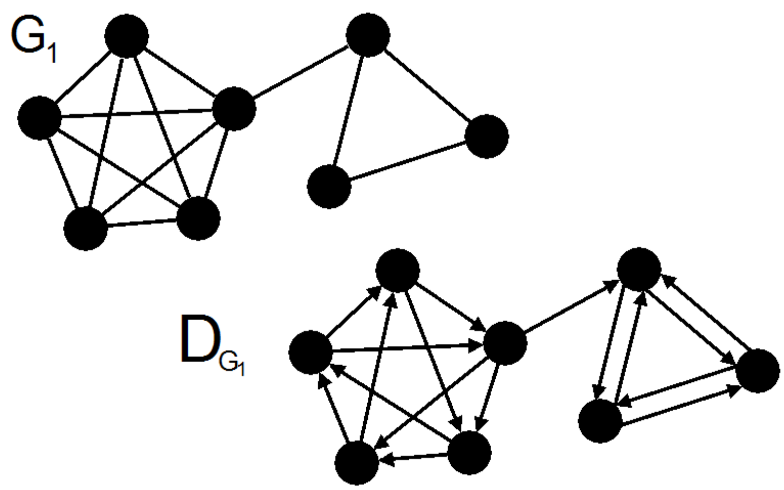


Figura 2.19: Orientación de G_1

Definición 2.5.1 *Sea G una gráfica y $[m]$ un conjunto de colores ($m \in \mathbb{N}$).*

- *Una m-**coloración de** $V(G)$ es una función $f : V(G) \to [m]$.*
- *Una m-**coloración propia** de $V(G)$ es una función $f : V(G) \to [m]$ suprayectiva, tal que para cualesquiera $u, v \in V(G)$, si u es adyacente a v, entonces $f(u) \neq f(v)$.*

  En otras palabras, para todo color $i \in [m]$, $f^{-1}\big[\{i\}\big] \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente.

*El **número cromático** de G, denotado por $\chi(G) = m$, es el mínimo natural, tal que existe una m-coloración propia de $V(G)$.*

Ejemplo 2.5.1

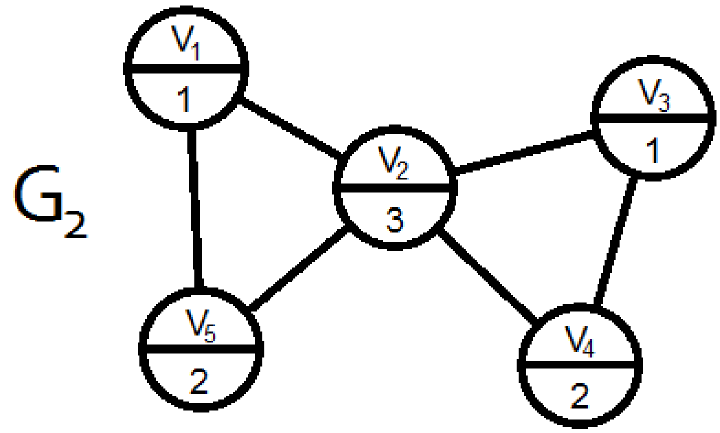


Figura 2.20: 3-coloración de G_2

G_2 está 3-coloreada propiamente ya que

$$f^{-1}\big[\{1\}\big] = \{v_1, v_3\}, \quad f^{-1}\big[\{2\}\big] = \{v_4, v_5\} \quad \text{y} \quad f^{-1}\big[\{3\}\big] = \{v_2\}$$

son conjuntos independientes, por tanto $\chi(G_2) \leq 3$. Además, $\{v_1, v_2, v_5\}$ es un clan de G_2, por tanto, dichos vértices deben ser coloreados de distinta manera para obtener una coloración propia. Así, $\chi(G_2) = 3$.

Teorema 2.5.1 *Para toda gráfica G se cumple que $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$.*
Donde $\alpha(G) = \text{máx}\big\{|I| : I \subseteq V(G) \text{ es independiente}\big\}$.

Dem. Sea G una gráfica y f una m-coloración propia de $V(G)$ ($m = \chi(G)$).

Para cada color, $i \in [m]$, $f^{-1}\big[\{i\}\big] = \{v \in V(G) : f(v) = i\} \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente, entonces $\big|f^{-1}\big[\{i\}\big]\big| \leq \alpha(G)$. Por tanto:

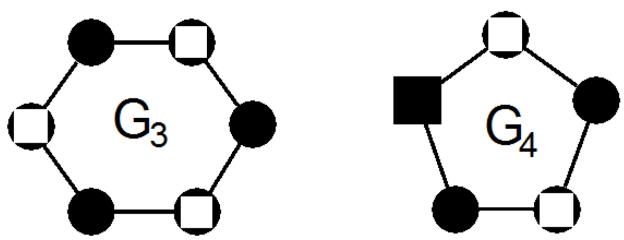
$$\begin{aligned} |V(G)| &= \left|\bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}\big[\{i\}\big]\right| = \sum_{i=1}^{m} \big|f^{-1}\big[\{i\}\big]\big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha(G) = m \cdot \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G) \end{aligned}$$

Probando que se cumple la desigualdad. ■

Definición 2.5.2 *Sea G una gráfica, decimos que G es una* ***gráfica perfecta*** *si para toda subgráfica inducida, G', de G, cumple que $\chi(G') = \omega(G')$.*

Donde $\omega(G') = \text{máx}\{|K| : K \text{ es un clan de } G'\}$.

Observemos que en toda gráfica G, $\omega(G) \leq \chi(G)$ pues al menos se necesitan $\omega(G)$ colores distintos para colorear un clan de cardinalidad máxima.



Ejemplo 2.5.2

Figura 2.21: G_3, gráfica perfecta y G_4, no perfecta

Notemos que $\chi(G_3) = 2$ y los clanes de G_3 son de cardinalidad uno o dos. Por tanto, la coloración de una subgráfica inducida, G_3', depende de su número de clan $\big(\omega(G_3')\big)$.

Si $\omega(G_3') = 1$, entonces $A(G_3') = \emptyset$, por lo cual $\chi(G_3') = 1 = \omega(G_3')$.

Si $\omega(G_3') = 2$, entonces no es posible colorearla con un sólo color. Como $\chi(G_3) = 2$, existe una 2-coloración propia de G_3'. Así
$\chi(G_3') = 2 = \omega(G_3')$.

Por tanto, G_3 es una gráfica perfecta.

Por otro lado, G_4 no es una gráfica perfecta, pues $\chi(G_4) = 3 \neq 2 = \omega(G_4)$.

Definición 2.5.3 *Sea G una gráfica. Definimos el complemento de G, como la gráfica G^c, tal que $V(G^c) = V(G)$ y para cada $u, v \in V(G^c)$, u es adyacente a v en G^c si y sólo si u no es adyacente a v en G.*

Corolario 2.5.2 *Sea G una gráfica y G^c su gráfica complemento. Si G es una gráfica perfecta, entonces $\omega(G) \cdot \omega(G^c) \geq |V(G)|$.*

Dem. Sea G una gráfica perfecta. En particular, tenemos que $\chi(G) = \omega(G)$.

Observemos que $\omega(G^c) = \alpha(G)$ (pues todo clan de G^c es un conjunto independiente en G).

Por el Teorema 2.5.1, $\chi(G)\cdot\alpha(G) \geq |V(G)|$, sustituyendo las igualdades encontradas, tenemos que:

$$\omega(G)\cdot\omega(G^c) = \chi(G)\cdot\alpha(G) \geq |V(G)|$$

Por tanto, el corolario es cierto. ■

Usando los núcleos fraccionados, probaremos que toda orientación clan-acíclica de una gráfica perfecta tiene núcleo. Para ésto, aún necesitamos más heramientas importantes, una de ellas es la sustitución:

Definición 2.5.4 *Sean G y H, dos gráficas ajenas por vértices y $v \in V(G)$. Definimos* ***la sustitución de*** *v* ***por*** *H, como la grafica, G_v^H, tal que*

$V(G_v^H) = V(G-v) \cup V(H)$ *y*

$A(G_v^H) = A(G-v) \cup A(H) \cup \big\{\{h,u\} : h \in V(H)$ *y* $\{v,u\} \in A(G)\big\}.$

Ejemplo 2.5.3

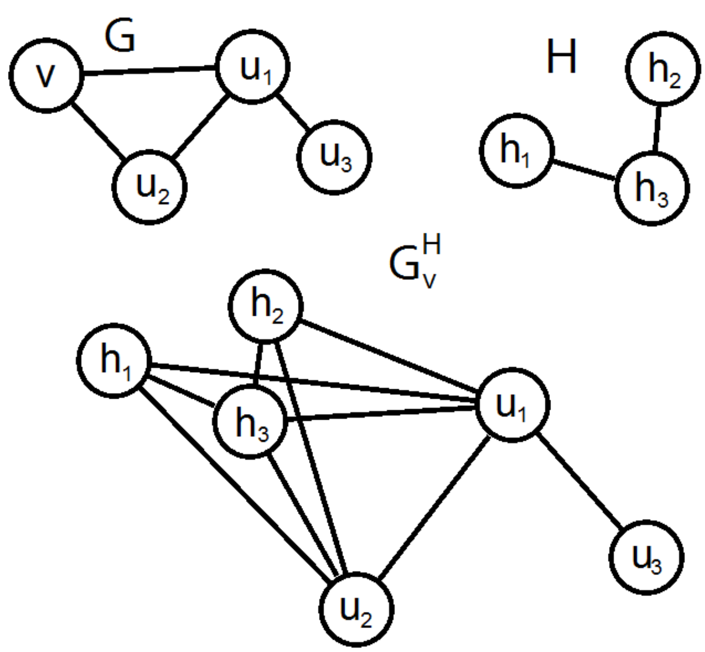


Figura 2.22: Sustitución de v por H, G_v^h

Teorema 2.5.3 *Sean G y H dos gráficas ajenas por vértices, tal que $A(H) = \emptyset$ y $v \in V(G)$. Si G es una gráfica perfecta, entonces la sustitución de v por H, G_v^H, es una gráfica perfecta.*

Dem. Sean G una gráfica perfecta, H una gráfica, tal que $V(H) \cap V(G) = \emptyset$, $V(H)$ es un conjunto independiente y sea $v \in V(G)$, demostraremos que G_v^H es una gráfica perfecta.

Sea G' una subgráfica inducida de G_v^H.

Si G' es subgráfica inducida de G, como G es una gráfica perfecta, entonces $\omega(G') = \chi(G')$.

Supongamos que G' no es subgráfica inducida de G, entonces existe H', subgráfica inducida de H, tal que $G' = G_v^{H'}$, donde $A(H') = \emptyset$. Sabemos que $\omega(G_v^{H'}) \leq \chi(G_v^{H'})$, veamos que $V(G_v^{H'})$ se puede colorear propiamente con $\omega(G_v^{H'})$ colores.

Sea $f : V(G) \to [\chi(G)]$ una $\chi(G)$-coloración propia de $V(G)$, definimos la función $f_1 : V(G_v^{H'}) \to [\chi(G)]$ de la siguiente manera:

$$f_1(u) = \begin{cases} f(u) & si \quad u \in V(G - v) \\ \\ f(v) & si \quad u \in V(H') \end{cases}$$

Entonces f_1 es una $\chi(G)$-coloración propia de $V(G_v^{H'})$, pues f es una $\chi(G)$-coloración propia de $V(G)$ y $V(H')$ es un conjunto independiente cuyos vértices tiene el color $f(v)$. Por lo tanto, $\chi(G_v^{H'}) \leq \chi(G) = \omega(G)$ pues G es una gráfica perfecta. Por último, veamos que $\omega(G) = \omega(G_v^{H'})$.

Sea K un clan de cardinalidad máxima de G ($|K| = \omega(G)$).

Si $v \in K$, entonces para todo $h \in V(H')$, $K' = (K - \{v\}) \cup \{h\}$ es un clan de cardinalidad máxima de $G_v^{H'}$ (pues $V(H')$ es un conjunto independiente y no aumenta la cardinalidad de los clanes de G), por lo cual

$$\omega(G_v^{H'}) = |K'| = |K| = \omega(G).$$

Si $v \notin K$, entonces K es un clan de cardinalidad máxima de $G_v^{H'}$. En cualquier caso, $\omega(G_v^{H'}) = \omega(G)$.

De donde, para toda subgráfica inducida, G', de G_v^H, $\chi(G_v^{H'}) = \omega(G_v^{H'})$ y por tanto G_v^H es una gráfica perfecta. ■

Teorema 2.5.4 ([7]) *Sea G una gráfica perfecta. Si $K_1, K_2, ..., K_l$ son los clanes de cardinalidad máxima de G ($|K_i| = \omega(G)$), entonces existe un conjunto independiente, $I_G \subseteq V(G)$, tal que para todo $i \in [l]$, $K_i \cap I_G \neq \emptyset$.*

Dem. Supongamos por contradicción que existe una gráfica perfecta, G, tal que para todo conjunto independiente $I \subseteq V(G)$, existe, K_I, un clan de cardinalidad máxima, tal que $I \cap K_I = \emptyset$. Sea $L = \{K_I \subseteq V(G) : I \text{ es independiente}\}$.

Consideremos la función $h : V(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que para cada $v \in V(G)$,

$$h(v) = \left|\left\{K_I \in L : v \in K_I\right\}\right|.$$

Para cada $v \in V(G)$, consideremos la gráfica H_v, tal que $|V(H_v)| = h(v)$ y $A(H_v) = \emptyset$, entonces podemos formar la gráfica G_h que resulta de sustituir cada vértices $v \in V(G)$ por su correspondiente gráfica H_v.

Sabemos que G es una gráfica perfecta. Por el Teorema 2.5.3, al hacer cada sustitución se obtendrá una gráfica perfecta, por tanto G_h es una gráfica perfecta y por el Corolario 2.5.2 debe cumplirse

$$\omega(G_h) \cdot \omega(G_h^c) \geq |V(G_h)|.$$

Por otro lado:

- Cada conjunto K_I aportará $|K_I|$ vértices a G_h (un vértice en G_h por cada vértice en K_I), entonces

  $$|V(G_h)| = \sum_{v \in V(G)} h(v) = \sum_{K_I \in L} |K_I|$$

  y si $\lambda = |L|$, tendremos:

  $$\sum_{K_I \in L} |K_I| = \sum_{K_I \in L} \omega(G) = \lambda \cdot \omega(G).$$

  Por tanto $|V(G_h)| = \lambda \cdot \omega(G)$.

- Dado que, los vértices de un clan de G_h provienen de un clan de G de la misma cardinalidad, $\omega(G_h) \leq \omega(G)$

- $\omega(G_h^c) = \alpha(G_h) = \text{máx}\left\{\sum_{v \in I} h(v) : I \text{ es independiente}\right\} = \sum_{v \in I^*} h(v)$

  para algún $I^* \subseteq V(G_h)$ conjunto independiente. Pero al ser I^* independiente, la intersección de I^* con un clan consta de, a lo más, un vértice y sabemos por contrucción que $K_{I^*} \cap I^* = \emptyset$, por tanto:

$$\sum_{v\in I^*} h(v) = \sum_{K_I\in L} |K_I\cap I^*| \leq \sum_{K_I\neq K_{I^*}} 1 = \lambda - 1$$

De donde, $\omega(G_h^c) \leq \lambda - 1$.

Usando los resultados anteriores, tendríamos que

$$\begin{aligned} \omega(G_h)\cdot\omega(G_h^c) &\leq \omega(G)\cdot(\lambda-1) = \omega(G)\cdot\lambda - \omega(G) \\ &< \omega(G)\cdot\lambda = |V(G_h)| \end{aligned}$$

Con lo cual, se obtiene una contradicción al Corolario 2.5.2. Por tanto, el teorema es cierto. ■

La última herramienta que necesitamos antes de aplicar los núcleos fraccionados a las gráficas perfectas es que exista un conjunto independiente que intersecte a los clanes de peso máximo. Para obtener este conjunto necesitamos la sustitución por gráficas completas.

Teorema 2.5.5 ([8]) *Sean G y H gráficas, tal que H es una gráfica completa ($V(H)$ es un clan) y sea $v \in V(G)$. Si G es una gráfica perfecta, entonces la sustitución de v por H, G_v^H, es una gráfica perfecta.*

Dem. Sean G una gráfica perfecta, H una gráfica completa y $v \in V(G)$. Demostraremos que G_v^H es una gráfica perfecta, para ésto, tomemos G' una subgráfica inducida de G_v^H y probaremos que $\omega(G') = \chi(G')$.

Si G' es una subgráfica inducida de G, como G es perfecta, se obtiene la igualdad deseada.

Si G' no es una gráfica inducida de G, entonces existe H' subgráfica inducida de H, tal que $G' = G_v^{H'}$. Sabemos que $\omega(G_v^{H'}) \leq \chi(G_v^{H'})$, basta ver que existe una $\omega(G_v^{H'})$-coloración propia de $V(G_v^{H'})$. Probaremos este hecho por inducción sobre $k = \omega(G_v^{H'})$.

Si $k = 1$ entonces $A(G_v^{H'}) = \emptyset$ y por tanto $f \equiv 1$ es una $\omega(G_v^{H'})$-coloración propia de $V(G_v^{H'})$.

(HI) Supongamos que el resultado es válido para $k < n$.

($n = k$). Sea $f : V(G) \to [\chi(G)]$ una $\chi(G)$-coloración propia de $V(G)$ y denotemos $i_v = f(v)$. Sea $u \in V(H')$, entonces $I_u = f^{-1}\left[\{i_v\}\right] \cup \{u\}$ es un conjunto independiente de $V(G_v^{H'})$.

Si K es un clan de cardinalidad máxima de $G_v^{H'}$ $(|K| = \omega(G_v^{H'}))$, entonces $V(H') \subseteq K$ $\Big($por tanto $u \in (K \cap I_v)\Big)$ ó K es un clan de cardinalidad máxima en G $\Big($como G es una gráfica perfecta, en K se encuentran los $\chi(G)$ colores, en particular, hay un vértice de color i_v, es decir, $K \cap I_u \neq \emptyset\Big)$.

Por tanto, I_v intersecta a todos los clanes de cardinalidad $\omega(G_v^{H'})$

Así, $\omega\Big((G_v^{H'}) - I_u\Big) = k - 1 < k = n$. Por (HI) existe una $(k-1)$-coloración propia de $V\Big((G_v^{H'}) - I_v\Big)$. Si a cada vértice de I_u (conjunto independiente) le otorgamos el color k, distinto a los $k-1$ colores, obtenemos una k-coloración propia de $V(G_v^{H'})$. Por tanto $\chi(G_v^{H'}) \leq k = \omega(G_v^{H'})$.

De donde, para toda G', subgráfica inducida de G_v^H, $\chi(G') = \omega(G')$, lo cual demuestra que G_v^H es una gráfica perfecta. ■

Utilizaremos la sustitución de vértices por gráficas completas para hacer una conexión entre clanes de peso máximo y clanes de cardinalidad máxima para obtener el conjunto independiente que deseamos.

Teorema 2.5.6 *Sea G una gráfica y $h : V(G) \to \big(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\big)$ una función. Si G es una gráfica perfecta, entonces existe un subconjunto independiente de vértices de G que intersecta a todos los clanes de peso máximo (con respecto de h).*

Dem. Sea G una gráfica perfecta de orden p, $h : V(G) \to \big(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\big)$ una función y $v_1, v_2, ..., v_p$ una enumeración de $V(G)$.

Supongamos que para todo $i \in [p]$, $h(v_i) = \dfrac{a_i}{b_i} \in \big(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\big)$ y denotemos por m al mínimo común múltiplo de $b_1, b_2, ..., b_p$. Así, $h' = h \cdot m$ es una función entera cuyos clanes de peso máximo son los mismos que los de h.

Consideremos a $G_{h'}$, la gráfica que resulta de sustituir cada vértice de G, por una gráfica completa H_v de orden $h'(v) = |V(H_v)|$.

Por el Teorema 2.5.5, $G_{h'}$ es una gráfica perfecta y por el Teorema 2.5.4, existe un conjunto independiente, $I' \subseteq V(G_{h'})$, tal que I' intersecta a todos los clanes de cardinalidad máxima de $G_{h'}$.

Sea $K_{h'}$, un clan de $V(G_{h'})$ y $K \subseteq V(G)$ el clan en G del cual provienen los vértices de $K_{h'}$. Tenemos que:

$$|K_{h'}| = \sum_{v\in K} h'(v) = p(K) \qquad \text{(el peso de } K \text{ con respecto a } h'\text{)}.$$

En otras palabras, la cardinalidad de un clan de $G_{h'}$ coincide con el peso de clan del cual proviene en G. Por tanto:

$$\begin{aligned} \omega(G_{h'}) &= \text{máx}\left\{|K_{h'}| : K_{h'} \textit{ es clan de } G_{h'}\right\} \\ &= \text{máx}\left\{p(K) : K \textit{ es clan de } G\right\} \end{aligned}$$

Sea $I^* \subseteq V(G)$ el conjunto independiente del cual provienen de los vértices de $I' \subseteq V(G_{h'})$. Afirmamos que I^* intersecta a todos los clanes de peso máximo con respecto a h' (los mismos con respecto a h).

Sea $K \subseteq V(G)$ un clan de peso máximo con respecto de h'. Al sustituir los vértices de K por sus respectivas gráficas completas, se genera un clan, K', de cardinalidad máxima en $V(G_{h'})$.

Así, existe $u' \in (I' \cap K')$. Sea u el vértice del cual proviene u', entonces $u \in (I^* \cap K)$, lo cual, prueba que I^* intersecta a todos los clanes de peso máximo con respecto a h' (los mismos de h). ∎

La existencia de un conjunto independiente que intersecta a todos los clanes de peso máximo, no sólo se tiene para las gráficas con pesos racionales en sus vértices. Ahora veremos que dicho conjunto independiente existe con cualquier función de pesos (no negativa).

Teorema 2.5.7 *Sean G una gráfica y h una función de pesos (no negativa) sobre $V(G)$. Si G es una gráfica perfecta, entonces existe un conjunto independiente que intersecta a todos los clanes de peso máximo de G (con respecto a h).*

Dem. Sea G una gráfica perfecta y $h : V(G) \to [0, \infty)$ una función.

Consideremos una sucesión, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de funciones racionales (no negativas), tal que para cada $v \in V(G)$, la sucesión $\{f_n(v)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $h(v)$.

Por el Teorema 2.5.6 existe una sucesión, $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de conjuntos independientes $\big(I_n \subseteq V(G)\big)$, tal que I_n intersecta a todos los clanes de peso máximo con respecto de f_n.

Como el número de conjuntos independientes en G es finito, existe una subsucesión, $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que a cada función g_m le corresponde el mismo conjunto independiente, I^*.

Dado que I^* intersecta a todos los clanes de peso máximo (con respecto de g_m) en G y la sucesión $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a h, podemos concluir que I^* intersecta a todos los clanes de peso máximo con respecto de h.

Así, $I^* \subseteq V(G)$ es el conjunto independiente buscado. ■

Este resultado nos da pie para una caracterización de las gráficas perfectas.

Corolario 2.5.8 *Sea G una gráfica y $h : V(G) \to [0,\infty)$ una función. G es perfecta si y sólo si existe un conjunto independiente, I_h, que intersecta a todos los clanes de peso máximo (con respecto de h).*

Dem. Debido al Teorema 2.5.7, sólo hay que demostrar la implicación izquierda. Para ésto, supongamos que $I_h \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente que intersecta a todos los clanes de peso máximo con respecto de h. Para probar que G es una gráfica perfecta, tomaremos a G', una subgráfica inducida de G y veremos que $\omega(G') = \chi(G')$ por inducción sobre $\omega(G')$.

Si $\omega(G') = 1$, entonces $A(G') = \emptyset$. Así, $f \equiv 1$ es una coloración propia de $V(G')$ y por tanto, $\omega(G') = 1 = \chi(G')$.

(HI) Supongamos que $\omega(G') = \chi(G')$, cuando $\omega(G') < n$.

Si $\omega(G') = n$, consideremos a $h = \varphi_{V(G')}$, la función caracteristica de $V(G')$. Por hipótesis, existe un conjunto independiente, $I_h \subseteq V(G)$, tal que I_h intersecta a todos los clanes de peso máximo (con respecto de h), que son los clanes de cardinalidad máxima de G'. Por tanto, I_h intersecta a todos los clanes de cardinalidad máxima de G'. De donde:

$$\omega(G' - I_h) = \omega(G') - 1 = n - 1 < n.$$

Por (HI), $\omega(G' - I_h) = \chi(G' - I_h)$. Sea f' una $\omega(G' - I_h)$-coloración propia de $G' - I_h$. Si a cada vértice del conjunto I_h le asignamos el color n (distinto a todos los $\omega(G' - I_h)$-colores) obtendremos una $\omega(G')$-coloración propia de $V(G')$ y por ello:

$$\chi(G') \leq \omega(G' - I_h) + 1 = \omega(G') \leq \chi(G').$$

Por lo tanto, G es una gráfica perfecta. ■

Ya que tenemos todas las herramientas necesarias que hemos construido, podemos aplicar los núcleos fraccionados en las gráficas perfectas. Primero, demostraremos que toda orientación de una gráfica perfecta, tener núcleo es equivalente a tener núcleo fraccionado fuerte.

Teorema 2.5.9 *Sea G una gráfica perfecta y D_G una orientación de G (arbitraria). D_G tiene un núcleo si y sólo si D_G tiene un núcleo fraccionado fuerte.*

Dem.

$\Rightarrow$)Sea N un núcleo en D_G. Por el Teorema 2.4.1, la función característica de N, φ_N, es núcleo fraccionado fuerte.

$\Leftarrow$)Sea f un núcleo fraccionado fuerte de D_G. Por hipótesis, tenemos que G es una gráfica perfecta, por el Teorema 2.5.7, existe $I \subseteq V(G) = V(D_G)$, conjunto independiente que intersecta a todos los clanes de peso máximo en G, los cuales, coinciden con los semicompletos de peso máximo en D_G. Por tanto, $I \subseteq V(D_G)$ intersecta a todos los semicompletos de peso máximo en D_G.

Afirmamos que I es un núcleo en D_G.

Sea $v \in V(D_G)$, como f es fuertemente dominante, existe K_v semicompleto en $I^-(v)$, tal que $\sum_{u \in K_v} f(u) \geq 1$. Como f también es fraccionalmente independiente, para todo K semicompleto de $V(D_G)$, $\sum_{u \in K} f(u) \leq 1$, en particular para K_v y para todo K' semicompleto de peso máximo de $V(D_G)$, entonces:

$$1 \leq \sum_{u \in K_v} f(u) \leq \sum_{w \in K'} f(w) \leq 1.$$

Así, $K_v \subseteq I^-(v)$, es un semicompleto de peso máximo de $V(D_G)$, por lo tanto, $I \cap K_v \neq \emptyset$. Sea $z \in (I \cap K_v) \subseteq \big(I \cap I^-(v)\big)$, entonces $(z, v) \in F(D_G)$. Lo cual, demuestra que I es un conjunto dominante en D_G.

Concluimos la demostración, pues I es núcleo de D_G. ■

Por último, probaremos que toda orientación clan-acíclica de una gráfica perfecta tiene núcleo. La clase de gráficas que cumplen esta característica tienen un nombre especial:

Definición 2.5.5 *Sea G un gráfica . Diremos que G es* ***núcleo soluble****, si toda orientación, clan-acíclica de G, tiene núcleo.*

Teorema 2.5.10 *Toda gráfica perfecta es núcleo soluble.*

Dem. Sea G una gráfica perfecta y D_G una orientación clan-acíclica de G.

Por el Teorema 2.4.8, D_G tiene un núcleo fraccionado fuerte y por el Teorema 2.5.9, D_G tiene un núcleo.

Así, toda orientación clan-acíclica de G tiene núcleo. Por tanto, G es núcleo soluble. ■

Ejemplo 2.5.4 *Para el Teorema 2.5.10*

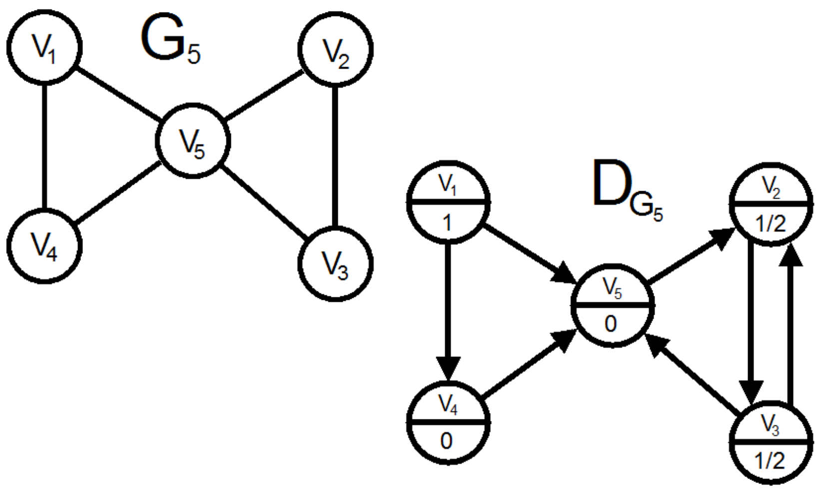


Figura 2.23: G_5 y D_{G_5}

G_5 es una gráfica perfecta. Consideremos a D_{G_5}, una orientación clan-acíclica de G_5. Por el Teorema 2.4.8, D_{G_5} tiene un núcleo fraccionado fuerte f.

Los semicompletos de peso máximo en $V(D_{G_5})$ son:

$$K_1 = \{v_1\}, \quad K_2 = \{v_1, v_4\}, \quad K_3 = \{v_1, v_5\}$$
$$K_4 = \{v_1, v_4, v_5\}, \quad K_5 = \{v_2, v_3\}, \quad K_6 = \{v_2, v_3, v_5\}$$

Por el Teorema 2.5.7, existe $I = \{v_1, v_3\}$, conjunto independiente de D_{G_5} que intersecta a todos los semicompletos K_i $(i \in [6])$.

Como $v_1 \in (I \cap I^-[v_4] \cap I^-[v_5])$ y $v_3 \in (I \cap I^-[v_2])$, tenemos que I es un conjunto dominante en D_{G_5} y por tanto, I es un núcleo de D_{G_5}.

Capítulo 3

Órdenes parciales

En este capítulo, seguiremos trabajando la noción de núcleo. Ahora nos enfocaremos en conjuntos parcialmente ordenados [5].

Definición 3.0.1 *Sea $V(P)$ un conjunto y $\leq_P$ una relación de orden sobre $V(P)$. Diremos que $P = (V(P), \leq_P)$ es un* ***orden parcial****, si $\leq_P$ es reflexivo, antisimétrico y transitivo, es decir:*

- *Para todo $u \in V(P)$, $u \leq_P u$ ($\leq_P$ es reflexivo).*
- *Para cualesquiera $u, v \in V(P)$, si $u \leq_P v$ y $v \leq_P u$ entonces $u = v$ ($\leq_P$ es antisimétrico).*
- *Para cada $u, v, w \in V(P)$, si $u \leq_P v$ y $v \leq_P w$, entonces $u \leq_P w$. ($\leq_P$ es transitivo).*

Ejemplo 3.0.1

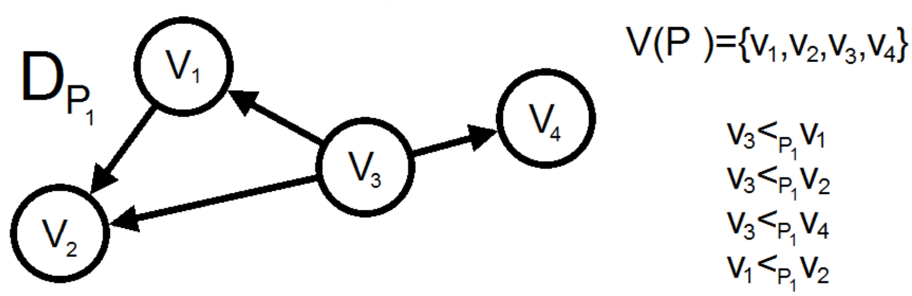


Figura 3.1: D_{P_1}

De igual manera que en la figura 3,1, cualquier orden parcial P puede ser representado por medio de una digráfica D_P, donde:

$$V(D_P) = V(P) \text{ y } F(D_P) = \{(u, v) : v <_P u\}$$

Ocupando el orden estricto para evitar lazos. Dicha digráfica resultará ser transitiva, acíclica y por tanto asimétrica.

Definición 3.0.2 *Sea $P = (V(P), \leq_P)$ un orden parcial y $C \subseteq V(P)$. Diremos que $(C, \leq_C)$ es una **cadena** de P si $\leq_C \subseteq \leq_P$ es un orden lineal (total).*

En otras palabras, $(C, \leq_C)$ es reflexivo, antisimétrico, transitivo y para todo $u, v \in C$, $u \leq_C v$ o $v \leq_C u$.

Denotaremos por $\mathscr{C}(P)$ al conjunto de todas las cadenas inducidas por P.

En un orden parcial, P, los subconjuntos de cardinalidad uno de $V(P)$ son un ejemplo de sub-orden lineal inducido por P. Si consideramos a la digráfica D_P, dichos sub-órdenes lineales corresponderán a los sub-torneos transitivos de D_P (pues son digráficas semicompletas y acíclicas).

Denotaremos por $\mathscr{T}(D_P)$ al conjunto de todos los sub-torneos de D_P.

Definición 3.0.3 *Sea $\mathscr{C}$ un conjunto de cadenas. Diremos que $\mathscr{C}$ es un **conjunto cerrado de cadenas**, si para toda cadena $(A, \leq_A) \in \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ contiene a toda sub-cadena de $(A, \leq_A)$.*

Para un orden parcial, P, el conjunto $\mathscr{C}(P)$ resulta ser un conjunto cerrado de cadenas pues contiene a todas las cadenas de P, en particular a las sub-cadenas de sus cadenas. De igual manera, en una digráfica podemos definir la noción de conjunto cerrado para torneos transitivos acíclicos.

Definición 3.0.4 *Sea $\mathscr{T}$ un conjunto de torneos transitivos acíclicos. Diremos que $\mathscr{T}$ es un **conjunto cerrado de torneos**, si para todo torneo $T \in \mathscr{T}$, todo sub-torneo T' de T cumple que $T' \in \mathscr{T}$.*

En base a las nociones antes expuestas, podemos definir una noción de núcleo en órdenes a partir de un conjunto cerrado de cadenas.

3.1. Núcleos en un orden

Definición 3.1.1 *Sea $\mathscr{C} = \{(C_j, \leq_j) : j \in J\}$ un conjunto cerrado de cadenas y $N \subseteq V = \bigcup_{j\in J} C_j$. Diremos que:*

- *N es **dominante** para $\mathscr{C}$, si para todo $v \in V$, existe un índice $j_v \in J$, tal que $v \in C_j$, $N \cap C_{j_v} \neq \emptyset$ y para todo $t \in N \cap C_{j_v}$, $t \geq_{j_v} v$.*
- *N es **independiente** para $\mathscr{C}$, si para todo $j \in J$, $|N \cap C_j| \leq 1$.*
- *N es un **núcleo** para $\mathscr{C}$, si N es dominante e independiente para $\mathscr{C}$.*

Análogamente podemos definir un núcleo en un conjunto cerrado de torneos transitivos, $\mathscr{T} = \{T_j \subseteq V(D) : j \in J$ y T_j es un torneo transitivo$\}$, de tal manera que $N \subseteq V(D) = \bigcup_{j\in J} T_j$ es:

-independiente para $\mathscr{T}$, si para todo $j \in J$, $|N \cap T_j| \leq 1$.

-dominante para $\mathscr{T}$, si para todo $v \in V(D)$, existe un índice $j_v \in J$, tal que $v \in T_{j_v}$, $N \cap T_j \neq \emptyset$ y para todo $t \in (T_i \cap N)$, $t \geq v$. Es decir, $v \in N$ ó $(t, v) \in F(D)$.

-núcleo para $\mathscr{T}$, si N es independiente y dominante para $\mathscr{T}$.

Si consideramos un conjunto cerrado de torneos, donde la cardinalidad de cada torneo es a los más dos, esta nocion de núcleo en torneos coincide exactamente con la noción usual de núcleo redactada en la Definición 1.4.2. Más aún, si tomamos el conjunto de todos los torneos transitivos, veamos que las nociones de núcleo son equivalentes:

Proposición 3.1.1 *Sea D una digráfica, $\mathscr{T}_t(D)$ el conjunto de todos los torneos transitivos de D y $N \subseteq V(D)$. N es núcleo de D si y sólo si N es núcleo para $\mathscr{T}_t(D)$.*

Dem.

$\Rightarrow$) Como N es independiente en D, para todo $T \in \mathscr{T}_t(D)$, $|T \cap N| \leq 1$. Por tanto, N es independiente para $\mathscr{T}_t(D)$.

Sea $v \in V(D)$. Si $v \in N$, entonces $T = \{v\}$ es un torneo transitivo, tal que $v \in (T \cap N)$ (con lo cual, se cumple la dominancia en $\mathscr{T}_t(D)$).

Supongamos que $v \notin N$, como N es dominante en D, existe $t \in N$, tal que

$(t, v) \in F(D)$, entonces $T = \{t, v\}$ es un torneo transitivo de D. Para todo $t \in (T \cap N) = \{t\}$, $(t, v) \in F(D)$ (N es dominante para $\mathscr{T}_t(D)$).

En cualquier caso se tiene que N es dominante para $\mathscr{T}_t(D)$ y por tanto N es un núcleo para $\mathscr{T}_t(D)$.

$\Leftarrow$) Sean $u, v \in N$. Consideremos el conjunto $A = \{u, v\}$, como $|N \cap A| = 2$, $A \notin \mathscr{T}_t(D)$. Es decir, $(u, v), (v, u) \notin F(D)$. Por tanto N es independiente en D.

Sea $v \in (V(D) - N)$. Como N es dominante para $\mathscr{T}_t(D)$, existe $T \in \mathscr{T}_t(D)$, tal que $v \in T$, $N \cap T \neq \emptyset$ y para todo $t \in (T \cap N)$, $(t, v) \in F(D)$.

Para cualquier $t \in (N \cap T)$, $t \neq v$ pues $v \notin N$. Por tanto $(t, v) \in F(D)$, es decir, N es dominante en D. Así, N es un núcleo de D. ■

Debido a esta equivalencia, podemos ver que no todo conjunto cerrado de cadenas tiene núcleo:

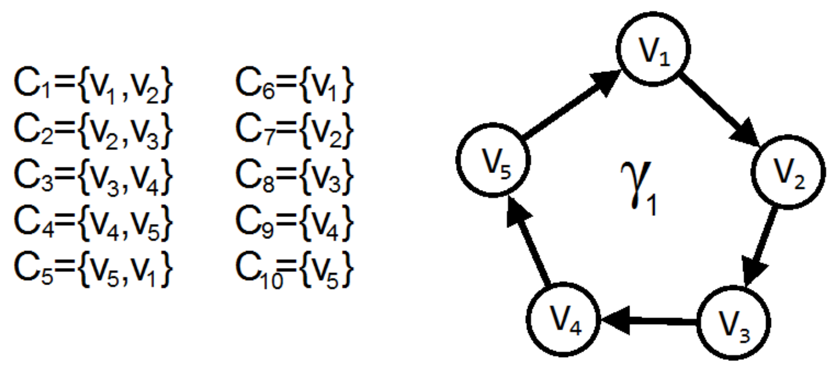


Figura 3.2: γ_1

Si consideramos el conjunto cerrado de cadenas

$$\mathscr{C} = \left\{ \left(C_i, \{(v_i, v_{i+1})\} \right) : i \in [5] \right\} \cup \left\{ \left(C_j, \emptyset \right) : j \in ([10] - [5]) \right\},$$

$\mathscr{C}$ puede ser representado por el ciclo γ_1, recordemos que dicho ciclo no tiene núcleo. Por tanto, no todo conjunto cerrado de cadenas tiene núcleo.

Veremos que, cuando el conjunto cerrado de cadenas proviene de un orden parcial, siempre existe un núcleo:

Proposición 3.1.2 *Si P es un orden parcial, entonces existe un núcleo para $\mathscr{C}(P)$.*

Dem. Sea P es un orden parcial y D_P su correspondiente digráfica transitiva acíclica.

Por el Teorema 1.4.5, D_P tiene un núcleo, N, por la Proposición 3.1.1, N es un núcleo para $\mathscr{C}(P)$. Más aún:

$$N = \{v \in V(D_P) : \delta^-(v) = 0\} \quad \text{(los mayores en } P\text{)}.$$

Claramente $\{v \in V(D_P) : \delta^-(v) = 0\} \subseteq N$, pues ningún vértice puede dominarlos. Para cada $v \in V(P) = V(D_P)$, tal que $\delta^-(v) > 0$, existe un torneo transitivo, $T \in T(D_P)$, máximo por contención, tal que $v \in T$. Como T corresponde a una cadena en $\mathscr{C}(P)$, existe $u \in T$ tal que $\delta^-(u) = 0$ y $(u, v) \in F(D_P)$. Lo cual, implica que $v \notin N$.

Por tanto, N es el conjunto de elementos mayores en P y único núcleo para $\mathscr{C}(P)$. ■

Teorema 3.1.3 *Sean P y Q dos órdenes parciales. Si D es la digráfica, tal que $D = D_P \cup D_Q = D_{P\cup Q}$, entonces D tiene núcleo.*

Dem. Sea D una digráfica que corresponde a la unión de dos órdenes parciales, P y Q. Demostraremos que D tiene núcleo por inducción sobre el orden de D.

Si $|V(D)| = 1$, entonces $N = V(D) = \{v\}$ es núcleo de D.

(HI) Supongamos que toda digráfica (unión de dos órdenes parciales) de orden menor que p, tiene núcleo.

Supongamos que D es una digráfica de orden p y consideremos a $M(P)$ el conjunto de elementos máyores de P. Por la Proposición 3.1.2, $M(P)$ es núcleo de P.

Si $M(P)$ es un conjunto independiente en Q, entonces $M(P)$ es un conjunto independiente en toda la digráfica. Como $M(P)$ es dominante en P, para cada $w \in \big(V(D) - M(P)\big)$, (como w no es máyor en P) existe $v \in M(P)$ tal que $v \geq_P w$ y por tanto $(v, w) \in F(D)$. Lo cual implica que $M(P)$ es dominante en D y así, $M(P)$ es núcleo en D.

Si $M(P)$ no es independiente en Q, existen $u, v \in M(P)$ tales que $u \geq_Q v$.

Consideremos la digráfica $D' = D - v$, entonces $D' = (D_P - v) \cup (D_Q - v)$. En otras palabras, D' corresponde a la unión de dos órdenes parciales y además:

$$|V(D')| = |V(D - v)| = |V(D)| - 1 = p - 1 < p.$$

Por (HI), existe $N' \subseteq V(D')$ núcleo de D'. Afirmamos que N' también es núcleo en D. Como N' es núcleo en $D' = D - v$, basta probar que N' domina al vértice v.

Si $u \in N'$ entonces u domina a v, pues $u \geq_Q v$. Por tanto N' es dominante en D.

Si $u \notin N'$, tenemos que $u \in (V(D') - N')$. Como N' es dominante en D', existe $z \in N'$ tal que $(z, u) \in F(D')$, siendo u un elemento mayor en P. Por tanto, $z \geq_Q u$ y $u \geq_Q v$, ya que Q es transitivo, $z \geq_Q v$ (z domina a v).

De ambos casos obtenemos que N' es dominante en D y por tanto, N' es núcleo en D. ∎

3.2. Núcleos pesados

El siguiente objetivo será probar la versión con pesos del Teorema 3.1.3, para lo cual, introduciremos la noción de núcleo pesado. Para definir ésto, ocuparemos la siguiente notación para un orden parcial P y $a, b \in V(P)$:

Denotaremos por $M(P)$ al conjunto de elementos mayores de P.

$$\begin{aligned} P(> a) &= \{v \in V(P) : v >_P a\} \\ P(\geq a) &= \{v \in V(P) : v \geq_P a\} \\ P(< a) &= \{v \in V(P) : v <_P a\} \\ P[a, b) &= \{v \in V(P) : a \leq_P v < b\} \end{aligned}$$

Si A es un conjunto de vértices y f una función real arbitraria, con la intención de abreviar la notación, escribiremos $f^+[A] = \sum_{v \in A} f(v)$.

De manera análoga, para un torneo T y $u, v \in T$ tendremos a los conjuntos:

$$\begin{aligned} M(T) &= \{z \in T : \delta^-(z) = 0\} \\ T(> u) &= \{z \in T : (z, u) \in F(T)\} = \Gamma^-(u) \cap T \\ T(\geq u) &= \{z \in T : (z, u) \in F(T) \;\; o \;\; z = u\} = I^-[v] \cap T \\ T[u, v) &= \{z \in T : z = u \;\; o \;\; (v, z) \in F(T) \;\; o \;\; (z, u) \in F(T)\} \\ &= \big(I^-[u] \cap \Gamma^+(v)\big) \cap T \end{aligned}$$

Ya que tenemos esta notación, definiremos una generalización de los núcleos fraccionados a los cuales llamaremos núcleo pesado en un conjunto cerrado de cadenas cuyo conjunto de vértices tiene una función de pesos fija. De manera paralela, veremos la correspondiente noción en digráficas.

Definición 3.2.1 *Sean $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas de un conjunto V, $w : V \to [0, \infty)$ y $f : V \to [0, \infty)$ dos funciones. Diremos que f es **w-independiente**, si para cada cadena, C, de $\mathscr{C}$:*

$$f^+[C] \leq \max\{w(v) : v \in C\}$$

Para una digráfica, D, y dos funciones no negativas, f, w sobre $V(D)$, f es w-independiente, si para todo torneo transitivo $T \in \mathscr{T}_t(D)$,

$$f^+[T] \leq \max\{w(v) : v \in T\}.$$

Proposición 3.2.1 *Sean D una digráfica e $I \subseteq V(D)$ un conjunto independiente. Si $w : V(D) \to [0, \infty)$ es una función, entonces $f = \varphi_I \cdot w$ es w-independiente.*

Dem. Sea T un torneo de $\mathscr{T}_t(D)$. Si I es un conjunto independiente en D, entonces $|T \cap I| \leq 1$, por lo tanto:

$$f^+[T] = (\varphi_I \cdot w)^+[T] \leq \varphi_I(v) \cdot w(v) \quad \big(\text{para algún } v \in (T \cap I)\big).$$

Además:

$$\varphi_I(v) \cdot w(v) = 1 \cdot w(v) \leq \text{máx}\{w(u) : u \in T\}.$$

Así, $f = \varphi_I \cdot w$ es w-independiente. ■

Para que una función, f, sea w-independiente, es necesario que $f \leq w$, pues $\{u\}$ es una cadena (torneo transitivo) y debe suceder que

$$f(u) = f^+[\{u\}] \leq \text{máx}\{w(u) : u \in \{u\}\} = w(u).$$

En consecuencia de ésto, si $w \equiv 0$, entonces la única función w-independiente es $f \equiv 0$. En el caso en que $w \not\equiv 0$, existe una infinidad de funciones que son w-independientes:

Proposición 3.2.2 *Sea $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas y $w : V \to [0, \infty)$ una función, tal que $w \not\equiv 0$, entonces existe $l > 0$, tal que cualquier función $f : V \to [0, l)$ es w-independiente.*

Dem. Sea $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas y w una función de pesos (no negativa) sobre V. Consideremos al número

$$l = \frac{\text{mín}\big\{w(v) : w(v) > 0\big\}}{\text{máx}\big\{|C| : C \in \mathscr{C}\big\}}$$

y tomemos una función, $f : V \to [0, l)$. Probaremos que f es w-independiente.

Para cada C una cadena de $\mathscr{C}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f^+[C] &= \sum_{v \in C} f(v) < \sum_{i=1}^{|C|} l = |C| \cdot \frac{\text{mín}\big\{w(v) : w(v) > 0\big\}}{\text{máx}\big\{|C| : C \in \mathscr{C}\big\}} \\ &\leq \text{mín}\big\{w(v) : w(v) > 0\big\} \leq \text{máx}\big\{w(v) : v \in C\big\} \end{aligned}$$

Por tanto, f es w-independiente. ■

Como hay una infinidad de funciones cuya imagen está contenida en el intervalo $[0, l)$, concluimos que hay de una infinidad de funciones w-independientes (cuando $w \not\equiv 0$). Por tanto, en todo conjunto cerrado de cadenas y toda digráfica, existe, al menos, una función w-independiente.

A continuación, veremos que la noción de w-independencia generaliza a las funciones fraccionalmente independientes.

Proposición 3.2.3 *Sean $D = D_P$ la digráfica que corresponde a un orden parcial P, $w \equiv 1$ una función de pesos sobre $V(D_P)$ y $f : V(D_P) \to [0, \infty)$ una función. f es w-independiente si y sólo si f es fraccionalmente independiente.*

Dem.

$\Rightarrow$) Supongamos que f es w-independiente. Para probar que f es fraccionalmente independiente, tomemos a K un semicompleto de $V(D_P)$.

Como $D = D_P$, entonces K es transitivo y acíclico, es decir, $K \in T_t(D_P)$ (K es un torneo). Ya que f es w-independiente, para todo $v \in K$:

$$f^+[K] \leq \text{máx}\{w(v) : v \in K\} = w(v) = 1$$

Por tanto, f es fraccionalmente independiente.

$\Leftarrow$) Supongamos que f es fraccionalmente independiente y sea T un torneo transitivo de D_P.

En particular, T es un semicompleto de $V(D_P)$. Como f es fraccionalmente independiente, para cualquier $v \in T$:

$$f^+[T] \leq 1 = w(v) = \text{máx}\{w(v) : v \in T\}$$

Así, f es w-independiente. $\blacksquare$

Para un conjunto cerrado de cadenas $\mathscr{C}$ y una función f sobre un conjunto V, escribiremos las siguientes abreviaturas:

$$M_f(v) = \text{máx}\left\{f^+[C(\geq v)] : C \textit{ es cadena de } \mathscr{C} \textit{ y } v \in C\right\}$$

$$m_f(v) = \text{máx}\left\{f^+[C(> v)] : C \textit{ es cadena de } \mathscr{C} \textit{ y } v \in C\right\} = M_f(v) - f(v)$$

Análogamente, para una digráfica, D, y una función no negativa, f, sobre $V(D)$, tendremos los conjuntos:

$$M_f(v) = \text{máx}\left\{f^+[T] : T \in T(D),\ v \in T\ y\ T \subseteq I^-[v]\right\}$$

$$m_f(v) = M_f(v) - f(v)$$

Definición 3.2.2 *Sean $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas y f, w dos funciones no negativas sobre V. f es* ***w-dominante*** *si para todo $v \in V$, $M_f(v) \geq w(v)$.*

Denotaremos por $D(f) = \{v \in V : M_f(v) \geq w(v)\}$, al conjunto de los vértices dominados por f.

De igual manera, para una digráfica D y una función no negativa, w en $V(D)$, decimos que $f : V(D) \to [0, \infty)$ es w-dominante, si para todo $v \in V(D)$, $M_f(v) \geq w(v)$.
Es decir, $\text{máx}\{f^+[T] : T \in T(D), v \in T$ y $T \subseteq I^-[v]\} \geq w(v)$.

A diferencia de la w-independencia, para cualquier conjunto cerrado de cadenas y cualquier función de pesos, w (incluso $w \equiv 0$), existe una infinidad de funciones w-dominantes:

Proposición 3.2.4 *Sea $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas y $w : V \to [0, \infty)$ una función. Si $f \geq w$, entonces f es w-dominante.*

Dem. Sean $f : V \to [0, \infty)$ una función, tal que para todo $u \in V$, $f(u) \geq w(u)$ y sea $v \in V$.

Para la cadena $C = \{v\}$ de $\mathscr{C}$, tenemos que

$$M_f(v) \geq f^+[C(\geq v)] = f(v) \geq w(v).$$

De donde, f es w-dominante. ■

Esta proposición prueba que, $f \geq w$ es una condición suficiente para que f sea w-domianate. Mostraremos que no es necesaria dicha condición para las funciones w-dominantes mediante un ejemplo:

Ejemplo 3.2.1

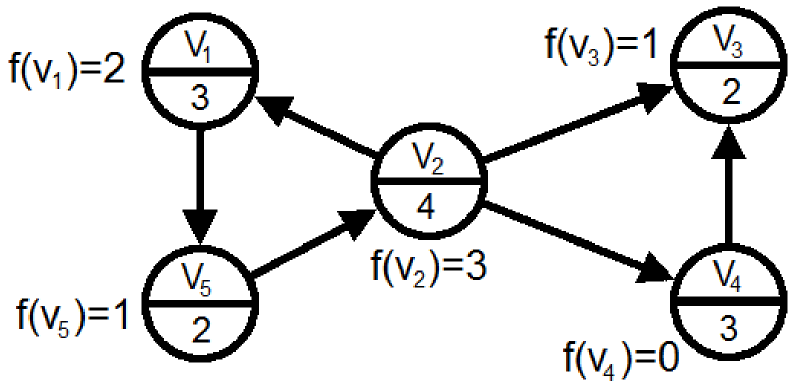


Figura 3.3: D_{10}

La función f es menor estricta que w y f es w-dominante en D_{10}, pues:

$$
\begin{aligned}
M_f(v_1) &= f(v_1)+f(v_2)=2+3=5>3=w(v_1)\\
M_f(v_2) &= f(v_2)+f(v_5)=3+1=4=w(v_2)\\
M_f(v_3) &= f(v_3)+f(v_2)+f(v_4)=1+3+0=4>2=w(v_3)\\
M_f(v_4) &= f(v_4)+f(v_2)=0+3=3=w(v_4)\\
M_f(v_5) &= f(v_5)+f(v_1)=1+2=3>2=w(v_5)
\end{aligned}
$$

De la misma manera que en la Proposición 3.2.3, la noción w-dominante generaliza a las funciones fuertemente dominantes y por tanto a las funciones fraccionalmente dominantes.

Proposición 3.2.5 *Sea D_P una digráfica que corresponde a un orden parcial P y $w \equiv 1$. f es w-dominante si y sólo si f es fuertemente dominante.*

Dem.

$\Rightarrow$) Supongamos que f es w-dominante y probaremos que f es fuertemente dominante. Sea $v \in V(D_P)$.

Como f es w-dominante, tenemos que $M_f(v) \geq w(v)$. Es decir, existe un torneo transitivo, T, tal que $f^+[T(\geq v)] \geq w(v) = 1$.

En particular, el torneo $T(\geq v)$ es un semicompleto contenido en $I^-[v]$ y $f^+[T(\geq v)] \geq 1$. Por lo tanto, f es fuertemente dominante.

$\Leftarrow$) Supongamos que f es fuertemente dominante, entonces para $v \in V(D_P)$, existe un semicompleto $K \subseteq I^-[v]$, tal que $f^+[K] \geq 1 = w(v)$.

Como la digráfica D_P corresponde al orden parcial P, K es un torneo transitivo contenido en $I^-[v]$, entonces $K = K(\geq v)$ y $f^+[K] \geq w(v)$.

De donde, f es w-dominante. ■

A diferencia de la Proposición 3.2.1, para un conjunto dominante, $Q \subseteq V$, la función $\varphi_Q \cdot w$ no necesariamente es w-dominante como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2

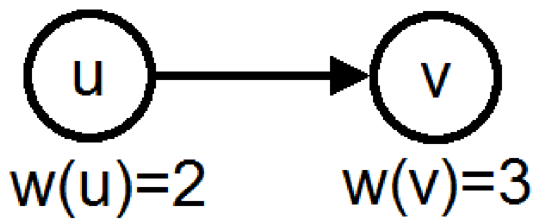


Figura 3.4: D_{11}

El conjunto $Q = \{u\}$ es dominante en D_{11}, entonces la función $\varphi_Q \cdot w$ no es w-dominante en D_{11}, ya que:

$$\begin{aligned} M_{(\varphi_Q \cdot w)}(v) &= \varphi_Q(v) \cdot w(v) + \varphi_Q(u) \cdot w(u) = 0 + w(u) \\ &= 2 < 3 = w(v). \end{aligned}$$

Definición 3.2.3 *Sean $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas y f, w dos funciones no negativas sobre V. Diremos que la función f es **w-mansa**, si para todo $v \in V$, tal que $f(v) > 0$, entonces $M_f(v) \leq w(v)$.*

De manera similar, para una digráfica D y f, w dos funciones no negativas sobre $V(D)$, podemos decir que f es w-mansa, si para todo $v \in V(D)$ (con $f(v) > 0$), $M_f(v) \leq w(v)$.

En otras palabras, para todo torneo transitivo, $T \in \mathscr{T}_t(D)$, tal que $T \subseteq I^-[v]$, $f^+[T] \leq w(v)$.

Notemos que $f \equiv 0$ siempre es w-mansa. Pues, para todo $v \in V(D)$ y cada torneo, $T \subseteq I^-[v]$, $f^+[T] = 0 \leq w(v)$.

Proposición 3.2.6 *Sean $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas y f, w, funciones no negativas sobre V, si f es w-mansa, entonces f es w-independiente.*

Dem. Sea $\mathscr{C}$ un conjunto cerrado de cadenas con una función, f, w-mansa. Para probar que f es w-independiente tomemos a C una cadena de $\mathscr{C}$.

Si para todo $v \in C$, $f(v) = 0$, entonces

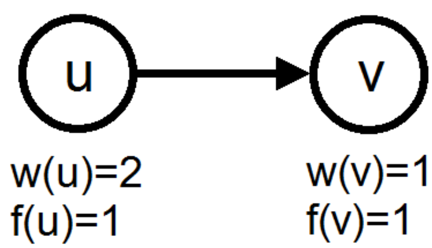
$$f^+[C] = 0 \leq \text{máx}\{w(u) : u \in C\}.$$

En caso contrario, consideremos a $v = \text{mín}\left\{u \in C : f(u) > 0\right\}$, en particular $f(v) > 0$. Como f es w-mansa y $f(v) > 0$, $M_f(v) \leq w(v)$ y por la manera en que hemos tomado a v, $f^+[C(< v)] = 0$. Así,

$$f^+[C] = f[C(\geq v)] \leq M_f(v) \leq w(v) \leq \text{máx}\{w(v) : v \in C\}.$$

De ambos casos podemos concluir que f es w-independiente. ■

El enunciado recíproco de esta proposición es falso, para mostrar ésto tenemos el torneo de orden 2 y las funciones f y w:



El conjunto de sub-torneos transitivos de esta digráfica consta de tres conjuntos, a saber:

$T_1 = \{u\}$, donde $f^+[T_1] = f(u) = 1 < 2 = w(u)$,

$T_2 = \{v\}$, cumple que $f^+[T_2] = f(v) = 1 = w(v)$ y en

$T_3 = \{u, v\}$, $f^+[T_3] = f(u) + f(v) = 1 + 1 = 2 = w(u) = \text{máx}\left\{w(u), w(v)\right\}$.

Lo cual muestra que f es w-independiente. pero f no es w-mansa, ya que $f(v) = 1 > 0$ y

$$M_f(v) = f^+[T_3] = f(u) + f(v) = 2 > 1 = w(v).$$

Por ello, no toda función w-independiente es w-mansa.

Definición 3.2.4 *Sean $\mathscr{C}$, un conjunto cerrado de cadenas y f, w funciones no negativas sobre V. f es un* ***núcleo pesado*** *si f es w-independiente y w-dominante.*

Analizaremos la existencia de los núcleos pesados comenzando en órdenes parciales. Veremos que si la función de pesos es entera, existe un núcleo pesado entero.

Lema 3.2.7 *Para cada orden parcial, P, y $w : V(P) \to \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)$ una función, existe una función $f : V(P) \to \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)$, tal que f es un núcleo pesado para $\mathscr{C}(P)$.*

Dem. Para demostrar este lema, vamos a definir una función f de manera recursiva. Para ello, definimos la profundidad de un vértice v, como

$$p(v) = \text{máx}\{|C| : C \text{ es cadena en } P(> v)\}.$$

Para todo $v \in V$, tal que $p(v) = 0$ ($v \in M(P)$), $f(v) = w(v)$ y si $p(v) > 0$, $f(v) = \text{máx}\big\{w(v) - m_f(v), 0\big\}$.

Afirmamos que f es un núcleo pesado para $\mathscr{C}(P)$.

- Sea C una cadena en $\mathscr{C}$. Probaremos que f es w-independiente por inducción sobre $|C|$.

  Supongamos que $|C| = 1$, entonces existe $v \in V(P)$, tal que $C = \{v\}$.
  Si $v \in M(P)$, entonces $f^+[C] = f(v) = w(v)$.
  Si $p(v) > 0$, entonces $f^+[C] = f(v) = \text{máx}\big\{w(v) - m_f(v), 0\big\} \leq w(v)$.

  (HI) Supongamos que para toda cadena, C, en $\mathscr{C}(P)$, tal que $|C| < k$, $f^+[C] \leq \text{máx}\big\{w(v) : v \in C\big\}$

  Sea C una cadena de cardinalidad k. Si v es el mínimo de C, entonces $C' = C - \{v\}$ es una cadena de cardinalidad $k-1$, por hipótesis de inducción,

  $$f^+[C'] \leq \text{máx}\big\{w(u) : u \in C'\big\} \quad \text{y} \quad f^+[C] = f^+[C'] + f(v).$$

  Por la elección que hemos hecho de v, $p(v) > 0$. Si $f(v) = 0$, entonces

  $$f^+[C] = f^+[C'] \leq \text{máx}\{w(u) : u \in C'\} \leq \text{máx}\{w(u) : u \in C\}.$$

En el caso en que $f(v) = w(v) - m_f(v)$, tenemos que

$$f^+[C] = f^+[C'] + f(v) = f^+[C'] + w(v) - m_f(v),$$

Como v es el mínimo de C, entonces $m_f(v) \geq f^+[C'(> v)] = f^+[C']$, entonces $f^+[C'] - m_f(v) \leq 0$. Por tanto,

$$f^+[C'] + w(v) - m_f(v) \leq w(v) \leq \text{máx}\{w(u) : u \in C\}.$$

De donde, $f^+[C] \leq \text{máx}\{w(u) : u \in C\}$. Así, f es w-independiente.

- Por último, veamos que f es w-dominante. Sea $v \in V(P)$. Si $p(v) = 0$, entonces

$$M_f(v) = f^+\big[\{v\}\big] = f(v) = w(v).$$

Cuando $p(v) > 0$, tenemos que $f(v) = \text{máx}\big\{w(v) - m_f(v), 0\big\}$.
Si $f(v) = 0$, significa que $m_f(v) \geq w(v)$, entonces

$$M_f(v) = m_f(v) \geq w(v).$$

Si $f(v) = w(v) - m_f(v)$, entonces

$$M_f(v) = m_f(v) + f(v) = m_f(v) + w(v) - m_f(v) = w(v).$$

En cualquier caso, concluimos que f es w-dominante.

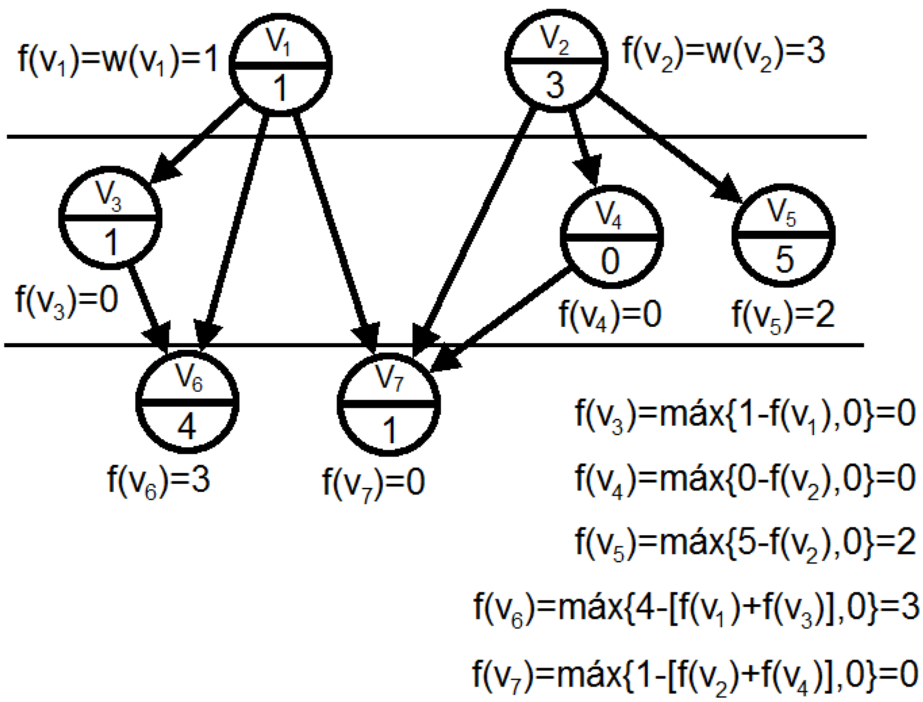
Por lo antes expuesto, f es un núcleo pesado para $\mathscr{C}(P)$.

Como w es una función entera y por la manera en que construimos la función f, se tiene que la imagen de f está contenida en $\mathbb{N} \cup \{0\}$, con lo cual, concluimos la demostración. ■

Esta prueba también se puede aplicar cuando la función, w, no es entera, pero el núcleo pesado resultante no necesariamente es una función entera.

Con el objetivo de aclarar la noción de profundidad definida en la demostración y la manera de construir la función f, veamos el siguiente ejemplo en el que se han dibujado los vértices de acuerdo a su profundidad:

Ejemplo 3.2.3 *Para el Lema 3.2.7*



Después de haber demostrado la existencia de núcleos pesados (enteros) en órdenes parciales, veremos que éstos no son los únicos.

Teorema 3.2.8 *Para cada conjunto cerrado de cadenas, $\mathscr{C}$ y cada función de pesos (no negativa), w, sobre V, existe un núcleo pesado.*

Dem. La prueba será muy similar a la empleada en el Teorema 2.4.8 y usaremos el Teorema de Scarf.

Sean $C_1, C_2, ..., C_m$ las cadenas máximas por contención de $\mathscr{C}$. A cada cadena C_i, le agregaremos un vértice que será su elemento mínimo, formando la cadena $C'_i = C_i \cup \{z_i\}$. Sea $v_1 = z_1, v_2 = z_2, ..., v_m = z_m, v_{m+1}, ..., v_n$ una enumeración de $V \cup \{z_1, ..., z_m\}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ un vector, tal que su i-ésima entrada está dada por $b_i = \text{máx}\{w(v) : v \in C_i\}$. También, consideremos a las matrices de tamaño $m \times n$, A y B, cuyas entradas se definen de la siguiente manera.

Si $v_j \in C'_i$, entonces a_{ij} denota la posición de v_j en la cadena C'_i y $b_{ij} = 1$.

Si $v_j \notin C'_i$, entonces $c_{ij} = 2r - j$ y $b_{ij} = 0$ (para alguna $r > n$).

Así, A, B y b cumplen las hipótesis del Teorema 2.4.6 (Scarf), por lo cual, existe $J \subseteq \{n\}$ tal que J es subordinado para A y existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$, tal que para cada $j \notin J$, $\alpha_j = 0$ y $B \cdot \alpha = b$.

Para cada $j > m$, definimos $f(v_j) = \alpha_j$. Afirmamos que f es un núcleo pesado para $\mathscr{C}$.

f es w-independiente, pues para cada cadena C en $\mathscr{C}$, existe $i \in [m]$, tal que $C \subseteq C'_i$, entonces:

$$f^+[C] \leq f^+[C'_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\alpha_j = b_i = \max\left\{w(v) : v \in C_i\right\}.$$

f es w-dominante, pues para cada $v_j \in V$ $(j > m)$, existe $i \in [m]$, tal que la columna a^j se subordina con el índice i, por tanto:

$$M_f(v) \geq f^+[C'_i(\geq v)] = \sum_{\substack{j \in J \\ v_j \in C_i}} \alpha_j = b_i = \max\{w(v) : v \in C_i\} \geq w(v_j).$$

De donde, f es un núcleo pesado para $\mathscr{C}$. ■

En particular si D es la unión de dos órdenes parciales, por el Teorema anterior, D tiene un núcleo pesado. El siguiente objetivo será probar que existe un núcleo pesado entero en dicha unión. Para probar ésto, utilizaremos los siguientes lemas:

Lema 3.2.9 *Sean P un orden parcial y f, w funciones no negativas sobre $V(P)$, si f es un núcleo pesado de $\mathscr{C}(P)$, entonces f es w-mansa.*

Dem. Procederemos esta demostración por contradicción. Supongamos que existe un orden parcial, P, tal que f es núcleo pesado (con respecto a w), pero f no es w-mansa.

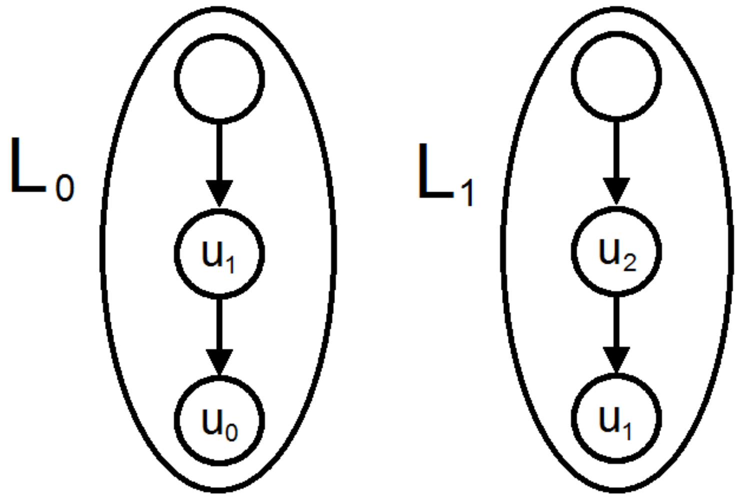
Sea $u_0 \in V(P)$, tal que $f(u_0) > 0$ y $M_f(u_0) > w(u_0)$, entonces existe una cadena $C \in \mathscr{C}(P)$, tal que $f^+[C(\geq u_0)] > w(u_0)$.

Denotemos a $L_0 = C(\geq u_0)$. Como $\mathscr{C}(P)$ es un conjunto cerrado de cadenas, entonces L_0 pertenece a $\mathscr{C}(P)$, u_0 es el mínimo de L_0 y $f^+[L_0] > w(u_0)$.

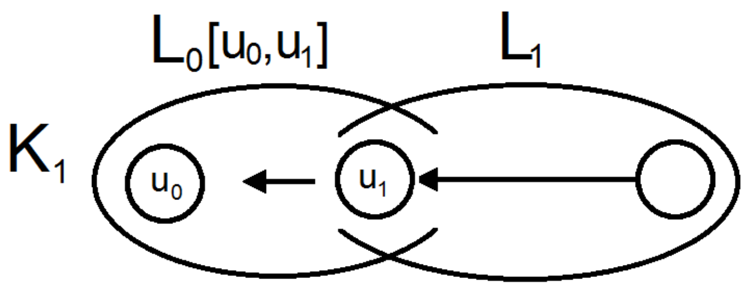
Si u_1 es el vértice de peso máximo en L_0. Como f es w-independiente,

$$w(u_1) = \text{máx}\left\{w(z) : z \in L_0\right\} \geq f^+[L_0] > w(u_0).$$

Por tanto, $u_0 \neq u_1$. Como f es w-dominante, $M_f(u_1) \geq w(u_1)$, es decir, existe una cadena L_1, tal que u_1 es el mínimo de L_1 y $f^+[L_1] \geq w(u_1)$. Sea $u_2 \in L_1$, tal que $w(u_2) = \text{máx}\left\{w(z) : z \in L_1\right\}$.



Si $u_1 = u_2$, entonces $w(u_1) = w(u_2) = \text{máx}\left\{w(z) : z \in L_0 \cup L_1\right\}$. Como f es w-independiente, $f^+[L_1] \leq w(u_1) = \text{máx}\{w(z) : z \in L_1\}$. Tomando la cadena $K_1 = L_0[u_0, u_1] \cup L_1$ de $\mathscr{C}(P)$, tenemos:



$$\begin{aligned} f^+[K_1] &= f^+[u_0, u_1) + f^+[L_1] \geq f(u_0) + w(u_1) \\ &> w(u_1) = \text{máx}\left\{w(z) : z \in K_1\right\} \end{aligned}$$

Contradiciendo el hecho de que f es w-independiente. Por tanto $u_2 >_P u_1$.

Repitiendo el proceso, como f es w-dominante, existe una cadena L_2, tal que u_2 es el mínimo de L_2 y $f^+[L_2] \geq w(u_2)$. Si tomamos a $u_3 \in L_2$, tal que $w(u_3) = \text{máx}\{w(z) : z \in L_2\}$, tendremos que $u_3 > u_2$, pues si suponemos que $u_2 = u_3$ y consideramos a $K_2 = L_1[u_1, u_2] \cup L_2$,

$$f^+[K_2] > w(u_3) = \text{máx}\{w(z) : z \in L_2\}$$

Contradiciendo la w-independencia de f.

Dado que P es finito, el proceso debe parar, llegando a una contradicción que surgió de suponer que f no es w-mansa. Por tanto, hemos demostrado el Lema. ■

Lema 3.2.10 *Sean P un orden parcial, $w : V(P) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función. Si $f, g : V(P) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ son dos funciones w-mansas, tal que $f \geq g$ y $T \subseteq D(f)$, entonces existe una función entera $h \geq g$, w-mansa, que cumple:*

1. *$h(v) = g(v)$ para todo $v \notin T$.*
2. *$T \subseteq D(h)$.*

Dem. Sean P un orden parcial, w, f, g funciones y $T \subseteq D(f)$ que cumplen las hipótesis del Lema y sea $U = T - D(g)$. Si $U = \emptyset$, entonces $h = g$ es la función deseada.

Supongamos que $U \neq \emptyset$. Iremos extendiendo a la función g de manera que se vayan dominando más elementos de T. Sea U_1 el conjunto de los elementos mayores de U, entonces U_1 es un conjunto independiente. Consideremos la función $g_1 : V(P) \to \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)$, definida por:

$$g_1(v) = \begin{cases} g(v) & si \quad v \notin U_1 \\ \\ w(v) - m_g(v) & si \quad v \in U_1 \end{cases}$$

Debido a que g y w son funciones enteras, entonces g_1 también lo es. Si $v \in U_1 \subseteq U$, entonces $v \notin D(g)$, por tanto, $M_g(v) < w(v)$. Así:

$$g_1(v) = w(v) - m_g(v) > M_g(v) - m_g(v) = g(v).$$

Por tanto $g_1 \geq g$.

Si $v \notin T$ entonces $v \notin U_1$, por lo cual, $g_1(v) = g(v)$ (g_1 cumple 1).

Afirmación 9 *g_1 es w-mansa.*

Tenemos que probar que para todo $v \in V(P)$, tal que $g_1(v) > 0$, entonces $M_{g_1}(v) \leq w(v)$ y lo haremos por casos:

Si $v \in U_1$, entonces v es un elemento mayor en U. Es decir, que para cada $u >_P v$, $u \notin U_1$ y por tanto $g_1(u) = g(u)$. Así

$$M_{g_1}(v) = m_{g_1}(v) + g_1(v) = m_g(v) + w(v) - m_g(v) = w(v) \quad (U_1 \subseteq D(g_1)).$$

Si $v \in (V(P) - U_1)$ y que $f(v) \geq g(v) = g_1(v) > 0$. Como f es w-mansa, $M_f(v) \leq w(v)$, entonces, para cada cadena, C, tal que $v \in C$ y $C(\geq v) \cap U_1 = \emptyset$,

$$g_1^+[C(\geq v)] = g^+[C(\geq v)] \leq f^+[C(\geq v)] \leq M_f(v) \leq w(v).$$

Sea C una cadena que contenga a v y $C(\geq v) \cap U_1 \neq \emptyset$. Como U_1 es un conjunto independiente, entonces existe $u \in V(P)$, tal que $C(\geq v) \cap U_1 = \{u\}$. Dado que $u \in U_1 \subseteq T \subseteq D(f)$, existe una cadena, C', con u el elemento mínimo de C', tal que $f^+[C'] = M_f(u) \geq w(u)$. Como $u >_P v$, $f^+[C'] = f^+[C'(\geq v)]$. Además, como $\{u\} = C \cap U_1$, para todo $z \in (C - u)$, $g_1(z) = g(z) \leq f(z)$. De donde:

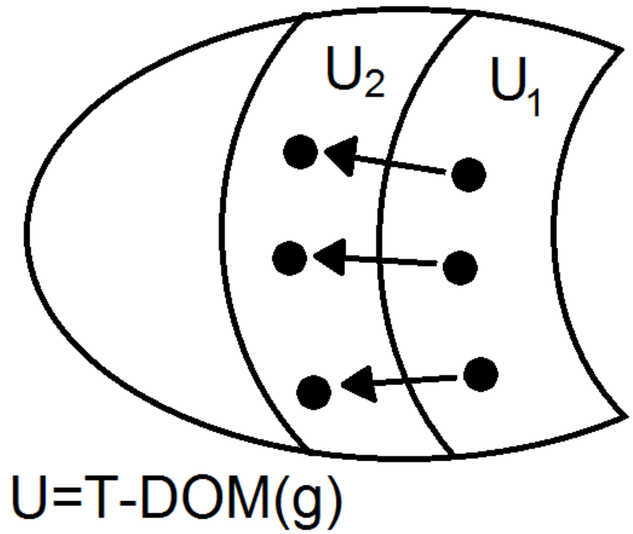
$$\begin{aligned}
g_1^+[C(\geq v)] &= g_1(u) + g_1^+[C(> u)] + g_1^+[C[v,u)] \\
&= [w(u) - m_g(u)] + g^+[C(> u)] + g^+[C[v,u)] \\
&\leq w(u) - m_g(u) + m_g(u) + f^+[C[v,u)] \\
&= w(u) + f^+[C[v,u)] \\
&\leq f^+[C'] + f^+[C[v,u)] \\
&= f^+[C'(\geq v)] + f^+\big[[C(< v)](\geq v)\big]
\end{aligned}$$

Tomando $C'' = C' \cup [C(< u)]$ $\big($que es cadena de $\mathscr{C}(P)$ pues $u \in (C \cap C')\big)$ y dado que f es w-mansa, podemos concluir que:

$$g_1^+[C(\geq v)] \leq f^+[C''(\geq v)] \leq M_f(v) \leq w(v).$$

Concluimos que, para todo $v \in V(P)$, tal que $g_1(v) > 0$, $M_{g_1}(v) \leq w(v)$, probando la Afirmación 9.

Como dijimos anteriormente, $U_1 \subseteq D(g_1)$ y debido a que $g_1 \geq g$, entonces $(D(g) \cup U_1) \subseteq D(g_1)$. Si $U = T - D(g) \subseteq D(g_1)$, $h = g_1$ es la función buscada. En caso contrario, repetiremos el procedimiento definiendo U_2 el conjunto de elementos mayores de $U - D(g_1)$.



Consideremos la función g_2, definida por:

$$g_2(v) = \begin{cases} g_1(v) & si \quad v \notin U_2 \\ \\ w(v) - m_{g_1}(v) & si \quad v \in U_2 \end{cases}$$

Debido a que g_1 y w son funciones enteras, g_2 también lo es. Además si $v \in U_2$, $v \notin D(g_1)$ $\big(M_{g_1}(v) < w(v)\big)$, entonces

$$g_2(v) = w(v) - m_{g_1}(v) > M_{g_1}(v) - m_{g_1}(v) = g_1(v).$$

Así, $g_2 \geq g_1$. Más aún, si $v \notin T$, $v \notin (U_2 \cup U_1)$ y $g_2(v) = g_1(v) = g(v)$ (g_2 cumple el inciso 1).

Afirmación 10 *g_2 es w-mansa.*

Hay que probar que para todo $v \in V(P)$, tal que $g_2(v) > 0$, entonces $M_{g_2}(v) \leq w(v)$ y lo haremos prácticamente igual que con g_1.

Si $v \in U_2$, como v es un elemento mayor en $U - D(g_1)$, para todo $z >_P v$, $z \notin U_2$ y $g_2(z) = g_1(z)$. Así,

$$M_{g_2}(v) = m_{g_2}(v) + g_2(v) = m_{g_1}(v) + w(v) - m_{g_1}(v) = w(v).$$

Si $v \in U_1$, para todo $u >_P v$, se tiene que $u \notin U_2$ $\big(g_2(u) = g_1(u)\big)$. Como $g_2(v) = g_1(v)$ y g_1 es w-mansa $M_{g_2}(v) = M_{g_1}(u) \leq w(u)$.

Supongamos que $v \notin (U_2 \cup U_1)$, entonces $f(v) \geq g(v) = g_1(v) = g_2(v) > 0$. Sea C una cadena de $\mathscr{C}(P)$ que contiene a v.

Si $C(\geq v) \cap U_2 = \emptyset$, dado que g_1 es w-mansa,

$$g_2^+[C(\geq v)] = g_1^+[C(\geq v)] \leq M_{g_1}(v) \leq w(v),$$

En caso contrario, $C(\geq v) \cap U_2 \neq \emptyset$. Como U_2 es un conjunto independiente, existe $u \in V(P)$, tal que $C \cap U_2 = \{u\}$, entonces $u \in U_2 \subseteq T \subseteq D(f)$. Es decir, existe una cadena C', tal que u es el mínimo de C' y $f^+[C'] = M_f(u) \geq w(u)$. Como $u >_p v$, $f^+[C'] = f^+[C'(\geq v)]$. Por otro lado, $\{u\} = C \cap U_2$, para todo $z \in C(< u)$, $z \notin (U_2 \cup U_1)$ y $g_2(z) = g_1(z) = g(z) \leq f(z)$ y para todo $z \in C(> u)$, $g_2(z) = g_1(z)$. Así:

$$\begin{aligned}
g_2^+[C(\geq v)] &= g_2(u) + g_2^+[C(> u)] + g_2^+[C[v,u)] \\
&= [w(u) - m_{g_1}(u)] + g_1^+[C(> u)] + f^+[C[v,u)] \\
&\leq w(u) - m_{g_1}(u) + m_g(u) + f^+[C[v,u)] \\
&= w(u) + f^[C[v,u]] \\
&\leq f^+[C'] + f^+[C[v,u)] \\
&= f^[C'(\geq v)] + f^+\big[[C(< u)](\geq v)\big]
\end{aligned}$$

Si consideramos a $C'' = C' \cup C(< u)$ y debido a que f es w-mansa:

$$g_2^+[C(\geq v)] \leq f^+[C''(\geq v)] \leq M_f(v) \leq w(v).$$

Por tanto, para todo $v \in V(P)$, tal que $g_2(v) > 0$, $M_{g_2}(v) \leq w(v)$, probando la Afirmación 10.

Si $v \in U_2$, entonces para todo $z >_P v$, $g_2(z) = g_1(z)$. Por tanto,

$$M_{g_2}(v) = m_{g_2}(v) + g_2(v) = m_{g_1}(v) + w(v) - m_{g_1}(v) = w(v),$$

De donde, $U_2 \subseteq D(g_2)$. Si $v \in D(g_1)$, como $g_2 \geq g_1$

$$M_{g_2}(v) \geq M_{g_1} \geq w(v).$$

Por tanto $\big(D(g_1) \cup U_2\big) \subseteq D(g_2)$.

Si para todo $v \in U$, $v \in D(g_2)$, entonces $T \subseteq D(g_2)$ y $h = g_2$ es la función buscada. En caso contrario, continuando el proceso, llegaremos a una función que domine a T por completo, pues T es finito. ∎

Habiendo demostrado los Lemas 3.2.9 y 3.2.10, proseguiremos a demostrar que en la unión de dos órdenes parciales, $P \cup Q$, y una función de pesos entera, w, existe un núcleo pesado entero manso.

Definiremos inductivamente una sucesión de conjuntos, $S_0, S_1, S_2, ...$, tales que $S_0 \subset S_1 = S_2 \subset S_3 = S_4 \subset ... = S_{2n} \subset S_{2n+1} = S_{2(n+1)} ...$, también definiremos una sucesión de funciónes f_k, de manera que ambas sucesiones satisfagan:

1. Si $k = 2n$, entonces f_{2n} domina a S_{2n} en Q, domina a $(V - S_{2n})$ en P y f_{2n} es w-mansa en P.
2. Si $k = 2n+1$, entonces f_{2n+1} domina a S_{2n+1} en Q y f_{2n+1} es w-mansa en P y Q.
3. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_{2n} \geq f_{2n-1}$ y $f_{2n+1} \leq f_{2n}$.

Notemos que si f_{2n} es w-mansa en Q, entonces sería w-independiente en P y Q (por la Proposición 3.2.6), y como f_{2n} es w-dominante en ambos, f_{2n} sería núcleo pesado.

Si f_{2n+1} domina a $(V - S_{2n+1})$ en P, entonces sería w-dominante en ambos órdenes y como es w-independiente (por la Proposición 3.2.6), f_{2n+1} sería el núcleo pesado buscado.

Teorema 3.2.11 *Para cada P y Q órdenes parciales sobre el mismo conjunto de vértices, V, y w una función de pesos entera no negativa sobre V, existe un núcleo pesado entero manso en $\mathscr{P} = P \cup Q$.*

Dem. Sea $\mathscr{P} = P \cup Q$ una pareja de ordenemos parciales sobre un conjunto V y $w : V \to \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)$ una función.

- Por el Lema 3.2.7, P tiene un núcleo pesado entero f_0. Por el Lema 3.2.9, f_0 es w-mansa. Consideremos a $S_0 = \emptyset$, entonces f_0 domina a $(V - S_0) = V$ en P, con lo cual, f_0 y S_0 satisfacen las condiciones 1. y 3.

  Si f_0 es w-mansa en Q, entonces $f = f_0$ es un núcleo pesado entero de $\mathscr{P}$. En otro caso, continuaremos construyendo las sucesiones.

- Supongamos que f_0 no es w-mansa en Q y sea v_1 un elemento mayor de Q entre los vértices que cumplen que $f_0(v_1) > 0$ y existe una cadena C en $\mathscr{C}(Q)$, tal que $f_0^+[C(\geq v_1)] > w(v_1)$.

  Definimos $f_1(v_1) = \max\big\{w(v_1) - f_0^+[C(> v)], 0\big\}$ y para todo $x \neq v_1$, $f_1(x) = f_0(x)$ y sea $S_1 = S_0 \cup \{v_1\} \supset S_0$. Por tanto,

$$f_1(v_1) = 0 \text{ y } f_1^+[C(\geq v_1)] = f_0^+[C(> v_1)] \geq w(v_1) \text{ ó}$$
$$f_1(v_1) > 0 \text{ y } f_1^+[C(\geq v_1)] = f_0^[C(> v_1)] + f_1(v_1) = w(v_1)$$

Es decir, f_1 cumple la definición de w-mansa en v_1 (en Q) y f_1 domina a v_1 (en Q). Si f_1 no es w-mansa en Q, repetimos el proceso tomando un nuevo elemento, $v_2 \in (V - S_1)$, mayor en Q para el cual no se cumpla la definición y obtenemos una nueva función f_1 cambiando únicamente la imagen de v_2 y agregándolo a S_0. Repetimos este proceso hasta llegar a una función f_1, la cual es w-mansa en Q y que domina a S_1 en Q.

Si $f_1(v_i) = 0$, entonces $f_1(v_i) < f_0(v_i)$, en otro caso

$$f_1(v_i) = w(v) - f_0^+[C(> v_i)] < f_0^+[C(\geq v_i)] - f_0^+[C(> v_i)] = f_0(v_i).$$

De ambos casos tenemos que para todo $v_i \in S_1$, $f_1(v_i) < f_0(v_i)$. Así, $f_1 \leq f_0$ y como f_0 es w-mansa en P, f_1 también lo es cumpliéndose las condiciones 2. y 3.

- Supongamos que hemos construido $2n-1$ funciones y conjuntos que cumplen las condiciónes 1. 2. y 3. Si f_{2n-1} domina a $(V - S_{2n-1})$ en P, entonces $f = f_{2n-1}$ es un núcleo pesado entero de $\mathscr{P}$.

  Digamos que f_{2n-1} no domina a $(V - S_{2n-1})$. Por 3., $f_{2n-1} \leq f_{2n-2}$ y por 1. y 2., ambas funciones son w-mansas en P. Por 1., f_{2n-2} domina a $(V - S_{2n-2})$ en P y como $S_{2n-2} \subseteq S_{2n-1}$, entonces f_{2n-2} domina a $(V - S_{2n-1}) = T$ en P. Por tanto f_{2n-2}, f_{2n-1} y T cumplen las hipótesis del Lema 3.2.10.

  Aplicando dicho Lema, existe una función $h = f_{2n}$ w-mansa en P, tal que para todo $v \in S_{2n-1} = S_{2n}$, $f_{2n}(v) = f_{2n-1}(v)$, f_{2n} domina a $T = V - S_{2n-1} = V - S_{2n}$ en P y $f_{2n} \geq f_{2n-1}$. Como f_{2n-1} domina a $S_{2n-1} = S_{2n}$ en Q, entonces f_{2n} también domina a S_{2n} en Q. Así, f_{2n} satisface las condiciones 1. y 3.

- Por último, supongamos que hemos construido $2n$ funciones y conjuntos que cumplen las condiciones 1. 2. y 3. Si f_{2n} es w-mansa en Q, entonces $f = f_{2n}$ es el núcleo pesado que buscamos. En caso contrario, cambiaremos la imagen de los vértices para los cuales f_{2n} no es w-mansa de la misma manera en que lo hicimos al crear f_1, empezando por los mayores.

Si v es uno de estos vértices, entonces existe una cadena C en $\mathscr{C}(Q)$, tal que $f^+_{2n}[C(\geq v)] > w(v)$. Definimos $f_{2n+1}(v) = \text{máx}\left\{w(v) - f^+_{2n}[C(> v)], 0\right\}$ y para todo $x \neq v$, $f_{2n}(x) = f_{2n-1}(x)$, obteniendo así una función f_{2n+1} la cual será w-mansa en Q. Como f_{2n} es w-mansa en P y $f_{2n+1} \leq f_{2n}$ entonces f_{2n+1} también es w-mansa en P. Recordemos que cada vértice modificado se añade a S_{2n} hasta crear el conjunto S_{2n+1}. Sólo resta demostrar que f_{2n+1} domina a S_{2n+1} en Q.

Sea D el conjunto de vértices a los que se les modificó su imagen durante este proceso. Es decir,

$$D = \{v \in V : f_{2n}(v) > f_{2n+1}(v)\}$$

Entonces $S_{2n+1} = S_{2n} \cup D$, de igual manera que al crear f_1, para todo $v \in D$:

$$\begin{aligned} M_{f_{2n+1}}(v) &= m_{f_{2n+1}}(v) + f_{2n+1}(v) \\ &\geq f^+_{2n}[C(> v)] + \text{máx}\left\{w(v) - f^+_{2n}[C(> v)], 0\right\} \\ &= \text{máx}\left\{w(v), f^+_{2n}[C(> v)]\right\} \geq w(v). \end{aligned}$$

Así, f_{2n+1} domina a D en Q.

Sea $v \in (S_{2n} - D)$, entonces $f_{2n}(v) = f_{2n+1}(v)$. Por la condición 2., f_{2n-1} domina a $S_{2n-1} = S_{2n}$ en Q, entonces existe una cadena C en $\mathscr{C}(Q)$, tal que

$$f^+_{2n-1}[C(\geq v)] \geq w(v) \qquad (1)$$

Si para todo $u \in C(\geq v)$, $f_{2n+1} \geq f_{2n-1}$, entonces $f^+_{2n+1}[C(\geq v)] \geq w(v)$ (f_{2n+1} domina a v en Q). En otro caso, sea u' el mínimo de $C(> v)$, tal que $f_{2n+1} < f_{2n-1}$. Por la condición 2., f_{2n-1} es w-mansa, entonces

$$f^+_{2n-1}[C(\geq u')] \leq w(u') \qquad (2)$$

Como u' es un mínimo, para todo $x \in C[v, u')$, $f_{2n+1}(x) \geq f_{2n-1}(x)$, por lo cual

$$f^+_{2n+1}\big[C[v, u')\big] \geq f^+_{2n-1}\big[C[v, u')\big] \qquad (3)$$

Por la condición 3., $f_{2n+1}(u') < f_{2n-1}(u') \leq f_{2n}(u')$. Es decir, $u' \in D$. Entonces existe una cadena C' de $\mathscr{C}(Q)$, tal que $u' \in C'$ y

$$f_{2n+1}[C(\geq u')] \geq w(u') \qquad (4)$$

Sea $C'' = C'(\geq u') \cup C[v, u')$ (cadena de $\mathscr{C}(Q)$, pues $u' \in (C' \cap C)$ y Q es transitivo), usando (1), (2), (3) y (4):

$$\begin{aligned} f^+_{2n+1}[C''(\geq v)] &= f^+_{2n+1}[C'(\geq u')] + f^+_{2n+1}\big[C[v, u')\big] \\ &\geq w(u') + f^+_{2n-1}\big[C[v, u')\big] \\ &\geq f^+_{2n-1}\big[C(\geq u')\big] + f^+_{2n-1}\big[C[v, u')\big] \\ &= f^+_{2n-1}\big[C(\geq v)\big] \geq w(v) \end{aligned}$$

Por tanto, f_{2n+1} domina a S_{2n+1} y cumple las condiciones 2. y 3.

Si la sucesión S_k es estricta creciente, el proceso se detiene en un paso $2n+1$, en el cual $S_{2n+1} = V$ y f_{2n+1} es w-mansa en P y Q (por tanto w-independiente), y domina a $S_{2n+1} = V$ en Q (es w-dominante). Por tanto $f = f_{2n+1}$ es el núcleo pesado que buscamos.

Si existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = ...$, implica que en un paso impar, $2j+1$, $D \subseteq S_{2j}$, donde D es el conjunto de vértices para los cuales f_{2j} no es w-mansa en Q. Como el proceso requiere disminuir el valor de la imagen de los elementos de D y las funciónes f_k son enteras, existe $j' \in \mathbb{N}$, tal que para todo $z \in S_{2j'+1}$, $f_{2j'+1}(z) = 0$. Por tanto, $f = f_{2j'+2}$, domina a S_{2j+2} en Q, domina a $(V - S_{2j+2})$ en P y es w-mansa tanto en P como en Q (pues los vértices que fallaban en Q, ahora tienen imagen cero), obteniendo el núcleo pesado deseado. $\blacksquare$

Conclusiones

Encontramos propiedades de las funciones fraccionales (independiente, dominante y fuerte), expusimos su comportamiento y la relación que tiene con las nociones usuales, incluso encontramos una caracterización de las digráficas semicompletas en la Proposición 2.1.7.

Dimos una presentación del Teorema de Scarf (Teorema 2.4.6), un pequeño ejemplo de lo que son los conjuntos subordinados y bases factibles y como se pueden aplicar en una digráfica clan-acíclica, para obtener un núcleo fraccionado fuerte.

Exhibimos algunas propiedades de las gráficas perfectas, demostramos que dichas gráficas son núcleo solubles utilizando (fuertemente) la sustitución de vértices. Esta sustitución nos llevó a una caracterización de las gráficas perfectas (Corolario 2.5.8).

Por último, mostramos la conexión que existe entre los órdenes parciales y la clase de las digráficas transitivas acíclicas y vimos coincidir la noción de núcleo en dichos órdenes con la noción usual (Proposición 3.1.1). Expusimos algunas propiedades de los núcleos pesados como generalización de los núcleos fraccionados y la obtención de un núcleo pesado entero en la unión de dos órdenes parciales.

Queda como conjetura que la unión de un número finito de órdenes parciales tiene un núcleo pesado entero.

Bibliografía

[1] C. Berge and P. Duchet, "Seminaire MSH", Paris, 1983.

[2] E. Boros and V. Gurvich, Perfect graphs are kernel solvable, DIMACS Technical Report, 1994.

[3] R. Aharoni, R. Holzman, Fractional kernels in digraphs, J. Comb. Theory Ser. B 73, (1998), 1-6.

[4] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, On monochromatic paths in edge-coloured digraphs, J. Comb. Theory Ser. B 33, (1982), 271-275.

[5] R. Aharoni, E. Berger, I. Gorelik, Kernels in weighted digraphs, Order 31(1), (2014), 35-43.

[6] H. Scarf, The core of an n person game, Econometrica 35 (1967), 50-69.

[7] L. Lovász, A characterization of perfect graphs, J. Comb. Theory Ser. B 13 (1972), 95-98.

[8] L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discrete Math., (1972), 253-267.