



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MECÁNICA - MECATRÓNICA

Propuesta de la arquitectura cinemática de un exoesqueleto de  
miembros inferiores mediante análisis cinemático espacial

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

RUBÍ PINTO PALMERO

Tutores principales:

Dr. Jesús Manuel Dorador González, Facultad de Ingeniería

M. I. Serafin Castañeda Cedeño, Facultad de Ingeniería

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., noviembre 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Francisco Cuenca Jiménez

Secretario: Dr. Leopoldo Adrián González González

Vocal: Dr. Jesús Manuel Dorador González

1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Lázaro Morales Acosta

2<sup>do</sup> Suplente: M.I. Serafin Castañeda Cedeño

Lugar donde se realizó la tesis:

Departamento de Posgrado en Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Jesús Manuel Dorador González

-----  
**FIRMA**





*A mi madre...*

*A los que han creído en mí...*

الْحَمْدُ لِلَّهِ



*“Cuanto más grande es la dificultad, más gloria hay en superarla”*

**Epícuro De Samos**



# Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a:

Mi Madre, por todo su apoyo, su esfuerzo, su amor incondicional y por darme la certeza de que su guía siempre estará presente, por ser mi pilar, por confiar en mis decisiones, por ser mi mentora y consejera en la vida, enseñándome que con esfuerzo, trabajo y constancia todo se puede conseguir e inculcándome esos deseos de superación en cada etapa. Madre, gracias por todo.

Mi familia, quienes me han impulsado a superarme y enseñarme a no rendirme ante los obstáculos. Particularmente a mis sobrin@s, quienes me han dado la alegría y la ilusión de la vida.

Yucel, a quien admiro por no tenerle miedo a las adversidades y dejarlo todo por seguir sus sueños y lo que le apasiona; por descubrir nuevos lugares a su lado y conocer el mundo a través de sus ojos. Who shared his words, experiences, travels, gave me unforgettable moments and motivation, and made me happier and empowered. Sen bana verdiğin tüm aşk belirtileri için çok teşekkürler. **بارك الله فيك!**

Cristhian y Pedro, por su amistad, y quienes sin esperar nada a cambio compartieron sus conocimientos, alegrías, experiencias, miedos e ilusiones durante las clases y proyectos logrando así hacer de la Maestría una etapa de crecimiento divertida y especial. Del mismo modo, a Adán, que en su momento creyó en mi capacidad, me motivó a no darme por vencida, a seguir adelante y culminar esta etapa.

Mis amig@s: Diana, Efraín, Fátima, Geraldine, Heidi, Liliana, Paulina, quienes en todo momento e incondicionalmente estuvieron a mi lado motivándome y apoyándome a lo largo de este logro.

El Dr. Jesús Manuel Dorador y al M. en I. Serafin Castañeda por su apoyo y confianza en mi trabajo, por sus comentarios constructivos para que este proyecto llegara a su culminación lo mejor posible.

El Dr. Francisco Cuenca, a quien le tengo una gran gratitud porque él fue crucial para llevar a termino esta tesis. Quiero agradecerle a él por cada detalle y momento dedicado para aclarar cualquier tipo de duda que me surgiera. Además, por la claridad, exactitud y pasión con la que enseña cada clase.

La M. en I. Tania López por su gran capacidad de liderazgo con calidad humana, quien inspira por su paciencia, tolerancia, su virtud de mediadora, sus consejos, quien depositó su confianza profesionalmente en mí, por las oportunidades que me ha brindado y sobre todo por apoyarme a finalizar esta fase.

La Universidad Nacional Autónoma de México, mi Alma Mater, junto con la Facultad de Ingeniería, han sido mi segunda casa, y a las cuales estoy agradecida por todo lo que me han dado y en lo que me he convertido dentro de ellas y con ellas.

El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el respaldo económico durante toda la Maestría.

Así mismo, a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la UNAM, por el apoyo al proyecto PAPIIT IT 102014 “*Exoesqueleto de miembro inferior para pacientes con paraplejía*” facilitando los medios necesarios, para desarrollarme y aplicar mis conocimientos en el presente proyecto del cual forma parte.

A handwritten signature in black ink, reading "Rubi Pinto Palmero". The signature is written in a cursive, flowing style.

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, noviembre 2020

# ÍNDICE

RESUMEN.....	1
ABSTRACT .....	3
INTRODUCCIÓN .....	5
CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES.....	11
<b>1.1 Aumento de capacidades y habilidades.....</b>	<b>11</b>
<b>1.2 Rehabilitación.....</b>	<b>13</b>
<b>1.3 Cuadro clínico del lesionado medular T5.....</b>	<b>16</b>
<b>1.4 Marcha Humana.....</b>	<b>18</b>
<b>1.5 Análisis anatómico del miembro inferior: cadera, rodilla y tobillo.....</b>	<b>19</b>
1.5.1. Localización de los centros de rotación (CoR) .....	25
1.5.2. Medidas antropométricas.....	30
CAPÍTULO 2 ANÁLISIS CINEMÁTICO.....	35
<b>2.1. Análisis de Posición Matricial .....</b>	<b>36</b>
2.1.1. Modelo de la Primera configuración.....	39
2.1.2. Modelo de la Segunda Configuración.....	42
2.1.3. Modelo de la Tercera Configuración .....	43
2.1.4. Modelo de la Cuarta Configuración .....	45
2.1.5. Modelo de la Quinta Configuración .....	47
<b>2.2. Análisis de Velocidad Matricial .....</b>	<b>51</b>
<b>2.3. Análisis de Aceleración Matricial.....</b>	<b>52</b>
CAPÍTULO 3 CINEMÁTICA INVERSA .....	57



<b>3.1. Obtención de la Trayectoria del efector final (tobillo)</b> .....	57
3.1.6. Trayectoria Lineal.....	58
3.1.7. Orientación angular .....	60
<b>3.2. Gráficas de Posición</b> .....	62
<b>3.3. Gráficas de Velocidad</b> .....	66
<b>3.4. Gráficas de Aceleración</b> .....	70
<b>CAPÍTULO 4 SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE DATOS</b> .....	75
<b>4.1. Obtención de las Trayectorias angulares</b> .....	75
<b>4.2. Comparación de resultados de Posición</b> .....	78
4.2.1. Comparación A.....	79
4.2.2. Comparación B.....	82
4.2.3. Comparación C.....	85
4.2.4. Comparación D.....	86
4.2.5. Comparación E.....	89
<b>4.3. Ajuste de la trayectoria de desplazamiento lineal del efector final (Tobillo)</b> .....	91
<b>4.4. Modelado y solución cinemática inversa con las medidas reales del exoesqueleto físico</b> .....	100
<b>CAPÍTULO 5 PROPUESTA DE METODOLOGÍA EXPERIMENTAL</b> .....	109
<b>5.1. Intro protocolo y métodos experimentales</b> .....	111
<b>5.2. Validación de las medidas de las trayectorias angulares</b> .....	112
<b>5.3. Validación de la marcha</b> .....	113
<b>5.4. Análisis de los datos biomecánicos</b> .....	114
<b>5.5. Factores que afectan las mediciones</b> .....	115
<b>5.6. Discusión</b> .....	115

CONCLUSIONES.....	117
APORTACIONES.....	121
APÉNDICES Y ANEXOS.....	123
Apéndice A.....	123
Apéndice B.....	124
Apéndice C.....	126
Posición.....	126
Primera configuración.....	126
Segunda configuración.....	128
Tercera configuración.....	129
Cuarta configuración.....	131
Velocidad.....	134
Aceleración.....	136
Apéndice D.....	142
Glosario.....	172
BIBLIOGRAFÍA O REFERENCIAS.....	173



# RESUMEN

El resultado de esta tesis es una configuración mecánica para un exoesqueleto de miembros inferiores, en donde se pretende que las dimensiones de los eslabones y la posición espacial de las juntas sean las más adecuadas, tanto en posición como en dimensiones, para mejorar la interacción entre exoesqueleto y humano, dado que es de suma importancia la investigación sobre la configuración mecánica de un dispositivo que interactúa de manera completa con el usuario, en dicha configuración se persigue que los mecanismos involucrados tengan la función de articular de la manera más factible posible, contemplando la antropometría funcional del usuario, no sólo en forma sino también en función.

El presente trabajo formó parte del proyecto PAPIIT IT 102014 “Exoesqueleto de Miembro Inferior para pacientes con paraplejía” y en esta segunda etapa se evaluaron consideraciones antropomórficas y clínicas. Las consideraciones antropomórficas consistieron en el análisis del movimiento biomecánico y su representación cinemática articular (cadera, rodillo y tobillo), la cual fue analizada mediante técnicas de robótica, mientras que las clínicas, de manera experimental y bases de datos clínicos.

Hasta el momento la mayoría de las investigaciones y desarrollos por ejemplo [1], [2], [3] tratan sobre la parte de control y función mecánica de un exoesqueleto, dejando a un lado el planteamiento ergonómico y la correlación que existe con el paciente, por tal motivo se trabajó en la obtención de una configuración de un mecanismo que permita realizar una movilidad similar a la del usuario, sin dejar de ser el apoyo principal para la eficiencia del aparato muscular y por último y más importante reducir al máximo las consecuencias secundarias en la salud de las personas que pretenden usarlos.

Por ende, en este trabajo se llevó a cabo la aplicación de un método para el diseño de la configuración mecánica de la interfaz humano-máquina y máquina-contorno para el diseño de la configuración de un exoesqueleto, en la cual se tomaron en cuenta las propiedades biológicas de las extremidades humanas [4]. El método se



utilizó para el diseño de la configuración mecánica de un exoesqueleto de miembros inferiores para pacientes con lesión medular T5 completa.



# ABSTRACT

The result of this thesis is a mechanical configuration for a lower limb exoskeleton, where the dimensions of the links and the spatial position of the joints are intended to be the most appropriate, both in position and in dimensions, to improve the interaction between an exoskeleton and a human. Given that it is of the utmost importance to investigate the mechanical configuration of a device that interacts completely with the user, in such a configuration the aim is that the mechanisms involved have the function of articulating in the most feasible way, contemplating the functional anthropometry of the user, not only in form but also in function.

The present work was part of the PAPIIT IT 102014 project “Exoesqueleto de Miembro Inferior para pacientes con paraplejía” and in the second stage anthropomorphic and clinical considerations were evaluated. The anthropomorphic considerations consisted of the analysis of biomechanical movement and its kinematic representation in the joints (hip, knee and ankle), which was analyzed by means of robotic techniques, while the clinical ones were analyzed in an experimental way and by means of clinical databases.

Until now, most of the research and development, for example [1], [2], [3], has been about the control and mechanical function of an exoskeleton, leaving aside the ergonomic approach and the correlation with the patient. For this reason, was worked on obtaining a configuration of a mechanism that allows a mobility similar to that of the user, while remaining the main support for the efficiency of the muscular apparatus and, finally and most importantly, reducing as much as possible the secondary consequences on the health of the people who intend to use them.

Therefore, in this work, a method for the design of the mechanical configuration of the human-machine and machine-contour interface was applied to the design of an exoskeleton configuration, in which the biological properties of the human limbs were taken into account [4]. The method was used to design the mechanical configuration of a lower limb exoskeleton for patients with complete T5 spinal cord injury.





# INTRODUCCIÓN

Un exoesqueleto robótico usado por un humano ha sido en gran medida un tema de ciencia ficción. Se han hecho intentos para construir exoesqueletos de miembros inferiores, tanto para el aumento del rendimiento como para fines de rehabilitación. En general, estos intentos se basan en una interpretación de la actividad muscular para después ordenar movimiento a las juntas del exoesqueleto, o en una señal de mando consciente por parte del usuario, o se limitan a un conjunto fijo de actividades físicas predeterminadas.

Existen distintas formas de locomoción, en particular el ser humano realiza la marcha, aunque parezca la más sencilla y cotidiana, es de lo más complejo emular ese mecanismo y sus procesos para llevarlo a cabo, ya que cada miembro inferior del humano consta de 29 grados de libertad, 48 músculos y una compleja coordinación neuromuscular que en conjunto constituyen un adversidad, y que se disminuye de manera considerable a causa de un daño neuromuscular, atrofia muscular o distrofia muscular en personas discapacitadas.

Las extremidades inferiores permiten el desplazamiento y son la base de la independencia de una persona; por esta razón la mayoría de los desarrollos basan sus esfuerzos en la asistencia y la rehabilitación de las personas que han sufrido algún accidente o que presentan alguna patología que afecte su movimiento.

En gran medida la lesión medular afecta en su mayoría a personas del sexo masculino en una edad que varía de los 16 a los 30 años, ya que la mayor parte de esta condición es ocasionada por accidentes de tránsito [5]. Sólo el 0.9% de las lesiones medulares tienen una recuperación total y, si bien es posible una mejoría neurológica local, la lesión completa no presenta una recuperación motora distal.

El déficit motor es la causa principal de discapacidad física y sigue siendo el área sobre la que actúa la rehabilitación de forma prioritaria. Es por ello que se han llevado a cabo investigaciones y desarrollos para impulsar los exoesqueletos, los cuales no sólo tienen un uso médico, sino también en distintos campos como, por ejemplo,





la milicia, búsqueda y rescate, el deporte, laboral, etc. En la mayoría del desarrollo y diseño de exoesqueletos existentes se apoyan en distintas disciplinas como la medicina, la electrónica y la mecánica, pero toman poca importancia entre la interfaz de robot-humano, por lo cual, en este trabajo se presentan restricciones clínicas y anatómicas empleadas en la robótica asistencial.

En este apartado se revisa la historia y se discute el estado del arte en exoesqueletos de extremidades inferiores. Si bien todavía hay muchos desafíos asociados al desarrollo de exoesqueletos que aún no se han perfeccionado, los avances en este campo han sido enormes.

Es de gran relevancia el estudio de la biomecánica y de las configuraciones mecánicas involucradas del cuerpo humano para así entender mejor su movilidad y la forma en que describen sus movimientos (en este caso las extremidades inferiores junto con la cadera).

La etapa crónica de los lesionados medulares se prolonga para el resto de la vida del individuo y los terapeutas tienen como objetivos: aumentar la actividad, la tolerancia a la movilidad y promover las actividades de autocuidado en las personas afectadas.

Es por ello que, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, se han realizado trabajos de investigación para diseñar un exoesqueleto con la restricción que sea destinado a personas con lesión medular T5 (torácica 5) completa.

En la literatura publicada hasta hoy existente, se aprecia que las órtesis, prótesis o exoesqueletos no han estudiado una configuración que contemplen todas las propiedades biológicas de las extremidades humanas [6], lo que provoca cambios en la activación muscular, dañando el sistema músculo-esquelético del usuario [7].

Existen muchos problemas con el diseño de robots para rehabilitación [8], por ejemplo:

- Problemas relacionados con la alineación de las juntas robot-paciente;
- Problemas relacionados con la redundancia del efector final;



- Interpretación errónea o una incorrecta simplificación de la cinemática;
- Consecuencias de la creación de fuerzas residuales en las articulaciones si ocurren desajustes entre el dispositivo y la extremidad humana, y espasmos musculares del paciente (en algunos casos);
- Identificación de los materiales biocompatibles.

Otro problema de la robótica de rehabilitación actualmente conocida es su limitación en el espacio de trabajo y la falta de capacidad para interactuar sin problemas con el movimiento de las extremidades humanas, limitando en gran medida las funciones del sistema biomecánico del usuario dado que no hay robots que tengan los mismos grados de libertad que un humano, eso es lógico ya que un humano cuenta con al menos 58 grados de libertad en el tren inferior

Dado que son muchos los retos, el presente trabajo está acotado a poder mejorar el diseño de un mecanismo para exoesqueleto el cual ayudará a resolver los tres primeros problemas mencionados anteriormente usando el análisis cinemático como medio de diseño y validación.

Por lo que en el proyecto PAPIIT arriba mencionado, se pretende rediseñar el sistema integumentario que cumple con la función protectora y mecánica, proporcionando el sostén necesario para la eficacia del aparato muscular y el grado de protección adecuado para cada uno de los componentes y elementos; comprobando su movilidad y su capacidad de soporte y transmisión de carga al cuerpo humano, desde los dos planos principales: sagital y frontal, en un diseño conceptual y de configuración.

Tomando los fundamentos anteriores y los alcances del proyecto, esta Tesis tiene como objetivos principales:

*Desarrollar el modelo cinemático del sistema exoesquelético del tren inferior, con base en el diseño conceptual aplicando el método paradigmático para las juntas y hacer iteraciones en cuanto a localización y dimensión de los eslabones para que las trayectorias que siga el mecanismo sean lo más similares a las humanas, considerando un menor número de grados de libertad.*



*Basado en el modelo cinemático, realizar el análisis cinemático espacial y temporal durante el ciclo de la marcha.*

*Proponer una configuración mecánica que cumpla con una movilidad suave, continua y sobre todo que se asemeje de la mejor manera a la marcha humana desde la perspectiva del plano sagital y frontal.*

Ya que la mayoría de los desarrollos de los dispositivos tiene la desventaja de requerir alinear de manera exacta las articulaciones externas con las biológicas, mientras que otros hacen redundancia en las articulaciones y provoca articular todos los Grados de Libertad (GDL). El presente diseño no necesita la alineación estricta de las articulaciones. En consecuencia, con este procedimiento se busca obtener un mayor espacio de trabajo con el exoesqueleto para incorporar los sistemas motrices que proveerán movimiento al dispositivo.

Para asegurar que se cumplen los requisitos para la marcha humana en el exoesqueleto pseudo-antropomórfico y a su vez en el paciente, se realizará un análisis del error generado entre la trayectoria articular de la configuración del exoesqueleto y la trayectoria de un paciente sano al realizar la marcha, con base en dicho error se determinará cuál configuración cumple mejor con los objetivos del trabajo. Hasta el momento sólo se realizará el análisis cinemático y se compararán las posiciones angulares entre las del exoesqueleto y las del usuario en cada una de las articulaciones.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo I, se hablará sobre los antecedentes que involucran el diseño de exoesqueletos, y el estado del arte que conlleva el análisis cinemático y cómo atacan los problemas en el diseño de estos. Además, se lleva a cabo la aplicación del método para proponer cinco configuraciones del exoesqueleto.

En el segundo capítulo se desarrolla la cinemática directa para cada una de las configuraciones propuestas.

En el siguiente capítulo se describe cómo resolver la cinemática inversa y las herramientas que se ocuparon para ello.



En el cuarto capítulo se describen las pruebas y ajustes del modelo del mecanismo simulado y lo teórico.

Y en el último capítulo, se plantean las pruebas en el exoesqueleto físico para comprobar que lo simulado es congruente con lo obtenido mediante pruebas; y se comentan los resultados obtenidos durante la investigación y desarrollo de la Tesis.





# CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES

Desde finales de la década de 1960 hasta la fecha, los avances que se han tenido alrededor del mundo en cuanto a la robótica bípeda han sido realmente asombrosos. Los pioneros en esta área sin duda alguna son los japoneses, destacando aquellas familias de robots desarrolladas por la Universidad de Waseda en Tokio, y el famoso humanoide ASIMO construido por la compañía Honda. También cabe destacar los desarrollos que desde principios de la década de 1980 ha presentado el MIT con resultados exitosos.

Debido a la complejidad del cuerpo humano, específicamente los miembros inferiores, muchos investigadores se han dado a la tarea de resolver desafíos como el diseño, desarrollo y construcción de sistemas o dispositivos específicos y no de forma completa, También puede atacarse desde algún sistema determinado (por ejemplo: el control y la parte electrónica, la parte de potencia y ahorro de energía o desde la configuración mecánica).

Existen diferentes tipos de exoesqueletos, en donde la forma y la estructura dependen de las tareas a realizar por el usuario, esto es, la aplicación que desean darle. Las dos importantes aplicaciones para los exoesqueletos son aquellas diseñadas al: incremento de las capacidades del cuerpo humano (fuerza, velocidad, resistencia, etc.), y la rehabilitación y la asistencia a personas con capacidades diferentes, ambas en miembros superiores y/o inferiores.

## 1.1 Aumento de capacidades y habilidades

La investigación aportada sobre exoesqueletos diseñados para fines de milicia es relativa a la instrumentación y la construcción de los mismos. Dichos diseños implican un alto grado de complejidad, por lo tanto, se contribuye con el conocimiento para que se pueda usar, también, en estructuras con objetivos médicos. Uno de los desarrollos más importantes hasta el momento, es el propuesto en [1], el cual se encarga de aumentar la fuerza del soldado al poder soportar grandes cargas,



este exoesqueleto tiene cuatro GDL en la pierna izquierda y tres GDL en la derecha. En otro artículo [9] se describe el uso de datos clínicos para el análisis de marcha, y el marco para el diseño de un sistema de este tipo. Se muestra un análisis de la marcha para cada articulación involucrada. Se observan curvas que relacionan el tiempo con el ángulo, el par de torsión y la potencia. Importantes deducciones se formulan como son los ángulos seleccionados para la rodilla, el tobillo y la cadera, y en la estructura. En [10] se describe las razones por las que se seleccionan siete grados de libertad para cada pierna y sus rangos de movimiento para el exoesqueleto BLEEX®. Asimismo, se hacen notar los aspectos significativos del diseño de los componentes principales, puesto que existe una descripción amplia en cuanto a la arquitectura estructural, basada en estudios previos de la marcha humana. Se indica visiblemente cada articulación en 3D, mostrando detalle de la forma y de su construcción, y el tipo de sensores que se usan en cada articulación.

Cuando se diseñan exoesqueletos antropomórficos en los cuales se intenta imitar la estructura cinemática del esqueleto humano, las juntas del exoesqueleto deben estar alineadas con precisión con las del usuario. Esto no representa un reto para articulaciones con un solo grado de libertad dado que se simplifica al ajustar la longitud de los eslabones del exoesqueleto. Sin embargo, en las juntas que tienen más de 1 GDL, particularmente la cadera humana comprende una articulación esférica que se encuentra dentro del cuerpo, entonces la alineación adecuada no es obvia. El exoesqueleto BLEEX propone una solución al utilizar un diseño de centro de rotación remoto. Otros autores proponen un mecanismo de leva y seguidor para ajustar automáticamente la longitud tal que se compensan las juntas de abducción/aducción desalineadas mientras aún se transfieren cargas verticales.

Otro de los artículos vinculados con el BLEEX® [2], en donde se explican nuevas características con respecto a los exoesqueletos anteriores. En primer lugar, una arquitectura moderna para controlar el exoesqueleto que toma las medidas del exoesqueleto mismo, eliminando el problema de inestabilidad inducido por el cuerpo humano. Después, un sistema de potencia y de energía lo suficientemente pequeñas. Dada la gran importancia del BLEEX® y cada una de sus etapas de desarrollo, [11] presenta un análisis del sistema, en el cual, se expone que el propósito del proyecto BLEEX® es desarrollar las tecnologías fundamentales asociadas al diseño y control de exoesqueletos energéticamente autónomos para extremidades inferiores, que aumenten la fuerza humana y la resistencia durante los movimientos de la marcha.



Se hace énfasis que dicho desarrollo está destinado a soldados, rescatistas, bomberos y cualquier otro personal de búsqueda, rescate y salvamento, para proveer la habilidad de llevar cargas pesadas como comida, equipos de rescate, equipos de primeros auxilios, y equipos de comunicación.

El enfoque en algunos estudios se basa en aliviar al usuario de las cargas que lleva, ya sea la carga generada por la estructura del exoesqueleto, por elementos externos que pueden asociarse con la estructura del exoesqueleto (una mochila, por ejemplo) o el peso del propio usuario, y al mismo tiempo proporcionar mayor comodidad y mejor movilidad; tal objetivo logrado en [12] al proponer un ensamble de conexión que une la parte superior e inferior del exoesqueleto que comprende un dispositivo limitador (elemento elástico) dispuesto de manera paralela a la articulación del tobillo del usuario.

Otro proyecto desarrollado en [13] y [14] propone un sistema para aumentar la capacidad de la fuerza humana común diseño en el cual el exoesqueleto trabaja en paralelo con los movimientos del cuerpo, para hacerlo más liviano y, además, soporta el peso de una carga adicional. Los componentes del exoesqueleto, en el plano sagital, consisten de un actuador en la cadera, cuya fuerza es controlable, un mecanismo de amortiguamiento variable en la rodilla y un mecanismo de resorte pasivo en el tobillo.

El documento [15] propone un exoesqueleto para los miembros inferiores, que utiliza actuadores magnetoreológicos (mR) para entregar el par asistido controlable que permita el uso eficiente de energía. Los estados de la articulación de la rodilla se determinan a través de la medición del ángulo de la rodilla y la fuerza de reacción de ésta con el suelo.

## 1.2 Rehabilitación

Diferentes expertos han destacado el papel que juegan las últimas tecnologías en el campo de la rehabilitación y la medicina física, donde el uso de exoesqueletos robotizados permitirá a muchos afectados por daño neurológico volver a caminar o mejorar su marcha. En este campo se destaca el AKROD® [3], el cual es un dispositivo ortopédico para rehabilitación activa de rodilla, con el propósito de entrenar a pacientes con accidente cerebrovascular, que sufren de híper-extensión de la rodilla en la fase de apoyo de la marcha y de flexión reducida de la rodilla durante





la fase de balanceo. Sin embargo, es un sistema estacionario, es decir, es un mecanismo robótico diseñado para ejercitar el tobillo humano y los movimientos de rodilla sin caminar; el paciente se coloca siempre en el mismo lugar y sólo el miembro requerido se ejercita. También existen exoesqueletos orientados hacia la recuperación post operación, en el que se encuentra el sistema de rehabilitación [16], en donde se expone que las fracturas en las articulaciones son uno de los mayores problemas de salud en los países desarrollados. Este diseño del sistema de rehabilitación permite a los médicos hacer prescripción, demostración y monitoreo de los protocolos de rehabilitación, durante y entre las visitas programadas. Y se dirige la atención a la rehabilitación desde la casa del paciente, de bajo costo y alta aceptación por parte de los usuarios, pues además se motiva al paciente por medio de técnicas de *biofeedback*. En [17] se desarrolla el diseño de una articulación de cadera para asistir en los movimientos a personas físicamente débiles. El mecanismo es una articulación con tres GDL, y se enfoca en determinar la correcta alineación de los puntos de la estructura con el cuerpo humano, teniendo en cuenta la anatomía del cuerpo y el confort de la persona que use dicho mecanismo. Otro diseño de una órtesis robótica [18], cuya finalidad es tanto la recuperación del paciente como la práctica profesional del terapeuta. Esta órtesis cuenta con seis GDL y tiene actuadores sobre la cadera, la rodilla, el tobillo y el pie. En la configuración sólo se plantean las componentes en el plano sagital de las variables biomecánicas. La propuesta incluye una estructura que se puede ajustar a la altura, y de bajo peso, con fibra de carbono. En cuanto a los actuadores, los autores proponen el uso de servomotores alemanes con reductores *Harmonic Drive®* para cada articulación. Para el sistema de control, consideran un sistema de control de posición y el diseño se evalúa por medio de simulaciones.

En el diseño de los dispositivos algunos desarrolladores contemplan la incorporación del GDL de abducción/aducción de la cadera, la mayoría de ellos los hacen de manera pasiva [19], [20], [21], [22] y pocos optan que sea activa y actuada [23].

Otro desarrollo de mucha importancia en la rehabilitación de pacientes es un sistema de compensación y evaluación de la marcha patológica [24], para aplicaciones en condiciones reales, como una metodología de asistencia y evaluación de los problemas que afectan la movilidad de individuos con desórdenes neuro-motores. También de gran relevancia, por su funcionalidad, está el sistema llamado LOPES® (*LOwer Extremity Powered ExoSkeleton*), que combina un segmento accionado



transportable 2D, con un exoesqueleto para las piernas que contiene tres juntas actuadas: dos en la cadera y una en la rodilla [25]. Las juntas son de baja impedancia mecánica, para permitir una interacción mecánica entre el sujeto y el robot. Además de las juntas de cadera y rodilla que LOKOMAT controla en el plano sagital, LOPES presenta adicionalmente el accionamiento de la pelvis en el plano horizontal, así como de la abducción/aducción de cadera. Estos GDL adicionales son importantes, ya que se sabe que si la pelvis permanece fija la marcha natural se verá afectada. Además, todos los movimientos del tobillo y la traslación vertical de la pelvis están permitidos, pero no están actuados. El dispositivo permite dos modos de operación: que el “paciente esté a cargo” y que “el robot esté a cargo”. El robot puede seguir las órdenes del paciente o guiar al paciente, respectivamente. El dispositivo debe permitir que una persona sana use el modo “paciente a cargo”, sin sentir restricciones para su marcha normal. Un tercer modo, “terapista a cargo”, se incluye, donde cualquier intervención del terapeuta pueda ser programada.

El ANdROS de la Patente US9,198,821 B2 [26] es un sistema ortopédico para la rehabilitación de la marcha y el seguimiento de personas con déficits de control motor debido a una dolencia neurológica, como un derrame cerebral. El ANdROS refuerza un patrón de marcha deseado aplicando continuamente un par de corrección alrededor de la articulación de la rodilla, comandado por un controlador de impedancia. Los centros de rotación (CoR) de la cadera y el tobillo de este sistema están diseñados conforme el diseño de CoR remoto, en donde la intersección del eje de abducción/aducción y de flexión/extensión de la cadera puede alinearse para que se ajuste al CoR de la cadera del paciente. Este método de CoR remoto consiste en extrapolar la posición de articulación interior del paciente a una posición externa, sin tener en cuenta el eje de rotación móvil durante los movimientos de los miembros con el fin de localizar un CoR adecuado.

Otros autores enfocan sus esfuerzos no sólo en la parte funcional de la estructura, sino también en la parte del consumo energético de la persona que la usa, buscando siempre realizar movimientos más eficientes. En [27] se presenta el diseño de un exoesqueleto para la pierna, que ayuda a reducir el costo metabólico durante la marcha mientras se transporta una carga de 75 libras. El exoesqueleto trabaja de forma paralela a las piernas, transfiriendo las fuerzas de la carga útil hacia el suelo. Para contribuir con la eficiencia de la marcha, implementan sistemas pasivos de resortes en la cadera y el tobillo, con el fin de almacenar y liberar energía durante el



ciclo de marcha. Para comprobar la hipótesis de que se reduce el costo metabólico en la marcha, se mide el consumo de oxígeno del paciente a una velocidad seleccionada por el mismo.

Buscando aportar alguna solución para la rehabilitación de rodilla, el proyecto [28] expone el diseño sistemático de un prototipo para la terapia de rodilla. El trabajo muestra la integración de diferentes áreas de la ingeniería, incluyendo la automática, la mecánica, la electrónica y la medicina. Los conceptos alrededor de estas áreas son utilizados para tener un mejor entendimiento de las herramientas que usa el médico en las terapias. El prototipo se construyó usando Dibujo Asistido por Computadora (CAD, por sus siglas en inglés), y la Ingeniería Asistida por Computadora (CAE, por sus siglas en inglés) se usó para la simulación dinámica, con lo cual obtuvieron un prototipo virtual. Lograron un modelo analítico y compararon con los resultados de la simulación dinámica para validar los modelos computacionales. Finalmente, después de la simulación y la validación del sistema, procedieron al diseño y construcción del prototipo con su sistema de potencia y de control. El prototipo consiste, básicamente, en un soporte para el pie, la pierna y el muslo; un tornillo de potencia, un eje de apoyo del tornillo de potencia, pasadores, un motor de corriente continua y plantillas de felpa.

### 1.3 Cuadro clínico del lesionado medular T5

Es de suma importancia considerar las características que posee el paciente para que desde ahí se planteen los métodos y factores a tomar en cuenta para cubrir con las necesidades y no afectar posteriormente alguna cuestión de salud y evitar así nuevas complicaciones.



**Tabla 1.1** *Características de una persona con lesión medular T5*

<b>Características Generales</b>	<b>Funcionamiento Motor:</b>
	Normal en cabeza, cuello, hombros, brazos, manos y dedos. Tiene cierto control del tronco y preservación de los músculos del diafragma, los escaleos e intercostales.
	<b>Actividades Diarias:</b>
	Son prácticamente independientes.
	<b>Capacidad para la marcha:</b>
	Es posible una marcha limitada con Órtesis de aparato largo, sin embargo, esto exige un gran esfuerzo en la parte superior del cuerpo, lo cual puede provocar daños en articulaciones y fatiga.

Se tiene que dedicar especial atención a las posibles complicaciones de que son susceptibles los individuos y evitar de alguna manera que el dispositivo diseñado sea el responsable de dichos problemas.

En [7] se muestra que una limitación en los grados de libertad disponibles durante la terapia robótica puede conducir a cambios en los patrones de activación muscular, lo que podría tener una influencia negativa en el resultado de la terapia.

Fuerzas de reacción podrían ser creadas en la articulación humana en caso de que el dispositivo está rígidamente unido a la extremidad humana cuando comienza a moverse. El movimiento rotatorio no sería posible. Sin embargo, en un caso más realista, en donde la fijación en el tejido blando del miembro permite al robot moverse la aplicación de un par a través de un robot causará bastante deslizamiento entre los accesorios del robot y la extremidad. Esto creará incomodidad para los pacientes. Principalmente conducirá a fuerzas de interacción y puede conducir a llagas de presión en la piel de un paciente.

Fuerzas de interacción de este tipo se han informado en [7] como consecuencia de la mala alineación. Además de las lesiones de la piel, el daño a largo plazo a la articulación humana podría tener lugar si los actuadores del robot o dispositivo son fuertes. Especialmente en pacientes que sufren de una disminución de la fuerza muscular podrían ocurrir más fácilmente dislocaciones articulares y daño del cartílago



en comparación con personas sanas. El riesgo de lesión del paciente también ha sido identificado en [29] con el desarrollo de la órtesis LOKOMAT. La órtesis requiere cinco ajustes mecánicos para alinear las juntas motorizadas de los tirantes de las piernas a las articulaciones de la cadera, rodilla y tobillo de los pacientes. De hecho en [8], problemas de compatibilidad ya han sido reportados.

## 1.4 Marcha Humana

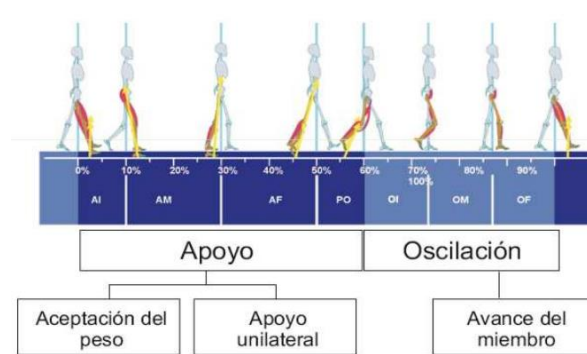
En la Tabla 1.2 se muestran los movimientos principales en cada uno de los planos de acción de las articulaciones inferiores.

**Tabla 1.2** *Movimiento realizado por las articulaciones en cada plano de acción*

Articulación	Movimiento	Plano de acción
<i>Cadera</i>	Flexión/ Extensión	Sagital
	Abducción/ Aducción	Frontal
<i>Rodilla</i>	Flexión/ Extensión	Sagital
<i>Tobillo</i>	Flexión/ Extensión También se denomina flexión dorsal o dorsiflexión	Sagital
	Supinación/ Propinación	Frontal

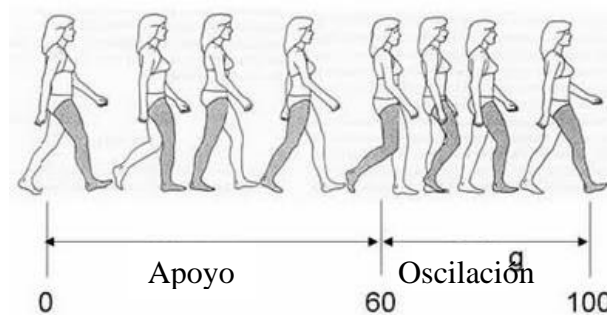
Durante un ciclo de marcha completo, cada pierna pasa por una fase de apoyo: el pie permanece en contacto con el suelo, y una fase de oscilación: el pie se encuentra en el aire durante la preparación para el siguiente apoyo (Figura 1.1).





**Figura 1.1** Fases durante el ciclo de la marcha en porcentaje

En relación con la duración del ciclo de la marcha, la fase de apoyo constituye, en condiciones normales a la velocidad espontánea (cadencia libre), alrededor de un 60% del ciclo. Mientras que la fase de oscilación representa el 40% restante, véase Figura 1.2.



**Figura 1.2** Desfase y porcentaje entre los miembros inferiores durante el ciclo de la marcha

## 1.5 Análisis anatómico del miembro inferior: cadera, rodilla y tobillo


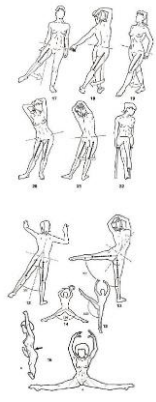


Los exoesqueletos están diseñados para emular sistemas que puedan repetir los movimientos humanos o asistir a los humanos. Es por esta razón que se necesita saber sobre la biomecánica del cuerpo humano y aplicarlos en cada articulación para el análisis cinemático. El exoesqueleto debe ser análogo a los desplazamientos de acuerdo con la articulación y la distribución de los GDL.

Conforme a la investigación biomecánica para la caminata o marcha, se llegó a determinar el número de juntas actuadas que se necesitan para cumplir esta tarea. Ahora bien, cada uno de los grados de libertad tienen un rango de acción limitado



debido a que los movimientos de las extremidades están restringidos físicamente por la articulación, los músculos y los tendones, y la propia configuración del cuerpo humano. A continuación, en la Tabla 1.3 se describen los rangos de los movimientos de las articulaciones en cada miembro: cadera, rodilla y tobillo.

**Tabla 1.3** Rangos de los movimientos de las articulaciones en cadera, rodilla y tobillo

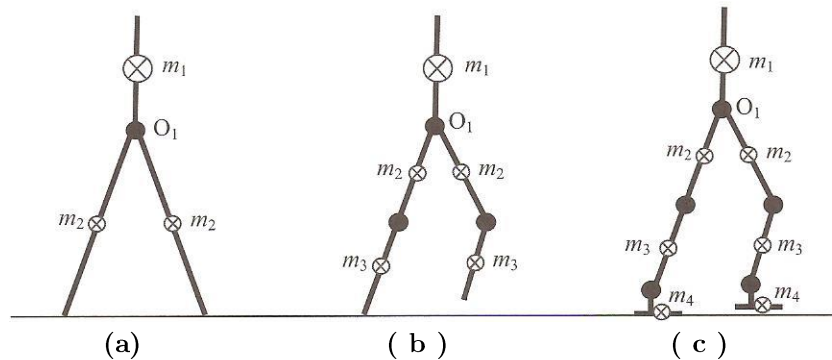
Articulación	Movimiento	Descripción	Rango	
Cadera	Flexión/ Extensión	Es el movimiento que produce que el miembro quede delante y detrás del plano frontal de la articulación. La amplitud de la extensión de la cadera es mucho menor que de la de la flexión.	-30° a 120°	
	Abducción/ Aducción	Dirige el miembro inferior hacia afuera y lo aleja del plano de simetría del cuerpo. En la práctica la abducción de una cadera se acompaña de una abducción idéntica de la otra cadera.  Lleva el miembro inferior hacia adentro y lo aproxima al plano de simetría del cuerpo. Dado que en la posición de referencia ambos miembros inferiores están en contacto, no existe este movimiento de aducción “pura”.	-20° a 45°	
Rodilla	Flexión/ Extensión	Se realizan en el plano sagital, es el movimiento principal de la rodilla. Su amplitud se mide a partir de su posición de referencia definida.	0° a 150°	
Tobillo	Flexión/ Extensión	La posición de referencia es aquella en la que la planta del pie es perpendicular al eje de la pierna. La flexión del tobillo se define como el movimiento que aproxima el dorso del pie a la cara anterior de la pierna, también denomina flexión dorsal o dorsiflexión.	-40° a 20°	
	Supinación/ Propinación		-35° a 20°	





El diseño de sistemas bípedos y especialmente de humanoides, naturalmente debe estar inspirado en las funciones de movilidad del cuerpo humano. Sin embargo, la naturaleza compleja de la estructura ósea y del sistema muscular humano, aún no pueden ser reproducidas completamente dentro del campo de la ingeniería principalmente por el tamaño y complejidad del movimiento de la articulación. El número de juntas debe estar limitado a los movimientos más esenciales, por lo tanto, el sistema bípedo se verá simplificado. La elección del número de grados de libertad en cada articulación es un paso importante, y consiste en analizar la estructura desde los tres planos principales: el plano sagital, el frontal y el transversal. El movimiento de caminata principalmente toma lugar en el plano sagital; todos los bípedos tienen el mayor número de articulaciones importantes sobre este plano.

La Figura 1.3 muestra las configuraciones típicas de sistemas bípedos en el plano sagital. Los segmentos de los miembros usualmente se modelan como una masa puntual localizada en el centro de gravedad, en donde las articulaciones se representan como círculos negros.



**Figura 1.3** Articulaciones en el plano sagital: (a) una articulación en la cadera, (b) una articulación en cadera, una articulación en cada rodilla, y (c) una articulación en cadera, una articulación en cada rodilla y una articulación por cada tobillo.

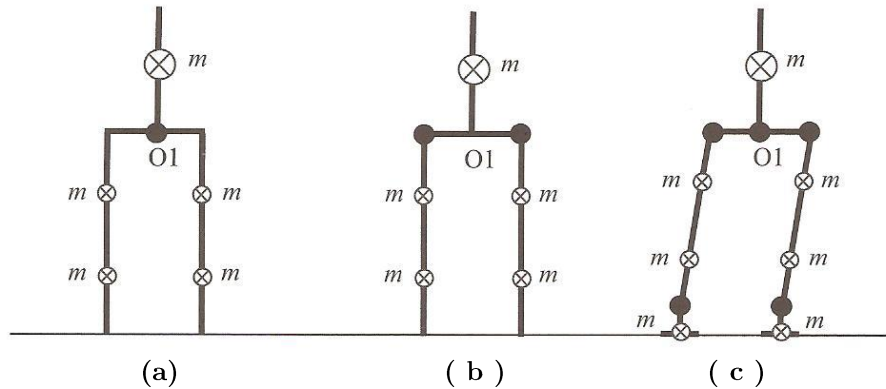
La estructura en la Figura 1.3a corresponde al sistema más simple, que únicamente cuenta con dos articulaciones en la cadera. La estructura en la Figura 1.3b tiene dos articulaciones adicionales en las rodillas. Finalmente, en la estructura de la Figura 1.3c se tiene un sistema más completo adicionando articulaciones en los tobillos.

El análisis de las articulaciones en el plano frontal tiene relevancia para la estabilidad lateral durante la caminata. La Figura 1.4 muestra las soluciones



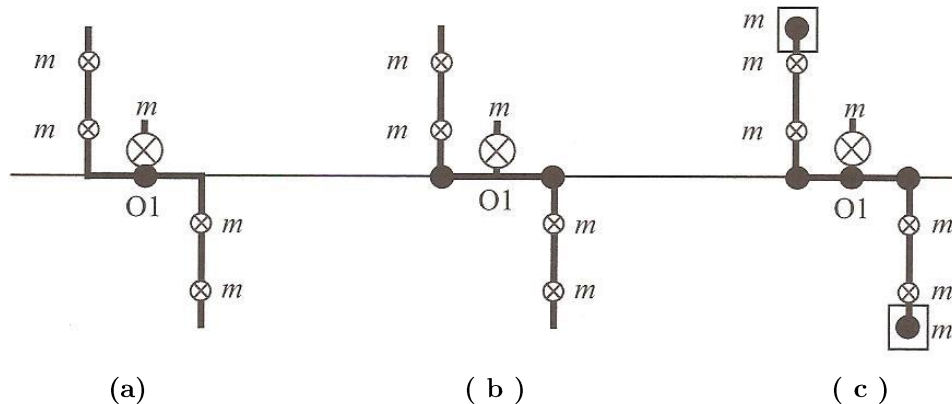


obtenidas por los diseñadores. La estabilidad en el plano frontal depende de la posición del centro de gravedad en relación con el punto de contacto de la pierna de apoyo con el suelo.



**Figura 1.4** Articulaciones en el plano frontal: (a) una articulación en la cadera, (b) dos articulaciones en la cadera, y (c) tres articulaciones en la cadera y una articulación por cada tobillo.

Las articulaciones en el plano transversal sólo existen en los bípedos más complejos. Estos sistemas pueden tener desde una hasta cinco articulaciones en el plano transversal. La Figura 1.5 muestra las configuraciones posibles.



**Figura 1.5** Articulaciones en el plano transversal: (a) una articulación en la cadera, (b) dos articulaciones en la cadera, y (c) tres articulaciones en la cadera y una articulación por cada tobillo.

En particular, la estructura del exoesqueleto que se aborda en este trabajo incluye movilidad en los planos frontal y sagital.



En este trabajo se llevará a cabo la aplicación de un método para el diseño ergonómico de la interfaz humano-máquina y máquina-contorno. Se trata de un método muy bien estructurado, que servirá para diseñar el sistema integumentario del exoesqueleto de miembros inferiores.

En forma general el método se basa en:

1. Definir el número mínimo de grados de libertad del exoesqueleto;
2. Realizar un modelo de la cinemática junto con las dimensiones dadas a priori de la extremidad humana;
3. En el modelo usado se definirán las trayectorias ergonómicas del movimiento en tres dimensiones (3D);
4. Simular y comprobar que las trayectorias sean muy similares a las trayectorias de las articulaciones reales, en este caso evaluando en error de posición entre las trayectorias simuladas de las articulaciones del exoesqueleto y las trayectorias de las articulaciones de un usuario;
5. Iterar el proceso con nuevas propuestas de la posición de los ejes de rotación de cada una de las juntas y la longitud de los eslabones;
6. Obtener la localización y posición de las juntas para obtener una configuración pseudo-antropomórfica adecuada.



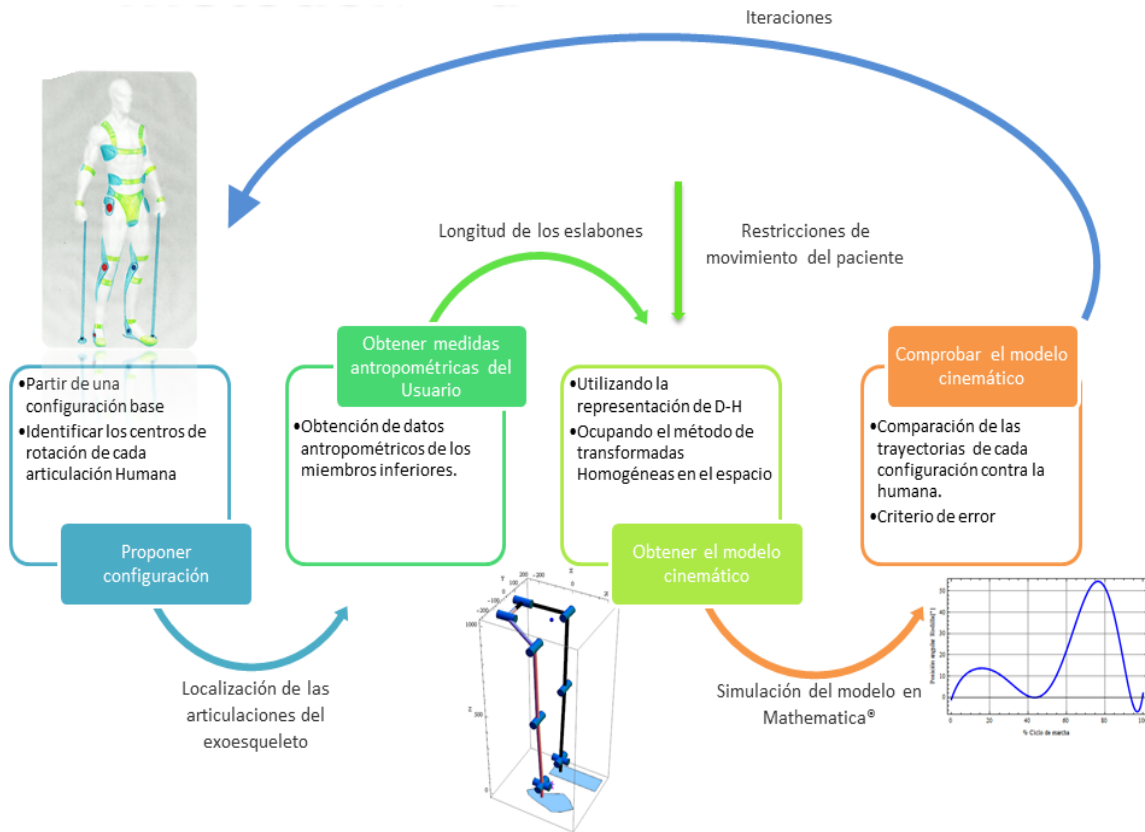


Figura 1.6 Método aplicado

En forma general la Figura 1.6 muestra el algoritmo para la aplicación del método [4], se partirá de una configuración base con la cual se empieza a realizar la iteración de la posición de las juntas y de las longitudes de los eslabones de los miembros inferiores, es por eso que primero se deben de identificar las localización de los centros de rotación y después la dimensiones se obtendrán de celdas antropométricas.

Se puede tener en cuenta que existen métodos para estimar el eje de rotación y el centro de rotación, tal como el presentado por Halvorsen [30] que estima parámetros de una junta rotacional y una junta esférica a partir de los datos de movimiento. El método no asume movimientos rígidos del cuerpo, sino sólo que cada marcador gira alrededor del mismo eje de rotación o centro de rotación. El método es inferior a los métodos que utilizan la suposición del cuerpo rígido y cuando hay ruido de medición. En cambio, el método se vuelve robusto cuando hay grandes movimientos de la piel.



Por lo tanto, se desarrollará el análisis de posición del mecanismo espacial de exoesqueleto, tal análisis involucra la solución de un sistema de ecuaciones no lineales.

La resolución de la cinemática inversa puede obtenerse a partir de varios métodos: métodos geométricos, matrices de transformación, desacoplamiento cinemático, álgebra de tornillo, cuaterniones duales, etc. [31].

Denavit y Hartenberg utilizan el álgebra matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos de un robot, por lo que el enfoque de la materia de este trabajo será con el desarrollo de la resolución de la cinemática inversa mediante el método de matrices de transformación.

### 1.5.1. Localización de los centros de rotación (CoR)

Las características importantes que son muy poco consideradas en la configuración de un dispositivo de rehabilitación son el espacio de trabajo disponible para el entrenamiento y la compatibilidad de los dispositivos para funcionar correctamente aun cuando ocurren desalineaciones con respecto a las articulaciones biológicas. Esto permitirá la construcción de robots humanos de interfaz que puedan interactuar sin problemas con el movimiento de las extremidades humanas.

Un requisito clave para que tales dispositivos garanticen un funcionamiento adecuado es la alineación exacta entre las juntas del mecanismo y las articulaciones biológicas de los pacientes, lo que es difícil de conseguir, por varias razones.

En primer lugar, las localizaciones exactas de los ejes de rotación humanos no son tan fácil de conocer en sujetos vivos, debido a la cobertura de las articulaciones. Las articulaciones biológicas no son articulaciones ideales de simples GDL, sino que tienen geometrías de superficie de articulación bastante complejas, que causan el cambio de los ejes de rotación durante el movimiento. El caso ideal con la alineación perfecta no puede ser alcanzado en realidad véase Figura 1.7 y Figura 1.8. Por otro lado, la fijación de un dispositivo robótico en una extremidad humana nunca es rígida, de tal manera que se produce un deslizamiento entre el dispositivo y la extremidad. Esto conducirá a una mayor desalineación entre el mecanismo y las articulaciones humanas. Es probable que estos hechos crean desalineaciones entre



cualquier articulación robótica adherida y la articulación humana en el orden de un par de centímetros.



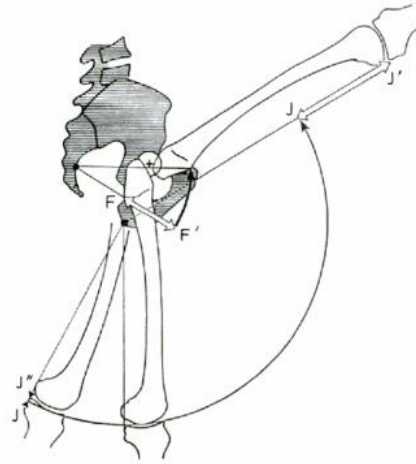
**Figura 1.7** Localización de las articulaciones biológicas plano sagital



**Figura 1.8** Localización de las articulaciones biológicas plano posterior

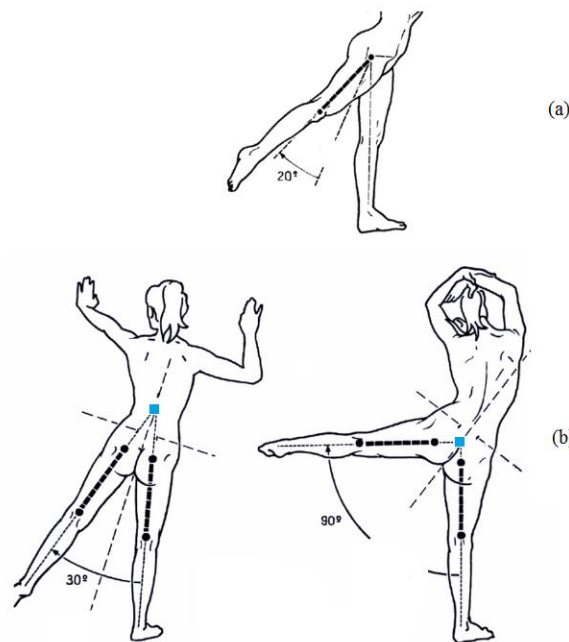
Un segundo tipo común de desalineación entre dispositivos y las extremidades biológicas surge de la mala interpretación o simplificación excesiva de la cinemática de la articulación humana. Tales desalineaciones pueden ser típicamente del orden de decenas de centímetros o más. Si bien cierta suposición es válida para ángulos pequeños ejercidos o para un movimiento exclusivo, la articulación se desvía significativamente durante los movimientos más grandes, ya que la articulación puede tener un centro de rotación móvil, lo cual sucede en la cadera como se puede observar en la Figura 1.9, en donde la localización de la articulación biológica está indicada con un “+”; también la cadera en el plano posterior se tiene un centro de rotación móvil.





**Figura 1.9** Centro de rotación en la cadera durante la flexión-extensión

La ubicación de la articulación de la cadera se indica en la Figura 1.10 con un punto negro, mientras que la ubicación del centro de rotación real se indica con un cuadro azul durante (a) la extensión y (b) aducción-abducción.



**Figura 1.10** Grandes desalineaciones ocurren en ciertas articulaciones a través de ejes de movimiento de desplazamiento. Los centros verdaderos estimados de la rotación en la cadera se indican con un cuadrado azul (a) y (b) para la extensión de la cadera y aducción-abducción. El centro de rotación móvil de las articulaciones biológicas se indican con un punto negro. (Figura adaptada de [32])



El problema de la alineación de las articulaciones no se aplica a los robots de rehabilitación basados en efectores finales, que se unen sólo al extremo distal de una extremidad. Sin embargo, las dificultades para la terapia se derivan de las redundancias cinemáticas predominantes naturalmente en los miembros humanos. Dichas redundancias nos permiten posicionar y orientar nuestras extremidades distales con diferentes configuraciones de las articulaciones y son cruciales para ejecutar tareas diarias. Para los dispositivos de rehabilitación que sólo se unen a nuestras manos o pies, esta redundancia prohíbe inducir trayectorias conjuntas precisas, un problema conocido para la cinemática inversa. Así, el movimiento cíclico y exactamente repetitivo de la articulación nunca se puede realizar con este tipo de dispositivo terapéutico solamente.

Un ejemplo de un robot terapéutico basado en un efector final para el miembro inferior es el GAIT Trainer [33], que debe estar unido a los pies de los pacientes. Debido a la redundancia de la pierna, todavía se necesita de un terapeuta para apoyar y estabilizar la rodilla parética durante la terapia. Si este soporte se omite en pacientes débiles, las trayectorias impuestas al pie pueden conducir a hiperextensiones de la rodilla parética y pueden causar lesiones graves de la articulación humana.

Debido a los problemas de desalineación mencionados para poder realizar los movimientos en cada una de articulaciones: cadera, rodilla y tobillos; se proponen las siguientes configuraciones mostradas en la Figura 1.11 en donde se muestran las posibles ubicaciones de las juntas del mecanismo.

Para los miembros inferiores, se estableció un modelo con 10 GDL. La rotación de la cadera no es modelada. Sabiendo que la articulación de la cadera proporciona la mayor unión de la pierna humano al tórax, esta articulación forma la base del modelo cinemático para las extremidades.

A partir de la segunda configuración se propone colocar el eje de rotación para el movimiento de flexión extensión a los costados a la altura de la articulación de la cadera humana y desplazar el eje de rotación de abducción-aducción hacia la parte posterior para tener una aproximación del centro de rotación real debido que es imposible colocar dos articulaciones rotatorias actuadas empalmadas.



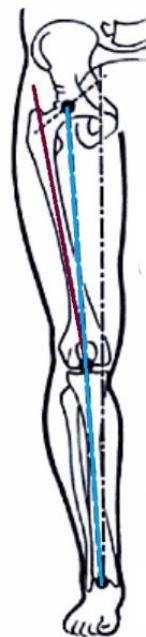


**Figura 1.11** Configuraciones propuestas para el análisis cinemático. De arriba hacia abajo se muestran la primera, segunda, tercera, cuarta y quinta configuraciones.





En cuanto a la alineación de las extremidades inferiores existe un ángulo formado por una línea (roja) que va desde la Espina Ilíaca Antero Superior (EIAS) al centro de la rótula y la línea (azul) que va desde el centro de la rótula hasta la tuberosidad anterior de la tibia, y es utilizado para medir el alineamiento de las rodillas (véase Figura 1.12) en el plano frontal. De esta manera se formula la localización del eje de rotación de la rodilla y tobillo con cierta inclinación con respecto al eje de rotación de la cadera, la quinta configuración es propuesta para evaluar este comportamiento durante los movimientos de la marcha.



**Figura 1.12** Eje formado por la línea (azul) que va desde la cabeza femoral, pasa por la escotadura intercondílea del fémur hasta la articulación del tobillo.

### 1.5.2. Medidas antropométricas

El primer paso importante para determinar las configuraciones es un buen modelo de la cinemática y las dimensiones de las extremidades humanas que interactúan. Es importante la capacidad del modelo de extremidades inferiores para realizar el movimiento del espacio cartesiano equivalente a una pierna humana real. El modelado preciso de los componentes biológicos involucrados, como huesos o músculos, es secundario, por lo que puede ser suficiente un enfoque más simplificado que los modelos de pierna humano ya establecidos.



Actualmente no es parte del trabajo realizar un exoesqueleto ajustable a diferentes usuarios, es por ello que se tomó como base y por simplicidad de la aplicación del método, una cédula antropométrica de un paciente tipo.

Nombre: ████████████████████████████████		
Sexo: <b>H</b>	F.Nac: ██████████	Peso: <b>68 Kg</b>
<b>Alturas Erguido</b>		
Cabeza	1840	
Hombros	1600	
Cadera (Centro de rotación)	977	
Puño (Con tubo de 3.3mm)	Izq. 954	Der. 912
Dactilión (dedo medio)	Izq. 805	Der. 791
Cresta	Izq. 1086	Der. 1085
Rodilla (Interno)	Izq. 574	Der. 573
Rodilla (Externo)	Izq. 564	Der. 562
Tobillo (Interno)	Izq. 139	Der. 139
Tobillo (Externo)	Izq. 123	Der. 123.5
<b>Longitudes Erguido</b>		
Hombro-Codo	Izq. 369	Der. 364
Codo-Muñeca	Izq. 295	Der. 297
Muñeca-Nudillo Medio	Izq. 95	Der. 94
Pezón - Cadera	449	
Escápula - Cadera	520	
Cadera - Rodilla	520	

**Figura 1.13** *Todas las alturas se encuentran en milímetros. Las alturas se tomaron con calzado mientras que las medidas del pie se tomaron descalzo.*



Nombre:	[REDACTED]	
Sexo: H	F.Nac: [REDACTED]	Peso: 68 Kg
Rodilla–Tobillo	Izq. 446	Der. 448
Talón–Enfranque (Interno)	Izq. 198	Der. 198
Talón–Enfranque (Externo)	Izq. 190	Der. 183
Talón–Punta de Pie	Izq. 255	Der. 256
Anchuras Erguido		
Hombros	346	
A última costilla torácica	Ins. 308	Asp. 293
Cresta	277	
Cadera	344	
Rodillas	Int. 59	Ext. 290
Tobillo	Int. 119	Ext. 266
Enfranque	Izq. 95	Der. 99
Profundidades Erguido		
Esternón - Espalda	Ins. 220	Esp. 195
Abdomen - Lumbar	Ins. 248	Esp. 230
Cadera	230	
Muslo (eje X)	Izq.	Der.
Muslo (eje Z)	Izq.	Der.

**Figura 1.14** Todas las medidas se encuentran en milímetros. Las medidas se tomaron con la separación recomendada de 15cm. desde la mitad del pie.



Tobillo	Izq. <b>88</b>	Der. <b>90</b>
<b>Perímetros Erguido</b>		
Escapula	Ins. <b>980</b>	Esp. <b>967</b>
Abdomen (máx. dilatación)	<b>1005</b>	
Cadera	<b>890</b>	
Antebrazo (máx.)	Izq. <b>250</b>	Der. <b>255</b>
Antebrazo (mín.)	Izq. <b>180</b>	Der. <b>210</b>
Muñeca	Izq. <b>170</b>	Der. <b>170</b>
Muslo (máx.)	Izq. <b>401</b>	Der. <b>400</b>
Muslo (mín.)	Izq. <b>298</b>	Der. <b>300</b>
Rodilla	Izq. <b>345</b>	Der. <b>350</b>
Pantorrilla (máx.)	Izq. <b>270</b>	Der. <b>250</b>
Pantorrilla (mín.)	Izq. <b>211</b>	Der. <b>210</b>

Figura 1.15 Perímetros del usuario en posición erguida. Todas las medidas se encuentran en milímetros.

Nombre: <span style="background-color: #cccccc;">XXXXXXXXXX</span>		
Sexo: <b>H</b>	F.Nac: <span style="background-color: #cccccc;">XXXXXX</span>	Peso: <b>68 Kg</b>
<b>Alturas Sentado</b>		
Cabeza	<b>1387</b>	
Hombros	<b>1079</b>	
Escapula	<b>905</b>	
Codo	Izq. <b>729</b>	Der. <b>696</b>
<b>Longitudes Sentado</b>		
Nalga – Poplíteo	Izq. <b>510</b>	Der. <b>506</b>
Nalga - Rotula	Izq. <b>644</b>	Der. <b>640</b>
Rotula - Tobillo	Izq. <b>470</b>	Der. <b>472</b>
<b>Anchuras Sentado</b>		
Rodilla	Int. <b>12</b>	Ext. <b>30</b>
Pies	Int. <b>12</b>	Ext. <b>31</b>
<b>Profundidades Sentado</b>		
Esternón - Espalda	Ins. <b>223</b>	Esp. <b>198</b>
Abdomen - Lumbar	Ins. <b>264</b>	Esp. <b>235</b>
Cadera	<b>241</b>	
Muslo (eje X)	Izq.	Der.
Muslo (eje Z)	Izq.	Der.

Figura 1.16 Todas las alturas se tomaron en referencia al suelo, sentado en su silla de ruedas. Las medidas se encuentran en milímetros.



De acuerdo con las medidas obtenidas de la celda antropométrica del usuario tipo (véanse Figura 1.13 a Figura 1.16), se han obtenido los parámetros para las cinco configuraciones.

En donde, los valores utilizados para los parámetros de interés se muestran en la siguiente tabla.

**Tabla 1.4** Valores a utilizar en las configuraciones propuestas

<b><i>Distancias</i></b>	<b>Variables</b>	<b>Medidas [mm]</b>
<i>Profundidad desde cabeza de fémur a espalda</i>	$a_0=d_{11}=d_{21}$	210
<i>Del eje central al centro de rotación de la cadera (plano frontal)</i>	$a_{10}=a_{20}$	80
<i>Del centro de rotación de la cadera a la cabeza de fémur (plano sagital)</i>	$a_{11}=a_{21}$	54
<i>De la cabeza de fémur a rodilla</i>	$a_{12}=a_{22}$	413
<i>De rodilla a tobillo</i>	$a_{13}=a_{23}$	441
<i>De tobillo a suelo</i>	$a_{15}=a_{25}$	83
<i>De suelo a la altura de los centros de rotación de cadera</i>	$d_0$	991
<i>Del centro de rotación de la cadera al punto exterior del ancho de la cadera (plano frontal)</i>	$d_{111}=d_{211}$	$(295/2)-a_{10}$



# CAPÍTULO 2 ANÁLISIS CINEMÁTICO

El análisis cinemático permite calcular principalmente, los valores de velocidad y aceleración para una cierta posición de un mecanismo o una máquina. Estos valores al ser graficados muestran el comportamiento general del mecanismo, indicando si hay cambios bruscos en los sentidos de los desplazamientos lineales o angulares y valores muy grandes.

El análisis cinemático de los mecanismos, es decir, el estudio del movimiento de los eslabones sin tener en cuenta las fuerzas que condicionan el movimiento, comprende básicamente la solución de los tres problemas siguientes:

- a) Determinación de los desplazamientos de los eslabones y las trayectorias descritas por los puntos del eslabón.
- b) Determinación de las velocidades de ciertos puntos de los eslabones y las velocidades angulares de los eslabones.
- c) Determinación de las aceleraciones de ciertos puntos de los eslabones y las aceleraciones de los eslabones.

El número de eslabones primarios debe de ser igual al número de grados de libertad del mecanismo, o lo que es lo mismo, igual al número de coordenadas generalizadas del mecanismo.

La definición de los GDL con los que contará el exoesqueleto se basa de acuerdo con las necesidades que debe de satisfacer junto a sus funciones principales:

- Bipedestación
- Marcha o caminata

Para realizar el análisis de posición, se define una base inercial de localización arbitraria y bases locales unidas a los eslabones del exoesqueleto. La ecuación de posición queda establecida mediante ecuaciones de lazo vectorial que relacionan



traslaciones y rotaciones experimentadas por los eslabones. Por último, la relación entre la base inercial y las bases locales de las juntas esféricas, establecen ecuaciones necesarias para determinar los ángulos de los giros de las juntas. Dando como resultado el análisis de posición completo del Exoesqueleto Espacial.

Dado que el mecanismo en cada miembro cuenta con juntas RRRRR (R-rotacional), el análisis cinemático es el siguiente:

1. Se asignan variables y bases locales (véase Apéndice A)
2. Las variables son:  
 $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}, x_{pd}(t), y_{pd}(t), z_{pd}(t), \alpha_{pd}, \beta_{pd} = 10$   
 $\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_{25}, x_{pi}(t), y_{pi}(t), z_{pi}(t), \alpha_{pi}, \beta_{pi} = 10$
3. Los GDL son:

$$\begin{aligned} GDL &= 6(L-1) - 5J_1 - 4J_2 - 3J_3 - 2J_4 - J_5 \\ &= 6(9-1) - 5(6) - 4(2) \\ &= 48 - 30 - 8 = 10 \end{aligned}$$

El cálculo da  $GDL=10$ , por lo tanto, se proporcionan los valores de  $P_{pd}(x_{pd}(t), y_{pd}(t), z_{pd}(t), \alpha_{pd}, \beta_{pd})$  y  $P_{pi}(x_{pi}(t), y_{pi}(t), z_{pi}(t), \alpha_{pi}, \beta_{pi})$ , y se calculan las 5 incógnitas restantes de cada miembro  $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}$  y  $\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_{25}$  que corresponden a los ángulos de las juntas del miembro derecho e izquierdo, respectivamente para resolver así la cinemática inversa.

## 2.1. Análisis de Posición Matricial

El problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del dispositivo, con respecto a un marco referencial fijo que se encuentra en la base del sistema, conocido cada uno de los valores de las juntas y los parámetros geométricos de los elementos del dispositivo.

A partir de la definición de las coordenadas homogéneas surge inmediatamente el concepto de matriz de transformación homogénea. Se define como matriz de transformación homogénea  $\mathbf{T}$  a una matriz de dimensión  $4 \times 4$  que representa la



transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

Para ello se han desarrollado métodos geométricos para describir el movimiento de robots, en nuestro caso se ocupará el método de Denavit-Hartenberg [34] el cual permite pasar de un sistema de coordenadas a otro mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

Se puede considerar que una matriz homogénea se encuentra compuesta por cuatro submatrices de distinto tamaño: una submatriz  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  que corresponde a una matriz de rotación; una submatriz  $\mathbf{P}_{3 \times 1}$  que corresponde al vector de traslación; una submatriz  $\mathbf{F}_{1 \times 3}$  que representa una transformación de perspectiva, y una submatriz  $\mathbf{W}_{1 \times 1}$  que representa un escalado global.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{P}_{1 \times 3} \\ \mathbf{F}_{1 \times 3} & \mathbf{W}_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Rotación} & \textit{Traslación} \\ \textit{Perspectiva} & \textit{Escalado} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

En robótica generalmente solo interesará conocer el valor de  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  y de  $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ , considerándose las componentes  $\mathbf{F}_{1 \times 3}$  nulas y la de  $\mathbf{W}_{1 \times 1}$  la unidad, la matriz homogénea T resultará de la siguiente forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{P}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Rotación} & \textit{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

En general, un robot de  $n$  grados de libertad está formado por  $n$  eslabones unidos por  $n$  juntas, de forma que cada par junta-eslabón constituye un grado de libertad. A cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia solidario a él y, utilizando las transformaciones homogéneas, es posible representar las rotaciones y traslaciones relativas entre los distintos eslabones que componen el robot. La matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los distintos sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot se denomina  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ . Del mismo modo, la matriz  ${}^0\mathbf{A}_k$ , resultante del producto de las matrices  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  con  $i$  desde 1 hasta  $k$ , es la que representa de forma total o parcial la cadena cinemática que forma el robot con respecto al sistema de referencia inercial asociado a la base. Cuando se consideran todos los grados de libertad, a la matriz  ${}^0\mathbf{A}_n$  se le





denomina  $\mathbf{T}$ , matriz de transformación que relaciona la posición y orientación del extremo final del robot respecto del sistema fijo situado en la base del mismo.

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{A}_n = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 \cdot \dots \cdot {}^{n-1}\mathbf{A}_n \quad (2.3)$$

Las transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento  $i$  con el sistema del elemento  $i-1$ . Las transformaciones en cuestión son las siguientes:

- Rotación alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
- Traslación a lo largo de  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ .
- Traslación a lo largo de  $x_i$  una distancia  $a_i$ .
- Rotación alrededor del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .

Teniendo ya los valores  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ , que son los denominados parámetros D-H del eslabón  $i$ , la matriz de transformación que relaciona los sistemas de referencia  $\{S_{i-1}\}$  y  $\{S_i\}$  es la siguiente:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{T}_z(d_i) \cdot \mathbf{T}_x(a_i) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_i) \quad (2.4)$$

Desarrollando esta expresión en términos de los parámetros D-H, nos queda:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Considerando los movimientos de la cadera, rodilla y tobillo antes mencionados, se proponen cinco modelos cinemáticos (Figura 2.1, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.7) donde se observan los sistemas de referencia D-H a partir de una posición inicial. Se considera que entre los pies se encuentra la base inercial, la cual es un marco referencial fijo  $\mathbf{J}_B = \mathbf{I}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Con esto, se tiene que el conjunto de variables generalizadas está definido como  $\mathbf{q}_D = \{q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}\}$  y  $\mathbf{q}_I = \{q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}\}$ , donde  $\mathbf{q}_D, \mathbf{q}_I \in \mathbb{R}^3$  contiene las coordenadas articulares de la extremidad. Lo que determina la posición espacial del efector final (planta del pie del Miembro Inferior Derecho “MID” y Miembro Inferior Izquierdo “MII”) en el espacio de trabajo



tridimensional. Por lo tanto, se define que la relación entre las juntas individuales  $q$  y la posición del efector final  $\mathbf{T}(t) = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]$ , donde  $x, y, z$  son las coordenadas cartesianas, y  $\alpha, \beta, \gamma$  son los ángulos de Euler que representan la orientación [35].

Para la junta de la cadera se implementan dos ejes articulados por cada pierna,  $Z_{10}, Z_{20}$  para la AA Aducción/Abducción y  $Z_{11}, Z_{21}$  para la FE Flexión/Extensión, derecha e izquierda respectivamente.

Tres desplazamientos que describen la distancia entre las juntas AA y FE de la cadera, a saber:  $d_{11}, d_{21}$  en dirección del eje anteroposterior en el plano sagital;  $a_{11}, a_{21}$  en dirección del eje longitudinal en el plano sagital; y  $d_{111}, d_{211}$ , en dirección del eje transversal en el plano frontal.

Además, el desplazamiento del eje longitudinal desde el centro de los miembros hacia la junta AA se incluye en el modelo como parámetro  $a_{10}, a_{20}$ . La longitud del fémur se parametriza a través de  $a_{12}, a_{22}$ .

La junta que permite la flexión y extensión de la rodilla se describe mediante el eje  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$ . El parámetro  $a_{13}, a_{23}$  define el desplazamiento entre la rodilla y el eje de FE del tobillo  $Z_{13}, Z_{23}$ . El eje  $Z_{14}, Z_{24}$  permite la pro-supinación del tobillo, dichas juntas fueron incluidas porque permiten obtener soporte en el sueño en todas las fases de la marcha y/o en todos los tipos de terreno, particularmente cuando el usuario camina sobre terreno inclinado o irregular [12]. Mientras que el parámetro  $a_{15}, a_{25}$  define la distancia entre el tobillo y cada una de las plantas de los pies como efectores finales teniendo como eje  $Z_{15}=Z_D, Z_{25}=Z_I$ .

### 2.1.1. Modelo de la Primera configuración

Dado que la junta AA de la cadera fue la relevante y la más crítica durante la localización de los ejes de rotación, entonces, dicha junta fue la que se movió en las cinco configuraciones propuestas. En consecuencia, en la primera configuración se inició con la propuesta de que tanto la junta de AA ( $\mathbf{J}_{10}$  y  $\mathbf{J}_{20}$ ) como de FE ( $\mathbf{J}_{11}$  y  $\mathbf{J}_{21}$ ) de la cadera se encuentren en la misma posición.



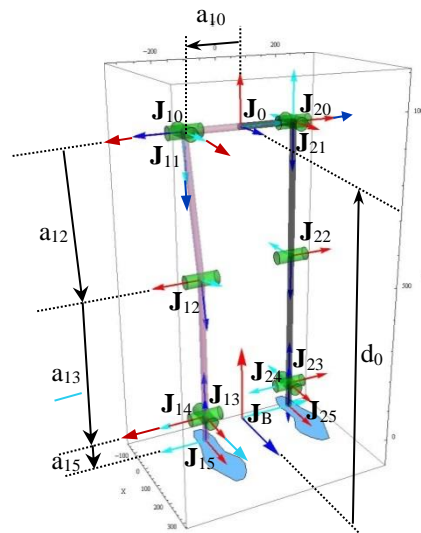


Figura 2.1 Base Inercial y bases móviles de la primera configuración

A continuación, se muestra la tabla de parámetros D-H para calcular las matrices de rotación  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  (véase Figura 2.1). Con esta configuración se obtienen los parámetros que marca la metodología D-H. Para después obtener las transformadas homogéneas entre cada eslabón.

Tabla 2.1 Parámetros Denavit-Hartenberg de la cadena cinemática de los MID y MII

Eslabón ( $i$ )	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	$0^\circ$	$d_0$	0	$0^\circ$
10	$-90^\circ$	0	$a_{10}$	$-90^\circ$
11	$\theta_{11}^* + 90^\circ$	0	0	$90^\circ$
12	$\theta_{12}^*$	0	$a_{12}$	$0^\circ$
13	$\theta_{13}^*$	0	$a_{13}$	$0^\circ$
14	$\theta_{14}^* + 180^\circ$	0	0	$90^\circ$
15	$\theta_{15}^*$	0	$-a_{15}$	$0^\circ$
20	$90^\circ$	0	$a_{20}$	$90^\circ$
21	$\theta_{21}^* - 90^\circ$	0	0	$-90^\circ$
22	$\theta_{22}^*$	0	$a_{22}$	$0^\circ$
23	$\theta_{23}^*$	0	$a_{23}$	$0^\circ$
24	$\theta_{24}^* - 180^\circ$	0	0	$-90^\circ$
25	$\theta_{25}^*$	0	$-a_{25}$	$0^\circ$

Nota: Parámetros mostrados con “\*” indican el ángulo variable

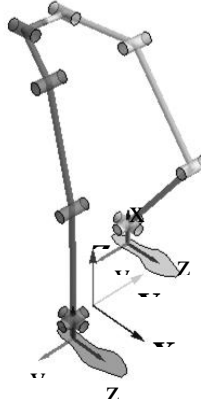


Con estos parámetros y la ec. (2.3) se obtiene la relación entre cada uno de los eslabones y el órgano terminal:

$${}^B\mathbf{T}_{15} = {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} \quad (2.6)$$

$${}^B\mathbf{T}_{25} = {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} \quad (2.7)$$

Donde  ${}^B\mathbf{T}_{15}$  corresponde al miembro derecho y  ${}^B\mathbf{T}_{25}$  al miembro izquierdo.



**Figura 2.2** Bases del órgano terminal derecho e izquierdo

Para cerrar el lazo cinemático se proponen arbitrariamente las siguientes transformaciones que proporcionan la posición y orientación de cada extremo final MID y MII.

$${}^B\mathbf{A}_D = \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) \quad (2.8)$$

$${}^B\mathbf{A}_I = \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) \quad (2.9)$$

Entonces se tiene que la ecs. (2.8) y (2.9), se refieren a la posición y orientación de cada uno de los extremos finales de los miembros derecho e izquierdo, respectivamente.

Igualando ecu. (2.6) con (2.8), y la ecu. (2.7) con (2.9), se tiene:

$${}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} = \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) \quad (2.10)$$



$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20} \mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21} \mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22} \mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23} \mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24} \mathbf{A}_{25} = \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) \quad (2.11)$$

Las ecuaciones de Posición del MID ec. (2.10) y MII ec. (2.11) se reescriben:

$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10} \mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11} \mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12} \mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13} \mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14} \mathbf{A}_{15} = {}^B \mathbf{A}_D \quad (2.12)$$

$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20} \mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21} \mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22} \mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23} \mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24} \mathbf{A}_{25} = {}^B \mathbf{A}_I \quad (2.13)$$

### 2.1.2. Modelo de la Segunda Configuración

El propósito de esta segunda configuración es mover la junta de AA de la cadera en dirección posterior en el plano sagital, quedando así separadas la junta de AA de la cadera y la junta de FE de la cadera por la distancia  $d_{11}$  y  $d_{21}$ . La ventaja de mover la junta de AA de la cadera es que se cuenta con un mayor espacio de trabajo para poder diseñar un sistema motriz para la extensión y para la abducción de la cadera.

Se muestra a continuación la configuración con los parámetros de la tabla de D-H, se mencionan sólo los del miembro derecho, ya que el miembro izquierdo es simétrico para fines de la simulación.

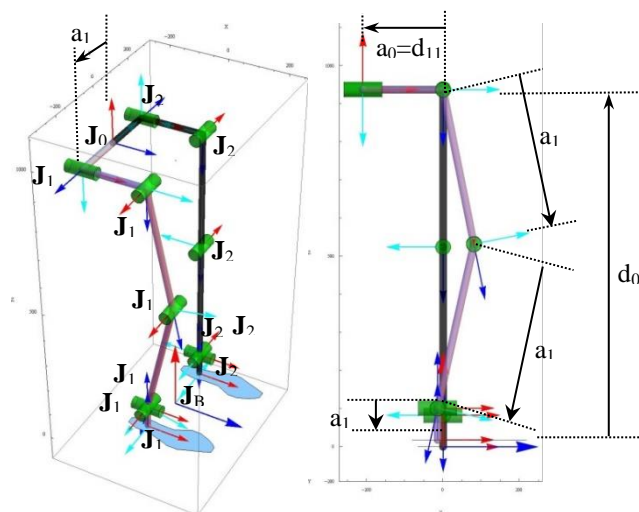


Figura 2.3 Base Inercial y bases móviles de la segunda configuración



**Tabla 2.2** *Parámetros Denavit-Hartenberg de la cadena cinemática de los MID y MII*

Eslabón( <i>i</i> )	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0°	d0	-a0	0°
10	-90°	0	a10	-90°
11	$\theta_{11} + 90^\circ$	d11	0	90°
12	$\theta_{12}$	0	a12	0°
13	$\theta_{13}$	0	a13	0°
14	$\theta_{14} + 180^\circ$	0	0	90°
15	$\theta_{15}$	0	-a15	0°
20	90°	0	a20	90°
21	$\theta_{21} - 90^\circ$	d21	0	-90°
22	$\theta_{22}$	0	a22	0°
23	$\theta_{23}$	0	a23	0°
24	$\theta_{24} - 180^\circ$	0	0	-90°
25	$\theta_{25}$	0	-a25	0°

Las ecuaciones de Posición para cada extremidad se describen como:

$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10} \mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11} \mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12} \mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13} \mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14} \mathbf{A}_{15} = {}^B \mathbf{A}_D \quad (2.14)$$

$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20} \mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21} \mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22} \mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23} \mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24} \mathbf{A}_{25} = {}^B \mathbf{A}_I \quad (2.15)$$

### 2.1.3. Modelo de la Tercera Configuración

En la tercera configuración además de que la junta de AA de la cadera está separada de la junta de FE de la cadera a una distancia  $a$  lo largo del eje anteroposterior, también se encuentra situada a una distancia ( $a_{11}$  y  $a_{21}$ ) a lo largo del eje longitudinal en dirección hacia arriba.

Basándonos en la representación de Denavit-Hartenberg (D-H), en donde sólo existen transformaciones de rotación y traslación en los ejes “X” y “Y”, se describen a continuación los parámetros para obtener las Transformadas Homogéneas de las dos cadenas cinemáticas desde la base inercial  $\mathbf{J}_B$  hasta el órgano terminal de cada una de las extremidades inferiores. En esta configuración la diferencia radica en la



posición de la junta de la cadera, la cual se movió en el eje Z inercial, a partir de la posición anterior (Modelo de la Segunda Configuración).

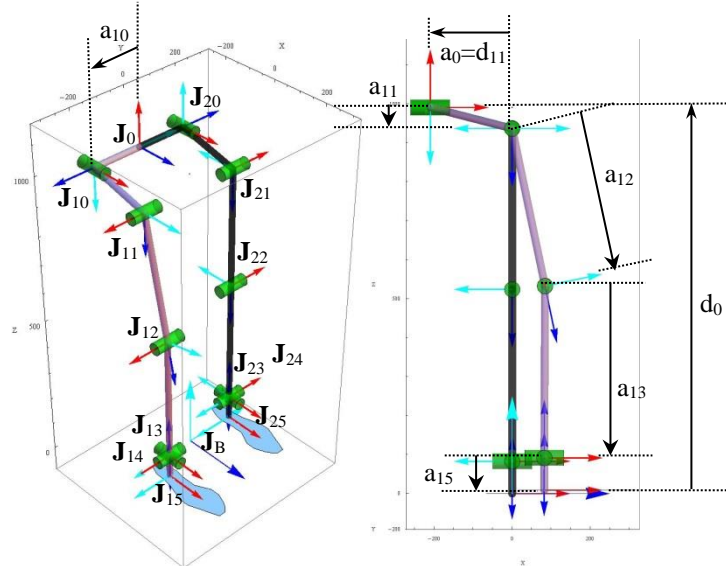


Figura 2.4 Base Inercial y bases móviles de la tercera configuración

Tabla 2.3 Parámetros Denavit-Hartenberg de la cadena cinemática de los MID y MII

Eslabón( $i$ )	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	$0^\circ$	$d_0$	$-a_0$	$0^\circ$
10	$-90^\circ$	0	$a_{10}$	$-90^\circ$
11	$\theta_{11} + 90^\circ$	$d_{11}$	$a_{11}$	$90^\circ$
12	$\theta_{12}$	0	$a_{12}$	$0^\circ$
13	$\theta_{13}$	0	$a_{13}$	$0^\circ$
14	$\theta_{14} + 180^\circ$	0	0	$90^\circ$
15	$\theta_{15}$	0	$-a_{15}$	$0^\circ$
20	$90^\circ$	0	$a_{20}$	$90^\circ$
21	$\theta_{21} - 90^\circ$	$d_{21}$	$a_{21}$	$-90^\circ$
22	$\theta_{22}$	0	$a_{22}$	$0^\circ$
23	$\theta_{23}$	0	$a_{23}$	$0^\circ$
24	$\theta_{24} - 180^\circ$	0	0	$-90^\circ$
25	$\theta_{25}$	0	$-a_{25}$	$0^\circ$

Se sustituyen los datos de cada eslabón, para tener posición y orientación de cada uno, con lo cual se obtendrán las ecuaciones de Posición para esta configuración, en donde la diferencia de la distribución anterior son las dos matrices  ${}^{10}\mathbf{A}_{11}$  y  ${}^{20}\mathbf{A}_{21}$ ,



mientras que el resto de matrices se siguen usando las mismas que en la segunda configuración.

$${}^{10}\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{11} & -a11 \cdot \sin \theta_{11} \\ \cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{11} & a11 \cdot \cos \theta_{11} \\ 0 & 1 & 0 & d11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$${}^{20}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & a11 \cdot \sin \theta_{21} \\ -\cos \theta_{21} & 0 & \sin \theta_{21} & -a11 \cdot \cos \theta_{21} \\ 0 & -1 & 0 & d21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Se tienen semejantes ecuaciones de Posición, teniendo en cuenta que cada una tiene sus respectivas matrices, parámetros y valores. Por ejemplo, en la primera y esta composición se tiene el mismo parámetro  $d10$ , sin embargo, el valor en cada una es distinto: 937[mm] y 991[mm], respectivamente; estos datos fueron obtenidos de la celda antropométrica.

$${}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} = {}^B\mathbf{A}_D \quad (2.18)$$

$${}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} = {}^B\mathbf{A}_I \quad (2.19)$$

#### 2.1.4. Modelo de la Cuarta Configuración

Tanto en esta configuración como en la siguiente se realizan cambios en la posición de las juntas de AA de la cadera en el plano frontal a lo largo del eje transversal, además de los realizados anteriormente en las segunda y tercera configuraciones. La variación en esta cuarta configuración se tiene en la distancia lateral ( $d_{111}$  y  $d_{211}$ ) entre cada una de las juntas de la AA ( $\mathbf{J}_{10}$  y  $\mathbf{J}_{20}$ ) y las juntas de FE ( $\mathbf{J}_{11}$  y  $\mathbf{J}_{21}$ ).





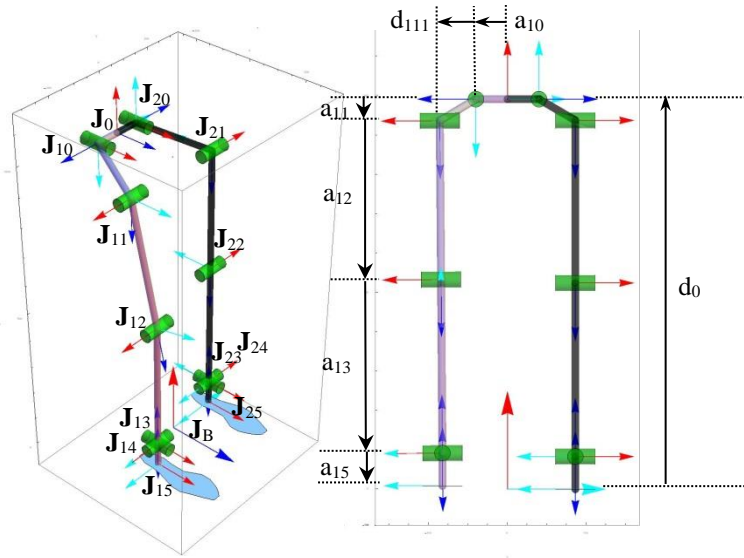


Figura 2.5 Base Inercial y bases móviles de la cuarta configuración

Tabla 2.4 Parámetros de la cadena cinemática de los MID y MII

Eslabón( $i$ )	$\theta_i$	$d_i$	$d_j$	$a_i$	$\alpha_i$	Tipo de TH
0	$0^\circ$	$d_0$	-	$-a_0$	$0^\circ$	TDH
10	$-90^\circ$	0	-	$a_{10}$	$-90^\circ$	TDH
11	$\theta_{11} + 90^\circ$	$d_{11}$	$d_{111}$	$a_{11}$	$90^\circ$	$T_{H1}$
12	$\theta_{12}$	0	-	$a_{12}$	$0^\circ$	TDH
13	$\theta_{13}$	0	-	$a_{13}$	$0^\circ$	TDH
14	$\theta_{14} + 180^\circ$	0	-	0	$90^\circ$	TDH
15	$\theta_{15}$	0	-	$-a_{15}$	$0^\circ$	TDH
20	$90^\circ$	0	-	$a_{20}$	$90^\circ$	TDH
21	$\theta_{21} - 90^\circ$	$d_{21}$	$d_{211}$	$a_{21}$	$-90^\circ$	$T_{H1}$
22	$\theta_{22}$	0	-	$a_{22}$	$0^\circ$	TDH
23	$\theta_{23}$	0	-	$a_{23}$	$0^\circ$	TDH
24	$\theta_{24} - 180^\circ$	0	-	0	$-90^\circ$	TDH
25	$\theta_{25}$	0	-	$-a_{25}$	$0^\circ$	TDH

Aunque principalmente se está trabajando con la representación de D-H, se necesitó de otra transformada homogénea para dos de las juntas  $J_{12}$ ,  $J_{22}$  del mecanismo:

$$\mathbf{T}_{H1} = \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{T}_z(d_i) \cdot \mathbf{T}_x(a_i) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_i) \cdot \mathbf{T}_z(d_j) \quad (2.20)$$



Al igual que las anteriores configuraciones, sigue siendo la misma ecuación de Posición para cada una de las piernas.

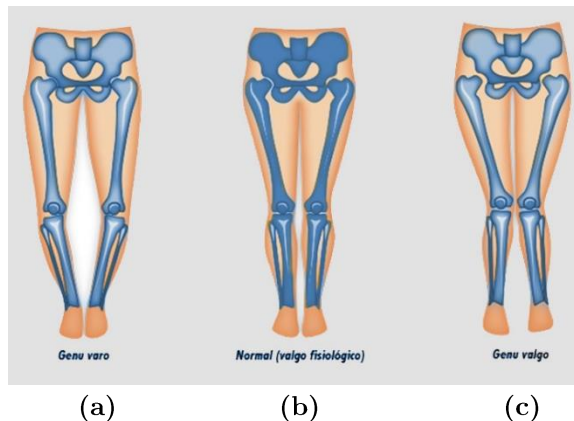
$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10} \mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11} \mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12} \mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13} \mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14} \mathbf{A}_{15} = {}^B \mathbf{A}_D \quad (2.21)$$

$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20} \mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21} \mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22} \mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23} \mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24} \mathbf{A}_{25} = {}^B \mathbf{A}_I \quad (2.22)$$

### 2.1.5. Modelo de la Quinta Configuración

Esta configuración sólo se diferencia de la anterior en que aquí se considera el ángulo de los miembros inferiores con respecto a la base inercial vertical, es decir, que no se consideran las extremidades rectas, sino que se pretende representar el valgo fisiológico, es decir, la inclinación a nivel del sistema osteoarticular con respecto al eje fisiológico de la rodilla ( (b) (c)

*Figura 2.6 (b)*). Por lo tanto, se incluyen en las matrices las distancias  $d_{12}$ ,  $d_{13}$ ,  $d_{22}$  y  $d_{23}$ , las cuales indican el valgo en los eslabones 12, 13, 22 y 23.



**Figura 2.6** Inclinación presente en los miembros inferiores: (a) genu varo de  $20^\circ$ ; (b) valgo fisiológico de  $8^\circ$ ; y (c) genu valgo de  $25^\circ$



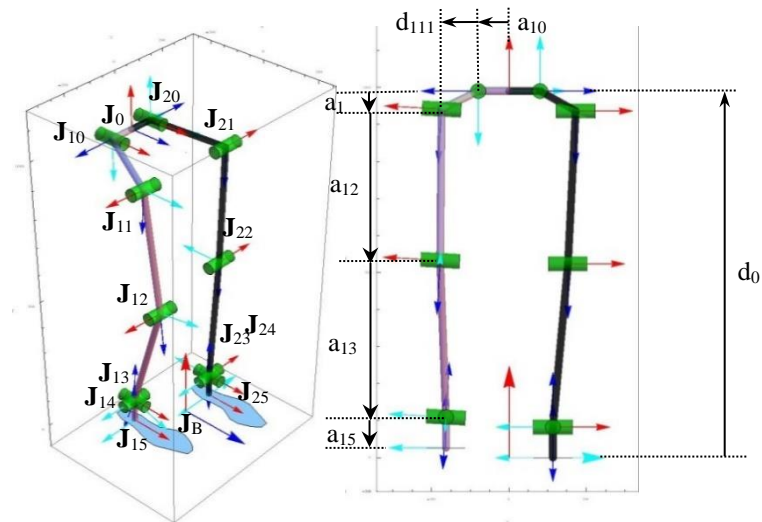


Figura 2.7 Base Inercial y bases móviles de la quinta configuración

Tabla 2.5 Parámetros de la cadena cinemática de los MID y MII

Eslabón( <i>i</i> )	$\theta_i$	$d_i$	$d_j$	$a_i$	$\alpha_i$	Tipo de TH
0	$0^\circ$	$d_0$	-	$-a_0$	$0^\circ$	TDH
10	$-90^\circ$	0	-	$a_{10}$	$-90^\circ$	TDH
11	$\theta_{11} + 90^\circ$	$d_{11}$	$d_{111}$	$a_{11}$	$90^\circ$	$T_{H1}$
12	$\theta_{12}$	$-d_{12}$	-	$a_{12}$	$0^\circ$	TDH
13	$\theta_{13}$	$-d_{13}$	-	$a_{13}$	$0^\circ$	TDH
14	$\theta_{14} + 180^\circ$	0	-	0	$90^\circ$	TDH
15	$\theta_{15}$	0	-	$-a_{15}$	$0^\circ$	TDH
20	$90^\circ$	0	-	$a_{20}$	$90^\circ$	TDH
21	$\theta_{21} - 90^\circ$	$d_{21}$	$d_{211}$	$a_{21}$	$-90^\circ$	$T_{H1}$
22	$\theta_{22}$	$-d_{22}$	-	$a_{22}$	$0^\circ$	TDH
23	$\theta_{23}$	$-d_{23}$	-	$a_{23}$	$0^\circ$	TDH
24	$\theta_{24} - 180^\circ$	0	-	0	$-90^\circ$	TDH
25	$\theta_{25}$	0	-	$-a_{25}$	$0^\circ$	TDH

También se ocupó la matriz de transformación  $T_{H1}$  ec. (2.20), del arreglo anterior, observando además las dos últimas tablas, solo se encuentran diferencias en las matrices:  ${}^{11}A_{12}$ ,  ${}^{12}A_{13}$ ,  ${}^{21}A_{22}$  y  ${}^{22}A_{23}$ , las restantes se trabajan de igual manera que la anterior configuración.



La ecuación de Posición se describe como:

$${}^B \mathbf{A}_0 \cdot {}^0 \mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10} \mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11} \mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12} \mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13} \mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14} \mathbf{A}_{15} = {}^B \mathbf{A}_D \quad (2.23)$$

Donde:

$${}^B \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$${}^0 \mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$${}^{10} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{11} & d111 \cdot \cos \theta_{11} - a11 \cdot \sin \theta_{11} \\ \cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{11} & a11 \cdot \cos \theta_{11} + d111 \cdot \sin \theta_{11} \\ 0 & 1 & 0 & d11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$${}^{11} \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 & a12 \cdot \cos \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 & a12 \cdot \sin \theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -d12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$${}^{12} \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & -\sin \theta_{13} & 0 & a13 \cdot \cos \theta_{13} \\ \sin \theta_{13} & \cos \theta_{13} & 0 & a13 \cdot \sin \theta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & -d13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$${}^{13} \mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{14} & 0 & -\sin \theta_{14} & 0 \\ -\sin \theta_{14} & 0 & \cos \theta_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$



$${}^{14}\mathbf{A}_{15} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{15} & -\sin \theta_{15} & 0 & -a15 \cdot \cos \theta_{15} \\ \sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} & 0 & -a15 \cdot \sin \theta_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La Posición del MII se describe así:

$${}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} = {}^B\mathbf{A}_I \quad (2.31)$$

En donde:

$${}^0\mathbf{A}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$${}^{20}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & d211 \cdot \cos \theta_{21} + a21 \cdot \sin \theta_{21} \\ -\cos \theta_{21} & 0 & \sin \theta_{21} & -a21 \cdot \cos \theta_{21} + d211 \cdot \sin \theta_{21} \\ 0 & -1 & 0 & d21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$${}^{21}\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{22} & -\sin \theta_{22} & 0 & a22 \cdot \cos \theta_{22} \\ \sin \theta_{22} & \cos \theta_{22} & 0 & a22 \cdot \sin \theta_{22} \\ 0 & 0 & 1 & -d22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$${}^{22}\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 & a23 \cdot \cos \theta_{23} \\ \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & a23 \cdot \sin \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 & -d23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$${}^{23}\mathbf{A}_{24} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{24} & 0 & \sin \theta_{24} & 0 \\ -\sin \theta_{24} & 0 & -\cos \theta_{24} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$



$${}^{24}\mathbf{A}_{25} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{25} & -\sin \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \cos \theta_{25} \\ \sin \theta_{25} & \cos \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \sin \theta_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

## 2.2. Análisis de Velocidad Matricial

Derivando respecto al tiempo las ecuaciones (2.21) y (2.22), se obtiene:

$$\begin{aligned} & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\dot{\mathbf{A}}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} = {}^B\dot{\mathbf{A}}_D \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\dot{\mathbf{A}}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\dot{\mathbf{A}}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\dot{\mathbf{A}}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\dot{\mathbf{A}}_{24} \cdot {}^{24}\mathbf{A}_{25} + \\ & {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{20} \cdot {}^{20}\mathbf{A}_{21} \cdot {}^{21}\mathbf{A}_{22} \cdot {}^{22}\mathbf{A}_{23} \cdot {}^{23}\mathbf{A}_{24} \cdot {}^{24}\dot{\mathbf{A}}_{25} = {}^B\dot{\mathbf{A}}_I \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dónde:

$${}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{11} + 90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111}) \quad (2.40)$$

$${}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{12}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{12}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.41)$$

$${}^{12}\dot{\mathbf{A}}_{13} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{13}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{13}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.42)$$

$${}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{14} + 180^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \quad (2.43)$$

$${}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{15}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{15}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.44)$$

$${}^{20}\dot{\mathbf{A}}_{21} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{21} - 90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{21}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{21}) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{211}) \quad (2.45)$$



$${}^{21}\dot{\mathbf{A}}_{22} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{22}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{22}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.46)$$

$${}^{22}\dot{\mathbf{A}}_{23} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{23}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{23}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.47)$$

$${}^{23}\dot{\mathbf{A}}_{24} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{24} - 180^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ) \quad (2.48)$$

$${}^{24}\dot{\mathbf{A}}_{25} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{25}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{25}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} {}^B\dot{\mathbf{A}}_D &= \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} {}^B\dot{\mathbf{A}}_I &= \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

### 2.3. Análisis de Aceleración Matricial

Se derivan las ecs.(2.38) y (2.39) respecto al tiempo:







Dónde:

$${}^{10}\ddot{\mathbf{A}}_{11} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{11}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111}) \quad (2.54)$$

$${}^{11}\ddot{\mathbf{A}}_{12} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{12}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{12}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.55)$$

$${}^{12}\ddot{\mathbf{A}}_{13} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{13}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{13}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.56)$$

$${}^{13}\ddot{\mathbf{A}}_{14} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{14}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \quad (2.57)$$

$${}^{14}\ddot{\mathbf{A}}_{15} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{15}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{15}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.58)$$

$${}^{20}\ddot{\mathbf{A}}_{21} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{21}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{21}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{21}) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{211}) \quad (2.59)$$

$${}^{21}\ddot{\mathbf{A}}_{22} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{22}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{22}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.60)$$

$${}^{22}\ddot{\mathbf{A}}_{23} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{23}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{23}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.61)$$

$${}^{23}\ddot{\mathbf{A}}_{24} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{24} - 180^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ) \quad (2.62)$$

$${}^{24}\ddot{\mathbf{A}}_{25} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{25}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{25}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ) \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} {}^B\ddot{\mathbf{A}}_D = & \ddot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ & 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ & 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ & \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ & 2 \cdot \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ & \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) \end{aligned} \quad (2.64)$$



$$\begin{aligned}
{}^B \ddot{\mathbf{A}}_I = & \ddot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& 2 \cdot \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi})
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Se ha realizado el análisis de velocidad y aceleración para cada una de las cinco configuraciones, pero no se han ocupado para los resultados, sin embargo, se consideran importantes para un posterior análisis de las fuerzas involucradas en el mecanismo en un análisis dinámico, síntesis dimensional, y para el control llevados a cabo durante el desarrollo de este proyecto multidisciplinario.





# CAPÍTULO 3 CINEMÁTICA INVERSA

La cinemática inversa consiste en hallar los valores de las coordenadas articulares del sistema, conocida la posición y orientación del extremo del órgano terminal.

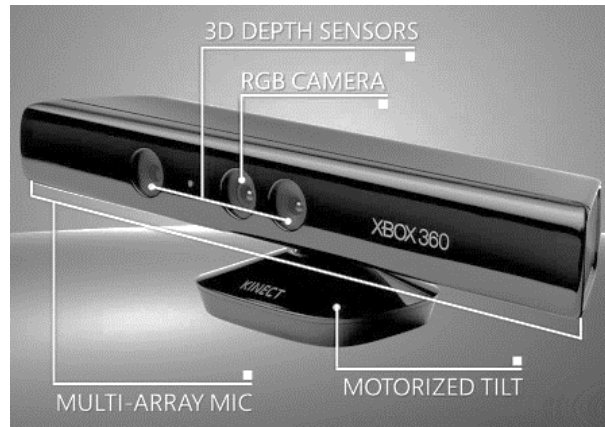
Para resolver la cinemática inversa se ha utilizado una trayectoria obtenida que debe seguir un punto de la planta del pie de cada uno de los miembros y su orientación respectiva.

## 3.1. Obtención de la Trayectoria del efector final (tobillo)

El movimiento de un cuerpo en el espacio consiste en dos partes: una trayectoria lineal o curva en el espacio que sigue un punto del cuerpo (en este caso el órgano terminal) y la orientación angular del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de posición, velocidad y aceleración, tanto lineal como angular y ser realizadas en un tiempo o ciclo establecido.

La obtención de la trayectoria lineal del efector final se realizó mediante un análisis con técnicas de visión artificial, en este caso, la toma de imágenes 2D de un marcador colocado en el tobillo de un usuario durante un ciclo de marcha a cadencia libre usando el sensor de Kinect XBOX® de manera repetitiva y procesando dicha información a través de Visual Basic®; con lo cual primero se analizó el movimiento del tobillo en el plano sagital para obtener las coordenadas de posición  $x_S = [x_{S1}, x_{S2}, x_{S2} \dots, x_{S100}]$  y  $z_S = [z_{S1}, z_{S2}, z_{S2} \dots, z_{S100}]$  después se analizó en movimiento del tobillo en el plano frontal para obtener las coordenadas de posición  $y_F = [y_{F1}, y_{F2}, y_{F2} \dots, y_{F100}]$  y  $z_F = [z_{F1}, z_{F2}, z_{F2} \dots, z_{F100}]$ .





**Figura 3.1** Partes del Kinect XBOX 360®

Una vez obtenido un promedio de todas las coordenadas, se realizó un emparejamiento de los datos entre  $z_S = [z_{S1}, z_{S2}, z_{S2} \dots, x_{S100}]$  y  $z_F = [z_{F1}, z_{F2}, z_{F2} \dots, z_{F100}]$ , para obtener las coordenadas de una única componente  $z_{SF}$ . Por último, se determinaron las funciones de cada una de las componentes por medio del uso de series de Fourier a partir de los puntos promediados que fueron procesados y ajustados en Matlab® para obtener las funciones de  $x_{pD}(t)$ ,  $y_{pD}(t)$  y  $z_{pD}(t)$ , que representan las componentes de la trayectoria tridimensional del tobillo derecho  $\mathbf{T}_D(t) = [x_{pD}(t), y_{pD}(t), z_{pD}(t)]$ . Para obtener la trayectoria tridimensional del tobillo izquierdo  $\mathbf{T}_I(t) = [x_{pI}(t), y_{pI}(t), z_{pI}(t)]$  se desplazó la función  $\mathbf{T}_D(t)$  en su componente  $y_{pD}(t)$ .

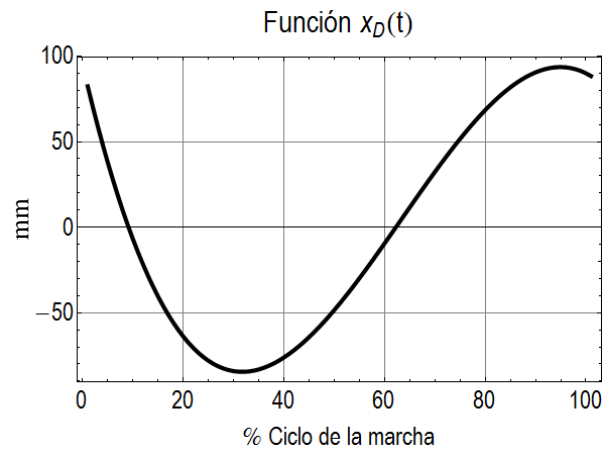
### 3.1.6. Trayectoria Lineal

A continuación, se describe la trayectoria obtenida en la que se desplaza un pie humano en la marcha a partir de datos obtenidos de un usuario con una marcha no patológica.

La función de la componente  $x_{pd}(t)$  fue polinomial de grado 3, mientras que para obtener  $y_{pd}(t)$  y  $z_{pd}(t)$  se ocupó de las Series de Fourier, ya que con este tipo de aproximación se obtenían mejores resultados, puesto que algunos métodos no han convergido de manera satisfactoria, ni en forma ni en los puntos de referencia (inicio y fin del ciclo). Donde  $t$  es el valor porcentual del ciclo de la marcha, del 0% al 100%.

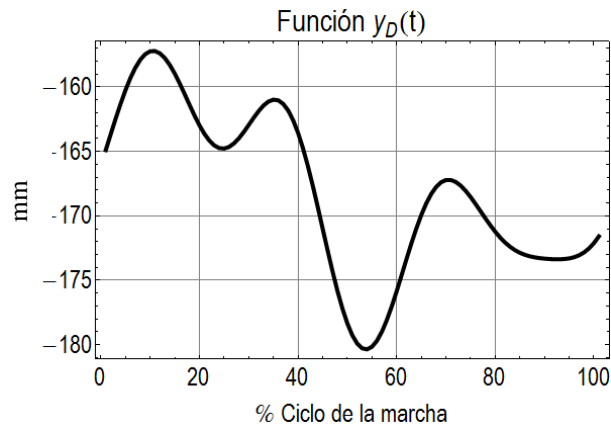
$$x_{pd}(t) = -0.00141t^3 + 0.2636t^2 - 12.2t - 232.6 \quad (3.1)$$





**Figura 3.2** Función polinomial de la componente  $x(t)$

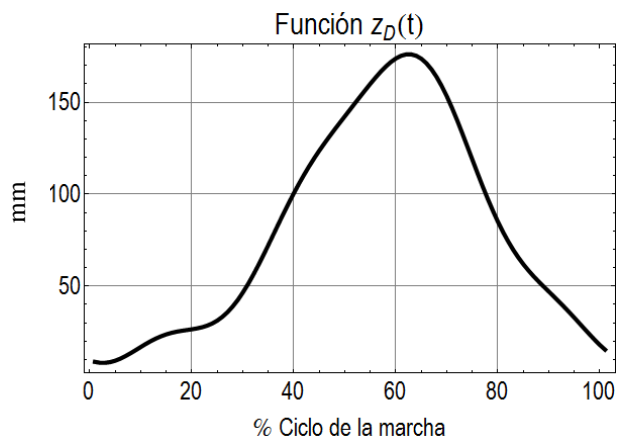
$$\begin{aligned}
 y_{pd}(t) = & -238.2 + 4.004\cos(0.05874t) + 5.052\sin(0.05874t) \\
 & -2.33\cos(0.11748t) + 2.969\sin(0.11748t) + 3.693\cos(0.17622t) \\
 & + 1.21\sin(0.17622t) - 2.059\cos(0.23496t) + 1.529\sin(0.23496t)
 \end{aligned} \quad (3.2)$$



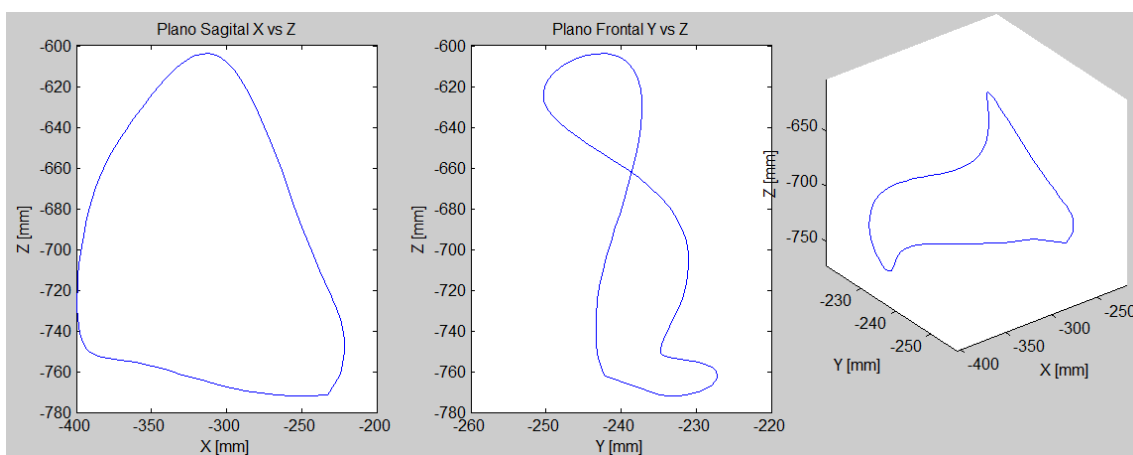
**Figura 3.3** Función de la componente  $y(t)$  obtenida mediante series de Fourier

$$\begin{aligned}
 z_{pd}(t) = & -702 - 72.95\cos(0.06033t) - 29.26\sin(0.06033t) + 8.971\cos(0.12066t) \\
 & + 12.94\sin(0.12066t) + 0.5997\cos(0.18099t) - 2.03\sin(0.18099t) \\
 & - 5.91\cos(0.24132t) - 0.5984\sin(0.24132t)
 \end{aligned} \quad (3.3)$$





**Figura 3.4** Función de la componente  $z(t)$  obtenida mediante series de Fourier



**Figura 3.5** Trayectoria tridimensional de desplazamiento de la planta del pie  $T_D$

### 3.1.7. Orientación angular

Para poder evaluar los resultados del análisis cinemático es importante contar con un criterio de comparación y dado que la posición y rotación de la planta del pie son necesarias para obtener la solución, se requiere conocer en todo tiempo estos datos (puntos y ángulos) tanto en el plano frontal como sagital.

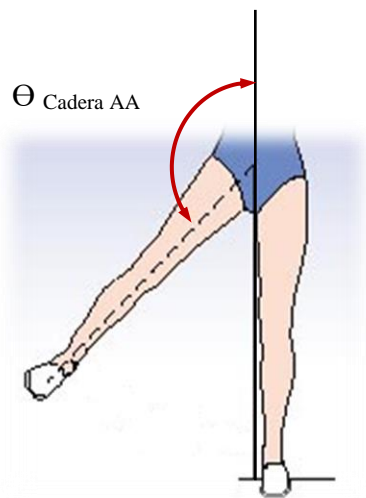
Se optó por obtener las trayectorias de desplazamiento del tobillo y la posición angular de cada una de las articulaciones (cadera y rodilla) a través de goniometría y cámaras en el plano sagital durante la marcha de un individuo, restringiendo la orientación de la planta ( $\alpha = \text{cte.}$  y  $\beta = \text{cte.}$ ) durante la trayectoria de desplazamiento de tal manera que permaneciera con la misma orientación.



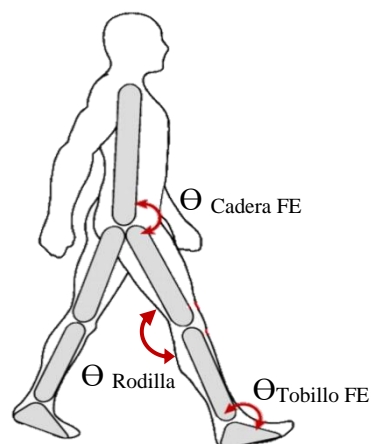
Dicha aseveración es válida considerando que la planta de pie comienza paralela al piso y termina paralela al piso durante el ciclo de la marcha.

Las bases locales de los órganos terminales,  $\mathbf{J}_D$  y  $\mathbf{J}_I$ , tienen asociados ángulos  $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = \beta$  constantes de la rotación en la base inercial  $\mathbf{I}_0$ , en donde:  $\alpha_{pd} = 180^\circ, \beta_{pd} = -90^\circ$  y  $\alpha_{pi} = 180, \beta_{pi} = -90^\circ$ , respectivamente.

Para aclaración de las gráficas y los resultados, se explica a continuación las referencias que se tomaron:



**Figura 3.6** Referencia del ángulo en el plano frontal.



**Figura 3.7** Referencia tomada para los ángulos en el plano sagital.





A partir de la ecuación de posición matricial se tienen 12 ecs. escalares. Podemos tomar 3 ecs. de la última columna y 3 ecs. restantes de las primeras 3 columnas. Sin embargo, para este mecanismo tomaremos las 12 ecuaciones en cada miembro inferior para resolver sus respectivas 5 incógnitas, mediante un método de optimización basado en los gradientes (Método de Davidón-Fletcher-Powell) definida por la función *FindMinimum* de Mathematica®.

Todas las simulaciones se obtuvieron con la herramienta Mathematica®. Se resolvió la cinemática inversa para la cuarta configuración, en la cual sólo se utilizó la trayectoria de desplazamiento del tobillo. El código de las simulaciones se muestra en el Apéndice D.

## 3.2. Gráficas de Posición

### Miembro Derecho

1. Las variables son:  $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}, x_{pd}(t), y_{pd}(t), z_{pd}(t), \alpha_{pd}, \beta_{pd} = 10$
2. Como  $GDL=5$ , se dan  $x_{pd}(t), y_{pd}(t), z_{pd}(t), \alpha_{pd}, \beta_{pd}$  y se calculan 5 incógnitas.

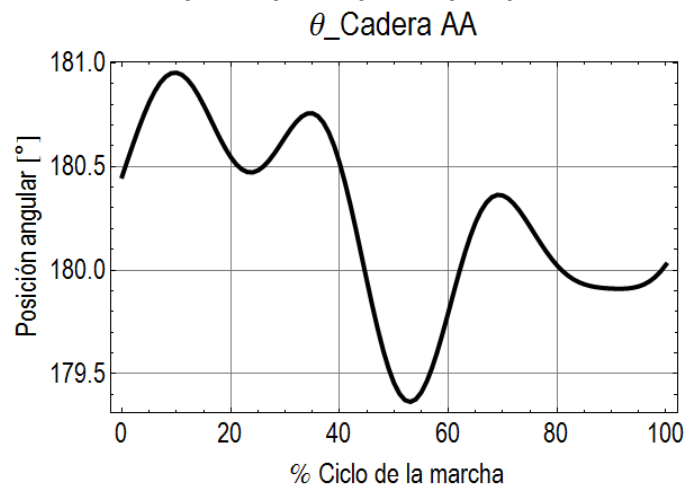


Figura 3.8 Posición angular de la aducción-abducción de la cadera



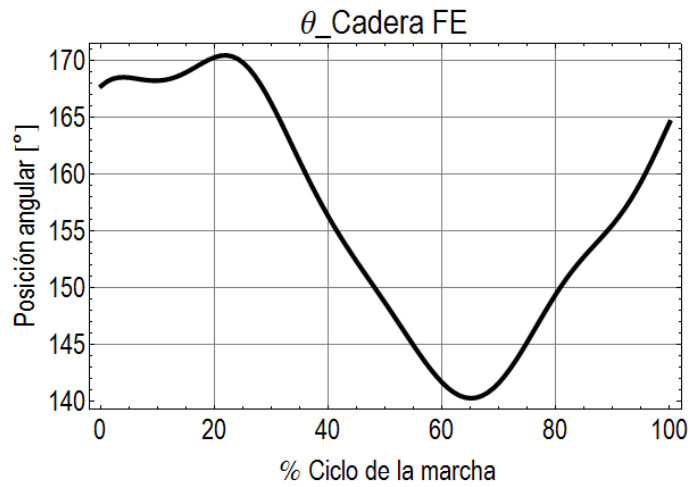


Figura 3.9 Posición angular de la flexión-extensión de la cadera

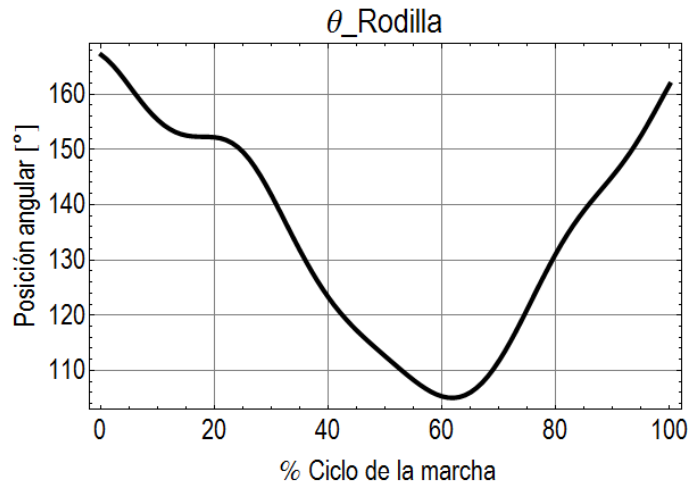


Figura 3.10 Posición angular de la flexión-extensión de la rodilla

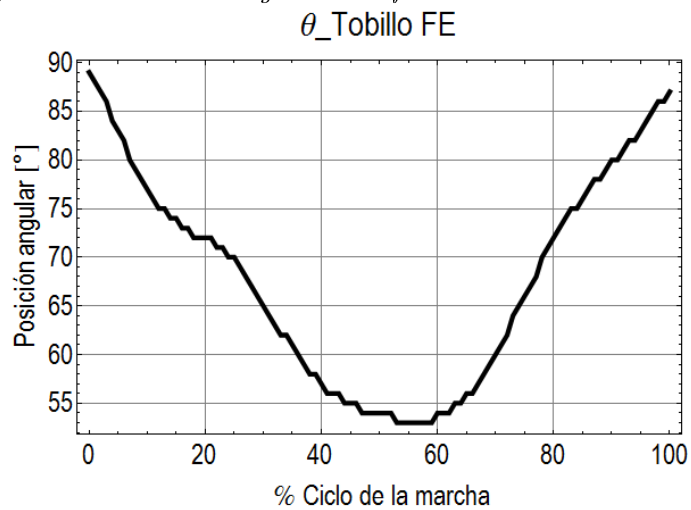


Figura 3.11 Posición angular de la flexión-extensión del tobillo



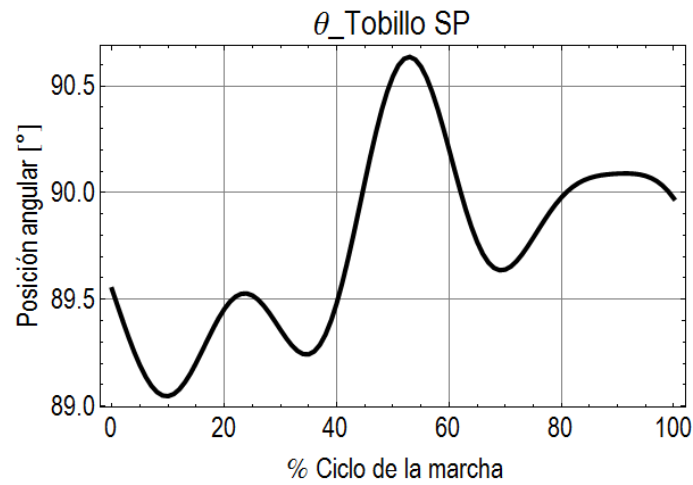


Figura 3.12 Posición angular de la supinación-pronación del tobillo derecho

### Miembro Izquierdo:

1. Las variables son:  $\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_{25}, x_{pi}(t), y_{pi}(t), z_{pi}(t), \alpha_{pi}, \beta_{pi} = 10$
2. Como  $GDL=5$ , se dan  $x_{pi}(t), y_{pi}(t), z_{pi}(t), \alpha_{pi}, \beta_{pi}$  y se calculan 5 incógnitas.

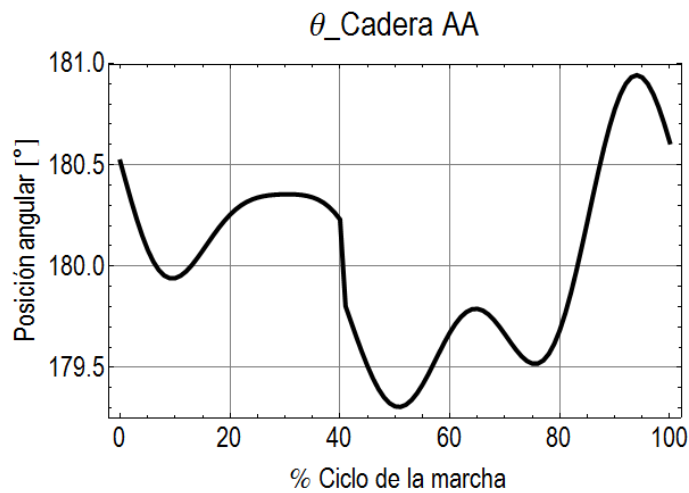
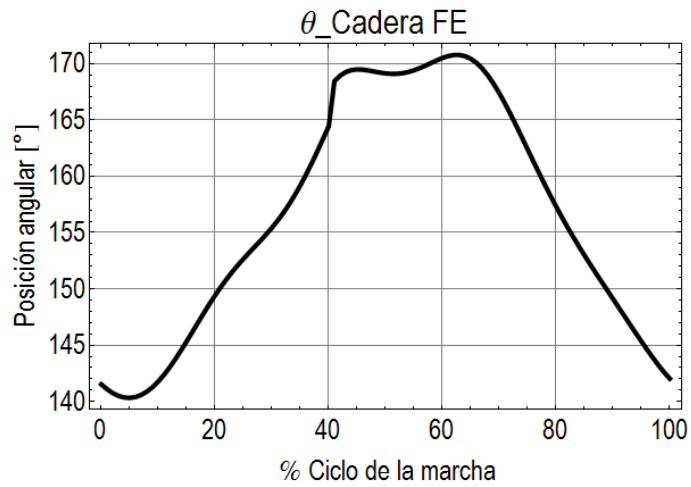
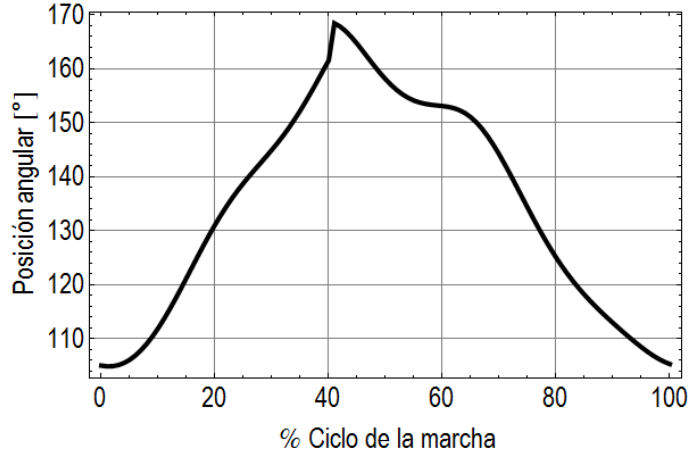


Figura 3.13 Posición angular de la aducción-abducción de la cadera

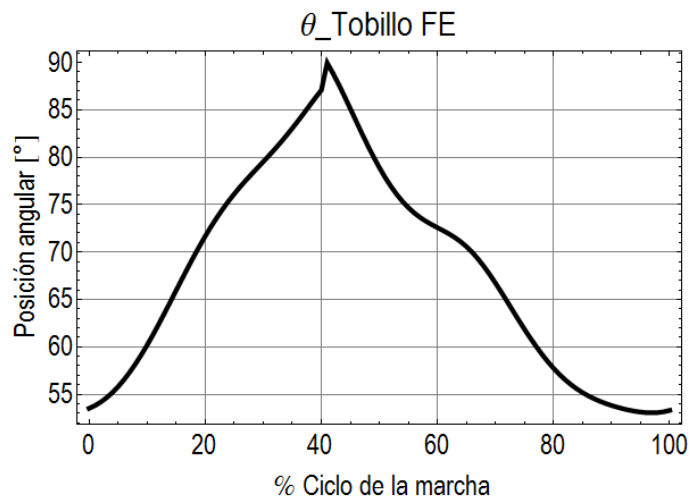




**Figura 3.14** Posición angular de la flexión-extensión de la cadera  
 $\theta_{\text{Rodilla}}$



**Figura 3.15** Posición angular de la flexión-extensión de la rodilla



**Figura 3.16** Posición angular de la flexión-extensión del tobillo



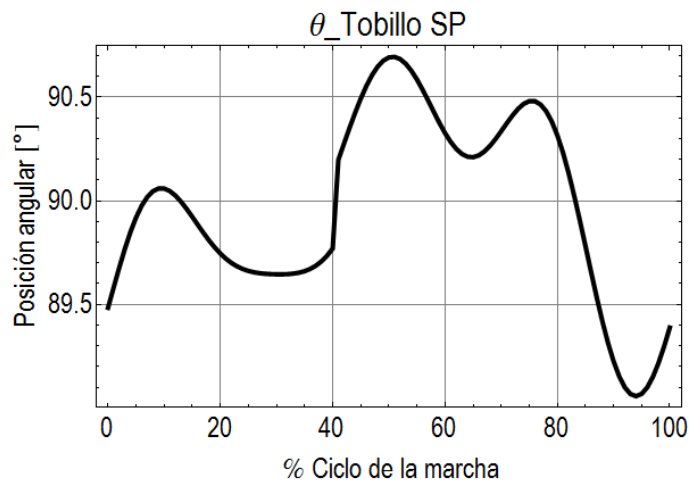


Figura 3.17 Posición angular de la supinación-pronación del tobillo izquierdo

### 3.3. Gráficas de Velocidad

Para resolver la velocidad angular se sabe que:

#### Miembro Derecho:

1. Las variables son:  $\dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{14}, \dot{\theta}_{15}, \dot{x}_{pd}(t), \dot{y}_{pd}(t), \dot{z}_{pd}(t), \dot{\alpha}_{pd}, \dot{\beta}_{pd} = 10$
2. Como  $GDL=5$ , se dan  $(\dot{x}_{pd}(t), \dot{y}_{pd}(t), \dot{z}_{pd}(t), \dot{\alpha}_{pd}, \dot{\beta}_{pd})$  y se calculan 5 incógnitas.

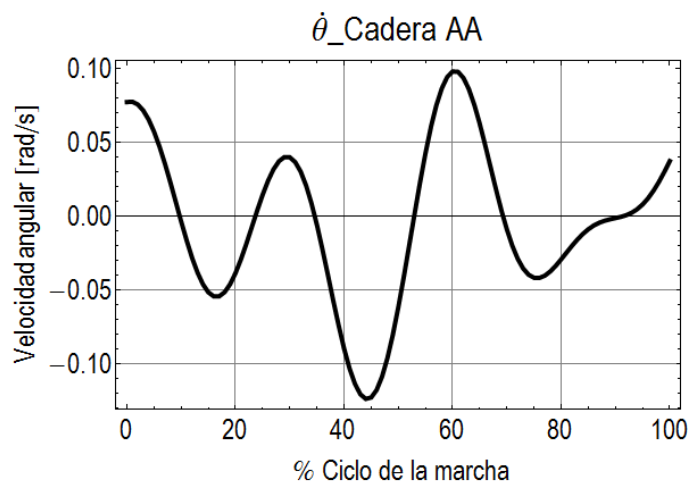


Figura 3.18 Velocidad angular de la aducción-abducción de la cadera



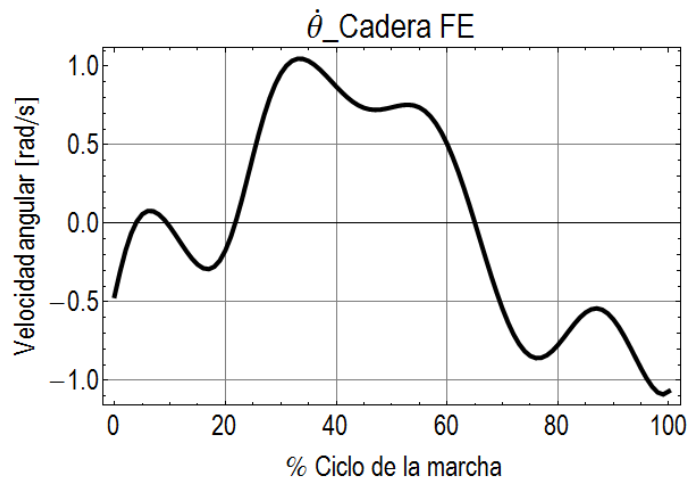


Figura 3.19 Velocidad angular de la flexión-extensión de la cadera

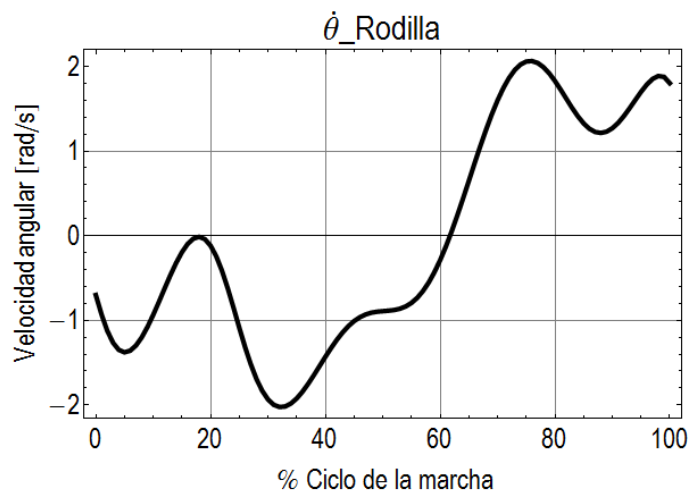


Figura 3.20 Velocidad angular de la flexión-extensión de la rodilla

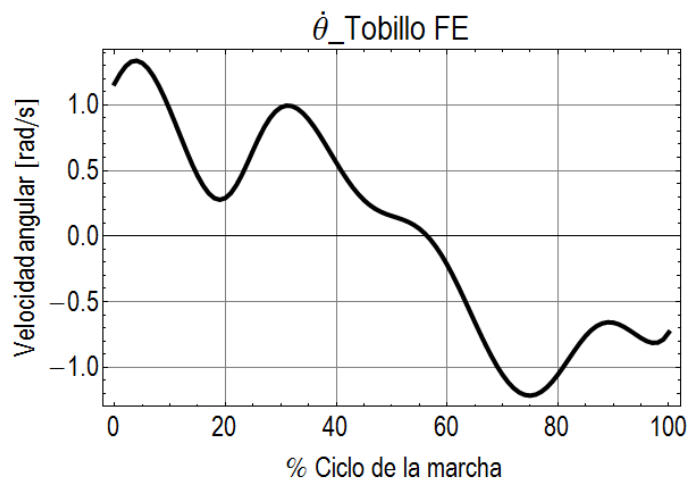
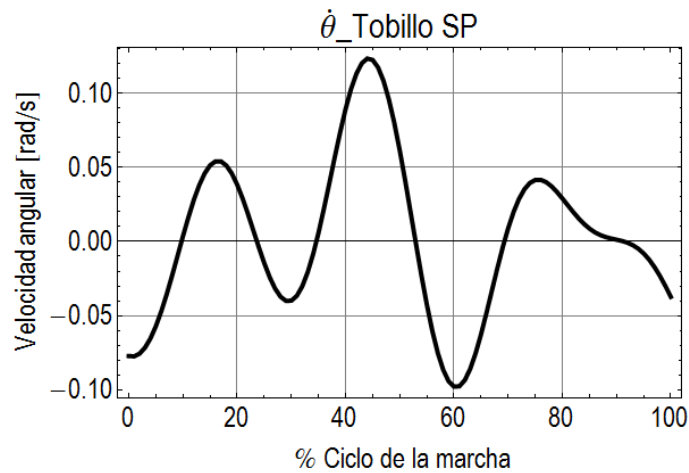


Figura 3.21 Velocidad angular de la flexión-extensión del tobillo

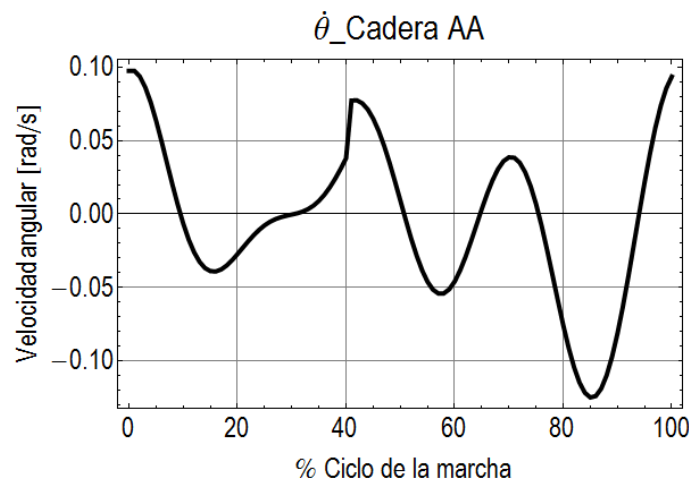




**Figura 3.22** Velocidad angular de la supinación-pronación del tobillo derecho

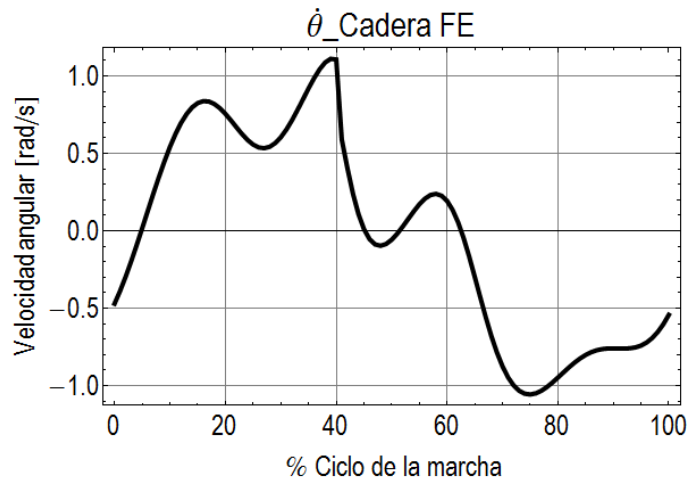
### Miembro Izquierdo:

1. Las variables son:  $\dot{\theta}_{21}, \dot{\theta}_{22}, \dot{\theta}_{23}, \dot{\theta}_{24}, \dot{\theta}_{25}, \dot{x}_{pi}(t), \dot{y}_{pi}(t), \dot{z}_{pi}(t), \dot{\alpha}_{pi}, \dot{\beta}_{pi} = 10$
2. Como  $GDL=5$ , se dan  $(\dot{x}_{pi}(t), \dot{y}_{pi}(t), \dot{z}_{pi}(t), \dot{\alpha}_{pi}, \dot{\beta}_{pi})$  y se calculan 5 incógnitas.

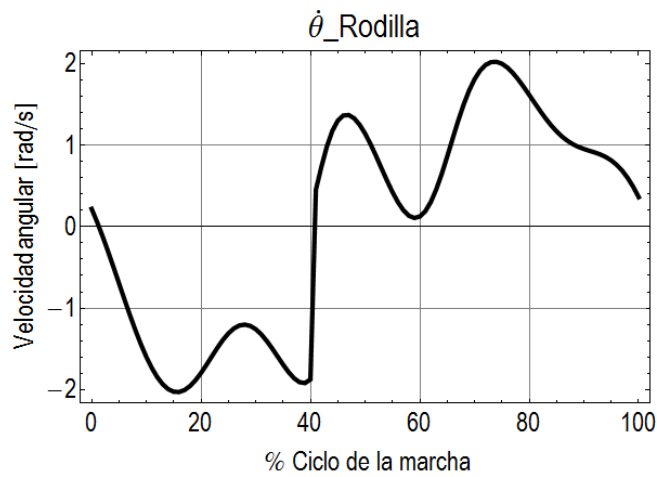


**Figura 3.23** Velocidad angular de la aducción-abducción de la cadera

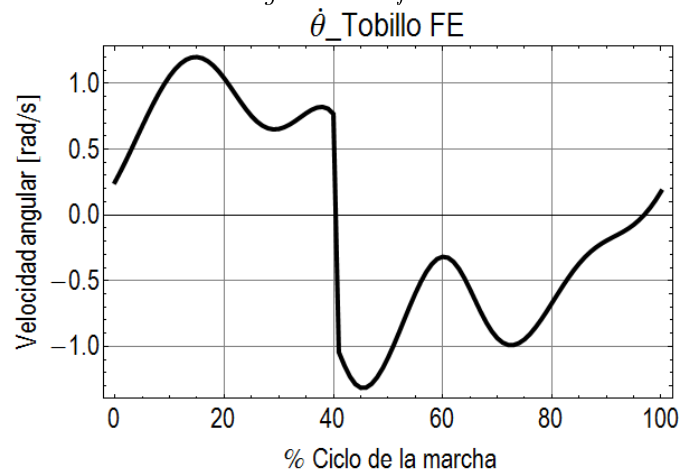




**Figura 3.24** Velocidad angular de la flexión-extensión de la cadera



**Figura 3.25** Velocidad angular de la flexión-extensión de la rodilla



**Figura 3.26** Velocidad angular de la flexión-extensión del tobillo





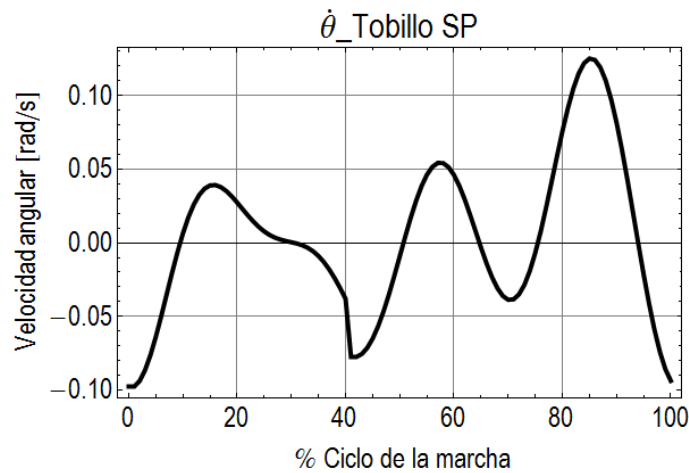


Figura 3.27 Velocidad angular de la supinación - pronación del tobillo izquierdo

### 3.4. Gráficas de Aceleración

Para resolver la aceleración se sabe que:

**Miembro Derecho:**

1. Las variables son:  $\ddot{\theta}_{11}, \ddot{\theta}_{12}, \ddot{\theta}_{13}, \ddot{\theta}_{14}, \ddot{\theta}_{15}, \ddot{x}_{pd}(t), \ddot{y}_{pd}(t), \ddot{z}_{pd}(t), \ddot{\alpha}_{pd}, \ddot{\beta}_{pd} = 10$
2. Como  $GDL=5$ , se dan  $(\ddot{x}_{pd}(t), \ddot{y}_{pd}(t), \ddot{z}_{pd}(t), \ddot{\alpha}_{pd}, \ddot{\beta}_{pd})$  y se calculan 5 incógnitas.

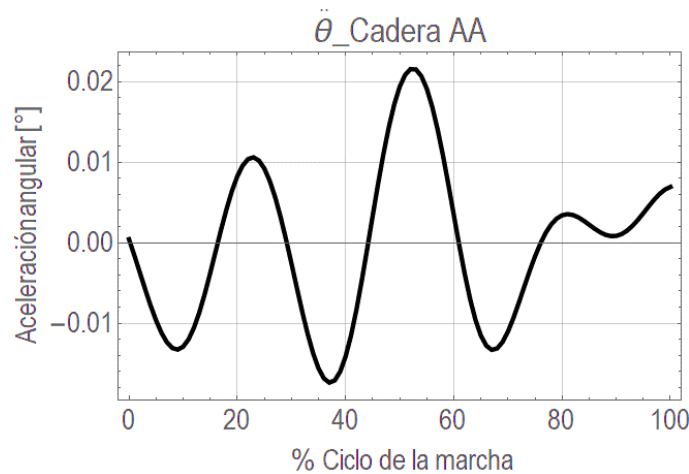
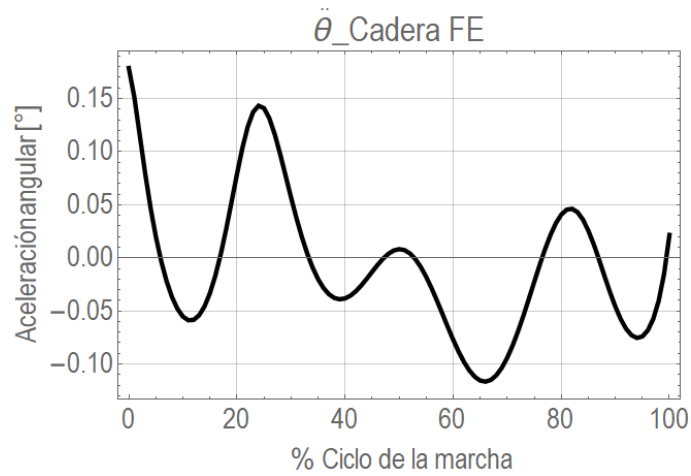
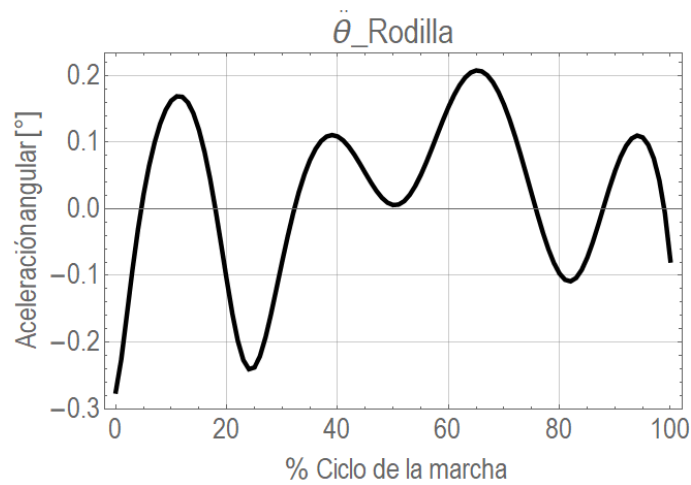


Figura 3.28 Aceleración angular de la aducción-abducción de la cadera

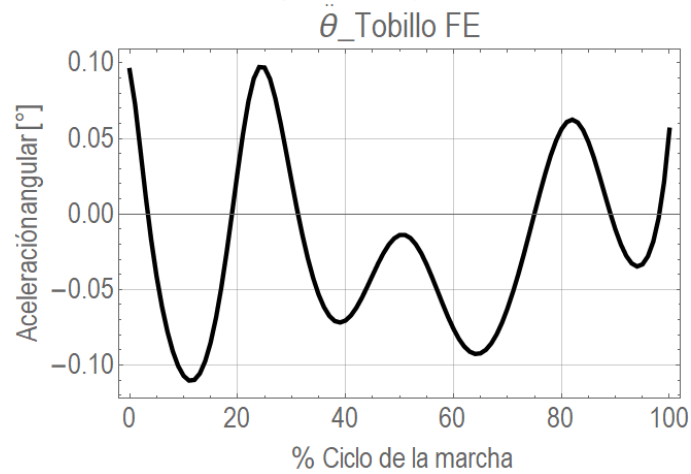




**Figura 3.29** Aceleración angular de la flexión-extensión de la cadera

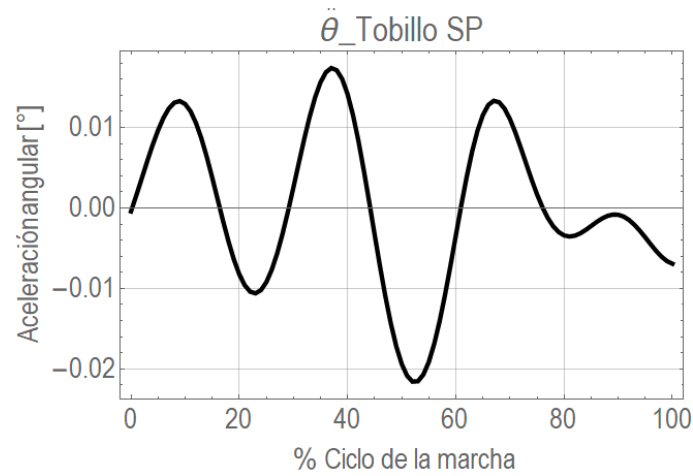


**Figura 3.30** Aceleración angular de la flexión-extensión de la rodilla



**Figura 3.31** Aceleración angular de la flexión-extensión del tobillo

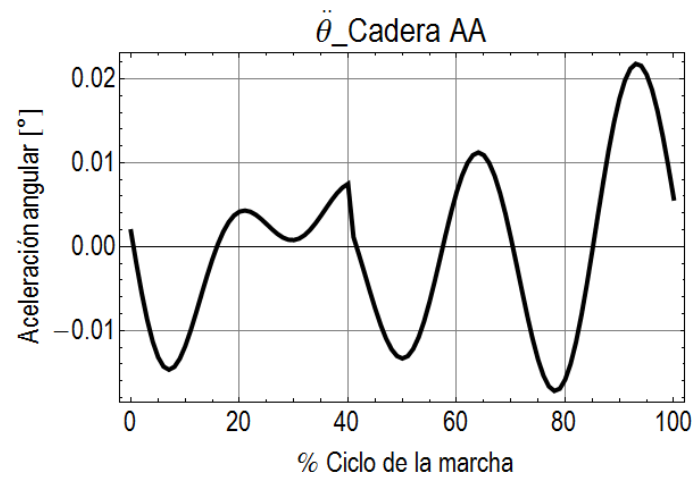




**Figura 3.32** Aceleración angular de la supinación-pronación del tobillo derecho

### Miembro Izquierdo:

1. Las variables son:  $\ddot{\theta}_{21}, \ddot{\theta}_{22}, \ddot{\theta}_{23}, \ddot{\theta}_{24}, \ddot{\theta}_{25}, \ddot{x}_{pi}(t), \ddot{y}_{pi}(t), \ddot{z}_{pi}(t), \ddot{\alpha}_{pi}, \ddot{\beta}_{pi} = 10$
2. Como  $GDL=5$ , se dan  $(\ddot{x}_{pi}(t), \ddot{y}_{pi}(t), \ddot{z}_{pi}(t), \ddot{\alpha}_{pi}, \ddot{\beta}_{pi})$  y se calculan 5 incógnitas.



**Figura 3.33** Aceleración angular de la aducción-abducción de la cadera



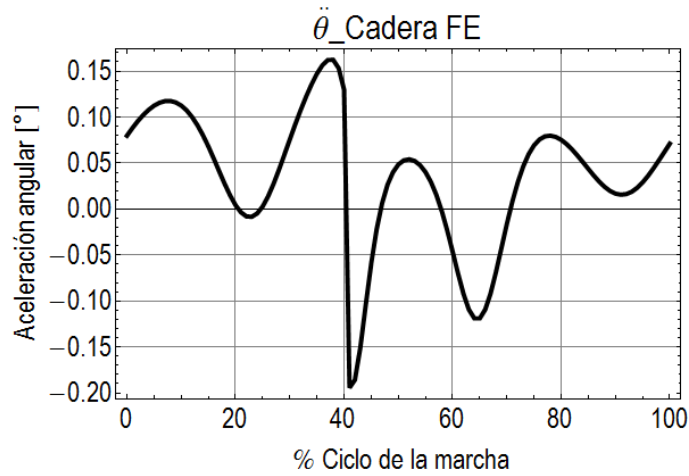


Figura 3.34 Aceleración angular de la flexión-extensión de la cadera

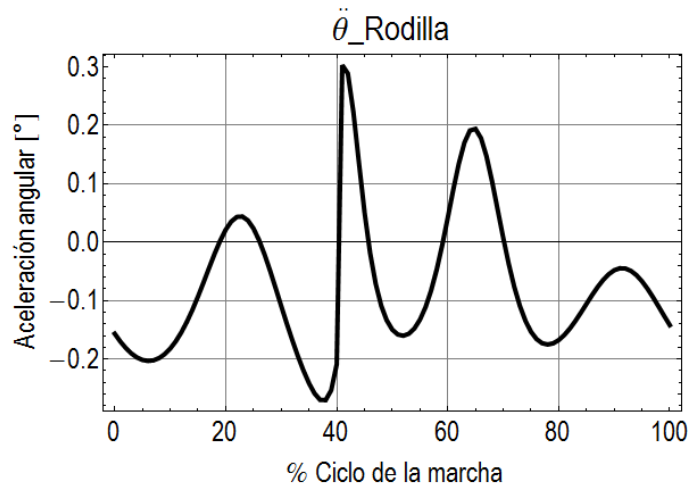


Figura 3.35 Aceleración angular de la flexión-extensión de la rodilla

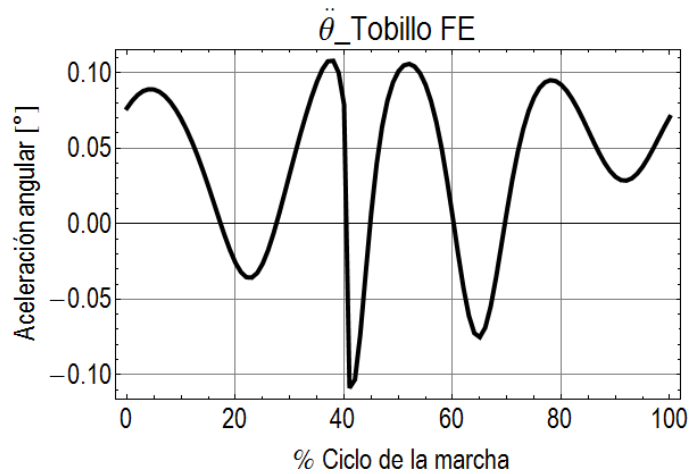
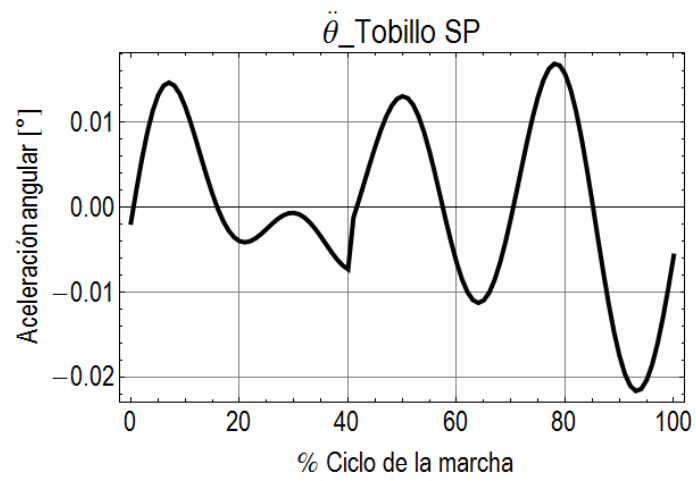


Figura 3.36 Aceleración angular de la flexión-extensión del tobillo





**Figura 3.37** *Aceleración angular de la supinación-pronación del tobillo izquierdo*



# CAPÍTULO 4 SIMULACIONES Y ANÁLISIS DE DATOS

La cinemática directa consiste en hallar los valores de la posición y orientación del extremo del órgano terminal, conociendo las coordenadas articulares del sistema.

Para resolver la cinemática directa se tienen que conocer las trayectorias angulares de las articulaciones que deben seguir para emular la marcha humana en un ciclo, dando como resultado el movimiento del pie de cada uno de los miembros y su orientación respectiva.

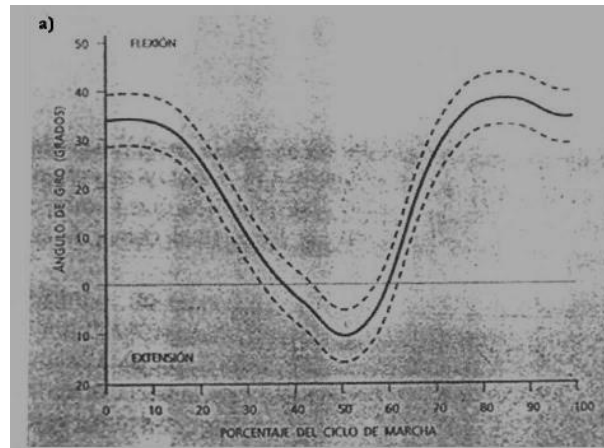
## 4.1. Obtención de las Trayectorias angulares

Cada articulación biológica realiza movimientos angulares que dependen de diferentes factores y de la fase en la que se encuentran. Durante el análisis durante el ciclo de la marcha se pueden estimar los movimientos de cada una de las articulaciones biológicas a cadencia libre.

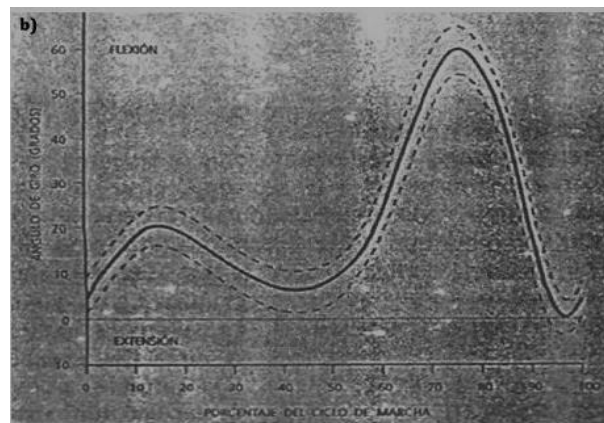
La obtención de las funciones de las trayectorias de la cadera se realizó a partir de gráficas de posición angular documentadas en bases de datos del estado de arte mediante regresiones hasta obtener gráficas de posición angular que estuvieran dentro de los rangos mostrados en los resultados de las bases de datos. Las gráficas de posición documentadas mostraban los resultados de la medición de los ángulos durante varias pruebas y con distintos usuarios.

Para poder llevar a cabo la resolución de la cinemática directa, se necesitaba que dichos resultados de las bases de datos se concretaran en funciones para poder así ingresarlas a la solución de posición. Se puede observar que, en las gráficas documentadas, los movimientos angulares siguen un patrón, con base en ello, se obtuvieron las funciones de las trayectorias angulares con ese patrón.





**Figura 4.1** Posición angular de la flexión-extensión cadera documentada en bases de datos

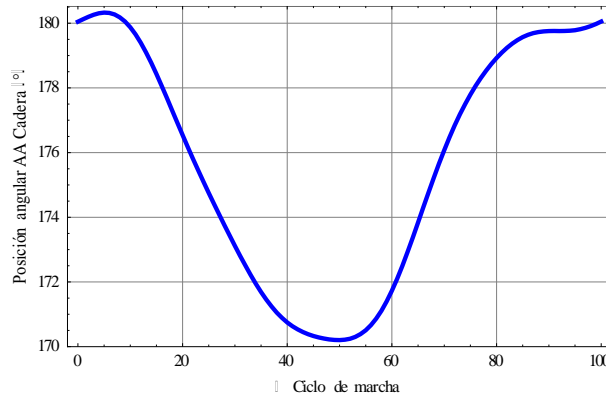


**Figura 4.2** Posición angular de la flexión-extensión de rodilla documentada en bases de datos

En este trabajo, las siguientes gráficas ilustran las funciones de las trayectorias angulares para la aducción-abducción de cadera  $f_{AA\_cadera\_D}(t)$ ,  $f_{AA\_cadera\_I}(t)$ ; flexión-extensión de cadera  $f_{FE\_cadera\_D}(t)$ ,  $f_{FE\_cadera\_I}(t)$ ; y flexión-extensión de rodilla  $f_{FE\_rodilla\_D}(t)$ ,  $f_{FE\_rodilla\_I}(t)$ , en donde se relacionan la posición angular con respecto al porcentaje del ciclo de marcha.

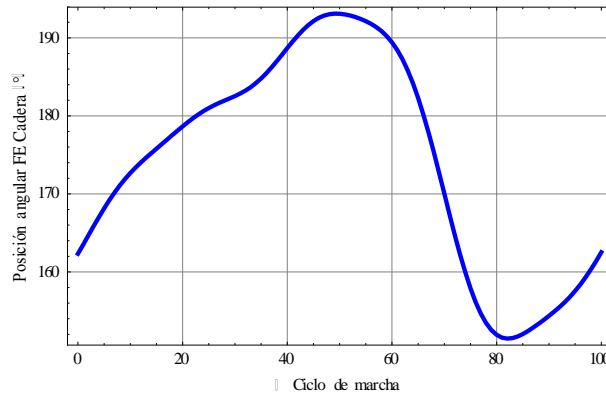
$$\begin{aligned}
 f_{AA\_cadera} = & 175.7 + 5.135 \cos(0.06286t) - 1.111 \sin(0.06286t) \\
 & - 0.572 \cos(0.12572t) + 0.2741 \sin(0.12572t) \\
 & - 0.108 \cos(0.18858t) + 0.4639 \sin(0.18858t) \\
 & - 0.002977 \cos(0.25144t) + 0.01883 \sin(0.25144t) \\
 & - 0.1036 \cos(0.3143t) + 0.06109 \sin(0.3143t)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$





**Figura 4.3** Posición angular de la aducción-abducción de cadera de un usuario

$$\begin{aligned}
 f_{FE\_cadera} = & 174.4 - 15.81\cos(0.06293t) + 9.445\sin(0.06293t) \\
 & + 4.074\cos(0.12586t) + 5.357\sin(0.12586t) + 0.6071\cos(0.18879t) \\
 & - 1.238\sin(0.18879t) - 0.7594\cos(0.25172t) - 0.4853\sin(0.25172t) \\
 & - 0.1786\cos(0.31465t) + 0.7431\sin(0.31465t)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$



**Figura 4.4** Posición angular de la flexión-extensión cadera de un usuario

La obtención de la función de la posición angular de flexión-extensión de la rodilla ya se había realizado de una manera similar en una Tesis de Licenciatura [36]:

$$\begin{aligned}
 f_{rodilla\_R} = & 1.0697 \times 10^{-14} t^8 + 1.1476 \times 10^{-12} t^7 - 9.0106 \times 10^{-10} t^6 + 1.172 \times 10^{-7} t^5 \\
 & - 6.5248 \times 10^{-6} t^4 + 0.0001933 t^3 - 0.0038199 t^2 + 0.047595 t + 0.07948
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

<sup>1</sup> Ecuación en radianes con su respectiva referencia para los ángulos. *Control de posición de cadera-rodilla para una órtesis de miembro inferior*. Vázquez S., Grecia M., 2012, p. 26.





Debido a que en la función angular de la rodilla no se toma como referencia los ángulos entre miembros, sino con otra referencia, se tiene que realizar una suma de ángulos y la conversión a grados, con el fin de homogenizar las unidades en el presente trabajo, quedando de la siguiente forma:

$$f_{\text{rodilla}} = 180^\circ - \left( f_{\text{rodilla\_R}} \times \frac{180}{\pi} \right) \quad (4.4)$$

$$f_{\text{rodilla}} = 180^\circ - \left( \left( \begin{array}{l} 1.0697 \times 10^{-14} t^8 + 1.1476 \times 10^{-12} t^7 - 9.0106 \times 10^{-10} t^6 \\ + 1.172 \times 10^{-7} t^5 - 6.5248 \times 10^{-6} t^4 + 0.0001933 t^3 \\ - 0.0038199 t^2 + 0.047595 t + 0.07948 \end{array} \right) \times \frac{180}{\pi} \right) \quad (4.5)$$

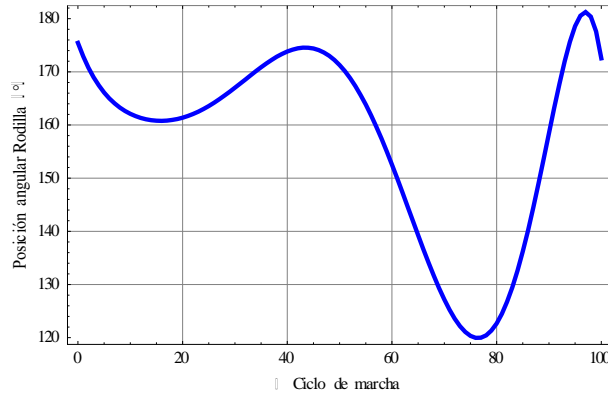


Figura 4.5 Posición angular de la flexión-extensión de rodilla de un usuario

## 4.2. Comparación de resultados de Posición

Como resultado de la cinemática inversa se ha realizado la comparación de cada una de las trayectorias angulares resultantes de cada articulación de un solo miembro del mecanismo simulado de las cinco configuraciones para determinar cuál es la configuración que mejor se adapta a las trayectorias angulares teóricas antes mencionadas durante un ciclo de la marcha humana.

En este sentido, se hicieron 5 comparaciones, en donde:

- Comparación A: Comparación entre las 5 configuraciones resolviendo la cinemática inversa.

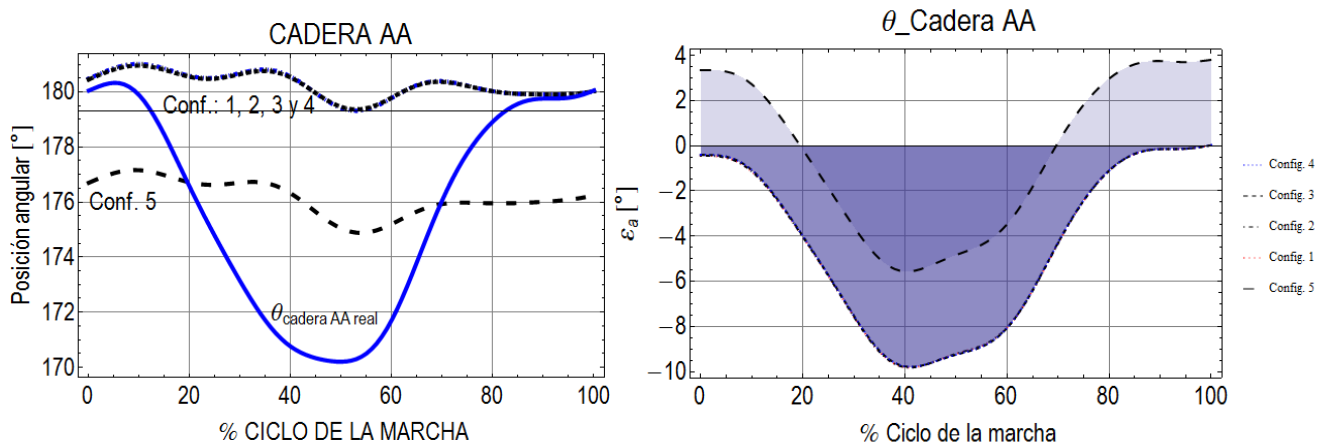


- Comparación B: Comparación entre las 5 configuraciones resolviendo la cinemática inversa con restricciones.
- Comparación C: Comparación entre las 5 configuraciones resolviendo la cinemática inversa con restricciones y la trayectoria angular teórica de la rodilla.
- Comparación D: Comparación entre las 5 configuraciones resolviendo la cinemática inversa con la trayectoria angular teórica de la rodilla.
- Comparación E: Comparación entre la cinemática inversa y la cinemática directa utilizando la quinta configuración.

A continuación, se explican los resultados obtenidos.

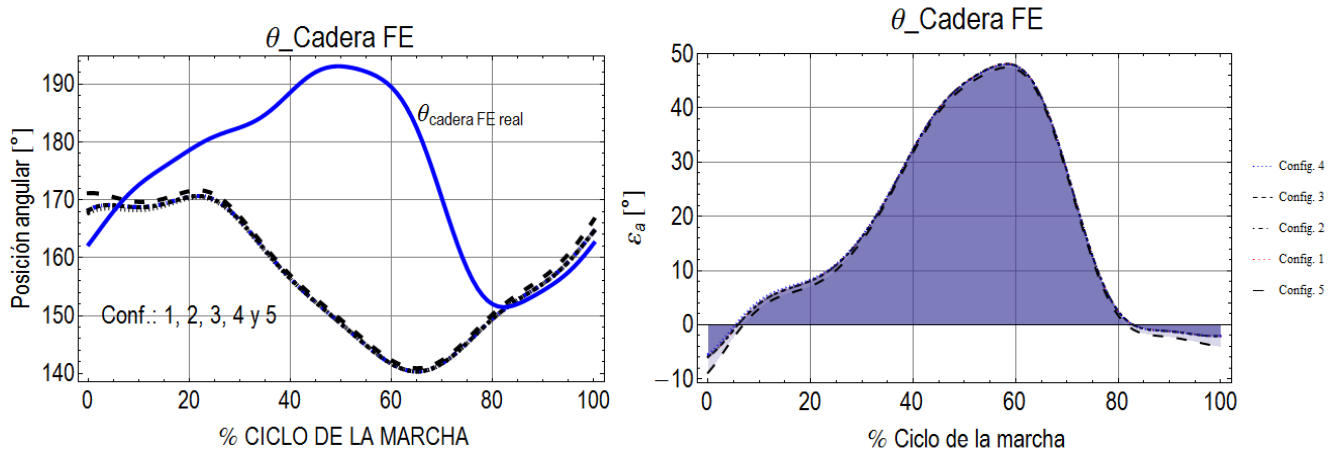
#### 4.2.1. Comparación A

En la primera comparación únicamente se ha resuelto el problema de la cinemática inversa con la trayectoria de desplazamiento de la planta del pie que es el efector final.

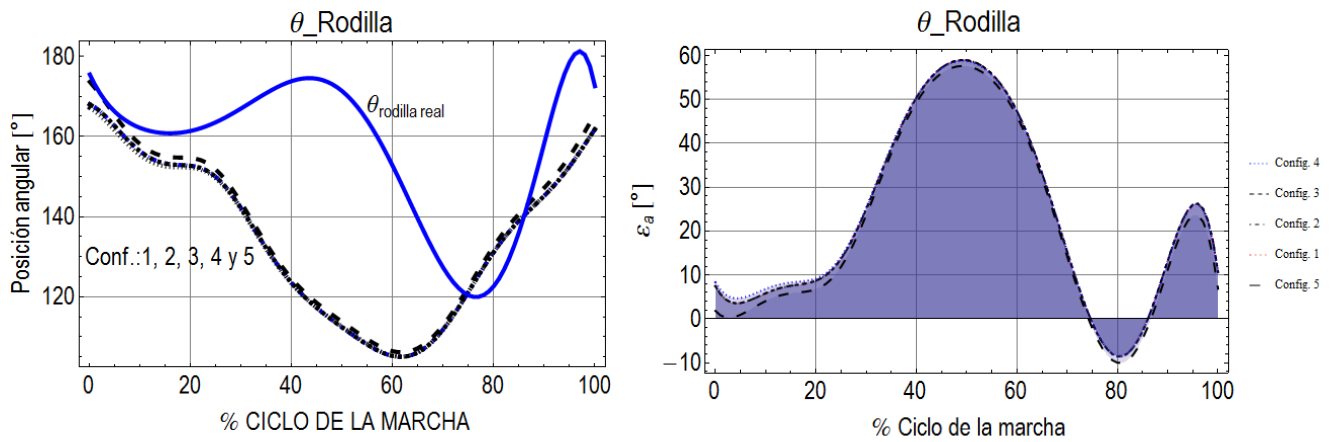


**Figura 4.6** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera AA de las cinco configuraciones y la articulación cadera AA real. Derecha, error absoluto de cada configuración.



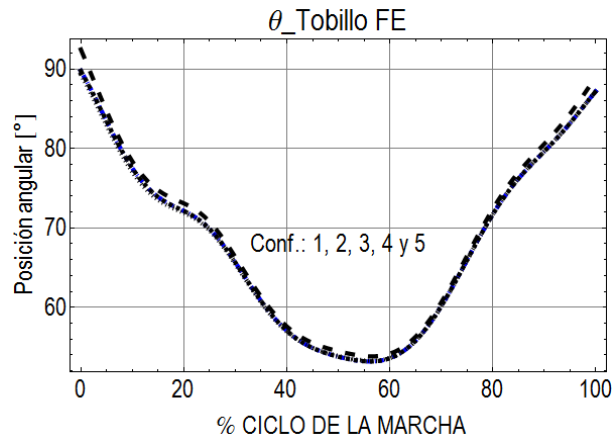


**Figura 4.7** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera FE de las cinco configuraciones y la articulación cadera FE real. Derecha, error absoluto de cada configuración.

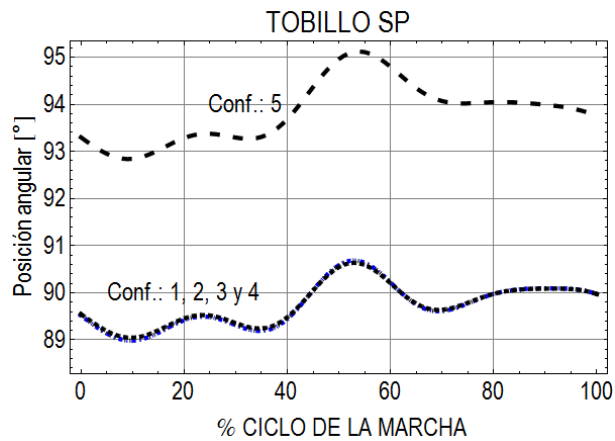


**Figura 4.8** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación rodilla de las cinco configuraciones y la articulación rodilla real. Derecha, error absoluto de cada configuración.





**Figura 4.9** En esta gráfica no se muestra una función de la trayectoria angular teórica de la Flexión-Extensión del Tobillo como las anteriores.



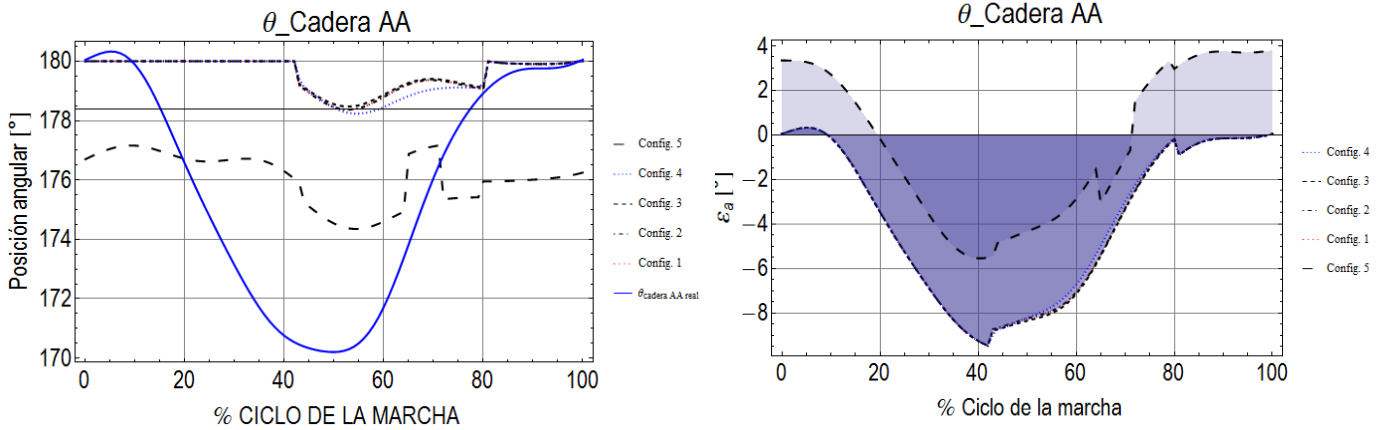
**Figura 4.10** Tampoco se hace la comparación con una función angular teórica

Moviendo la posición de la articulación de la cadera aducción-abducción, se encontró mínimos cambios en los resultados de las 5 trayectorias (posición angular): cadera AA, cadera Fe, rodilla, tobillo FE y tobillo SP. La que sobresale es la configuración 5, en las trayectorias angulares CAA y TSP

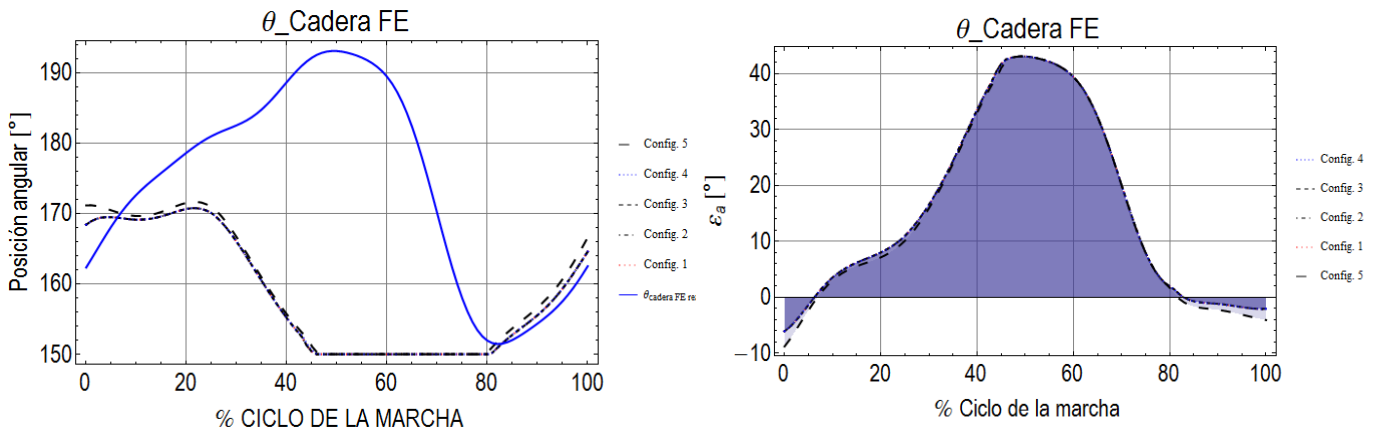


### 4.2.2. Comparación B

Con el fin de establecer que las soluciones estén dentro de los rangos de movimiento se han comparado las 5 configuraciones anteriores aplicando las restricciones del rango de movimiento en cada una de las articulaciones biológicas (véase 1.5 Análisis anatómico del miembro inferior: cadera, rodilla y tobillo):

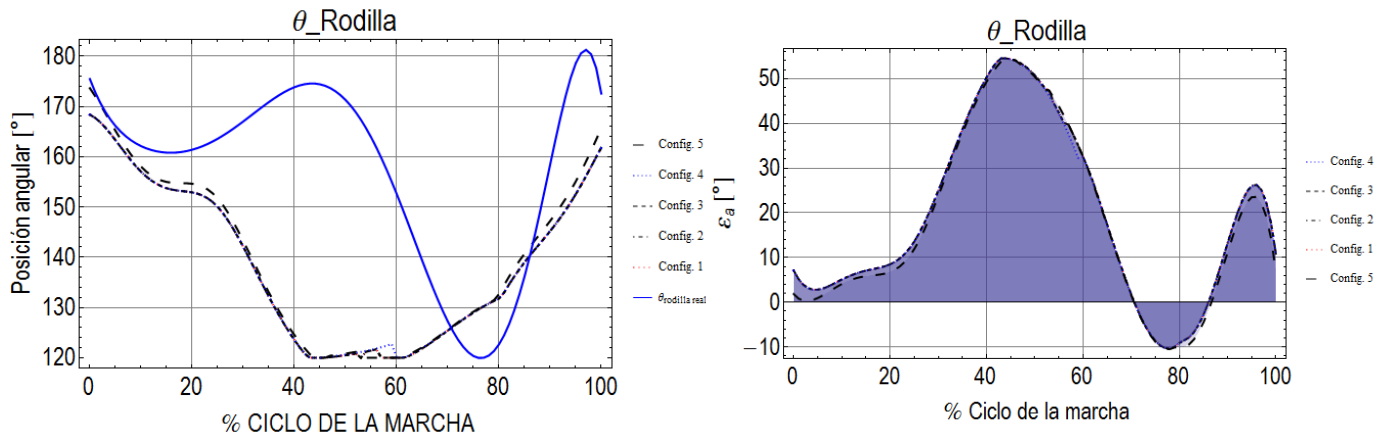


**Figura 4.11** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera AA de las cinco configuraciones y la articulación cadera AA teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración

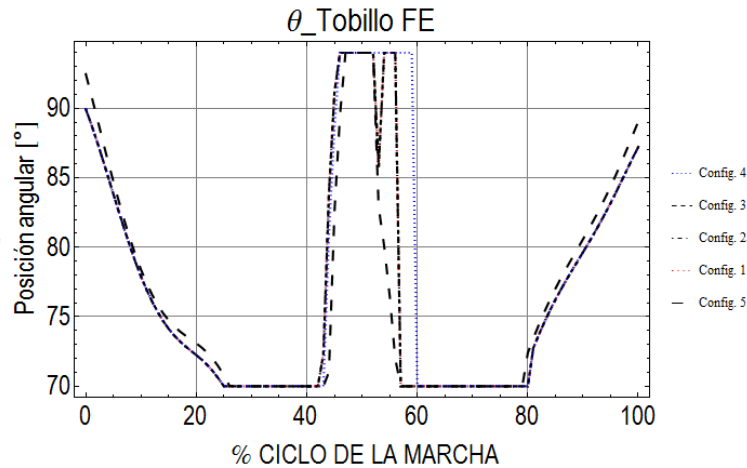


**Figura 4.12** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera FE de las cinco configuraciones y la articulación cadera FE teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración.

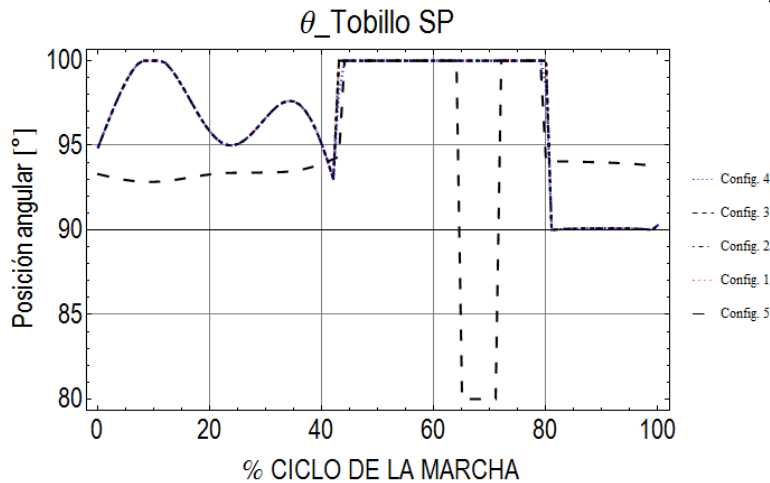




**Figura 4.13** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación rodilla de las cinco configuraciones y la articulación rodilla teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración.



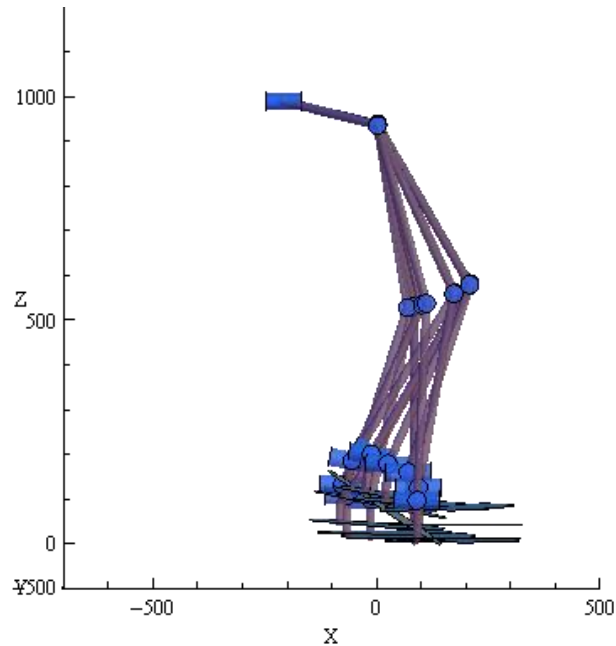
**Figura 4.14** Resultado de la articulación Tobillo FE en cada una de las configuraciones.



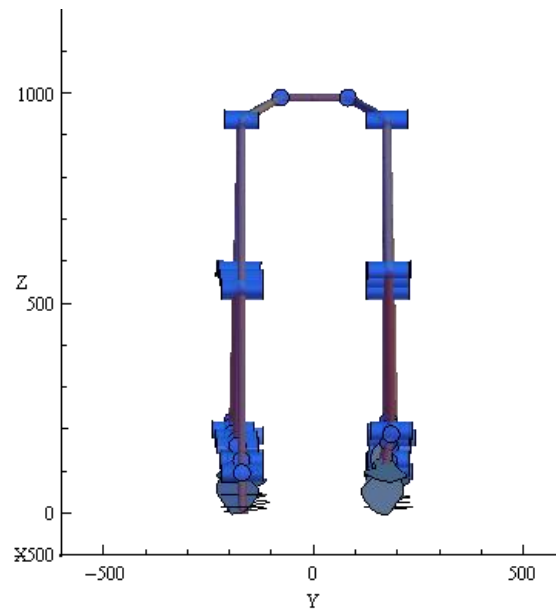
**Figura 4.15** Resultado de la articulación Tobillo SP en cada una de las configuraciones.



Se encontraron mínimos cambio en los resultados de las 5 trayectorias (posición angular): cadera AA, cadera Fe, rodilla, tobillo FE y tobillo SP. Solo la quinta configuración vuelve a tener cambios en la CAA y TSP.



**Figura 4.16** *Movimientos de posición de los MID y MII en una vista en el plano sagital*

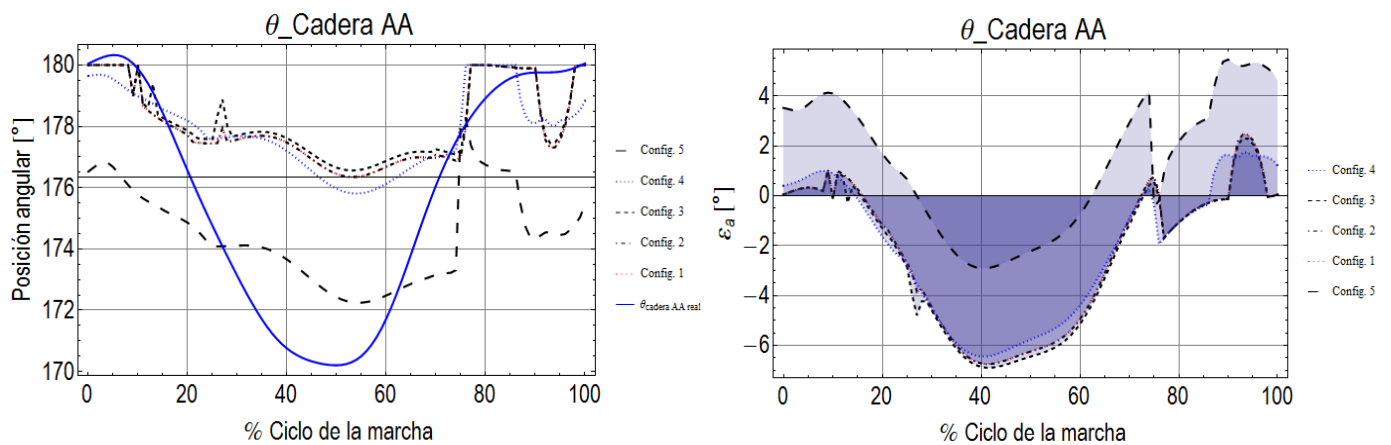


**Figura 4.17** *Movimientos de posición de los MID y MII en una vista en el plano frontal*

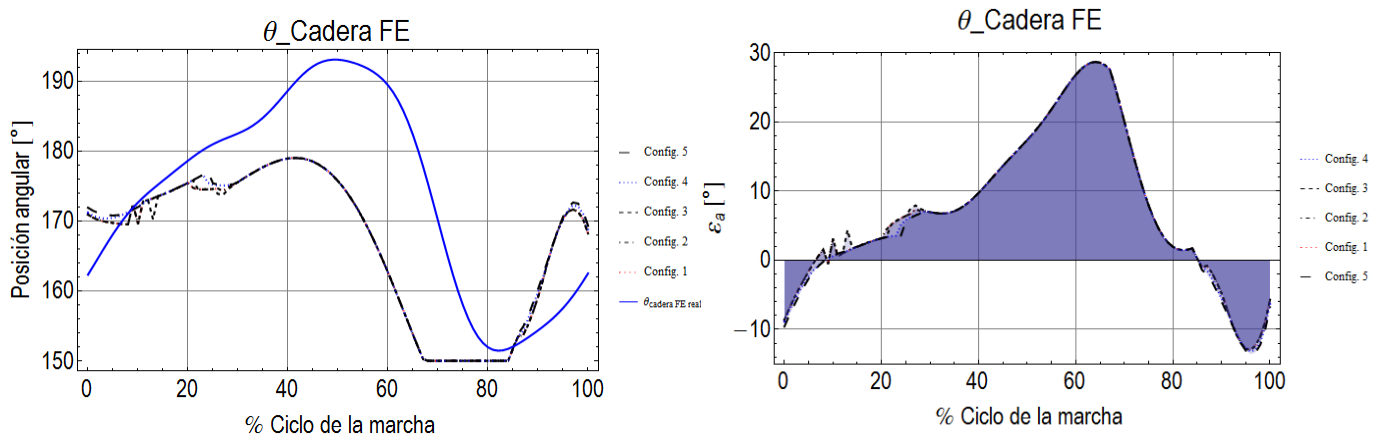


### 4.2.3. Comparación C

Dado los resultados obtenidos anteriormente, se ha optado por inyectar la trayectoria de desplazamiento del tobillo junto con las restricciones mencionadas anteriormente y adicionalmente la trayectoria de posición angular de la rodilla de tal manera que los movimientos articulares del mecanismo simulado se pueda tratar de simular en mayor medida a los de los datos teóricos de las bases de datos clínicos basados en marchas de humanos.



**Figura 4.18** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera AA de las cinco configuraciones y la articulación cadera AA teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración



**Figura 4.19** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera FE de las cinco configuraciones y la articulación cadera FE teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración.





Como puede verse el error absoluto entre la articulación de la Cadera FE teórica y la Cadera FE de las cinco configuraciones, ha disminuido sustancialmente en contraste con las comparaciones A y B.

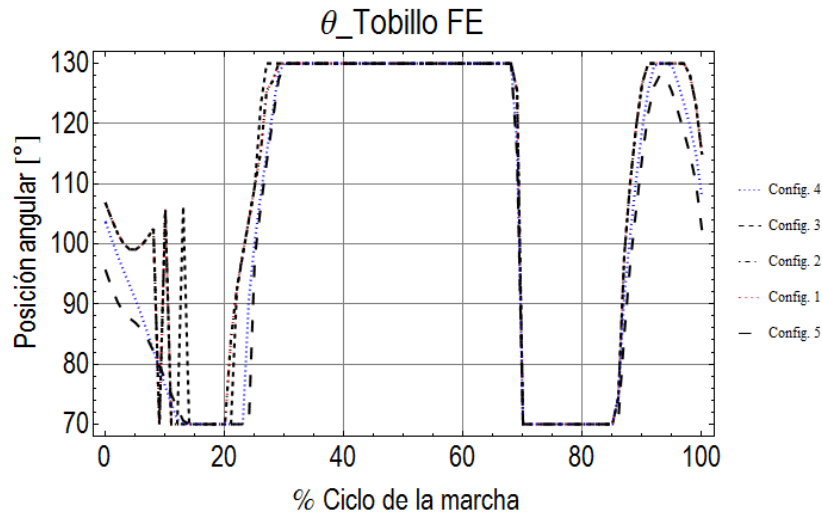


Figura 4.20 Resultado de la articulación Tobillo FE en cada una de las configuraciones

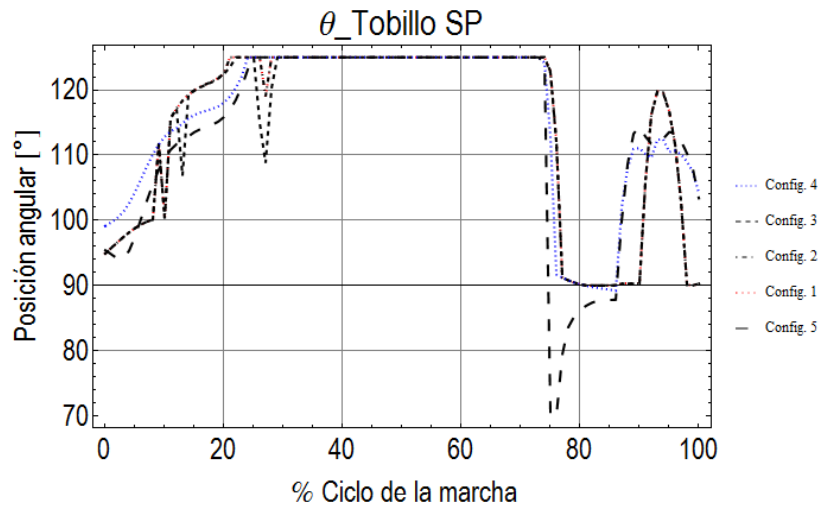


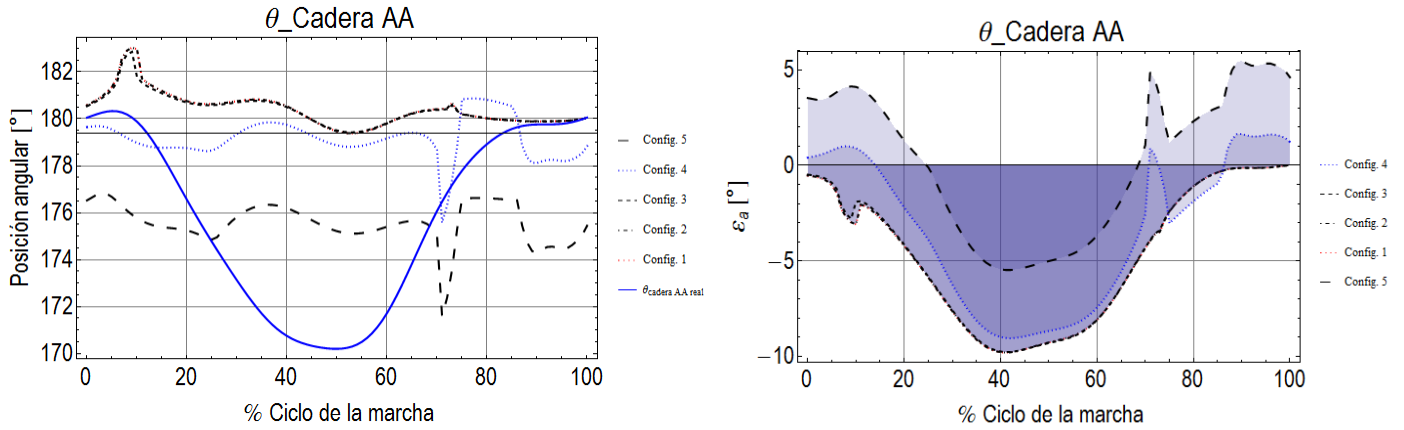
Figura 4.21 Resultado de la articulación Tobillo SP en cada una de las configuraciones.

#### 4.2.4. Comparación D

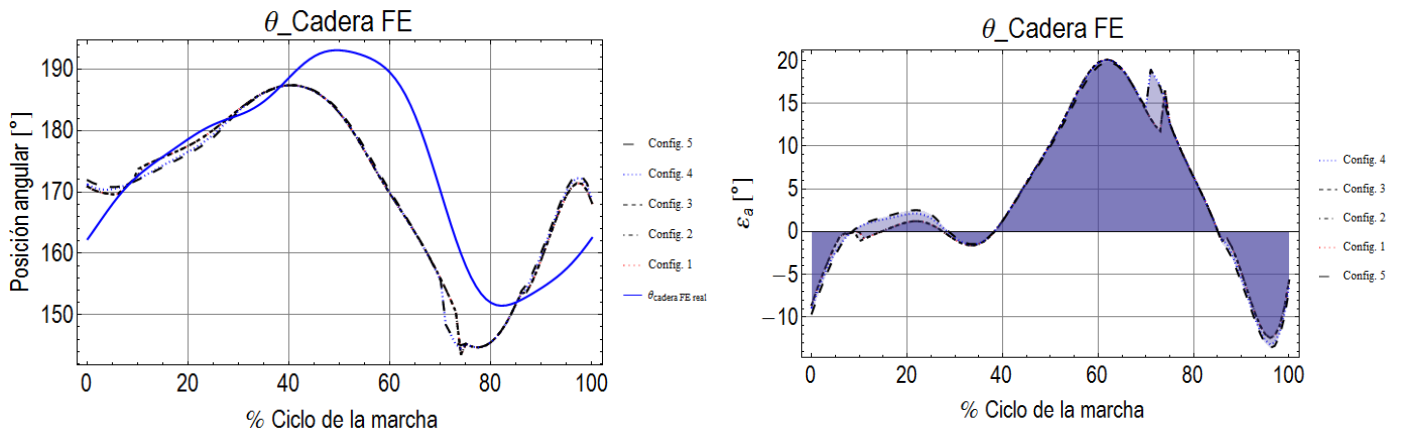
La trayectoria angular de la rodilla es la única restricción que se utiliza para la solución de la cinemática inversa. A continuación, se muestran los resultados de la comparación de la posición angular de cada una de las juntas de las cinco



configuraciones con respecto a la posición angular de la articulación cadera AA teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración.



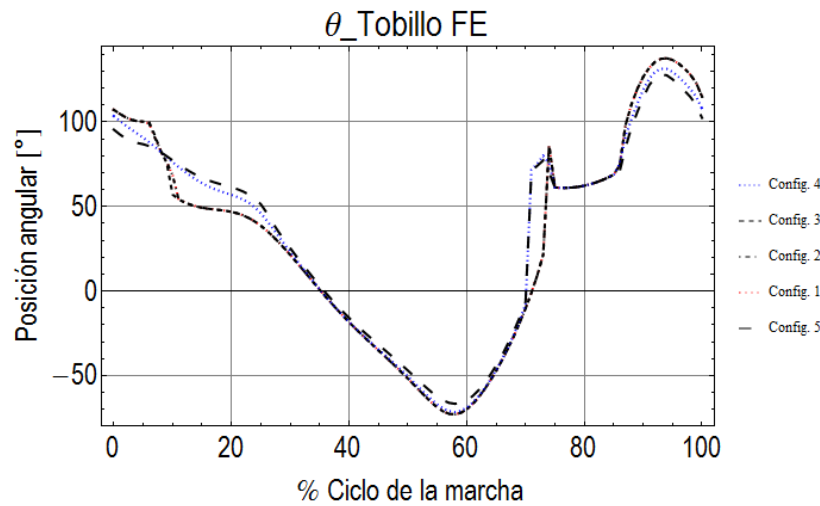
**Figura 4.22** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera AA de las cinco configuraciones y la articulación cadera AA teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración.



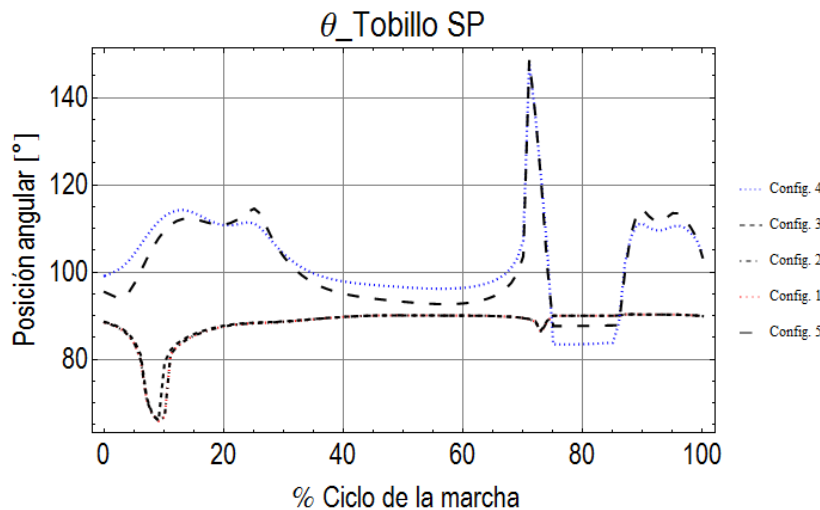
**Figura 4.23** Izquierda, Resultados de la comparación entre la articulación cadera FE de las cinco configuraciones y la articulación cadera FE teórica. Derecha, error absoluto de cada configuración.

En esta comparación D, el error absoluto entre la articulación de la Cadera FE teórica y la Cadera FE de las cinco configuraciones, ha disminuido aún más en contraste con las comparaciones A, B y C.





**Figura 4.24** Resultado de la articulación Tobillo FE en cada una de las configuraciones



**Figura 4.25** Resultado de la articulación Tobillo SP en cada una de las configuraciones.

Ahora bien, resolviendo la cinemática inversa con las distintas restricciones, se hace notable que solamente en la articulación de la cadera AA, es donde se comportan de manera distinta las cinco configuraciones, quedando la quinta configuración como la de mayor separación entre las demás configuraciones.

Este cambio de amplitud en el rango de movimiento angular de la Cadera AA de la quinta configuración es congruente con el movimiento de aducción (véase la Figura para mayor referencia) que tiene que realizar con el fin de que el efector final,



el cual está más inclinado hacia el eje central del mecanismo, pueda seguir la trayectoria de desplazamiento.



**Figura 4.26** *Movimiento de aducción con mayor amplitud simulado en la quinta configuración.*

#### 4.2.5. Comparación E

Comparación realizada en la quinta configuración entre la cinemática directa y la cinemática Inversa (curvas en color azul).

En esta comparación, el modelo se utiliza para evaluar, por un lado, el comportamiento de las trayectorias de movimiento angular teóricas en el espacio cartesiano tridimensional (3-D) durante la cinemática directa. Esta simulación permite comprobar el comportamiento y movimientos resultantes de la quinta configuración propuesta y evaluar su estructura cinemática. Por otro lado, la cinemática directa ha permitido obtener la trayectoria de desplazamiento de las juntas de la rodilla y tobillo (curvas en color rojo).

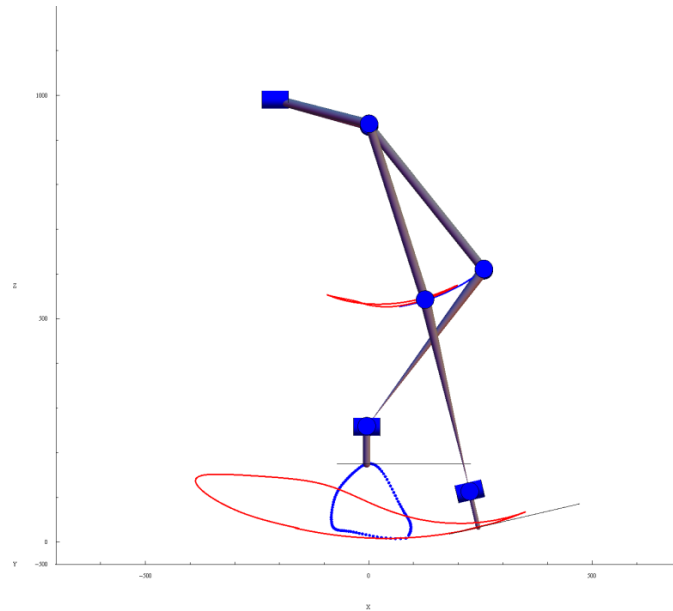
Entonces, también se permite la observación de que el paso o zancada generada en el tobillo del MID durante un ciclo, la cual es mostrada como una curva de color rojo, es mucho mayor que la trayectoria de desplazamiento del tobillo generada en **3.1 Generación de la Trayectoria del efector final (tobillo)**. Esta comparación ha sugerido que la trayectoria de desplazamiento del tobillo para resolver la cinemática inversa tiene que ser ajustada para llevar a cabo una buena comparación entre los modelos de las cinco configuraciones y los datos teóricos.

Esto es, que dicha comparación no sería ciertamente válida, dado que mientras más estrecho es el paso, el rango de movimiento de las juntas será menor, y mientras más alargado sea el paso dicho rango de movimiento de las juntas también se

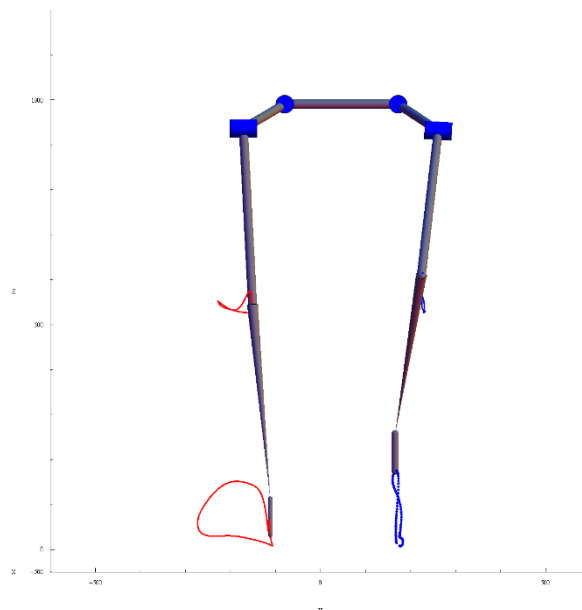


ampliarán. Entonces, la comparación debe enfocarse en la forma de la curva, es decir, que no dé como resultado una curva que emule un movimiento anti-anatómico.

En las siguientes tres figuras, se muestra el mecanismo simulando un ciclo de la marcha tomada en una posición inicial junto con las curvas de desplazamiento en las juntas del tobillo y rodilla.



**Figura 4.27** *Cinemática Directa (MID) vs cinemática Inversa (MII) en el Plano sagital*



**Figura 4.28** *Cinemática Directa (MID) vs cinemática Inversa (MII) vista en el Plano Frontal*



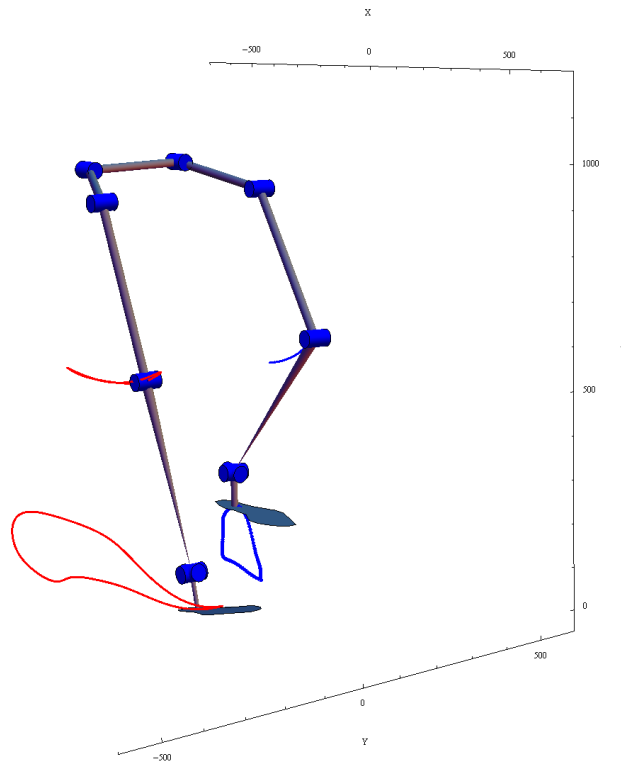


Figura 4.29 *Cinemática Directa (MID) vs cinemática Inversa (MII) vista en perspectiva*

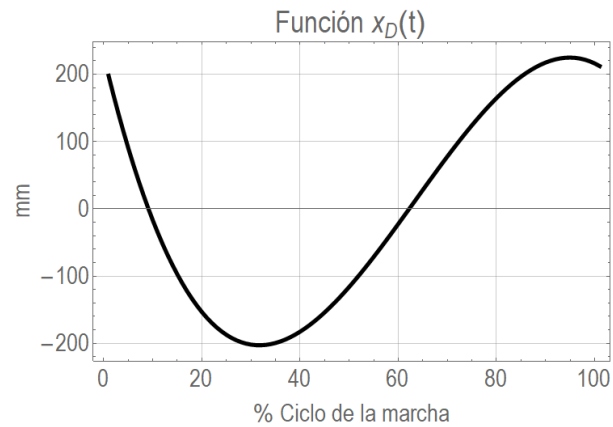
### 4.3. Ajuste de la trayectoria de desplazamiento lineal del efector final (Tobillo)

En vista de los resultados obtenidos en la sección de la 4.2.5 Comparación E, se hará un ajuste en la trayectoria lineal del efector lineal en el eje X, es decir, en las funciones  $x_{pd}(t)$  y  $x_{pl}(t)$ , de tal manera que dicha curva de la trayectoria del tobillo en el plano sagital X vs Z sea más alargada en un factor de 2.4 y similar a la trayectoria de desplazamiento obtenida mediante la cinemática directa.

$$x_{pd\_a}(t) = 2.4(-0.00141t^3 + 0.2636t^2 - 12.2t - 232.6) \quad (4.6)$$

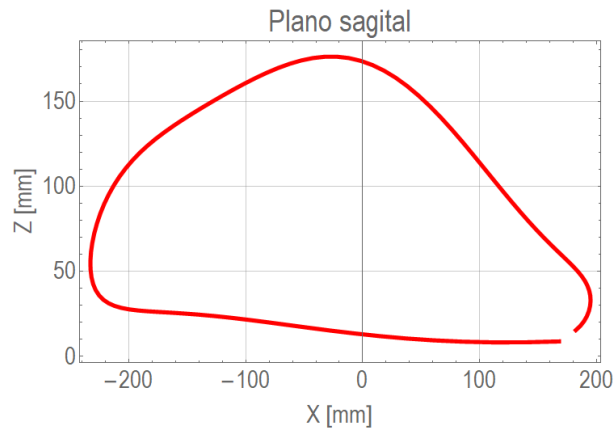
Por lo anterior, se obtiene una trayectoria de desplazamiento calculada ajustada del tobillo, con la nueva función de la ecuación 4.6 junto con las funciones no modificadas de las ecuaciones 3.2 y 3.3:



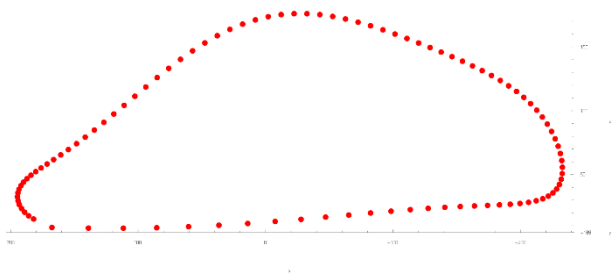


**Figura 4.30** Función polinomial de la componente  $x_D(t)$  ajustada

La trayectoria lineal del efector lineal en el eje X, se ajustó lo más posible hasta alcanzar la máxima elongación en el plano sagital XZ, de tal forma, que dicha trayectoria esté dentro del modelo del mecanismo simulado y pueda ser resuelto en la cinemática inversa.



**Figura 4.31** Trayectoria bidimensional de desplazamiento de la planta del pie en el plano sagital

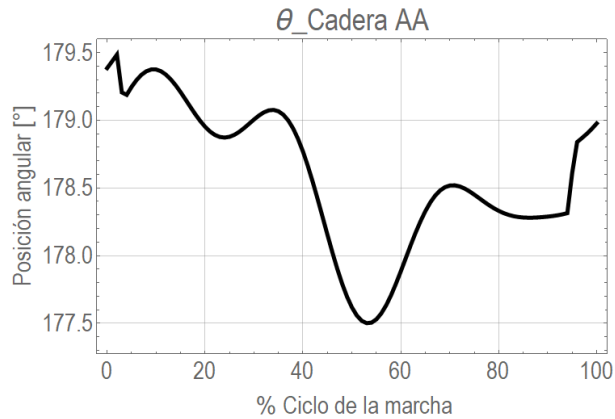


**Figura 4.32** Trayectoria tridimensional de desplazamiento de la planta del pie



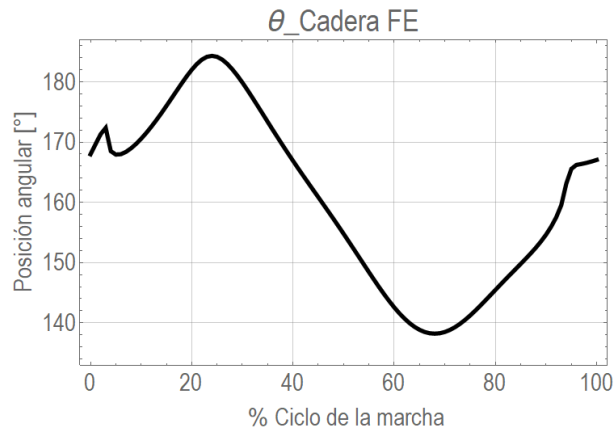
Una vez obtenida la trayectoria modificada del efector final, se procedió a realizar la cinemática inversa y a realizar la comparación en un paso simulado contra la cinemática directa con la 4ta configuración.

Así pues, las siguientes gráficas muestran la resolución de la posición del miembro derecho con la cinemática inversa:



**Figura 4.33** Resultado de la articulación Cadera AA en el MID.

El movimiento angular de la cadera AA teórico, tiene un rango de aproximadamente 10 grados, entre  $170^\circ$  y  $180^\circ$ . El resultado en esta prueba está dentro del rango, pero la amplitud es solamente de 2 grados.



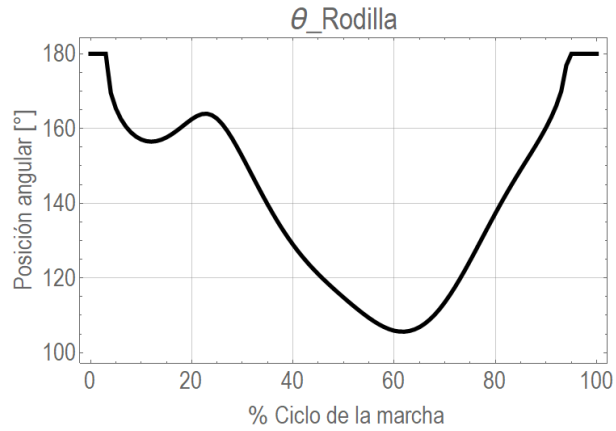
**Figura 4.34** Resultado de la articulación Cadera FE en el MID.

El movimiento angular de la cadera FE teórico, tiene un rango de aproximadamente 45 grados, entre  $195^\circ$  y  $150^\circ$ . El resultado en esta prueba está fuera



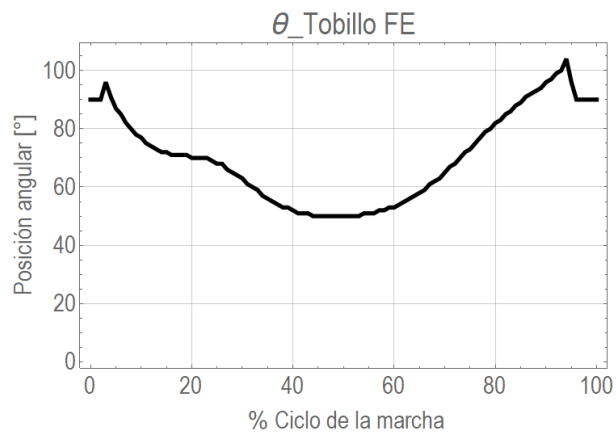


del rango inferior, sin embargo, la amplitud también es de aproximadamente de 45 grados.



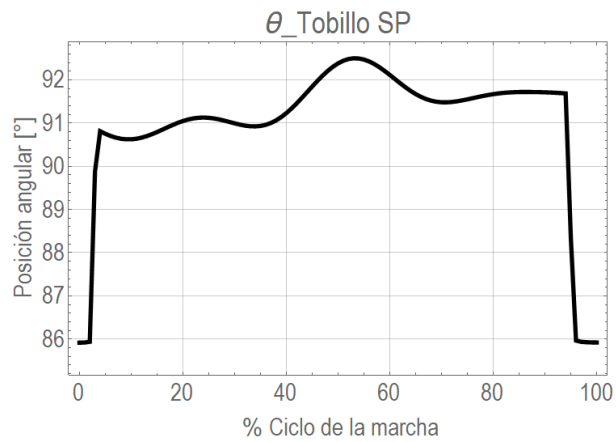
**Figura 4.35** Resultado de la articulación Rodilla en el MID

El movimiento angular teórico de la Rodilla tiene un rango de aproximadamente 60 grados, entre 120° y 180°. El resultado en esta prueba está fuera del rango inferior y la amplitud es mayor, de aproximadamente de 70 grados.



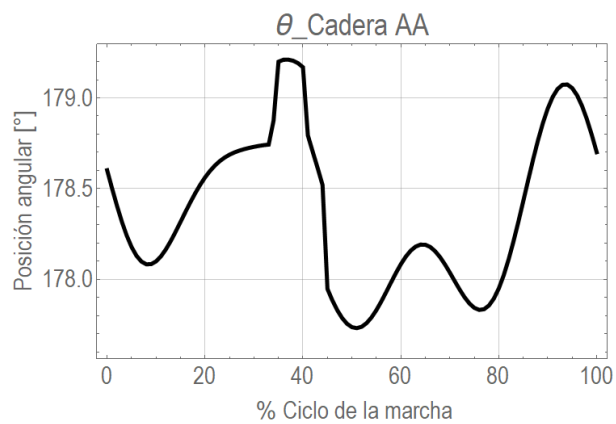
**Figura 4.36** Resultado de la articulación Tobillo FE en el MID



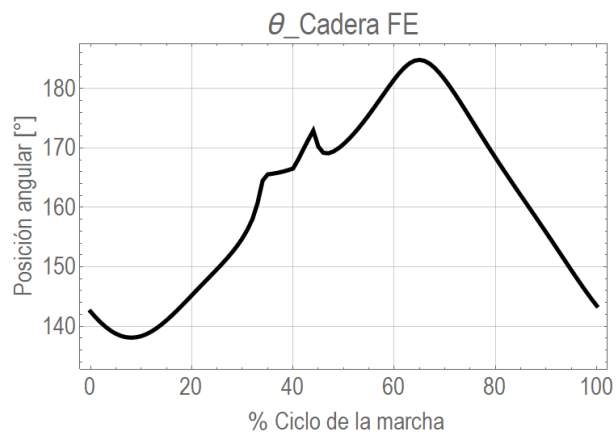


**Figura 4.37** Resultado de la articulación Tobillo SP en el MID.

Así mismo, en las siguientes graficas se muestra la resolución de la posición del miembro izquierdo con la cinemática inversa:



**Figura 4.38** Resultado de la articulación Cadera AA en el MII.



**Figura 4.39** Resultado de la articulación Cadera FE en el MII.



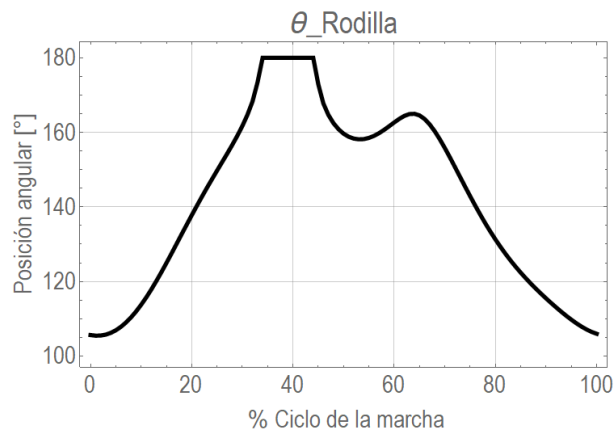


Figura 4.40 Resultado de la articulación Rodilla en el MII.

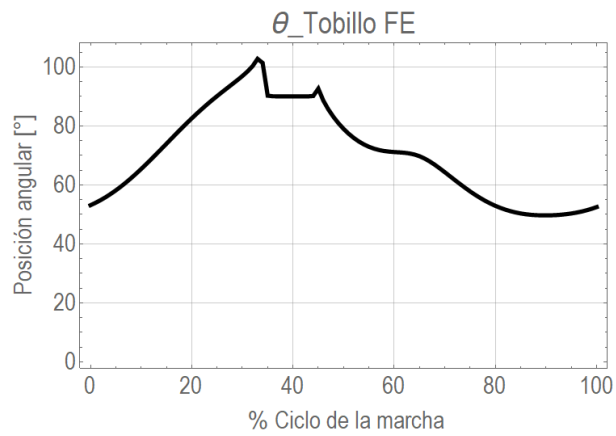


Figura 4.41 Resultado de la articulación Tobillo FE en el MII.

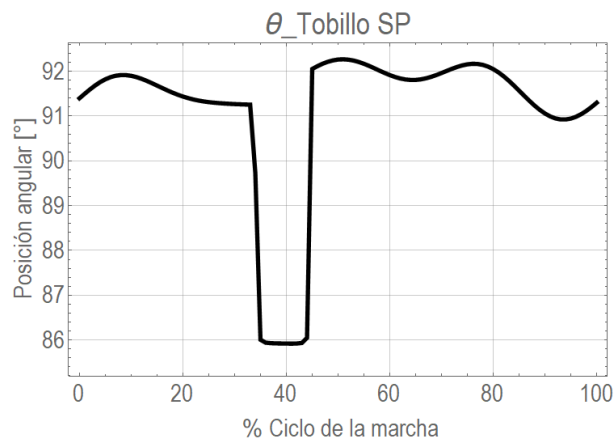
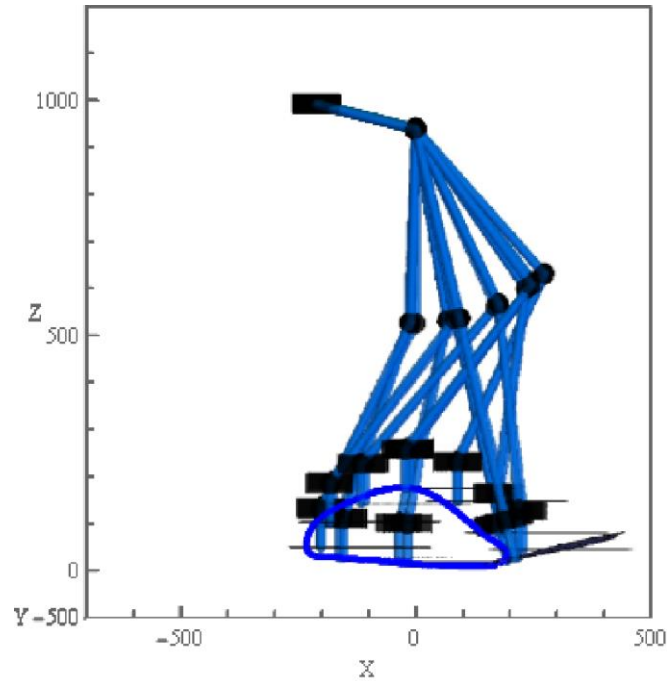


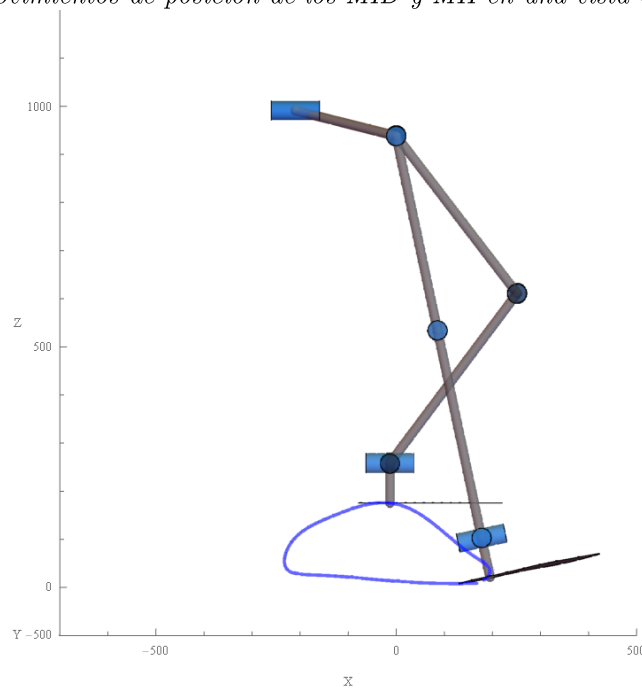
Figura 4.42 Resultado de la articulación Tobillo SP en el MII.



Además, para una mayor visualización de la simulación de la resolución de la cinemática inversa, se muestra el comportamiento del mecanismo simulado durante un ciclo de marcha:

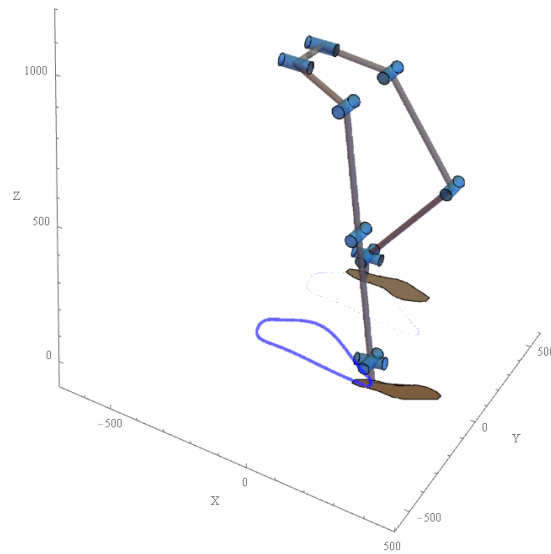


**Figura 4.43** Movimientos de posición de los MID y MII en una vista en el plano sagital



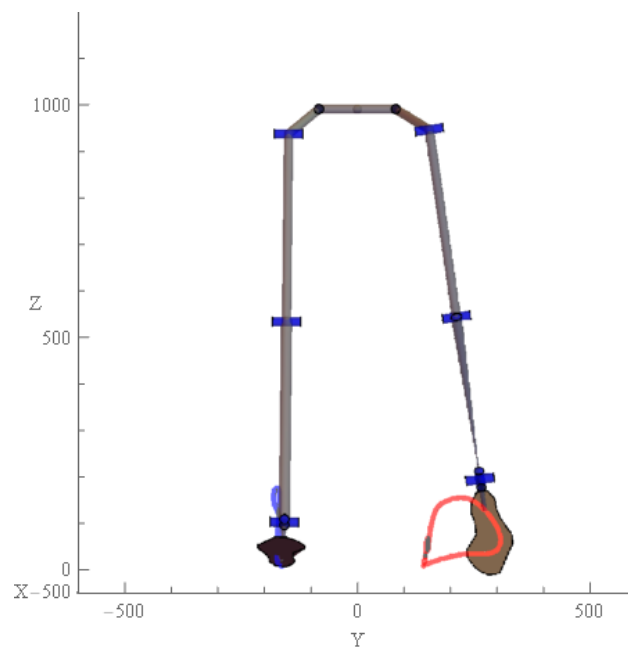
**Figura 4.44** Cinemática inversa en la posición inicial en una vista en el Plano sagital





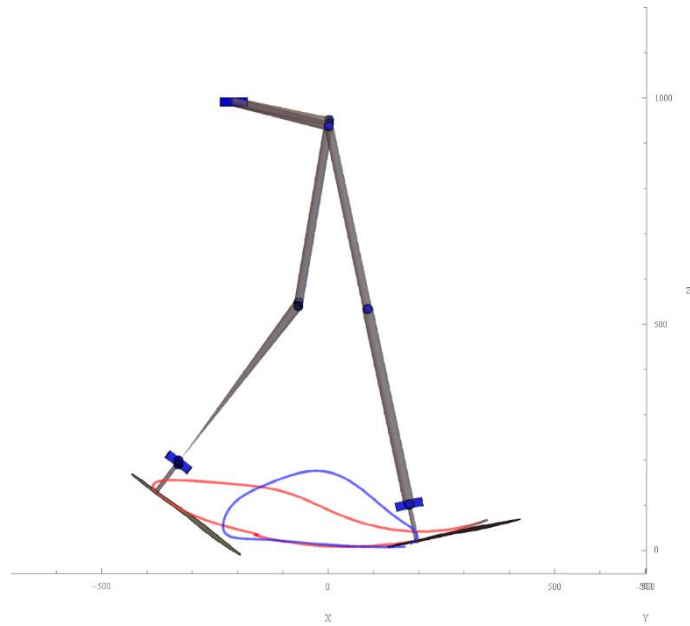
**Figura 4.45** *Cinemática inversa en la posición inicial en una vista en perspectiva*

Por otro lado, se muestra a continuación, la comparación del paso entre el miembro derecho con la solución de la cinemática inversa, y el miembro izquierdo con la cinemática directa inyectando las trayectorias angulares teóricas de la cadera AA y FE, y rodilla.

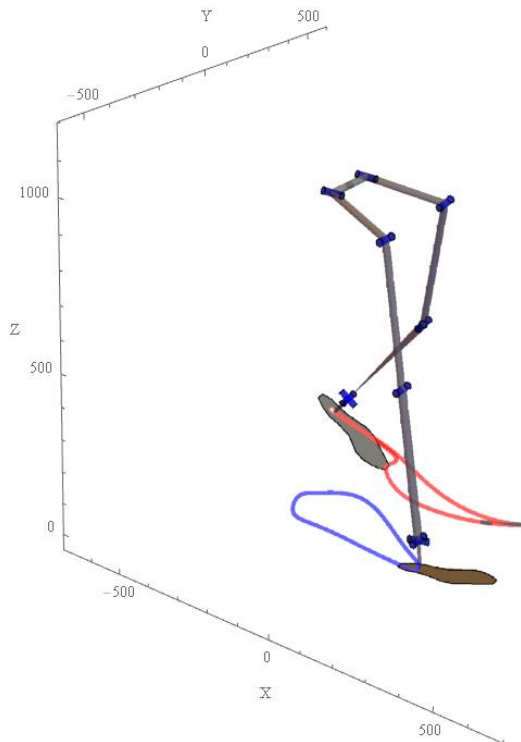


**Figura 4.46** *Comparación cinemática directa (MII) vs cinemática inversa (MID) en el Plano frontal*





**Figura 4.47** Comparación cinemática directa (MII) vs cinemática inversa (MID) en el Plano sagital



**Figura 4.48** Comparación cinemática directa (MII) vs cinemática inversa (MID) en una vista en perspectiva



#### 4.4. Modelado y solución cinemática inversa con las medidas reales del exoesqueleto físico

Anteriormente, no se contaba con el exoesqueleto físico, por lo tanto, los valores calculados eran de la carta antropométrica. Una vez obtenidos los valores reales, los cuales no variaban tanto dado que se basó prácticamente en las medidas antropométricas de las tablas mencionadas en la sección (Tabla 1.4 **Valores a utilizar en las configuraciones propuestas**). Dichas medidas han cambiado en una razón mínima por cuestiones de diseño y manufactura. Por lo tanto, con las ultima pruebas obtenidas de la 4ta configuración y de la trayectoria del tobillo lo más expandida posible se vuelve a calcular la cinemática inversa y su respectiva comparación con la cinemática directa, con lo cual se han obtenido los siguientes resultados.

Por consiguiente, en esta sección, el análisis cinemático se llevó a cabo con las dimensiones obtenidas del prototipo del exoesqueleto físico.

En donde los valores reales son los siguientes:

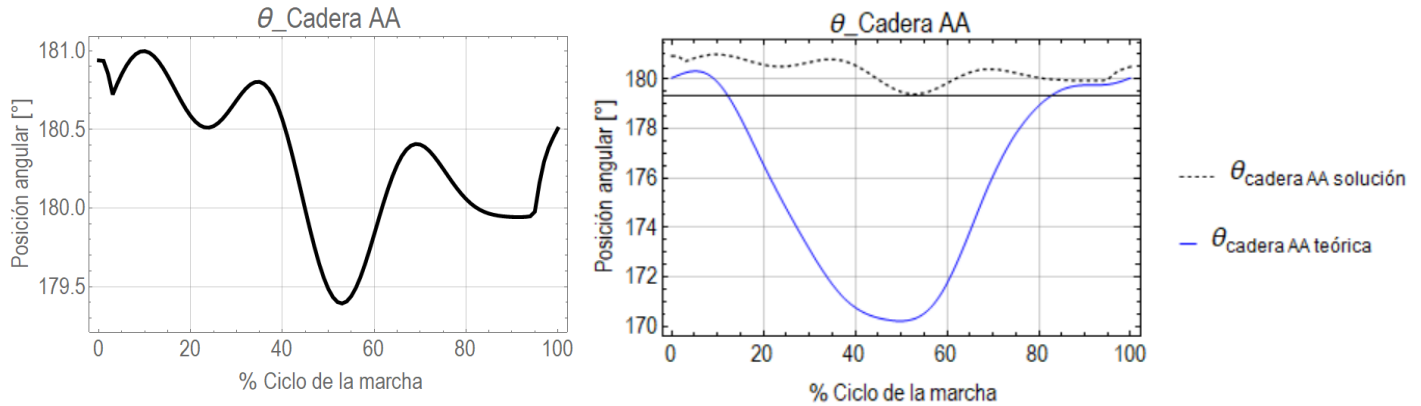
**Tabla 4.1** *Valores obtenidos del exoesqueleto real*

<i>Variable</i>	<i>Medida [cm]</i>
$a0=d11=d21$	11
$a10=a20$	8.25
$a11=a21$	4.3
$a12=a22$	41.5
$a13=a23$	44
$a15=a24$	8.5
$d0$	98.3
$d111=d211$	9

Las siguientes graficas muestran la resolución de la posición del miembro derecho con la cinemática inversa:

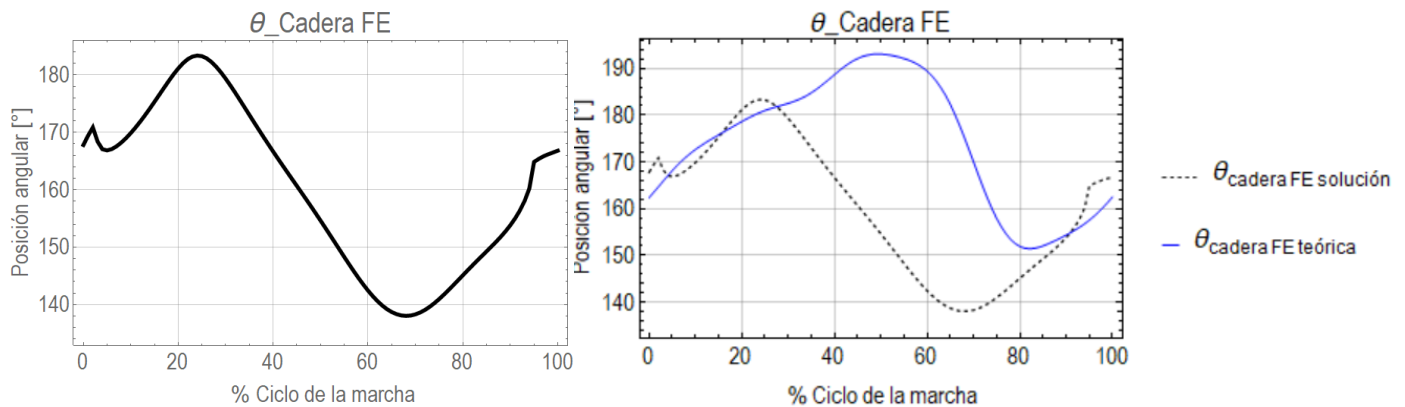


El movimiento angular de la cadera AA teórico, tiene un rango de aproximadamente 10 grados, entre  $170^\circ$  y  $180^\circ$ . El resultado en esta prueba está por encima del rango y la amplitud es solamente de 2 grados.



**Figura 4.49** Izquierda, resultado de la articulación cadera AA en el MID. Derecha, comparación entre la trayectoria de la solución y la trayectoria teórica.

El movimiento angular de la cadera FE teórico, tiene un rango de aproximadamente 45 grados, entre  $195^\circ$  y  $150^\circ$ . El resultado en esta prueba está fuera del rango inferior, sin embargo, la amplitud también es de aproximadamente de 45 grados.

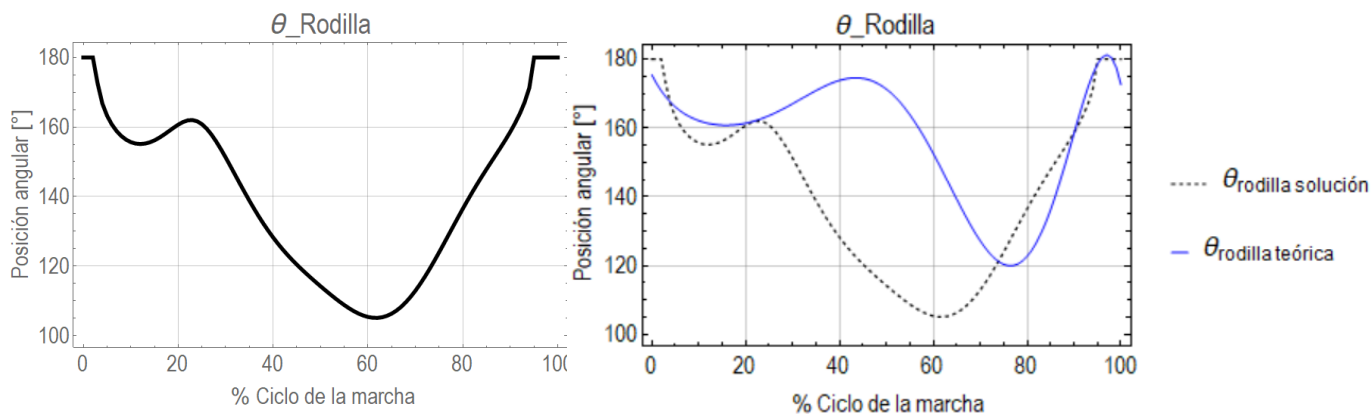


**Figura 4.50** Izquierda, resultado de la articulación cadera FE en el MID. Derecha, comparación entre la trayectoria de la solución y la trayectoria teórica.

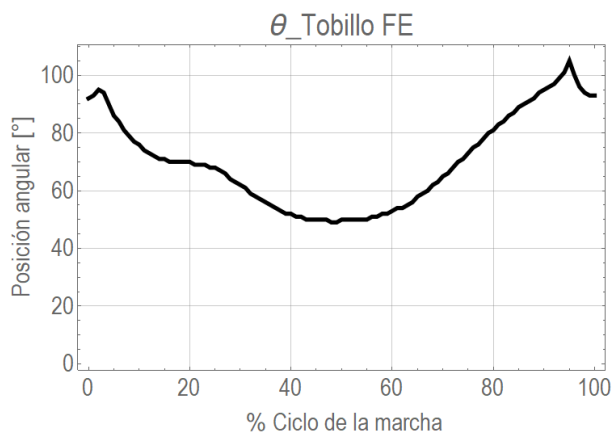




El movimiento angular teórico de la Rodilla tiene un rango de aproximadamente 60 grados, entre  $120^\circ$  y  $180^\circ$ . El resultado en esta prueba está fuera del rango inferior y la amplitud es mayor, de aproximadamente de 70 grados.

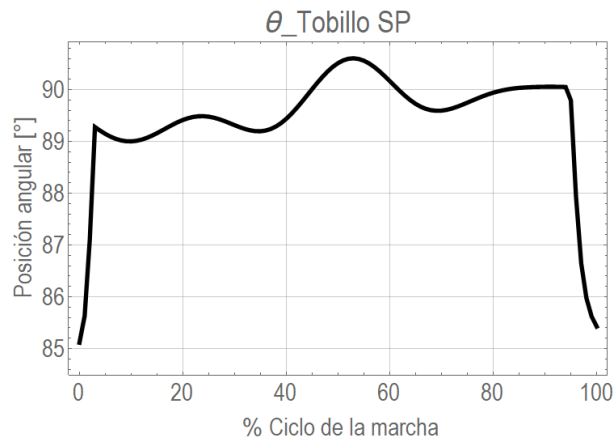


**Figura 4.51** Derecha, resultado de la articulación rodilla en el MID. Izquierda, comparación entre la trayectoria de la solución y la trayectoria teórica.



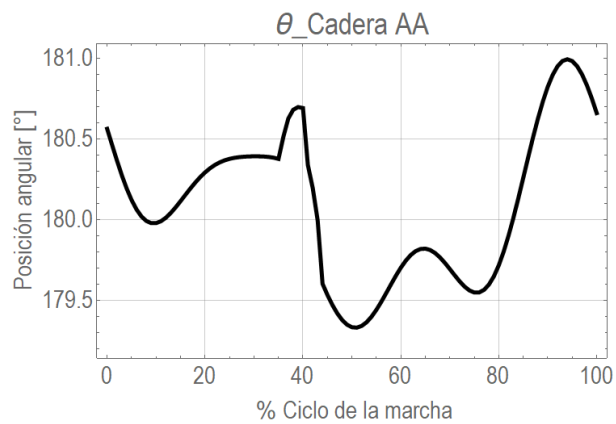
**Figura 4.52** Resultado de la articulación Tobillo FE en el MID.



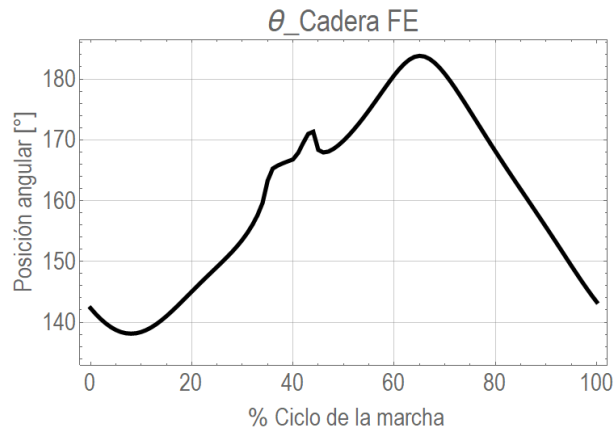


**Figura 4.53** Resultado de la articulación Tobillo SP en el MID.

Las siguientes graficas muestran la resolución de la posición del miembro izquierdo (MII) con la cinemática inversa:

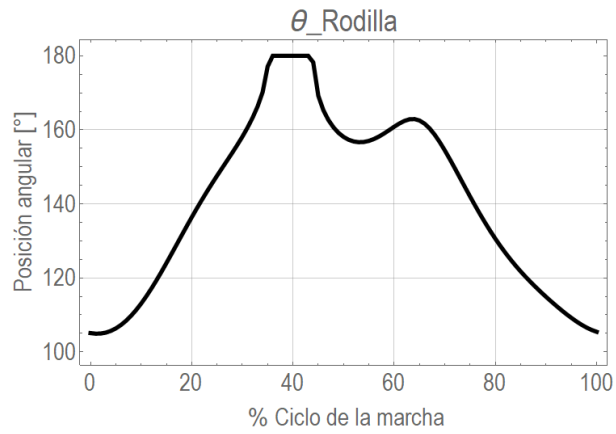


**Figura 4.54** Resultado de la articulación Cadera AA en el MII.

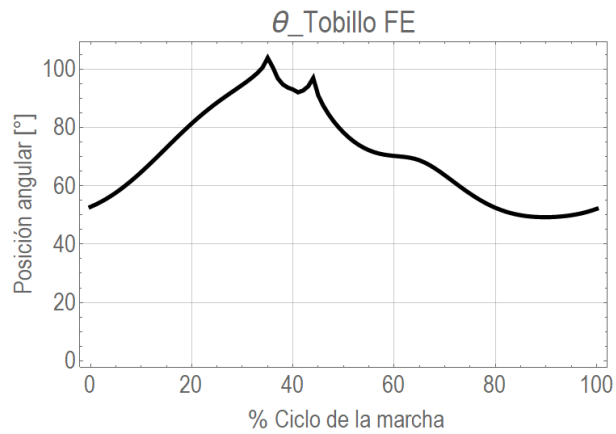


**Figura 4.55** Resultado de la articulación Cadera FE en el MII.

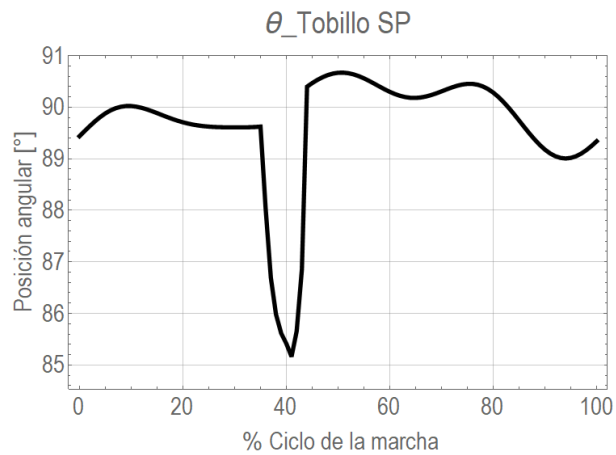




**Figura 4.56** Resultado de la articulación Rodilla en el MII.



**Figura 4.57** Resultado de la articulación Tobillo FE en el MII.



**Figura 4.58** Resultado de la articulación Tobillo SP en el MII.

Además, se muestra el comportamiento del mecanismo simulado durante un ciclo de marcha:



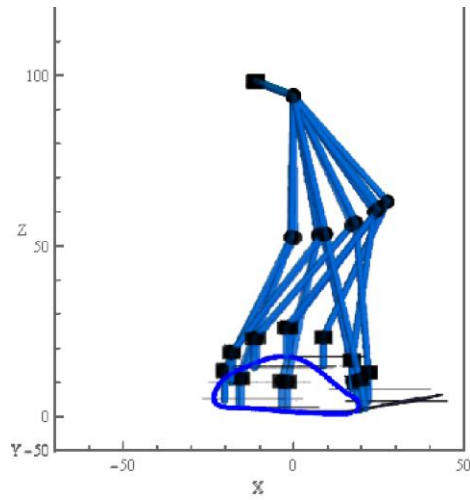


Figura 4.59 Trayectorias de posición vista en el plano sagital

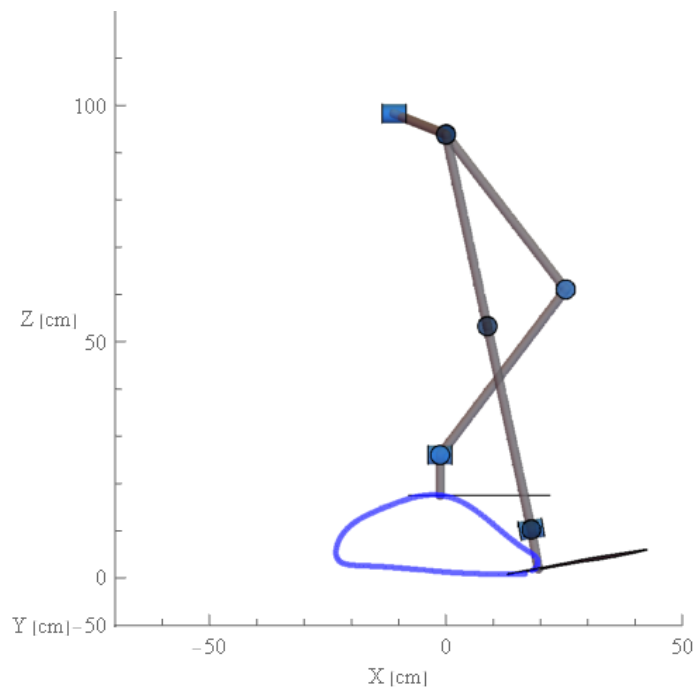
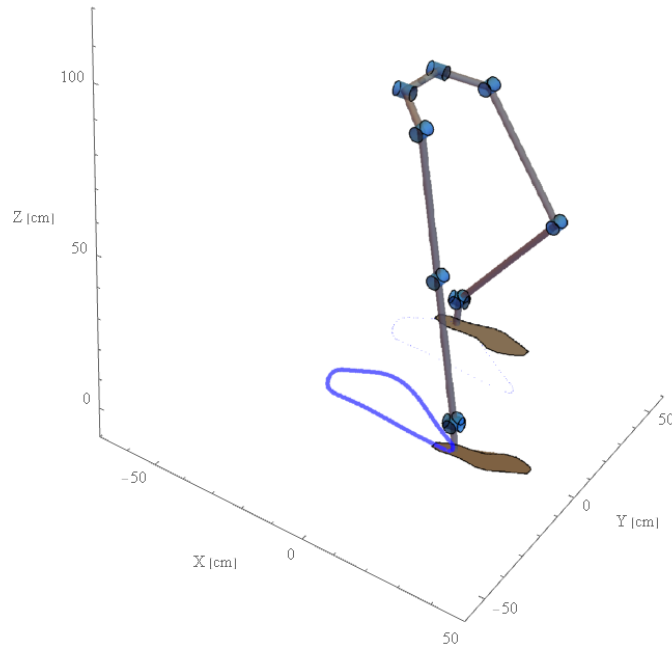


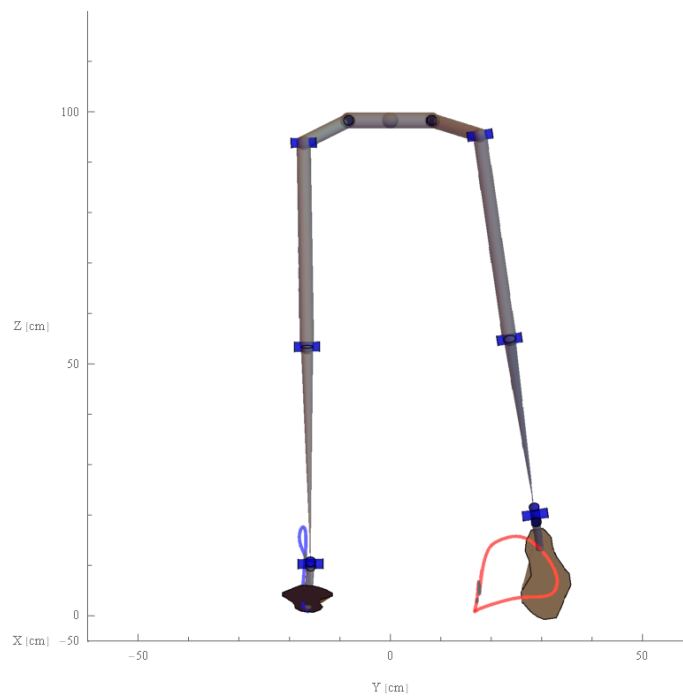
Figura 4.60 Cinemática inversa vista en el Plano sagital





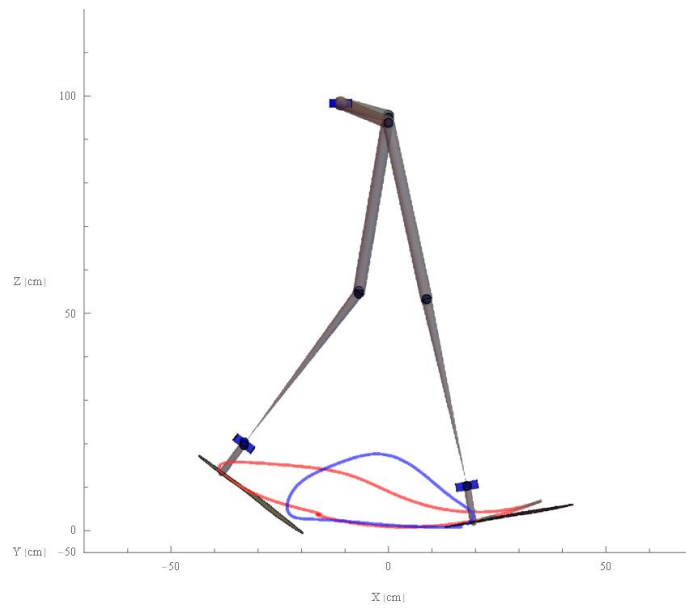
**Figura 4.61** *Cinemática inversa vista en una vista en perspectiva*

Por otro lado, se muestra a continuación, la comparación del paso.

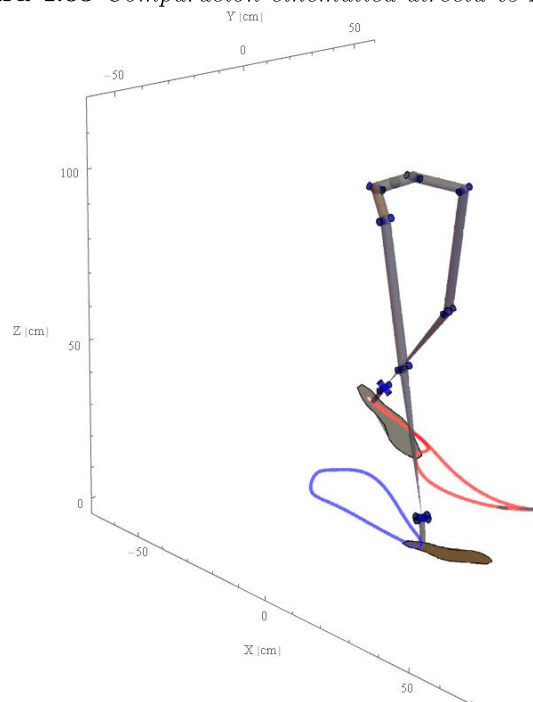


**Figura 4.62** *Comparación cinemática directa vs Inversa en el Plano frontal*





**Figura 4.63** Comparación cinemática directa vs Inversa en el Plano sagital



**Figura 4.64** Comparación cinemática directa vs Inversa en una vista en perspectiva





# CAPÍTULO 5 PROPUESTA DE METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

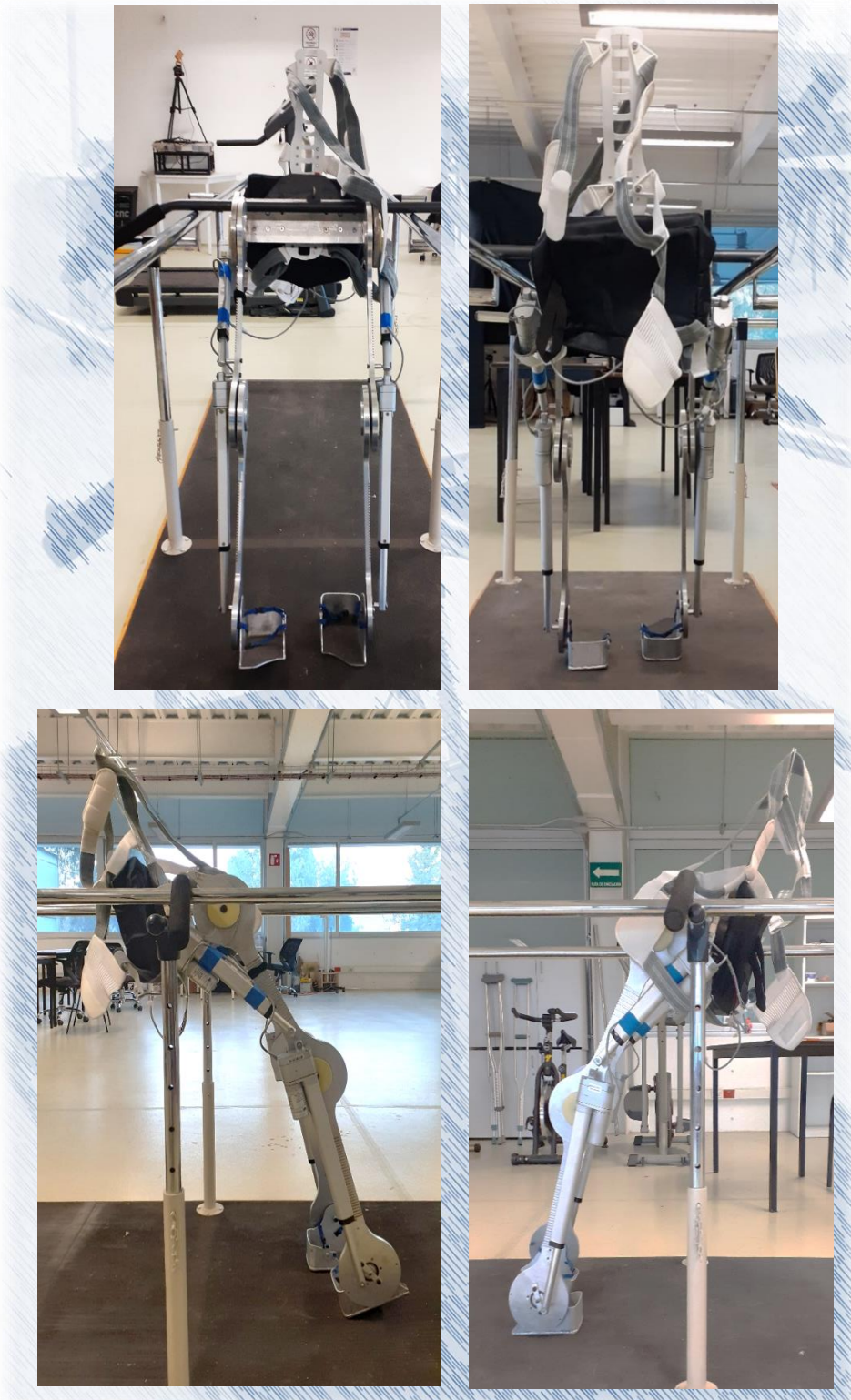
En este último capítulo se hace mención del planteamiento de las pruebas que se tendrían que haber realizado, sin embargo, han quedado suspendidas debido a la coyuntura a nivel mundial, la cual ha mantenido a la sociedad en suspensión de actividades y en resguardo.



La Figura 5.1 muestra el exoesqueleto real desarrollado en su segunda etapa. Este cuenta con un diseño de 4 juntas, dos en cadera, una en rodilla y una en tobillo (pasiva). Asimismo, el exoesqueleto cuenta con actuadores lineales, no obstante, la validación de la presente propuesta de la configuración de arquitectura cinemática se llevaría a cabo en primer lugar con el seguimiento de la trayectoria en el tobillo de tal manera que se analice el movimiento de las juntas y de los eslabones, En segundo lugar, la prueba se haría con los actuadores para la FE de la cadera y FE de la rodilla analizando la marcha del exoesqueleto real.







**Figura 5.1** Superior izquierda: vista frontal. Superior derecha: vista posterior. Inferior izquierda: vista latera izquierda. Inferior derecha: vista latera derecha.



## 5.1. Intro protocolo y métodos experimentales

Antes de la validación y pruebas con pacientes humanos, es indispensable validar lo desarrollado en este trabajo en el laboratorio de Sistemas biomédicos o cualquier otro afín a la biomecánica.

Para la validación del mecanismo de la cuarta configuración aplicada en el exoesqueleto real se pretendió realizar las pruebas con un dispositivo de pruebas que se diseñaría con la finalidad de llevar a cabo las pruebas de la cinemática inversa y observar cómo se comportan los eslabones y registrar el movimiento angular del exoesqueleto físico.

La prueba consiste en obtener las trayectorias angulares reales de las juntas mientras el exoesqueleto real está fijo de manera oscilante sostenido de un punto fijo en la cadera del exoesqueleto físico. Se pretende emular la marcha siguiendo la trayectoria obtenida en la sección **3.1.6 Trayectoria Lineal**.

Dichas pruebas se ajustarán solamente en el plano sagital debido a las limitaciones en el diseño del dispositivo de pruebas, en donde el dispositivo de pruebas comprende dos actuadores lineales, los cuales estarán configurados para seguir la trayectoria de desplazamiento descrita en la primera gráfica mostrada como “*Plano Sagital X vs Z*” de la **Figura 3.5**, emulando el movimiento del pie durante la marcha.

La trayectoria de desplazamiento calculada de tobillo utilizada para estas pruebas es la trayectoria de desplazamiento no ajustada, dicha decisión fue tomada en función de la longitud de la carrera de los actuadores.

Una vez que el exoesqueleto físico es acoplado de manera mecánica al dispositivo de pruebas en la junta de rotación del tobillo, se medirán las trayectorias angulares y lineales reales realizadas por el exoesqueleto en sus juntas de cadera FE, rodilla y tobillo FE.

El sistema de validación y pruebas, además de comprender al dispositivo de pruebas, se incluirá un sistema de medición angular y de posición en el espacio, un sistema de procesamiento y registro, y una interfaz para ajustar y ejecutar las rutinas



de ambas validaciones. La interfaz podrá después perfeccionarse para incluir funciones de ajuste, de cambio de otros movimientos adicionales a la marcha, además de rutinas básicas de fisioterapia, y quizás incluya animación en tiempo real.

## 5.2. Validación de las medidas de las trayectorias angulares

En primer lugar, se repetirán las pruebas cierto número de ciclos para comprobar que el dispositivo de pruebas puede seguir de la manera más idónea la trayectoria  $XvsZ$  con el fin de proceder a acoplar el dispositivo de pruebas con el exoesqueleto real. Y entonces comenzar a realizar varias pruebas antes de empezar a obtener las trayectorias angulares reales, las cuales serán medidas varias veces y bajo diferentes condiciones de velocidad para el ciclo de marcha. Y así calcular las estimaciones de cada una de las trayectorias angulares reales, es decir, considerar una muestra promedio de dichas trayectorias angulares reales, en lugar de utilizar una única medición.

Las trayectorias angulares reales obtenidas se comparan con las trayectorias angulares resultantes de la cinemática inversa para comprobar las propuestas de las simulaciones y también con las trayectorias teóricas para la validación del exoesqueleto real.

Una vez se tenga el dispositivo de pruebas en funcionamiento será necesario contar con medios configurados para la medición del movimiento angular y lineal y así analizar los movimientos de los eslabones y de las juntas del exoesqueleto real.

En este aspecto, existen variedad de métodos y/o técnicas de medición de los ángulos y/o métodos de captura de movimiento obteniendo así la posición durante un intervalo de tiempo.

Entre ellos se encuentra el instrumento más práctico, el goniómetro, cuya estructura es un cuerpo unido de manera fija a un brazo, y un brazo móvil que gira alrededor de un eje que se encuentra en el centro del cuerpo, cuyo cuerpo es un transportador. Las limitaciones de un goniómetro son: a) la alineación visual del brazo fijo (proximal), el brazo móvil (distal) y el eje de la articulación a medir; b) falta de estabilidad durante la medición. Una versión más sofisticada es el electrogoniómetro que utiliza electrodos.



Por otro lado, se encuentra la videogrametría [37] utilizada junto con alguna herramienta de cómputo para el procesamiento del video en datos de coordenadas, las cuales podrán ser exportadas a otros programas de cómputo para su correspondiente lectura y procesamiento de esos datos. Para esta técnica se utilizan al menos tres cámaras para garantizar la grabación del movimiento del marcador en intervalos de tiempo o en porcentaje del ciclo de la marcha. Además, el número de cámaras posicionadas en diferentes ubicaciones proporciona el registro de posición y orientación en varios planos, proporcionando el registro del movimiento del objeto en el espacio (3D).

Otra técnica de medición es la fotogrametría [38] usando generalmente cámaras digitales para proporcionar mediciones más precisas al no presentar fluctuación de línea. Esta técnica también necesita una etapa de procesamiento para procesar las fotografías y obtener información acerca del movimiento. Una desventaja en cuestión de complejidad es que se necesita de una prueba circular móvil para tomar cada una de las fotografías.

Al hacer uso de estas dos últimas técnicas se necesitan poner marcadores en los puntos de interés de acuerdo con el modelo convencional de la marcha [39], en nuestro caso serían en cada una de las tres juntas con movimiento en el plano sagital, como se ha mencionado anteriormente: cadera FE, rodilla y tobillo FE.

Mediante alguna interfaz o animación en tiempo real del exoesqueleto se podrían reproducir los movimientos angulares y de desplazamiento reales en cada una de las juntas

### 5.3. Validación de la marcha

La segunda prueba será utilizando los actuadores acoplados al exoesqueleto tal como se muestra en la Figura 5.1, los cuales están configurados para realizar el movimiento de dos juntas (cadera FE y rodilla).

Para esta prueba ya se cuenta con el control de posición que será ejecutado en los actuadores lineales, dicho control será alimentado con las trayectorias angulares obtenidas en la sección 4.1 del presente trabajo. Es importante mencionar que el análisis dinámico y el control no es el objetivo ni parte de este trabajo.



Una vez configurado el control para cada una de las juntas de la cadera y rodilla, se podrán llevar a cabo, en un principio, pruebas de repetición con los actuadores, en donde se verificará el comportamiento de cada actuador ante puntos de posición establecidos por el usuario, la capacidad para mantener el mismo y el tiempo necesario para alcanzarlo.

Después de comprobar que los puntos establecidos por el usuario mediante los actuadores son alcanzados por el exoesqueleto real, se procederá a verificar que los actuadores sean capaces de generar los mismos ángulos de las trayectorias de la sección **4.1 Generación de las Trayectorias angulares**.

Durante el accionamiento de los actuadores se podrá realizar el monitoreo de los eslabones, juntas y especialmente el tobillo para analizar el comportamiento del pie durante la emulación de varias flexiones y extensiones de la junta de la cadera y de la rodilla con el fin de obtener un promedio en un ciclo de marcha completo.

#### 5.4. Análisis de los datos biomecánicos

Al tener todos los datos capturados y procesados de los movimientos angulares obteniendo así la posición angular de las juntas, y el desplazamiento del tobillo, se analizará la validez de todos los datos biomecánicos obtenidos experimentalmente, no solamente con el modelo simulado sino con las trayectorias angulares teóricas basadas en datos clínicos.

Al verificar los datos obtenidos experimentales, se puede efectuar la comparación en conjunto ente los datos biomecánicos obtenidos experimentalmente y los resultados de las simulaciones del **Capítulo 4**.

También aprovechando la técnica e instrumentación elegida para la medición de la posición angular de las juntas y la posición lineal de los pies en ambas extremidades, se puede caracterizar de una manera más confiable la trayectoria de desplazamiento del pie durante la caminata de usuarios para obtener una nueva trayectoria de desplazamiento que sea más semejante a la obtenida con la cinemática directa (véase la curva roja en el tobillo en **4.2.5 Comparación E**). Con lo cual se puede evaluar si la arquitectura cinemática propuesta utilizada en el exoesqueleto real permitirá alcanzar los movimientos a cadencia libre de un usuario ideal.





## 5.5. Factores que afectan las mediciones

Existen factores que afectarán las mediciones y las validaciones de las pruebas experimentales, por ejemplo: errores de alineación del exoesqueleto, desajustes mecánicos en cada una de las juntas ocasionando desviaciones.

Otro aspecto por considerar es la colocación de los marcadores, los cuales deben estar en la ubicación correcta y deben de estar fijos para que no haya variaciones durante la ejecución de las dos pruebas de validación.

También, la precisión en la información obtenida durante la medición juega un papel importante, es por ello que no debe omitirse la calibración correspondiente al método que haya sido escogido para las validaciones.

Algunos de los factores que afectan las mediciones son susceptibles de ser minimizados y/o evitarlos mientras que con otros será inevitable descartar esos errores por lo menos en esta segunda etapa de desarrollo del exoesqueleto. Por ejemplo, se puede incluir un mecanismo de compensación de desalineación que ayude a compensar la desalineación entre las propias juntas del exoesqueleto, y también entre el exoesqueleto y el usuario.

## 5.6. Discusión

El exoesqueleto debe centrarse en movimientos guiados de sus extremidades con el fin de tener un efecto ideal tanto desde un punto de vista terapéutico como funcional. Y cuando se diseña un exoesqueleto con base en necesidades individuales y específicas de cada usuario, se convierte en una ventaja al tener una adecuada instrumentación, por consiguiente, evitar cambiar los parámetros para el análisis cinemático ni los programados para el control.

Se espera que las validaciones indiquen que existe una aproximación muy cercana entre el modelo simulado y los datos biomecánicos obtenidos con el exoesqueleto real.



Además, se espera que la arquitectura cinemática del exoesqueleto, la cual tiene la cuarta configuración, permita el desarrollo de los movimientos naturales de la pierna de un usuario en el plano sagital.

Si la validación es satisfactoria, entonces el método para encontrar la arquitectura cinemática ideal para el individuo particular se podría ampliar a otros usuarios simplemente cambiando los valores o parámetros para cada usuario en específico.

Y una vez entonces, se podrá continuar con las pruebas posteriores, en donde será necesario incluir a un profesional de la medicina para que contribuya con los parámetros importantes a tener en cuenta de acuerdo al funcionamiento correcto de las partes del cuerpo, así como de las patologías de la marcha que pueden afectar la concepción de la estructura del exoesqueleto, así como certificar que el exoesqueleto es seguro para el paciente para ejecutar secuencias repetitivas de rehabilitación con enfoque en la limitación, disfunción y discapacidad de las articulaciones de los miembros inferiores.



# CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el análisis y configuración de un exoesqueleto para rehabilitación de los miembros inferiores considerando criterios clínicos y antropomórficos. El análisis de movimiento parte del análisis biomecánico de las extremidades, considerando la movilidad de las piernas y cadera. Estos movimientos comparten rasgos de movilidad limitados, sin embargo, son importantes para la mayoría de las actividades de la vida diaria. Con el análisis de movilidad, fue posible realizar una representación geométrica de la extremidad a través de las juntas y rangos de movimientos. El análisis de movimiento cinemático se simplificó mediante técnicas utilizadas en robótica con ayuda de la convención de Denavit-Hartenberg, y mecanismos mediante transformadas homogéneas. Se evaluaron los movimientos de la extremidad y con eso fue posible realizar la propuesta final del movimiento del exoesqueleto.

Una vez tenida la representación matemática se usó un método iterativo para poder evaluar cada una de las configuraciones propuestas. Las configuraciones muestran las funciones básicas que debería contener el exoesqueleto a diseñar (soportar, articular y sujetar).

Se propusieron cinco configuraciones diferentes tanto en la posición de las juntas lo que conlleva a cambios en las dimensiones de los eslabones, dichas configuraciones se evaluaron resolviendo la cinemática inversa con diversas restricciones para su resolución y utilizando la cinemática directa al inyectar las trayectorias articulares obtenidas mediante base de datos clínicos.

Se obtuvo una configuración en la cual no se requiere la alineación con las juntas humanas y, por lo tanto, no pueden crearse fuerzas residuales en las juntas humanas si existen desalineaciones del mecanismo a estas.

En el presente trabajo se obtuvieron resultados relevantes como:





- Propuesta de cinco configuraciones de exoesqueleto que no requiere de una alineación con la articulación (principalmente la cadera).
- Propuesta de un algoritmo para la generación y evaluación de las configuraciones propuestas.
- Modelos Cinemáticos para cada una de las configuraciones.

Adicionalmente a los objetivos planteados se aportó en:

- La obtención de las trayectorias articulares mediante regresiones a partir de gráficas de posición angular documentadas en bases de datos del estado de arte en el plano sagital y frontal de las articulaciones principales (cadera-rodillo-tobillo), necesarias para poder evaluar la cinemática de dispositivo.
- Obtención de las ecuaciones de movimientos mediante series de Fourier para las trayectorias de desplazamiento de la planta del pie durante el ciclo de la marcha, pero es importante que en trabajos futuros se realice dicha obtención de movimiento mediante otros métodos en donde también se contemple la orientación de la planta del pie.

Las configuraciones propuestas tienen la misma capacidad de realizar trayectorias cartesianas que el miembro humano adyacente, lo que permite al dispositivo realizar trayectorias de movimiento equivalentes que las contrapartes biológicas.

El modelo de miembros inferiores de 10 GDL presentado puede servir para simular y desarrollar estructuras cinemáticas para este tipo de exoesqueletos, ya sea móviles o fijos como el Lokomat® de Hocoma.

Es importante mencionar que la quinta configuración parecía ser la más adecuada para poder simular la marcha humana ya que los resultados de las trayectorias angulares obtenidas mediante la solución Cinemática Inversa fueron similares a las generadas mediante los datos clínicos principalmente en la cadera y rodilla, en donde se distinguía de las demás configuraciones en el comportamiento de



la junta de la cadera abducción-aducción, tales resultados son importantes sobre todo para la nueva generación de dispositivos exoesqueléticos que traten de simular los movimientos humanos y que no requieran una alineación exacta de sus articulaciones. A pesar de ello, se ha optado por la cuarta configuración, la cual también cumple con la similitud y un menor error en comparación con las trayectorias teóricas, dicha decisión fue tomando en cuenta las restricciones de diseño y la simplificación mecánica.

Después de analizar los resultados se podría suponer que si controlamos la trayectoria del efector final (tobillo) y se resuelve la cinemática inversa, las trayectorias de la rodilla y de la cadera son biomecánicamente compatibles con la marcha humana, siempre y cuando se respeten las dimensiones de los eslabones y la posición de los ejes de rotación. Este resultado deberá ser validado con la metodología propuesta en el capítulo 5.

Por lo tanto, y en virtud de los resultado de este trabajo, la posición del efector final es sumamente crucial para el desarrollo de la investigación en esta área, lo cual supondría que si solo se desea controlar la posición del efector final con ciertas posiciones iniciales, no importaría la precisión del movimiento de las juntas siempre y cuando se encuentren dentro de sus correspondientes rangos pues se trata de un mecanismo articulado, aquí la pregunta recae en ¿por qué las trayectorias angulares de la rodilla y de la cadera FE en cada una de las simulaciones sometidas a diferentes condiciones fueron todas similares a las humanas?, ¿se podría decir que ya estamos diseñados para caminar, al menos motrizmente? y que ¿nuestra estructura ósea es idónea para la ambulación?.





# APORTACIONES

## I. Ecuaciones de las trayectorias:

- a. De desplazamiento tridimensional de los efectores finales:  $\mathbf{T}_D(\mathbf{t}) = [x_{pD}(\mathbf{t}), y_{pD}(\mathbf{t}), z_{pD}(\mathbf{t})]$  y  $\mathbf{T}_I(\mathbf{t}) = [x_{pI}(\mathbf{t}), y_{pI}(\mathbf{t}), z_{pI}(\mathbf{t})]$ .
- b. Angulares para la aducción-abducción de cadera  $f_{AA\_cadera\_D}(\mathbf{t})$ ,  $f_{AA\_cadera\_I}(\mathbf{t})$ ; flexión-extensión de cadera  $f_{FE\_cadera\_D}(\mathbf{t})$ ,  $f_{FE\_cadera\_I}(\mathbf{t})$ ; y flexión-extensión de rodilla  $f_{FE\_rodilla\_D}(\mathbf{t})$ ,  $f_{FE\_rodilla\_I}(\mathbf{t})$ .

Donde  $t$  es el valor porcentual del ciclo de la marcha, del 0% al 100%.

Debido a que no hay registro en el arte previo de ninguna de las ecuaciones/funciones antes mencionadas, se tuvieron que obtener durante el trabajo de esta Tesis.

## II. Base para plantear el análisis dinámico, y para implementar una síntesis dimensional de esta configuración.

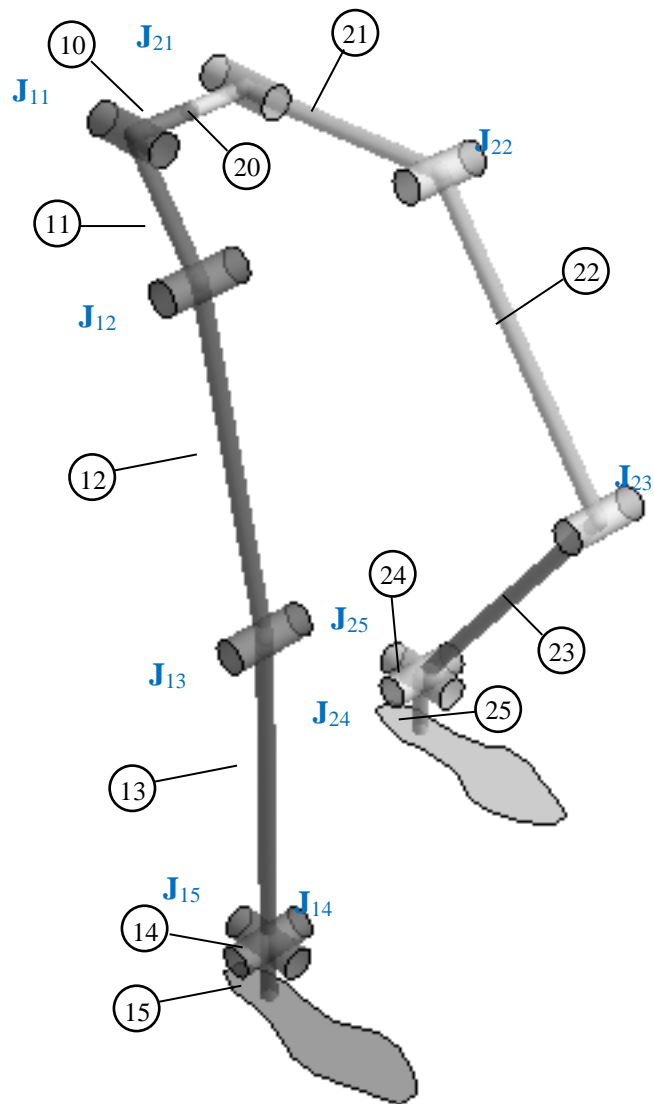
De este modo se podrá comprobar la robustez en varios sujetos, el modelo del mecanismo de miembros inferiores podrá generar trayectorias para las estaturas de sujetos que van del quinto al noveno percentil de la población masculina (por ser el género con mayor porcentaje de afectados). Después del diseño de la arquitectura cinemática, se podrá utilizar una trayectoria promedio basándose en la caminata de varias personas para probar el comportamiento de los movimientos del exoesqueleto mediante el sistema de validación. De esta forma, se puede afirmar que un mecanismo robótico es capaz de reproducir la misma o similar respuesta que la simulada con el modelo, la probabilidad es alta de que también será capaz de interactuar con el movimiento de las piernas humanas de un sujeto real en todo el espacio de trabajo.



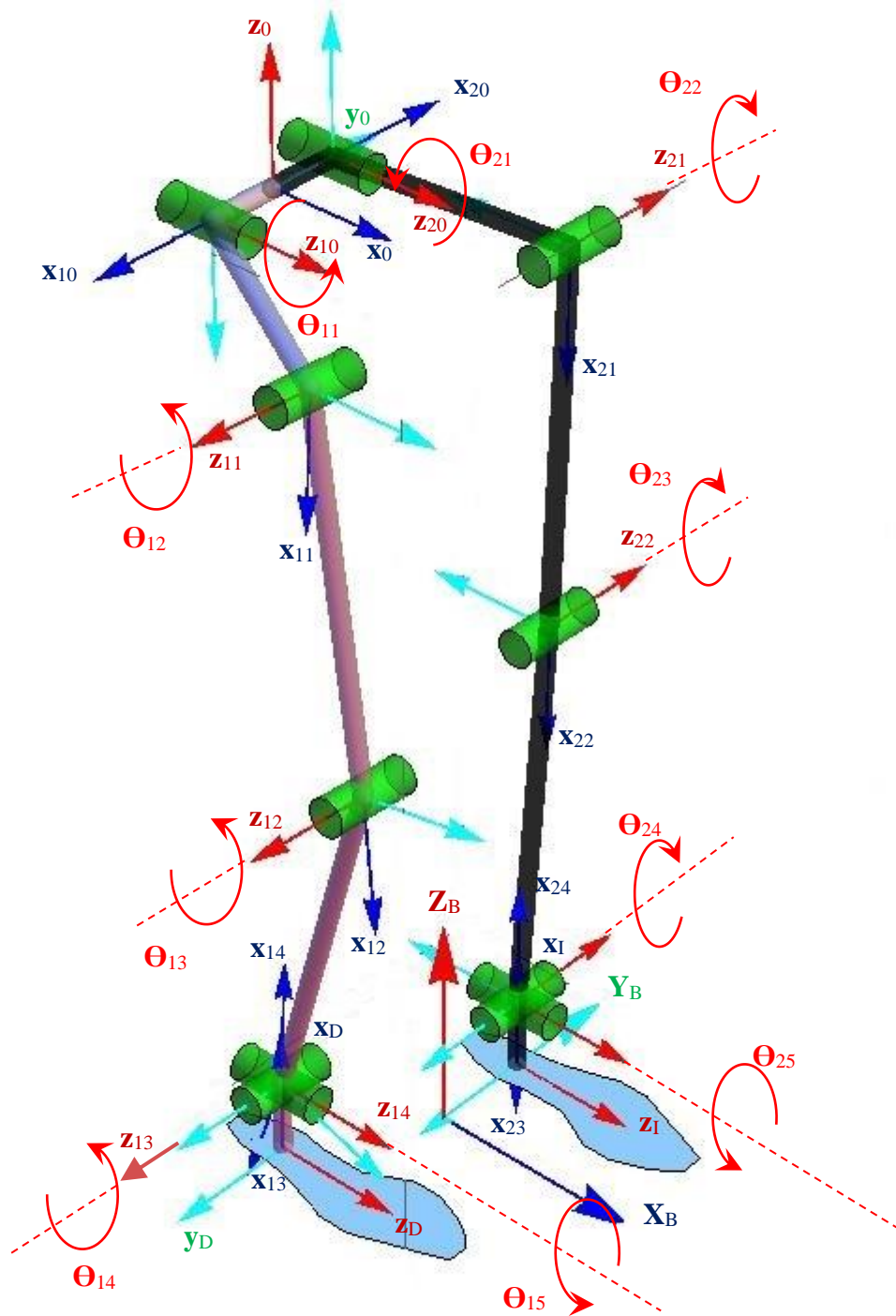


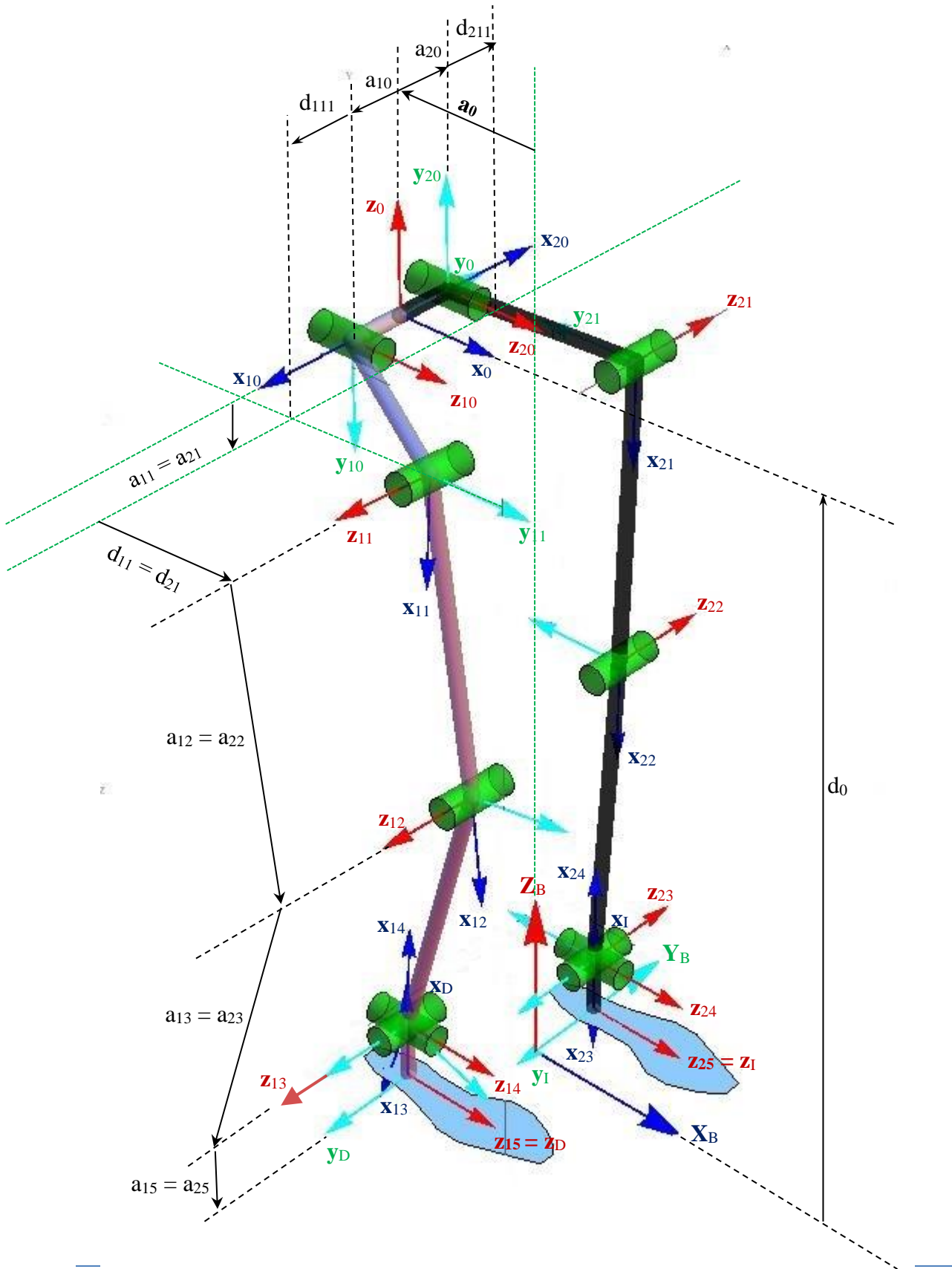
# APÉNDICES Y ANEXOS

## Apéndice A



## Apéndice B







## Apéndice C

### Posición

#### Primera configuración

El cálculo de las matrices de transformación resulta de la siguiente manera:

$${}^B \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\cos \alpha_0 \cdot \sin \theta_0 & \sin \alpha_0 \cdot \sin \theta_0 & a_0 \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \alpha_0 \cdot \cos \theta_0 & -\sin \alpha_0 \cdot \cos \theta_0 & a_0 \sin \theta_0 \\ 0 & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(0) & -\cos(0) \cdot \sin(0) & \sin(0) \cdot \sin(0) & 0 \cdot \cos(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \cdot \cos(0) & -\sin(0) \cdot \cos(0) & 0 \cdot \sin(0) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & d0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0 \mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} \cos(90) & \cos(90) \cdot \sin(90) & \sin^2(90) & a10 \cdot \cos(90) \\ -\sin(90) & \cos^2(90) & \cos(90) \cdot \sin(90) & -a10 \cdot \sin(90) \\ 0 & -\sin(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{10} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{11} & 0 \\ \cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{11} \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 & a12 \cdot \cos \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 & a12 \cdot \sin \theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{12} \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & -\sin \theta_{13} & 0 & a13 \cdot \cos \theta_{13} \\ \sin \theta_{13} & \cos \theta_{13} & 0 & a13 \cdot \sin \theta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^{13}\mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{14} & 0 & -\sin \theta_{14} & 0 \\ -\sin \theta_{14} & 0 & \cos \theta_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{14}\mathbf{A}_{15} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{15} & -\sin \theta_{15} & 0 & -a_{15} \cdot \cos \theta_{15} \\ \sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} & 0 & -a_{15} \cdot \sin \theta_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{20}\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & 0 \\ -\cos \theta_{21} & 0 & \sin \theta_{21} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{21}\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{22} & -\sin \theta_{22} & 0 & a_{22} \cdot \cos \theta_{22} \\ \sin \theta_{22} & \cos \theta_{22} & 0 & a_{22} \cdot \sin \theta_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{22}\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 & a_{23} \cdot \cos \theta_{23} \\ \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & a_{23} \cdot \sin \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{23}\mathbf{A}_{24} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{24} & 0 & \sin \theta_{24} & 0 \\ -\sin \theta_{24} & 0 & -\cos \theta_{24} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{24}\mathbf{A}_{25} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{25} & -\sin \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \cos \theta_{25} \\ \sin \theta_{25} & \cos \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \sin \theta_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Segunda configuración

El cálculo de las matrices de transformación para esta configuración solo cambia en las siguientes matrices  ${}^B\mathbf{A}_0$ ,  ${}^{10}\mathbf{A}_{11}$  y  ${}^{20}\mathbf{A}_{21}$ , ya que las demás conservan los mismos términos:

$${}^B\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{10}\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_{11} & 0 & \cos\theta_{11} & 0 \\ \cos\theta_{11} & 0 & \sin\theta_{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{11}\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} & 0 & a12 \cdot \cos\theta_{12} \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 & a12 \cdot \sin\theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{12}\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{13} & -\sin\theta_{13} & 0 & a13 \cdot \cos\theta_{13} \\ \sin\theta_{13} & \cos\theta_{13} & 0 & a13 \cdot \sin\theta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{13}\mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_{14} & 0 & -\sin\theta_{14} & 0 \\ -\sin\theta_{14} & 0 & \cos\theta_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{14}\mathbf{A}_{15} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{15} & -\sin\theta_{15} & 0 & -a15 \cdot \cos\theta_{15} \\ \sin\theta_{15} & \cos\theta_{15} & 0 & -a15 \cdot \sin\theta_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{A}_{20} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{20}\mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & 0 \\ -\cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{21} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{21}\mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{22} & -\sin \theta_{22} & 0 & a_{22} \cdot \cos \theta_{22} \\ \sin \theta_{22} & \cos \theta_{22} & 0 & a_{22} \cdot \sin \theta_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{22}\mathbf{A}_{23} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 & a_{23} \cdot \cos \theta_{23} \\ \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & a_{23} \cdot \sin \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{23}\mathbf{A}_{24} &= \begin{bmatrix} -\cos \theta_{24} & 0 & \sin \theta_{24} & 0 \\ -\sin \theta_{24} & 0 & -\cos \theta_{24} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{24}\mathbf{A}_{25} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{25} & -\sin \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \cos \theta_{25} \\ \sin \theta_{25} & \cos \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \sin \theta_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### Tercera configuración

El cálculo de las matrices de transformación para esta configuración solo cambia en las siguientes matrices  ${}^{10}\mathbf{A}_{11}$  y  ${}^{20}\mathbf{A}_{21}$ , ya que las demás conservan los mismos términos:



$$\begin{aligned}
{}^B \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0 \mathbf{A}_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{10} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{11} & -a11 \cdot \sin \theta_{11} \\ \cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{11} & a11 \cdot \cos \theta_{11} \\ 0 & 1 & 0 & d11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{11} \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 & a12 \cdot \cos \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 & a12 \cdot \sin \theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{12} \mathbf{A}_{13} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & -\sin \theta_{13} & 0 & a13 \cdot \cos \theta_{13} \\ \sin \theta_{13} & \cos \theta_{13} & 0 & a13 \cdot \sin \theta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{13} \mathbf{A}_{14} &= \begin{bmatrix} -\cos \theta_{14} & 0 & -\sin \theta_{14} & 0 \\ -\sin \theta_{14} & 0 & \cos \theta_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{14} \mathbf{A}_{15} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{15} & -\sin \theta_{15} & 0 & -a15 \cdot \cos \theta_{15} \\ \sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} & 0 & -a15 \cdot \sin \theta_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0 \mathbf{A}_{20} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
{}^{20}\mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & a11 \cdot \sin \theta_{21} \\ -\cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{21} & -a11 \cdot \cos \theta_{21} \\ 0 & -1 & 0 & d21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{21}\mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{22} & -\sin \theta_{22} & 0 & a22 \cdot \cos \theta_{22} \\ \sin \theta_{22} & \cos \theta_{22} & 0 & a22 \cdot \sin \theta_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{22}\mathbf{A}_{23} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 & a23 \cdot \cos \theta_{23} \\ \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & a23 \cdot \sin \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{23}\mathbf{A}_{24} &= \begin{bmatrix} -\cos \theta_{24} & 0 & \sin \theta_{24} & 0 \\ -\sin \theta_{24} & 0 & -\cos \theta_{24} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{24}\mathbf{A}_{25} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{25} & -\sin \theta_{25} & 0 & -a25 \cdot \cos \theta_{25} \\ \sin \theta_{25} & \cos \theta_{25} & 0 & -a25 \cdot \sin \theta_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### Cuarta configuración

Basándose en la tercera configuración y en la Tabla 2.4 *Parámetros de la cadena cinemática de los MID y MII*, sólo cambian las matrices  ${}^{10}\mathbf{A}_{11}$  y  ${}^{20}\mathbf{A}_{21}$ . Al igual que la tercera configuración, las otras matrices se manejan de igual forma que la segunda configuración:

$${}^B\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^0\mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a_{10} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la matriz de transformación  ${}^{10}\mathbf{A}_{11}$  y  ${}^{20}\mathbf{A}_{21}$ , se utiliza la ec. (2.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{H1} &= \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{T}_z(d_i) \cdot \mathbf{T}_x(a_i) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha_i) \cdot \mathbf{T}_z(d_j) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i + d_j \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & -d_j \cos \theta_i \sin \alpha_i + a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i + d_j \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$${}^{10}\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{11} & d_{111} \cdot \cos \theta_{11} - a_{11} \cdot \sin \theta_{11} \\ \cos \theta_{11} & 0 & \sin \theta_{11} & a_{11} \cdot \cos \theta_{11} + d_{111} \cdot \sin \theta_{11} \\ 0 & 1 & 0 & d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{11}\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 & a_{12} \cdot \cos \theta_{12} \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 & a_{12} \cdot \sin \theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{12}\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & -\sin \theta_{13} & 0 & a_{13} \cdot \cos \theta_{13} \\ \sin \theta_{13} & \cos \theta_{13} & 0 & a_{13} \cdot \sin \theta_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{13}\mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{14} & 0 & -\sin \theta_{14} & 0 \\ -\sin \theta_{14} & 0 & \cos \theta_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
{}^{14}\mathbf{A}_{15} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{15} & -\sin \theta_{15} & 0 & -a_{15} \cdot \cos \theta_{15} \\ \sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} & 0 & -a_{15} \cdot \sin \theta_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{A}_{20} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{20}\mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i + d_j \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & -d_j \cos \theta_i \sin \alpha_i + a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i + d_j \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{20}\mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & d_{211} \cdot \cos \theta_{21} + a_{21} \cdot \sin \theta_{21} \\ -\cos \theta_{21} & 0 & \sin \theta_{21} & -a_{21} \cdot \cos \theta_{21} + d_{211} \cdot \sin \theta_{21} \\ 0 & -1 & 0 & d_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{21}\mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{22} & -\sin \theta_{22} & 0 & a_{22} \cdot \cos \theta_{22} \\ \sin \theta_{22} & \cos \theta_{22} & 0 & a_{22} \cdot \sin \theta_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{22}\mathbf{A}_{23} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} & 0 & a_{23} \cdot \cos \theta_{23} \\ \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} & 0 & a_{23} \cdot \sin \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{23}\mathbf{A}_{24} &= \begin{bmatrix} -\cos \theta_{24} & 0 & \sin \theta_{24} & 0 \\ -\sin \theta_{24} & 0 & -\cos \theta_{24} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{24}\mathbf{A}_{25} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{25} & -\sin \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \cos \theta_{25} \\ \sin \theta_{25} & \cos \theta_{25} & 0 & -a_{25} \cdot \sin \theta_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$







$${}^{23}\dot{\mathbf{A}}_{24} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{24} - 180^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ)$$

$${}^{24}\dot{\mathbf{A}}_{25} = \dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{25}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{25}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$

$$\begin{aligned} {}^B\dot{\mathbf{A}}_D &= \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pd}) \\ &= \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^B\dot{\mathbf{A}}_I &= \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\ &\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) \end{aligned}$$

Renombrando a las variables:

$$q_{11} = \theta_{11} + 90^\circ$$

$$q_{14} = \theta_{14} + 180^\circ$$

$$q_{21} = \theta_{21} - 90^\circ$$

$$q_{24} = \theta_{24} - 180^\circ$$

$$\dot{\mathbf{T}}_j(q) = \mathbf{T}_j(q) \mathbf{D}_j(\dot{q}) \quad (0.1)$$

Usando la ecuación (0.1), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) = \mathbf{R}_z(q_{11}) \mathbf{D}_{Rz}(\dot{q}_{11})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{12}) = \mathbf{R}_z(\theta_{12}) \mathbf{D}_{Rz}(\dot{\theta}_{12})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{13}) = \mathbf{R}_z(\theta_{13}) \mathbf{D}_{Rz}(\dot{\theta}_{13})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_z(q_{14}) = \mathbf{R}_z(q_{14}) \mathbf{D}_{Rz}(\dot{q}_{14})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{15}) = \mathbf{R}_z(\theta_{15}) \mathbf{D}_{Rz}(\dot{\theta}_{15})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_z(q_{21}) = \mathbf{R}_z(q_{21}) \mathbf{D}_{Rz}(\dot{q}_{21})$$



$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{22}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{22})\mathbf{D}_{Rz}(\dot{\theta}_{22}) \\
\dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{23}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{23})\mathbf{D}_{Rz}(\dot{\theta}_{23}) \\
\dot{\mathbf{R}}_z(q_{24}) &= \mathbf{R}_z(q_{24})\mathbf{D}_{Rz}(\dot{q}_{24}) \\
\dot{\mathbf{R}}_z(\theta_{25}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{25})\mathbf{D}_{Rz}(\dot{\theta}_{25}) \\
\dot{\mathbf{T}}_x(x_D(t)) &= \mathbf{T}_x(x_D(t))\mathbf{D}_x(\dot{x}_D(t)) \\
\dot{\mathbf{T}}_y(y_D(t)) &= \mathbf{T}_y(y_D(t))\mathbf{D}_y(\dot{y}_D(t)) \\
\dot{\mathbf{T}}_z(z_D(t)) &= \mathbf{T}_z(z_D(t))\mathbf{D}_z(\dot{z}_D(t)) \\
\dot{\mathbf{T}}_x(x_I(t)) &= \mathbf{T}_x(x_I(t))\mathbf{D}_x(\dot{x}_I(t)) \\
\dot{\mathbf{T}}_y(y_I(t)) &= \mathbf{T}_y(y_I(t))\mathbf{D}_y(\dot{y}_I(t)) \\
\dot{\mathbf{T}}_z(z_I(t)) &= \mathbf{T}_z(z_I(t))\mathbf{D}_z(\dot{z}_I(t))
\end{aligned}$$

## Aceleración

Se deriva la ecuación (2.38) y (2.39) respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
& {}^B\dot{\mathbf{A}}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\dot{\mathbf{A}}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\ddot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\dot{\mathbf{A}}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + {}^B\dot{\mathbf{A}}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\dot{\mathbf{A}}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\ddot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\dot{\mathbf{A}}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\dot{\mathbf{A}}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\dot{\mathbf{A}}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\dot{\mathbf{A}}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\ddot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\mathbf{A}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + \\
& {}^B\dot{\mathbf{A}}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\dot{\mathbf{A}}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\dot{\mathbf{A}}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\dot{\mathbf{A}}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\dot{\mathbf{A}}_{14} \cdot {}^{14}\dot{\mathbf{A}}_{15} + \\
& {}^B\mathbf{A}_0 \cdot {}^0\mathbf{A}_{10} \cdot {}^{10}\mathbf{A}_{11} \cdot {}^{11}\mathbf{A}_{12} \cdot {}^{12}\mathbf{A}_{13} \cdot {}^{13}\mathbf{A}_{14} \cdot {}^{14}\ddot{\mathbf{A}}_{15} = {}^B\ddot{\mathbf{A}}_D
\end{aligned}$$





Dónde:

$$\begin{aligned}
 {}^{10}\ddot{\mathbf{A}}_{11} &= \ddot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111}) + \\
 &\quad \dot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) \cdot \dot{\mathcal{X}}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111}) + \\
 &\quad \ddot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \dot{\mathcal{X}}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111}) + \\
 &\quad \dot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \ddot{\mathbf{R}}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111}) + \\
 &\quad \ddot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \dot{\mathcal{X}}_z(d_{111}) \\
 &= \ddot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{11}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{11}) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{111})
 \end{aligned}$$

$${}^{11}\ddot{\mathbf{A}}_{12} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{12}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{12}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$

$${}^{12}\ddot{\mathbf{A}}_{13} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{13}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{13}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$

$${}^{13}\ddot{\mathbf{A}}_{14} = \ddot{\mathbf{R}}_z(q_{14}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(90^\circ)$$

$${}^{14}\ddot{\mathbf{A}}_{15} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{15}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{15}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$

$${}^{20}\ddot{\mathbf{A}}_{21} = \ddot{\mathbf{R}}_z(q_{21}) \cdot \mathbf{T}_z(d_{21}) \cdot \mathbf{T}_x(a_{21}) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(d_{211})$$

$${}^{21}\ddot{\mathbf{A}}_{22} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{22}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{22}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$

$${}^{22}\ddot{\mathbf{A}}_{23} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{23}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(a_{23}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$

$${}^{23}\ddot{\mathbf{A}}_{24} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{24} - 180^\circ) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(0) \cdot \mathbf{R}_x(-90^\circ)$$

$${}^{24}\ddot{\mathbf{A}}_{25} = \ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{25}) \cdot \mathbf{T}_z(0) \cdot \mathbf{T}_x(-a_{25}) \cdot \mathbf{R}_x(0^\circ)$$



$$\begin{aligned}
{}^B \ddot{\mathbf{A}}_D = & \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pd}) + \\
& \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pd}) + \\
& \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pd})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
{}^B \ddot{\mathbf{A}}_I &= \ddot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_y(\beta_{pi}) \\
{}^B \ddot{\mathbf{A}}_D &= \ddot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
&\quad 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
&\quad 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
&\quad 2 \cdot \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pd}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd}) + \\
&\quad \mathbf{T}_x(x_{pd}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pd}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_z(z_{pd}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pd}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pd})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
{}^B \ddot{\mathbf{A}}_I &= \ddot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& 2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& 2 \cdot \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_y(y_{pi}(t)) \cdot \dot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) + \\
& \mathbf{T}_x(x_{pi}(t)) \cdot \mathbf{T}_y(y_{pi}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{T}}_z(z_{pi}(t)) \cdot \mathbf{R}_z(\alpha_{pi}) \cdot \mathbf{R}_y(\beta_{pi}) \\
& \quad \ddot{\mathbf{T}}_{z_j}(q) = \mathbf{T}_{z_j}(q) (\mathbf{D}_{z_j}(\ddot{q}) + \mathbf{D}_{z_j}^2(\dot{q}))
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Usando la ecuación (0.2), se obtienen:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_z(q_{11}) &= \mathbf{R}_z(q_{11}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{q}_{11}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{q}_{11})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{12}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{12}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{\theta}_{12}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{\theta}_{12})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{13}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{13}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{\theta}_{13}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{\theta}_{13})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(q_{14}) &= \mathbf{R}_z(q_{14}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{q}_{14}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{q}_{14})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{15}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{15}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{\theta}_{15}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{\theta}_{15})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(q_{21}) &= \mathbf{R}_z(q_{21}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{q}_{21}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{q}_{21})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{22}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{22}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{\theta}_{22}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{\theta}_{22})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{23}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{23}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{\theta}_{23}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{\theta}_{23})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(q_{24}) &= \mathbf{R}_z(q_{24}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{q}_{24}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{q}_{24})) \\
\ddot{\mathbf{R}}_z(\theta_{25}) &= \mathbf{R}_z(\theta_{25}) (\mathbf{D}_{Rz}(\ddot{\theta}_{25}) + \mathbf{D}_{Rz}^2(\dot{\theta}_{25})) \\
\ddot{\mathbf{T}}_x(x_D(t)) &= \mathbf{T}_x(x_D(t)) (\mathbf{D}_x(\ddot{x}_D(t)) + \mathbf{D}_x^2(\dot{x}_D(t))) \\
\ddot{\mathbf{T}}_y(y_D(t)) &= \mathbf{T}_y(y_D(t)) (\mathbf{D}_y(\ddot{y}_D(t)) + \mathbf{D}_y^2(\dot{y}_D(t))) \\
\ddot{\mathbf{T}}_z(z_D(t)) &= \mathbf{T}_z(z_D(t)) (\mathbf{D}_z(\ddot{z}_D(t)) + \mathbf{D}_z^2(\dot{z}_D(t))) \\
\ddot{\mathbf{T}}_x(x_I(t)) &= \mathbf{T}_x(x_I(t)) (\mathbf{D}_x(\ddot{x}_I(t)) + \mathbf{D}_x^2(\dot{x}_I(t))) \\
\ddot{\mathbf{T}}_y(y_I(t)) &= \mathbf{T}_y(y_I(t)) (\mathbf{D}_y(\ddot{y}_I(t)) + \mathbf{D}_y^2(\dot{y}_I(t))) \\
\ddot{\mathbf{T}}_z(z_I(t)) &= \mathbf{T}_z(z_I(t)) (\mathbf{D}_z(\ddot{z}_I(t)) + \mathbf{D}_z^2(\dot{z}_I(t)))
\end{aligned}$$





## Apéndice D

### Exoesqueleto 10 GDL 4ta configuración - medidas reales

#### CINEMÁTICA INVERSA

##### ■ DATOS

```
a0 = 11;
a10 = 8.25; (*cm*)
a11 = 4.3;
a12 = 41.5;
a13 = 44;
a15 = 8.5;
d0 = 98.3;
d111 = 9;
```

```
d11 = a0;
d21 = a0;
a20 = a10;
a21 = a11;
a22 = a12;
a23 = a13;
a25 = a15;
(*d20=a0;*)
d211 = d111;
```

```
(*Posiciones deseadas para el pie derecho (1) del bípodo*)
β1 = 180*Degree; (*sobre el eje ZB*)
β11 = -90*Degree; (*sobre el eje YB*)
(*Posiciones deseadas para el pie izquierdo (2) del bípodo*)
β2 = 180*Degree; (*sobre el eje ZB*)
β21 = -90*Degree; (*sobre el eje YB*)
```



## Funciones

### ■ Matrices de transformaciones homogéneas

```

In[*]:= (*Matrices Básicas*)
Tx[X_] := {{1, 0, 0, X}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
Ty[Y_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, Y}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
Tz[Z_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, Z}, {0, 0, 0, 1}};
Rx[αi_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, Cos[αi], -Sin[αi], 0}, {0, Sin[αi], Cos[αi], 0}, {0, 0, 0, 1}};
Ry[ey_] := {{Cos[ey], 0, Sin[ey], 0}, {0, 1, 0, 0}, {-Sin[ey], 0, Cos[ey], 0}, {0, 0, 0, 1}};
Rz[ei_] := {{Cos[ei], -Sin[ei], 0, 0}, {Sin[ei], Cos[ei], 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

(*Operadores Diferenciales*)
Dz1[X_] := {{0, 0, 0, X}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}};
Dz2[Y_] := {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, Y}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}};
Dz3[Z_] := {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, Z}, {0, 0, 0, 0}};
Dz4[ex_] := {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, -ex, 0}, {0, ex, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}};
Dz5[ey_] := {{0, 0, ey, 0}, {0, 0, 0, 0}, {-ey, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}};
DRz[ez_] := {{0, -ez, 0, 0}, {ez, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}};

(*Derivadas de T*)
dTx[q_, dq_] := Tx[q].Dz1[dq];
dTy[q_, dq_] := Ty[q].Dz2[dq];
dTz[q_, dq_] := Tz[q].Dz3[dq];
dTRz[q_, dq_] := Rz[q].DRz[dq];

ddTx[q_, dq_, dddq_] := Tx[q].(Dz1[dddq] + Dz1[dq].Dz1[dq]);
ddTy[q_, dq_, dddq_] := Ty[q].(Dz2[dddq] + Dz2[dq].Dz2[dq]);
ddTz[q_, dq_, dddq_] := Tz[q].(Dz3[dddq] + Dz3[dq].Dz3[dq]);
ddTRz[q_, dq_, dddq_] := Rz[q].(DRz[dddq] + DRz[dq].DRz[dq]);

■ Matriz de Transformación Homogénea D-H
In[*]:= TDH[ei_, di_, ai_, αi_] := Rz[ei].Tz[di].Tx[ai].Rx[αi];

■ Matriz de Transformación Homogénea 1
In[*]:= TH1[ei_, di_, ai_, αi_, dj_] := Rz[ei].Tz[di].Tx[ai].Rx[αi].Tz[dj];
TH1[ei, di, ai, αi, dj] // MatrixForm
(*TH2[ei_, αi_, di_] := Rz[ei].Rx[αi].Tz[di];*)

```



### ■ Gráficos

```

Grafica[Tabla_, RGB_, X_, Y_, title_] := ListPlot[Tabla, ImageSize → 600,
  BaseStyle → {25, FontFamily → "ArialNarrow"}, Joined → True, PlotStyle → {Thickness[0.008], RGB},
  Frame → True, FrameLabel → {X, Y}, PlotLabel → title, GridLines → Automatic, PlotRange → All];
GraficaT[Tabla_, RGB_, Type_, X_, Y_, title_, etiqueta_] :=
  ListPlot[Tabla, ImageSize → 600, BaseStyle → {25, FontFamily → "ArialNarrow"}, Joined → True,
  PlotStyle → {Thickness[0.004], RGB, Type}, Frame → True, FrameLabel → {X, Y},
  PlotLegends → LineLegend[{etiqueta}], PlotLabel → title, GridLines → Automatic, PlotRange → All];
(*Graficar eslaboles*)
Barra[espesor_, RGB_, linea_] :=
  Graphics3D[{Opacity[0.6], AbsoluteThickness[espesor], RGB, linea}];
(*Graficar poligono*)
PlantaPie[RGB_, poligono_] := Graphics3D[{RGB, poligono}];
(*Graficar eies*)
Ejex[flecha_] :=
  Graphics3D[{Arrowheads[.025], AbsoluteThickness[3], RGBColor[0, 0, 1], flecha}];
Ejey[flecha_] := Graphics3D[{Arrowheads[.025], AbsoluteThickness[3],
  RGBColor[0.172549, 0.627451, 0.121569], flecha}];
Ejez[flecha_] := Graphics3D[{Arrowheads[.025], AbsoluteThickness[3], RGBColor[1, 0, 0], flecha}];

In[ ]:= (*Transforma vectores a 3D*)
T3D[P_] := {P[[1]], P[[2]], P[[3]}};

exo

```



## Trayectoria de desplazamiento del tobillo obtenida mediante una marcha real (modificada)

### ■ Perfil de la trayectoria

*In[ ]:=*

```

Clear[t]
ND = 100;
tf = 2; (*Tiempo para realizar la trayectoria*)
k = 1;
For[t = 0, t ≤ ND, t += k,
  tp = t/ND*tf;
  fp[t] = 10*(tp/tf)^3 - 15*(tp/tf)^4 + 6*(tp/tf)^5;
  dfp[t] = 30*tp^2/tf^3 - 60*tp^3/tf^4 + 30*tp^4/tf^5;
  ddfp[t] = 60*tp/tf^3 - 180*tp^2/tf^4 + 120*tp^3/tf^5;
]

Tablafp = Table[{t/ND*tf, fp[t]}, {t, 0, ND, k}];
Tabladfp = Table[{t/ND*tf, dfp[t]}, {t, 0, ND, k}];
Tabladdfp = Table[{t/ND*tf, ddfp[t]}, {t, 0, ND, k}];

ListPlot[{Tablafp}, Frame → True,
  FrameLabel → {"Tiempo de recorrido", "Evolución de la posición"}, GridLines → Automatic,
  PlotStyle → {{Thickness[0.008], Red}, {Thickness[0.008], Green}, {Thickness[0.008], Blue}},
  Joined → True]

ListPlot[{Tabladfp}, Frame → True,
  FrameLabel → {"Tiempo de recorrido", "Evolución de la velocidad"}, GridLines → Automatic,
  PlotStyle → {{Thickness[0.008], Red}, {Thickness[0.008], Green}, {Thickness[0.008], Blue}},
  Joined → True]

ListPlot[{Tabladdfp}, Frame → True,
  FrameLabel → {"Tiempo de recorrido", "Evolución de la aceleración"}, GridLines → Automatic,
  PlotStyle → {{Thickness[0.008], Red}, {Thickness[0.008], Green}, {Thickness[0.008], Blue}},
  Joined → True]

```



### ■ Lugar geométrico Derecho y perfil de trayectoria

```

In[ ]:= Clear[t];
a = 1;
px1 = -0.00141;
px2 = 0.2636;
px3 = -12.2;
px4 = -232.6;

ay0 = -238.2;
ay1 = 4.004;
by1 = 5.052;
ay2 = -2.33;
by2 = 2.969;
ay3 = 3.693;
by3 = 1.21;
ay4 = -2.059;
by4 = 1.529;
wy = 0.05874;

az0 = -702;
a1 = -72.95;
b1 = -29.26;
a2 = 8.971;
b2 = 12.94;
a3 = 0.5997;
b3 = -2.03;
a4 = -5.91;
b4 = -0.5984;
w = 0.06033;

XD[t] = (2.4 * (315 + px1*t^3 + px2*t^2 + px3*t + px4)) / 10;
(*Sólo se modifica en un factor 5 en la ecuacion X para elongar la curva de
desplazamiento en ese eje para ser parecida a la generada con la cinemática directa*)
YD[t] = (70 + ay0 + ay1*Cos[t*wy] + by1*Sin[t*wy] + ay2*Cos[2*t*wy] + by2*Sin[2*t*wy] +
ay3*Cos[3*t*wy] + by3*Sin[3*t*wy] + ay4*Cos[4*t*wy] + by4*Sin[4*t*wy]) / 10;
ZD[t] = (780 + az0 + a1*Cos[t*w] + b1*Sin[t*w] + a2*Cos[2*t*w] + b2*Sin[2*t*w] +
a3*Cos[3*t*w] + b3*Sin[3*t*w] + a4*Cos[4*t*w] + b4*Sin[4*t*w]) / 10;
(*Velocidad*)
devXD[t] = D[XD[t], t];
devYD[t] = D[YD[t], t];
devZD[t] = D[ZD[t], t];

(*Aceleración*)
ddevXD[t] = D[XD[t], {t, 2}];
ddevYD[t] = D[YD[t], {t, 2}];
ddevZD[t] = D[ZD[t], {t, 2}];

In[ ]:= For[t = 0, t ≤ 100, t += k,
(*Posición*)

```



```

XD[t] = (2.4 * (315 + px1*t^3 + px2*t^2 + px3*t + px4)) / 10;
YD[t] = (70 + ay0 + ay1*Cos[t*wy] + by1*Sin[t*wy] + ay2*Cos[2*t*wy] + by2*Sin[2*t*wy] +
ay3*Cos[3*t*wy] + by3*Sin[3*t*wy] + ay4*Cos[4*t*wy] + by4*Sin[4*t*wy]) / 10;
ZD[t] = (780 + az0 + a1*Cos[t*w] + b1*Sin[t*w] + a2*Cos[2*t*w] + b2*Sin[2*t*w] +
a3*Cos[3*t*w] + b3*Sin[3*t*w] + a4*Cos[4*t*w] + b4*Sin[4*t*w]) / 10;
TD[t] = {XD[t] - 3, YD[t], ZD[t]};

(*Velocidad*)
dXD[t] = -12.2 + 0.5272*t - 0.00423*t^2;
dYD[t] = 0.29675448 * Cos[0.05874*t] + 0.34879812 * Cos[0.11748*t] +
0.21322619999999998 * Cos[0.17622*t] + 0.35925384 * Cos[0.23496*t] -
0.23519495999999998 * Sin[0.05874*t] + 0.27372840000000004 * Sin[0.11748*t] -
0.65078046 * Sin[0.17622*t] + 0.48378264000000004 * Sin[0.23496*t];
dZD[t] = -1.7652558 * Cos[0.06033*t] + 1.5613404 * Cos[0.12066*t] - 0.3674097 * Cos[0.18099*t] -
0.144405888 * Cos[0.24132*t] + 4.4010735 * Sin[0.06033*t] - 1.08244086 * Sin[0.12066*t] -
0.10853970300000002 * Sin[0.18099*t] + 1.4262012000000002 * Sin[0.24132*t];
dTD[t] = {dXD[t], dYD[t], dZD[t]};

(*Aceleración*)
ddXD[t] = 0.5272 - 0.00846*t;
ddYD[t] = -0.0138153519504 * Cos[0.05874*t] + 0.032157612432 * Cos[0.11748*t] -
0.11468053266119999 * Cos[0.17622*t] + 0.11366956909440001 * Cos[0.23496*t] -
0.0174313581552 * Sin[0.05874*t] - 0.0409768031376 * Sin[0.11748*t] -
0.037574720964 * Sin[0.17622*t] - 0.0844102822464 * Sin[0.23496*t];
ddZD[t] = 0.26551676425500004 * Cos[0.06033*t] - 0.1306073141676 * Cos[0.12066*t] -
0.019644600845970004 * Cos[0.18099*t] + 0.344170873584 * Cos[0.24132*t] +
0.106497882414 * Sin[0.06033*t] - 0.188391332664 * Sin[0.12066*t] +
0.06649748160300001 * Sin[0.18099*t] + 0.03484802889216 * Sin[0.24132*t];
ddrD[t] = {ddXD[t], ddYD[t], ddZD[t]};
}
TXD = Table[XD[t], {t, 0, ND, k}];
FigXD = Grafica[TXD, RGBColor[0, 0, 0], "% Ciclo de la marcha ", "cm", "Función x0(t)"]

TYD = Table[YD[t], {t, 0, ND, k}];
FigYD = Grafica[TYD, RGBColor[0, 0, 0], "% Ciclo de la marcha ", "cm", "Función y0(t)"]

TZD = Table[ZD[t], {t, 0, ND, k}];
FigZD = Grafica[TZD, RGBColor[0, 0, 0], "% Ciclo de la marcha ", "cm", "Función z0(t)"]

TSagitalD = Table[{XD[t] - 3, ZD[t]}, {t, 0, ND, k}];
Fig1D = Grafica[TSagitalD, RGBColor[1, 0, 0], "X [cm]", "Z", "Plano sagital"]

TFrontalD = Table[{YD[t], ZD[t]}, {t, 0, ND, k}];
Fig2D = Grafica[TFrontalD, RGBColor[1, 0, 0], "Y [cm]", "Z", "Plano frontal"]

TablaD = Table[TD[t], {t, 0, 100, k}];
TablatD = Point[TablaD];
TrayectoriaD = Graphics3D[{
PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0], TablatD}, Boxed -> True, Axes -> True, ViewVertical -> {0, 0, 1},
ViewPoint -> {0, Infinity, 0}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotRange -> All]

```



|

**Lugar geométrico izquierdo y perfil de trayectoria**

```

ln[°]=
(*Posición*)
X[t] = XD[t];
Y[t] = (410 + ay0 + ay1 * Cos[t * wy] + by1 * Sin[t * wy] + ay2 * Cos[2 * t * wy] + by2 * Sin[2 * t * wy] +
        ay3 * Cos[3 * t * wy] + by3 * Sin[3 * t * wy] + ay4 * Cos[4 * t * wy] + by4 * Sin[4 * t * wy]) / 10;
(*desplazando la trayectoria en el sentido contrario para el miembro inferior derecho*)
Z[t] = ZD[t];

(*Velocidad*)
dX[t] = dXD[t];
(*devYI[t]=D[Y[t],t];*)
dY[t] = 0.29675448 * Cos[0.05874 * t] + 0.34879812 * Cos[0.11748 * t] +
        0.21322619999999998 * Cos[0.17622 * t] + 0.35925384 * Cos[0.23496 * t] -
        0.23519495999999998 * Sin[0.05874 * t] + 0.27372840000000004 * Sin[0.11748 * t] -
        0.65078046 * Sin[0.17622 * t] + 0.48378264000000004 * Sin[0.23496 * t];
dZ[t] = dZD[t];

(*Aceleración*)
ddX[t] = ddXD[t];
(*ddevYI[t]=D[Y[t],{t,2}];*)
ddY[t] = -0.0138153519504 * Cos[0.05874 * t] + 0.032157612432 * Cos[0.11748 * t] -
        0.11468053266119999 * Cos[0.17622 * t] + 0.11366956909440001 * Cos[0.23496 * t] -
        0.0174313581552 * Sin[0.05874 * t] - 0.0409768031376 * Sin[0.11748 * t] -
        0.037574720964 * Sin[0.17622 * t] - 0.0844102822464 * Sin[0.23496 * t];
ddZ[t] = ddZD[t];

```



```

In[ ]:= For[t = 0, t ≤ 100, t += k,
(*Posición*)
X[t] = XD[t];
Y[t] = (410 + ay0 + ay1 * Cos[t * wy] + by1 * Sin[t * wy] + ay2 * Cos[2 * t * wy] + by2 * Sin[2 * t * wy] +
ay3 * Cos[3 * t * wy] + by3 * Sin[3 * t * wy] + ay4 * Cos[4 * t * wy] + by4 * Sin[4 * t * wy]) / 10;
Z[t] = ZD[t];

XI[t] = Which[t ≤ 40, X[t + 60], t > 40, X[t - 41]];
YI[t] = Which[t ≤ 40, Y[t + 60], t > 40, Y[t - 41]];
ZI[t] = Which[t ≤ 40, Z[t + 60], t > 40, Z[t - 41]];

TI[t] = {XI[t] - 3, YI[t], ZI[t]};

(*Velocidad*)
dX[t] = dXD[t];
dY[t] = 0.29675448 * Cos[0.05874 * t] + 0.34879812 * Cos[0.11748 * t] +
0.21322619999999998 * Cos[0.17622 * t] + 0.35925384 * Cos[0.23496 * t] -
0.23519495999999998 * Sin[0.05874 * t] + 0.27372840000000004 * Sin[0.11748 * t] -
0.65078046 * Sin[0.17622 * t] + 0.48378264000000004 * Sin[0.23496 * t];
dZ[t] = dZD[t];

dXI[t] = Which[t ≤ 40, dX[t + 60], t > 40, dX[t - 41]];
dYI[t] = Which[t ≤ 40, dY[t + 60], t > 40, dY[t - 41]];
dZI[t] = Which[t ≤ 40, dZ[t + 60], t > 40, dZ[t - 41]];
dTI[t] = {dXI[t], dYI[t], dZI[t]};

(*Aceleración*)
ddX[t] = ddXD[t];
ddY[t] = -0.0138153519504 * Cos[0.05874 * t] + 0.032157612432 * Cos[0.11748 * t] -
0.11468053266119999 * Cos[0.17622 * t] + 0.11366956909440001 * Cos[0.23496 * t] -
0.0174313581552 * Sin[0.05874 * t] - 0.0409768031376 * Sin[0.11748 * t] -
0.037574720964 * Sin[0.17622 * t] - 0.0844102822464 * Sin[0.23496 * t];
ddZ[t] = ddZD[t];

ddXI[t] = Which[t ≤ 40, ddX[t + 60], t > 40, ddX[t - 41]];
ddYI[t] = Which[t ≤ 40, ddY[t + 60], t > 40, ddY[t - 41]];
ddZI[t] = Which[t ≤ 40, ddZ[t + 60], t > 40, ddZ[t - 41]];
ddrI[t] = {ddXI[t], ddYI[t], ddZI[t]};
]
TSagitalI = Table[{XI[t] - 3, ZI[t]}, {t, 0, ND, k}];
FigI = Grafica[TSagitalI, RGBColor[1, 0, 0], " X ", "Z", "Plano sagital"]

TFrontalI = Table[{YI[t], ZI[t]}, {t, 0, ND, k}];
FigZ = Grafica[TFrontalI, RGBColor[1, 0, 0], " Y ", "Z", "Plano frontal"]

TablaI = Table[TI[t], {t, 0, 100, k}];
TablatI = Point[TablaI];
TrayectoriaI = Graphics3D[{
PointSize[0.01], RGBColor[1, 0, 0], TablatI}, Boxed → True, Axes → True, ViewVertical → {0, 0, 1},
ViewPoint → {0, Infinity, 0}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}, PlotRange → All]

```





## Trayectorias reales angulares entre miembros

### ■ Posición angular Cadera Aducción-Abducción

```

In[*]:= ac0 = 175.7;
ac1 = 5.135;
bc1 = -1.111;
ac2 = -0.572;
bc2 = 0.2741;
ac3 = -0.108;
bc3 = 0.4639;
ac4 = -0.002977;
bc4 = 0.01883;
ac5 = -0.1036;
bc5 = 0.06109;
wc = 0.06286;

For[t = 0, t ≤ 100, t += k,

  ecaderaAA[t] = ac0 + ac1*Cos[t*wc] + bc1*Sin[t*wc] + ac2*Cos[2*t*wc] +
    bc2*Sin[2*t*wc] + ac3*Cos[3*t*wc] + bc3*Sin[3*t*wc] + ac4*Cos[4*t*wc] +
    bc4*Sin[4*t*wc] + ac5*Cos[5*t*wc] + bc5*Sin[5*t*wc]; (*cadera fe*)
];

TablaecaderaAA = Table[{t, ecaderaAA[t]}, {t, 0, 100, k}];
ListPlot[TablaecaderaAA, Frame → True,
  FrameLabel → {"% Ciclo de marcha", "Posición angular AA Cadera [°]"},
  GridLines → Automatic, PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}, Joined → True]

```



### ■ Posición angular Cadera Flexión-Extensión

```

In[ ]:= ah0 = 174.4;
        ah1 = -15.81;
        bh1 = 9.445;
        ah2 = 4.074;
        bh2 = 5.357;
        ah3 = 0.6071;
        bh3 = -1.238;
        ah4 = -0.7594;
        bh4 = -0.4853;
        ah5 = -0.1786;
        bh5 = 0.7431;
        wh = 0.06293;

For[t = 0, t ≤ 100, t += k,

  ϕcaderaFE[t] = ah0 + ah1 * Cos[t * wh] + bh1 * Sin[t * wh] + ah2 * Cos[2 * t * wh] +
    bh2 * Sin[2 * t * wh] + ah3 * Cos[3 * t * wh] + bh3 * Sin[3 * t * wh] + ah4 * Cos[4 * t * wh] +
    bh4 * Sin[4 * t * wh] + ah5 * Cos[5 * t * wh] + bh5 * Sin[5 * t * wh]; (*cadera fe*)
];

TablaϕcaderaFE = Table[{t, ϕcaderaFE[t]}, {t, 0, 100, k}];
ListPlot[TablaϕcaderaFE, Frame → True,
  FrameLabel → {"% Ciclo de marcha", "Posición angular FE Cadera [°]"},
  GridLines → Automatic, PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}, Joined → True]

```

### ■ Posición angular Rodilla

```

For[t = 0, t ≤ ND, t += k,
  ϕrodilla[t] = 180 - (1.0697 * 10-14 * t8 + 1.1476 * 10-12 * t7 - 9.0106 * 10-10 * t6 + 1.172 * 10-7 * t5 -
    6.5248 * 10-6 * t4 + 0.0001933 * t3 - 0.0038199 * t2 + 0.047595 * t + 0.07948) / Degree;
];
Tablaϕrodilla = Table[{t, ϕrodilla[t]}, {t, 0, 100, k}];
ListPlot[Tablaϕrodilla, Frame → True,
  FrameLabel → {"% Ciclo de marcha", "Posición angular Rodilla [°]"},
  GridLines → Automatic, PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}, Joined → True]

```



## Trayectorias angulares con referencia local

### ■ Posición angular Cadera Aducción-Abducción

```

In[*]:= ac0 = 175.7;
        ac1 = 5.135;
        bc1 = -1.111;
        ac2 = -0.572;
        bc2 = 0.2741;
        ac3 = -0.108;
        bc3 = 0.4639;
        ac4 = -0.002977;
        bc4 = 0.01883;
        ac5 = -0.1036;
        bc5 = 0.06109;
        wc = 0.06286;

For[t = 0, t <= 100, t += 1,

  θcaderaAAr[t] = ((ac0 + ac1*Cos[t*wc] + bc1*Sin[t*wc] + ac2*Cos[2*t*wc] + bc2*Sin[2*t*wc] +
    ac3*Cos[3*t*wc] + bc3*Sin[3*t*wc] + ac4*Cos[4*t*wc] + bc4*Sin[4*t*wc] +
    ac5*Cos[5*t*wc] + bc5*Sin[5*t*wc]) - 180)*Degree; (*cadera aa*)
];

TablaθcaderaAAr = Table[{t, θcaderaAAr[t]}, {t, 0, 100, 1}];
ListPlot[TablaθcaderaAAr, Frame → True,
  FrameLabel → {"% Ciclo de marcha", "Posición angular AA Cadera [rad]"},
  BaseStyle → {25, FontFamily → "ArialNarrow"}, GridLines → Automatic,
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}, Joined → True]

```



### ■ Posición angular Cadera Flexión-Extensión

```

In[ ]:=
ah0 = 174.4;
ah1 = -15.81;
bh1 = 9.445;
ah2 = 4.074;
bh2 = 5.357;
ah3 = 0.6071;
bh3 = -1.238;
ah4 = -0.7594;
bh4 = -0.4853;
ah5 = -0.1786;
bh5 = 0.7431;
wh = 0.06293;

For[t = 0, t ≤ 100, t += 1,

  θcaderaFER[t] =
    (180 - (ah0 + ah1*Cos[t*wh] + bh1*Sin[t*wh] + ah2*Cos[2*t*wh] + bh2*Sin[2*t*wh] +
      ah3*Cos[3*t*wh] + bh3*Sin[3*t*wh] + ah4*Cos[4*t*wh] + bh4*Sin[4*t*wh] +
      ah5*Cos[5*t*wh] + bh5*Sin[5*t*wh])) *Degree; (*cadera fe*)
];

TablaθcaderaFER = Table[{t, θcaderaFER[t]}, {t, 0, 100, 1}];
ListPlot[TablaθcaderaFER, Frame → True,
  FrameLabel → {"% Ciclo de marcha", "Posición angular FE Cadera [°]"},
  BaseStyle → {25, FontFamily → "ArialNarrow"}, GridLines → Automatic,
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}, Joined → True]

```

### ■ Posición angular Rodilla

```

In[ ]:=
For[t = 0, t ≤ 100, t += 1,
  θrodillar[t] = -(1.0697*10-14*t8 + 1.1476*10-12*t7 - 9.0106*10-10*t6 + 1.172*10-7*t5 -
    6.5248*10-6*t4 + 0.0001933*t3 - 0.0038199*t2 + 0.047595*t + 0.07948);
];

Tablaθrodillar = Table[{t, θrodillar[t]}, {t, 0, 100, 1}];
ListPlot[Tablaθrodillar, Frame → True,
  FrameLabel → {"% Ciclo de marcha", "Posición angular Rodilla [°]"},
  BaseStyle → {25, FontFamily → "ArialNarrow"}, GridLines → Automatic,
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}, Joined → True]

```

## Ecuaciones de Posición

```

In[ ]:= Clear[θ11, θ12, θ13, θ14, θ15, θ21, θ22, θ23, θ24, θ25]

```



```

TB0 = TDH[0, d0, -a0, 0];

T010 = TDH[-90*Degree, 0, a10, -90*Degree];
T1011 = TH1[011 + 90*Degree, d11, a11, 90*Degree, d111];
T1112 = TDH[012, 0, a12, 0];
T1213 = TDH[013, 0, a13, 0];
T1314 = TDH[014 + 180*Degree, 0, 0, 90*Degree];
T140 = TDH[015, 0, -a15, 0];

TBD = TB0.T010.T1011.T1112.T1213.T1314.T140;

For[t = 0, t ≤ ND, t += k,

    PosD1 = TBD;

    TX[t] = Tx[XD[t]];
    TY[t] = Ty[YD[t]];
    TZ[t] = Tz[ZD[t]];

    PosD2[t] = TX[t].TY[t].TZ[t].Rz[β1].Ry[β11];

    FuncionObjetivoD[t] =  $\sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 (\text{PosD1}[[i, j]] - \text{PosD2}[t][[i, j]])^2 \right)$ ;
];

T020 = TDH[90*Degree, 0, a20, 90*Degree];
T2021 = TH1[021 - 90*Degree, d21, a21, -90*Degree, d211];
T2122 = TDH[022, 0, a22, 0];
T2223 = TDH[023, 0, a23, 0];
T2324 = TDH[024 - 180*Degree, 0, 0, -90*Degree];
T24I = TDH[025, 0, -a25, 0];

For[t = 0, t ≤ ND, t += k,

    PosI1 = TB0.T020.T2021.T2122.T2223.T2324.T24I;

    TXI[t] = Tx[XI[t]];
    TYI[t] = Ty[YI[t]];
    TZI[t] = Tz[ZI[t]];
    PosI2[t] = TXI[t].TYI[t].TZI[t].Rz[β2].Ry[β21];

    FuncionObjetivoI[t] =  $\sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 (\text{PosI1}[[i, j]] - \text{PosI2}[t][[i, j]])^2 \right)$ ;
];

MatrixForm[PosD1]
MatrixForm[PosD2[0]]
MatrixForm[PosI1];

```



## Solución de la Posición derecho

### ■ Solución Inicial

```
In[ ]:=  
Clear[ $\theta$ 11,  $\theta$ 12,  $\theta$ 13,  $\theta$ 14,  $\theta$ 15,  $\theta$ 21,  $\theta$ 22,  $\theta$ 23,  $\theta$ 24,  $\theta$ 25];  
  
PosInicialD = FindMinimum[FuncionObjetivoD[75],  
  
  {{ $\theta$ 11, 1*Degree},  
   { $\theta$ 12, 30*Degree},  
   { $\theta$ 13, -60*Degree},  
   { $\theta$ 14, -1*Degree},  
   { $\theta$ 15, 1*Degree}},  
  
  MaxIterations -> 100000]  
{({ $\theta$ 11,  $\theta$ 12,  $\theta$ 13,  $\theta$ 14,  $\theta$ 15} /. PosInicialD[[2]])/Degree // Chop
```



|

### ■ Solución Total

```

In[ ]:= Clear[ $\theta$ 11,  $\theta$ 12,  $\theta$ 13,  $\theta$ 14,  $\theta$ 15,  $\theta$ 21,  $\theta$ 22,  $\theta$ 23,  $\theta$ 24,  $\theta$ 25];

 $\theta$ 11i =  $\theta$ 11 /. PosInicialD[[2]];
 $\theta$ 12i =  $\theta$ 12 /. PosInicialD[[2]];
 $\theta$ 13i =  $\theta$ 13 /. PosInicialD[[2]];
 $\theta$ 14i =  $\theta$ 14 /. PosInicialD[[2]];
 $\theta$ 15i =  $\theta$ 15 /. PosInicialD[[2]];

For[t = 0, t ≤ 100, t += k,

  SolPosD[t] = FindMinimum[FuncionObjetivoD[t] // N,

    {{ $\theta$ 11,  $\theta$ 11i},
     { $\theta$ 12,  $\theta$ 12i},
     { $\theta$ 13,  $\theta$ 13i},
     { $\theta$ 14,  $\theta$ 14i},
     { $\theta$ 15,  $\theta$ 15i}},

    Method → Automatic,

    MaxIterations → Automatic];

 $\theta$ 11i =  $\theta$ 11 /. SolPosD[t] [[2]];
 $\theta$ 12i =  $\theta$ 12 /. SolPosD[t] [[2]];
 $\theta$ 13i =  $\theta$ 13 /. SolPosD[t] [[2]];
 $\theta$ 14i =  $\theta$ 14 /. SolPosD[t] [[2]];
 $\theta$ 15i =  $\theta$ 15 /. SolPosD[t] [[2]];
];

SolPosD[0]
SolPosD[25]
SolPosD[50]
SolPosD[75]

```



## Graficación de la Posición derecho

```

tabla1 = Table[{t, 180 + e11/Degree /. SolPosD[t][[2]], {t, 0, ND, k}}; (*90+*)
tabla2 = Table[{t, 180 - e12/Degree /. SolPosD[t][[2]], {t, 0, ND, k}}; (*180-*)
tabla3 = Table[{t, 180 + e13/Degree /. SolPosD[t][[2]], {t, 0, ND, k}}; (*180+*)
tabla4 = Table[{t, 90 - e14/Degree /. SolPosD[t][[2]], {t, 0, ND, k}} // Round;
tabla5 = Table[{t, 90 + e15/Degree /. SolPosD[t][[2]], {t, 0, ND, k}};

Fig1 = GraficaT[tabla1, RGBColor[0, 0, 0], Dashed,
  " % Ciclo de la marcha", "Posición angular [°]", "e_Cadera AA", "e_cadera AA solución"];
FigCAA = GraficaT[Tabla@caderaAA, RGBColor[0, 0, 1], , "", "", "", "e_cadera AA teórica"];
Show[Fig1, FigCAA,
  PlotRange -> Automatic
]
Fig2 = GraficaT[tabla2, RGBColor[0, 0, 0], Dashed,
  " % Ciclo de la marcha", "Posición angular [°]", "e_Cadera FE", "e_cadera FE solución"];
FigCFE = GraficaT[Tabla@caderaFE, RGBColor[0, 0, 1], , "", "", "", "e_cadera FE teórica"];
Show[Fig2, FigCFE,
  PlotRange -> Automatic
]
Fig3 = GraficaT[tabla3, RGBColor[0, 0, 0], Dashed,
  " % Ciclo de la marcha", "Posición angular [°]", "e_Rodilla", "e_rodilla solución"];
FigR = GraficaT[Tabla@rodilla, RGBColor[0, 0, 1], , "", "", "", "e_rodilla teórica"];
Show[Fig3, FigR
]
Fig4 = Grafica[tabla4, RGBColor[0, 0, 0],
  " % Ciclo de la marcha", "Posición angular [°]", "e_Tobillo FE"] // Chop
Fig5 = Grafica[tabla5, RGBColor[0, 0, 0], " % Ciclo de la marcha",
  "Posición angular [°]", "e_Tobillo SP"] // Chop

In[ ]:=
tabla20 =
  Table[{180 + e13/Degree /. SolPosD[t][[2]], 180 - e12/Degree /. SolPosD[t][[2]], {t, 0, ND, k}};
Fig20 = Grafica[tabla20, RGBColor[0, 0, 0], "e_Rodilla",
  "e_cadera FE", "Rodilla vs Cadera FE"] // Chop

```





### Solución de la Posición izquierdo

#### ■ Solución Inicial

```
Clear[ $\theta_{11}$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{14}$ ,  $\theta_{15}$ ,  $\theta_{21}$ ,  $\theta_{22}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{24}$ ,  $\theta_{25}$ ];
```

```
PosInicialI = FindMinimum[FuncionObjetivoI[75],
```

```
{ $\theta_{21}$ , 1*Degree},  
{ $\theta_{22}$ , 20*Degree},  
{ $\theta_{23}$ , 10*Degree},  
{ $\theta_{24}$ , -15*Degree},  
{ $\theta_{25}$ , -1*Degree},
```

```
MaxIterations  $\rightarrow$  100000]
```

```
{ $\theta_{21}$ ,  $\theta_{22}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{24}$ ,  $\theta_{25}$  /. PosInicialI[[2]]}/Degree // Chop
```



|

### ■ Solución Total

```

In[ ]:= Clear[θ11, θ12, θ13, θ14, θ15, θ21, θ22, θ23, θ24, θ25];

θ21i = θ21 /. PosInicialI[2];
θ22i = θ22 /. PosInicialI[2];
θ23i = θ23 /. PosInicialI[2];
θ24i = θ24 /. PosInicialI[2];
θ25i = θ25 /. PosInicialI[2];

For[t = 0, t ≤ 100, t += k,

  SolPosI[t] = FindMinimum[FuncionObjetivoI[t] // N,

    {{θ21, θ21i},
     {θ22, θ22i},
     {θ23, θ23i},
     {θ24, θ24i},
     {θ25, θ25i}},

    Method → Automatic,

    MaxIterations → Automatic];

  θ21i = θ21 /. SolPosI[t][2];
  θ22i = θ22 /. SolPosI[t][2];
  θ23i = θ23 /. SolPosI[t][2];
  θ24i = θ24 /. SolPosI[t][2];
  θ25i = θ25 /. SolPosI[t][2];
];

SolPosI[0]
SolPosI[25]
SolPosI[50]
SolPosI[75]

```

## Graficación de la Posición izquierdo

## Ecuaciones de Velocidad

```

In[ ]:= Clear[θ11, θ12, θ13, θ14, θ15, θ21, θ22, θ23, θ24, θ25]
Clear[dθ11, dθ12, dθ13, dθ14, dθ15, dθ21, dθ22, dθ23, dθ24, dθ25]

dT1θ11 = dTRz[θ11 + 90 * Degree, dθ11].Tz[d11].Tx[a11].Rx[90 * Degree].Tz[d111];
dT1112 = dTRz[θ12, dθ12].Tz[0].Tx[a12].Rx[0];
dT1213 = dTRz[θ13, dθ13].Tz[0].Tx[a13].Rx[0];
dT1314 = dTRz[θ14 + 180 * Degree, dθ14].Tz[0].Tx[0].Rx[90 * Degree];

```



```

dT14D = dTRz [e15, d015] .Tz [0] .Tx [-a15] .Rx [0];

dTBD = TB0 .T010 .dT1011 .T1112 .T1213 .T1314 .T14D +
      TB0 .T010 .T1011 .dT1112 .T1213 .T1314 .T14D +
      TB0 .T010 .T1011 .T1112 .dT1213 .T1314 .T14D +
      TB0 .T010 .T1011 .T1112 .T1213 .dT1314 .T14D + TB0 .T010 .T1011 .T1112 .T1213 .T1314 .dT14D;

For [t = 0, t ≤ ND, t += k,

      VelD1 = dTBD;

      dTX [t] = dTx [XD [t], dXD [t]];
      dTY [t] = dTy [YD [t], dYD [t]];
      dTZ [t] = dTz [ZD [t], dZD [t]];

      VelD2 [t] = dTX [t] .TY [t] .TZ [t] .Rz [β1] .Ry [β11] +
                TX [t] .dTY [t] .TZ [t] .Rz [β1] .Ry [β11] +
                TX [t] .TY [t] .dTZ [t] .Rz [β1] .Ry [β11];

      FuncionObjetivoVelD [t] =  $\sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 (VelD1 [[i, j]] - VelD2 [t] [[i, j]])^2 \right)$ ;
];

dT2021 = dTRz [e21 - 90 *Degree, d021] .Tz [21] .Tx [a21] .Rx [-90 *Degree] .Tz [d211];
dT2122 = dTRz [e22, d022] .Tz [0] .Tx [a22] .Rx [0];
dT2223 = dTRz [e23, d023] .Tz [0] .Tx [a23] .Rx [0];
dT2324 = dTRz [e24 - 180 *Degree, d024] .Tz [0] .Tx [0] .Rx [-90 *Degree];
dT24I = dTRz [e25, d025] .Tz [0] .Tx [-a25] .Rx [0];

For [t = 0, t ≤ ND, t += k,

      VelI1 = TB0 .T020 .dT2021 .T2122 .T2223 .T2324 .T24I +
            TB0 .T020 .T2021 .dT2122 .T2223 .T2324 .T24I + TB0 .T020 .T2021 .T2122 .dT2223 .T2324 .T24I +
            TB0 .T020 .T2021 .T2122 .T2223 .dT2324 .T24I + TB0 .T020 .T2021 .T2122 .T2223 .T2324 .dT24I;

      dTXI [t] = dTx [XI [t], dXI [t]];
      dTYI [t] = dTy [YI [t], dYI [t]];
      dTZI [t] = dTz [ZI [t], dZI [t]];

      VelI2 [t] = dTXI [t] .TYI [t] .TZI [t] .Rz [β2] .Ry [β21] +
                TXI [t] .dTXY [t] .TZI [t] .Rz [β2] .Ry [β21] + TXI [t] .TYI [t] .dTZI [t] .Rz [β2] .Ry [β21];

      FuncionObjetivoVelI [t] =  $\sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 (VelI1 [[i, j]] - VelI2 [t] [[i, j]])^2 \right)$ ;
];

MatrixForm [VelD1];
MatrixForm [VelD2 [10]];

```



```
MatrixForm[VelI1];
MatrixForm[VelI2[0]];
```

**Solución de la Velocidad derecho**

**Graficación de la Velocidad derecho**

**Solución de la Velocidad izquierdo**

**Graficación de la Velocidad izquierdo**

**Ecuaciones de Aceleración**

```
Clear[ø11, ø12, ø13, ø14, ø15, ø21, ø22, ø23, ø24, ø25]
Clear[dø11, dø12, dø13, dø14, dø15, dø21, dø22, dø23, dø24, dø25]
Clear[ddø11, ddø12, ddø13, ddø14, ddø15, ddø21, ddø22, ddø23, ddø24, ddø25]

ddT1011 = ddTRz[ø11 + 90*Degree, dø11, ddø11].Tz[d11].Tx[a11].Rx[90*Degree].Tz[d111];
ddT1112 = ddTRz[ø12, dø12, ddø12].Tz[0].Tx[a12].Rx[0];
ddT1213 = ddTRz[ø13, dø13, ddø13].Tz[0].Tx[a13].Rx[0];
ddT1314 = ddTRz[ø14 + 180*Degree, dø14, ddø14].Tz[0].Tx[0].Rx[90*Degree];
ddT14D = ddTRz[ø15, dø15, ddø15].Tz[0].Tx[-a15].Rx[0];

ddTBD = TB0.T010.ddT1011.T1112.T1213.T1314.T14D +
  2*(TB0.T010.dT1011.dT1112.T1213.T1314.T14D) +
  2*(TB0.T010.dT1011.T1112.dT1213.T1314.T14D) +
  2*(TB0.T010.dT1011.T1112.T1213.dT1314.T14D) +
  2*(TB0.T010.dT1011.T1112.T1213.T1314.dT14D) +
  TB0.T010.T1011.ddT1112.T1213.T1314.T14D +
  2*(TB0.T010.T1011.dT1112.dT1213.T1314.T14D) +
  2*(TB0.T010.T1011.dT1112.T1213.dT1314.T14D) +
  2*(TB0.T010.T1011.dT1112.T1213.T1314.dT14D) +
  TB0.T010.T1011.T1112.ddT1213.T1314.T14D +
  2*(TB0.T010.T1011.T1112.dT1213.dT1314.T14D) +
  2*(TB0.T010.T1011.T1112.dT1213.T1314.dT14D) +
  TB0.T010.T1011.T1112.T1213.ddT1314.T14D +
  2*(TB0.T010.T1011.T1112.T1213.dT1314.dT14D) +
  TB0.T010.T1011.T1112.T1213.T1314.ddT14D;

For[t = 0, t <= ND, t += k,

Ace1D1 = ddTBD;

ddTX[t] = ddTx[XD[t], dXD[t], ddXD[t]];
ddTY[t] = ddTy[YD[t], dVD[t], ddVD[t]];
```



```

ddTZ[t] = ddTz[ZD[t], dZD[t], ddZD[t]];

Ace1D2[t] = ddTX[t].TY[t].TZ[t].Rz[β1].Ry[β11] +
2*(dTX[t].dTY[t].TZ[t].Rz[β1].Ry[β11]) +
2*(dTX[t].TY[t].dTZ[t].Rz[β1].Ry[β11]) +
TX[t].ddTY[t].TZ[t].Rz[β1].Ry[β11] +
2*(TX[t].dTY[t].dTZ[t].Rz[β1].Ry[β11]) +
TX[t].TY[t].ddTZ[t].Rz[β1].Ry[β11];

FuncionObjetivoAce1D[t] = ∑j=1A (∑i=13 (Ace1D1[[i, j]] - Ace1D2[t][[i, j]])2);
];

ddT2021 = ddTRz[θ21 - 90*Degree, dθ21, dde21].Tz[21].Tx[a21].Rx[-90*Degree].Tz[d211];
ddT2122 = ddTRz[θ22, dθ22, dde22].Tz[0].Tx[a22].Rx[0];
ddT2223 = ddTRz[θ23, dθ23, dde23].Tz[0].Tx[a23].Rx[0];
ddT2324 = ddTRz[θ24 - 180*Degree, dθ24, dde24].Tz[0].Tx[0].Rx[-90*Degree];
ddT24I = ddTRz[θ25, dθ25, dde25].Tz[0].Tx[-a25].Rx[0];

For[t = 0, t ≤ ND, t += k,

Ace1I1 = TB0.T020.ddT2021.T2122.T2223.T2324.T24I +
2*(TB0.T020.dT2021.dT2122.T2223.T2324.T24I) +
2*(TB0.T020.dT2021.T2122.dT2223.T2324.T24I) +
2*(TB0.T020.dT2021.T2122.T2223.dT2324.T24I) +
TB0.T020.T2021.ddT2122.T2223.T2324.T24I +
2*(TB0.T020.T2021.dT2122.dT2223.T2324.T24I) +
2*(TB0.T020.T2021.dT2122.T2223.dT2324.T24I) +
2*(TB0.T020.T2021.dT2122.T2223.T2324.dT24I) +
TB0.T020.T2021.T2122.ddT2223.T2324.T24I +
2*(TB0.T020.T2021.T2122.dT2223.dT2324.T24I) +
2*(TB0.T020.T2021.T2122.dT2223.T2324.dT24I) +
TB0.T020.T2021.T2122.T2223.ddT2324.T24I +
2*(TB0.T020.T2021.T2122.T2223.dT2324.dT24I) +
TB0.T020.T2021.T2122.T2223.T2324.ddT24I;

ddTXI[t] = ddTx[XI[t], dXI[t], ddXI[t]];
ddTYI[t] = ddTy[YI[t], dYI[t], ddYI[t]];
ddTZI[t] = ddTz[ZI[t], dZI[t], ddZI[t]];

Ace1I2[t] = ddTXI[t].TYI[t].TZI[t].Rz[β2].Ry[β21] +
2*(dTXI[t].dTYI[t].TZI[t].Rz[β2].Ry[β21]) +
2*(dTXI[t].TYI[t].dTZI[t].Rz[β2].Ry[β21]) +
TXI[t].ddTYI[t].TZI[t].Rz[β2].Ry[β21] +
2*(TXI[t].dTYI[t].dTZI[t].Rz[β2].Ry[β21]) +
TXI[t].TYI[t].ddTZI[t].Rz[β2].Ry[β21];

```



|

$$\text{FuncionObjetivoAcelII}[t] = \sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 (\text{AcelII1}[[i, j]] - \text{AcelII2}[t][[i, j]])^2 \right);$$

];

```
MatrixForm[AcelD1];  
MatrixForm[AcelD2[10]];  
MatrixForm[AcelI1];  
MatrixForm[AcelI2[0]];
```

**Solución de la Aceleración derecho****Graficación de la Aceleración derecho****Solución de la Aceleración izquierdo****Graficación de la Aceleración izquierdo**

Simulaciones

**COMPARACIÓN CINEMÁTICA INVERSA vs DIRECTA****Simulación cinemática directa e Inversa**

### Simulación Cinemática directa e inversa con "for"

```

In[*]:= Clear[t]
e24 = 0;
e25 = 0;
(*Se cambió el miembro para esta comparación,
se hace C_directa en el MI izquierdo y C_inversa en el MI derecho*)
ecaderaAArI[t] = Which[t ≤ 40, -ecaderaAAr[t + 60], t > 40, -ecaderaAAr[t - 41]];
ecaderaFErI[t] = Which[t ≤ 40, -ecaderaFEr[t + 60], t > 40, -ecaderaFEr[t - 41]];
erodillarI[t] = Which[t ≤ 40, -erodillar[t + 60], t > 40, -erodillar[t - 41]];
(*Vector para la extracción de la posición a partir de las matrices de transformacion*)
n = {0, 0, 0, 1};

PII = T3D[TB0.T020.T2021.T2122.T2223.T2324.T24I.n] /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
P23I = T3D[TB0.T020.T2021.T2122.n] /. {e21 → ecaderaAArI[t],
  e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
P13D = T3D[TB0.T010.T1011.T1112.n] /. SolPosD[t][[2]];

TablaPuntosPieI = Table[PII, {t, 0, 100, 1}];
TablaPuntosRodillaI = Table[P23I, {t, 0, 100, 1}];
TablaPuntosRodillaD = Table[P13D, {t, 0, 100, 1}];

TrayectoriaObtenidaPieI = Barra[3, Red, Line[TablaPuntosPieI]];
TrayectoriaTI = Graphics3D[{PointSize[0.005], RGBColor[1, 0, 0], Point[TablaPuntosPieI]}}];

TrayectoriaObtenidaRodillaI = Barra[3, Red, BSplineCurve[TablaPuntosRodillaI]];
TrayectoriaRI = Graphics3D[{PointSize[0.010], RGBColor[1, 0, 0], Point[TablaPuntosRodillaI]}}];

TrayectoriaGeneradaRodillaD =
  Graphics3D[{AbsoluteThickness[3], Blue, BSplineCurve[TablaPuntosRodillaD]}}];

In[*]:= Clear[(*e11,e12,e13,e14,e15,*)e21, e22, e23, e24, e25, t];

For[t = 0, t ≤ 100, t += 1,
  e24 = 0;
  e25 = 0;
  ecaderaAArI[t] = Which[t ≤ 40, -ecaderaAAr[t + 60], t > 40, -ecaderaAAr[t - 41]];
  ecaderaFErI[t] = Which[t ≤ 40, -ecaderaFEr[t + 60], t > 40, -ecaderaFEr[t - 41]];
  erodillarI[t] = Which[t ≤ 40, -erodillar[t + 60], t > 40, -erodillar[t - 41]];

  (*TRASFORMADAS HOMOGENEAS*)
  T10B = TB0.T010;
  T11B = TB0.T010.T1011;
  T12B = TB0.T010.T1011.T1112;
  T13B = TB0.T010.T1011.T1112.T1213;

```



```

T14B = TB0.T010.T1011.T1112.T1213.T1314;
TDB = TB0.T010.T1011.T1112.T1213.T1314.T14D;
T20B = TB0.T020 /. {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
T21B = TB0.T020.T2021 /. {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
T22B = TB0.T020.T2021.T2122 /. {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
T23B =
  TB0.T020.T2021.T2122.T2223 /. {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
T24B = TB0.T020.T2021.T2122.T2223.T2324 /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
TIB = TB0.T020.T2021.T2122.T2223.T2324.T24I /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]};
(*PUNTOS PARA LA GRAFICACION DEL EXO*)
P0 = T3D[TB0.n];
(*pierna derecha*)
P11 = T3D[T10B.n];
P12 = T3D[T11B.n];
P13 = T3D[T12B.n];
P14 = T3D[T13B.n];
P15 = T3D[T14B.n];
PD = T3D[TDB.n];
(*pierna izquierda*)
P21 = T3D[T20B.n];
P22 = T3D[T21B.n];
P23 = T3D[T22B.n];
P24 = T3D[T23B.n];
P25 = T3D[T24B.n];
PI = T3D[TIB.n];
(*pie derecho*)
PaD = T3D[PosD1.Ty[0].Tz[-6.6].n];
PbD = T3D[PosD1.Ty[1.2].Tz[-6.6].n];
PcD = T3D[PosD1.Ty[2.5].Tz[-3.3].n];
PdD = T3D[PosD1.Ty[2.5].Tz[0].n];
PeD = T3D[PosD1.Ty[3.0].Tz[3.3].n];
PfD = T3D[PosD1.Ty[4.5].Tz[8.3].n];
PgD = T3D[PosD1.Ty[5.0].Tz[9.5].n];
PhD = T3D[PosD1.Ty[5.0].Tz[13.3].n];
PiD = T3D[PosD1.Ty[3.7].Tz[16.6].n];
PjD = T3D[PosD1.Ty[2.5].Tz[20.0].n];
PkD = T3D[PosD1.Ty[1.2].Tz[23.3].n];
PlD = T3D[PosD1.Ty[0].Tz[23.3].n];
PmD = T3D[PosD1.Ty[-1.2].Tz[23.3].n];
PnD = T3D[PosD1.Ty[-2.5].Tz[22.0].n];
PoD = T3D[PosD1.Ty[-3.7].Tz[20.0].n];
PpD = T3D[PosD1.Ty[-5.0].Tz[16.6].n];
PqD = T3D[PosD1.Ty[-5.0].Tz[13.3].n];
PrD = T3D[PosD1.Ty[-2.5].Tz[8.3].n];
PsD = T3D[PosD1.Ty[-2.5].Tz[3.3].n];
PtD = T3D[PosD1.Ty[-3.0].Tz[0].n];
PuD = T3D[PosD1.Ty[-2.5].Tz[-3.3].n];
PvD = T3D[PosD1.Ty[-1.2].Tz[-6.6].n];
(*pie izquierdo*)

```





I

```

PaI = T3D[PosI1.Ty[0].Tz[-6.6].n];
PbI = T3D[PosI1.Ty[-1.2].Tz[-6.6].n];
PcI = T3D[PosI1.Ty[-2.5].Tz[-3.3].n];
PdI = T3D[PosI1.Ty[-2.5].Tz[0].n];
PeI = T3D[PosI1.Ty[-3.0].Tz[3.3].n];
PfI = T3D[PosI1.Ty[-4.5].Tz[8.3].n];
PgI = T3D[PosI1.Ty[-5.0].Tz[9.5].n];
PhI = T3D[PosI1.Ty[-5.0].Tz[13.3].n];
PiI = T3D[PosI1.Ty[-3.7].Tz[16.6].n];
PjI = T3D[PosI1.Ty[-2.5].Tz[20.0].n];
PkI = T3D[PosI1.Ty[-1.2].Tz[23.3].n];
PlI = T3D[PosI1.Ty[0].Tz[23.3].n];
PmI = T3D[PosI1.Ty[1.2].Tz[23.3].n];
PnI = T3D[PosI1.Ty[2.5].Tz[22.0].n];
PoI = T3D[PosI1.Ty[3.7].Tz[20.0].n];
PpI = T3D[PosI1.Ty[5.0].Tz[16.6].n];
PqI = T3D[PosI1.Ty[5.0].Tz[13.3].n];
PrI = T3D[PosI1.Ty[2.5].Tz[8.3].n];
PsI = T3D[PosI1.Ty[2.5].Tz[3.3].n];
PtI = T3D[PosI1.Ty[3.0].Tz[0].n];
PuI = T3D[PosI1.Ty[2.5].Tz[-3.3].n];
PvI = T3D[PosI1.Ty[1.2].Tz[-6.6].n];
(*articulaciones derechas*)
P11A1 = T3D[T10B.Tz[2.5].n];
P11A2 = T3D[T10B.Tz[-2.5].n];
P12A1 = T3D[T11B.Tz[2.5].n];
P12A2 = T3D[T11B.Tz[-2.5].n];
P13A1 = T3D[T12B.Tz[2.5].n];
P13A2 = T3D[T12B.Tz[-2.5].n];
P14A1 = T3D[T13B.Tz[2.5].n];
P14A2 = T3D[T13B.Tz[-2.5].n];
P15A1 = T3D[T14B.Tz[2.5].n];
P15A2 = T3D[T14B.Tz[-2.5].n];
(*articulaciones izquierdas*)
P21A1 = T3D[T20B.Tz[2.5].n];
P21A2 = T3D[T20B.Tz[-2.5].n];
P22A1 = T3D[T21B.Tz[2.5].n];
P22A2 = T3D[T21B.Tz[-2.5].n];
P23A1 = T3D[T22B.Tz[2.5].n];
P23A2 = T3D[T22B.Tz[-2.5].n];
P24A1 = T3D[T23B.Tz[2.5].n];
P24A2 = T3D[T23B.Tz[-2.5].n];
P25A1 = T3D[T24B.Tz[2.5].n];
P25A2 = T3D[T24B.Tz[-2.5].n];
(*ejes*)
P0x = T3D[TB0.Tx[15].n];
P0y = T3D[TB0.Ty[15].n];
P0z = T3D[TB0.Tz[15].n];
P10x = T3D[T10B.Tx[15].n];
P10y = T3D[T10B.Ty[15].n];
P10z = T3D[T10B.Tz[15].n];

```



```

P11x = T3D[T11B.Tx[15].n];
P11y = T3D[T11B.Ty[15].n];
P11z = T3D[T11B.Tz[15].n];
P12x = T3D[T12B.Tx[15].n];
P12y = T3D[T12B.Ty[15].n];
P12z = T3D[T12B.Tz[15].n];
P13x = T3D[T13B.Tx[15].n];
P13y = T3D[T13B.Ty[15].n];
P13z = T3D[T13B.Tz[15].n];
P14x = T3D[T14B.Tx[15].n];
P14y = T3D[T14B.Ty[15].n];
P14z = T3D[T14B.Tz[15].n];
PDx = T3D[TDB.Tx[15].n];
PDy = T3D[TDB.Ty[15].n];
PDz = T3D[TDB.Tz[15].n];
P20x = T3D[T20B.Tx[15].n];
P20y = T3D[T20B.Ty[15].n];
P20z = T3D[T20B.Tz[15].n];
P21x = T3D[T21B.Tx[15].n];
P21y = T3D[T21B.Ty[15].n];
P21z = T3D[T21B.Tz[15].n];
P22x = T3D[T22B.Tx[15].n];
P22y = T3D[T22B.Ty[15].n];
P22z = T3D[T22B.Tz[15].n];
P23x = T3D[T23B.Tx[15].n];
P23y = T3D[T23B.Ty[15].n];
P23z = T3D[T23B.Tz[15].n];
P24x = T3D[T24B.Tx[15].n];
P24y = T3D[T24B.Ty[15].n];
P24z = T3D[T24B.Tz[15].n];
PIx = T3D[TIB.Tx[15].n];
PIy = T3D[TIB.Ty[15].n];
PIz = T3D[TIB.Tz[15].n];
(*LINEAS TRAZADAS*)
(*Pierna Derecha*)
Cero = {0, 0, 0};
Linea10 = Tube[{P0, P11}, 1.6] /. SolPosD[t][[2]];
Linea11 = Tube[{P11, P12}, 1.4] /. SolPosD[t][[2]];
Linea12 = Tube[{P12, P13}, 1.4] /. SolPosD[t][[2]];
Linea13 = Cone[{P13, P14}, 1.2] /. SolPosD[t][[2]];
Linea14 = Tube[{P14, P15}, 1.0] /. SolPosD[t][[2]];
Linea15 = Tube[{P15, PD}, 0.8] /. SolPosD[t][[2]];

(*Pierna Izquierda*)
Linea20 =
  Tube[{P0, P21}, 1.6] /. {θ21 → ecaderaAArI[t], θ22 → ecaderaFErI[t], θ23 → erodillarI[t]};
Linea21 = Tube[{P21, P22}, 1.4] /.
  {θ21 → ecaderaAArI[t], θ22 → ecaderaFErI[t], θ23 → erodillarI[t]};
Linea22 = Tube[{P22, P23}, 1.4] /. {θ21 → ecaderaAArI[t],
  θ22 → ecaderaFErI[t], θ23 → erodillarI[t]};
Linea23 = Cone[{P23, P24}, 1.2] /. {θ21 → ecaderaAArI[t],

```



```

    e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
Linea24 = Tube[{P24, P25}, 1.0] /. {e21 → ecaderaAArI[t],
    e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
Linea25 = Tube[{P25, PI}, 0.8] /. {e21 → ecaderaAArI[t],
    e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];

(*ARTICULACIONES*)
(*articulaciones derecha*)
Cilindro11 = Cylinder[{P11A1, P11A2}, 1] /. SolPosD[t][[2]];
Cilindro12 = Cylinder[{P12A1, P12A2}, 1] /. SolPosD[t][[2]];
Cilindro13 = Cylinder[{P13A1, P13A2}, 1] /. SolPosD[t][[2]];
Cilindro14 = Cylinder[{P14A1, P14A2}, 1] /. SolPosD[t][[2]];
Cilindro15 = Cylinder[{P15A1, P15A2}, 1] /. SolPosD[t][[2]];
(*articulaciones izquierda*)
Cilindro21 =
  Cylinder[{P21A1, P21A2}, 1] /. {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
Cilindro22 = Cylinder[{P22A1, P22A2}, 1] /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
Cilindro23 = Cylinder[{P23A1, P23A2}, 1] /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
Cilindro24 = Cylinder[{P24A1, P24A2}, 1] /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
Cilindro25 = Cylinder[{P25A1, P25A2}, 1] /.
  {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];
(*pie derecho*)
Poligono1 = Polygon[{PaD, PbD, PcD, PdD, PeD, PfD, PgD, PhD, PiD, PjD,
  PKD, PlD, PmD, PnD, PoD, PpD, PqD, PrD, PsD, PtD, PuD, Pvd}] /. SolPosD[t][[2]];
(*pie izquierdo*)
Poligono2 =
  Polygon[{PaI, PbI, PcI, PdI, PeI, PfI, PGI, PhI, PiI, PjI, PkI, PlI, PmI, PnI, PoI, PpI, PqI, PrI,
  PsI, PtI, PuI, PvI}] /. {e21 → ecaderaAArI[t], e22 → ecaderaFErI[t], e23 → erodillarI[t]];

(*EJES*)
Flecha0x = Arrow[{P0, P0x}];
Flecha0y = Arrow[{P0, P0y}];
Flecha0z = Arrow[{P0, P0z}];
Flecha10x = Arrow[{P11, P10x}];
Flecha10y = Arrow[{P11, P10y}];
Flecha10z = Arrow[{P11, P10z}];
Flecha11x = Arrow[{P12, P11x}];
Flecha11y = Arrow[{P12, P11y}];
Flecha11z = Arrow[{P12, P11z}];
Flecha12x = Arrow[{P13, P12x}];
Flecha12y = Arrow[{P13, P12y}];
Flecha12z = Arrow[{P13, P12z}];
Flecha13x = Arrow[{P14, P13x}];
Flecha13y = Arrow[{P14, P13y}];
Flecha13z = Arrow[{P14, P13z}];
Flecha14x = Arrow[{P15, P14x}];
Flecha14y = Arrow[{P15, P14y}];
Flecha14z = Arrow[{P15, P14z}];

```



```

FlechaDx = Arrow[{PD, PDx}];
FlechaDy = Arrow[{PD, PDy}];
FlechaDz = Arrow[{PD, PDz}];
Flecha20x = Arrow[{P21, P20x}];
Flecha20y = Arrow[{P21, P20y}];
Flecha20z = Arrow[{P21, P20z}];
Flecha21x = Arrow[{P22, P21x}];
Flecha21y = Arrow[{P22, P21y}];
Flecha21z = Arrow[{P22, P21z}];
Flecha22x = Arrow[{P23, P22x}];
Flecha22y = Arrow[{P23, P22y}];
Flecha22z = Arrow[{P23, P22z}];
Flecha23x = Arrow[{P24, P23x}];
Flecha23y = Arrow[{P24, P23y}];
Flecha23z = Arrow[{P24, P23z}];
Flecha24x = Arrow[{P25, P24x}];
Flecha24y = Arrow[{P25, P24y}];
Flecha24z = Arrow[{P25, P24z}];
FlechaIx = Arrow[{PI, PIx}];
FlechaIy = Arrow[{PI, PIy}];
FlechaIz = Arrow[{PI, PIz}];
(*BARRAS PARA REPRESENTAR LOS ESLABONES Y ARTICULACIONES*)
Eslabon10 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea10];
Eslabon11 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea11];
Eslabon12 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea12];
Eslabon13 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea13];
Eslabon14 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea14];
Eslabon15 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea15];

Eslabon20 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea20];
Eslabon21 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea21];
Eslabon22 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea22];
Eslabon23 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea23];
Eslabon24 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea24];
Eslabon25 = Barra[3, GrayLevel[0.486275], Linea25];

Articulacion11 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro11];
Articulacion12 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro12];
Articulacion13 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro13];
Articulacion14 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro14];
Articulacion15 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro15];

Articulacion21 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro21];
Articulacion22 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro22];
Articulacion23 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro23];
Articulacion24 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro24];
Articulacion25 = Barra[1, RGBColor[0, 0, 1], Cilindro25];

PieD = PlantaPie[GrayLevel[0.486275], Poligono1];

```



```

PieI = PlantaPie[GrayLevel[0.486275], Poligono2];

EjeX =
Graphics3D[{AbsoluteThickness[1.5], RGBColor[0, 0.501961, 1], Arrow[{Cero, {25, 0, 0}}]}];
EjeY = Graphics3D[{AbsoluteThickness[1.5], RGBColor[1, 0, 0], Arrow[{Cero, {0, 25, 0}}]}];
EjeZ = Graphics3D[
{AbsoluteThickness[1.5], RGBColor[0.654902, 0.309804, 1], Arrow[{Cero, {0, 0, 25}}]}];
Centro = Graphics3D[{Blue, Sphere[{0, 0, d0}, 10]}];
(*Ejes locales*)
EjeX0 = Ejex[Flecha0x];
EjeY0 = Ejey[Flecha0y];
EjeZ0 = Ejez[Flecha0z];
EjeX10 = Ejex[Flecha10x];
EjeY10 = Ejey[Flecha10y];
EjeZ10 = Ejez[Flecha10z];
EjeX11 = Ejex[Flecha11x];
EjeY11 = Ejey[Flecha11y];
EjeZ11 = Ejez[Flecha11z];
EjeX12 = Ejex[Flecha12x];
EjeY12 = Ejey[Flecha12y];
EjeZ12 = Ejez[Flecha12z];
EjeX13 = Ejex[Flecha13x];
EjeY13 = Ejey[Flecha13y];
EjeZ13 = Ejez[Flecha13z];
EjeX14 = Ejex[Flecha14x];
EjeY14 = Ejey[Flecha14y];
EjeZ14 = Ejez[Flecha14z];
EjeXD = Ejex[FlechaDx];
EjeYD = Ejey[FlechaDy];
EjeZD = Ejez[FlechaDz];
EjeX20 = Ejex[Flecha20x];
EjeY20 = Ejey[Flecha20y];
EjeZ20 = Ejez[Flecha20z];
EjeX21 = Ejex[Flecha21x];
EjeY21 = Ejey[Flecha21y];
EjeZ21 = Ejez[Flecha21z];
EjeX22 = Ejex[Flecha22x];
EjeY22 = Ejey[Flecha22y];
EjeZ22 = Ejez[Flecha22z];
EjeX23 = Ejex[Flecha23x];
EjeY23 = Ejey[Flecha23y];
EjeZ23 = Ejez[Flecha23z];
EjeX24 = Ejex[Flecha24x];
EjeY24 = Ejey[Flecha24y];
EjeZ24 = Ejez[Flecha24z];
EjeXI = Ejex[FlechaIx];
EjeYI = Ejey[FlechaIy];
EjeZI = Ejez[FlechaIz];

TrayectoriaD = Barra[3, Blue, Line[TablaD]];

```



```
SimulaDirectaInversa[t] = Show[Eslabon10, Eslabon11, Eslabon12, Eslabon13, Eslabon14,  
    Eslabon15, PieD, Eslabon20, Eslabon21, Eslabon22, Eslabon23, Eslabon24, Eslabon25,  
    PieI, Articulacion11, Articulacion12, Articulacion13, Articulacion14, Articulacion15,  
    Articulacion21, Articulacion22, Articulacion23, Articulacion24, Articulacion25, TrayectoriaD,  
    TrayectoriaObtenidaPieI, TrayectoriaObtenidaRodillaI, TrayectoriaGeneradaRodillaD, Axes → True,  
    AxesLabel → {"X [cm]", "Y [cm]", "Z [cm]"}, BaseStyle → {Large, 12, FontFamily → "Times"},  
    PlotRange → {{-70, 70}, {-60, 60}, {-5, 120}}, (*ViewVertical → {0, 0, 1}, *)  
    ViewPoint → {Infinity, 0, 0} (*, ViewPoint → {0, -Infinity, 0} *)], Boxed → False]
```

Exportación Directa e Inversa \*.avi



## Glosario

**Alteración vascular:** Cambio en la forma como fluye la sangre a través de los vasos sanguíneos del cuerpo humano.

**Biocompatible:** Se describe como la cualidad que tiene un biomaterial de generar una respuesta biológica aceptable durante el tiempo y modo de contacto de una aplicación específica. La ausencia de rechazo de un implante o de un dispositivo por parte del organismo implica una aceptación tanto biológica, como química y mecánica

**Biomaterial:** Un material diseñado para interactuar con sistemas biológicos con el fin de evaluar, tratar, sostener, aumentar o reemplazar algún tejido, órgano o función del cuerpo.

**Exoesqueleto:** Es un armazón externo. Un exoesqueleto sostiene al cuerpo desde afuera mientras que el esqueleto humano sostiene al cuerpo desde adentro. Los exoesqueletos usualmente son diseñados para apoyar y asistir los movimientos y/o aumentar las capacidades del cuerpo humano.

**Lesión medular:** La lesión de médula espinal o mielopatía, es una alteración de la médula espinal que puede provocar una pérdida de sensibilidad y/o de movilidad. Las dos principales causas de lesión medular son por traumas o enfermedades. Una lesión en la médula espinal ocurre cuando ésta se comprime o al obstruir su flujo sanguíneo.

Esto ocurre cuando se fractura una o más vértebras o cuando las vértebras se deslizan una hacia las otras apretando así la médula espinal.

**Órtesis:** Es un apoyo u otro dispositivo externo aplicado al cuerpo para modificar los aspectos funcionales o estructurales del sistema neuromusculoesquelético.

**Paraplejia:** Parálisis de ambas piernas. Cuando se dice que es completa se refiere a la pérdida total tanto de movimiento como de sensibilidad.



# BIBLIOGRAFÍA O REFERENCIAS

- [1] H. Kazerooni and R. Steger, "The Berkeley Lower Extremity Exoskeleton," *Springer Tracts in Advanced Robotics*, vol. 25, 2006.
- [2] H. Kazerooni, J. Racine , L. Huang and R. Steger, "On the Control of the Berkeley Lower Extremity Exoskeleton," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005.
- [3] B. Weinberg, J. Nikitzuk, S. Patel , B. Patritti, C. Mavroidis, P. Bonato and P. Canavan, "Design, control and human testing of an active knee rehabilitation orthotic device," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007.
- [4] F. C. T. Van der Helm y A. Schiele, «Kinematic design to improve ergonomics in human machine interaction,» *IEEE Transactions on neural systems and rehabilitation engineering*, vol. 14, nº 4, pp. 456-469, 2006.
- [5] R. Pérez, S. Martín del Campo, S. Renán and S. Durán, "Aspectos epidemiológicos de la lesión medular de la población del Centro Nacional de Rehabilitación," *Revista Mexicana de Medicina Física y Rehabilitación*, vol. 20, no. 3-4, pp. 74-82, 2008.
- [6] V. Dietz y S. J. Herkema, «Locomotor activity in spinal cord-injured persons,» *J. Appl. Physiol.*, vol. 96, pp. 1954-1960, 2004.
- [7] J. M. Hidler y A. E. Wall, «Alterations in muscle activation patterns during robotic-assisted walking,» *Clin. Biomech*, vol. 20, pp. 184-193, 2005.
- [8] G. Colombo, M. Joerg, V. Diez y R. Schreier, «Treadmill training of paraplegic patients using a robotic orthosis,» *J. Rehabil. Res. Develop.*, vol. 37, nº 6, pp. 693-700, 2000.
- [9] A. Chu, H. Kazerooni y A. Zoss, «On the biomimetic design of the Berkeley Lower Extremity Exoskeleton,» *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, April 2005.





- [10] A. Zoss, H. Kazerooni and A. Chu, "On the mechanical design of the Berkeley Lower Extremity Exoskeleton," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005 August 2005.
- [11] H. Kazerooni, "Exoskeletons for Human Power Augmentation," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [12] F. Soucy, K. Bilodeau, N. Zoso, J. Baptista and J. Grenier, "Exoskeleton structure that provides force assistance to the user". U.S. Patent US2019336385 (A1), 07 noviembre 2019.
- [13] C. Walsh, *Biomimetic design of an under-actuated leg exoskeleton for load-carrying augmentation*, Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [14] C. Walsh, D. Paluska, K. Pasch, W. Grand, A. Valiente and H. Herr, "Development of a lightweight, underactuated exoskeleton for load-carrying augmentation," *IEEE International Conference on Robotics And Automation*, 2006.
- [15] J. Chen and W. Liao, "A leg exoskeleton utilizing a magnetorheological actuator," *IEEE International Conference On Robotics And Biomimetics*, 2006.
- [16] J. Brutovský and D. Novák D, "Low-cost motivated rehabilitation system for post-operation exercises," *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBS) 28th Annual International Conference of the IEEE*, 2006.
- [17] E. Singla, B. Dasgupta, K. Kondak, C. Fleischer and G. Hommel, "Optimal design of an exoskeleton hip using three-degrees-of-freedom spherical mechanism," in *ISR/ROBOTIK 2006 - Joint conference on robotics*, München, 2006.
- [18] M. Urdaniz , M. Ortiz , A. Bonardi and G. Gentiletti, "Diseño y Simulación de una Órtesis Robótica para Rehabilitación de la Marcha," *XVII Congreso Argentino de Bioingeniería*, 2009.
- [19] K. Seo, J. Lee and Y. Park, "Autonomous hip exoskeleton saves metabolic cost of walking uphill.," in *IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics*, London, 2017.
- [20] J. Jang, K. Kim, J. Lee, B. Lim and Y. Shim, "Assistance strategy for stair ascent with a robotic hip exoskeleton," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems*, Daejeon, South Korea, 2016.



- [21] F. Giovacchini, F. Vannetti, M. Fantozzi, M. Cempini, M. Cortese, A. Parri, T. Yan, D. Lefeber and N. Vitiello, "A light-weight active orthosis for hip movement assistance," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 73, pp. 123-134, 2015.
- [22] Q. Wu, X. Wang, F. Du and X. Zhang, "Design and Control of a Powered Hip Exoskeleton for Walking Assistance," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 12, pp. 1-11, 2015.
- [23] T. Zhang, M. Tran and H. H. Huang, "NREL-Exo: A 4-DoFs wearable hip exoskeleton for walking and balance assistance in locomotion," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vancouver, BC, pp. 508-513, 2017.
- [24] J. Pons, J. Moreno, F. Brunetti and E. Rocon, *Lower-Limb Wearable Exoskeleton. Rehabilitation Robotics*, I-Tech Education and Publishing, 2007, pp. 471-498.
- [25] J. Veneman, R. Kruidhof, E. Hekman, R. Ekkelenkamp, E. Van Asseldonk and H. Van der Kooij, "Design and evaluation of the LOPES exoskeleton robot for interactive gait rehabilitation," *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 2007.
- [26] O. Unluhisarcikli, C. Mavroidis, P. Bonato, M. Pietrusisnki and B. Weinberg, "Lower extremity exoskeleton for gait retraining". US Patent US 9,198,821 B2, 1 December 2015.
- [27] A. Valiente, *Design of a quasi-passive parallel leg exoskeleton to augment load carrying for walking.*, Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [28] E. Rosero, *Diseño y Construcción de una Máquina de Movimiento Pasivo Continuo para la Terapia de Rodilla*, Universidad del Valle, 2001.
- [29] G. Colombo, M. Joerg and V. Diez, "Driven gait orthosis to do locomotor training of paraplegic patients," in *22 Annu. EMBS Conf.*, Chicago, IL, 2000.
- [30] K. Halvorsen, M. Lesser and A. Lundberg, "A new method for estimating the axis of rotation and the center of rotation," *Journal of Biomechanics*, no. 32, pp. 1221-1227, 1999.
- [31] O. Narváez Aroche, *Modelos Cinemático y Dinámico de un Robot Bípedo de Doce Grados de Libertad Internos*, México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2010.



- [32] I. A. Kapandji, *Funktionelle Anatomie der Gelenke: schematisierte und kommentierte Zeichnungen zur menschlichen Biomechanik ; einbändige Ausgabe - obere Extremität, untere Extremität, Rumpf und Wirbelsäule*, Alemania: Thieme, 2006.
- [33] S. Hesse and D. Uhlenbrock, "A mechanized gait trainer for restoration," *J. Rehabil. Res. Develop.*, vol. 37, no. 6, pp. 701-708, 2000.
- [34] M. Spong, S. Hutchinson y M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, First ed., John Wiley and Sons, INC.
- [35] M. A. Lazcano, M. A. Lugo, S. G. Quintana, J. V. Núñez and U. Zaldívar, "Análisis y diseño de un robot de tipo exoesqueleto para rehabilitación de antebrazo y muñeca," *XV COMROB Facultad de Electromecánica, Universidad de Colima*, pp. 1-6, 2013.
- [36] G. M. Vázquez S., "Control de posición de cadera-rodilla para una órtesis de miembro inferior," Ciudad de México, 2012, p. 26.
- [37] K. R. Morales Yera, M. A. Doñu Ruiz, N. López Perrusquia and C. R. Torres San Miguel, "Diseño mecánico de un exoesqueleto para reahabilitación de miembro inferior," *Academia*, pp. 3-6.
- [38] J. Böhm, J. Hefele and D. Fritsh, "Towards On-line Pose Measurement for Robots," *Academia*, pp. 1-7, 2001.
- [39] R. Baker and J. Rodda, "All you ever wanted to know about the conventional gait model but were afraid to ask," Hugh Williamson Gait Laboratory, 2003.
- [40] S. K. Agrawal y S. F. A. Banala, «A gravity balancing passive exoskeleton for the human leg.,» *Proceeding of Robotics: Science and systems*, August 2006.
- [41] M. Dollar, Aaron and H. Herr, "Design of a quasi-passive knee exoskeleton to assist running".

